

روابط بین نسبت‌های مثلثاتی

۱) $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$

روابط مثلثاتی کتاب دهم عبارت‌اند از:

اگر بخواهیم هر یک از نسبت‌های $\sin \theta$ یا $\cos \theta$ را بر حسب دیگری بیابیم، داریم:

$$\begin{cases} \sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta \Rightarrow \sin \theta = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \theta} \\ \cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta \Rightarrow \cos \theta = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \theta} \end{cases}$$

نتیجه:

که علامت آن‌ها بر مبنای ناحیه‌ای که زاویه در آن قرار گرفته است، مشخص می‌شود.

۲) $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$

۳) $\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$

۴) $\tan \theta = \frac{1}{\cot \theta}$

۵) $\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}$

۶) $\tan \theta \times \cot \theta = 1$ $\theta \neq \frac{k\pi}{2}$ 

۷) $\frac{1}{\cos^2 \theta} = 1 + \tan^2 \theta$

۸) $\frac{1}{\sin^2 \theta} = 1 + \cot^2 \theta$

۹) $\tan \theta + \cot \theta = \frac{1}{\sin \theta \cdot \cos \theta}$

۱۰) $(\sin \theta + \cos \theta)^2 = 1 + 2 \sin \theta \cos \theta$

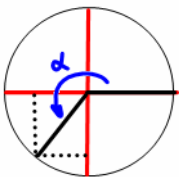
تمرین: اگر α در ناحیه سوم بوده و $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$ باشد، حاصل $\frac{\cot \alpha}{\sin \alpha + \tan \alpha}$ کدام است؟

$\frac{45}{31}$ (۴)

$\frac{31}{45}$ (۳)

$\frac{45}{32}$ (۲)

$\frac{32}{45}$ (۱)



$$\begin{aligned} \cot \alpha &= \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{4}{3} \\ \sin \alpha &= \frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{4}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cot \alpha &= \frac{4}{3} \\ \tan \alpha &= \frac{3}{4} \\ \sin \alpha &= -\frac{4}{5} \end{aligned}$$

$$\text{جواب: } \frac{\frac{4}{3}}{-\frac{4}{5} + \frac{3}{4}} = \frac{-12 + 20}{15} = \frac{8}{15}$$

$$\text{جواب: } \frac{3(15)}{8(1)} = \frac{45}{8}$$

تمرین: اگر $\cos \theta = -\frac{3}{5}$ و انتهای کمان θ در ناحیه سوم مثلثاتی باشد، حاصل $\frac{\tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}$ کدام است؟

$\frac{3}{7}$ (۴)

$\frac{12}{7}$ (۳)

$-\frac{3}{7}$ (۲)

$-\frac{12}{7}$ (۱)



$$\begin{cases} \cos \theta = -\frac{3}{5} \\ \sin \theta = -\frac{4}{5} \\ \tan \theta = \frac{4}{3} \end{cases}$$



$$\frac{\tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} = \frac{\frac{4}{3}}{1 - \frac{16}{9}} = \frac{-4(9)}{3(7)} = -\frac{12}{7}$$

می داریم

$$\begin{cases} \frac{1}{1+\cot^2 \alpha} = \sin^2 \alpha \\ \frac{1}{1+\tan^2 \alpha} = \cos^2 \alpha \end{cases}$$

(۴) ✓

تعریف: حاصل $\frac{1+\cot^2 \alpha}{1+\tan^2 \alpha}$ در صورت وجود کدام است؟
 (۱) $2 \sin^2 \alpha$ (۲) $\cos^2 \alpha$ (۳) صفر

$$\cancel{\frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha}} + \cancel{\frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}} = 1$$

تعریف: اگر $\tan \theta = \frac{3}{4}$ ، حاصل $(\tan \theta - \cot \theta)^2 - \frac{1}{\cos^2 \theta}$ کدام است؟

$$\begin{aligned} \tan^2 \theta + \cot^2 \theta - 2 \boxed{\tan \theta \cdot \cot \theta} - \left(\frac{1}{\cos^2 \theta} = 1 + \tan^2 \theta \right) &= \cot^2 \theta - 2 - 1 = \left(\frac{4}{3} \right)^2 - 3 \\ &= \frac{16}{9} - 3 = \frac{16-27}{9} = -\frac{11}{9} \end{aligned}$$

گزیده ۱

تعریف: اگر $\sin x + \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ باشد، حاصل $\tan x + \cot x$ کدام است؟

$-\frac{8}{3}$ (۴)

$\frac{8}{3}$ (۳)

$-\frac{3}{8}$ (۲)

$\frac{3}{8}$ (۱)

نکته: وقتی جمع یا تفاضل سینوس و کسینوس را داریم بایه توان دو رساندن طرفین می توان ضرب سینوس و کسینوس را یافت و برعکس.

$$\begin{aligned} \tan \theta + \cot \theta &= \frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta} = \frac{1}{\sin \theta \cos \theta} = -\frac{8}{3} \quad \text{گزیده ۴} \\ (\sin \theta + \cos \theta)^2 &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 \rightarrow \cancel{\sin^2 \theta} + \cancel{\cos^2 \theta} + 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{2} \rightarrow \sin \theta \cos \theta = -\frac{3}{8} \end{aligned}$$

تعرین: اگر $\sin x \cos x = \frac{1}{3}$ باشد، حاصل $\sin^3 x - \cos^3 x$ کدام است؟

(۱) $\frac{3}{5}$ (۲) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (۳) $\pm \frac{9}{4\sqrt{3}}$ (۴) $\pm \frac{4\sqrt{3}}{9}$

پاسخ: گزینه‌ی «۴» - $\sin^3 x - \cos^3 x$ را تجزیه می‌کنیم:

$$\sin^3 x - \cos^3 x = (\sin x - \cos x)(\sin^2 x + \sin x \cos x + \cos^2 x) = (\sin x - \cos x)\left(1 + \frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3}(\sin x - \cos x)$$

حالا داشته باش:

$$(\sin x - \cos x)^2 = \sin^2 x + \cos^2 x - 2\sin x \cos x = 1 - 2\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} \Rightarrow (\sin x - \cos x)^2 = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \sin x - \cos x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\sin^3 x - \cos^3 x = \frac{4}{3}\left(\pm \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \pm \frac{4}{3\sqrt{3}} = \pm \frac{4\sqrt{3}}{9}$$

پس:

تعرین: اگر $\frac{\sin x + 2\cos x}{\sin x - 3\cos x} = 2$ باشد، حاصل $\frac{1}{\sin x \cos x}$ کدام است؟

(۱) $\frac{65}{8}$ (۲) $-\frac{65}{8}$ (۳) $\frac{17}{4}$ (۴) $-\frac{17}{4}$

پاسخ: گزینه‌ی «۱» - طرفین وسطین می‌کنیم، یادتونه باشه هروقت صورت و مخرج یک کسر هم‌زمان هم $\sin$ و هم $\cos$ داشت، طرفین

$$\frac{\sin x + 2\cos x}{\sin x - 3\cos x} = 2 \Rightarrow \sin x + 2\cos x = 2\sin x - 6\cos x$$

وسطین کنید و بعدش $\tan$ بسازید:

$$\Rightarrow 8\cos x = \sin x \xrightarrow{\text{تأییدسازی} \div \cos x} 8 = \tan x$$

$$\tan x + \cot x = \frac{1}{\sin x \cos x}$$

از طرفی همیشه داریم:

$$8 + \frac{1}{8} = \frac{1}{\sin x \cos x} \Rightarrow \frac{1}{\sin x \cos x} = \frac{65}{8}$$

تعرین: اگر $2\sin \alpha = 3\cos \alpha$ ، حاصل $\frac{1 + \cot \alpha}{1 + \tan \alpha}$ کدام است؟

(۱) $\frac{3}{2}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{9}{4}$ (۴) ۶

$$1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3} \quad 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2} \quad \frac{\frac{5}{3}}{\frac{5}{2}} = \frac{2}{3}$$

$$\begin{aligned} \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} &= \frac{3}{2} \\ \tan \alpha &= \frac{3}{2} \\ \cot \alpha &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

تعریف: مقدار عبارت $\frac{1 - \sin \alpha}{\cos \alpha} - \frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha}$ به ازای $\alpha = 15^\circ$ کدام است؟

(۱) صفر (۲) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (۳) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۴) $\frac{\sqrt{6}}{2}$

مخرج مشترک

$$\frac{(1 - \sin \alpha)(1 + \sin \alpha) - \cos \alpha \cos \alpha}{\cos \alpha (1 + \sin \alpha)} = \frac{1 - \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{\cos \alpha (1 + \sin \alpha)} = \frac{1 - (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)}{\cos \alpha (1 + \sin \alpha)} = \frac{0}{\cos \alpha (1 + \sin \alpha)} = 0$$

تعریف: حاصل $\frac{1}{\sin^4 \theta} - \frac{1}{\sin^2 \theta} - \cot^4 \theta$ کدام است؟

(۱) $\sin^2 \theta$ (۲) $\cos^2 \theta$ (۳) $\tan^2 \theta$ (۴) $\cot^2 \theta$

$$\frac{1 - \sin^2 \theta}{\sin^4 \theta} - \frac{\cos^2 \theta}{\sin^4 \theta} = \frac{\cos^2 \theta - \cos^2 \theta}{\sin^4 \theta} = \frac{0}{\sin^4 \theta} = 0$$

تعریف: اگر $\frac{1 + \cot x}{\tan x + 1} = 2$ ، حاصل $\frac{2 \cos x - 3 \sin x}{\sin x + \cos^3 x}$ کدام است؟

(۱) $\frac{2}{5}$ (۲) $\frac{1}{10}$ (۳) $\frac{2}{13}$ (۴) $\frac{5}{13}$

ضرب کنیم $\tan x = t$

$$\frac{1 + \frac{1}{t}}{t + 1} = \frac{\frac{t+1}{t}}{t+1} = \frac{1}{t} = 2 \Rightarrow t = \frac{1}{2}$$

برای تولید $\frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$ کافی است یک تکجه های صورت و مخرج را بر $\cos x$ تقسیم کنیم تا $\tan x$ حاصل شود:

$$\frac{2 \frac{\cos x}{\cos x} - 3 \frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos^3 x}{\cos x}} = \frac{2 - 3 \tan x}{\tan x + \cos^2 x} = \frac{2 - \frac{3}{2}}{\frac{1}{2} + \left(1 + \frac{1}{4}\right)} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{5}{4}} = \frac{2}{5}$$

تعریف: حاصل $\sqrt{1 + \cot^2 \alpha} \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$ اگر α در ربع دوم دایرهی مثلثاتی باشد، کدام است؟

(۱) $\tan \alpha$ (۲) $-\tan \alpha$ (۳) $\cot \alpha$ (۴) $-\cot \alpha$

چهارم

$$\sqrt{1 + \cot^2 \alpha} \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{\frac{1}{\sin^2 \alpha}} \sqrt{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{|\sin \alpha|} |\cos \alpha| = \left| \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \right| = |\cot \alpha|$$

چون α در ربع دوم است، $\cot \alpha$ منفی است.

پس جواب $-\cot \alpha$ است.

تعریف: حاصل $\sqrt{1+\cos x}\sqrt{(1-\sin x)(1+\sin x)}$ کدام است؟ (x در ربع سوم است).

- (۱) $\sin x$ (۲) $-\sin x$ (۳) $\cos x$ (۴) $-\cos x$

پاسخ: گزینه «۲» - با استفاده از روابط $1-\sin^2 x = \cos^2 x$ و $1-\cos^2 x = \sin^2 x$ می توان نوشت:

$$\sqrt{1+\cos x}\sqrt{(1-\sin x)(1+\sin x)} = \sqrt{1+\cos x}\sqrt{1-\sin^2 x} = \sqrt{1+\cos x}\sqrt{\cos^2 x}$$

اتحاد مزدوج

$$= \sqrt{1+\cos x}|\cos x| \stackrel{\pi < x < \frac{3\pi}{2}}{=} \sqrt{1+\cos x}(-\cos x) = \sqrt{1-\cos^2 x} = \sqrt{\sin^2 x} = |\sin x| \stackrel{\pi < x < \frac{3\pi}{2}}{=} -\sin x$$

تعریف: در مثلث قائم الزاویه ABC که در رأس $\hat{A}$ قائم است، حاصل $\sin^2(\frac{\pi}{2}-\hat{B}) + \frac{1}{\tan^2 \hat{C}+1}$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) -۱ (۴) ۲

پاسخ: گزینه «۲» - روش اول: در مثلث ABC زاویه $A = 90^\circ$ است، پس داریم:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow 90^\circ + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow \hat{B} + \hat{C} = 90^\circ$$

پس دو زاویه B و C متمم اند. از طرفی با توجه به این که $\frac{1}{1+\tan^2 \hat{C}} = \cos^2 \hat{C}$ و $\sin^2(\frac{\pi}{2}-\hat{C}) = \cos^2 \hat{C}$ است، پس می توان

$$\frac{1}{1+\tan^2 \hat{C}} + \sin^2(\frac{\pi}{2}-\hat{B}) = \cos^2 \hat{C} + \cos^2 \hat{B}$$

نوشت:

از طرفی با توجه به این که دو زاویه B و C متمم اند، می توان گفت $\cos \hat{C} = \sin \hat{B}$ و همچنین $\sin \hat{C} = \cos \hat{B}$ است. پس با استفاده از رابطه $\cos \hat{C} = \sin \hat{B}$ می توان نوشت:

روش دوم: دو زاویه B و C متمم اند، یعنی $\hat{B} + \hat{C} = \frac{\pi}{2}$ ، پس $\frac{\pi}{2} - \hat{B} = \hat{C}$ است. در نتیجه داریم:

$$\frac{1}{1+\tan^2 \hat{C}} + \sin^2(\frac{\pi}{2}-\hat{B}) = \frac{1}{1+\tan^2 \hat{C}} + \sin^2 \hat{C} = \cos^2 \hat{C} + \sin^2 \hat{C} = 1$$

تعریف: با فرض $2\sin^2 x + 3\cos^2 x = 5\sin x \cos x$ مقدار $\cos^2 x$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{13}{4}$ (۳) ۴ (۴) $\frac{4}{13}$

پاسخ: گزینه «۴» - طرفین معادله داده شده را بر $\cos^2 x$ تقسیم می کنیم:

$$2\sin^2 x + 3\cos^2 x = 5\sin x \cos x \xrightarrow{\div \cos^2 x} 2\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + 3\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = 5\frac{\sin x \cos x}{\cos^2 x}$$

$$\Rightarrow 2\tan^2 x + 3 = 5\tan x \Rightarrow 2\tan^2 x - 5\tan x + 3 = 0 \xrightarrow{a+b+c=0} \begin{cases} \tan x = 1 \\ \tan x = \frac{3}{2} \end{cases}$$

حالا با استفاده از رابطه $1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ داریم:

$$\text{حالت اول: } \tan x = 1 \Rightarrow 1 + (1)^2 = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow 2 = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{2}$$

$$\text{حالت دوم: } \tan x = \frac{3}{2} \Rightarrow 1 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow 1 + \frac{9}{4} = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow \frac{13}{4} = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow \cos^2 x = \frac{4}{13}$$

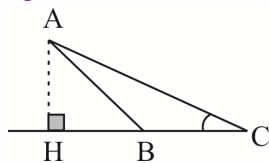
که با توجه به گزینه‌ها پاسخ صحیح $\cos^2 x = \frac{4}{13}$ است.

(سراسری تهرانی ۱۳۹۰)

تعرین: اگر $2 \sin^2 x + \cos^2 x = \frac{4}{3}$ باشد، حاصل $\tan^2 x$ کدام است؟

$$\begin{aligned} & \frac{2}{3} \quad (2) \quad \frac{3}{2} \quad (1) \\ & \sin^2 x + \sin^2 x + \cos^2 x = \frac{4}{3} \\ & \sin^2 x = \frac{1}{3} \\ & \cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \\ & \tan^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

(ریاضی ۹۹)



تعرین: در شکل زیر، فرض کنید $\sin \hat{C} = \frac{5}{13}$ و $CH = 9$. اندازه‌ی ارتفاع AH کدام است؟

(۲) $\frac{3}{5}$

(۱) $\frac{3}{25}$

(۴) $\frac{3}{75}$

(۳) $\frac{3}{6}$

با دین اعداد ۵ و ۱۳ بدشت فیثاغورثی معروف ۳، ۴، ۵ می‌ایم و رسم می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \sin \hat{C} &= \frac{5}{13} \\ \tan \hat{C} &= \frac{5}{12} \end{aligned}$$

$$\Delta ACH: \tan \hat{C} = \frac{AH}{CH} \rightarrow \frac{5}{12} = \frac{AH}{9} \rightarrow AH = 9 \left(\frac{5}{12} \right) = \frac{3(5)}{4}$$

$$AH = \frac{15}{4} = 3,75$$

Homework (1)

۱ اگر $\sin \alpha = 2 \cos \alpha$ و انتهای کمان α در ربع سوم مثلثاتی باشد، مقدار $\cos \alpha$ کدام است؟ (با تغییر)

(۲) $\frac{\sqrt{5}}{5}$
(۴) $\frac{\sqrt{5}}{10}$

(۱) $-\frac{2\sqrt{5}}{10}$
(۳) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

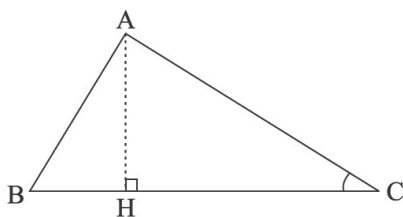
۲ اگر $2\sin^2 x + \cos^2 x = \frac{4}{3}$ باشد، حاصل $\tan^2 x$ کدام است؟ ($x \neq 0$)

(۲) $\frac{2}{3}$
(۴) $\frac{1}{4}$

(۱) $\frac{3}{2}$
(۳) $\frac{1}{2}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

۳ در شکل زیر، $\cot C = \frac{\sqrt{5}}{2}$ و $AC = 96$. اندازه ارتفاع AH ، کدام است؟



(۱) ۴۸

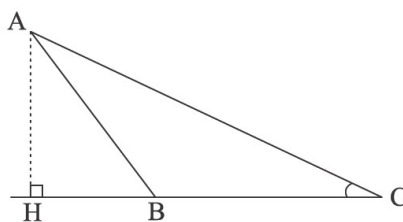
(۲) ۵۶

(۳) ۶۴

(۴) ۷۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

۴ در شکل زیر، فرض کنید $\sin C = \frac{5}{13}$ و $CH = 9$. اندازه ارتفاع AH ، کدام است؟



(۱) ۳/۲۵

(۲) ۳/۵

(۳) ۳/۶

(۴) ۳/۷۵

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۹

پاسخ (1) Homework

گزینه ۱

۱

$$\sin \alpha = 2 \cos \alpha \Rightarrow \tan \alpha = 2 \Rightarrow \tan^2 \alpha = 4 \Rightarrow 1 + \tan^2 \alpha = 5$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\cos^2 \alpha} = 5 \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{5}$$

$$\xrightarrow{\cos \alpha < 0} \cos \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5} = -\frac{2\sqrt{5}}{10}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

گزینه ۳

۲

$$2 \sin^2 x + \cos^2 x = \frac{4}{3} \Rightarrow \sin^2 x + \underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_1 = \frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow \sin^2 x + 1 = \frac{4}{3} \Rightarrow \sin^2 x = \frac{1}{3} \Rightarrow \cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\tan^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

گزینه ۳

۳

داریم:

$$1 + \cot^2 C = 1 + \frac{\cos^2 C}{\sin^2 C} = \frac{\sin^2 C + \cos^2 C}{\sin^2 C} = \frac{1}{\sin^2 C} \Rightarrow 1 + \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1}{\sin^2 C}$$

$$\Rightarrow \sin^2 C = \frac{4}{9} \xrightarrow{C < 90^\circ} \sin C = \frac{2}{3}$$

$$\sin C = \frac{AH}{AC} \Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{AH}{96} \Rightarrow AH = \frac{96 \times 2}{3} = 64$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

گزینه ۴

۴

$$\sin C = \frac{5}{13} \xrightarrow{\cos C > 0} \cos C = \sqrt{1 - \sin^2 C} = \sqrt{1 - \frac{25}{169}} = \frac{12}{13}$$

$$\begin{cases} \tan C = \frac{\sin C}{\cos C} = \frac{\frac{5}{13}}{\frac{12}{13}} = \frac{5}{12} \\ \tan C = \frac{AH}{CH} = \frac{AH}{9} \end{cases} \Rightarrow \frac{5}{12} = \frac{AH}{9} \Rightarrow AH = \frac{45}{12} = \frac{15}{4} = 3.75$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۹

Homework (2)

۱

اگر $\tan x = 3$ باشد، حاصل $\frac{\sin^3 x + \cos x}{\cos^3 x + \sin x}$ کدام است؟

$$\frac{37}{35} \quad (2)$$

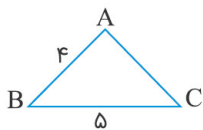
$$\frac{37}{31} \quad (4)$$

$$\frac{35}{31} \quad (1)$$

$$\frac{31}{35} \quad (3)$$

۲

اگر مساحت مثلث $\triangle ABC$ برابر ۶ باشد، طول AC چقدر است؟



$$3 \quad (1)$$

$$\sqrt{3} \quad (2)$$

$$6 \quad (3)$$

$$\sqrt{6} \quad (4)$$

۳

ساده شده عبارت $(1 - \sin^2 \theta)(1 + \frac{1}{\cos^2 \theta}) - (1 - \cos \theta)^2$ کدام است؟

$$\cos^2 \theta \quad (2)$$

$$\sin^2 \theta \quad (1)$$

$$2 \cos \theta \quad (4)$$

$$-\cos^2 \theta \quad (3)$$

۴

اگر $\frac{a}{\sin x} + \frac{b}{\cos x} = 0$ باشد، $\tan x + \cot x$ کدام است؟

$$-\left(\frac{a^2 + b^2}{ab}\right) \quad (2)$$

$$\frac{a^2 + b^2}{ab} \quad (1)$$

$$-\left(\frac{a^2 + b^2}{2ab}\right) \quad (4)$$

$$\frac{a^2 + b^2}{2ab} \quad (3)$$

۵

ساده شده عبارت $(1 - \sin^2 \theta)(1 - \tan^2 \theta)$ کدام است؟

$$2 \tan^2 \theta \quad (2)$$

$$2 \cot^2 \theta \quad (1)$$

$$1 - 2 \sin^2 \theta \quad (4)$$

$$1 - 2 \cos^2 \theta \quad (3)$$

۶

اگر $\sin \alpha = \frac{-6}{10}$ باشد و α زاویه‌ای در ربع سوم باشد، آنگاه حاصل $\tan \alpha - \cot \alpha$ کدام است؟

$$\frac{6}{13} \quad (2)$$

$$\frac{-37}{36} \quad (4)$$

$$\frac{-6}{13} \quad (1)$$

$$\frac{36}{91} \quad (3)$$

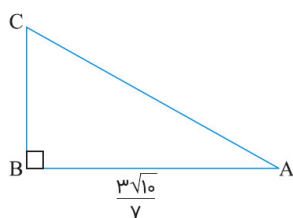
۷ اندازه وتر مثلث داده شده کدام است؟ $(\sin A = \frac{2}{7})$

(۱) ۱

(۲) $\sqrt{2}$

(۳) $\sqrt{3}$

(۴) ۲



۸ اگر $\tan \theta = 4$ باشد، حاصل $\sin \theta - \cos \theta$ کدام است؟ (θ حاده است)

(۲) $\sqrt{\frac{9}{17}}$

(۴) $\sqrt{\frac{5}{15}}$

(۱) $\sqrt{\frac{5}{17}}$

(۳) $\sqrt{\frac{5}{3}}$

۹ اگر $\sin x + \cos x = \frac{1}{3}$ باشد، حاصل عبارت $\sin^3 x + \cos^3 x$ کدام است؟

(۲) $\frac{13}{81}$

(۴) $\frac{17}{81}$

(۱) $\frac{13}{27}$

(۳) $\frac{17}{27}$

پاسخ (2) Homework

گزینه ۴

۱

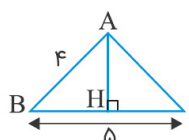
صورت و مخرج را بر $\cos^3 x$ تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{\sin^3 x + \cos x}{\cos^3 x + \sin x} = \frac{\frac{\sin^3 x}{\cos^3 x} + \frac{\cos x}{\cos^3 x}}{\frac{\cos^3 x}{\cos^3 x} + \frac{\sin x}{\cos^3 x}} = \frac{\tan^3 x + \frac{1}{\cos^2 x}}{1 + \frac{\sin x}{\cos x} \times \frac{1}{\cos^2 x}}$$

$$= \frac{\tan^3 x + (1 + \tan^2 x)}{1 + \tan x(1 + \tan^2 x)} = \frac{3^3 + (1 + (3)^2)}{1 + 3(1 + (3)^2)} = \frac{27 + 10}{1 + 30} = \frac{37}{31}$$

گزینه ۱

۲



$$S_{ABC} = 6 \Rightarrow \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin B = 6 \Rightarrow \frac{1}{2} \times 5 \times 4 \sin B = 6 \Rightarrow 10 \sin B = 6 \Rightarrow \sin B = \frac{3}{5}$$

$$\sin^2 B + \cos^2 B = 1 \Rightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \cos^2 B = 1 \Rightarrow \cos^2 B = \frac{16}{25} \Rightarrow \cos B = \frac{4}{5}$$

$$\sin B = \frac{AH}{AB} \Rightarrow \frac{3}{5} = \frac{AH}{5} \Rightarrow AH = \frac{12}{5}$$

$$\cos B = \frac{BH}{AB} \Rightarrow \frac{4}{5} = \frac{BH}{5} \Rightarrow BH = \frac{16}{5}, \quad HC = BC - BH$$

$$\Rightarrow 5 - \frac{16}{5} = \frac{9}{5} \Rightarrow HC = \frac{9}{5} \Rightarrow \left(\frac{9}{5}\right)^2 + \left(\frac{12}{5}\right)^2 = AC^2 \Rightarrow AC = 3$$

گزینه ۴

۳

$$(1 - \sin^2 \theta) \left(1 + \frac{1}{\cos^2 \theta}\right) - (1 - \cos^2 \theta)^2 = \cos^2 \theta \left(1 + \frac{1}{\cos^2 \theta}\right) - (1 + \cos^2 \theta - 2 \cos \theta)$$

$$= \cos^2 \theta + 1 - 1 - \cos^2 \theta + 2 \cos \theta = 2 \cos \theta$$

گزینه ۲

۴

$$\begin{aligned} \frac{a}{\sin x} + \frac{b}{\cos x} &= 0 \Rightarrow \frac{a \cos x + b \sin x}{\sin x \cdot \cos x} = 0 \Rightarrow a \cos x + b \sin x = 0 \\ \Rightarrow a \cos x &= -b \sin x \Rightarrow \frac{\cos x}{\sin x} = -\frac{b}{a} \Rightarrow \cot x = -\frac{b}{a} \\ \Rightarrow \tan x &= -\frac{a}{b} \Rightarrow \tan x + \cot x = -\frac{a}{b} - \frac{b}{a} \\ \Rightarrow -\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) &= -\left(\frac{a^2 + b^2}{ab}\right) \end{aligned}$$

گزینه ۴

۵

$$\begin{aligned} (1 - \sin^2 \theta)(1 - \tan^2 \theta) &= \cos^2 \theta \left(1 - \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta}\right) \\ &= \underbrace{\cos^2 \theta}_{1 - \sin^2 \theta} - \sin^2 \theta = 1 - 2\sin^2 \theta \end{aligned}$$

گزینه ۴

۶

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} \Rightarrow \cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \frac{36}{100}} = \pm \frac{8}{10} \\ \xrightarrow{\text{ربع سوم}} \cos \alpha &= -\frac{8}{10} \\ \tan \alpha &= \frac{-\frac{6}{10}}{-\frac{8}{10}} = \frac{3}{4} \Rightarrow \cot \alpha = \frac{4}{3} \\ \Rightarrow \tan \alpha - \cot^2 \alpha &= \frac{3}{4} - \frac{16}{9} = -\frac{37}{36} \end{aligned}$$

گزینه ۲

۷

$$\begin{aligned} \cos A &= \sqrt{1 - \sin^2 A} = \sqrt{1 - \frac{4}{49}} = \sqrt{\frac{45}{49}} = \frac{3\sqrt{5}}{7} \\ \cos A &= \frac{AB}{AC} = \frac{3\sqrt{5}}{7} \Rightarrow \frac{\frac{3\sqrt{10}}{7}}{AC} = \frac{3\sqrt{5}}{7} \\ 3\sqrt{10} &= 3\sqrt{5} AC \Rightarrow AC = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}} = \sqrt{2} \end{aligned}$$

گزینه ۲

۸

$$\tan \theta = ۴ \Rightarrow \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = ۴ \Rightarrow \sin \theta = ۴ \cos \theta$$

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = ۱ \xrightarrow{\sin \theta = ۴ \cos \theta} (۴ \cos \theta)^2 + \cos^2 \theta = ۱ \Rightarrow ۱۷ \cos^2 \theta = ۱$$

$$\Rightarrow \cos \theta = \pm \sqrt{\frac{۱}{۱۷}} \xrightarrow{\theta \text{ حاده است}} \cos \theta = \sqrt{\frac{۱}{۱۷}} \xrightarrow{\sin \theta = ۴ \cos \theta} \sin \theta = ۴ \sqrt{\frac{۱}{۱۷}}$$

$$\sin \theta - \cos \theta = ۴ \sqrt{\frac{۱}{۱۷}} - \sqrt{\frac{۱}{۱۷}} = ۳ \sqrt{\frac{۱}{۱۷}} = \sqrt{\frac{۹}{۱۷}}$$

گزینه ۱

۹

$$\sin x + \cos x = \frac{۱}{۳} \xrightarrow{\text{توان } ۲} \sin^2 x + \cos^2 x + ۲ \sin x \cdot \cos x = \frac{۱}{۹}$$

$$\Rightarrow ۱ + ۲ \sin x \cdot \cos x = \frac{۱}{۹} \Rightarrow ۲ \sin x \cdot \cos x = -\frac{۸}{۹} \Rightarrow \sin x \cdot \cos x = -\frac{۴}{۹}$$

$$\sin^3 x + \cos^3 x = (\sin x + \cos x)(\sin^2 x + \cos^2 x - \sin x \cdot \cos x)$$

$$= \frac{۱}{۳} \left(۱ - \left(-\frac{۴}{۹} \right) \right) = \frac{۱}{۳} \times \frac{۱۳}{۹} = \frac{۱۳}{۲۷}$$

نسبت‌های مثلثاتی $\alpha \pm \beta$ (ویژه حسابان)

$$۱) \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$۲) \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

تمرین: حاصل $\sin ۱۵^\circ$ و $\sin ۷۵^\circ$ را بیابید:

$$\sin(۷۵^\circ) = \sin(۴۵^\circ + ۳۰^\circ) = \sin ۴۵^\circ \cos ۳۰^\circ + \cos ۴۵^\circ \sin ۳۰^\circ = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} = \cos ۱۵^\circ$$

$$\sin(۱۵^\circ) = \sin(۴۵^\circ - ۳۰^\circ) = \sin ۴۵^\circ \cos ۳۰^\circ - \cos ۴۵^\circ \sin ۳۰^\circ = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} = \cos ۷۵^\circ$$

$$۳) \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$۴) \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$۵) \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$۶) \sin x - \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$۷) \tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}$$

$$۸) \tan\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = \frac{\tan \frac{\pi}{4} + \tan \alpha}{1 - \tan \frac{\pi}{4} \cdot \tan \alpha} = \frac{1 + \tan \alpha}{1 - \tan \alpha}$$

$$۹) \tan\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \frac{\tan \frac{\pi}{4} - \tan \alpha}{1 + \tan \frac{\pi}{4} \cdot \tan \alpha} = \frac{1 - \tan \alpha}{1 + \tan \alpha}$$

تمرین: حاصل $\tan 15^\circ$ و $\tan 75^\circ$ را بیابید.

$$\tan(15^\circ) = \tan(45^\circ - 30^\circ) = \frac{1 - \tan 30^\circ}{1 + \tan 30^\circ} = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}}$$

$$\tan(75^\circ) = \tan(45^\circ + 30^\circ) = \frac{1 + \tan 30^\circ}{1 - \tan 30^\circ} = \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}}$$

تمرین: اگر $\alpha + \beta = 135^\circ$ و $\tan(\alpha - \beta) = \frac{3}{4}$ ، مقدار کسر $\frac{\cos^2 \alpha \cos^2 \beta - \sin^2 \alpha \sin^2 \beta}{\sin^2 \alpha \cos^2 \beta - \cos^2 \alpha \sin^2 \beta}$ کدام است؟

(سراسری ریاضی فارغ از کشور ۸۴)

$$-\frac{4}{3} \quad (4)$$

$$\frac{4}{3} \quad (3)$$

$$-\frac{3}{4} \quad (2)$$

$$\frac{3}{4} \quad (1)$$

تمرین: مقدار عبارت $\frac{\cos 2^\circ + \sqrt{3} \sin 2^\circ}{\sin 5^\circ}$ چه قدر است؟

$$3 \quad (4)$$

$$2 \quad (3)$$

$$\sqrt{3} \quad (2)$$

$$\sqrt{2} \quad (1)$$

نکته: در این مدل از سؤالات می‌توانیم به جای $\sqrt{3}$ قرار دهیم $\tan 60^\circ$ یا $\frac{\sin 60^\circ}{\cos 60^\circ}$ و سپس با مخرج مشترک‌گیری به راحتی به جواب

برسیم.

(سراسری تیربی ۹۷)

تعین: اگر $\frac{\sin(x - \frac{\pi}{4})}{\sin(x + \frac{\pi}{4})} = 2$ باشد، $\tan x$ کدام است؟

(۴) ۳

(۳) $\frac{2}{3}$

(۲) $\frac{1}{3}$

(۱) -۳

تعین: اگر $\sin(\alpha + \beta) = \frac{2}{3}$ و $\sin(\alpha - \beta) = \frac{1}{4}$ باشد، حاصل $\sin \alpha \cos \beta$ کدام است؟

(۴) $\frac{11}{24}$

(۳) $\frac{7}{24}$

(۲) $\frac{7}{12}$

(۱) $\frac{11}{12}$

(فارج ریاضی ۹۹)

تعین: اگر انتهای کمان α در ربع اول دایره مثلثاتی و $\tan \alpha = \frac{1}{7}$ باشد، مقدار $\sin(\frac{13\pi}{4} + \alpha)$ کدام است؟

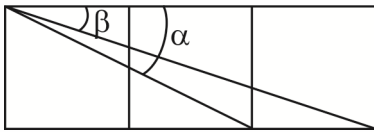
(۴) $\frac{4}{5}$

(۳) $\frac{3}{5}$

(۲) $-\frac{3}{5}$

(۱) $-\frac{4}{5}$

تمرین: شکل زیر از سه مربع یکسان به طول ضلع واحد تشکیل شده است. حاصل $\cos(\alpha + \beta)$ کدام است؟



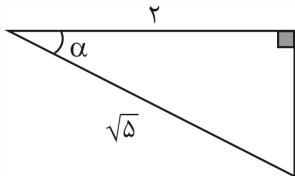
$$\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (2)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \quad (1)$$

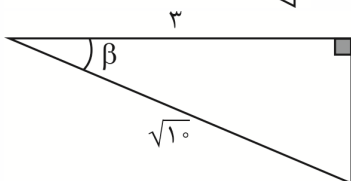
$$\frac{\sqrt{3}}{3} \quad (4)$$

$$\frac{1}{2} \quad (3)$$

پاسخ: گزینه‌ی «۱» - ابتدا به کمک فیثاغورس اندازه‌ی وترهای دو مثلث قائم‌الزاویه را به دست می‌آوریم و سپس:



$$\Rightarrow \sin \alpha = \frac{1 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \cos \alpha = \frac{1 \times 1}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$



$$\Rightarrow \sin \beta = \frac{1 \times \sqrt{5}}{\sqrt{5} \times \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}, \cos \beta = \frac{2 \times \sqrt{5}}{\sqrt{5} \times \sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = \left(\frac{1}{2} \times \frac{2\sqrt{5}}{5}\right) - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{5}}{5}\right) = \frac{\sqrt{5}}{5} - \frac{\sqrt{10}}{10} = \frac{2\sqrt{5} - \sqrt{10}}{10} \\ &= \frac{\sqrt{5}(2 - \sqrt{2})}{10} = \frac{\sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

تمرین: حاصل عبارت $\sin 1^\circ + \cos 1^\circ - \sqrt{2} \sin 45^\circ$ را پیدا کنید.

پاسخ: ابتدا حاصل $\sin 1^\circ + \cos 1^\circ$ را با استفاده از رابطه‌های ذکر شده می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} \sin 1^\circ + \cos 1^\circ - \sqrt{2} \cos 55^\circ &= \sqrt{2} \sin(1^\circ + 45^\circ) - \sqrt{2} \cos 55^\circ = \sqrt{2} \sin 55^\circ - \sqrt{2} \cos 55^\circ \\ &= \sqrt{2}(\sin 55^\circ - \cos 55^\circ) = \sqrt{2} \times \sqrt{2} \sin(55^\circ - 45^\circ) = 2 \sin 1^\circ \end{aligned}$$

تمرین: اگر $\sin(x+y) = \frac{5}{13}$ ، $\sin(x-y) = \frac{5}{13}$ و $x+y$ و $x-y$ هر دو حاده باشند، مقدار $\sin 2x$ و $\sin 2y$ را به دست آورید.

پاسخ: اول که به این سؤال نگاه می‌کنیم، هیچ ارتباطی بین آن چه داده شده و آن چه خواسته شده پیدا نمی‌کنیم. اما اگر فکر کنیم شاید بتوانیم بین عبارت‌های $x+y$ ، $x-y$ ، $2x$ و $2y$ رابطه‌ای پیدا کنیم. قبل از این که من بگویم چه خبر است خودتان کمی فکر کنید. و اما رابطه بین این عامل‌ها:

$$2x = (x+y) + (x-y)$$

$$2y = (x+y) - (x-y)$$

یعنی $2x$ و $2y$ را می‌شود با جمع و تفریق کردن $x+y$ و $x-y$ پیدا کرد. حالا دیگر می‌توانیم $\sin 2x$ و $\sin 2y$ را پیدا کنیم:

$$\sin 2x = \sin((x+y) + (x-y)) = \sin(x+y) \cos(x-y) + \cos(x+y) \sin(x-y)$$

دقت کنید که در نوشتن این رابطه فرض کردیم $x+y = \alpha$ و $x-y = \beta$ و رابطه $\sin(\alpha + \beta)$ را بسط داده‌ایم. خُب، حالا باید مقادیر $\sin(x+y)$ ، $\sin(x-y)$ ، $\cos(x+y)$ و $\cos(x-y)$ را پیدا کنیم. مقدار سینوس‌ها معلوم است، پس مقدار کسینوس‌ها را با استفاده از اتحادهای مثلثاتی پیدا می‌کنیم:

$$\cos^2(x+y) = 1 - \sin^2(x+y) = 1 - \frac{25}{169} = \frac{144}{169} \xrightarrow{\text{حاده } x+y} \cos(x+y) = \frac{12}{13}$$

$$\cos^2(x-y) = 1 - \sin^2(x-y) = 1 - \frac{25}{169} = \frac{144}{169} \xrightarrow{\text{حاده } x-y} \cos(x-y) = \frac{12}{13}$$

$$\sin 2x = \left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{12}{13}\right) + \left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{5}{13}\right) = \frac{36}{65} + \frac{20}{65} = \frac{56}{65}$$

پس داریم:

مقدار $\sin 2y$ را هم به همین ترتیب پیدا می‌کنیم. پیدا کردن این مقدار را می‌گذاریم به عهده شما. جواب آخرش باید برابر $\frac{16}{65}$ شود. (جواب آخر را به این خاطر داده‌ام که بررسی کنید که آیا درست حل کرده‌اید یا نه).

تمرین [مهم]: از حل دستگاه
$$\begin{cases} \tan(\alpha + \beta) = 8 \\ \tan(\alpha - \beta) = 7 \end{cases}$$
 حاصل $\tan 2\alpha$ و $\tan 2\beta$ را بیابید.

$$\begin{cases} \alpha + \beta = x \Rightarrow \tan(\alpha + \beta) = \tan x = 8 \\ \alpha - \beta = y \Rightarrow \tan(\alpha - \beta) = \tan y = 7 \end{cases}$$

$$x + y = 2\alpha \Rightarrow \tan(x + y) = \tan 2\alpha = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y} = \frac{8 + 7}{1 - 56} = -\frac{15}{55}$$

$$x - y = 2\beta \Rightarrow \tan(x - y) = \tan 2\beta = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y} = \frac{8 - 7}{1 + 56} = \frac{1}{57}$$

پس $\tan 2\alpha = \frac{15}{55}$ و $\tan 2\beta = \frac{1}{57}$ است.

تمرین: اگر $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \cos 3x \cdot \cos 2x + \sin 3x \cdot \sin 2x \leq 1$ آن گاه حدود تغییرات x کدام است؟

$$\begin{aligned} (1) \quad -\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4} \quad (2) \quad \frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \quad (3) \quad \frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{4} \quad (4) \quad \pi \leq x \leq \frac{5\pi}{4} \end{aligned}$$

تمرین: عبارت $\frac{\cos 2a}{\cos a} - \frac{\sin 2a}{\sin a}$ وقتی $a \neq \frac{k\pi}{2}$ باشد، برابر است با:

$$\begin{aligned} (1) \quad \frac{1}{\cos a} \quad (2) \quad -\frac{1}{\cos a} \quad (3) \quad \frac{1}{\sin a} \quad (4) \quad -\frac{1}{\sin a} \end{aligned}$$

تعریف: حاصل کسر $\frac{1 - \tan 2^\circ}{1 + \tan 2^\circ}$ کدام است؟

$\tan 15^\circ \quad (4)$

$1 + \tan 2^\circ \quad (3)$

$\tan 25^\circ \quad (2)$

$1 - \tan 2^\circ \quad (1)$

تعریف: اگر $\tan(\alpha + 20^\circ) = \frac{3}{4}$ باشد، $\cot(25^\circ - \alpha)$ کدام است؟

$8 \quad (4)$

$7 \quad (3)$

$6 \quad (2)$

$5 \quad (1)$

(سپیش)

تعریف: اگر $\alpha + \beta = \frac{5\pi}{4}$ ، حاصل $(1 + \tan \alpha)(1 + \tan \beta)$ کدام است؟

$4 \quad (4)$

$3 \quad (3)$

$2 \quad (2)$

$1 \quad (1)$

(گزینه‌ی دو)

تعریف: حاصل عبارت $A = (1 + \tan 18^\circ)(1 + \tan 27^\circ)$ کدام است؟

$2 \quad (4)$

$2\sqrt{2} \quad (3)$

$1 \quad (2)$

$\sqrt{2} \quad (1)$

(ریاضی ۹۹)

تمرین: اگر $\tan \alpha$ و $\tan \beta$ برابر ریشه‌های معادله $2x^2 + 3x - 1 = 0$ باشند، $\tan(\alpha + \beta)$ کدام است؟

-۱ (۴)

-۳ (۳)

 $\frac{3}{2}$ (۲)

۱ (۱)

تمرین: اگر $\cot(x - y) = 5$ و $\tan(x + y) = 3$ ، حاصل $\tan 2x$ کدام است؟

 $\frac{4}{7}$ (۴) $\frac{1}{8}$ (۳) $\frac{7}{4}$ (۲)

۸ (۱)

Homework

۱ حاصل عبارت $\frac{\sin^6 \alpha + 7 \cos^6 \alpha}{1 + \cos^6 \alpha} - \frac{\cos^6 \alpha + 7 \sin^6 \alpha}{1 + \sin^6 \alpha}$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) $\cos 2\alpha$ (۴) $\sin 2\alpha$

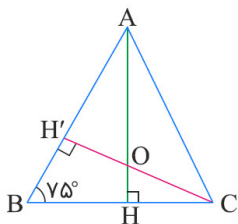
کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۳

۲ حاصل عبارت $(3 \cos 4x + \sqrt{2} \sin x - \sqrt{2} \cos x)$ به ازای $x = \frac{\pi}{12}$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\sqrt{2}$ (۴) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۳

۳ در شکل زیر مثلث ABC متساوی الساقین و طول ساق AC برابر ۶ است. مساحت مثلث OHC کدام است؟ (با تغییر)



- (۱) $\frac{2}{3}$ (۲) $\frac{4}{3}$ (۳) $\frac{9}{2(7+4\sqrt{3})}$ (۴) $\frac{9}{7+4\sqrt{3}}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

۴ زاویه $\angle xOy$ و نقطه M داخل زاویه با شرط $\angle M\hat{O}y = \angle M\hat{O}x$ مفروض است. از نقطه M عمودهای MN و MP را به ترتیب بر نیم‌خط‌های Ox و Oy رسم می‌کنیم. نسبت $\frac{MN}{MP}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{OP}{ON}$ (۲) $\frac{OP}{OM}$ (۳) $\frac{2OP}{ON}$ (۴) $\frac{2OP}{OM}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۰

۵ اگر $f(\alpha) = 5 \sin(\alpha) \cos(2\alpha) + 2 \sin(\alpha)$ باشد، مقدار $f\left(\frac{41\pi}{9}\right)$ ، کدام است؟

(۱) $-\sqrt{3}$ (۲) $\sqrt{3}$

(۳) ۱ (۴) -۱

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۰

۶ اگر زاویه α در ناحیه سوم مثلثاتی و $\tan(\alpha) = \frac{3}{4}$ باشد، مقدار $\frac{\cos(2\alpha - \frac{\pi}{2}) + \cos(\alpha + \pi)}{\cot(2\alpha)}$ کدام است؟

(۱) $-\frac{96}{175}$ (۲) $\frac{1056}{175}$

(۳) $\frac{96}{175}$ (۴) $-\frac{1056}{175}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

۷ اندازه زاویه A در مثلث ABC ، 45° درجه بیشتر از اندازه زاویه B است. حاصل $2 \cos A \sin B - \sin C$ کدام است؟

(۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۲) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

(۳) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۴) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۱

۸ اگر $10(\sin x + \cos x) = 6\sqrt{5}$ باشد، مقدار $\tan x$ کدام عدد می‌تواند باشد؟

(۱) $-\frac{1}{3}$ (۲) -۲

(۳) $\frac{1}{2}$ (۴) ۳

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

۹ اگر $f(x) = 32 \cos^2(x) \cos^2(2x) \cos^2(4x) \cos^2(8x) \cos^2(16x)$ باشد، مقدار $f\left(\frac{\pi}{12}\right)$ ، کدام است؟

(۱) $\frac{6 + \sqrt{27}}{32}$ (۲) $\frac{6 + \sqrt{27}}{16}$

(۳) $\frac{6 - \sqrt{27}}{16}$ (۴) $\frac{6 - \sqrt{27}}{32}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

۱۰ اگر $f(x) = 16 \cos^2(3x) \cos^2(6x) \cos^2(12x) \cos^2(24x)$ باشد، مقدار $f\left(\frac{\pi}{36}\right)$ ، کدام است؟

(۱) $\frac{6 - 3\sqrt{3}}{16}$ (۲) $\frac{6 - \sqrt{3}}{16}$

(۳) $\frac{6 + \sqrt{3}}{16}$ (۴) $\frac{6 + 3\sqrt{3}}{16}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

۱۱ ساده شده عبارت $\frac{\sin(\theta)}{1 - \cos(\theta)} + \frac{1 + \cos(\theta)}{\sin(\theta)}$ کدام است؟

- (۱) $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ (۲) $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$
 (۳) $2 \cot\left(\frac{\theta}{2}\right)$ (۴) $2 \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۰

۱۲ حاصل عبارت $\frac{\cos 2\alpha}{\tan \alpha + \cot \alpha}$ به ازای $\alpha = \frac{\pi}{16}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ (۲) $\frac{\sqrt{3}}{4}$
 (۳) $\frac{\sqrt{3}}{8}$ (۴) $\frac{\sqrt{2}}{8}$

علوی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۸ ۱۴۰۱

۱۳ حاصل عبارت $\sin^3 x \cdot \cos x - \cos^3 x \cdot \sin x$ به ازای $x = \frac{\pi}{24}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{8}$ (۲) $-\frac{1}{8}$
 (۳) $\frac{\sqrt{3}}{8}$ (۴) $-\frac{\sqrt{3}}{8}$

علوی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۸ ۱۴۰۱

۱۴ حاصل $\sin 36^\circ \times \cos 36^\circ \times \cos 72^\circ$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{4} \sin 36^\circ$ (۲) $\frac{1}{2} \sin 36^\circ$
 (۳) $\frac{1}{4} \cos 36^\circ$ (۴) $\frac{1}{2} \cos 36^\circ$

علوی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۸ ۱۴۰۱

۱۵ اگر $\frac{1}{2} = \sin 2x \cdot \sin 3x - \cos 2x \cdot \cos 3x$ باشد، x کدام مقدار می تواند باشد؟ (x در ناحیه اول مثلثاتی است)

- (۱) $\frac{\pi}{15}$ (۲) $\frac{\pi}{5}$
 (۳) $\frac{\pi}{20}$ (۴) $\frac{\pi}{6}$

علوی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۸ ۱۴۰۱

۱۶ اگر $\sin \alpha = \frac{4}{5}$ و $\cos \beta = -\frac{12}{13}$ و انتهای کمان α در ربع اول و انتهای کمان β در ربع دوم قرار داشته باشد، حاصل $\sin(\alpha - \beta)$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{15}{65}$ (۲) $-\frac{33}{65}$
 (۳) $-\frac{63}{65}$ (۴) $-\frac{48}{65}$

علوی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۸ ۱۴۰۱

۱۷ اگر $\frac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} = \frac{1}{2}$ باشد، حاصل عبارت $2 \tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + 3 \cot\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$ کدام است؟

(۲) $-\frac{5}{2}$

(۴) $\frac{7}{2}$

(۱) $\frac{3}{2}$

(۳) $-\frac{11}{2}$

علوی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۸ ۱۴۰۱

پاسخ Homework

گزینه ۳

۱

به جای $\sin^F \alpha$ و $\cos^F \alpha$ به ترتیب زیر قرار می‌دهیم.

$$\begin{aligned} & \frac{(1 - \cos^F \alpha)^F + F \cos^F \alpha}{1 + \cos^F \alpha} - \frac{(1 - \sin^F \alpha)^F + F \sin^F \alpha}{1 + \sin^F \alpha} \\ &= \frac{1 + \cos^F \alpha - F \cos^F \alpha + F \cos^F \alpha}{1 + \cos^F \alpha} - \frac{1 + \sin^F \alpha - F \sin^F \alpha + F \sin^F \alpha}{1 + \sin^F \alpha} \\ &= \frac{(1 + \cos^F \alpha)^F}{1 + \cos^F \alpha} - \frac{(1 + \sin^F \alpha)^F}{1 + \sin^F \alpha} = 1 + \cos^F \alpha - 1 - \sin^F \alpha = \cos^F \alpha \end{aligned}$$

البته دقت شود از روش عددگذاری می‌توانستیم به جای x ها عدد مثلاً $\frac{\pi}{F}$ را قرار دهیم و سریع‌تر به جواب برسیم.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۳

گزینه ۲

۲

از رابطه $\sin x - \cos x = \sqrt{F} \sin(x - \frac{\pi}{F})$ استفاده می‌کنیم:

$$F \cos Fx + \sqrt{F}(\sin x - \cos x) = F \cos Fx + F \sin(x - \frac{\pi}{F})$$

حال به جای x مقدار $\frac{\pi}{F}$ می‌گذاریم:

$$\begin{aligned} & F \cos(F \times \frac{\pi}{F}) + F \sin(\frac{\pi}{F} - \frac{\pi}{F}) = F \cos \frac{\pi}{F} - F \sin \frac{\pi}{F} \\ &= F \times \frac{1}{F} - F \times \frac{1}{F} = \frac{1}{F} \end{aligned}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۳

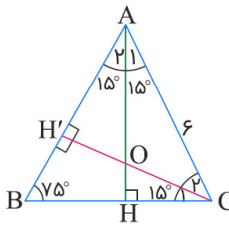
گزینه ۳

۳

راه حل اول:

$$\begin{aligned} \triangle AHC : \cos \hat{C} &= \frac{HC}{\epsilon} \Rightarrow HC = \epsilon \cos 75^\circ \\ \triangle OHC : \tan 15^\circ &= \frac{OH}{HC} \Rightarrow OH = \epsilon \cos 75^\circ \tan 15^\circ \\ S_{OHC} &= \frac{1}{2} \times (\epsilon \cos 75^\circ)(\epsilon \cos 75^\circ \tan 15^\circ) = 18 \cos^2 75^\circ (2 - \sqrt{3}) \\ &= 18 \times \frac{1 + \cos 150^\circ}{2} (2 - \sqrt{3}) = 9 \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) (2 - \sqrt{3}) \\ &= \frac{9}{2} (2 - \sqrt{3})^2 = \frac{9}{2} (4 - 4\sqrt{3} + 3) = \frac{9(7 - 4\sqrt{3})}{2} \end{aligned}$$

راه حل دوم:

چون مثلث ABC متساوی الساقین است، پس $AB = AC$ و داریم:

$$\begin{aligned} \hat{C} = \hat{B} = 75^\circ &\Rightarrow \hat{A} = 30^\circ \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{A}_2 = 15^\circ \\ \triangle BH'C : \hat{B} = 75^\circ &\Rightarrow \hat{C}_1 = 15^\circ \Rightarrow \triangle OHC \sim \triangle AHC \Rightarrow \frac{S_{OHC}}{S_{AHC}} = \left(\frac{HC}{AH}\right)^2 = \tan^2 15^\circ \\ &= (2 - \sqrt{3})^2 = 7 - 4\sqrt{3} \Rightarrow S_{OHC} = (7 - 4\sqrt{3}) S_{AHC} \quad (*) \\ S_{AHC} &= \frac{1}{2} S_{ABC} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{AB}{\epsilon} \right) \left(\frac{AC}{\epsilon} \right) \left(\frac{\sin \hat{A}}{\frac{1}{2}} \right) \right) = \frac{9}{2} \\ (*) &\Rightarrow S_{OHC} = (7 - 4\sqrt{3}) \times \frac{9}{2} = \frac{9(7 - 4\sqrt{3})}{2} \end{aligned}$$

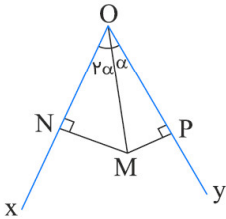
تذکر: برای یافتن مقدار تانژانت می‌توان به دو صورت زیر عمل کرد:

$$\begin{aligned} 1) \tan 15^\circ &= \tan(60^\circ - 45^\circ) = \frac{\tan 60^\circ - \tan 45^\circ}{1 + \tan 60^\circ \tan 45^\circ} = \frac{\sqrt{3} - 1}{1 + \sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3} \\ 2) \cos 15^\circ &= \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2} \quad (\cos 2x = 2\cos^2 x - 1) \\ \sin 15^\circ &= \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2} \quad (\sin 2x = 2\sin x \cos x) \\ \Rightarrow \tan 15^\circ &= \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{\sqrt{2 + \sqrt{3}}} = 2 - \sqrt{3} \end{aligned}$$

گزینه ۴

۴

فرض کنیم $\widehat{MOy} = \alpha$. پس $\widehat{xOM} = 2\alpha$ و داریم:



$$\left. \begin{array}{l} \triangle ONM : \sin 2\alpha = \frac{MN}{OM} \\ \triangle OPM : \sin \alpha = \frac{MP}{OM} \end{array} \right\}$$

رابطه اول را بر رابطه دوم تقسیم می‌کنیم

$$\Rightarrow \frac{\sin 2\alpha}{\sin \alpha} = \frac{MN}{MP}$$

$$\Rightarrow \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{MN}{MP} \Rightarrow \frac{MN}{MP} = 2 \cos \alpha = 2 \left(\frac{OP}{OM} \right) = \frac{2OP}{OM}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۰

گزینه ۱

۵

با استفاده از اتحادهایی که درستی آنها را می‌دانیم، می‌توان به اتحاد زیر رسید:

$$\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$$

اول از اتحاد $\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$ استفاده می‌کنیم:

$$f(\alpha) = 4 \sin \alpha (1 - 2 \sin^2 \alpha) + 2 \sin \alpha = 6 \sin \alpha - 8 \sin^3 \alpha$$

$$\xrightarrow{\text{از ۲ فاکتور می‌گیریم}} f(\alpha) = 2 \left(\underbrace{3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha}_{\sin 3\alpha} \right) = 2 \sin 3\alpha$$

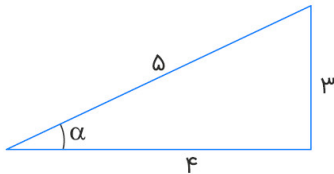
پس:

$$f\left(\frac{41\pi}{9}\right) = 2 \sin\left(\frac{41\pi}{3}\right) = 2 \sin\left(14\pi - \frac{\pi}{3}\right) = 2 \left(-\sin \frac{\pi}{3}\right) = 2 \times \frac{-\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۰

گزینه ۲

۶



$$\tan \alpha = \frac{3}{4}, \quad \cot \alpha = \frac{4}{3}, \quad \sin \alpha = \frac{3}{5}, \quad \cos \alpha = \frac{4}{5}$$

$$\begin{aligned} \frac{\cos\left(2\alpha - \frac{\pi}{2}\right) + \cos(\alpha + \pi)}{\cot 2\alpha} &= \frac{\sin 2\alpha - \cos \alpha}{\cot \alpha - \tan \alpha} = \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha - \cos \alpha}{\cot \alpha - \tan \alpha} \\ &= \frac{2 \left(-\frac{3}{5}\right) \left(-\frac{4}{5}\right) + \frac{4}{5}}{\frac{4}{3} - \frac{3}{4}} = \frac{\frac{4}{5} \left(\frac{6}{5} + 1\right)}{\frac{16 - 9}{12}} = \frac{\frac{4}{5} \left(\frac{11}{5}\right)}{\frac{7}{12}} = \frac{4(11)(24)}{5(5)(7)} = \frac{1056}{175} \end{aligned}$$

$$\cot 2\alpha = \frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{2 \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{\cot \alpha - \tan \alpha}{2}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

گزینه ۲

۷

$$\begin{aligned} \sin(\alpha \pm \beta) &= \sin \alpha \cos \beta \pm \sin \beta \cos \alpha \\ \Rightarrow 2 \sin \alpha \cos \beta &= \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) \\ A = B + 45^\circ &= B + \frac{\pi}{4}, \quad A + B + C = \pi \\ 2 \cos A \sin B - \sin C &= \sin(B + A) + \sin(B - A) - \sin C \\ &= \sin(\pi - C) + \sin\left(\frac{-\pi}{4}\right) - \sin C \\ &= \sin C - \frac{\sqrt{2}}{2} - \sin C = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۱

گزینه ۴

۱۰

طرفین رابطه را در $\sin^2 3x$ ضرب می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
 f(x) \sin^2 3x &= 16 \sin^2 3x \cos^2 3x \cos^2 6x \cos^2 12x \cos^2 24x \\
 \Rightarrow f(x) \sin^2 3x &= 16 \sin^2 6x \cos^2 6x \cos^2 12x \cos^2 24x \\
 &= \sin^2 12x \cos^2 12x \cos^2 24x \\
 &= \frac{1}{4} \sin^2 24x \cos^2 24x = \frac{1}{16} \sin^2 48x \\
 \Rightarrow f(x) &= \frac{\sin^2 48x}{16 \sin^2 3x}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f\left(\frac{\pi}{36}\right) &= \frac{\sin^2 \frac{48\pi}{36}}{16 \sin^2 \frac{\pi}{12}} = \frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right)}{16 \sin^2 \frac{\pi}{12}} = \frac{\frac{3}{4}}{16 \left(1 - \cos \frac{\pi}{6}\right)} \\
 &= \frac{3}{4 \times 16 \times \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = \frac{3}{16(2 - \sqrt{3})} = \frac{3(2 + \sqrt{3})}{16}
 \end{aligned}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

گزینه ۳

۱۱

$$\frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta} + \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} = \frac{2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}}{2 \sin^2 \frac{\theta}{2}} + \frac{2 \cos^2 \frac{\theta}{2}}{2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}} = \cot \frac{\theta}{2} + \cot \frac{\theta}{2} = 2 \cot \frac{\theta}{2}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۰

گزینه ۴

۱۲

یادآوری:

$$\begin{aligned}
 \tan \alpha + \cot \alpha &= \frac{2}{\sin 2\alpha} \\
 \frac{\cos 2\alpha}{\tan \alpha + \cot \alpha} &= \frac{\cos 2\alpha}{\frac{2}{\sin 2\alpha}} = \frac{1}{2} \sin 2\alpha \cos 2\alpha = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \sin 4\alpha \right) = \frac{1}{4} \sin 4\alpha \\
 \xrightarrow{\alpha = \frac{\pi}{12}} \frac{1}{4} \sin \frac{\pi}{3} &= \frac{\sqrt{3}}{8}
 \end{aligned}$$

علوی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۸ ۱۴۰۱

گزینه ۲

۱۳

$$\begin{aligned}\sin x \cdot \cos x (\sin^2 x - \cos^2 x) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 2x \cdot (-\cos 2x) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin 2x \cdot \cos 2x \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin 4x \right) = -\frac{1}{2} \sin 4x \underset{x=\frac{\pi}{24}}{=} -\frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{4}\end{aligned}$$

یادآوری:

$$\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$$

علوی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۸ ۱۴۰۱

گزینه ۱

۱۴

$$\begin{aligned}(\sin 36^\circ \times \cos 36^\circ) \times \cos 72^\circ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 72^\circ \times \cos 72^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin 144^\circ \right) \\ &= \frac{1}{2} \sin 144^\circ = \frac{1}{2} \sin (180^\circ - 36^\circ) = \frac{1}{2} \sin 36^\circ\end{aligned}$$

یادآوری:

$$\sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(2\alpha)$$

علوی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۸ ۱۴۰۱

گزینه ۱

۱۵

$$\cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b = \cos(a + b)$$

$$\Rightarrow \cos(3x + 2x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \cos 5x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \cos 5x = \cos \frac{\pi}{4} \Rightarrow 5x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{\pi}{20}$$

علوی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۸ ۱۴۰۱

گزینه ۳

۱۶

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \frac{16}{25} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{3}{5}$$

$$\sin^2 \beta = 1 - \cos^2 \beta = 1 - \frac{144}{169} \Rightarrow \sin \beta = \frac{5}{13}$$

$$\begin{aligned}\sin(\alpha - \beta) &= \sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta = \left(\frac{4}{5}\right) \times \left(-\frac{12}{13}\right) - \frac{3}{5} \times \frac{5}{13} \\ &= \frac{-48 - 15}{65} = -\frac{63}{65}\end{aligned}$$

علوی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۸ ۱۴۰۱

گزینه ۲

۱۷

$$\frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{2 \cos^2 \alpha} = \frac{1}{2} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \cot \alpha = 2$$

$$\begin{aligned} \text{عبارت} &= 2 \tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + 3 \cot\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -2 \cot \alpha + 3 \tan \alpha \\ &= -2(2) + 3\left(\frac{1}{2}\right) = -4 + \frac{3}{2} = -\frac{5}{2} \end{aligned}$$

علوی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۸ ۱۴۰۱

صفحه به ندرت مهم

نیم برای امتحان نهایی و ترمیم معدل

فرمول‌های کمان 2α دوازدهم تجربی و ریاضی ۳

برای هر آگرده تجربی و ریاضی

۱) $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$

مثال: $\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2}$, $\sin 6x = 2 \sin 3x \cos 3x$

$$\sin(2\theta) = \frac{1}{2} \sin(4\theta)$$

۲) $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$

الف) $\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$

ب) $\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$

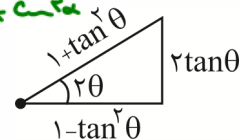
پ) $1 + \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$

ت) $1 - \cos 2\alpha = 2 \sin^2 \alpha \Rightarrow \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$

توان شکن

«به شدت مهم»

$$\begin{aligned} \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} &= \frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} = \frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} \\ \tan^2 \alpha &= \frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} \end{aligned}$$



۳) $\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} \xrightarrow{\text{اثبات}} \tan(\alpha + \alpha) = \frac{\tan \alpha + \tan \alpha}{1 - \tan \alpha \tan \alpha} = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$

۴) $\sin 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} \xrightarrow{\text{اثبات}} \frac{2 \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}}{1 + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}} = 2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin 2\alpha$

۵) $\cos 2\alpha = \frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} \xrightarrow{\text{اثبات}} \frac{1 - \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}}{1 + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}} = \frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos 2\alpha$

۶) $\tan^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} \xrightarrow{\text{اثبات}} \frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} = \frac{2 \sin^2 \alpha}{2 \cos^2 \alpha} = \tan^2 \alpha$

۷) $\tan \alpha + \cot \alpha = \frac{2}{\sin 2\alpha} \xrightarrow{\text{اثبات}} \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} = \frac{1}{\frac{1}{2} \sin 2\alpha} = \frac{2}{\sin 2\alpha}$

۸) $\cot \alpha - \tan \alpha = 2 \cot 2\alpha \xrightarrow{\text{اثبات}} \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} = \frac{\cos 2\alpha}{\frac{1}{2} \sin 2\alpha} = \frac{2 \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = 2 \cot 2\alpha$

*۹) $\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$

*۱۰) $\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$

*۱۱) $\sin \alpha \sin(60^\circ - \alpha) \sin(60^\circ + \alpha) = \frac{1}{4} \sin 3\alpha$

*۱۲) $\cos \alpha \cos(60^\circ - \alpha) \cos(60^\circ + \alpha) = \frac{1}{4} \cos 3\alpha$

*۱۳) $\tan \alpha \tan(60^\circ - \alpha) \tan(60^\circ + \alpha) = \tan 3\alpha$

ویژه

ریاضی

تمرین: حاصل عبارت $\sin(7/5^\circ)\sin(97/5^\circ)\cos(15^\circ)$ چه قدر است؟

$$\begin{aligned} & \sin(97/5^\circ) = \sin(90^\circ + 7/5^\circ) = \cos(7/5^\circ) \\ & \sin(7/5^\circ) \cos(7/5^\circ) = \frac{1}{2} \sin(14/5^\circ) \\ & \frac{1}{2} \sin(14/5^\circ) \cos(15^\circ) = \frac{1}{4} \sin(29/5^\circ) = \frac{1}{4} \sin(5.8^\circ) \end{aligned}$$

(فارج ۹۲)

تمرین: اگر $f(x) = x - \sqrt{x}$ و $g(x) = \sin^2 x$ باشند، ضابطه‌ی تابع fog کدام است؟

$$\begin{aligned} y = f(g(x)) &= g(x) - \sqrt{g(x)} = \sin^2 x - \sqrt{\sin^2 x} = \sin^2 x - |\sin x| = \sin^2 x - \sin x \\ y &= \sin^2 x (\sin^2 x - 1) = -\sin^2 x (1 - \sin^2 x) = -\sin^2 x \cos^2 x = -\left(\sin x \cos x\right)^2 = -\frac{1}{4} \sin^2 2x \end{aligned}$$

تمرین: حاصل عبارت $\cos \frac{\pi}{4} \cdot \cos \frac{2\pi}{4} \cdot \cos \frac{4\pi}{4}$ کدام است؟

$$\begin{aligned} & \cos \frac{\pi}{4} \cdot \cos \frac{2\pi}{4} \cdot \cos \frac{4\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} \cdot \cos \frac{\pi}{2} \cdot \cos \pi \\ & \cos \frac{\pi}{4} \cdot 0 \cdot (-1) = 0 \end{aligned}$$

(ریاضی فارج ۱۳۰۰)

تمرین: ساده شده عبارت $\frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta} + \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta}$ کدام است؟

$$\begin{aligned} & \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta} + \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} = \frac{\sin^2 \theta + (1 - \cos \theta)(1 + \cos \theta)}{\sin \theta (1 - \cos \theta)} \\ & = \frac{\sin^2 \theta + 1 - \cos^2 \theta}{\sin \theta (1 - \cos \theta)} = \frac{2 \sin^2 \theta}{\sin \theta (1 - \cos \theta)} = \frac{2 \sin \theta}{1 - \cos \theta} \end{aligned}$$

(ریاضی فارغ ۱۴۰۱)

تعریف: اگر انتهای کمان x در ربع سوم و $\frac{1-\sin x}{1+\sin x} = 4$ باشد، مقدار صحیح $\tan \frac{x}{2}$ کدام است؟

-۳ (۴)

۳ (۳)

-۲ (۲)

۲ (۱)

می دانیم:

$$\tan x = \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}$$

$$\frac{3}{4} = \frac{2t}{1-t^2} \rightarrow 3 - 3t^2 = 4t \rightarrow 3t^2 + 4t - 3 = 0$$

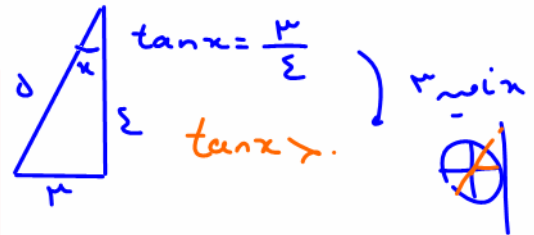
$$t_1 = 1, t_2 = -9$$

حل به روش ac

$$1 - \sin x = 4 + 4 \sin x$$

$$-3 = 5 \sin x$$

$$-\frac{3}{5} = \sin x$$

**تعریف:** حاصل $\sin x \cos x (\cos^4 x - \sin^4 x)$ به ازای $x = 15^\circ$ کدام است؟ $\frac{\sqrt{3}}{8}$ (۴) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ (۳) $\frac{1}{8}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۱)**پاسخ:** گزینه «۴» - با استفاده از روابط $2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin 2\alpha$ و $\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos 2\alpha$ می توان نوشت:

$$\sin x \cos x (\cos^4 x - \sin^4 x) = \sin x \cos x (\cos^2 x - \sin^2 x) (\cos^2 x + \sin^2 x) = \frac{1}{2} \sin 2x \cos 2x = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \sin(4x) \right)$$

$$= \frac{1}{4} \sin(4x)$$

$$\frac{1}{4} \sin(4x) = \frac{1}{4} \sin(60^\circ) = \frac{1}{4} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{8}$$

حالا با جای گذاری $x = 15^\circ$ خواهیم داشت:**تعریف:** با فرض $\sin \alpha = \frac{1}{4}$ ، مقدار $\cos 4\alpha$ کدام است؟ $-\frac{17}{32}$ (۴) $-\frac{17}{64}$ (۳) $\frac{17}{32}$ (۲) $\frac{17}{64}$ (۱)**پاسخ:** گزینه «۲» - ابتدا با استفاده از رابطه $\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$ مقدار $\cos 2\alpha$ را به دست می آوریم:

$$\cos 2\alpha = 1 - 2 \left(\frac{1}{4} \right)^2 = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

حالا با استفاده از رابطه $\cos 4\alpha = 2 \cos^2(2\alpha) - 1$ برای محاسبه مقدار $\cos 4\alpha$ می توان نوشت:

$$\cos 4\alpha = 2 \left(\frac{7}{8} \right)^2 - 1 = \frac{98}{64} - 1 = \frac{34}{64} = \frac{17}{32}$$



$$\sin \alpha = \frac{4}{5} \quad \cos \alpha = \frac{3}{5}$$

علامت به خاطر ناصیه ۳

(سراسری تهرانی ۱۳۰۰)

تعریف: اگر زاویه α در ناحیه سوم مثلثاتی و $\tan \alpha = \frac{3}{4}$ باشد، مقدار $\frac{\cos(\alpha - \frac{\pi}{2}) + \cos(\alpha + \pi)}{\cot(2\alpha)}$ کدام است؟

$$-\frac{1056}{175} \quad (4)$$

$$\frac{96}{175} \quad (3)$$

$$\frac{1056}{175} \quad (2)$$



$$-\frac{96}{175} \quad (1)$$

$$\cos(\alpha - \frac{\pi}{2}) = \cos(-(\frac{\pi}{2} - \alpha)) = \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin \alpha \quad \cos(\alpha + \pi) = -\cos \alpha$$

ت عبارت: $\sin 2\alpha - \cos \alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha - \cos \alpha = 2(-\frac{3}{5})(-\frac{4}{5}) - (-\frac{4}{5}) = \frac{24}{25} + \frac{4}{25} = \frac{28}{25} = \frac{28(44)}{25(175)} = \frac{1232}{4375}$

تعریف: اگر $\cot x - \tan x = 3$ باشد، حاصل عبارت $M = \frac{2 \cot 4x}{2 \cot 2x + 3 \tan 2x}$ کدام است؟

$$-\frac{5}{6} \quad (4)$$

$$-\frac{1}{6} \quad (3)$$

$$\frac{1}{3} \quad (2)$$

$$\frac{1}{6} \quad (1)$$

پاسخ: گزینه «۱» - می دانیم $\cot 0 - \tan 0 = 2 \cot 20$ پس می توان نوشت:

$$2 \cot 2x = 3 \Rightarrow \cot 2x = \frac{3}{2} \Rightarrow \tan 2x = \frac{2}{3}$$

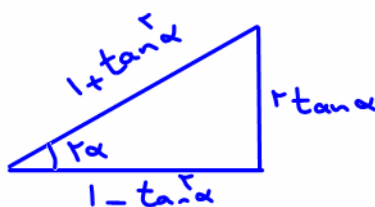
$$2 \cot 4x = \cot 2x - \tan 2x = \frac{3}{2} - \frac{2}{3} = \frac{9-4}{6} = \frac{5}{6}$$

از طرفی مطابق فرمول بالا داریم:

در نهایت با جای گذاری مقادیر به دست آمده در خواسته مسئله، مقدار M به دست می آید، یعنی:

$$M = \frac{2 \cot 4x}{2 \cot 2x + 3 \tan 2x} = \frac{\frac{5}{6}}{2(\frac{3}{2}) + 3(\frac{2}{3})} = \frac{\frac{5}{6}}{3+2} = \frac{\frac{5}{6}}{5} = \frac{1}{6}$$

از شلث 2α می دانیم:



$$\begin{cases} \sin(2\alpha) = \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{2}{5} \\ \cos(2\alpha) = \frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{1}{5} \end{cases}$$

تعریف: اگر $\frac{\tan \alpha (1 - \tan^2 \alpha)}{(1 + \tan^2 \alpha)^2} = \frac{1}{8}$ حاصل $\sin 4\alpha$ کدام است؟

$$\frac{3}{4} \quad (4)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (3)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \quad (2)$$

$$\frac{1}{2} \quad (1)$$

$$\frac{2 \tan \alpha (1 - \tan^2 \alpha)}{(1 + \tan^2 \alpha)^2} = \frac{1}{8}$$

$$\sin 2\alpha \cdot \cos 2\alpha = \frac{1}{8}$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \sin 4\alpha \right) = \frac{1}{8} \Rightarrow \sin 4\alpha = \frac{1}{2}$$

چند تا اتحاد مهم و کاربردی

$$۱) \cos^4 x - \sin^4 x = \cos 2x$$

$$\text{اثبات: } (\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x) = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$$

$$۲) \sin^4 x + \cos^4 x = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 4x$$

$$\text{اثبات: } \sin^4 x + \cos^4 x$$

$$(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cos^2 x = 1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x = 1 - 2(\sin x \cos x)^2 = 1 - 2\left(\frac{1}{2} \sin 2x\right)^2$$

$$= 1 - 2 \times \frac{1}{4} \sin^2 2x = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{1 - \cos 4x}{2}\right) = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cos 4x = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 4x$$

توی اثبات این فرمول از اتحاد $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$ استفاده کردیم که $a = \sin^2 x$ و $b = \cos^2 x$ بود.

$$۳) \sin^6 x + \cos^6 x = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x = \frac{5}{8} + \frac{3}{8} \cos 4x$$

$$\text{اثبات: } \sin^6 x + \cos^6 x$$

$$\text{اثبات: } (\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - 3 \sin^2 x \cos^2 x (\sin^2 x + \cos^2 x) = 1 - 3 \sin^2 x \cos^2 x = 1 - 3(\sin x \cos x)^2$$

$$= 1 - 3\left(\frac{1}{2} \sin 2x\right)^2 = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x = 1 - \frac{3}{4} \left(\frac{1 - \cos 4x}{2}\right) = 1 - \frac{3}{8} + \frac{3}{8} \cos 4x = \frac{5}{8} + \frac{3}{8} \cos 4x$$

توی اثبات این فرمول از اتحاد $a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$ استفاده کردیم که $a = \sin^2 x$ و $b = \cos^2 x$ بود.

یادت باشه: فرمول‌های ۲ و ۳ در فصل مشتق کاربرد زیادی خواهند داشت.

$$۴) (\sin x + \cos x)^2 = 1 + \sin 2x$$

$$(\sin x - \cos x)^2 = 1 - \sin 2x$$

$$\text{اثبات: } (\sin x \pm \cos x)^2$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x \pm 2 \sin x \cos x = 1 \pm \sin 2x$$

یادت باشه: فرمول شماره ۴ در فصل حد، برای رفع ابهام کاربرد زیادی دارد.

تعرین: حاصل $\sqrt{1 + \sin 2x} - \sin x$ وقتی $\frac{\pi}{3} < x < \frac{3\pi}{4}$ باشد، کدام است؟

$$۲ \sin x - \cos x \quad (۴)$$

$$\cos x \quad (۳)$$

$$-2 \sin x \quad (۲)$$

$$(۱) \text{ صفر}$$

$$\text{حاصل} = \sqrt{1 + \sin 2x} = (\sin x + \cos x)^2 - \sin x = |\sin x + \cos x| - \sin x = \sin x + \cos x - \sin x = \cos x$$

$$۱۳۵ = \frac{3\pi}{2}$$



$$\text{حاصل} = \cos x$$

(تقریبی ۹۵)

تعریف: اگر $\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{1}{2}$ باشد، مقدار $\cos(\frac{3\pi}{4} - 2\alpha)$ کدام است؟

$$\frac{3}{4} \quad (4)$$

$$\frac{3}{8} \quad (3)$$

$$-\frac{3}{8} \quad (2)$$

$$-\frac{3}{4} \quad (1)$$

$$\cos(\frac{3\pi}{4} - 2\alpha) = -\sin 2\alpha = -\frac{3}{4}$$


طریقی به توان ۲

$$(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\underbrace{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}_1 - \underbrace{2 \sin \alpha \cos \alpha}_{\sin 2\alpha} = \frac{1}{4}$$

$$- \sin 2\alpha = \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4}$$

$$* \quad \sin 2\alpha = \frac{3}{4}$$

$$a^r + b^r = (a+b)^r - r a b$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = \underbrace{(\sin^r x + \cos^r x)^r}_{1 - r \sin^r x \cos^r x}$$

فرض اول :

$$= 1 - r \left(\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x \right)^r$$

$$= 1 - r \left(\frac{1}{2} \sin^r 2x \right) = 1 - \frac{1}{2} \sin^r 2x$$

فرض دوم :

$$= 1 - \frac{1}{2} \left(\sin^r 2x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \right)$$

$$\sin^r \theta = \frac{1 - \cos r \theta}{2}$$

$$= 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos 2x}{2} \right) = 1 - \frac{1}{4} + \frac{\cos 2x}{4}$$

$$= \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 2x$$

فرض سوم :

$$\begin{cases} \sin^2 x + \cos^2 x = 1 - r \sin^r x \cos^r x = 1 - \frac{1}{2} \sin^r 2x = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 2x \\ \sin^2 x + \cos^2 x = 1 - r \sin^r x \cos^r x = 1 - \frac{r}{2} \sin^r 2x = \frac{3}{4} + \frac{r}{4} \cos 2x \end{cases}$$

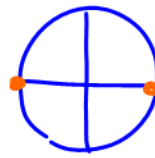
آدرس نقاط معروف دایره مثلثاتی: $(k \in \mathbb{Z})$



$x = 2k\pi : \dots, 2\pi, 4\pi, \dots$
مضارب زوج π

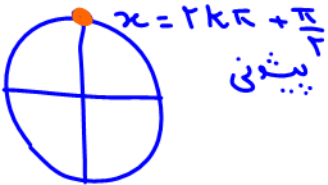


$x = (2k+1)\pi$
مضارب فرد π

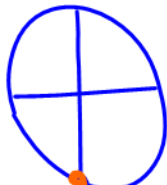


دو لپ چپ و راست

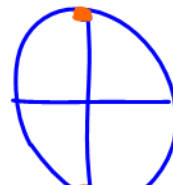
$x = k\pi : \dots, \pi, 2\pi, 3\pi$
مضارب π



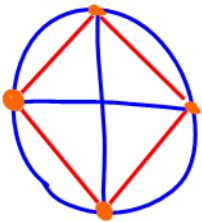
$x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$
پیشونی



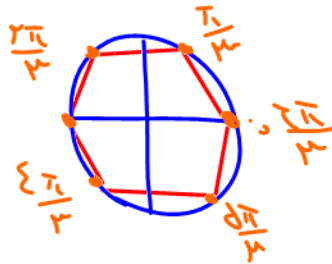
$x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$
چونه



$x = k\pi + \frac{\pi}{2}$
چونه و پیشونی



$x = \frac{k\pi}{2}$
رئوس یک مربع



$x = \frac{k\pi}{3}$
رئوس یک مثلث منظم

$x = \frac{k\pi}{n}$
رئوس یک

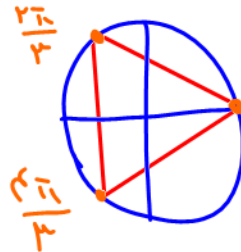
$2n$ اضلعی منتظم روی دایره است.

k	0	1	2	3	4
x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

k	0	1	2	3	4	5	6
x	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	2π

سوال: $x = \frac{2k\pi}{n}$ که $k \in \mathbb{Z}$ روی دایره چه چیزی را نشان می دهد؟

k	0	1	2	3
$x = \frac{2k\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$



رئوس یک n اضلعی منتظم
مثلث منظم روی دایره

نکته: در حالت کلی $x = \frac{2k\pi}{n}$ رئوس یک n اضلعی منتظم روی دایره است.

به k اعداد 0 و 1 و 2 و 3 ... تا به نوبه اول برتری.

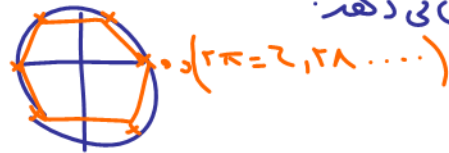
درس عبارات خاص: جواب عمومی $x = k\pi$ $\rightarrow$ $\sin x = 0$ (الف)
 $x = k\pi$ جواب کلی است اما جواب های بازه $[0, 2\pi]$ به صورت $x = 0, \pi, 2\pi$ است.

جواب کلی $\sin(3x) = 0 \rightarrow 3x = k\pi \rightarrow x = \frac{k\pi}{3}$

k	0	1	2	3	4	5	6
$x = \frac{k\pi}{3}$	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	2π

جواب های بازه $[0, 2\pi]$:
 جواب در بازه $[0, 2\pi]$ دارد.

جواب های معادله $\sin(3x) = 0$ نه $x = \frac{k\pi}{3}$ و نوسان یک $\sin$ منظم روی رادیان. مشتاقی را نشان می دهد.



ج) $\sin u = 1$ $u = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$

د) $\sin u = -1$ $u = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$

ه) $\cos u = 0$ $u = k\pi + \frac{\pi}{2}$

و) $\cos u = 1$ $u = 2k\pi$

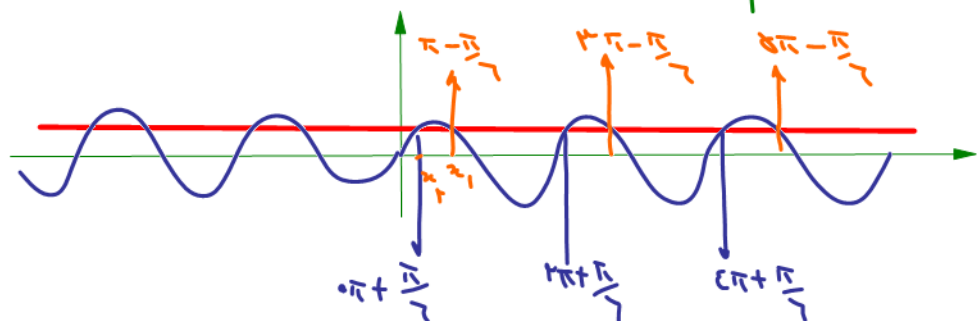
ز) $\cos u = -1$ $u = (2k+1)\pi$

مثال: معادله $2\sin x - 1 = 0$ را حل کنید.
 $\sin x = \frac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \end{cases} k \in \mathbb{Z}$

معادله $2\sin x - 1 = 0$ بی شمار جواب دارد اما در بازه $x \in [0, 2\pi]$ تنها دارای ۲ جواب $\frac{\pi}{6}$ و $\frac{5\pi}{6}$ است.

گفته بودیم که یکی از روش های حل معادله: تبدیل معادله به تعدادی تابع قطعی رسم است هر ۲ را در یک دستگاهی کشیم نقاط طایر خود را قرار دهیم.

$\sin x = \frac{1}{2}$
 y_1 y_2



در بسته برخورد:
 $x = 2k\pi + \frac{\pi}{6}$
 $x = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{6} = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6}$

