

«تساوی دو تابع» دامنه‌های مساوی ضابطه‌های مساوی

برای
معان
دیفانی
جبریدو تابع f و g مساوی هستند هر گاه:الف) دامنه‌ی f و g با هم برابر باشند.ب) برای هر x از دامنه‌ی f (یا g) داشته باشیم، $f(x) = g(x)$ (ضابطه‌ها برابر باشند).حرف اول الفبا، و پارچه عددی حرف آخر الفبا
در صورتی که در یک طرف قرار دارد و در طرف دیگر قرار داردتعریف: به ازای چند مقدار a دو تابع $f(x) = \frac{2x^2 + 2x - 2a}{x^2 + x - a}$ و $g(x) = a^3 - a + 2$ با هم مساوی هستند؟

۲ (۴)

۳ (۳)

۱ (۲)

۰ (۱) صفر

f باید تابع
ثابت باشد

پاسخ: گزینه «۲»

$$f(x) = \frac{2x^2 + x - a}{x^2 + x - a} = 2 = g(x) = a^3 - a + 2 \Rightarrow a^3 - a = 0 \Rightarrow a(a^2 - 1) = 0 \Rightarrow a = 0, \pm 1$$

از طرفی $D_g = \mathbb{R}$ پس $D_f = \mathbb{R}$ ، یعنی مخرج تابع f نباید دارای ریشه باشد.

$$x^2 + x - a \neq 0 \Rightarrow \Delta < 0 \Rightarrow 1 + 4a < 0 \Rightarrow a < -\frac{1}{4} \Rightarrow a = -1$$

تعریف: کدام دو تابع با هم، برابرند؟

$$g(x) = \frac{x}{1-x}, f(x) = \frac{x(x+1)}{(1-x)(2+x)} \quad (2)$$

$$g(x) = x\sqrt{x} \cdot \sqrt{x+1}, f(x) = x\sqrt{x^2 + x} \quad (1)$$

$$g(x) = 0, f(x) = \left[\frac{x^2 + 1}{x^2 + 2} \right] \quad (4) \checkmark$$

$$g(x) = \cos x, f(x) = \sqrt{1 - \sin^2 x} \quad (3)$$

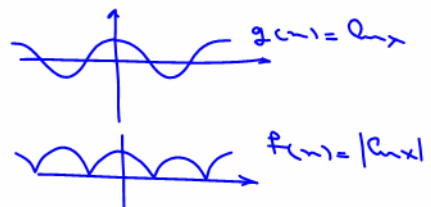
$$1) f(x) = x \sqrt{\frac{x^2 + x}{x(x+1)}} \Rightarrow \frac{x}{x} \sqrt{\frac{x^2 + x}{x(x+1)}} = \sqrt{\frac{x^2 + x}{x(x+1)}} = \sqrt{\frac{x}{x+1}} \Rightarrow D_f = (-\infty, -1] \cup [0, +\infty)$$

$$g(x) = x \sqrt{x} \sqrt{x+1} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 & (الف) \\ x+1 \geq 0 & (ب) \end{cases} \Rightarrow D_g = [0, +\infty) \neq D_f$$

$$2) D_f: \mathbb{R} - \{-2, 1\} \neq D_g: \mathbb{R} - \{-2, -1, 1\}$$

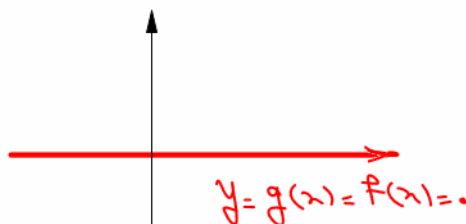
$$3) f(x) = \sqrt{1 - \sin^2 x} = |\cos x| \neq g(x) = \cos x \quad \text{ضابطه‌ها نامبرابرند}$$

$$y = \sqrt{v^2} = |v|$$



$$4) f(x) = \left[\frac{x^2 + 1}{x^2 + 2} \right] = 0 = g(x)$$

$$D_f: \mathbb{R} = D_{g(x)=0}: \mathbb{R}$$

هر دو تابع f و g تابع ثابت $y=0$ هستند و در همه جا همدانند.

تمرین: اگر دو تابع $f(x) = \frac{ax+2}{x^2-mx+n}$ و $g(x) = \frac{x-b}{2x^2-3x-5}$ مساوی باشند، حاصل $am-bn$ کدام است؟

$$\frac{23}{2} \quad (4) \quad -\frac{37}{4} \quad (3) \quad \frac{17}{2} \quad (2) \quad -\frac{29}{4} \quad (1)$$

برای مساوی دو تابع باید دانه‌ها برابر باشند پس مخرج f باید مثل g درجه ۱ داشته باشد.

$$g(x) = \frac{x-b}{2(x-\frac{3}{2})(x+1)} = \frac{\frac{1}{2}(x-b)}{(x-\frac{3}{2})(x+1)} = f(x) = \frac{ax+2}{(x-\frac{3}{2})(x+1)}$$

$$f(x) = \frac{ax+2}{x^2-mx+n} = g(x) = \frac{\frac{1}{2}(x-b)}{x^2-\frac{3}{2}x-\frac{5}{2}}$$

$$a = \frac{1}{2} \quad b = -4 \quad m = \frac{3}{2} \quad n = -\frac{5}{2}$$

$$am - bn = \frac{3}{4} - 10 = -\frac{37}{4}$$

تمرین: به ازای کدام مقدار k ، دو تابع $f(x) = 2x-1$ و $g(x) = \begin{cases} \frac{4x^2-1}{2x+1}, & x \neq -\frac{1}{2} \\ 1-k, & x = -\frac{1}{2} \end{cases}$ برابرند؟ دو تابع برابر با ایس برابر خدبی یاب

برابری دهند لذا به ازای $x = -\frac{1}{2}$

$$g(-\frac{1}{2}) = 1-k = f(-\frac{1}{2}) = 2(-\frac{1}{2}) - 1 = -2 \rightarrow k = 3$$

$$\begin{cases} f(x) = x \\ D_f: \mathbb{R} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} g(x) = (\sqrt{x})^2 \\ D_g: [0, +\infty) \end{cases}$$

چند تابع نامساوی:

$$\begin{cases} f(x) = \log x^2 \\ D_f: \mathbb{R} - \{0\} \end{cases}$$

$$\begin{cases} g(x) = 2 \log x \\ D_g: (0, +\infty) \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x(x+1)} \\ D_f: (-\infty, -1] \cup [0, +\infty) \end{cases}$$

$$\begin{cases} g(x) = \sqrt{x} \sqrt{x+1} \\ D_g: [0, +\infty) \end{cases}$$

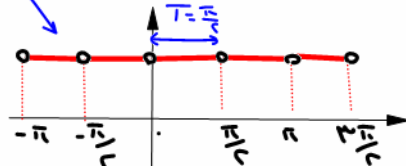
$$f(x) = \tan x \cdot \cot x$$

$$f(x) = \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{\cos x}{\sin x} = 1$$

$$\begin{cases} g(x) = 1 \\ D_g = \mathbb{R} \end{cases}$$

$$g(x) = 1$$

$$D_f: \mathbb{R} - \{x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$$



فایم $f(x) + g(x)$ زیرا $f(x)$ و $g(x)$ همواره متوالی با نامنه $T = \frac{\pi}{2}$ دارد که در آن‌ها تعریف نمی‌شود.

Homework (1)

۱ به ازای چند مقدار طبیعی از دامنه تابع $y = -\frac{1}{3-x}$ ، نمودار این تابع بالای $y = -4$ و پایین $y = 0$ قرار دارد؟

(۲) ۳

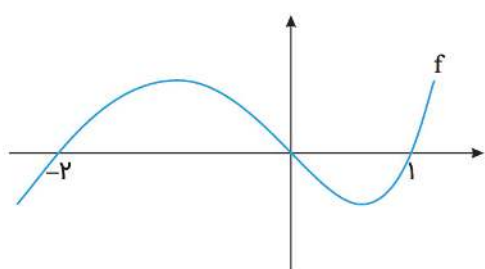
(۱) ۴

(۴) ۱

(۳) ۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

۲ نمودار زیر، تابع f را نشان می‌دهد. دامنه تابع $g(x) = \sqrt{-\frac{f(x)}{f(2+x)}}$ شامل چند عدد صحیح است؟



(۱) ۳

(۲) ۶

(۳) ۴

(۴) ۵

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۳ اگر عبارت $\sqrt[4]{\frac{2}{x^2} - \frac{9}{2}} + \sqrt[3]{2x - x^2}$ عدد حقیقی باشد، مجموعه مقادیر x در کدام بازه است؟

(۲) $[-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}]$ (۱) $[\frac{2}{3}, 2]$ (۴) $[-\frac{2}{3}, 0) \cup (0, \frac{2}{3}]$ (۳) $[-\frac{2}{3}, 0) \cup (0, 2]$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۶

۴ اگر $\frac{4-2x}{3x+1} \geq 0$ باشد، مجموعه مقادیر $[3x]$ چند عضو دارد؟

(۲) ۶

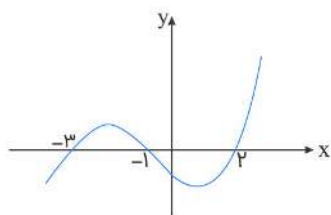
(۱) ۵

(۴) ۸

(۳) ۷

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

۵ شکل زیر، نمودار تابع با ضابطه $f(x)$ است. دامنه تابع غیرنقطه‌ای $\sqrt{(x+1)f(x)}$ کدام است؟



کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۷

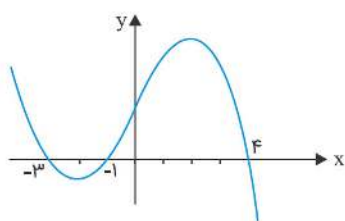
(۱) $[-3, 2]$

(۲) $[-1, +\infty)$

(۳) $(-\infty, -1]$

(۴) $\mathbb{R} - (-3, 2)$

۶ شکل زیر، نمودار تابع $y = f(x-2)$ است. دامنه تابع با ضابطه $\sqrt{xf(x)}$ ، کدام است؟



کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۴

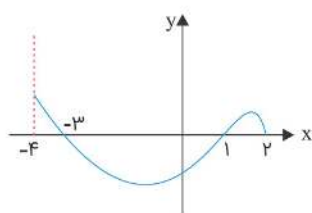
(۱) $[-1, 1] \cup [0, 6]$

(۲) $[-3, 1] \cup [0, 2]$

(۳) $[-5, -3] \cup [-1, 2]$

(۴) $[-5, -3] \cup [0, 2]$

۷ شکل زیر، نمودار تابع $y = f(x)$ است. دامنه تابع $\sqrt{xf(x)}$ کدام است؟



کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۲

(۱) $[0, 2]$

(۲) $[-3, 2]$

(۳) $[-4, -3] \cup [1, 2]$

(۴) $[-3, 0] \cup [1, 2]$

۸ به ازای کدام مجموعه مقادیر k ، بازه $(k-2, 3k+2)$ زیرمجموعه‌ای از دامنه تابع $f(x) = \frac{\sqrt{9-x^2}}{x-1}$ است؟

(۲) $[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$

(۱) $(\frac{1}{3}, 3]$

(۴) $[-1, -\frac{1}{3})$

(۳) $[-1, \frac{1}{3})$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۸

۹ اگر $f(x) = \sqrt{x+|x+2|}$ ، دامنه تابع $f(-x)$ کدام است؟

(۲) $x \geq -1$

(۱) $x \leq -1$

(۴) $x \geq 1$

(۳) $x \leq 1$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۲

پاسخ (1) Homework

گزینه ۳

۱

$$\text{دامنه} = \mathbb{R} - \{3\}$$

$$-4 < -\frac{1}{3-x} < 0 \Rightarrow 0 < \frac{1}{3-x} < 4$$

$$x=1 \Rightarrow 0 < \frac{1}{2} < 4$$

$$x=2 \Rightarrow 0 < 1 < 4$$

فقط همین دو عدد طبیعی در نامعادله صدق می‌کند. ضمناً برای $x > 3$ عبارت $\frac{1}{3-x}$ منفی است.

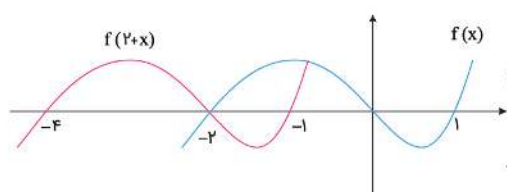
کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

گزینه ۱

۲

$$g(x) = \sqrt{-\frac{f(x)}{f(x+2)}} \Rightarrow -\frac{f(x)}{f(x+2)} \geq 0 \Rightarrow \frac{f(x)}{f(x+2)} \leq 0$$

$$f(x) = 0; \quad x = -2, 0, 1$$



$$f(x+2) = 0; \quad x = -4, -2, -1$$

x	-4	-2	-1	0	1
f(x)	-	-	+	+	-
f(x+2)	-	+	-	+	+
$\frac{f(x)}{f(x+2)}$	+	-	-	+	-

$$D_g = (-4, -2) \cup (-2, -1) \cup [0, 1]$$

دامنه تابع شامل اعداد صحیح ۳، ۰ و ۱ است.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

گزینه ۴

۳

راه حل تستی:

می‌توانیم از روش رد گزینه استفاده نماییم:

 $x = 0 \Leftarrow$ غ.ق. $\Leftarrow$ گزینه (۲) حذف می‌شود. $x = 1 \Leftarrow$ غ.ق. $\Leftarrow$ گزینه (۱) و (۳) حذف می‌شوند.

راه حل تشریحی:

$$\frac{2}{x^2} - \frac{9}{2} \geq 0 \Rightarrow \frac{4 - 9x^2}{2x^2} \geq 0 \Rightarrow 4 - 9x^2 \geq 0 \xrightarrow{x \neq 0} x^2 \leq \frac{4}{9} \xrightarrow{x=0} -\frac{2}{3} \leq x \leq \frac{2}{3}$$

از طرفی چون x صحیح است، پس گزینه (۴) قابل قبول است.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۶

گزینه ۴

۴

$$\frac{4-2x}{3x+1} \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} 4-2x=0 \Rightarrow x=2 \\ 3x+1=0 \Rightarrow x=-\frac{1}{3} \end{cases}$$

x	$-\frac{1}{3}$	2
$4-2x$	+	+
$3x+1$	-	+
$\frac{4-2x}{3x+1}$	-	+

$$\Rightarrow -\frac{1}{3} < x \leq 2 \xrightarrow{\times 3} -1 < 3x \leq 6$$

$$\Rightarrow [3x] = -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 \Rightarrow 8 \text{ عضو}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

گزینه ۴

۵

$$(x+1)f(x) \geq 0$$

$$(x+1)f(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x+1=0 \Rightarrow x=-1 \\ f(x)=0 \Rightarrow x=-3, -1, 2 \end{cases}$$

x	$-\infty$	-3	-1	2	$+\infty$
$(x+1)f(x)$	+	0	-	0	+

دامنه تابع به صورت $(-\infty, -3] \cup [2, +\infty) \cup \{-1\}$ است که طبق گفته مسئله،
دامنه تابع غیرنقطه‌ای به صورت $\mathbb{R} - (-3, 2)$ خواهد بود.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۷

گزینه ۴

۶

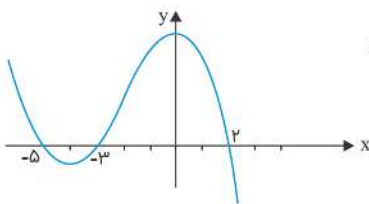
کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۴

گام اول

الف) عبارت زیر رادیکال با فرجه زوج همواره نامنفی است، پس باید $xf(x) \geq 0$ باشد، پس x و $f(x)$ باید هر دو هم‌علامت باشند.
 ب) برای به دست آوردن نمودار تابع $f(x)$ از روی نمودار تابع $f(x-2)$ ، کافی است نمودار تابع $f(x-2)$ را دو واحد به سمت چپ انتقال دهیم.

گام دوم

باتوجه به نمودار تابع $f(x-2)$ و با انتقال دو واحدی آن به سمت چپ، نمودار تابع $f(x)$ را رسم می‌کنیم:



طبق گام اول، محدوده‌ای که در آن x و $f(x)$ هم‌علامت باشند، قابل قبول است پس دامنه تعریف تابع $\sqrt{xf(x)}$ برابر است با: $[-5, -3] \cup [0, 2]$

گزینه ۴

۷

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۲

گام اول

عبارت زیر رادیکال با فرجه زوج باید نامنفی باشد، پس داریم: $xf(x) \geq 0$

گام دوم

حالا با استفاده از جدول تعیین علامت، مشخص می‌کنیم در چه بازه‌هایی $xf(x) \geq 0$ برقرار است. داریم:

x	-۴	-۳	۰	۱	۲
x	-	-	۰	+	+
$f(x)$	+	۰	-	-	+
$xf(x)$	-	۰	+	-	+

دو بازه مشخص شده مقادیر قابل قبول برای دامنه تعریف تابع است، پس دامنه تعریف تابع $\sqrt{xf(x)}$ به صورت $[1, 2] \cup [-3, 0]$ درمی‌آید.

گزینه ۴

۸

دامنه تابع $\{1\} - [-3, 3]$ است. اگر $(k-2, 3k+2) \subseteq [-3, 3]$ زیرمجموعه دامنه تابع باشد، دو حالت رخ می‌دهد:

$$(1) : (k-2, 3k+2) \subseteq [-3, 1) \Rightarrow \begin{cases} 3k+2 < 1 \Rightarrow k < -\frac{1}{3} \\ k-2 \geq -3 \Rightarrow k \geq -1 \end{cases} \xrightarrow{\cap} k \in [-1, -\frac{1}{3})$$

$$(2) : (k-2, 3k+2) \subseteq (1, 3] \Rightarrow \begin{cases} 3k+2 \leq 3 \Rightarrow k \leq \frac{1}{3} \\ k-2 > 1 \Rightarrow k > 3 \end{cases} \xrightarrow{\cap} \emptyset$$

پس گزینه ۴ صحیح است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۸

گزینه ۳

۹

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۲

گام اول

وقتی دامنه تعریف تابع $f(-x)$ از ما خواسته شده است، پس ابتدا باید ضابطه $f(-x)$ را از روی تابع $f(x)$ تشکیل دهیم. تابع داده شده یک تابع رادیکالی با فرجه زوج است، پس عبارت زیر رادیکال باید نامنفی باشد.

گام دوم

تشکیل ضابطه $f(-x)$ و تعیین دامنه تعریف آن:

$$f(x) = \sqrt{x + |x + 2|} \Rightarrow f(-x) = \sqrt{-x + |-x + 2|} = \sqrt{|-x + 2| - x}$$

$$|-x + 2| - x \geq 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x > 2 : -x + 2 < 0 \Rightarrow |-x + 2| - x \geq 0 \Rightarrow x - 2 - x \geq 0 \Rightarrow -2 \geq 0 \text{ غ.ق.ق} \\ x \leq 2 : -x + 2 \geq 0 \Rightarrow |-x + 2| - x \geq 0 \Rightarrow -x + 2 - x \geq 0 \Rightarrow -2x + 2 \geq 0 \\ \Rightarrow 2x \leq 2 \Rightarrow x \leq 1 \end{cases}$$

با توجه به بازه اولیه دامنه تعریف تابع $f(-x)$ ، به صورت $x \leq 1$ در می آید.

Homework (2)

۱ اگر توابع $f(x) = \frac{1}{x-2}$ و $g(x) = \frac{(ax+b)}{x^2+cx+d}$ باهم مساوی باشند، حاصل $\frac{b}{d} - \frac{a}{c}$ کدام است؟

$$\frac{3}{4} \quad (2)$$

$$\frac{-1}{4} \quad (4)$$

$$\frac{1}{4} \quad (1)$$

$$\frac{-3}{4} \quad (3)$$

۲ کدام دو تابع زیر باهم برابرند؟

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x^2} \\ g(x) = x \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2}{x^2} \\ g(x) = 1 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x(x-2)} \\ g(x) = \sqrt{x} \times \sqrt{x-2} \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2+3}{x^2+3} \\ g(x) = 1 \end{cases} \quad (3)$$

۳ چند جفت از توابع زیر با یکدیگر برابرند؟

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x^2} \\ g(x) = \sqrt[3]{x^3} \end{cases} \quad (ب) \quad \begin{cases} f(x) = \sqrt{x(x-2)} \\ g(x) = \sqrt{x} \times \sqrt{x-2} \end{cases} \quad (ب) \quad \begin{cases} f(x) = \frac{x^2+2}{x^2+2} \\ g(x) = \frac{2x^2+3}{2x^2+3} \end{cases} \quad (الف)$$

$$2 \quad (2)$$

$$3 \quad (1)$$

$$4 \quad (4) \text{ صفر}$$

$$1 \quad (3)$$

۴ آیا توابع زیر برابرند؟

$$f(x) = \sqrt{2-x} \times \sqrt{2x+4}$$

$$g(x) = \sqrt{4-2x^2}$$

کدام دو تابع زیر، باهم برابرند؟

۵

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x^2} \\ g(x) = x \end{cases} \quad (۲)$$

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x}{x} \\ g(x) = 1 \end{cases} \quad (۱)$$

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x(x-1)} \\ g(x) = \sqrt{x} \times \sqrt{x-1} \end{cases} \quad (۴)$$

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2+1}{x^2+1} \\ g(x) = 1 \end{cases} \quad (۳)$$

باتوجه به توابع زیر، کدام تساوی درست است؟

۶

$$f(x) = \sqrt{x} \cdot \sqrt{x-1}, \quad g(x) = \sqrt{x^2 - x}$$

$$\begin{cases} h: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \\ h(x) = \sqrt{x^2 - x} \end{cases}, \quad \begin{cases} s: \mathbb{R} - [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ s(x) = \sqrt{x^2 - x} \end{cases}$$

$$g = s \quad (۲)$$

$$f = h \quad (۱)$$

$$\text{گزینه‌های "۱" و "۲"} \quad (۴)$$

$$f = g \quad (۳)$$

کدام دو تابع زیر، باهم برابرند؟

۷

$$f(x) = \frac{x}{|x|}, \quad g(x) = \begin{cases} 1 & ; x < 0 \\ -1 & ; x > 0 \end{cases} \quad (۱)$$

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}, \quad g(x) = x+1 \quad (۲)$$

$$f(x) = \sqrt{x^2 - x}, \quad g(x) = \sqrt{x} \times \sqrt{x-1} \quad (۳)$$

$$\begin{cases} f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) = \cos(180^\circ x) \end{cases}, \quad \begin{cases} g: \mathbb{N} \rightarrow \{-1, 1\} \\ g(x) = (-1)^x \end{cases} \quad (۴)$$

چه تعداد از تابع‌های زیر مساوی هستند؟

۸

$$g(x) = \sqrt{x-2}\sqrt{x+2} \text{ و } f(x) = \sqrt{x^2-4} \quad (۱)$$

$$g(x) = |x-3||x+3| \text{ و } f(x) = |x^2-9| \quad (۲)$$

$$g(x) = [x+2] \text{ و } f(x) = [x]+2 \quad (۳)$$

$$g(x) = \frac{1}{x} \text{ و } f(x) = \frac{x^2+2}{x^3+2x} \quad (۴)$$

$$۳ \quad (۲)$$

$$۴ \quad (۱)$$

$$۱ \quad (۴)$$

$$۲ \quad (۳)$$

تابع $y = |x-2|$ با کدامیک از توابع زیر مساوی است؟

۹

$$y = \left| \frac{4x+1}{4} \right| \quad (۲)$$

$$y = \left| \frac{x^2-4}{x+2} \right| \quad (۱)$$

$$y = \left| \frac{(x-2)^2}{x-2} \right| \quad (۴)$$

$$y = \left| \frac{6x-12}{6} \right| \quad (۳)$$

پاسخ (2) Homework

گزینه ۴

۱

برای تساوی دو تابع ابتدا باید دامنهٔ برابری داشته باشند، در نتیجه عدد ۲ باید ریشهٔ مضاعف $x^2 + cx + d$ باشد:

$$\begin{cases} c = -4 \\ d = 4 \end{cases} \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$$

حال باید ضابطهٔ برابر داشته باشند. در این صورت عبارت $ax + b$ باید برابر $(x - 2)$ شود:

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \end{cases} \Rightarrow \frac{b}{d} - \frac{a}{c} = \frac{-2}{4} - \left(\frac{1}{-4}\right) = \frac{-2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{-1}{4}$$

گزینه ۳

۲

بررسی گزینه‌ها:
گزینهٔ "۱":

$$D_g = \mathbb{R}, D_f = \mathbb{R} - \{0\} \Rightarrow D_f \neq D_g$$

گزینهٔ "۲":

$$D_f = D_g = \mathbb{R}, \quad \begin{cases} f(x) = |x| \\ g(x) = x \end{cases}$$

ولی شرط دوم را ندارد.
مثال نقض: به ازای $x = -2$:

$$\begin{cases} f(-2) = 2 \\ g(-2) = -2 \end{cases} \Rightarrow f(-2) \neq g(-2)$$

گزینهٔ "۳":

$$\begin{cases} D_f = \mathbb{R} \\ D_g = \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow D_f = D_g$$

$$f(x) = \frac{x^2 + 3}{x^2 + 3} = 1$$

$$f(x) = g(x) = 1$$

پس دو تابع مساوی‌اند.
گزینهٔ "۴":

$$D_g = [2, +\infty)$$

$$x(x - 2) \geq 0 \Rightarrow D_f = (-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$$

$$D_f \neq D_g$$

گزینه ۳

۳

$$\text{الف) } D_f = D_g = \mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} f(x) = 1 \\ g(x) = 1 \end{cases} \Rightarrow f(x) = g(x)$$

دو تابع مساوی هستند.

$$\text{ب) } D_f = (-\infty, 0] \cup [2, +\infty) \neq D_g = [2, +\infty)$$

پس دو تابع مساوی نیستند.

$$\text{پ) } D_f = D_g = \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} f(x) = |x| \\ g(x) = x \end{cases} \Rightarrow f(x) \neq g(x)$$

پس دو تابع مساوی نیستند.

۴

$$D_f : \begin{cases} 2 - x \geq 0 \Rightarrow x \leq 2 \\ 2x + 4 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2 \end{cases} \Rightarrow D_f = [-2, 2]$$

$$D_g : 8 - 2x^2 \geq 0 \Rightarrow -2 \leq x \leq 2 \Rightarrow D_g = [-2, 2]$$

$$D_f = D_g$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{2-x} \times \sqrt{2x+4} = \sqrt{2(2+x)(2-x)} \\ &= \sqrt{2(4-x^2)} = \sqrt{8-2x^2} = g(x) \end{aligned}$$

پس: $f = g$

گزینه ۳

۵

گزینه "۱": $D_f \neq D_g$ گزینه "۲": $f(-1) \neq g(-1)$ گزینه "۴": $D_f \neq D_g$

گزینه ۱

۶

$$\left. \begin{aligned} D_f &= [1, +\infty) \\ D_g &= (-\infty, 0] \cup [1, +\infty) = \mathbb{R} - (0, 1) \\ D_h &= [1, +\infty) \\ D_s &= \mathbb{R} - [0, 1] \end{aligned} \right\} \Rightarrow f = g, g = s$$

گزینه ۴

۷

گزینه "۱": $f(1) = g(1)$ گزینه "۲": $D_f = D_g$ گزینه "۳": $D_f = D_g$ گزینه "۴": $D_f = D_g = \mathbb{N}$

$$\left. \begin{array}{l} \text{زوج } x \Rightarrow \cos(180^\circ x) = 1 = (-1)^x \\ \text{فرد } x \Rightarrow \cos(180^\circ x) = -1 = (-1)^x \end{array} \right\} \Rightarrow f(x) = g(x)$$

گزینه ۲

۸

بررسی "آ":

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) = \sqrt{x^2 - 4} = \sqrt{(x-2)(x+2)} = g(x) \\ D_f = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty) \\ D_g = [2, +\infty) \end{array} \right. \Rightarrow D_f \neq D_g \Rightarrow f \neq g$$

بررسی "ب":

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) = |x^2 - 9| = |x-3||x+3| = g(x) \\ D_f = D_g = \mathbb{R} \end{array} \right. \Rightarrow f = g$$

بررسی "پ":

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) = [x] + 2 = [x+2] = g(x) \\ D_f = D_g = \mathbb{R} \end{array} \right. \Rightarrow f = g$$

بررسی "ت":

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) = \frac{x^2 + 2}{x^3 + 2x} = \frac{x^2 + 2}{x(x^2 + 2)} = \frac{1}{x} = g(x) \\ D_f = D_g = \mathbb{R} - \{0\} \end{array} \right. \Rightarrow f = g$$

گزینه ۳

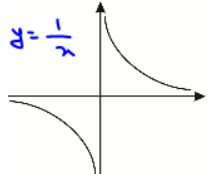
۹

برای تساوی دو تابع ابتدا دامنه آن دو باید برابر باشد و سپس ضابطه آن‌ها. در نتیجه با این توضیحات تنها گزینه "۳" درست است. (دامنه هر دو تابع برابر با مجموعه $\mathbb{R}$ می‌باشد و $|y| = \left| \frac{6x-12}{6} \right| = |x-2|$)

تابع گویا را از مخرج نه کن. در ریشه مخرج تعریف نمی شود.

هر تابع کسری که صورت و مخرج آن چند جمله ای های جبری باشند به طوری که مخرج صفر نشود، تابع گویا نام دارد.

$y = \frac{1}{x}$ همواره ایند دارد.

ساده ترین تابع گویا $f(x) = \frac{1}{x}$ با دامنه $\mathbb{R} - \{0\}$ است که به صورت  می باشد. حال با توجه به این تابع، بقیه را با

استفاده از انتقال رسم می کنیم.

تمرین: نمودار $y = \frac{1}{x+4} - 3$ در کدام گزینه به درستی نمایش داده شده است؟ $y = \frac{1}{x}$ است که به $x+4$ تبدیل شده.

پس نمودار $y = \frac{1}{x}$ را عدد به چپ منتقل می شود

د به خاطر ۳ - و عدد به پایین می رود.

گزینه (۳) درست است!

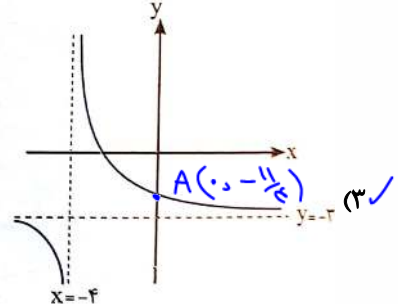
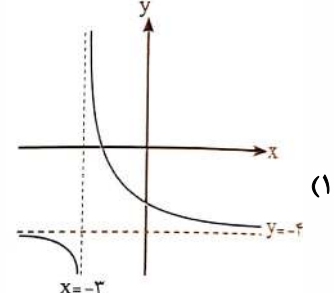
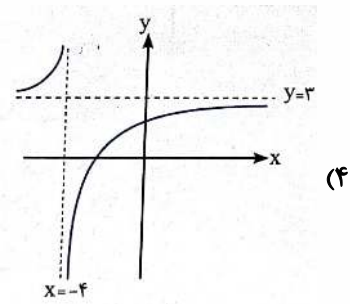
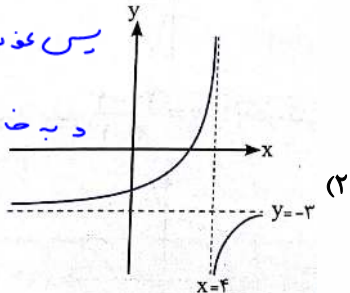
دقت: $y = \frac{1}{x+4} - 3$

در $x = -4$ به تعریف شده

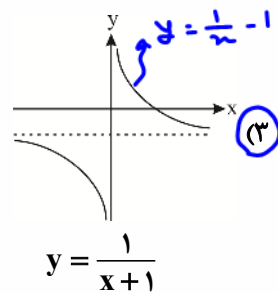
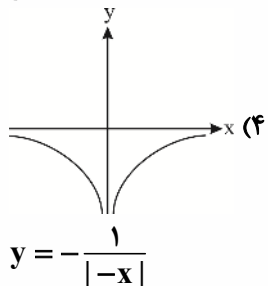
نباشد و از $A(0, \frac{1}{4} - 3)$

$A(0, -\frac{11}{4})$

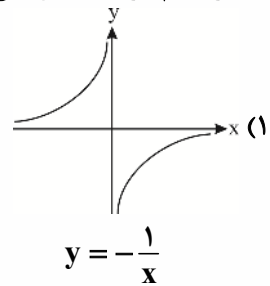
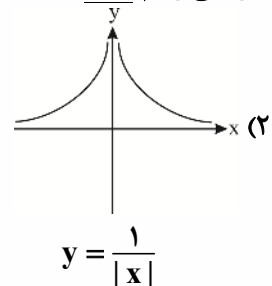
مبررکنه



(مشابه تمرین کتاب درسی)

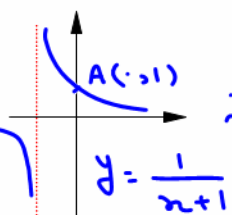


تمرین: در کدام گزینه، شکل تابع به درستی رسم نشده است؟

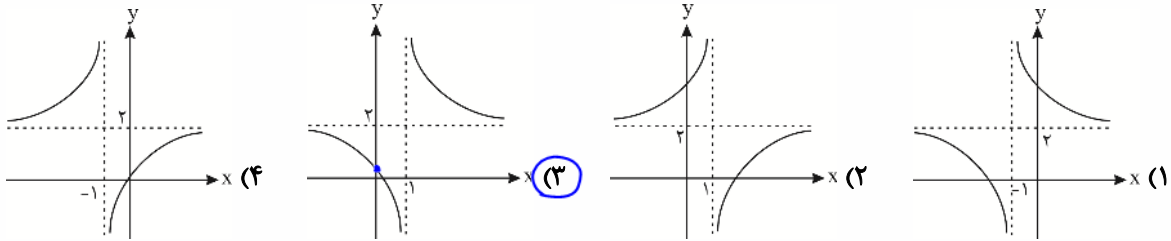


باید در $x = -1$ تعریف نشود

دهان $y = \frac{1}{x}$ است که به دایره به چپ رفته



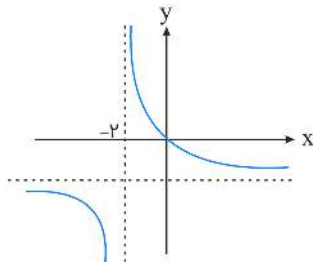
تعرین: کدام یک از گزینه‌های زیر نمودار تابع $y = \frac{2x-1}{x-1}$ را به درستی نمایش می‌دهد؟



$$y = \frac{2x-1}{x-1}$$

در $x=1$ تعریف نشود با گزینه ۲ درسته با گزینه ۳ آها
 $A(0,1)$ روی تابع است لذا گزینه ۳ درست است.

تعرین: اگر نمودار تابع $f(x) = \frac{x+a}{bx-2}$ به صورت زیر باشد، $f(1)$ کدام است؟



$$-\frac{1}{2} \quad (2)$$

$$-1 \quad (1)$$

$$-\frac{1}{3} \quad (4)$$

$$-\frac{3}{2} \quad (3)$$

ی بینم تابع در $x=-2$ تعریف نشده است لذا $x=-2$ ریشه محسوس است:

$$b(-2) - 2 = 0 \rightarrow -2b = 2 \rightarrow b = -1$$

از طریقی تابع از مبدأ $O(0,0)$ عبور کرده لذا مختصات مبدأ در ضابطه تابع وارد می‌شود:

$$f(0) = \frac{0+a}{0-2} = 0 \rightarrow a=0 \rightarrow f(x) = \frac{x}{-x-2} \quad f(1) = \frac{1}{-1-2} = -\frac{1}{3} \quad \text{گزینه ۴}$$

اَعمال روی توابع چهار عمل اصلی روی تابع‌ها $\frac{f}{g}$ در آبس x سادی عملیات روی مؤلفه دوم یا y انجام می‌شود.

اگر f و g دو تابع باشند، آن‌گاه جمع، تفاضل، ضرب و تقسیم این دو تابع به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \times g(x)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

دامنه‌ی توابع $f \pm g$ و $f \cdot g$ اشتراک دامنه‌های f و g است و دامنه‌ی $\frac{f}{g}$ اشتراک دامنه‌های f و g است به جز نقاطی که $g(x) = 0$.

اگر توابع f و g به صورت زوج‌های مرتب مطرح شوند، مثلاً $f = \{(a, b), (1, 2)\}$ و $g = \{(a, c), (2, 1)\}$ ، منظور از $f+g$ آن است که مؤلفه‌های دوم زوج‌های مرتبی از f و g را که دارای مؤلفه‌های اول یکی هستند (اشتراک دامنه‌ها)، با هم جمع کنیم. یعنی:

$$f+g = \{(a, b+c)\}$$

و به همین ترتیب $f-g$ ، $f \cdot g$ و $\frac{f}{g}$ عبارت است از:

$$f-g = \{(a, b-c)\}, \quad f \cdot g = \{(a, b \times c)\}, \quad \frac{f}{g} = \left\{(a, \frac{b}{c})\right\}, \quad c \neq 0$$

$$f = \{(2, -3), (2, 5), (2, 9)\} \quad \sqrt{f} = \{(2, \sqrt{5}), (2, \sqrt{9})\}$$

$$f^2 = \{(2, 9), (2, 25), (2, 81)\}$$

حواستون باشه که دو زوج مرتب $(1, 2)$ و $(2, 1)$ در f و g ، چون مؤلفه‌های اول یکسان ندارند در $f \pm g$ و $f \cdot g$ و $\frac{f}{g}$ به بازی گرفته نمی‌شن!

تذکر: $(kf)(x) = kf(x)$ و $D_{kf} = D_f$ و منظور از $(kf)(x)$ آن است که اعضای برد f در k ضرب شوند. مثلاً:

$$f = \{(a, b), (1, 2)\} \Rightarrow 3f = \{(a, 3b), (1, 6)\}$$

تعین: اگر $f(x) = \sqrt{x+1}$ و $g(x) = \frac{x+1}{x-2}$ ، مقدار $(2f - g)(3)$ کدام است؟

$$\begin{matrix} 2(4) & 1(3) & 0(2) & -1(1) \end{matrix}$$

$$2f(3) - g(3) = 2(\sqrt{3+1} = 2) - \left(\frac{3+1}{3-2} = 4\right) = -2$$

گزینه ۲

تعین: اگر $f = \{(1, 4), (2, 3), (5, 1), (4, 2)\}$ و $g(x) = \frac{x+1}{x-1}$ باشد، کدام مجموعه‌ی زیر نشان‌دهنده‌ی تابع $f + g$ می‌باشد؟

در آیس مادی چهارجایی

$$\{(2, 6), (5, \frac{5}{4})\} \quad (2)$$

$$\{(2, 6), (5, \frac{5}{4}), (4, \frac{11}{3})\} \quad (1)$$

$$\{(2, 4), (5, 1), (4, 10)\} \quad (4)$$

$$\{(2, 6), (5, 10), (4, 11)\} \quad (3)$$

$$f + g = \{(2, 7), (5, 4\frac{3}{4} = \frac{19}{4}), (4, 2\frac{3}{4} = \frac{11}{4})\}$$

تعریف نشه

$$g = \{(1, \frac{2}{1}), (2, 3), (5, \frac{3}{2}), (4, \frac{5}{3})\}$$

گزینه ۱

برای ساخت $2f$

تعین: اگر $f = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$ و $g = \{(1, 5), (2, 6), (3, 0)\}$ باشد، آن گاه تابع $\frac{2f}{g}$ کدام است؟

در همان مهای f

عروض‌ها دو برابر می‌شوند

$$\{(2, 1), (1, \frac{4}{5})\} \quad (4)$$

$$\{(1, \frac{4}{5}), (2, \frac{1}{4})\} \quad (3)$$

$$\{(1, \frac{4}{5}), (3, 1)\} \quad (2)$$

$$\emptyset \quad (1)$$

$$2f = \{(1, 4), (2, 6), (3, 8)\}$$

$$g = \{(1, 5), (2, 6), (3, 0)\}$$

$$\frac{2f}{g} = \{(1, \frac{4}{5}), (2, 1)\}$$

گزینه ۴

ت. ان

تعریف: اگر $f = \{(4, 3), (3, 1), (5, 4)\}$ و $2f - g = \{(3, 6), (4, 4)\}$ باشد، تابع $\frac{f}{g}$ کدام است؟

(2) $\{(3, -\frac{1}{4})\}$

(1) $\{(3, -\frac{1}{4}), (4, \frac{3}{4})\}$

(4) $\{(4, \frac{3}{4})\}$

(3) $\{(3, \frac{3}{4}), (4, \frac{3}{4})\}$

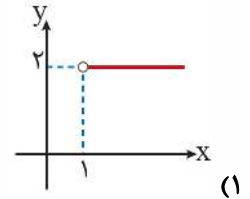
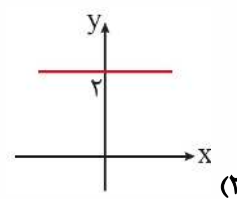
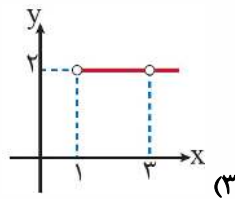
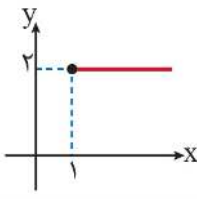
$2f = \{(8, 6), (6, 2), (10, 8)\}$

$(2f - g) - (2f) = -g = \{(3, 2), (4, 4)\} - \{(8, 6), (6, 2), (10, 8)\} = \{(3, 2-6), (4, 4-2)\} = \{(3, -4), (4, 2)\}$
 نزدیک $\ominus$ ضرب کن تا به دست آید یعنی در

همان x عرض ها را قرار بده

تعریف: اگر $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{x-3}$ و $g(x) = \frac{2x-6}{\sqrt{x-1}}$ ، آن گاه نمودار تابع $f \cdot g$ کدام است؟

عین

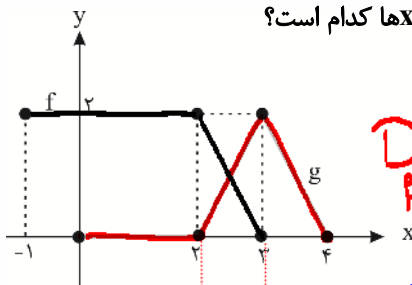


$D_{f \cdot g} : D_f \cap D_g = ([1, +\infty) - \{3\}) \cap (1, +\infty) = (1, +\infty) - \{3\}$

$f \cdot g = \frac{\sqrt{x-1}}{x-3} \cdot \frac{2(x-3)}{\sqrt{x-1}} = 2$ تابع ثابت
 که در $(1, +\infty) - \{3\}$ تعریف می‌شود
 گزینه ۳

تعریف: اگر نمودار توابع f و g به صورت زیر باشد، مساحت محصور بین نمودار تابع $f + g$ و محور x ها کدام است؟

گیرفتار

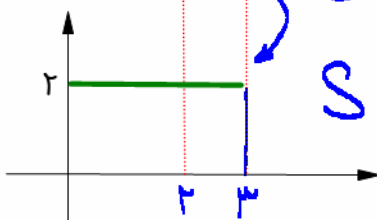


$D_{f+g} : (D_f : [-1, 3]) \cap (D_g : [0, 4]) = [-1, 3]$

در اشتراک دامنه ها در ایس مادی ها را جمع کن

- (1) $\frac{3}{2}$
- (2) 6
- (3) $\frac{5}{2}$
- (4) 18

$S = 3 \times 2 = 6$ گزینه ۲



تعریف: توابع $f(x) = \frac{x+1}{x}$ و $g(x) = \frac{x^2+1}{x}$ مفروض اند. $f-g$ تابع کدام است؟ **ابتدا دامنه** $f-g$ را می یابیم:

$\mathbb{R}$ (۴)

$\mathbb{R} - \{-1\}$ (۳)

$\mathbb{R} - \{1\}$ (۲)

$\mathbb{R} - \{0\}$ (۱)

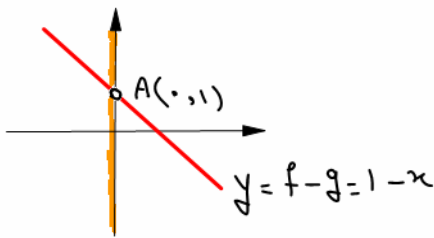
برد $f-g$

دامنه $f-g$

$$D_{f-g} = D_f \cap D_g = (\mathbb{R} - \{0\}) \cap (\mathbb{R} - \{0\}) = \mathbb{R} - \{0\}$$

$$y = f - g = \frac{x+1}{x} - \frac{x^2+1}{x} = \frac{x+1-x^2-1}{x} = \frac{x-x^2}{x} = \frac{x(1-x)}{x} = 1-x \quad x \neq 0$$

$y = f - g = 1 - x$ خطی است که در $x=0$ تعریف نمی شود.



گزینه ۲ $R_{f-g} = \mathbb{R} - \{1\}$

دانشوار تعریف: تابع $f(x) = \frac{x^3-x}{x-1}$ با دامنه $\mathbb{R} - \{a, b\}$ و برد $\{c, +\infty\} - \{2\}$ مفروض است. حاصل $a+b+c$ کدام است؟

$-\frac{5}{4}$ (۴)

$\frac{3}{4}$ (۳)

$-\frac{9}{4}$ (۲)

هم رقابتند 😊 (۱) $\frac{7}{4}$

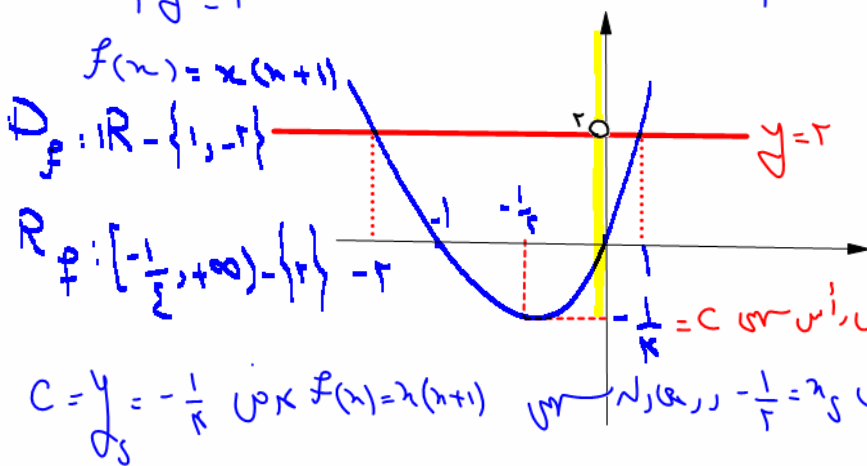
$$f(x) = \frac{x^3-x}{x-1} = \frac{x(x^2-1)}{x-1} = \frac{x(x-1)(x+1)}{x-1} = x(x+1) \quad x \neq 1$$

که در $x=1$ یکسره $x=a$ تعریف نشده یکی از این نقطه $x=a=1$ است. می بینیم برد سه $y=2$ است. $R_f: [c, +\infty) - \{2\}$ است. یعنی سه

خارجی $y=2$ را نمی گوید. تابع را با خط $y=2$ قطع می دهیم که بینیم چه اتیکس هایی $y=2$ تولید می کنند.

$$\begin{cases} f(x) = x(x+1) \\ y = 2 \end{cases} \rightarrow x(x+1) = 2 \rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \rightarrow x = 1 \quad x = -2$$

جمع ضرایب صفر



$$(a=1) + (b=-2) + (c=-\frac{1}{4}) = -\frac{5}{4}$$

گزینه ۴

ر در داری که سهی ۲ رینه دار در طول رأس عرض رأس سهی $c = -\frac{1}{4}$

رینه ۲ است که این جا $x = -\frac{1}{2}$ و از جایتهای $x = -\frac{1}{2}$ در معادله سهی $C = y = -\frac{1}{4}$ $f(x) = x(x+1)$ $C = y = -\frac{1}{4}$ به دست می آید.

Homework

۱ اگر توابع f و g به صورت زیر باشد، مجموعه بُرد تابع $\frac{f}{f \times g}$ کدام است؟

$$f = \{(1, -1), (\sqrt{2}, -2), (\sqrt{3}, -3), (2, 2), (\sqrt{5}, 1)\}$$

$$g = \{(3, -1), (\sqrt{2}, -1), (-3, 4), (\sqrt{5}, -3), (\sqrt{3}, 2)\}$$

$$\begin{array}{ll} \{2, -3, -1\} & (1) \\ \{\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -1\} & (2) \\ \{-3, 1, -2\} & (3) \\ \{-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -1\} & (4) \end{array}$$

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۴۰۳

۲ تابع f همانی و $g(x) = [x] + [-x]$ با دامنه $-1 \leq x \leq 1$ است. به ازای چند مقدار صحیح x ، اعضای مجموعه برد تابع $\frac{f}{g}$ مقداری صحیح است؟

$$\begin{array}{ll} (1) \text{ صفر} & (2) 1 \\ (3) 2 & (4) 3 \end{array}$$

کنکور سراسری علوم انسانی خارج از کشور ۱۴۰۲

۳ تابع f ، تابع ثابت و برای $m, n \in \mathbb{N}$ داریم $f(m) + f(n) = f(m)f(n)$. اگر دو زوج مرتب $(2n^2 - 7n + 1, -f(m))$ و $(m^2 - 4m + 6, nf(n))$ روی نیمساز ناحیه اول و سوم باشند، مقدار $[\frac{mn}{5}]$ کدام است؟

$$\begin{array}{ll} (1) 4 & (2) 3 \\ (3) 2 & (4) 1 \end{array}$$

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۴۰۲

۴ تابع $f(x) = [x] + [-x]$ با دامنه $-3 \leq x \leq 3$ و g تابع ثابت است. مقدار تابع $\frac{g}{f}$ در چند نقطه صحیح در دامنه برابر ۳ است؟

$$\begin{array}{ll} (1) 6 & (2) 4 \\ (3) 2 & (4) \text{ صفر} \end{array}$$

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۴۰۲

۵ تابع $f(x) = |2x - 2|$ و $g(x) = [x]$ با دامنه $-1 \leq x \leq 1$ است. اگر مجموعه A بُرد تابع $f \cdot g$ باشد، کدام عدد عضو A است؟

- (۱) ۲
(۲) ۳
(۳) -۲
(۴) -۳

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۴۰۲

۶ اگر $f(x) = 2 - |x + 1|$ و $g(x) = x + |x|$ ، آنگاه بُرد تابع $(\frac{f}{g})(x)$ کدام است؟

- (۱) $(-\infty, \frac{1}{2})$
(۲) $(-1, +\infty)$
(۳) $(-\frac{1}{2}, +\infty)$
(۴) $(0, +\infty)$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۷

۷ دو تابع $f(x) = b - 3ax$ و $g(x) = c - (3b - 3)x$ ثابت هستند. اگر $f + g = 5$ باشد، حاصل bc چقدر است؟

- (۱) -۶
(۲) -۴
(۳) ۴
(۴) ۶

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

۸ دو تابع $f(x) = a + 3(b^2 - 1)x^2$ و $g(x) = bx^2 - 2a + x^2$ ثابت هستند. اگر $f \times g = -8$ باشد، حاصل $|ab|$ کدام است؟

- (۱) ۱
(۲) ۲
(۳) ۳
(۴) صفر

کنکور سراسری علوم انسانی خارج از کشور ۱۴۰۱

۹ اگر $f(x) = (|a| - |b|)x$ تابع همانی، $g(x) = (b^2 - 1)x + (a^2 + 1)c$ تابعی ثابت و $(f - g)(x) = x + 5$ باشند، چند مقدار برای ac وجود دارد؟

- (۱) ۱
(۲) ۲
(۳) ۳
(۴) ۴

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۴۰۱

۱۰ اگر $f = \{(2, 5), (3, 4), (4, 6), (1, 7)\}$ و $g = \{(1, 3), (2, 6), (5, 2), (4, 9)\}$ باشند، بُرد تابع $g - f$ ، کدام است؟

- (۱) $\{-4, 1, 3\}$
(۲) $\{-4, 2, 3\}$
(۳) $\{-4, 1, 2, 3\}$
(۴) $\{1, 2, 3, 4\}$

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۳۹۸

۱۱ اگر $f = \{(1, 2), (2, 4), (4, 5), (3, 3)\}$ و $g = \{(3, 2), (2, 3), (6, 1), (1, 8)\}$ باشند، برد تابع $g \times f$ کدام است؟

(۲) $\{3, 6, 12, 16\}$

(۱) $\{6, 8, 12\}$

(۴) $\{6, 8, 12, 16\}$

(۳) $\{6, 12, 16\}$

کنکور سراسری علوم انسانی خارج از کشور ۱۳۹۸

۱۲ اگر $f = \{(5, 3), (1, 5), (3, 4), (6, 2)\}$ و $g = \{(3, 2), (5, 6), (1, 2), (2, 1)\}$ باشند، برد تابع $\frac{f+g}{f}$ ، کدام است؟

(۲) $\{1/5, 1/8, 3\}$

(۱) $\{1/4, 1/5, 3\}$

(۴) $\{1, 2/5, 4\}$

(۳) $\{1, 1/4, 4\}$

کنکور سراسری علوم انسانی خارج از کشور ۱۳۹۹

۱۳ اگر $f = \{(3, 4), (2, 6), (5, 3), (1, 5)\}$ و $g = \{(5, 6), (1, 2), (3, 2), (4, 1)\}$ باشند، برد تابع $\frac{f+g}{f-g}$ ، کدام است؟

(۲) $\left\{\frac{5}{3}, 3, -3\right\}$

(۱) $\left\{\frac{5}{3}, 2, -3\right\}$

(۴) $\left\{\frac{5}{3}, 3, -2\right\}$

(۳) $\left\{\frac{5}{3}, 4, -2\right\}$

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۳۹۹

۱۴ فرض کنید $f = \{(x, x^2) | x = \pm 5, \pm 4, \dots, \pm 1, 0\}$ و $g = \{(x, x^3) | x = \pm 5, \pm 4, \dots, \pm 1, 0\}$ دو تابع در صفحه مختصات باشند. تعداد عناصر برد تابع $y = \frac{g}{f}(x)$ ، کدام است؟

(۲) ۱۰

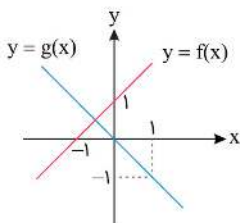
(۱) ۱۱

(۴) ۵

(۳) ۶

کنکور سراسری علوم انسانی خارج از کشور ۱۴۰۰

۱۵ فرض کنید نمودار تابع‌های خط راست $y = f(x)$ و $y = g(x)$ در صفحه مختصات مطابق شکل زیر داده شده باشند. قدرمطلق اختلاف جواب‌های معادله $\frac{f^2(x)}{g(x)} = 2$ ، کدام است؟



(۱) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(۲) $\sqrt{3}$

(۳) $2\sqrt{3}$

(۴) $3\sqrt{3}$

کنکور سراسری علوم انسانی خارج از کشور ۱۴۰۰

۱۶ اگر $f(x) = |x^2 - 5|$ و $g(x) = \frac{x}{1+x^2}$ مقدار $\frac{1+f(-2)}{g(2)}$ کدام است؟

(۲) ۳

(۱) $\frac{5}{2}$

(۴) ۵

(۳) ۴

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۳۸۷

۱۷ اگر $f(x) = x + |x|$ و $g(x) = |x+1| + 1$ ؛ آنگاه برد تابع $(\frac{f}{g})(x)$ ، کدام است؟

(۲) $[0, 2)$ (۱) $[0, 1)$ (۴) $[1, +\infty)$ (۳) $[0, +\infty)$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۷

پاسخ Homework

گزینه ۲

۱

$$f \times g = \{(\sqrt{2}, 2), (\sqrt{3}, -6), (\sqrt{5}, -3)\}$$

$$\frac{f}{f \times g} = \{(\sqrt{2}, -1), (\sqrt{3}, \frac{1}{6}), (\sqrt{5}, -\frac{1}{3})\}$$

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۴۰۳

گزینه ۱

۲

برای تابع $g(x)$ می‌دانیم:

$$x \in \mathbb{Z} \Rightarrow [x] + [-x] = 0 \Rightarrow g(x) = 0$$

که در این حالت تابع $\frac{f}{g}$ تعریف نمی‌شود بنابراین هیچ مقدار صحیحی در تابع $\frac{f}{g}$ صدق نمی‌کند.

کنکور سراسری علوم انسانی خارج از کشور ۱۴۰۲

گزینه ۳

۳

اگر f ثابت باشد پس $f(x) = c$ بنابراین:

$$f(m) + f(n) = f(m).f(n) \Rightarrow c + c = c^2 \Rightarrow c^2 = 2c \Rightarrow c = 2 \Rightarrow f(x) = 2$$

نیمساز ناحیه اول عبارت است از خط $y = x$ پس:

$$(2n^2 - 7n + 1, -2) \Rightarrow -2 = 2n^2 - 7n + 1 \Rightarrow 2n^2 - 7n + 3 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta = 49 - 24 = 25 \\ n = \frac{7 \pm 5}{4} \Rightarrow \begin{cases} n = 3 \\ n = \frac{1}{2} \end{cases} \end{cases} \text{ غ ق ق غ}$$

و بر روی نقطه دوم:

$$(m^2 - 4m + 6, 3 \times 2) \Rightarrow 6 = m^2 - 4m + 6 \Rightarrow m(m - 4) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 4 \end{cases} \text{ غ ق ق غ}$$

بنابراین:

$$\left[\frac{mn}{5}\right] = \left[\frac{12}{5}\right] = [2/4] = 2$$

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۴۰۲

گزینه ۴

۴

برای تابع f می‌دانیم:

$$f(x) = [x] + [-x] = \begin{cases} 0 & ; x \in \mathbb{Z} \\ 1 & ; x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

بنابراین در تمام نقاط صحیح تابع $\frac{g}{f}$ تعریف نشده است و نمی‌تواند برابر ۳ شود.

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۴۰۲

گزینه ۴

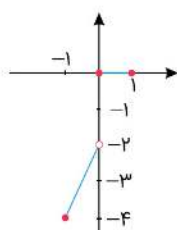
۵

$$-1 \leq x < 0 \Rightarrow [x] = -1 \Rightarrow f.g = (2 - 2x)(-1) = 2x - 2$$

x	-1	0
y	-2	-2

$$0 \leq x < 1 \Rightarrow [x] = 0 \Rightarrow f.g = (2 - 2x)(0) = 0$$

$$x = 1 \Rightarrow f.g = 0 \times 1 = 0$$

حال تابع $f.g$ را رسم می‌کنیم. باتوجه به شکل $y = -3$ عضو برد این تابع خواهد بود.

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۴۰۲

گزینه ۳

۶

$$f(x) = 2 - |x + 1| = \begin{cases} x + 3 & ; x \leq -1 \\ -x + 1 & ; x > -1 \end{cases}$$

$$g(x) = x + |x| = \begin{cases} 0 & ; x \leq 0 \\ 2x & ; x > 0 \end{cases}$$

$$y = \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{2 - |x + 1|}{x + |x|} = \begin{cases} \text{ن.ت} & ; x \leq 0 \\ \frac{1 - x}{2x} & ; x > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{2x} - \frac{1}{2} \quad ; x > 0$$

$$x > 0 \Rightarrow \frac{1}{x} > 0 \Rightarrow \frac{1}{2x} > 0 \Rightarrow \frac{1}{2x} - \frac{1}{2} > -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow y > -\frac{1}{2} \Rightarrow R_y = \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۷

گزینه ۳

۷

$$\begin{cases} f(x) = b - 3ax \xrightarrow{\text{ثابت } f} 3a = 0 \Rightarrow a = 0 \\ g(x) = c - (3b - 3)x \xrightarrow{\text{ثابت } g} 3b - 3 = 0 \Rightarrow b = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = 1, \quad g(x) = c$$

$$f + g = 5 \Rightarrow 1 + c = 5 \Rightarrow c = 4$$

$$bc = 1 \times 4 = 4$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

گزینه ۲

۸

$$\begin{cases} f(x) \text{ ثابت} \Rightarrow 3(b^2 - 1) = 0 \Rightarrow b = \pm 1 \\ g(x) \text{ ثابت} \Rightarrow (b + 1)x = 0 \Rightarrow b = -1 \end{cases} \Rightarrow b = -1$$

توجه کنید که $g(x) = (b + 1)x^2 - 2a$ به صورت $g(x) = (b + 1)x^2 - 2a$ است.

$$\begin{cases} f(x) = a \\ g(x) = -2a \end{cases} \Rightarrow f \times g = -2a^2 = -8 \Rightarrow a^2 = 4 \Rightarrow a = \pm 2$$

$$\Rightarrow |ab| = 2$$

کنکور سراسری علوم انسانی خارج از کشور ۱۴۰۱

گزینه ۲

۹

تابع همانی به صورت $y = x$ است، پس داریم:

$$f(x) = (|a| - |b|)x = x \Rightarrow |a| - |b| = 1 \quad (I)$$

تابع ثابت به صورت $y = k$ است، پس داریم:

$$g(x) = (b^x - 1)x + (a^x + 1)c = k \Rightarrow b^x - 1 = 0 \Rightarrow b = \pm 1$$

از قرار دادن این مقدار در رابطه (I) داریم:

$$|a| - |b| = 1 \Rightarrow |a| - |\pm 1| = 1 \Rightarrow |a| - 1 = 1 \Rightarrow |a| = 2 \Rightarrow a = \pm 2$$

از $(f - g)(x) = x + 5$ نتیجه می‌گیریم:

$$f(x) - g(x) = x - (a^x + 1)c = x + 5 \Rightarrow -(a^x + 1)c = 5$$

$$\xrightarrow{a=\pm 2} -5c = 5 \Rightarrow c = -1$$

اما $a = 2$ و $a = -2$ هر دو پذیرفته هستند؛ پس داریم:

$$ac = -2(-1) = 2$$

$$ac = 2(-1) = -2$$

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۴۰۱

گزینه ۱

۱۰

$$D_{g \circ f} = D_g \cap D_f = \{1, 4, 2\}$$

$$g \circ f = \{(1, 3 - 7), (2, 6 - 5), (4, 9 - 6)\}$$

$$= \{(1, -4), (2, 1), (4, 3)\} \Rightarrow \text{برد} = \{-4, 1, 3\}$$

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۳۹۸

گزینه ۳

۱۱

ابتدا دامنه تابع $g \times f$ را به دست می‌آوریم:

$$D_{g \times f} = D_f \cap D_g = \{1, 2, 4, 3\} \cap \{3, 2, 6, 1\} = \{1, 2, 3\}$$

مقادیر تابع $g \times f$ را به ازای دامنه به دست آمده با توجه به رابطه $(g \times f)(x) = g(x) \times f(x)$ به دست می‌آوریم:

$$\Rightarrow g \times f = \{(1, 8 \times 2), (2, 3 \times 4), (3, 2 \times 3)\}$$

$$\Rightarrow g \times f = \{(1, 16), (2, 12), (3, 6)\}$$

$$\Rightarrow g \times f \text{ برد} = \{16, 12, 6\}$$

کنکور سراسری علوم انسانی خارج از کشور ۱۳۹۸

نکته: اعمال جمع و تفریق و تقسیم روی توابع به صورت زیر تعریف می شود:

$$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$$

$$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

همچنین دامنه تعریف این توابع هم به صورت زیر است:

$$D_{f \pm g} = D_f \cap D_g, \quad D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x | g(x) = 0\}$$

با استفاده از روابط بالا ابتدا دامنه تعریف توابع $f + g$ و $\frac{f+g}{f}$ را مشخص کرده، سپس برد تابع موردنظر را به دست می آوریم:

$$f = \{(5, 3), (1, 5), (3, 4), (6, 2)\} \Rightarrow D_f = \{1, 3, 5, 6\}$$

$$g = \{(3, 2), (5, 6), (1, 2), (2, 1)\} \Rightarrow D_g = \{1, 2, 3, 5\}$$

$$\Rightarrow D_{f+g} = \{1, 3, 5\}, \quad D_{\frac{f+g}{f}} = \{1, 3, 5\}$$

$$f + g = \{(1, 5 + 2), (3, 4 + 2), (5, 3 + 6)\} = \{(1, 7), (3, 6), (5, 9)\}$$

$$\Rightarrow \frac{f+g}{f} = \left\{ \left(1, \frac{7}{5}\right), \left(3, \frac{6}{4}\right), \left(5, \frac{9}{3}\right) \right\} = \left\{ \left(1, 1/4\right), \left(3, 1/5\right), \left(5, 3\right) \right\}$$

$$\Rightarrow R_{\frac{f+g}{f}} = \{1/4, 1/5, 3\}$$

کنکور سراسری علوم انسانی خارج از کشور ۱۳۹۹

نکته: عمل‌های جمع و تفریق و تقسیم روی دو تابع به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

همچنین دامنه تعریف این توابع هم به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$D_{f \pm g} = D_f \cap D_g \quad D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x | g(x) = 0\}$$

با استفاده از رابطه بالا ابتدا دامنه تعریف توابع $f + g$ ، $f - g$ و $\frac{f+g}{f-g}$ را به دست آورده و سپس برد تابع $\frac{f+g}{f-g}$ را به دست می‌آوریم.

$$f = \{(3, 4), (2, 6), (5, 3), (1, 5)\} \Rightarrow D_f = \{1, 2, 3, 5\}$$

$$g = \{(5, 6), (1, 2), (3, 2), (4, 1)\} \Rightarrow D_g = \{1, 3, 4, 5\}$$

$$\Rightarrow D_{f \pm g} = \{1, 3, 5\}$$

$$D_{\frac{f+g}{f-g}} = D_{f+g} \cap D_{f-g} - \{x | (f-g)(x) = 0\} = D_{f \pm g}$$

$$f + g = \{(1, 5 + 2), (3, 4 + 2), (5, 3 + 6)\}$$

$$= \{(1, 7), (3, 6), (5, 9)\}$$

$$f - g = \{(1, 5 - 2), (3, 4 - 2), (5, 3 - 6)\}$$

$$= \{(1, 3), (3, 2), (5, -3)\}$$

$$\frac{f+g}{f-g} = \left\{ \left(1, \frac{7}{3}\right), \left(3, \frac{6}{2}\right), \left(5, \frac{9}{-3}\right) \right\}$$

$$= \left\{ \left(1, \frac{7}{3}\right), (3, 3), (5, -3) \right\}$$

$$\Rightarrow R_{\frac{f+g}{f-g}} = \left\{ \frac{7}{3}, 3, -3 \right\}$$

گزینه ۲

۱۴

ضابطه $\frac{g}{f}(x)$ را تشکیل می‌دهیم:

$$y = \frac{g}{f}(x) = \frac{x^3}{x^2}$$

به ازای $x = 0$ مخرج کسر تابع $\frac{g}{f}(x)$ صفر می‌شود، بنابراین $x = 0$ عضو دامنه تابع $\frac{g}{f}(x)$ نمی‌باشد، پس می‌توانیم x^2 را از صورت و مخرج کسر ساده کنیم.

$$\frac{g}{f}(x) = x, \quad (x \neq 0)$$

می‌دانیم عملیات روی توابع در دامنه مشترک انجام می‌شود. با شرط $x \neq 0$ تعداد عضوهای مشترک دامنه تابع f و g ده‌تا است.

$$D_{\frac{g}{f}} = D_f \cap D_g - \{0\} = \{\pm 5, \pm 4, \pm 3, \pm 2, \pm 1\}$$

از آنجایی که دامنه و برد تابع $y = x$ برابر است، پس تعداد اعضای مجموعه برد این تابع نیز ده‌تا می‌باشد.

کنکور سراسری علوم انسانی خارج از کشور ۱۴۰۰

گزینه ۳

۱۵

نمودار تابع $g(x)$ نیمساز ناحیه دوم و چهارم یعنی $g(x) = -x$ است. اگر نمودار تابع $y = x$ را در یک واحد به سمت چپ در راستای محور x ها منتقل کنیم نمودار تابع $f(x)$ به دست می‌آید بنابراین ضابطه آن $f(x) = x + 1$ می‌باشد.

$$\frac{f^2(x)}{g(x)} = 2 \Rightarrow f^2(x) = 2g(x) \Rightarrow (x+1)^2 = 2(-x)$$

$$\Rightarrow x^2 + 2x + 1 = -2x \Rightarrow x^2 + 4x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow |x_2 - x_1| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \frac{\sqrt{4^2 - 4(1)(1)}}{1} = \sqrt{16 - 4} = \sqrt{12} = \sqrt{4 \times 3} = 2\sqrt{3}$$

کنکور سراسری علوم انسانی خارج از کشور ۱۴۰۰

گزینه ۴

۱۶

$$\begin{cases} f(-2) = |(-2)^2 - 5| = |4 - 5| = |-1| = 1 \\ g(2) = \frac{2}{1+2^2} = \frac{2}{1+4} = \frac{2}{5} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{1+f(-2)}{g(2)} = \frac{1+1}{\frac{2}{5}} = \frac{2}{\frac{2}{5}} = 5$$

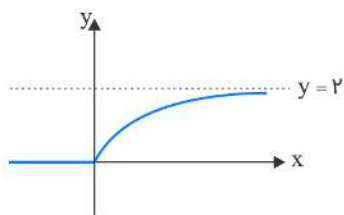
کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۳۸۷

گزینه ۲

۱۷

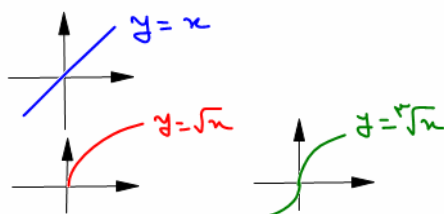
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x + |x|}{|x + 1| + 1} = \begin{cases} 0 & ; x \leq 0 \\ \frac{2x}{x + 2} & ; x > 0 \end{cases}$$

به کمک نمودار برد تابع راحت‌تر محاسبه می‌شود.



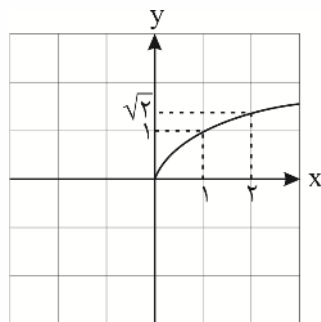
پس برد تابع $\frac{f}{g}(x)$ برابر $[0, 2)$ خواهد بود.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۷

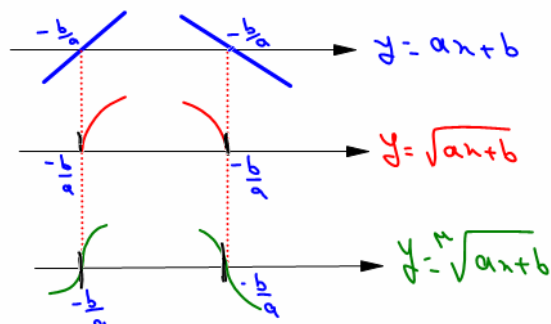


تابع رادیکالی

هر تابع به صورت $f(x) = \sqrt{p(x)}$ (یک تابع از x است) را یک تابع رادیکالی (ریشه دوم) می‌نامیم. برای محاسبه دامنه‌ی این نوع توابع باید نامعادله‌ی $p(x) \geq 0$ را حل کرد. به طور مثال به تابع زیر و نمودار آن توجه کنید:



$$f(x) = \sqrt{x}$$



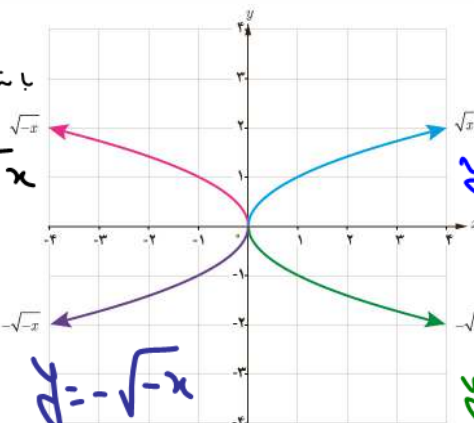
دقت: در ریشه زیر رادیکال $x = -\frac{b}{a}$ (نیم) مماس
ناتمام داریم.

اکنون با استفاده از قوانین انتقال می‌توانیم توابع رادیکالی به صورت $k\sqrt{ax+b}$ را رسم کنیم.

تعرین: نمودار توابع $\sqrt{-x}$ و $-\sqrt{x}$ و $-\sqrt{-x}$ را به کمک نمودار تابع $\sqrt{x}$ رسم کنید.

با تبدیل x به $-x$ نمودار نسبت به y ها قرینه می‌شود.

$$y = \sqrt{-x}$$



$$y = \sqrt{x} \text{ (نیم سی)}$$

اگر x به $-x$ تبدیل شود تابع در $\odot$ منعکس شود.

$$y = -\sqrt{x}$$

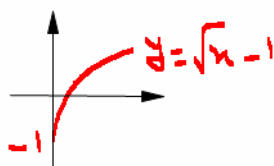
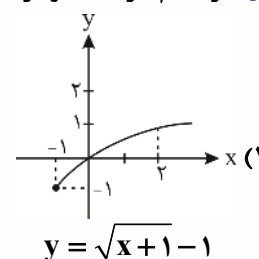
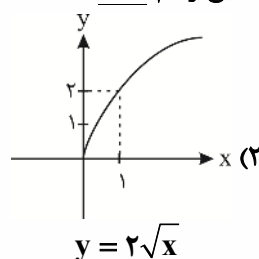
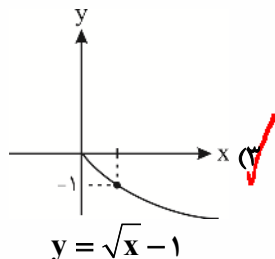
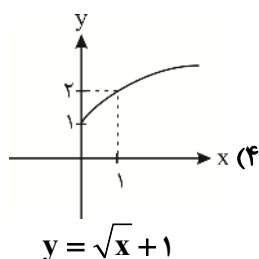
اگر x به $-x$ تبدیل شود نسبت به y ها قرینه می‌شود.

$$y = -\sqrt{-x}$$

نکته: نسبت به x ها قرینه می‌شود.

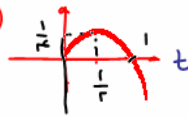
$$y = \sqrt{-x}$$

تعرین: در کدام گزینه، نمودار تابع صحیح رسم نشده است؟



$$y = \sqrt{x-1} + 1 - x = \sqrt{x-1} - (x-1) = t - t^2 = t(1-t)$$

سوی دانه به پایین که در $t \geq 0$ رسم می شود.



تعین: برد تابع $f(x) = \sqrt{x-1} + 1 - x$ کدام است؟

(۴) $(-\infty, 1]$

(۳) $(-\infty, \frac{1}{4}]$

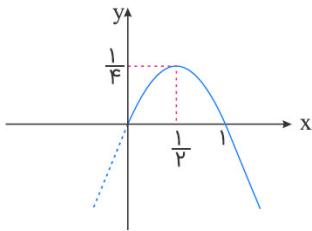
(۲) $[0, +\infty)$

(۱) $(-\infty, \frac{1}{4}]$

$y = t - t^2$

پاسخ: گزینه «۱» - با تغییر متغیر $t = \sqrt{x-1}$ ضابطه تابع به صورت زیر درمی آید:

برد سهمی فوق با دامنه $[0, \infty)$ برابر برد تابع f است. این سهمی در شکل زیر رسم شده است:



برد سهمی فوق و در نتیجه برد f برابر $(-\infty, \frac{1}{4}]$ است.

تعین: برد تابع $f(x) = \frac{\sqrt{x-2}-1}{|2-x|-x}$ کدام است؟

(۴) $[1, +\infty)$

(۳) $(-\infty, 1]$

(۲) $[\frac{1}{4}, +\infty)$

(۱) $(-\infty, \frac{1}{4}]$

پاسخ: گزینه «۱» - به ازای مقادیر $x \geq 2$ عبارت زیر رادیکال نامنفی است و داریم $|2-x| = x-2$ و تابع به صورت زیر ساده می شود:

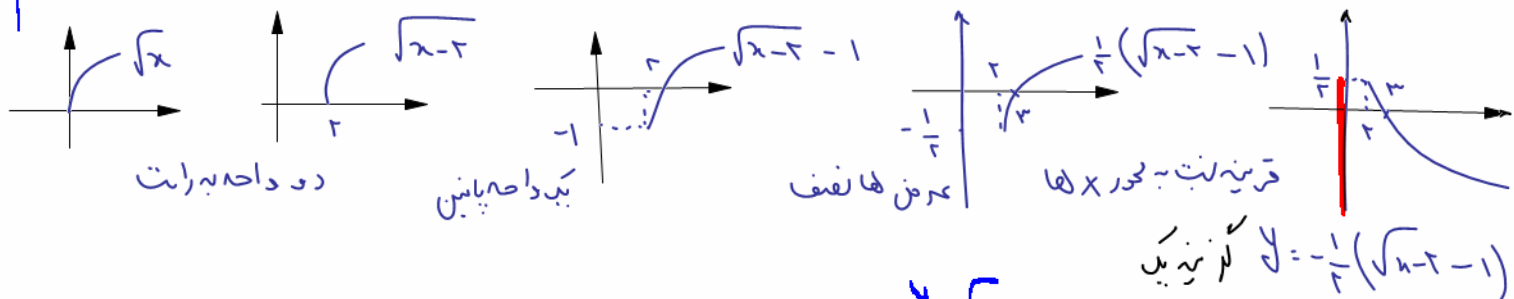
$$f(x) = \frac{\sqrt{x-2}-1}{|2-x|-x} = \frac{\sqrt{x-2}-1}{x-2-x} = \frac{\sqrt{x-2}-1}{-2}$$

$$x \geq 2 \Rightarrow \sqrt{x-2} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x-2}-1 \geq -1 \Rightarrow \frac{\sqrt{x-2}-1}{-2} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow f(x) \leq \frac{1}{2} \Rightarrow R_f = (-\infty, \frac{1}{2}]$$

راه دوم:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x-2}-1}{|2-x|-x} = \frac{\sqrt{x-2}-1}{-2+x-x} = \frac{\sqrt{x-2}-1}{-2} = -\frac{1}{2}(\sqrt{x-2}-1)$$

تابع را به کمک انتقال محور y رسم گراف آن را ردی y ها پیرس می کنیم و برد را گزارش می کنیم.



دو دایره به راست

یک دایره به پایین

عرض ها نصف

قرینه نسبت به محور x ها

$y = -\frac{1}{2}(\sqrt{x-2}-1)$ که گزیده شد

است که ۲ دایره به راست به دایره پایین، نقطه عرضهایش نصف شد.
در آخر به خاطر y نسبت به محور x ها قرینه شده است.

Homework

۱ اگر دامنه دو تابع برابر $f(x) = \sqrt{x-4} - b$ و $g(x) = \sqrt{2b-x} + d$ برابر $\{4\}$ باشد، مقدار d کدام است؟

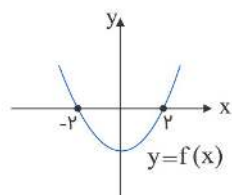
۲ -۳

۱ ۳

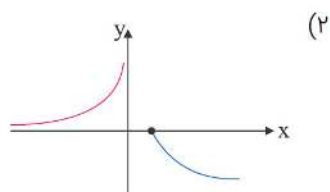
۴ -۲

۳ ۲

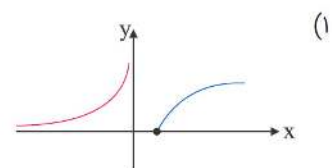
۲ اگر نمودار $f(x)$ مطابق شکل زیر باشد، دامنه تابع $g(x) = \sqrt{(x+2) \cdot f(x)}$ کدام است؟

۱ $[2, +\infty) \cup \{-2\}$ ۲ $\mathbb{R} - (-1, 1)$ ۳ $[-2, +\infty)$ ۴ $(-\infty, -2] \cup \{2\}$

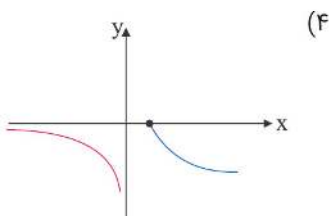
۳ نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & ; x < 0 \\ -\sqrt{x-1} & ; x \geq 1 \end{cases}$ کدام است؟



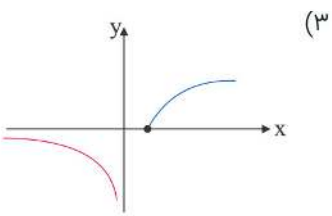
۲



۱



۴



۳

۴ نمودار $y = \sqrt{x}$ را ابتدا ۳ واحد به سمت راست و سپس ۲ واحد در راستای عمودی به بالا ببرید، اشتراک دامنه و بُرد تابع تبدیل یافته کدام است؟

۲ $[2, +\infty)$ ۱ $[0, +\infty)$ ۴ $[1, +\infty)$ ۳ $[3, +\infty)$

۵ دامنه تابع $f(x) = \sqrt{x - \sqrt{2 - x^2}}$ بازه $[a, b]$ می‌باشد. حاصل $a + \sqrt{2}b$ کدام است؟

- (۱) -۱
(۲) ۳
(۳) -۳
(۴) ۱

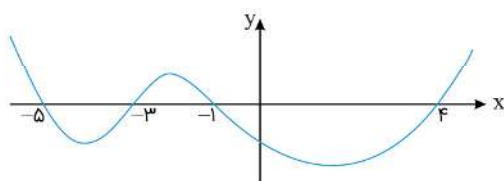
۶ اگر f تابع $f(x) = b\sqrt{1-x} + b^2 + 4b - 4$ بازه $(-\infty, 1]$ باشد، b کدام است؟

- (۱) ۱
(۲) -۵
(۳) -۱
(۴) ۵

۷ تابع f با ضابطه $f(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ را در نظر بگیرید:

الف دامنه تابع f را به دست آورید.

۸ باتوجه به نمودار تابع f ، دامنه تعریف تابع $y = \sqrt{\frac{x}{f(x)}}$ کدام است؟

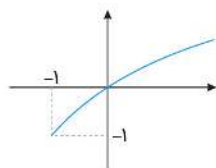


- (۱) $(-\infty, -5) \cup (-3, -1) \cup (4, +\infty)$
(۲) $(-\infty, -5) \cup (-3, -1) \cup [4, +\infty)$
(۳) $(-5, -3) \cup (-1, 0] \cup (4, +\infty)$
(۴) $(-5, -3) \cup (-1, 0] \cup [4, +\infty)$

۹ دامنه تابع $y = \sqrt{4 - \sqrt{2x - 8}}$ شامل چند عدد صحیح است؟

- (۱) ۴
(۲) ۵
(۳) ۸
(۴) ۹

۱۰ اگر نمودار زیر مربوط به تابع $f(x) = a + b\sqrt{x+1}$ باشد، $f(3)$ کدام است؟

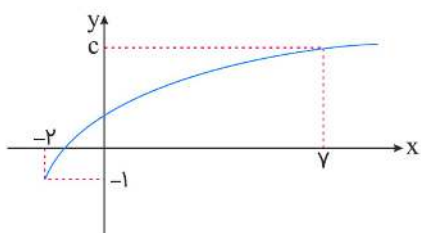


- (۱) ۱
(۲) ۲
(۳) ۳
(۴) ۴

۱۱ دامنه تابع $f(x) = \sqrt{\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{x}}{3}}$ شامل چند عدد طبیعی است؟

- (۱) ۱۹
(۲) ۲۰
(۳) ۲۲
(۴) ۴۰

۱۲ نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x+a} + b$ به صورت زیر می باشد. کدام است؟



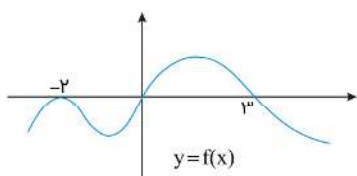
۲ (۱)

۳ (۲)

۴ (۳)

۵ (۴)

۱۳ اگر تابع $f(x)$ به صورت شکل زیر باشد، دامنه تابع $g(x) = \sqrt{-xf(x)}$ شامل چند عدد صحیح منفی است؟



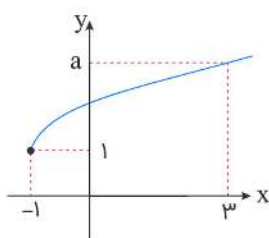
۱ (۱)

۲ (۲)

۴ (۳)

۳ (۴)

۱۴ نمودار تابع $f(x) = b + \sqrt{x+c}$ در شکل زیر رسم شده است. حاصل $a + b - c$ کدام می باشد؟



صفر (۱)

۱ (۲)

۲ (۳)

۳ (۴)

پاسخ Homework

گزینه ۴

۱

$$\left. \begin{array}{l} D_f : x - 4 \geq 0 \Rightarrow x \geq 4 \\ D_g : 2b - x \geq 0 \Rightarrow x \leq 2b \end{array} \right\} \xrightarrow{D_f=D_g} b = 2$$

$$f(4) = g(4) \Rightarrow d = -b = -2$$

گزینه ۱

۲

$$(x + 2) \cdot f(x) \geq 0$$

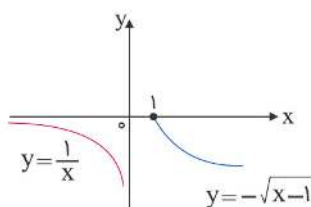
$$D_g = [2, +\infty) \cup \{-2\}$$

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
$x+2$	-	○	+	+
$f(x)$	+	○	-	+
$(x+2)f(x)$	-	○	-	+

گزینه ۴

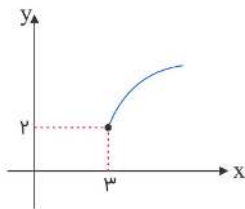
۳

بنا به ضابطه تابع $f(x)$ ، گزینه "۴" صحیح است.



گزینه ۳

۴



۳ واحد به راست: $f(x-3) = \sqrt{x-3}$

۲ واحد به بالا ببرید: $y = \sqrt{x-3} + 2$

دامنه: $D_f = [3, +\infty)$

بُرد: $R_f = [2, +\infty)$

$$D_f \cap R_f = [3, +\infty)$$

گزینه ۲

۵

$$\sqrt{2-x^2} : 2-x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 2 \Rightarrow |x| \leq \sqrt{2}$$

$$\text{رابطه (I): } -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$$

$$x - \sqrt{2-x^2} \geq 0 \Rightarrow x^2 \geq 2-x^2$$

$$\Rightarrow 2x^2 \geq 2 \Rightarrow x^2 \geq 1 \Rightarrow |x| \geq 1$$

رابطه (II): $x \geq 1$ ، زیرا نباید $x < 0$ باشد.

$$(I) \cap (II) \Rightarrow D = [1, \sqrt{2}]$$

$$a + \sqrt{2}b = 1 + \sqrt{2}(\sqrt{2}) = 3$$

گزینه ۲

۶

$$\sqrt{1-x} \geq 0 \xrightarrow{b < 0} b\sqrt{1-x} \leq 0 \Rightarrow b\sqrt{1-x} + b^2 + 4b - 4 \leq b^2 + 4b - 4$$

$$\Rightarrow b^2 + 4b - 4 = 1 \Rightarrow b^2 + 4b - 5 = 0 \Rightarrow \begin{cases} b = 1 \\ b = -5 \end{cases}$$

دقت کنید که در این مسئله b باید منفی باشد، پس $b = -5$ قابل قبول است.

الف ۷

$$\left. \begin{array}{l} \text{صورت: } 1-x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1 \\ \text{مخرج: } \mathbb{R} - \{0\} \end{array} \right\} \Rightarrow D_f = [-1, 0) \cup (0, 1]$$

گزینه ۳

۸

باید نامعادله $\frac{x}{f(x)} \geq 0$ را حل کنیم. جواب‌هایی صحیح است که x و $f(x)$ هم‌علامت یا $x = 0$ باشد که جواب تمام نقاط ناحیه اول و سوم و $x = 0$ است.

$$D_f = (-5, -3) \cup (-1, 0] \cup (4, +\infty)$$

گزینه ۴

۹

$$2x - 8 \geq 0 \Rightarrow 2x \geq 8 \Rightarrow x \geq 4 \quad (1)$$

$$4 - \sqrt{2x - 8} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{2x - 8} \leq 4 \Rightarrow 0 \leq 2x - 8 \leq 16$$

$$\Rightarrow 8 \leq 2x \leq 24 \Rightarrow 4 \leq x \leq 12 \quad (2)$$

دامنهٔ تابع اشتراک (۱) و (۲) است.

$$D = [4, +\infty) \cap [4, 12] = [4, 12]$$

تعداد اعداد صحیح بازه ۹ تا است.

گزینه ۱

۱۰

$$f(-1) = -1 \Rightarrow a = -1$$

$$f(0) = 0 \Rightarrow a + b = 0 \Rightarrow b = 1$$

$$f(x) = -1 + \sqrt{x+1} \Rightarrow f(3) = -1 + 2 = 1$$

گزینه ۲

۱۱

$$\frac{3}{y} - \frac{\sqrt{x}}{3} \geq 0 \Rightarrow \frac{3}{y} \geq \frac{\sqrt{x}}{3} \Rightarrow \sqrt{x} \leq \frac{9}{y} \Rightarrow x \leq \frac{81}{y^2}$$

ازطرفی $x \geq 0$ است، پس:

$$D_f = [0, \frac{81}{y^2}] = [0, 20/25]$$

اعداد طبیعی موجود در دامنهٔ تابع $\{1, 2, \dots, 20\}$ است.

گزینه ۲

۱۲

بنا به شکل، $\sqrt{x}$ را دو واحد به چپ و یک واحد به پایین ببرید. شکل نمودار $f(x)$ مشخص می‌شود.

$$a = 2, b = -1$$

$$x = 7 : y = \sqrt{7+2} - 1 = 2 \Rightarrow c = 2$$

$$a + b + c = 3$$

گزینه ۱

۱۳

$$-xf(x) \geq 0 \Rightarrow xf(x) \leq 0 \Rightarrow xy \leq 0 \quad (۱)$$

رابطه (۱) نشان می‌دهد که x و y مختلف‌العلامت و یا حداقل یکی از آن‌ها صفر است. یعنی نقاط برخورد با محورها و نقاطی که در ناحیه دوم و چهارم واقع هستند جواب سوال است. باتوجه به صورت سوال، برای x ‌های صحیح منفی فقط $x = -2$ جواب مسئله می‌باشد.

گزینه ۴

۱۴

تابع $\sqrt{x}$ یک واحد به سمت چپ و یک واحد به بالا منتقل شده است. در نتیجه:

$$\begin{cases} b = 1 \\ c = 1 \end{cases}$$

باتوجه به شکل داریم:

$$f(3) = a \Rightarrow 1 + \sqrt{3+1} = a \Rightarrow a = 3$$

$$a + b - c = 3 + 1 - 1 = 3$$

جزء صحیح: اگر عددی عدد صحیح باشد سینه خودش از بین ۱ تا صحیح باشد سینه عدد صحیح قبلی $n \in \mathbb{Z}$ $n \notin \mathbb{Z}$

جزء صحیح بزرگترین عدد صحیح نابیشتر (کتر یا مساوی) از ورودی را گزارش می‌کند.

جزء صحیح هر عددی مانند x را به شکل $[x]$ نمایش می‌دهیم و به این صورت تعریف می‌کنیم که اگر x عدد صحیح باشد جزء صحیح آن با خودش برابر است. مثلاً $[2] = 2$ و اگر x عددی غیر صحیح باشد، اولین عدد صحیح قبل آن، برابر جزء صحیح x است. مثلاً $[2/5] = 2$ و $[-2/5] = -3$ می‌باشد.

دانه $[x] = f(x)$ همان $\mathbb{R}$ اد بردش $\mathbb{Z}$ است. دانه $[y] = g(y)$ همان دانه $\mathbb{Z}$ اد بردش زیر مجموعه‌ای از $\mathbb{Z}$ است. خاصیت جزء صحیح

(۱) خروجی جزء صحیح همواره یک عدد صحیح است، یعنی برای هر $x \in \mathbb{R} : [x] \in \mathbb{Z}$ مثلاً $[4] = 4$ و $[3/14] = 3$ و $[-0.6] = -1$.

(۲) اگر عبارت داخل جزء صحیح یک عدد صحیح باشد می‌توانیم جزء صحیح را حذف می‌کنیم. یعنی برای هر $x \in \mathbb{Z}$ داریم: $[x] = x$.

(۳) اعداد ثابت و عبارت‌هایی که مطمئن هستیم صحیح هستند می‌توانیم از جزء صحیح خارج کنیم یعنی اگر $k \in \mathbb{Z}$ باشد $[x+k] = [x] + k$ است.

مثلاً $[x+3]$ همان $[x] + 3$ است. به مثال‌های زیر توجه کنید:

$$1) [x + \underbrace{[x]}_{\in \mathbb{Z}}] = [x] + [x] = 2[x]$$

$$2) [x + \underbrace{2[x]}_{\in \mathbb{Z}}] = [x] + 2[x] = 3[x]$$

$$3) [x - \underbrace{[x]}_{\in \mathbb{Z}}] = [x] - [x] = 0$$

$$[2x] = [x] + [x + \frac{1}{x}]$$

(۴) خاصیت روبه‌رو در برخی از تست‌ها مورد استفاده قرار می‌گیرد:

$$\text{مثلاً اگر دامنه تابع } y = \frac{2x}{[2x] - [x]} \text{ را بپرسند، داریم:}$$

$$\text{مخرج} = 0 \Rightarrow [2x] - [x] = 0 \xrightarrow{[2x] = [x] + [x + \frac{1}{x}]} [x] + [x + \frac{1}{x}] - [x] = 0$$

$$\Rightarrow [x + \frac{1}{x}] = 0 \xrightarrow{\substack{[u]=k, k \in \mathbb{Z} \\ k \leq u < k+1}} 0 \leq x + \frac{1}{x} < 1 \xrightarrow{-\frac{1}{x}} -\frac{1}{x} \leq x < \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow D_f = \mathbb{R} - [-\frac{1}{x}, \frac{1}{x}] = (-\infty, -\frac{1}{x}) \cup [\frac{1}{x}, +\infty)$$

(۵) برای هر $k \in \mathbb{Z}$ داریم: $[x] = k \Rightarrow k \leq x < k+1$ یعنی اگر $[x] = 2$ باشد، حدود x به صورت $2 \leq x < 3$ است.

(۶) مجموع عبارت‌های $[x]$ و $[-x]$ را می‌توان به صورت یک تابع دو ضابطه‌ای به شکل زیر نوشت:

$$y = [x] + [-x] = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Z} \\ -1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\text{مثال: } [2.5] + [-2.5] = 2 - 3 = -1$$

$$\text{اگر } x \in \mathbb{Z} \Rightarrow [-x] = -[x]$$

$$\text{اگر } x \notin \mathbb{Z} \Rightarrow [-x] = -[x] - 1$$

$$\begin{aligned} 2,3 + 3,2 &= 5,5 < 6 \\ [2,3] + [3,2] &= [5,5] = 5 \\ 2,7 + 2,8 &= 4,5 < 5 \\ [2,7] + [2,8] &= [4,5] = 4,5 \end{aligned}$$

$$[x+y] \geq [x] + [y]$$

(۷) همواره رابطه $[x] + [y] \leq [x+y]$ برقرار است.

به مقایسه مقابل توجه کنید:

$$\begin{cases} |x+y| \leq |x| + |y| \\ [x] + [y] \leq [x+y] \end{cases}$$

(۸) برای هر دو عدد حقیقی x و y ، مقدار $[x+y]$ می‌تواند دو مقدار متمایز زیر را اختیار کند: جمع اعداد به ترتیبی یک باشد.

$$[x+y] = [x] + [y] \text{ یا } [x] + [y] + 1$$

تعریف: اگر $\left[\frac{x}{p}\right] = 1$ باشد، حاصل $\sqrt{x^2 - 4x + 4} + \sqrt{x^2 - 8x + 16}$ کدام است؟



$$1 \leq \frac{x}{p} < 2 \rightarrow 2 \leq x < 4$$

مثال: $x=3$

$$\begin{aligned} \sqrt{(x-2)^2} + \sqrt{(x-4)^2} &= |x-2| + |x-4| \\ &= x-2 - x+4 = 2 \end{aligned}$$

(سراسری تجربی خارج از کشور ۹۰)

۲/۷۵ (۴)

تعریف: در تابع با ضابطه $f(x) = x^2 - 2[x]$ ، مقدار $f(-\frac{1}{p}f(\sqrt{3}))$ کدام است؟

۲/۵ (۳)

۲/۲۵ (۲)

۱/۷۵ (۱)

بازی از تابع توپسی (داخلی) شروع می‌شود

$$f(\sqrt{3}) = (\sqrt{3})^2 - 2[\sqrt{3}] = 3 - 2 = 1$$

$$f\left(-\frac{1}{p}f(\sqrt{3})\right) = f\left(-\frac{1}{4}\right) = \left(-\frac{1}{4}\right)^2 - 2\left[-\frac{1}{4}\right] = \frac{1}{16} - 2\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{16} + \frac{1}{2} = \frac{9}{16}$$

گزینه دو

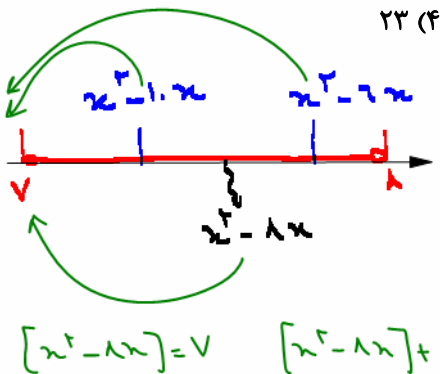
تعریف: اگر $[x^2 - 6x] = [x^2 - 10x] = 7$ باشد، حاصل $[(x-4)^2]$ کدام است؟

۲۳ (۴)

۲۴ (۳)

۱۶ (۲)

۷ (۱)



راه یک:

$$\begin{aligned} [x^2 - 6x] = 7 &\rightarrow 7 \leq x^2 - 6x < 8 \\ [x^2 - 10x] = 7 &\rightarrow 7 \leq x^2 - 10x < 8 \\ \hline 14 \leq 2x^2 - 16x < 16 \\ 7 \leq x^2 - 8x < 8 &\div 2 \\ [x^2 - 8x] = 7 \end{aligned}$$

۱۰۷

تمرین: اگر $198 = (1+\sqrt{2})^6 + (1-\sqrt{2})^6$ ، جزء صحیح عدد $(1+\sqrt{2})^6$ کدام است؟ (کدام است؟) (۱-۱-۱۳۹۷)

$$[(1+\sqrt{2})^6] = [198 - (1-\sqrt{2})^6] = 198 - (1-1, 2, \dots, 1, 2, \dots, 1)^6 = 198 - 1 = 197, \dots = 197$$

نزدیک ۳ (پسیدون = عدد ریز مثبت) (منفی به توان آبر به مثبت می‌شود) به توان آبر به ریزتر می‌شود

تمرین: اگر $[x-2] = 1$ باشد، نمودارهای دو تابع $f(x) = |x-3| - |x-4|$ و $g(x) = 2x^2 + x - 17$ در چند نقطه مشترک هستند؟ (۴) فاقد نقطه‌ی مشترک

محدوده تغییرات: $1 < x-2 < 2$ (۱) $3 \leq x < 4$ (۲) $x=3, 5$ (مثلاً)

مراعات باشد جواب
معادله تقاطع زمانی
در این بازه باشد

$$\begin{cases} f(x) = x-3+x-4 \\ g(x) = 2x^2+x-17 \end{cases}$$

$$2x^2+x-17 = x-3 \rightarrow 2x^2-x-14 = 0 \rightarrow x^2-x-7 = 0 \rightarrow (x+2)(x-5) = 0$$

$$x_1 = \frac{-2}{2} = -1 \quad x_2 = \frac{5}{2} = 2,5$$

هیچ کدام در بازه $3 \leq x < 4$ نیستند
لذا فاقد نقطه مشترکند نزدیک

$$\begin{aligned} D_f &= \mathbb{Z}, R_f = \{0\} \quad (2) \\ D_f &= \mathbb{R} - \mathbb{N}, R_f = [0, 1) \quad (4) \end{aligned}$$

تمرین: دامنه و برد تابع $f(x) = \frac{x-[x]}{\sqrt{[x]+[-x]}+1}$ کدام است؟

$$\begin{aligned} D_f &= \mathbb{N}, R_f = \{0\} \quad (1) \\ D_f &= \mathbb{R} - \mathbb{Z}, R_f = [0, 1) \quad (3) \end{aligned}$$

تمرین: حاصل عبارت $[\frac{x-1}{2}] + [\frac{3-x}{2}]$ چه اعدادی می‌تواند باشد؟

$$\begin{aligned} (1) \text{ صفر و } 1 & \quad (2) \text{ صفر و } -1 & (3) -1 \text{ و } -2 & (4) 1 \text{ و } 2 \end{aligned}$$

پاسخ: گزینه‌ی «۱» صحیح است.

عبارت را ساده می‌کنیم و از خاصیت‌ها استفاده می‌کنیم:

$$[\frac{x-1}{2}] + [\frac{3-x}{2}] = [\frac{x-1}{2}] + [\frac{2+1-x}{2}] = [\frac{x-1}{2}] + [\frac{1-x}{2} + 1] = [\frac{x-1}{2}] + [\frac{1-x}{2}] + 1$$

$$[\frac{x-1}{2}] + [\frac{1-x}{2}] + 1 = \text{صفر یا } -1$$

$$\text{چون } [u] + [-u] = \begin{cases} 0 & u \in \mathbb{Z} \\ -1 & u \notin \mathbb{Z} \end{cases} \text{ پس:}$$

(تجربی ۱۴۰۱)

تعریف: اگر $\frac{4-2x}{3x+1} \geq 0$ باشد، مجموعه مقادیر $[3x]$ چند عضو دارد؟

۵ (۴)

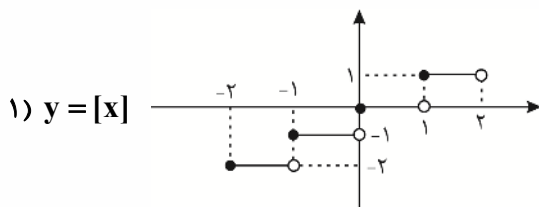
۸ (۳)

۷ (۲)

۶ (۱)

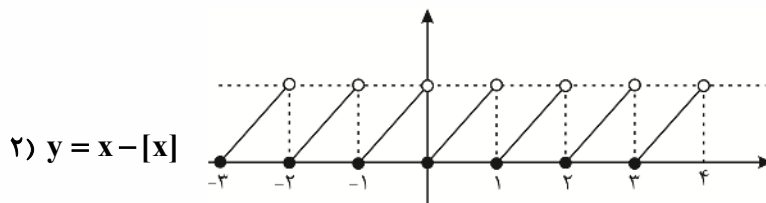
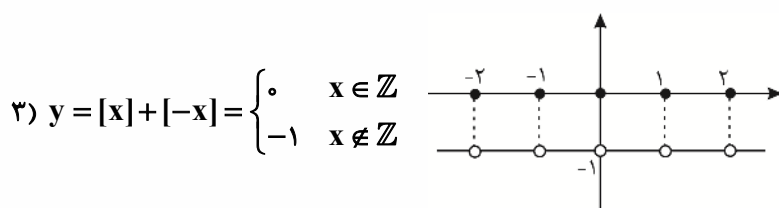
نمودارهای معروف براکتی

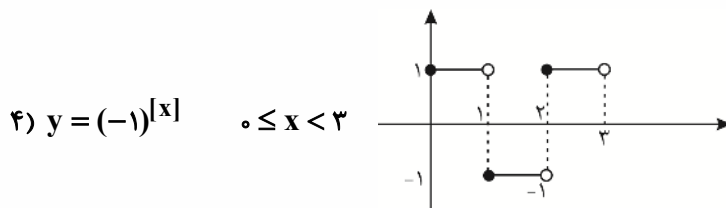
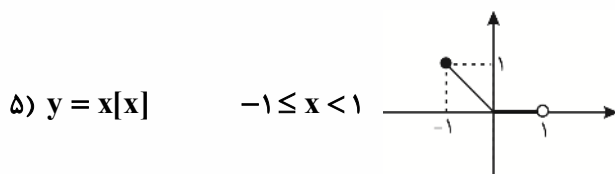
شکل‌های بسیار مهم توابع معروف براکتی (شامل جزء صحیح)



توجه کنید در تابع $y = [x]$ ، طول هر پله یک واحد است و نقاط سمت چپ همگی توپر می‌باشند. این‌جا به صورت دلخواه در بازه $[-2, 2)$ آن را رسم کردیم. اگر بازه به صورت $[-2, 2]$ باشد (یعنی انتهای بازه بسته باشد) نقطه $x = 2$ را جداگانه بررسی می‌کنیم و داریم:

$$x = 2 \Rightarrow y = [2] = 2 \Rightarrow A(2, 2)$$

و این یعنی به شکل بالا باید نقطه $A(2, 2)$ نیز اضافه شود.ویژگی‌های تابع $y = x - [x]$ (۱) دامنه $\mathbb{R}$ (۲) برد $[0, 1)$ یعنی: $0 \leq x - [x] < 1$ (۳) در نقاط $x \in \mathbb{Z}$ حد ندارد و ناپیوسته است ولی در سایر نقاط حد دارد و پیوسته است.(۴) طول هر پله $\sqrt{2}$ واحد است.(۵) متناوب است با دوره تناوب $T = 1$ در این‌جا به طور دلخواه آن را در بازه $[-3, 4)$ رسم کردیم.

ویژگی‌های تابع $y = [x] + [-x]$ (۱) دامنه $\mathbb{R}$ (۲) برد دو عضوی $R_f = \{-1, 0\}$ (۳) در نقاط $x \in \mathbb{Z}$ ناپیوسته است.(۴) در تمام نقاط دارای حد -1 است یعنی $\lim_{x \rightarrow a \in \mathbb{R}} [x] + [-x] = -1$ (۵) متناوب است با دوره تناوب $T = 1$.(۶) نمودار به ازای اعداد صحیح صفر می‌شود و ریشه می‌دهد و به ازای سایر اعداد، -1 می‌شود.ویژگی‌های تابع $y = (-1)^{[x]}$ در این جا به طور مثال در بازه $[0, 3)$ رسمش کردیم.(۱) دامنه $\mathbb{R}$ (۲) برد دو عضوی $R_f = \{-1, 1\}$ (۳) در نقاط $x \in \mathbb{Z}$ حد ندارد و ناپیوسته است.(۴) متناوب است با دوره تناوب $T = 2$.در این جا به طور مثال در بازه $[-1, 1)$ رسمش کردیم.توجه کنید نقطه $x = 0$ برای این تابع، نقطه گوشه به حساب می‌آید.رسم نمودار $y = [ax]$ تابع $y = [ax]$ از روی تابع $y = [x]$ رسم می‌شود. فقط توجه کنید که طول هر پله $\frac{1}{|a|}$ برابر می‌شود. مثلاً در رسم $y = [\frac{x}{2}]$ که $a = \frac{1}{2}$ است طول پله‌ها $\frac{1}{2}$ برابر و در رسم $y = [2x]$ که $a = 2$ است طول پله‌ها $\frac{1}{2}$ برابر می‌شود.**تعریف:** تابع $y = [2x]$ را در بازه $[-1, 1)$ رسم کنید.