

تمرین: اگر $(1 + \sqrt{2})^6 + (1 - \sqrt{2})^6 = 198$ ، جزء صحیح عدد $(1 + \sqrt{2})^6$ کدام است؟

۱۹۸ (۴)

۱۹۷ (۳)

۱۹۶ (۲)

۱۹۵ (۱)

تمرین: اگر $[x - 2] = 1$ باشد، نمودارهای دو تابع $f(x) = |x - 3| - |x - 4|$ و $g(x) = 2x^2 + x - 17$ در چند نقطه مشترک هستند؟

فاقد نقطه‌ی مشترک (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

تمرین: دامنه و برد تابع $f(x) = \frac{x - [x]}{\sqrt{[x] + [-x] + 1}}$ ، کدام است؟

 $D_f = \mathbb{Z}, R_f = \{0\}$ (۲) $D_f = \mathbb{R} - \mathbb{N}, R_f = [0, 1)$ (۴) $D_f = \mathbb{N}, R_f = \{0\}$ (۱) $D_f = \mathbb{R} - \mathbb{Z}, R_f = [0, 1)$ (۳)

$$D_f: \mathbb{Z}$$

$$[x] + [-x] = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Z} \\ -1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$f(x \in \mathbb{Z}) = \frac{x - [x] = x - x = 0}{\sqrt{[x] + [-x] + 1} = \sqrt{0 + 1} = 1} = 0$$

$$R_f: \{0\}$$

کدام نیست

$$\sqrt{[x] + [-x] + 1} = \sqrt{0 + 1} = 1$$

نمودار: تقاطع به طول مجموع اودی محور x ها

تمرین: حاصل عبارت $\left[\frac{x-1}{2}\right] + \left[\frac{3-x}{2}\right]$ چه عددی می‌تواند باشد؟

۱ و ۲ (۴) **پاسخ:** گزینیه «۱» صحیح است.

-۲ و -۱ (۳)

صفر و -۱ (۲)

صفر و ۱ (۱)

توجه کنید: $f(0) = 0$ یا $f(1) = 1$ **پاسخ:** گزینیه «۱» صحیح است.

عبارت را ساده می‌کنیم و از خاصیت‌ها استفاده می‌کنیم:

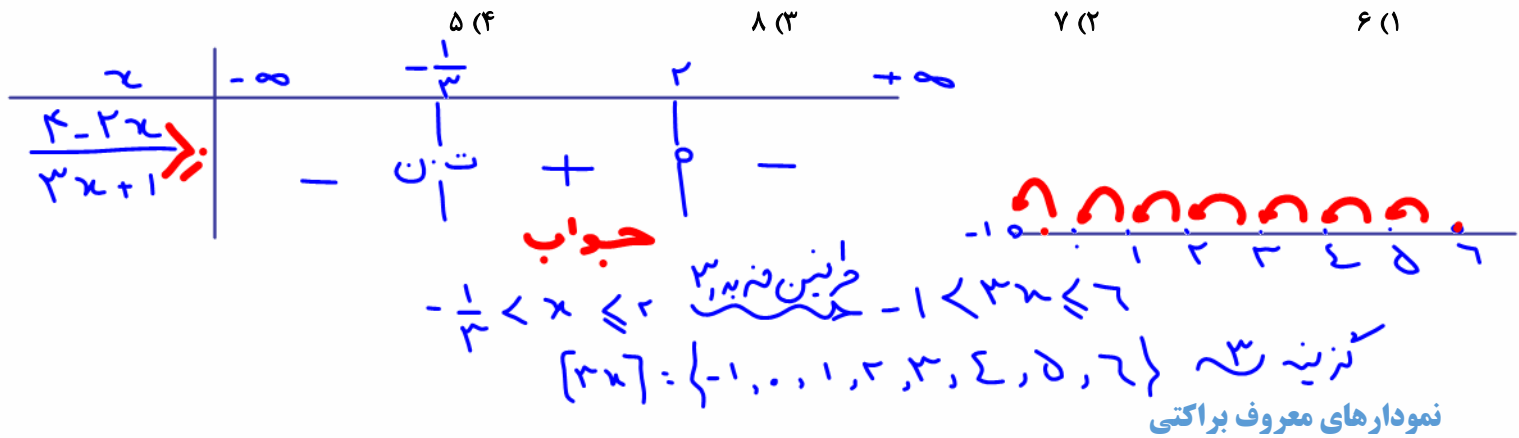
$$\left[\frac{x-1}{2}\right] + \left[\frac{3-x}{2}\right] = \left[\frac{x-1}{2}\right] + \left[\frac{2+1-x}{2}\right] = \left[\frac{x-1}{2}\right] + \left[\frac{1-x}{2} + 1\right] = \left[\frac{x-1}{2}\right] + \left[\frac{1-x}{2}\right] + 1$$

$$\underbrace{\left[\frac{x-1}{2}\right] + \left[\frac{1-x}{2}\right]}_{\text{صفر یا -۱}} + 1 = 1 \text{ یا صفر}$$

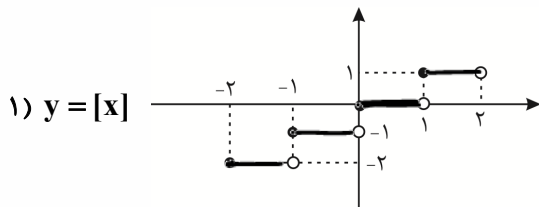
$$[u] + [-u] = \begin{cases} 0 & u \in \mathbb{Z} \\ -1 & u \notin \mathbb{Z} \end{cases} \text{ چون}$$

(تجربی ۱۴۰۱)

تعریف: اگر $\frac{4-2x}{3x+1} \geq 0$ باشد، مجموعه مقادیر $[3x]$ چند عضو دارد؟



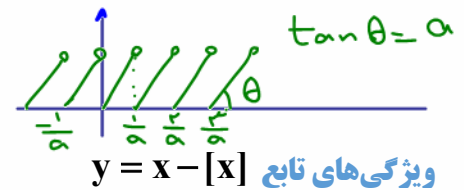
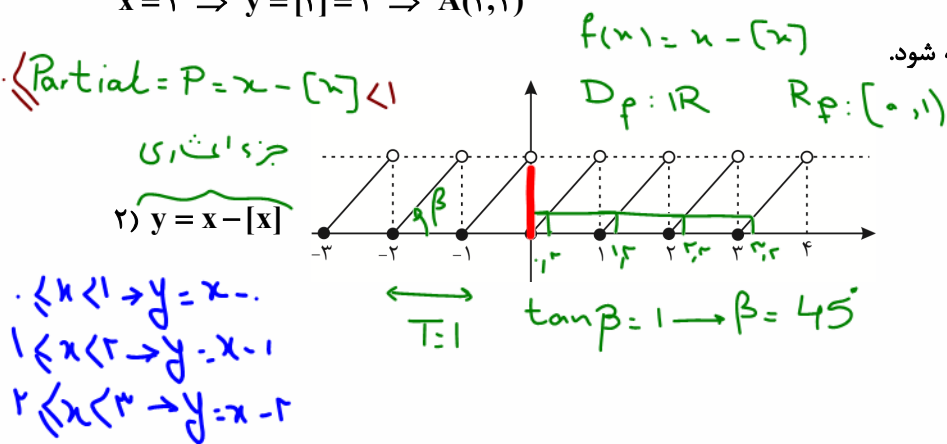
شکل های بسیار مهم توابع معروف براکتی (شامل جزء صحیح)



توجه کنید در تابع $y = [x]$ ، طول هر پله یک واحد است و نقاط سمت چپ همگی توپر می باشند. این جا به صورت دلخواه در بازه $[-2, 2)$ آن را رسم کردیم. اگر بازه به صورت $[-2, 2]$ باشد (یعنی انتهای بازه بسته باشد) نقطه $x = 2$ را جداگانه بررسی می کنیم و داریم:

$x = 2 \Rightarrow y = [2] = 2 \Rightarrow A(2, 2)$

و این یعنی به شکل بالا باید نقطه $A(2, 2)$ نیز اضافه شود.



(۱) دامنه $\mathbb{R}$

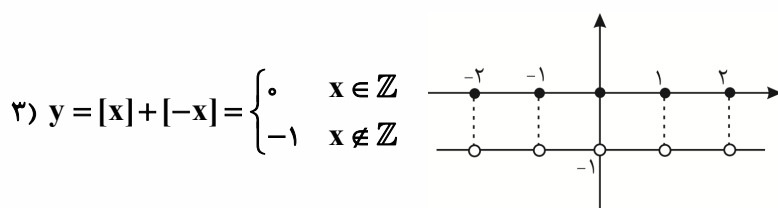
(۲) برد $[0, 1)$ یعنی: $0 \leq x - [x] < 1$

(۳) در نقاط $x \in \mathbb{Z}$ حد ندارد و ناپیوسته است ولی در سایر نقاط حد دارد و پیوسته است.

(۴) طول هر پله $\sqrt{2}$ واحد است.

(۵) متناوب است با دوره تناوب $T = 1$

در این جا به طور دلخواه آن را در بازه $[-3, 4)$ رسم کردیم.



ویژگی‌های تابع $y = [x] + [-x]$

(۱) دامنه $\mathbb{R}$

(۲) برد دو عضوی $\{-1, 0\}$

(۳) در نقاط $x \in \mathbb{Z}$ ناپیوسته است.

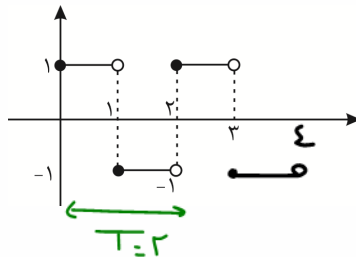
(۴) در تمام نقاط دارای حد -1 است یعنی $\lim_{x \rightarrow a} [x] + [-x] = -1$

(۵) متناوب است با دوره تناوب $T = 1$.

(۶) نمودار به ازای اعداد صحیح صفر می‌شود و ریشه می‌دهد و به ازای سایر اعداد، -1 می‌شود.

۴) $y = (-1)^{[x]}$

$0 \leq x < 3$



ویژگی‌های $y = (-1)^{[x]}$

در این جا به طور مثال در بازه $[0, 3)$ رسمش کردیم.

(۱) دامنه $\mathbb{R}$

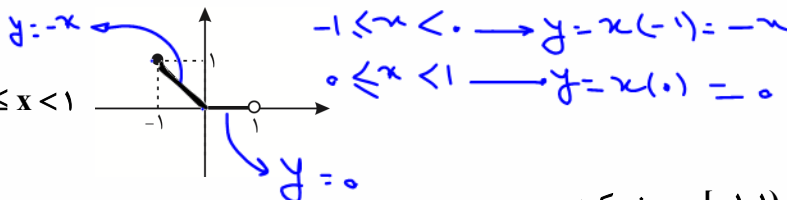
(۲) برد دو عضوی $\{-1, 1\}$

(۳) در نقاط $x \in \mathbb{Z}$ حد ندارد و ناپیوسته است.

(۴) متناوب است با دوره تناوب $T = 2$.

۵) $y = x[x]$

$-1 \leq x < 1$



در این جا به طور مثال در بازه $[-1, 1)$ رسمش کردیم.

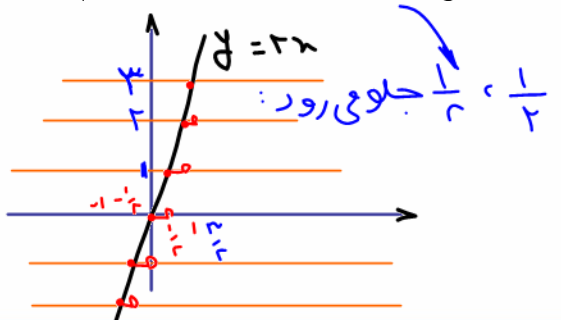
توجه کنید نقطه $x = 0$ برای این تابع، نقطه گوشه به حساب می‌آید.

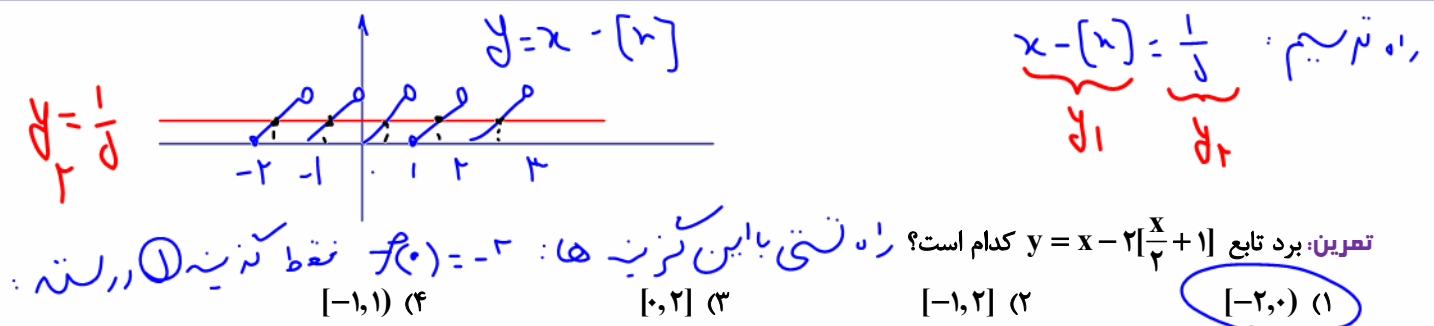
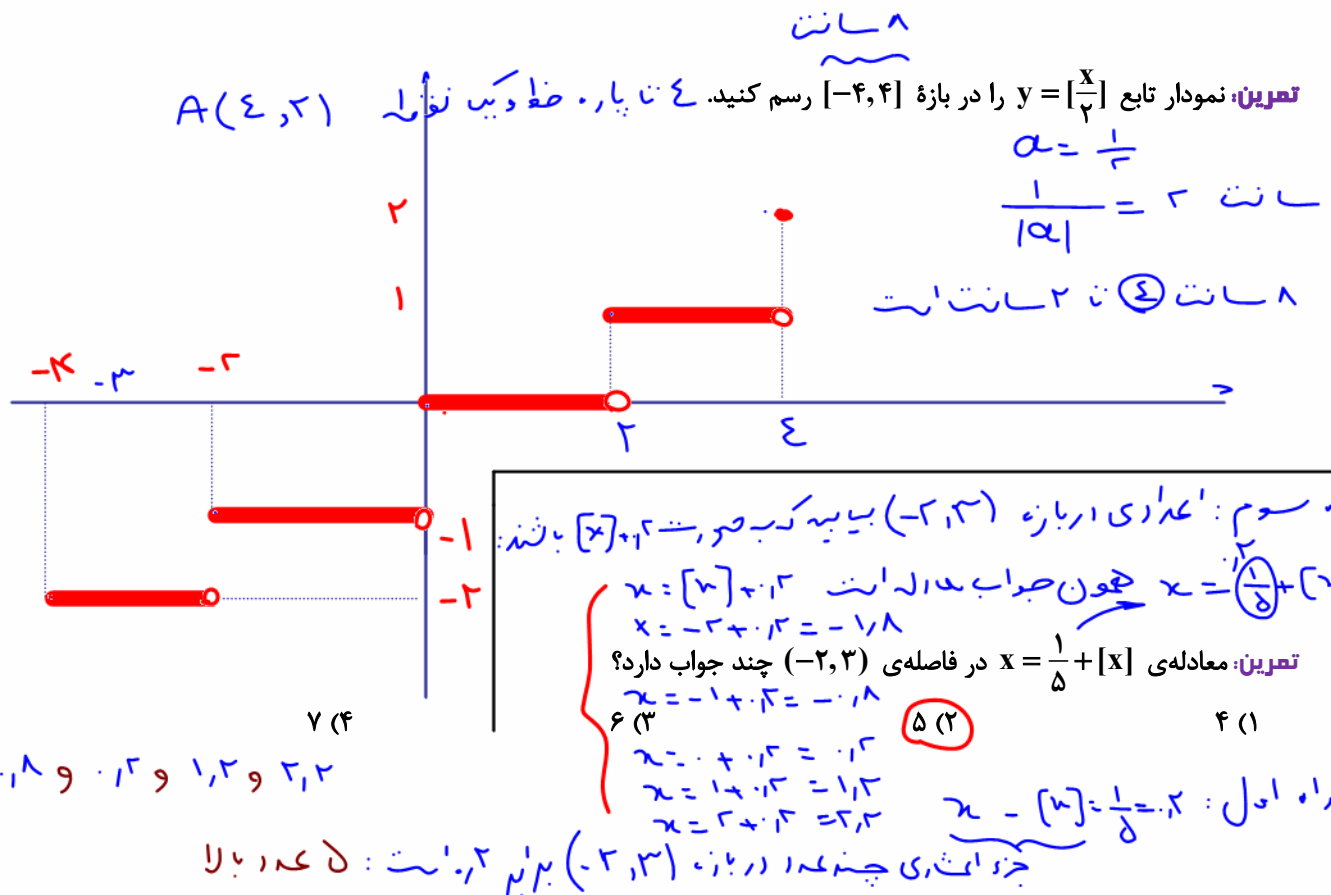
رسم نمودار $y = [ax]$

تابع $y = [ax]$ از روی تابع $y = [x]$ رسم می‌شود. فقط توجه کنید که طول هر پله $\frac{1}{|a|}$ برابر می‌شود. مثلاً در رسم $y = [\frac{x}{2}]$ که

$a = \frac{1}{2}$ است طول پله‌ها $\frac{1}{2}$ برابر و در رسم $y = [2x]$ که $a = 2$ است طول پله‌ها $\frac{1}{2}$ برابر می‌شود.

تعبیر: تابع $y = [2x]$ را در بازه $[-1, 1)$ رسم کنید. تا پاره حفظ دارید:





تابع راب شکل چیزایی در بیار که قبلاً آید

$y = x - 2\left([\frac{x}{2}] + 1\right) = x - 2[\frac{x}{2}] - 2$

$y = 2\left(\frac{x}{2} - [\frac{x}{2}]\right) - 2$

$0 \leq u - [u] < 1$

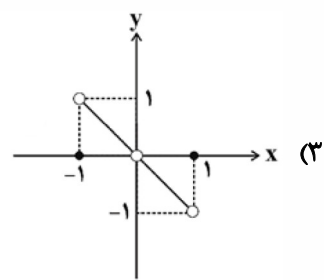
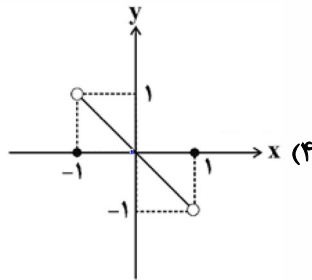
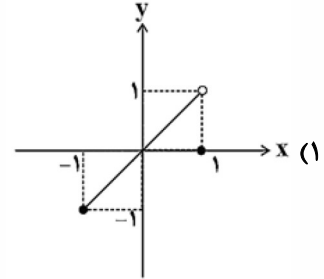
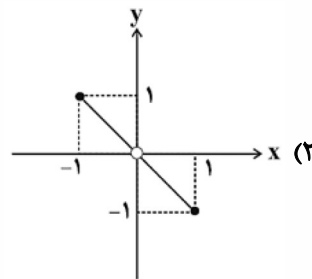
$0 \leq \frac{x}{2} - [\frac{x}{2}] < 1$

$-2 \leq 2\left(\frac{x}{2} - [\frac{x}{2}]\right) - 2 < 0$

$-2 \leq f(x) < 0$

نتیجه کت

تمرین: نمودار تابع $y = x([-x] + [x])$ با دامنه $-1 \leq x \leq 1$ کدام است؟ ([]، نماد جزء صحیح است.)



پاسخ: گزینه «۴» - راه حل اول: عددگذاری:

$$x = 1 \xrightarrow{\text{در ضابطه تابع قرار می‌دهیم}} y = 1([-1] + [1]) = 1 \times \underbrace{(-1 + 1)}_0 = 0.$$

$$x = 0 \Rightarrow y = 0.$$

$$x = -1 \Rightarrow y = 0.$$

یعنی تابع در سه نقطه دلخواهی که دادیم مقداری برابر با صفر دارد که این سه نقطه فقط در نمودار گزینه (۴) صدق می‌کند.

راه حل دوم:

$$y = [x] + [-x] = \begin{cases} -1 & x \notin \mathbb{Z} \\ 0 & x \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

نکته:

$$\begin{cases} -1 < x < 1 \xrightarrow[\substack{x \neq 0 \\ x \notin \mathbb{Z}}]{x \neq 0} y = -x \\ x = -1, 0, 1 \Rightarrow y = 0. \end{cases}$$

با توجه به نکته داریم:

تابع رسم شده در گزینه (۴) در نقاط $x = -1, 0, 1$ مقداری برابر با صفر دارد و در $-1 < x < 1$ برابر با $y = -x$ است.

(تجربی خارج)

تمرین: نمودار تابع $y = \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + 1$; $x \in [-2, 6)$ از چند پاره خط مساوی هم تشکیل شده است؟

۶ (۴)

۵ (۳)

۴ (۲)

۳ (۱)

تابع $y = \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + 1$ را در $x = -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ بررسی می‌کنیم. در $x = -2$ ، $y = 0$ ؛ در $x = -1$ ، $y = 0$ ؛ در $x = 0$ ، $y = 1$ ؛ در $x = 1$ ، $y = 1$ ؛ در $x = 2$ ، $y = 2$ ؛ در $x = 3$ ، $y = 2$ ؛ در $x = 4$ ، $y = 3$ ؛ در $x = 5$ ، $y = 3$ ؛ در $x = 6$ ، $y = 4$. بنابراین، تابع از ۳ پاره خط مساوی تشکیل شده است.

Homework

۱ در تابع $f(x) = [x + \frac{3}{4}] - [-x]$ مقدار $f(\frac{9}{4}) + f(-\frac{1}{4})$ کدام است؟

(۲) ۵

(۱) ۴

(۴) ۷

(۳) ۶

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۳۹۸

۲ در تابع $f(x) = 2[x] + [-x]$ مقدار $f(-\frac{1}{4}) + f(\frac{3}{4})$ کدام است؟

(۲) -۱

(۱) -۲

(۴) ۱

(۳) صفر

کنکور سراسری علوم انسانی خارج از کشور ۱۳۹۸

۳ اگر $f(x) = [1 - \frac{x}{2}]$ باشد، مقدار $f(\sqrt{2}) + f(-\frac{3}{4})$ کدام است؟

(۲) ۲

(۱) صفر

(۴) ۱

(۳) -۱

کنکور سراسری علوم انسانی خارج از کشور ۱۳۹۹

۴ ضابطه تابع $y = [-2x + |x|] + x$ در دامنه $-\frac{2}{3} < x < -\frac{1}{3}$ کدام است؟ ([] نماد جزء صحیح است)

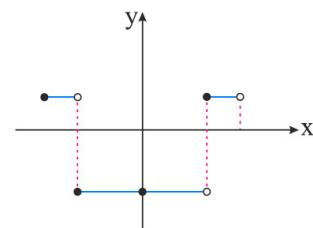
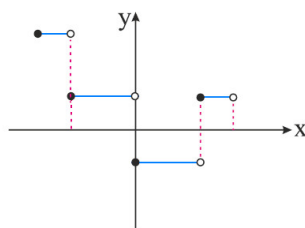
(۲) $x + 1$ (۱) $-2x$ (۴) $2x + \frac{1}{3}$ (۳) $x - 2$

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۴۰۰

۵ نمودار تابع $y = 2|[3x]| - 1$ به ازای $-\frac{1}{4} \leq x < \frac{1}{4}$ کدام است؟

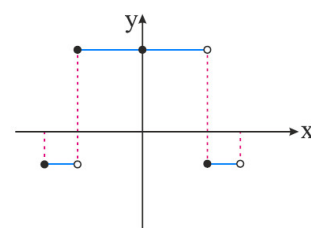
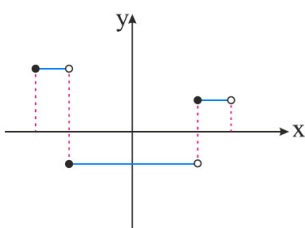
(۲)

(۱)



(۴)

(۳)



کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

۶ نمودار تابع $y = [x^2]$ ، روی بازه $(-2, 2)$ از چند پاره خط تشکیل شده است؟ (نماد $[]$ به مفهوم جزء صحیح است)

(۲) ۵

(۱) ۴

(۴) ۷

(۳) ۶

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۱

۷ دو تابع با ضابطه های $f(x) = [x] + [-x]$ و $g(x) = x^2 + x - 2$ مفروض اند. اگر $g(f(x)) = -2$ آنگاه مجموعه مقادیر x کدام است؟

(۲) $\mathbb{Z}$ (۱) $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$ (۴) $\emptyset$ (۳) $\mathbb{R}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۹

۸ اگر $x^2 + x < 0$ باشد، حاصل $[x^4] + [x^3] + [x^2] + [x]$ کدام است؟

(۲) -۱

(۱) -۲

(۴) ۱

(۳) صفر

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۸

۹ برای هر عدد طبیعی $n > 2$ حاصل $2[\sqrt{n^2 - 2n}] - [\sqrt{4n^2 - 3n + 1}]$ کدام است؟ (نماد $[]$ به مفهوم جزء صحیح است.)

(۲) ۲

(۱) ۱

(۴) ۴

(۳) ۳

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۱

۱۰ اگر $[x - 2] = 1$ باشد، نمودارهای دو تابع $f(x) = |x - 3| - |x - 4|$ و $g(x) = 2x^2 + x - 17$ در چند نقطه مشترک هستند؟

(۲) ۲

(۱) ۱

(۴) فاقد نقطه مشترک

(۳) ۳

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۷

پاسخ Homework

گزینه ۴

۱

$$f\left(\frac{9}{4}\right) = \left[\frac{9}{4} + \frac{3}{4}\right] - \left[-\frac{9}{4}\right] = \left[\frac{12}{4}\right] - \left[-\frac{9}{4}\right] = 3 - (-3) = 6$$

$$f\left(-\frac{1}{4}\right) = \left[-\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\right] - \left[+\frac{1}{4}\right] = [1] - \left[\frac{1}{4}\right] = 1 - 0 = 1$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{9}{4}\right) + f\left(-\frac{1}{4}\right) = 6 + 1 = 7$$

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۳۹۸

گزینه ۱

۲

اعداد داده شده را در ضابطه تابع قرار می‌دهیم:

$$f(x) = 2[x] + [-x]$$

$$\Rightarrow f\left(-\frac{1}{4}\right) + f\left(\frac{3}{4}\right) = (2\left[-\frac{1}{4}\right] + [-(-\frac{1}{4})]) + (2\left[\frac{3}{4}\right] + [-\frac{3}{4}])$$

$$-1 < -\frac{1}{4} < 0 \Rightarrow \left[-\frac{1}{4}\right] = -1, \quad 0 < \frac{1}{4} < 1 \Rightarrow \left[\frac{1}{4}\right] = 0$$

$$-2 < -\frac{3}{4} < -1 \Rightarrow \left[-\frac{3}{4}\right] = -2, \quad 1 < \frac{3}{4} < 2 \Rightarrow \left[\frac{3}{4}\right] = 1$$

$$\Rightarrow f\left(-\frac{1}{4}\right) + f\left(\frac{3}{4}\right) = (2 \times (-1) + 0) + (2 \times 1 + (-2)) = -2 + 0 = -2$$

کنکور سراسری علوم انسانی خارج از کشور ۱۳۹۸

گزینه ۴

۳

مقدار تابع را به ازای مقادیر خواسته شده محاسبه کرده و سپس مجموع را به دست می‌آوریم:

$$f(x) = \left[1 - \frac{x}{\sqrt{2}}\right] \Rightarrow f(\sqrt{2}) = \left[1 - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right] = 0$$

توجه کنید که:

$$1 < \sqrt{2} < 2 \Rightarrow \frac{1}{2} < \frac{\sqrt{2}}{2} < 1 \Rightarrow -1 < -\frac{\sqrt{2}}{2} < -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 0 < 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{1}{2} \Rightarrow \left[1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right] = 0$$

$$f\left(-\frac{3}{2}\right) = \left[1 - \frac{(-\frac{3}{2})}{\sqrt{2}}\right] = \left[1 + \frac{3}{2\sqrt{2}}\right] = \left[\frac{2}{2} + \frac{3}{2\sqrt{2}}\right] = \left[\frac{2}{2}\right] = 1$$

$$\Rightarrow f(\sqrt{2}) + f\left(-\frac{3}{2}\right) = 0 + 1 = 1$$

کنکور سراسری علوم انسانی خارج از کشور ۱۳۹۹

گزینه ۲

۴

روش اول: تشریحی

طبق تعریف تابع قدرمطلق، در فاصله $-\frac{1}{3} < x < -\frac{2}{3}$ تابع $|x| = -x$ است.

$$y = [-2x + (-x)] + x = [-3x] + x$$

برای تعیین $[-3x]$ باید محدوده تغییرات $-3x$ را مشخص کنیم.

$$-\frac{2}{3} < x < -\frac{1}{3} \xrightarrow{\times(-3)} 1 < -3x < 2 \Rightarrow [-3x] = 1$$

بنابراین ضابطه تابع در دامنه موردنظر به صورت زیر است:

$$y = [-2x + |x|] + x = [-3x] + x = 1 + x$$

روش دوم: تستی (عددگذاری)

عدد $x = -\frac{1}{4} = -0.25$ را که در دامنه تابع قرار دارد، در ضابطه تابع و هریک از گزینه‌ها جایگذاری می‌کنیم.

$$y = [-2(-0.25) + |-0.25|] + (-0.25) = [1 + 0.25] - 0.25 = 1$$

$$1 - 2(-0.25) = 1$$

$$2 - 0.25 + 1 = 2.75$$

$$3 - 0.25 - 2 = 0.75$$

$$4(-0.25) + \frac{1}{3} = -1 + \frac{1}{3} = -\frac{2}{3}$$

فقط مقدار به دست آمده از گزینه "۲" با مقدار تابع برابر است.

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۴۰۰

گزینه ۲

۵

$$-\frac{1}{2} \leq x < -\frac{1}{3} \Rightarrow -\frac{3}{2} \leq 3x < -1 \Rightarrow [3x] = -2 \Rightarrow y = 3$$

$$-\frac{1}{3} \leq x < 0 \Rightarrow -1 \leq 3x < 0 \Rightarrow [3x] = -1 \Rightarrow y = 1$$

$$0 \leq x < \frac{1}{3} \Rightarrow 0 \leq 3x < 1 \Rightarrow [3x] = 0 \Rightarrow y = -1$$

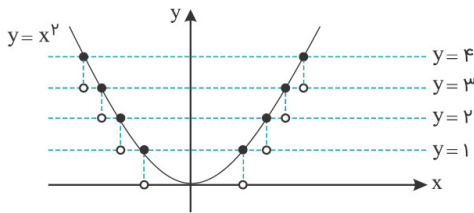
$$\frac{1}{3} \leq x < \frac{1}{2} \Rightarrow 1 \leq 3x < \frac{3}{2} \Rightarrow [3x] = 1 \Rightarrow y = 1$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

گزینه ۴

۶

اول نمودار تابع $y = x^2$ را در بازه $(-2, 2)$ رسم می کنیم. برای به دست آوردن نمودار تابع $y = [x^2]$ از روی نمودار تابع $y = x^2$ در بازه $(-2, 2)$ خطوطی به موازات محور x ها رسم کرده و قسمت هایی از نمودار که بین دو خط متوالی $y = k$ و $y = k + 1$ ($k \in \mathbb{Z}$) قرار می گیرند را بر روی خط $y = k$ تصویر می کنیم. در نهایت نقاط تلاقی خط و نمودار توپر خواهد شد.



با توجه به شکل، نمودار تابع $y = [x^2]$ در بازه $(-2, 2)$ از هفت پاره خط تشکیل شده است.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۱

گزینه ۳

۷

مقدار $[x] + [-x]$ برای اعداد صحیح و غیرصحیح متفاوت است. بنابراین حواستان باشد که برای $f(x)$ دو مقدار به دست می آید، یک مقدار به ازای $x \in \mathbb{Z}$ است و مقدار دیگر به ازای $x \notin \mathbb{Z}$. یعنی:

$$f(x) = [x] + [-x] = \begin{cases} 0 & ; x \in \mathbb{Z} \\ -1 & ; x \notin \mathbb{Z} (x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}) \end{cases}$$

ضابطه $g(f(x))$ را برای هر یک از این حالت ها تعیین می کنیم:

$$x \in \mathbb{Z} \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow g(f(x)) = g(0) \xrightarrow{g(x)=x^2+x-2} g(0) = 0 + 0 - 2 = -2$$

بنابراین به ازای $x \in \mathbb{Z}$ رابطه $g(f(x)) = -2$ برقرار است.

$$x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z} \Rightarrow f(x) = -1 \Rightarrow g(f(x)) = g(-1)$$

$$\xrightarrow{g(x)=x^2+x-2} g(-1) = (-1)^2 + (-1) - 2 = 1 - 1 - 2 = -2 \Rightarrow g(f(x)) = -2$$

پس رابطه $g(f(x)) = -2$ به ازای تمام x های صحیح و غیرصحیح یعنی به ازای $\mathbb{R}$ برقرار است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۹

گزینه ۱

۸

اگر $0 < x^2 + x < 0$ باشد، $-1 < x < 0$ خواهد بود، بنابراین:

$$\begin{aligned} -1 < x < 0 &\Rightarrow [x] = -1 \\ -1 < x < 0 &\Rightarrow 0 < x^2 < 1 \Rightarrow [x^2] = 0 \\ -1 < x < 0 &\Rightarrow -1 < x^3 < 0 \Rightarrow [x^3] = -1 \\ -1 < x < 0 &\Rightarrow 0 < x^4 < 1 \Rightarrow [x^4] = 0 \\ \Rightarrow [x] + [x^2] + [x^3] + [x^4] &= -1 + 0 - 1 + 0 = -2 \end{aligned}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۸

گزینه ۳

۹

بعضی از تست های جزء صحیح را با یک عددگذاری ساده می توانیم حل کنیم. حال این تست را به دو روش اصلی و عددگذاری حل می کنیم.
روش اول:
به ازای هر عدد طبیعی n داریم:

$$\begin{aligned} 4n^2 - 4n + 1 < 4n^2 - 3n + 1 < 4n^2 &\Rightarrow (2n-1)^2 < 4n^2 - 3n + 1 < (2n)^2 \\ \xrightarrow{\text{از نامعادله جذر می گیریم}} 2n-1 < \sqrt{4n^2 - 3n + 1} < 2n &\Rightarrow [\sqrt{4n^2 - 3n + 1}] = 2n-1 \end{aligned}$$

از طرف دیگر وقتی $n > 2$ باشد، رابطه زیر برقرار است:

$$\begin{aligned} n^2 - 4n + 4 < n^2 - 2n < n^2 - 2n + 1 &\Rightarrow (n-2)^2 < n^2 - 2n < (n-1)^2 \\ \xrightarrow{\text{از نامعادله جذر می گیریم}} n-2 < \sqrt{n^2 - 2n} < n-1 &\Rightarrow [\sqrt{n^2 - 2n}] = n-2 \end{aligned}$$

پس حاصل عبارت داده شده به ازای $n > 2$ برابر است با:

$$[\sqrt{4n^2 - 3n + 1}] - 2[\sqrt{n^2 - 2n}] = 2n-1 - 2(n-2) = 2n-1 - 2n+4 = 3$$

روش دوم (روش عددگذاری):

در صورت تست به این نکته اشاره شده که به ازای هر عدد طبیعی بزرگ تر از ۲ حاصل عبارت یکسان است، کافی است یک عدد طبیعی بزرگ تر از ۲ را انتخاب کرده و حاصل عبارت داده شده را به ازای آن محاسبه کنیم. برای حل آسان تر، n را ۳ در نظر می گیریم:

$$\begin{aligned} A &= [\sqrt{4n^2 - 3n + 1}] - 2[\sqrt{n^2 - 2n}] \xrightarrow{n=3} A = [\sqrt{36 - 9 + 1}] - 2[\sqrt{9 - 6}] \\ &= [\sqrt{28}] - 2[\sqrt{3}] = 5 - 2(1) = 5 - 2 = 3 \end{aligned}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۱

$$[x-2] = 1 \Rightarrow 1 \leq x-2 < 2 \Rightarrow 3 \leq x < 4$$

اگر $3 \leq x < 4$ باشد، پس $x-3 \geq 0$ و $x-4 < 0$ خواهد بود.

$$f(x) = \underbrace{|x-3|}_{\text{مثبت}} - \underbrace{|x-4|}_{\text{منفی}} = x-3 + (x-4) = 2x-7$$

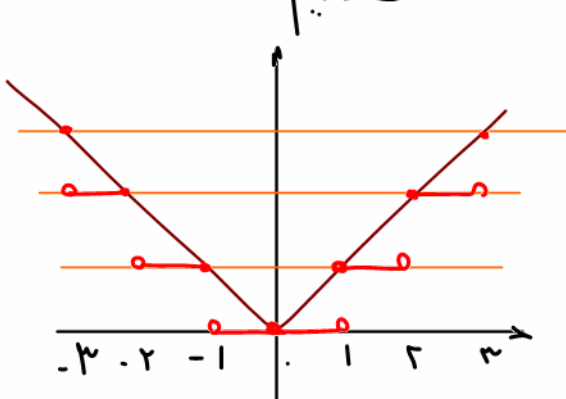
$$f(x) = g(x) \Rightarrow 2x-7 = 2x^2 + x - 17 \Rightarrow 2x^2 - x - 10 = 0$$

$$\Rightarrow (2x-5)(x+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{2} \times \\ x = -2 \times \end{cases}$$

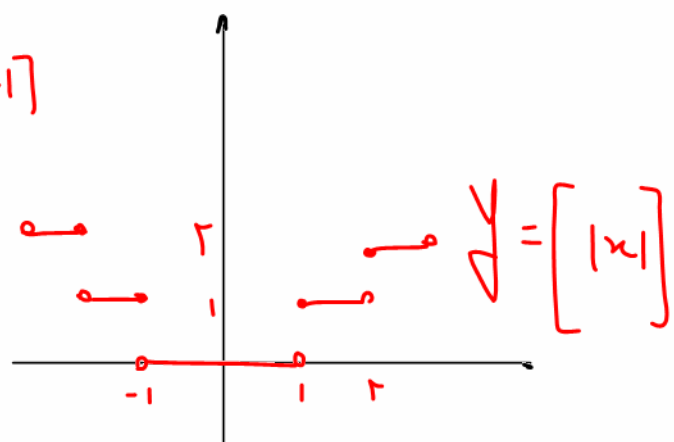
هیچ کدام از جواب های به دست آمده در فاصله $3 \leq x < 4$ نیستند؛ پس معادله $f(x) = g(x)$ هیچ جوابی ندارد.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۷

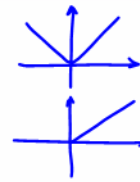
رسم $[x] = y$ با داشتن x : ابتدا x را بخش خطی استوایی $y=k$ و $y=k+1$ که $k \in \mathbb{Z}$ را رسم کن
 هر جا x به این خطوط برخورد کرد را پیرفت کن پس بنویس
 قسمتی از تابع که بین ۲ خط استوایی است را ردی خط پایین تر
 بکش. زیر هر نقطه پیر یک نقطه توضیحی داریم.



$$y = [x]$$



$$\begin{aligned} f(x) = \sqrt{x} \\ g(x) = x^2 \end{aligned} \left\{ \begin{aligned} y = (f \circ g)(x) &= f(g(x)) = \sqrt{g(x)} = \sqrt{x^2} = |x| \\ y = (g \circ f)(x) &= g(f(x)) = f^2(x) = (\sqrt{x})^2 = x \end{aligned} \right.$$



در صورت کلی $f \circ g \neq g \circ f$

تابع مرکب

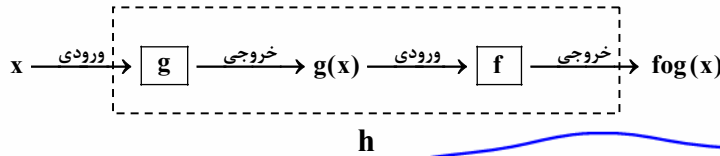
نقطه

ایمان

نابی

دکتر

به شکل زیر دقت کنید، می‌خواهیم با هم فرآیند آن را مرور کنیم. اگر x را به عنوان ورودی به ماشین g دهیم، خروجی آن $g(x)$ خواهد بود، حال این خروجی را به عنوان ورودی به ماشین f می‌دهیم و در نتیجه خروجی $f(g(x))$ حاصل می‌شود که ما آن را $f \circ g(x)$ می‌نامیم. پس در واقع می‌توانیم بگوییم $f \circ g(x)$ ، ماحصل رفتار ماشین h است وقتی به آن ورودی x را می‌دهیم.



تعریف: اگر $f = \{(1, 2), (2, -1), (2, 0), (-1, 4), (5, -7)\}$ و $g = \{(0, -1), (5, 2), (3, 5), (-2, 4)\}$ تابع $f \circ g$ را در صورت امکان بنویسید.

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= \{(0, -1), (5, 0), (3, -7)\} \\ g(0) &= -1 \quad f(-1) = 4 \quad g(3) = 5 \quad f(5) = -7 \\ g(5) &= 2 \quad f(2) = -1 \quad g(-2) = 4 \quad f(4) = 0 \end{aligned}$$

تعریف: اگر $f = \{(1, 1), (2, 3), (3, 3), (4, 2)\}$ و $g = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1), (4, 6)\}$ باشد، برد تابع $f \circ g$ چند عضو دارد؟

پاسخ: گزینه ۳ - اول x را در g قرار می‌دهیم (چون در $f \circ g$ تابع g تابع درونی است) و بعد حاصلش را در f .

$$\begin{aligned} 1 &\xrightarrow{g} 2 \xrightarrow{f} 3 \Rightarrow (1, 3) & 2 &\xrightarrow{g} 3 \xrightarrow{f} 3 \Rightarrow (2, 3) \\ 3 &\xrightarrow{g} 1 \xrightarrow{f} 1 \Rightarrow (3, 1) & 4 &\xrightarrow{g} 6 \xrightarrow{f} \square \end{aligned}$$

پس $f \circ g$ به صورت $f \circ g = \{(1, 3), (2, 3), (3, 1)\}$ است که بردش برابر $R = \{1, 3\}$ می‌باشد و دو عضو دارد.

تعریف: اگر $f = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5)\}$ باشد، تابع $(f \circ f) - f$ چگونه تابعی است؟

پاسخ: گزینه ۳ - ابتدا $f \circ f$ را پیدا می‌کنیم:

$$\begin{aligned} 1 &\xrightarrow{f} 2 \xrightarrow{f} 3 \Rightarrow (1, 3) \\ 2 &\xrightarrow{f} 3 \xrightarrow{f} 4 \Rightarrow (2, 4) \\ 3 &\xrightarrow{f} 4 \xrightarrow{f} 5 \Rightarrow (3, 5) \\ 4 &\xrightarrow{f} 5 \xrightarrow{f} \square \end{aligned} \Rightarrow f \circ f = \{(1, 3), (2, 4), (3, 5)\}$$



ثابت است

حالا $(f \circ f) - f$ را تشکیل می‌دهیم:

می‌بینیم که $(f \circ f) - f$ همواره مقداری ثابت یعنی برابر ۱ دارد؛ پس تابع ثابت است.

تعریف: اگر $f = \{(2, 1), (3, 2), (4, 5), (1, 7)\}$ و $g = \{(1, 2), (3, 1), (a, 3), (b, 1)\}$ مفروضه‌اند. اگر $(4, 2) \in f \circ g$ و $(4, 1) \in g \circ f$ باشند، دوتایی مرتب (a, b) کدام است؟

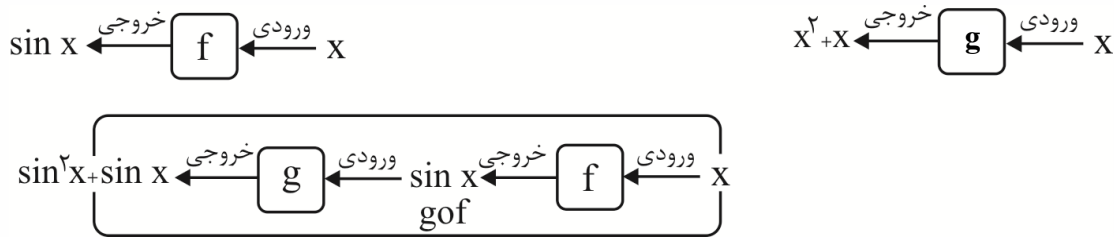
پاسخ: گزینه ۳ - ابتدا $f \circ g$ را پیدا می‌کنیم:

(سراسری ریاضی)

$$\begin{aligned} g(f(4)) &= 1 \\ g(b) &= 1 \\ f(4) &= 2 \\ f(2) &= 1 \\ f(4) &= 5 \\ b &= 5 \end{aligned} \quad \begin{aligned} f(g(4)) &= 2 \\ f(3) &= 2 \\ g(4) &= 3 \\ g(a) &= 3 \\ a &= 4 \end{aligned}$$

ترکیب تابع با ایده‌ی ماشین

اگر هر تابع را به عنوان یک ماشین در نظر بگیریم که x را به عنوان یک مقدار ورودی می‌پذیرد و مقدار $f(x)$ را به عنوان خروجی تحویل می‌دهد می‌توانیم ترکیب تابع‌ها را به عنوان ترکیب ماشین‌ها که به دنبال هم روی یک مقدار ورودی x اثر می‌گذارند در نظر بگیریم. مثلاً اگر $f(x) = \sin x$ و $g(x) = x^2 + x$ تابعی با ضابطه‌ی $f(x)$ و $g(x)$ تابعی با ضابطه‌ی $g(x) = x^2 + x$ باشد، ترکیب این دو تابع را می‌توانیم به شکل زیر نشان دهیم:



تمرین: اگر $f(x) = \frac{2x+3}{2-x}$ و $g(x) = \frac{1-3x}{x+2}$ باشند، ضابطه‌ی تابع $g(f(x))$ کدام است؟ (تجربی خارج ۹۶) به جای x های مختلف قرار بدهید.

$$g(f(x)) = \frac{1-3f(x)}{f(x)+2} = \frac{1-3\left(\frac{2x+3}{2-x}\right)}{\frac{2x+3}{2-x}+2}$$

هرگز نماند! $x=1$ عدد ۲ داد درسته که گزینه سه مناسب است.

(سراسری ریاضی خارج از کشور ۹۰)

$$2 - f(x) \quad (4)$$

تمرین: اگر $f(x) = 2 - |x - 2|$ ، ضابطه‌ی تابع $f(f(x))$ برابر کدام است؟

$$f(x) \quad (3)$$

$$4 - x \quad (2)$$

$$x \quad (1)$$

$$y = f(f(x)) = 2 - |f(x) - 2| = 2 - |2 - 1x - 2 - 2| = 2 - |-1x - 2| = 2 - |x - 2| = 2 - |x - 2| = f(x)$$

تمرین: اگر $f(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ و $g(x) = \cos x$ باشند، ضابطه‌ی تابع $y = f(g(x))$ کدام است؟ (x در ربع سوم است.)

$$-\cot x \quad (4)$$

$$-\tan x \quad (3)$$

$$\tan x \quad (2)$$

$$\cot x \quad (1)$$

پاسخ: گزینه «۳» - ضابطه‌ی تابع $y = f(g(x))$ را به دست می‌آوریم. ببینید:

$$y = f(g(x)) = f(\cos x) = \frac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{\cos x} = \frac{\sqrt{\sin^2 x}}{\cos x} = \frac{|\sin x|}{\cos x}$$

از طرفی x در ربع سوم است، پس $\sin x$ عددی منفی است، در نتیجه خواهیم داشت:

$$y = f(g(x)) = \frac{|\sin x|}{\cos x} = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x$$

(سراسری ریاضی)

تعریف: اگر خروجی ماشین مقابل $\frac{4}{3}$ باشد، مقدار ورودی کدام است؟

$$\text{خروجی} \rightarrow \frac{x}{\sqrt{x+1}} \rightarrow \boxed{2x-2} \rightarrow \text{ورودی}$$

(4) 4

(3) 3

(2) $\frac{7}{2}$

(1) $\frac{11}{9}$

$$3 \rightarrow 2(3)-2=4 \rightarrow \frac{4}{\sqrt{4+1}} = \frac{4}{5}$$

هرگز گزینه ردیپ کن گ ۳ درسته!

تعریف: اگر $f(x) = \frac{x}{x-1}$ باشد، ضابطه تابع $f(x^2) - 2f(x) + 1$ کدام است؟

(4) $\frac{2x-1}{x^2-1}$

(3) $\frac{2x+1}{1-x^2}$

(2) $\frac{2x}{x^2-1}$

(1) $\frac{1}{1-x^2}$

$$\frac{x^2}{x^2-1} - \frac{2x}{x-1} + 1 = \frac{\text{مخرج دلتوا}}{\text{مخرج ادا}} = \frac{x}{3} - 4 + 1 = \frac{x}{3} - 3 = \frac{-5}{3}$$

نقطه گ ۳ به ازای $x=2$ مقدار مثبتی توید

$$(x-2)^3 = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$$

بی دایم : (4) 16 ✓

تعریف: اگر $f(x) = (x^3 - 6x^2 + 12x) + 5$ باشد، آن گاه $f(\sqrt[3]{3} + 2)$ کدام است؟

(3) 5

(2) $(\sqrt[3]{3} + 1)^3 - 1$

(1) صفر

$$f(x) = (x^3 - 6x^2 + 12x - 8) + 13$$

$$f(x) = (x-2)^3 + 13$$

$$f(\sqrt[3]{3} + 2) = (\sqrt[3]{3} + 2 - 2)^3 + 13 = 3 + 13 = 16$$

(ریاضی ۱۴۰۱)

تمرین: اگر $f(x) = \frac{\sqrt{2}x}{3x - \sqrt{2}}$ باشد، حاصل $f \circ f \circ f(\sqrt{2})$ کدام است؟

۲ (۴)

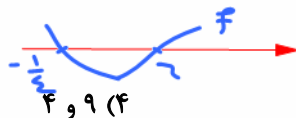
 $\sqrt{2}$ (۳) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۱)

$$f\left(f\left(f\left(\sqrt{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\right) = f\left(\sqrt{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{۲-}$$

$$f(\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2})}{3\sqrt{2} - \sqrt{2}} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{3\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \sqrt{2}} = \frac{1}{\frac{3}{\sqrt{2}} - \sqrt{2}} = \frac{1}{\frac{3 - 2}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2}$$

تمرین: تابع با ضابطه $g(x) = x - \sqrt{x}$ مفروض است. اگر نمودار تابع f ، محور x ها را در دو نقطه به طولهای ۶ و $\frac{1}{4}$ قطع کند، آنگاه،

(سراسری ریاضی خراج ۹۴)

نمودار تابع $f \circ g$ ، محور x ها را با کدام طول قطع می‌کند؟ $\frac{1}{4}$ و ۴ (۳) $\frac{1}{4}$ و ۹ (۲) $\frac{1}{4}$ و ۴ (۱)

محور x را به ضابطه $f \circ g$ می‌بینیم. $f \circ g = f(g(x)) = 0$ $f(-\frac{1}{4}) = f(6) = 0$

جواب: در $-\frac{1}{4}$ پس باید دید $g(x)$ کجای $-\frac{1}{4}$ است: $g(x) = x - \sqrt{x} = -\frac{1}{4}$ $x = 9$ $x = \frac{1}{4}$

$g(x) = x - \sqrt{x} = -\frac{1}{4}$ $x = \frac{1}{4}$ $x = 9$

محور x را به ضابطه $f \circ g$ می‌بینیم

تمرین: اگر $\Delta f(x-2) + f(2-x) = 4x+1$ باشد، آنگاه $f(3)$ کدام است؟

۵/۵ (۴)

۵ (۳)

۴/۵ (۲)

۴ (۱)

پاسخ: گزینه «۲»

$$\begin{cases} x=5: \Delta f(3) + f(-3) = 21 \\ x=-1: \Delta f(-3) + f(3) = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2\Delta f(3) - \Delta f(-3) = -105 \\ \Delta f(-3) + f(3) = -3 \end{cases} \Rightarrow -24f(3) = -108 \Rightarrow f(3) = 4/5$$

هر وقت بخواهیم از روی تابع (یه عبارت x دار) ضابطه $f(x)$ رو پیدا کنیم، کافیه توی پرانتز رو t بگیریم و سپس x رو تنها کنیم و هر جا سمت راست مساوی x دیدیم مقدارش رو بر حسب t جایگذاری کنیم و آخرش هم $x \rightarrow t$.

(تجربی ۹۷)

حل با روش

تمرین: اگر $f(2x-3) = 4x^2 - 14x + 13$ باشد، ضابطه $f(x)$ برابر کدام است؟

$$x^2 - x + 1 \quad (4)$$

$$x^2 - 2x + 1 \quad (3)$$

$$x^2 - 2x - 1 \quad (2)$$

$$x^2 - x + 3 \quad (1)$$

راه کلاسیک

$$2x-3=t \rightarrow x = \frac{t+3}{2}$$

راه امتحانی

$$f(2x-3=t) = 4\left(\frac{t+3}{2}\right)^2 - 14\left(\frac{t+3}{2}\right) + 13 = (t+3)^2 - 7(t+3) + 13$$

$$= t^2 + 2t + 9 - 7t - 21 + 13 = t^2 - 5t + 1$$

$$f(t) = t^2 - 5t + 1 \rightarrow f(x) = x^2 - 5x + 1$$

تنها گزینه‌ای است که با ورودی ۳ خروجی ۱۳ دارد. $f(3) = 13$

راه دوم: $f(2x-3) = 4x^2 - 14x + 13 = (2x-3)^2 - 2x + 4 = (2x-3)^2 - (2x-3) + 1 \rightarrow f(x) = x^2 - x + 1$

خروجی را به حسب ورودی می‌بینیم

در خروجی $2x-3$ به جای

تعرین: اگر $g(x) = 2x - 3$ و $(fog)(x) = 4(x^2 - 4x + 5)$ باشند، تابع $f(x)$ کدام است؟ (ریاضی داخل ۹۳)

$$(۱) \quad x^2 - 4x + 3 \quad (۲) \quad x^2 - 4x + 5 \quad (۳) \quad x^2 - 2x + 5 \quad (۴) \quad x^2 - 2x + 3$$

پاسخ: گزینه «۳» - می‌دانیم $(fog)(x)$ همان $f(g(x))$ است. پس می‌توان نوشت:

$$f(g(x)) = 4(x^2 - 4x + 5) \xrightarrow{g(x)=2x-3} f(2x-3) = 4x^2 - 16x + 20$$

حالا برای این که $f(x)$ را به دست آوریم، از تغییر متغیر $2x - 3 = t$ کمک می‌گیریم. پس داریم:

$$2x - 3 = t \Rightarrow 2x = t + 3 \Rightarrow x = \frac{t+3}{2}$$

$$f(t) = 4\left(\frac{t+3}{2}\right)^2 - 16\left(\frac{t+3}{2}\right) + 20 = 4\left(\frac{t^2 + 6t + 9}{4}\right) - 8(t+3) + 20$$

$$\Leftrightarrow f(t) = t^2 + 6t + 9 - 8t - 24 + 20 = t^2 - 2t + 5$$

پس ضابطه تابع $f(x)$ به صورت $f(x) = x^2 - 2x + 5$ است.

تعرین: اگر $gof(x) = 5x^2 + 11$ و $f(x) = 2x$ باشد، کمترین مقدار $g(x-7)$ چقدر است؟ (تجربی ۱۴۰۱)

$$(۱) \quad 7 \quad (۲) \quad 9 \quad (۳) \quad 11 \quad (۴) \quad 3$$

کمترین $\Rightarrow \text{Min}$

$$g(f(x)) = 5x^2 + 11$$

$$2x = t \rightarrow x = \frac{t}{2}$$

$$g\left(\frac{t}{2}\right) = 5\left(\frac{t}{2}\right)^2 + 11 = \frac{5}{2}t^2 + 11$$

$$g(x) = \frac{5}{2}x^2 + 11$$



$$g(x-7) = \frac{5}{2}(x-7)^2 + 11$$

تعرین: اگر $f\left(\frac{x-2}{x+1}\right) = x+1$ باشد، $f(x)$ کدام است؟ **راه تئوری:** x دلخواهی دهیم: $x=3 \rightarrow f\left(\frac{3-2}{3+1}\right) = 3+1=4$

$$(۱) \quad \frac{3}{1-x} \quad (۲) \quad \frac{3}{x-1} \quad (۳) \quad \frac{1-x}{3} \quad (۴) \quad \frac{x-1}{3}$$

$$\frac{x-2}{x+1} = t$$

پاسخ: توی پرانتز رو t می‌گیریم.

$$x-2 = tx + t \Rightarrow tx - x = -t-2 \Rightarrow x(t-1) = -t-2 \Rightarrow x = \frac{-t-2}{t-1} \quad (*)$$

پس $f(t) = x+1$ حالا باید x رو تنها کنیم:

$$f(t) = \frac{-t-2}{t-1} + 1 \xrightarrow{t \rightarrow x} f(x) = \frac{-x-2}{x-1} + 1 = \frac{-x-2+x-1}{x-1} = \frac{-3}{x-1} = \frac{3}{1-x}$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$$

$$a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$$

$$a^2 + b^2 = (a-b)^2 + 2ab$$

بعضی وقت‌ها هم نیازی به t نیست فقط کافیست از اتحادها استفاده کنیم:



۱) $f\left(x - \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2} - 4$, $f(x) = ?$

$f\left(x - \frac{1}{x}\right) = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2x \cdot \frac{1}{x} - 4 = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2 - 4 = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 - 2$

$f(t) = t^2 - 2 \xrightarrow{t \rightarrow x} f(x) = x^2 - 2$

حالا $x - \frac{1}{x} = t$ پس:

۲) $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2} - 4 \rightarrow f(x) = ?$

$f\left(x + \frac{1}{x}\right) = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2x \cdot \frac{1}{x} - 4 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 - 4 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 6$

$f(t) = t^2 - 6 \xrightarrow{t \rightarrow x} f(x) = x^2 - 6$

حالا $x + \frac{1}{x} = t$ پس:

واسه حلش از اتحاد $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$ استفاده کردیم.

تعریف: اگر $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^3 + \frac{1}{x^3}$ ضابطه‌ی تابع $f(x)$ کدام است؟

پاسخ: باید ببینیم f با ورودی‌های خود چه کرده است. یعنی دقیقاً بلایی که به سر $x + \frac{1}{x}$ اومده چیه؟

$f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3x \cdot \frac{1}{x} \left(x + \frac{1}{x}\right) = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right)$

$f(t) = t^3 - 3t$

الان اگر $x + \frac{1}{x} = t$ بگیریم:

$f(x) = x^3 - 3x$

پس $t \rightarrow x$:

تذکر: چنانچه تابع $f \circ g$ و تابع بیرونی f را داشته باشیم و تابع درونی g را بخواهیم، ابتدا به جای x های تابع f ، $g(x)$ قرار می‌دهیم و

تابع $f(g(x))$ را برحسب $g(x)$ می‌یابیم. از آنجا که تابع $f \circ g$ را هم داریم، با مقایسه‌ی این دو ضابطه، تابع g را بدست می‌آوریم.

تعریف: اگر f و g به عنوان ماشین به صورت $x \rightarrow f \rightarrow g \rightarrow 2x$ باشند، آنگاه مقدار $f(5)$ کدام است؟

(سراسری تجربی خارج از کشور ۹۱)

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

$g(f(5)) = 2 \cdot 5$

$f(5) = \frac{10-4}{3} = \frac{6}{3} = 2$

می بینیم تابع f که g را گرفته، درجه دوشه پس g باید درجه یک باشد. پس $g(x) = ax + b$ در نظر می گیریم.

$$f(g(x)) = x^2 + x - 2 \rightarrow f(ax+b) = x^2 + x - 2 \rightarrow f(ax+b) = (ax+b)^2 - (ax+b) - 2 = x^2 + x - 2$$

(خارج تجربی ۹۰)

تعریف: اگر $f(x) = x^2 - x - 2$ و $f(g(x)) = x^2 + x - 2$ ، آن گاه $(f+g)(x)$ کدام گزینه می تواند باشد؟

$$x^2 + 2x \quad (۴)$$

$$x^2 - 2x \quad (۳)$$

$$x^2 + 1 \quad (۲)$$

$$x^2 - 1 \quad (۱)$$

$$a^2x^2 + 2abx + b^2 - ax - b - 2 = x^2 + x - 2$$

$$a^2x^2 + (2ab - a)x + (b^2 - b - 2) = 1x^2 + 1x - 2$$

$$a^2 = 1 \rightarrow a = 1 \text{ یا } a = -1$$

$$\begin{cases} 2ab - a = 1 \rightarrow \begin{cases} a=1 \rightarrow 2b-1=1 \rightarrow b=1 \rightarrow g(x)=ax+b=x+1 \\ a=-1 \rightarrow -2b+1=1 \rightarrow b=0 \rightarrow g(x)=ax+b=-x \end{cases} \end{cases}$$

تعریف: اگر $f(x) = x^2 + 1$ و $(f \circ g)(x) = x^2 - 3x^2 + 3x$ باشد، با شرط $(x \geq 1)$ ضابطه ی $g(x)$ کدام است؟

$$(x-1)\sqrt[3]{x-1} \quad (۴)$$

$$(x-1)\sqrt{x-1} \quad (۳)$$

$$\sqrt[3]{x-1} \quad (۲)$$

$$\sqrt{x-1} \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه ی «۳» - $(f \circ g)(x)$ یعنی $f(g(x))$ پس $(f \circ g)(x) = g^2 + 1$ ، بنابراین: **انتخاب معرف معکوب تقاضا ۲ جده**

$$g^2 + 1 = x^3 - 3x^2 + 3x \Rightarrow g^2 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 \Rightarrow g^2 = (x-1)^3 \Rightarrow g = \sqrt{(x-1)^3} = (x-1)\sqrt{x-1}$$

بنابراین ضابطه ی $g(x)$ به صورت $g(x) = (x-1)\sqrt{x-1}$ است. شرط $x \geq 1$ هم برای این داده شده که در این صورت

$$g(x) = (x-1)(\sqrt{x-1})$$

دامنه ی تابع مرکب دامنه ی f و دامنه ی g را پیدا کن نویسنده را بویس جانگذاری کن اشتراک بگیر.

اگر f و g دو تابع باشند، آنگاه ترکیب آن ها یعنی $f(g(x))$ به شرطی تشکیل می شود که اولاً x اجازه داشته باشد به عنوان دامنه وارد g بشود ($x \in D_g$) و ثانیاً، $g(x)$ هم اجازه داشته باشد تا به عنوان دامنه وارد f بشود ($g(x) \in D_f$) و خواهیم داشت:

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$

برای ترکیب $g(f(x))$ نیز داریم:

اگر نخواستید از راه تعریف، دامنه را بدست آورید، ضابطه ی $f \circ g$ یا $g \circ f$ را نوشته ولی به هیچ عنوان، آن را ساده نمی کنیم و از روی ضابطه، دامنه را بدست می آوریم.

تعریف: اگر $f(x) = \frac{2}{x-1}$ و $g(x) = \frac{3}{x}$ ، دامنه و ضابطه ی $f \circ g$ را به دست آورید.

$$D_g: \mathbb{R} - \{0\} \quad D_f: \mathbb{R} - \{1\}$$

$$D_{f(g(x))} = \left\{ x \in D_g \mid g(x) \in D_f \right\}$$

$$\left\{ x \in \mathbb{R} - \{0\} \mid \frac{3}{x} \in \mathbb{R} - \{1\} \right\} = \mathbb{R} - \left\{ \frac{3}{1} \right\}$$

$$\frac{3}{x} = 1$$

$$x = 3$$

$$y = f(g(x)) = \frac{2}{\frac{3}{x} - 1}$$

تعریف: اگر $f(x) = \sqrt{1-x}$ و $g(x) = \sqrt{x-1}$ ، دامنه‌ی تابع $f \circ g$ کدام است؟

(۴) $[1, 3]$

(۳) $[1, 2]$ ✓

(۲) $[-1, 2]$

(۱) $[-1, 1]$

$$f(g(x)) = \sqrt{1 - g(x)} = \sqrt{1 - \sqrt{x-1}}$$

$x=0$ زیر $\sqrt{x-1}$ را منفی می‌کند.

$x=3$ زیر $\sqrt{1 - \sqrt{x-1}}$ را منفی می‌کند لذا $x=3$ در رده.

تعریف: اگر $f(x) = 4x^2 - 1$ و $g(x) = \sqrt{1-x^2}$ باشد، دامنه‌ی تعریف $f \circ g(x)$ کدام است؟

(۴) $[-1, 1]$

(۳) $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

(۲) $[-1, 1]$ ✓

(۱) $[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}]$

برای دامنه سازه کش $y = f(g(x)) = 4g(x)^2 - 1 = 4(\sqrt{1-x^2})^2 - 1$

$$\begin{aligned} 1-x^2 &\geq 0 \\ 1 &\geq x^2 \\ 1 &\geq |x| \\ -1 &\leq x \leq 1 \end{aligned}$$

(ریاضی ۹۶)

تعریف: اگر $f(x) = \frac{1+x^2}{1-x^2}$ و $g(x) = \sqrt{x-x^2}$ باشند، دامنه‌ی تابع $f \circ g$ کدام است؟

(۴) $\mathbb{R} - \{1, -1\}$

(۳) $(-1, 1)$

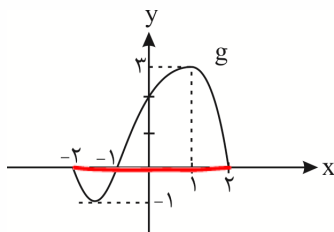
(۲) $\{x\}$

(۱) $[1, 1]$

$$y = g(f(x)) = \sqrt{f - f^2} = \sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2} - (\frac{1+x^2}{1-x^2})^2}$$

$x = \frac{1}{2} \rightarrow g(f(\frac{1}{2})) = \frac{1+\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} - (\frac{1+\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}})^2 = \frac{\frac{5}{4}}{\frac{3}{4}} - (\frac{5}{3})^2 = \frac{5}{3} - \frac{25}{9} = -\frac{10}{9}$ غنای $x = \frac{1}{2}$ در دامنه باشد فقط گزینه ۲ درسته

تعریف: اگر $f(x) = 4x^2 - 2$ و نمودار تابع g به صورت زیر باشد، دامنه‌ی تعریف تابع $f \circ g$ کدام است؟



درودی گ! به $D_g: [-2, 2]$ بین ۲، ۳ به

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_f, f(x) \in D_g\} = \{x \in \mathbb{R}, -2 \leq 4x^2 - 2 \leq 2\}$$

$$-2 \leq 4x^2 - 2 \leq 2$$

$$0 \leq 4x^2 \leq 4$$

$$0 \leq x^2 \leq 1$$

$$x \in \mathbb{R} \quad |x| \leq 1$$

$$-1 \leq x \leq 1$$

$$D_{f \circ g} = [-1, 1]$$

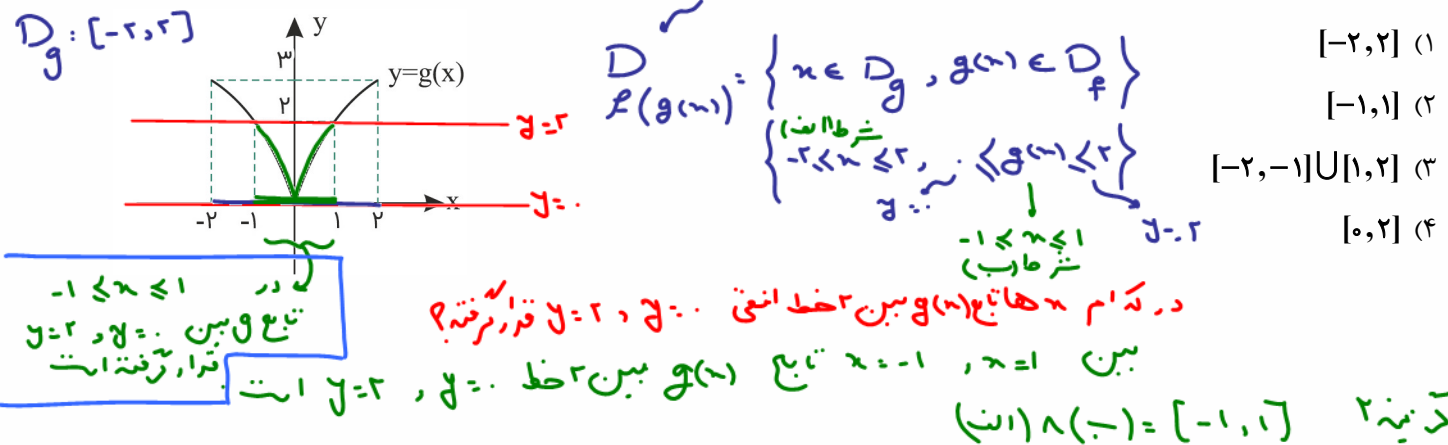
(۱) $[-1, 1]$ ✓

(۲) $[\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{5}}{2}]$

(۳) $[-\frac{\sqrt{5}}{2}, -\frac{1}{2}]$

(۴) $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$

تعریف: اگر $D_f = [0, 2]$ باشد و نمودار تابع g به صورت زیر باشد، دامنه $f \circ g$ کدام است؟



مقایسه دامنه $f(x)$ و $f(g(x))$

(۱) اگر دامنه تابع $f(x)$ بازه $[a, b]$ باشد و بخواهیم دامنه تابع $f(g(x))$ را پیدا کنیم، باید نامعادله $a \leq g(x) \leq b$ را حل کنیم. جواب آخر برابر اشتراک جواب این نامعادله و دامنه تابع g است.

(۲) اگر دامنه تابع $f(g(x))$ بازه $[a, b]$ باشد و بخواهیم دامنه تابع $f(x)$ را پیدا کنیم، باید برد تابع g را به ازای متعلق به بازه $[a, b]$ پیدا کنیم.

تعریف: اگر دامنه تابع f بازه $[3, 12]$ باشد، دامنه تابع $f(\frac{x}{3} - 3)$ کدام است؟

(۱) $[-2, 1]$ (۲) $[-1, 2]$ (۳) $[18, 45]$ (۴) $[6, 39]$

پاسخ: گزینه «۳» - همان طور که گفتیم باید نامعادله $3 \leq \frac{x}{3} - 3 \leq 12$ را حل کنیم:

$$3 \leq \frac{x}{3} - 3 \leq 12 \Rightarrow 6 \leq \frac{x}{3} \leq 15 \Rightarrow 18 \leq x \leq 45$$

پس دامنه تابع $f(\frac{x}{3} - 3)$ برابر بازه $[18, 45]$ است.

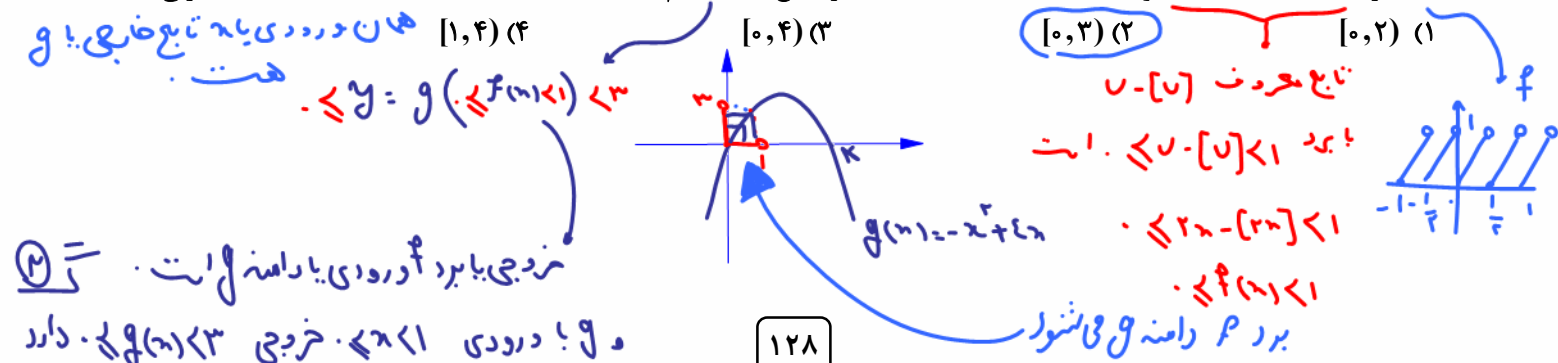
تعریف: اگر دامنه تابع $f([x])$ بازه $[1, 5]$ باشد، دامنه تابع $f(\sqrt{x})$ حتماً شامل کدام مجموعه است؟

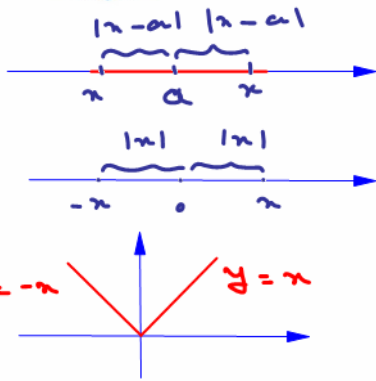
- (۱) $\{1, 2, 3, 4\}$ (۲) $\{1, 4, 9, 16\}$ (۳) $[1, 16]$ (۴) $[1, 2]$

پاسخ: گزینه «۲» - اول برد $[x]$ را به ازای $1 \leq x < 5$ پیدا می کنیم. اگر $1 \leq x < 5$ باشد، $[x]$ مقادیری برابر ۱، ۲، ۳ و ۴ دارد، پس دامنه تابع $f(x)$ مجموعه $\{1, 2, 3, 4\}$ است. حالا دامنه تابع $f(\sqrt{x})$ را پیدا می کنیم. اگر $\sqrt{x}$ بخواهد برابر ۱ یا ۲ یا ۳ یا ۴ باشد x باید برابر ۱، ۴، ۹ و ۱۶ باشد، پس دامنه تابع $f(\sqrt{x})$ حتماً شامل اعضای مجموعه $\{1, 4, 9, 16\}$ است. دقت کنید که دامنه تابع $\sqrt{x}$ ممکن است شامل تمام بازه $[1, 16]$ هم باشد.

تعریف: اگر $f(x) = 2x - [2x]$ و $g(x) = -x^2 + 4x$ باشند، برد تابع $f \circ g$ کدام است؟

- (۱) $[0, 2]$ (۲) $[0, 3]$ (۳) $[0, 4]$ (۴) $[1, 4]$





$|x-a|$ را می‌توانیم فاصله x از a که می‌تواند کردی مثبت یا منفی باشد.

مثلاً $|x+2|$ یعنی فاصله x از -2 ، $|x|$ یعنی $|x-0|$ یعنی فاصله x از صفر
قدر مطلق

تابع $f(x) = |x|$ را تابع قدر مطلق می‌خوانند و آن را با نماد $f(x) = |x|$ نمایش می‌دهند.
تذکره: $\sqrt{a^2} = |a|$



قدری که توش مثبت خودش میاد بیرون. قدری که توش منفیه قرینه‌اش!

$$\begin{aligned} 1,7 - 2,7 &= -1 \\ |\sqrt{3} - \sqrt{5}| &= \sqrt{5} - \sqrt{3} \\ |1 - \sqrt{2}| &= \sqrt{2} - 1 \\ |\sqrt{3} - \sqrt{2}| &= \sqrt{3} - \sqrt{2} \\ |\sin x - 1| &= 1 - \sin x \\ |1 - \cos x| &= 1 - \cos x \end{aligned}$$

$$|-5| = -(-5) = 5$$

تعریف: اگر $a < 0 < b$ و $|b| < |a|$ باشد، حاصل $|a+b| + |a-b| + |a| + |b|$ کدام است؟

$$b - 3a \quad (4)$$

$$3b - a \quad (3)$$

$$a + 3b \quad (2)$$

$$3a + b \quad (1)$$

پاسخ: گزینه «4» - چون $a < 0$ و $b > 0$ است، پس $|a| = -a$ و $|b| = b$ و چون $|a| > |b|$ است (یعنی زور عدد منفی بیشتر است)

پس $|a+b| = -a-b$ و $|a-b| = -a+b$ پس: $|a+b| + |a-b| + |a| + |b| = -a-b -a+b -a+b = -3a+b$

تعریف: هرگاه x و y دو عدد حقیقی ناصفر باشند و $|x| + |y| = x - y$ حاصل $\sqrt{x|x| + x|y| - y|x| - y|y|}$ کدام است؟

$$x + y \quad (4)$$

$$x - y \quad (3)$$

$$y - x \quad (2)$$

$$-x - y \quad (1)$$

پاسخ: گزینه «3» - چون $|x| + |y| = x - y$ شده است، پس $x > 0$ و $y < 0$ است و در نتیجه:

$$\sqrt{x|x| + x|y| - y|x| - y|y|} = \sqrt{x^2 - xy - yx + y^2} = \sqrt{x^2 - 2xy + y^2} = \sqrt{(x-y)^2} = |x-y| = x-y$$

ویژگی‌های تابع قدر مطلق:

$$1) |x| \geq 0$$

$$2) \sqrt{u^2} = |u|$$

3) $|-x| = |x| \Rightarrow |a-b| = |b-a|$ یعنی داخل قدر مطلق را می‌توان در منفی ضرب نمود

$$4) \begin{cases} |u| = a \xrightarrow{a \geq 0} u = \pm a \xrightarrow{\text{مثلاً}} |x-1| = 3 \Rightarrow x-1 = \pm 3 \Rightarrow x = 4, -2 \\ |u| \leq a \xrightarrow{a \geq 0} -a \leq u \leq a \xrightarrow{\text{مثلاً}} |x-1| \leq 3 \Rightarrow -3 \leq x-1 \leq 3 \Rightarrow -2 \leq x \leq 4 \\ |u| \geq a \xrightarrow{a \geq 0} u \geq a \text{ یا } u \leq -a \xrightarrow{\text{مثلاً}} |x-1| \geq 3 \Rightarrow \begin{cases} x-1 \geq 3 \Rightarrow x \geq 4 \\ \text{یا} \\ x-1 \leq -3 \Rightarrow x \leq -2 \end{cases} \end{cases}$$

$$5) |x| \geq x \xrightarrow{\text{مثلاً}} y = \sqrt{|x| - x} \xrightarrow{\text{دامنه}} |x| - x \geq 0 \Rightarrow |x| \geq x \Rightarrow \text{بدیهی} \Rightarrow D_f = \mathbb{R}$$

$$6) |x|^2 = |x^2| = x^2$$

$$7) |x+y| \leq |x| + |y| \Rightarrow \begin{cases} |x+y| = |x| + |y| \Rightarrow xy \geq 0 \text{ و } x \text{ و } y \text{ هم‌علامت} \\ |x+y| < |x| + |y| \Rightarrow xy < 0 \text{ و } x \text{ و } y \text{ مختلف‌العلامت} \end{cases}$$

تمرین: اگر به ازای هر $x \in \mathbb{R}$ ، $A = \frac{x^2 - x + 1}{|x^2 - 1| + |x - 2|}$ باشد، دقیق ترین محدوده ی A کدام است؟

$$(1) A > 0 \quad (2) 0 < A \leq 1 \quad (3) 0 < A < 1 \quad (4) A \geq 1$$

پاسخ: گزینه ی «۲» - با توجه به نامساوی مثلثی $|a + b| \leq |a| + |b|$ نتیجه می گیریم که:

$$0 \leq \frac{|a+b|}{|a|+|b|} \leq 1 \xrightarrow{a=x^2-1, b=2-x} 0 \leq \frac{|x^2-x+1|}{|x^2-1|+|2-x|} \leq 1$$

از طرفی $x^2 - x + 1$ یک عبارت همواره مثبت است چون $\Delta < 0$ و $a > 0$ می باشد:

$$0 < \frac{x^2 - x + 1}{|x^2 - 1| + |x - 2|} \leq 1 \Rightarrow 0 < A \leq 1$$

$$8) |xy| = |x||y| \xrightarrow{\text{مثلاً}} |x^2 - 1| = |x - 1||x + 1|$$

$$9) \left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$$

$$\text{مثال: } \left| \frac{x-1}{x+2} \right| < 1$$

یادت باشه: برای حل نامعادله قدرمطلق $|u| < |v|$ می توانیم دو طرف را به توان ۲ برسانیم تا قدرمطلق ها از بین بروند:

$$|x-1| < |x+2| \xrightarrow{\text{توان ۲}} (x-1)^2 < (x+2)^2 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 < x^2 + 4x + 4 \Rightarrow -6x < 3 \Rightarrow x > -\frac{1}{2}$$

حل معادلات قدرمطلق

(۱) معادلات به فرم $|f(x)| = a$ ، $(a \geq 0)$: برای حل این معادله به صورت مقابل عمل می کنیم:

$$|f(x)| = a \Rightarrow f(x) = \pm a$$

مثلاً $|x-3| = 2$ به صورت $x-3 = \pm 2$ حل می شود که یک بار $x=5$ و یک بار $x=1$ به دست می آید.

(۲) معادلات به فرم $|f(x)| = |g(x)|$: حل این مدل از معادلات به صورت زیر است:

$$|f(x)| = |g(x)| \Rightarrow f(x) = \pm g(x)$$

مثلاً برای حل معادله $|2x-1| = |x|$ داریم:

$$|2x-1| = |x| \Rightarrow 2x-1 = \pm x \Rightarrow \begin{cases} 2x-1 = x \Rightarrow x=1 \\ 2x-1 = -x \Rightarrow 3x=1 \Rightarrow x=\frac{1}{3} \end{cases}$$

(۳) معادلات به فرم $|f(x)| = g(x)$: در حل این دسته از معادلات چون طرف چپ، یک عبارت نامنفی است پس برای برقرار بودن تساوی

باید عبارت سمت راست هم، نامنفی باشد یعنی $g(x) \geq 0$. حالا با این شرط، جابها را به صورت زیر می یابیم:

$$|f(x)| = g(x) \Rightarrow f(x) = \pm g(x)$$

فقط x هایی قبول می شوند که $g(x)$ را منفی نکنند.

$$\text{مثلاً برای حل معادله } |x-1| = -2x \text{ داریم:}$$

$$|x-1| = -2x \Rightarrow x-1 = \pm 2x \Rightarrow \begin{cases} x-1 = 2x \Rightarrow x=-1 \\ x-1 = -2x \Rightarrow 3x=1 \Rightarrow x=\frac{1}{3} \end{cases}$$

اگر $x = \frac{1}{3}$ باشد سمت راست تساوی یعنی $-2x$ ، منفی می‌شود پس $x = \frac{1}{3}$ قبول نیست ولی اگر $x = -1$ باشد سمت راست یعنی $-2x$ ، منفی نمی‌شود پس $x = -1$ قبول است.

(۴) معادلات به فرم $|f(x)| = f(x)$: این دسته از معادلات زمانی برقرار هستند که $f(x) \geq 0$ باشد. مثلاً برای حل $|x-1| = x-1$ داریم:

$$|x-1| = x-1 \Rightarrow x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$$

(۵) معادلات به فرم $|f(x)| = -f(x)$: این دسته از معادلات زمانی برقرار هستند که $f(x) \leq 0$ باشد. مثلاً برای حل $|x-2| = 2-x$

$$|x-2| = 2-x \Rightarrow x-2 \leq 0 \Rightarrow x \leq 2$$

داریم:

(۶) معادلات به فرم $|f(x)| + |g(x)| = 0$: چون قدرمطلق یک عبارت همواره نامنفی است، از درسنامه معادلات گنگ فهمیدیم که جمع

چند عبارت نامنفی زمانی صفر است که هر کدام از آن‌ها صفر باشد.

$$\left. \begin{array}{l} 0 \leq |31| \\ 0 \leq \sqrt[3]{3} \\ 0 \leq (5)^4 \end{array} \right\} \text{ناشی های صروف:}$$

تعریف: معادله‌ی $|x-x^2| + |x^3-2x^2+4x-3| = 0$ چند جواب دارد؟

۲ (۳)

۱ (۲)

صفر (۱)

$$x-x^2 = x(1-x) = 0$$

$$x = 0 \text{ , } x = 1$$

جمع دوتا ناشی منفی نگذرد صفرند:

از $x=0$ و $x=1$ فقط عدد $x=1$ عبارت $x^3-2x^2+4x-3 = 0$ را منفی کند لذا عدد نقطه جواب $x=1$

دارد و یک جواب گزینه ۲

(۷) اگر معادله با هیچ‌یک از ۶ حالت قبل تطابق نداشت، باید به کمک تعیین علامت جواب‌ها را در صورت وجود پیدا کنیم. مثلاً معادله

$$|x| + |2x-2| = x-3$$

برای این منظور ابتدا ریشه‌های داخل قدرمطلق‌ها را به دست می‌آوریم که می‌شود $x=0$ و $x=1$ و سپس x را یک‌بار کوچک‌تر از ریشه کوچک، یک‌بار بین دو ریشه و یک‌بار بزرگ‌تر از ریشه بزرگ‌تر قرار می‌دهیم. سپس جواب به دست آمده را به شرطی قبول می‌کنیم که در محدوده تعیین شده قرار گرفته باشد.

$$x < 0 \Rightarrow -x - (2x-2) = x-3 \Rightarrow -x-2x+2 = x-3 \Rightarrow x = \frac{5}{4}$$

$x = \frac{5}{4}$ در محدوده $x < 0$ قرار ندارد و اشتراکشان $\emptyset$ شد پس $x = \frac{5}{4}$ قبول نمی‌شود.

$$0 \leq x < 1 \Rightarrow x - (2x-2) = x-3 \Rightarrow x-2x+2 = x-3 \Rightarrow -2x = -5 \Rightarrow x = \frac{5}{2}$$

اشتراکشان $\emptyset$ شد پس $x = \frac{5}{2}$ قبول نمی‌شود.

$$x \geq 1 \Rightarrow x + 2x - 2 = x - 3 \Rightarrow 2x = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

اشتراکشان $\emptyset$ شد پس $x = -\frac{1}{2}$ قبول نمی‌شود.

پس این معادله جواب ندارد.

$$|x^3 - 9x| = 9x - x^3$$

$$|u| = -u$$

حتماً یا $u < 0$ یا $u = 0$

تعرین: مجموعه جواب معادله $|x^3 - 9x| + x^2 - 9x = 0$ شامل چند عدد طبیعی می باشد؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

$$u = x^3 - 9x \leq 0$$

$$x(x^2 - 9) \leq 0$$

$$x(x+3)(x-3) \leq 0$$

$$[\sqrt{3}, +\infty) \quad (۴)$$

$$(-\infty, \sqrt{3}] \quad (۳)$$

$$\{\sqrt{3}\} \quad (۲)$$

$$\mathbb{R} \quad (۱)$$

$$x + \sqrt{x^2 - 2\sqrt{3}x + 3} = \sqrt{3} \Rightarrow x + \sqrt{(x - \sqrt{3})^2} = \sqrt{3} \Rightarrow |x - \sqrt{3}| = \sqrt{3} - x$$

پاسخ: گزینه «۳»

$$x - \sqrt{3} \leq 0 \Rightarrow x \leq \sqrt{3} \Rightarrow x \in (-\infty, \sqrt{3}]$$

می دانیم اگر $|u| = -u$ باشد، آن گاه $u \leq 0$ است؛ پس:

تعرین: مجموعه جواب نامعادله $(-x^2 - 6)(5 - |2x - 1|) \leq 0$ کدام است؟

$$\mathbb{R} - [-2, 2] \quad (۴)$$

$$(-2, 2) \quad (۳)$$

$$[-2, 2] \quad (۲)$$

$$\mathbb{R} - (-2, 2) \quad (۱)$$

$$-(x^2 + 6)(5 - |2x - 1|) \leq 0$$

همواره مثبت باید مثبت باشد

$$5 - |2x - 1| \geq 0 \Rightarrow 5 \geq |2x - 1| \Rightarrow -5 \leq 2x - 1 \leq 5$$

$$|u| < a \rightarrow -a < u < a$$

$a > 0$

$$-4 \leq 2x \leq 6$$

$$-2 \leq x \leq 3$$

$$\Rightarrow \text{گزینه ۵ درست}$$

تعرین: مجموع ریشه های معادله $3|x| - |x - 1| + x = 0$ کدام است؟

$$-\frac{4}{5} \quad (۴) \quad -\frac{7}{15} \quad (۳) \quad -\frac{2}{15} \quad (۲) \quad -\frac{4}{3} \quad (۱)$$

بسته تکت قدرها را یافته بازه بندی کرده در هر زیر بازه معادله را حل می کنیم و جواب را با مشمن کنترل می کنیم.

$$\left\{ \begin{array}{ll} x < 0 & -3x + x - 1 + x = 0 \quad x = -1 < 0 \quad \checkmark \\ 0 \leq x \leq 1 & 3x + x - 1 + x = 0 \quad x = \frac{1}{5} \in [0, 1] \quad \checkmark \\ x > 1 & 3x - x + 1 + x = 0 \quad x = -\frac{1}{3} < 1 \quad \times \end{array} \right.$$

$(x_1 = -1) + (x_2 = \frac{1}{5}) = -\frac{2}{5}$

گزینه ۴

تمرین: مجموعه جواب نامعادله $|x| + |3x-1| \leq 5$ شامل چند عدد صحیح است؟

(۴) سه

(۳) دو

(۲) یک

(۱) هیچ

پاسخ: گزینه‌ی «۴» - ریشه‌های قدرمطلقها $x=0$ و $x=\frac{1}{3}$ است، پس:

$$|x| + |3x-1| \leq 5$$

$$\left. \begin{array}{l} x \leq 0 \Rightarrow -x - 3x + 1 \leq 5 \Rightarrow x \geq -1 \xrightarrow{\cap} -1 \leq x \leq 0 \\ 0 \leq x \leq \frac{1}{3} \Rightarrow x - 3x + 1 \leq 5 \Rightarrow x \geq -2 \xrightarrow{\cap} 0 \leq x \leq \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \leq x \Rightarrow x + 3x - 1 \leq 5 \Rightarrow x \leq \frac{3}{2} \xrightarrow{\cap} \frac{1}{3} \leq x \leq \frac{3}{2} \end{array} \right\} \xrightarrow{\cup} -1 \leq x \leq \frac{3}{2}$$

پس مجموعه جواب نامعادله می‌شود بازه‌ی $[-1, \frac{3}{2}]$ که شامل ۳ عدد صحیح $-1, 0, 1$ است.

تمرین: تمام جواب‌های نامعادله‌ی $|x-1| < |x-3|$ کدام است؟

(۴) $x < 2$ (۳) $1 \leq x \leq 3$ (۲) $x > 2$ (۱) $x \leq 2$

پاسخ: گزینه‌ی «۴» - طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$|x-1| < |x-3| \xrightarrow{\text{توان ۲}} x^2 - 2x + 1 < x^2 - 6x + 9 \Rightarrow 4x < 8 \Rightarrow x < 2$$

$$\text{یا } |x-1| < |x-3| \Rightarrow (x-1)^2 - (x-3)^2 < 0 \Rightarrow 2(2x-4) < 0 \Rightarrow x < 2$$

تمرین: اگر مجموعه جواب نامعادله $|ax+b| > 3$ به صورت $\mathbb{R} - [-1, 2]$ باشد، $a+b$ کدام می‌تواند باشد؟

(۴) $\frac{3}{5}$

(۳) ۳

(۲) $\frac{2}{5}$

(۱) ۱



یادآوری: $|u| > a \Leftrightarrow u < -a \text{ یا } u > a$

$$\begin{aligned} |ax+b| > 3 &\Leftrightarrow ax+b < -3 \text{ یا } ax+b > 3 \\ ax &< -3-b & \text{یا} & ax > 3-b \\ x &< \frac{-3-b}{a} & \text{یا} & x > \frac{3-b}{a} \\ x &< -1 & \text{یا} & x > 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -1 &= \frac{-3-b}{a} \\ -a &= -3-b \end{aligned}$$

$$b = -3+a$$

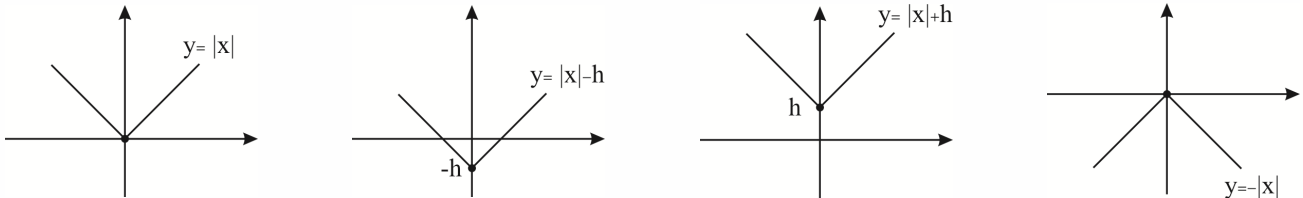
$$\frac{3-b}{a} = 2$$

$$\begin{aligned} 3-b &= 2a \\ 3-(-3+a) &= 2a \end{aligned}$$

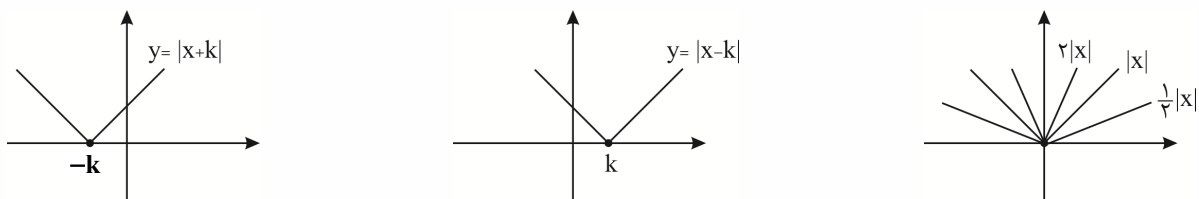
$$a+b=1$$

نمودارهای قدر مطلق

(۱) رسم به کمک انتقال: این روش برای رسم تابع‌هایی به فرم $\pm |x \pm k| \pm h$ کاربرد دارد. به مثال‌های زیر توجه کنید:



اگر $|x|$ را نسبت به محور x ها همان $|x|$ است که به اندازه h همان $|x|$ است که به اندازه h پایین آمده است. ($h > 0$)
 گزینه کنیم به $-|x|$ می‌رسیم. بالا رفته است. ($h > 0$)

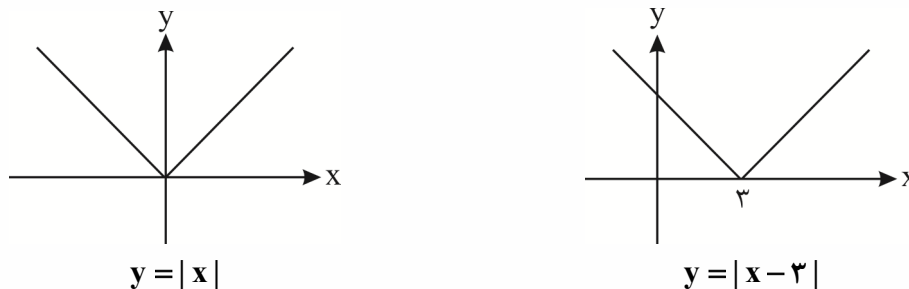


همان $|x|$ است که به اندازه k به راست همان $|x|$ است که به اندازه k به چپ رفته است. ($k > 0$)
 رفته است. ($k > 0$)

رسم چند تابع قدر مطلق:

(۱) در تابع‌های ساده مثل $y = |x - a| + k$ می‌شود نمودار را با انتقال نمودار تابع $y = |x|$ رسم کرد.

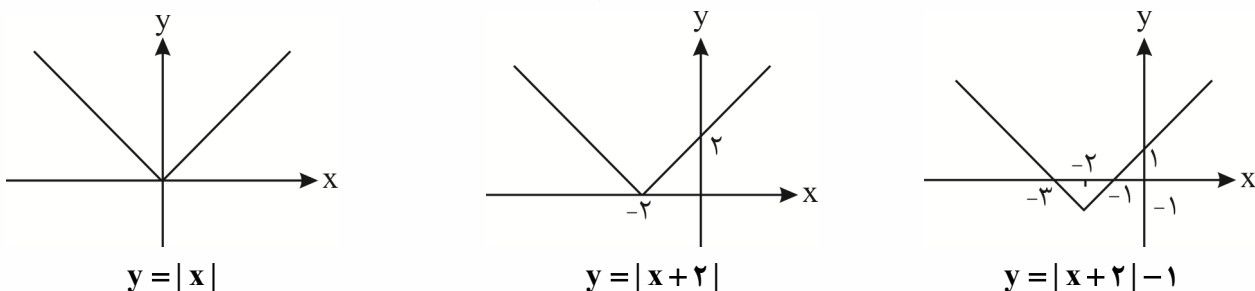
توجه: برای رسم نمودار تابع $f(x + a)$ نمودار $f(x)$ را به اندازه $-a$ در امتداد محور x ها انتقال می‌دهیم و برای رسم نمودار تابع $f(x) + k$ نمودار $f(x)$ را به اندازه k در امتداد محور y ها انتقال می‌دهیم. این مثال را ببینید:
 نمودار $y = |x|$ را به اندازه 3 واحد ($-a$ می‌شود $-(-3)$) در امتداد محور x ها انتقال می‌دهیم.



حالا یکی دیگر:

$$y = |x + 2| - 1$$

اول نمودار $|x|$ را به اندازه 2 واحد در امتداد محور x ها انتقال می‌دهیم و بعد به اندازه 1 واحد در امتداد محور y ها:



از رسم نمودار توابع شامل قدرمطلق می توان برای پیدا کردن مینیمم و ماکسیمم تابع (و در نتیجه برد تابع) استفاده کرد. کافی است نمودار را رسم کنیم و سپس کمترین یا بیشترین مقدار y را از روی نمودار پیدا کنیم.

تمرین: مساحت مثلث که بین نمودار تابع $y = |x - 3| - 2$ و محور طول ها تشکیل می شود، چند واحد سطح است؟

۵ (۴)

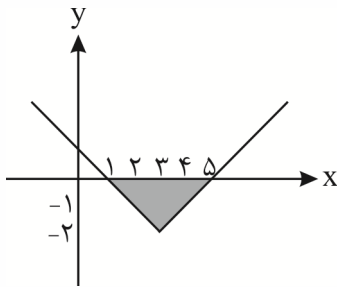
۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

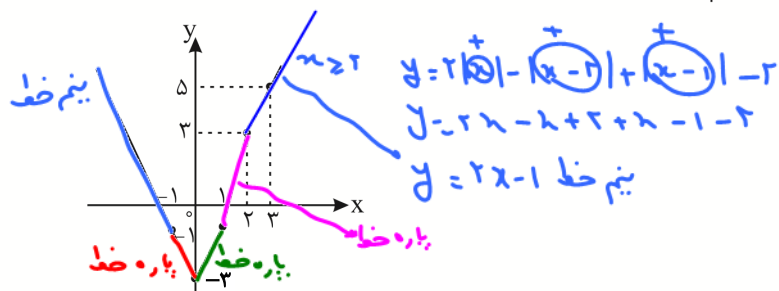
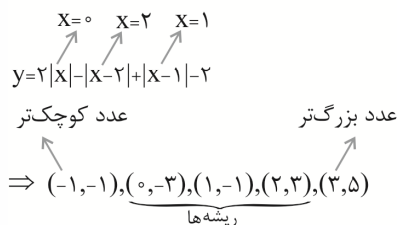
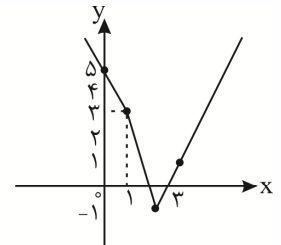
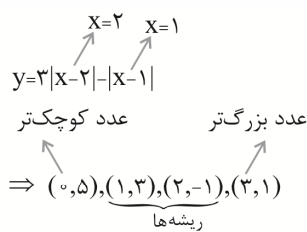
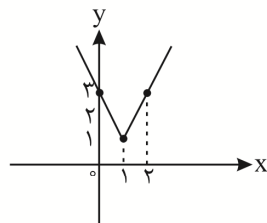
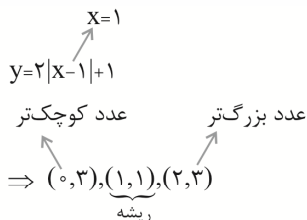
پاسخ: گزینه ی «۳» - نمودار تابع را رسم می کنیم:

مثلثی که بین نمودار تابع و محور x ها تشکیل می شود، مثلثی است با قاعده ی به طول ۴ (نمودار محور x ها را در $x = 1$ و $x = 5$ قطع کرده است (چرا؟)) و ارتفاع ۲ پس مساحتش برابر $\frac{4 \times 2}{2} = 4$ است.



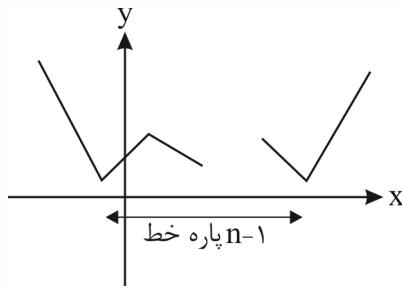
۲) برای رسم توابعی که به صورت $y = |a_1x - x_1| + |a_2x - x_2| + \dots + |a_nx - x_n| + k$ هستند کافی است ریشه ی هر کدام از قدرمطلق ها را پیدا کنیم و بعد یک عدد کوچک تر از کوچک ترین ریشه و یک عدد بزرگ تر از بزرگ ترین ریشه در نظر بگیریم و بعد مختصات نقاطی را که این عددها و ریشه ها طول هایشان هستند، پیدا کنیم و آن ها را روی محور مختصات مشخص و به ترتیب به هم وصل کنیم و دو پاره خط اول و آخر را امتداد دهیم.

این مثال ها را ببینید:



اگر دقت کنید در این ضابطه ها پس از ساده کردن قدرمطلق ها و تعیین علامت آن ها در بازه های مختلف یک معادله خط در هر بازه باقی خواهد ماند و از آن جا که خطی که از هر دو نقطه می گذرد منحصر به فرد می باشد ما با این کار از هر خط دو نقطه را می دهیم که با وصل کردن آن ها به یکدیگر نمودار خط هر قسمت به دست می آید.

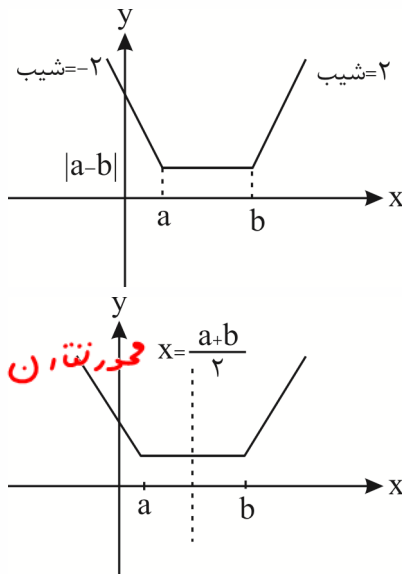
چند نکته در مورد نمودارهای تابع شامل قدرمطلق



(۱) با توجه به روش رسم نمودار تابع $y = |a_1x - x_1| + |a_2x - x_2| + \dots + |a_nx - x_n|$ مشخص است که نمودار این تابع از $n-1$ پاره خط و دو نیم خط تشکیل شده است. (چرا؟)
پس کمترین مقدار تابع همیشه به ازای یکی از ریشه‌ها به دست می‌آید.

بنابراین برای پیدا کردن حداقل عبارت‌هایی مثل عبارت بالا کافی است مقدار تابع را به ازای ریشه‌ی هر کدام از قدرمطلق‌ها پیدا کنیم و کمترین مقدار به دست آمده را انتخاب کنیم.

(۲) نمودار تابع با ضابطه‌ی $y = |x-a| + |x-b|$ را می‌توانیم با همان روشی که تا الان یاد گرفته‌ایم، رسم کنیم. ولی در مورد این تابع می‌توانید این نکته را هم یاد بگیرید.

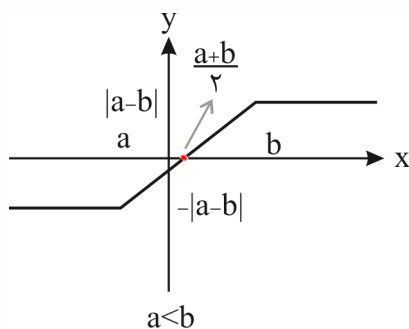


نمودار این تابع‌ها به صورت روبه‌رو است: (بعضی‌ها دوست دارند بگویند گلدانی است!)
کمترین مقدار تابع برابر $|a-b|$ و طول نقاط زاویه‌دار نمودار ریشه‌های عبارت‌های داخل قدرمطلق است، شیب دو نیم خطی هم که در سمت چپ و راست پاره خط افقی رسم می‌شوند برابر -2 و 2 است. منحنی دارای یک محور تقارن است به معادله‌ی $x = \frac{a+b}{2}$ یا «میانگین ریشه‌ها» $x =$

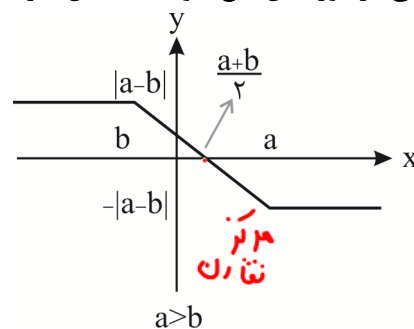
(۳) محور تقارن تابع $y = |x-a| + |x-b|$ خط $x = \frac{a+b}{2}$ است. اگر به نمودار نگاه کنید، می‌بینید محور تقارن در اصل همان میانگین ریشه‌ها است. پس به طور کلی معادله‌ی محور تقارن هر تابع با ضابطه‌ی $y = |a_1x + b_1| + |a_2x + b_2|$ (به شرط این که $|a_1| = |a_2|$ باشد) به صورت «میانگین ریشه‌ها» $x =$ است.

(۴) نمودار تابع‌هایی با ضابطه‌ی $y = |x-a| - |x-b|$ را هم می‌توان با استفاده از روشی که برای رسم نمودار تابع‌های شامل قدرمطلق یاد گرفتید رسم کرد. ولی در مورد این تابع خوب است این‌ها را هم بدانید:

$$|a-b| = |b-a|$$

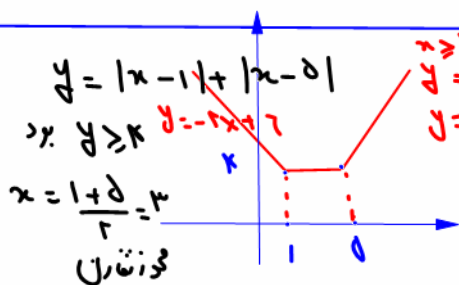


$a < b$



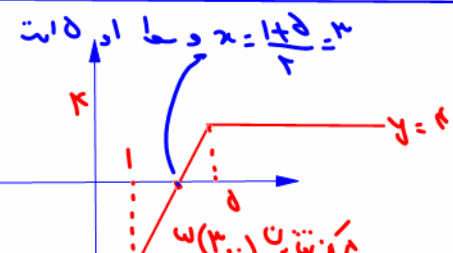
$a > b$

نمودار تابع به یکی از دو صورت بالا است (بعضی‌ها دوست دارند بگویند سرسره‌ای یا آبشاری!) تابع همواره بین $|a-b|$ و $-|a-b|$ است یعنی $-|a-b| \leq y \leq |a-b|$. نمودار تابع یک مرکز تقارن دارد که مختصاتش $(\frac{a+b}{2}, 0)$ است، شیب خطی که دو پاره خط افقی را به هم وصل می‌کند برابر 2 یا -2 است.



$$y = |x-1| - |x-5|$$

$$-6 \leq y \leq 4$$



۱۴۸

تمرین: برد تابع $f(x) = \sqrt{|x-3| - |x+6|}$ شامل چند عدد صحیح است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۷ (۲)

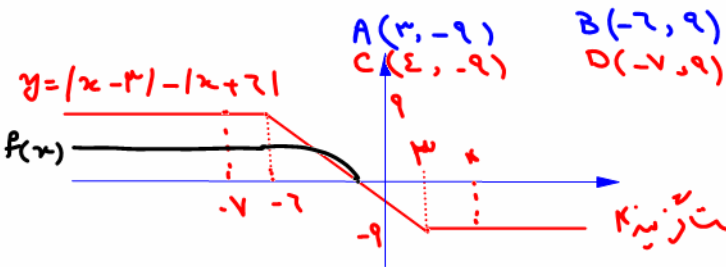
۱۰ (۱)

$$-9 \leq y = |x-3| - |x+6| \leq 9$$

ریشه $x=3$ ریشه $x=-6$

$$f(x) = \sqrt{|x-3| - |x+6|} \leq 3$$

حزب $y = |x-3| - |x+6|$ درودی که شتر
بخش -9 تا منفی را می‌گیرد. از ونا
را می‌برد. $f(x) \leq 3$

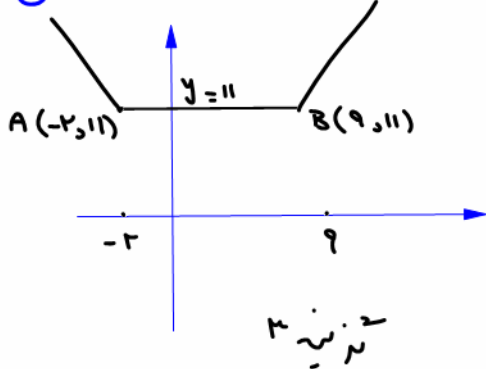


اعداد صحیح برد: ۳، ۲، ۱، ۰ (تأثیر زنیه ۴)

تمرین: اگر $A(3, 0)$ مرکز تقارن نمودار تابع $y = |x-k+1| - |x+2|$ باشد، کمترین مقدار تابع $y = |x+2| + |x-k|$ کدام

است؟
ایس مرکز تقارن سه
وسط ایس درونی داخل قدر مطلق هات
۸ (۱)
۱۱ (۳)
ریشه $x = -3$ ریشه $x = k-1$

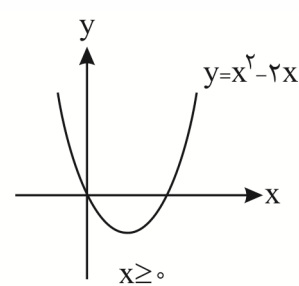
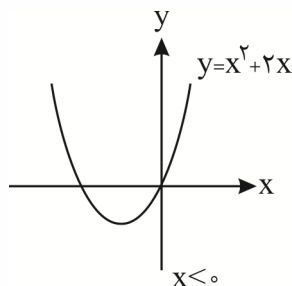
$$y = |x+2| + |x-9| \quad ۱۲ (۴)$$



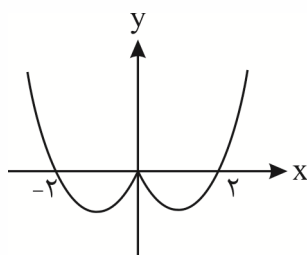
$$k = 9 \rightarrow k - 3 = 6 \rightarrow \frac{(k-1) + (-2)}{2} = 6 \rightarrow k = 9$$

۳) راه اصلی رسم نمودار این توابع تعیین علامت عبارت داخل قدر مطلق است. به این مثال توجه کنید:

$$y = x^2 - 2|x| = \begin{cases} x^2 - 2x & x \geq 0 \\ x^2 + 2x & x < 0 \end{cases}$$



قسمتی از نمودار اول که $(x \geq 0)$ در ناحیه اول یا چهارم است را به قسمتی از نمودار دوم که $(x \leq 0)$ در ناحیه سوم یا دوم است متصل می‌کنیم.



دامنه تابع مرکب $f \circ g$, $g \circ f$:

$$D_{f \circ g} = D_{f(g(x))} = \left\{ x \in D_g \mid g(x) \in D_f \right\}$$

$$D_{g \circ f} = D_{g(f(x))} = \left\{ x \in D_f \mid f(x) \in D_g \right\}$$

مثال: اگر $f(x) = \sqrt{1-x}$, $g(x) = \frac{x}{x+3}$ دامنه $f \circ g$ ؟ , در آخره اعلان مدرسه

(۱۲۵) $D_f: (-\infty, 1]$ $1-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 1$

(۱۲۵) $D_g: \mathbb{R} - \{-3\}$

(۱۲۵) $D_{f \circ g} = D_{f(g(x))} = \left\{ x \in D_g \mid g(x) \in D_f \right\} = \left\{ \mathbb{R} - \{-3\} \mid \frac{x}{x+3} \in (-\infty, 1] \right\}$

راه تری: $f \circ g$ را با g ساده کنیم دامنه بگیر

$$y = f(g(x)) = \sqrt{1 - g(x)} = \sqrt{1 - \frac{x}{x+3}}$$

$$\frac{x+3-x}{x+3} = \frac{3}{x+3} \geq 0 \Rightarrow x > -3$$

$x \in (-3, +\infty)$

(۱۲۵) جواب آخر: $(-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$: $x \in (-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$

(۱۲۵) $\frac{x}{x+3} \leq 1 \Rightarrow \frac{x}{x+3} - 1 \leq 0$

(۱۲۵) $\frac{x - x - 3}{x+3} = \frac{-3}{x+3} \leq 0$

نقطه (۳) $x \in (-3, +\infty)$

