

ریاضی ۳

۱/۲۵	<p>جاهای خالی را با عبارات مناسب کامل کنید.</p> <p>(الف) تعداد نقاط برخورد خط $y = \frac{1}{2}$ و نمودار $\sin x$ در بازه $[0, 2\pi]$ برابر است.</p> <p>(ب) تابع $f(x) = [x]$ در $x = 0$ پیوسته نیست. و در این نقطه، مشتق پذیر نیست.</p> <p>(پ) اگر $2f'(1) - 2g'(1) = 9 - 4 = 5$ باشد، مقدار $(2f - 2g)'(1) = 3, g'(1) = 2$ برابر است.</p> <p>(ت) تابع $x \tan x$ در $x = 0$ اکیدا صعودی است.</p>	۱
۱/۲۵	<p>(الف) نمودار تابع زیر را رسم کنید.</p> <p>$f(x) = x + x = \begin{cases} 2x & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$</p> <p>(ب) این تابع در چه بازه‌ای یکنواست؟ دوی \mathbb{R} محدودی دیگری داشت در $(-\infty, \infty)$ ثابت در $(-\infty, 0)$ آیینه‌گیری است.</p>	۲
۱/۲۵	<p>$D_{fog} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$</p> <p>$f(g(x)) = \left\{ x \in D_f, g(x) \in D_f \right\}$</p> <p>$x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, \frac{3}{x-2} \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \Rightarrow \frac{3}{x-2} = -\frac{3}{x+1} \Rightarrow x = -\frac{3}{2}$</p> <p>$D_f: \mathbb{R} \setminus \{-1\}$</p> <p>$g(f(x)) = \left\{ (x, 1), (1, 6), (0, 2) \right\}$</p> <p>$f(g(x)) = \left\{ (2, 1), (1, 6), (0, 2) \right\}$</p> <p>با استفاده از نمودار تابع $f(x)$، نمودار تابع $(fog)^{-1}$ را رسم کنید.</p>	۳
۱	<p>ضابطه تابع وارون زیر را در صورت وجود به دست آورید.</p> <p>$f(x) = \sqrt{2x+1} - 4 \rightarrow y + 4 = \sqrt{2x+1} \rightarrow (y+4)^2 = 2x+1 \rightarrow x = \frac{(y+4)^2 - 1}{2} = f^{-1}(y)$</p>	۴
۰/۷۵	<p>با توجه به محورهای سینوس و تانژانت، در بازه زیر، مقادیر $\sin \alpha, \tan \alpha$ را با هم مقایسه کنید.</p> <p>$\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$</p> <p>$\sin \alpha > \tan \alpha$</p>	۵
۱/۵	<p>دوره <u>تناوب</u> و <u>مقادیر ماکزیمم</u> و <u>مینیمم</u> تابع زیر را بدست آورید.</p> <p>$T = \frac{2\pi}{ \frac{1}{b} } = 8\pi$</p> <p>$y = 1 - \pi \sin\left(\frac{x}{4}\right) \leqslant 1 + \pi = M_{\max}$</p>	۶
۱/۵	<p>معادله مثلثاتی زیر را حل کنید.</p> <p>$2C_{\cos x}^2 - 9C_{\cos x} - 8 = 0$</p> <p>$\cos x(2\cos x - 9) = 0$</p> <p>$C_{\cos x} = -\frac{1}{2}$</p>	۷
۱/۲۵	<p>مقدار $\sin(22/5^\circ)$ را محاسبه کنید.</p>	۸

$$\begin{aligned}
 C_{\cos 2\theta} &= C_{\cos \theta}^2 - S_{\sin \theta}^2 \\
 C_{\cos 2\theta} &= 1 - S_{\sin \theta}^2 \\
 C_{\cos 2\theta} &= 1 - \frac{1}{2} \left(1 - \cos(2 \cdot 22.5^\circ) \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos(22.5^\circ)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C_{\cos x} &= C_{\cos \frac{2\pi}{5}} \\
 x &= 2k\pi \pm \frac{2\pi}{5} \\
 x &= 22.5^\circ \quad \text{or} \quad x = 337.5^\circ
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sin(22.5^\circ) &= \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}
 \end{aligned}$$



ریاضی ۳

۱/۵

حدهای زیر را در صورت وجود، محاسبه کنید.

۱۱

(الف) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(9 - \frac{\sqrt{x}}{x} \right) = 9 - \cancel{\frac{\sqrt{x}}{x}} = 9$

(ب) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x - \sqrt{x}}{x^2 + x - 2} = \lim_{n \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{n}(\sqrt{n}-1)}{(n-1)(n+2)} = \frac{\sqrt{n}(\sqrt{n}-1)}{(\sqrt{n}+1)(\sqrt{n}-1)(n+2)} = \frac{1}{2(3)} = \frac{1}{6}$
مزدوج $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

۲

$\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{x}}$ مشتق

مشتق توابع زیر را بدست آورید. (ساده کردن الزامی نیست.)

۱۲

(الف) $f(x) = \sqrt{\frac{-x+1}{x}}$ $f'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{-x+1}}$
 $y=0, v=\sqrt{-x+1}, u=x$ $v'=0, u'=-1$ $f'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{-x+1}}$

(ب) $g(x) = (2x^3 + x)(x-2)^2 \rightarrow g'(x) = (2x^3 + 1)(x-2)^3 + 2(x-2)(2x^3 + x)$

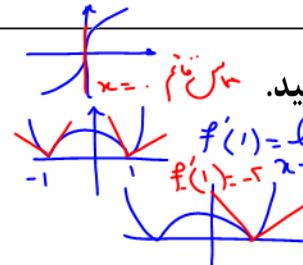
۱/۲۵

الف) مشتق پذیری تابع $f(x) = \sqrt[3]{x}$ را در $x=0$ بررسی کنید. ادل بیدرس سنه باشد:
 $f'(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{a}}{x-a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{1}{3}\sqrt[2]{x} - \frac{1}{3}\sqrt[2]{a}}{\frac{x-a}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{a}}}$

۱۳

ب) آیا این تابع در $x=0$ خط مماس بر منحنی دارد؟

۲



۱۴

اگر $f(x) = |x-1|^2$ باشد. مشتق پذیری تابع f را در نقطه $x=1$ بررسی کنید.
 (آنچه مشتق نباشد) الف) به کمک تعریف مشتق $f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{|x-1| - 0}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-1}{x-1} = 1$
 (آنچه مشتق نباشد) ب) با رسم شکل $f'(1) = -1$

۱/۵

گنجایش ظرفی ۴۰ لیتر مایع است. در لحظه $t=0$ سوراخی در ظرف ایجاد می‌شود. اگر حجم مایع باقی

۱۵

مانده در ظرف پس از t ثانیه از رابطه $V = 40(1 - \frac{t}{100})^2$ به دست می‌آید. در چه زمانی، آهنگ تغییر

لحظه‌ای برابر آهنگ تغییر متوسط آن در بازه $[0, 100]$ می‌شود؟
 لحظه‌ای برابر آهنگ تغییر متوسط آن در بازه $[0, 100]$ می‌شود؟
 $V' = \frac{\sqrt{100} - \sqrt{0}}{100-0} = \frac{10-0}{100} = \frac{1}{10}$ آهنگ متوسط ریاضی

$\frac{f(n) - f(m)}{n-m}$ مشتق

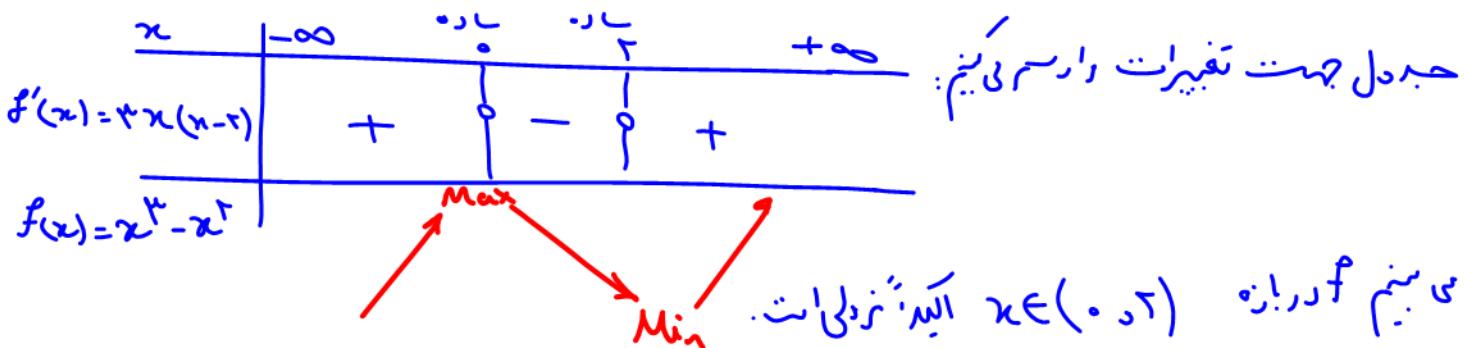
$\frac{1}{100}(1 - \frac{1}{100})(1 - \frac{t}{100}) = \frac{1}{100} \sim 2 - \frac{t}{100} = 1$

$1 = \frac{t}{100} \rightarrow t = 100$



نحوه تابع $f(x) = x^3 - 3x^2$ در کدام باره ترددی آبیارت باشد

$$f'(x) = 3x^2 - 2x = 3x(x-2) = \begin{cases} + & x=0 \\ - & 0 < x \\ + & x > 2 \end{cases}$$



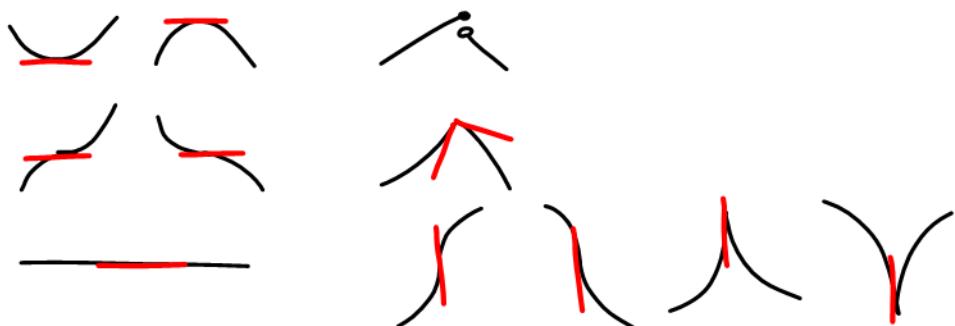
$$c \in D_f$$

$$f'(c) = \dots \text{ با } f'(c) = 0$$

نقاط محیطی:

سرمهته باره $[a, b]$

کبرانی است.

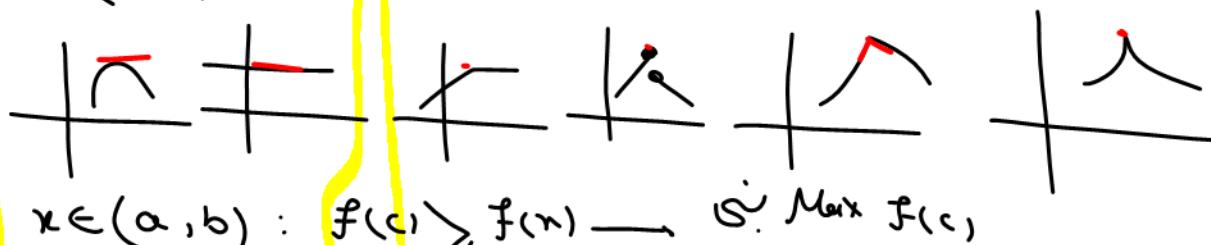


نقاط محیطی صندلی دکرتو یا از عمل. لغتی آید.
در رایالا یک بار صورت نیز دیگر بار حیزج نه راسون
و آنلا دشنهای \cup و \cap کبرانی آید.

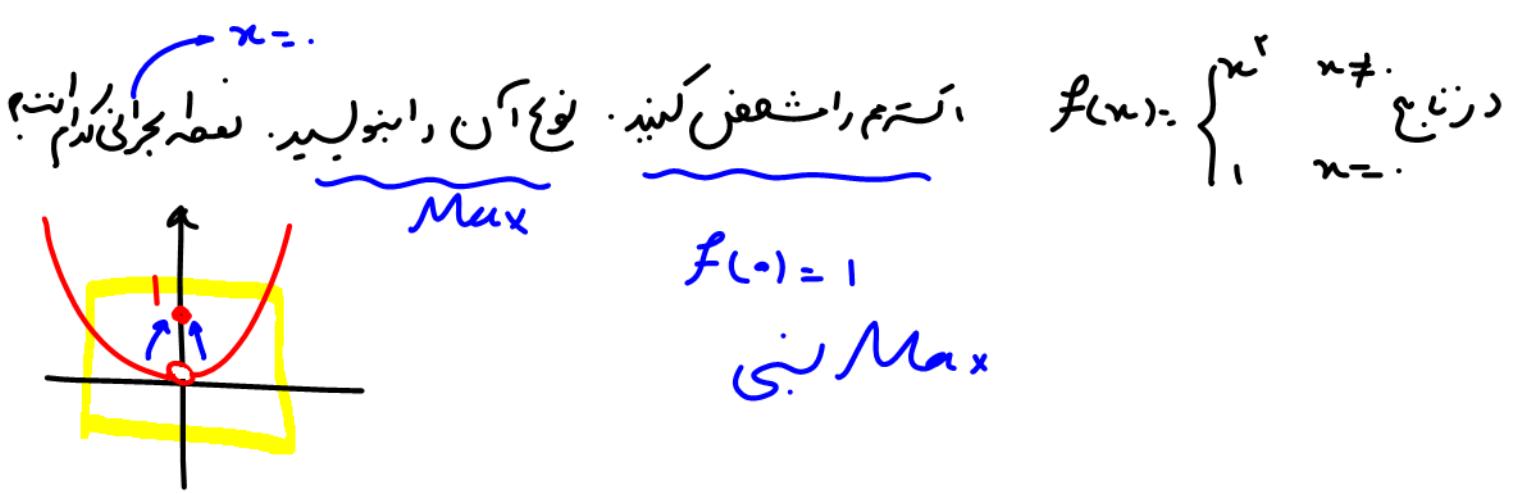
در نتیجه مفهومی بیان از نقاط کبراکی هر صنایع به رفت کن. آن پوسته برو بالشتر نیز
کرانی است.



$x \in (a, b) : f(c) \leq f(x) \rightarrow \text{Min}_i f(c)$



$x \in (a, b) : f(c) > f(x) \rightarrow \text{Max}_i f(c)$



آنچه عکسی حاطق تابع $f(x) = x^3 - 3x^2$ را در بازه $[-1, 3]$ مشخص کنید.

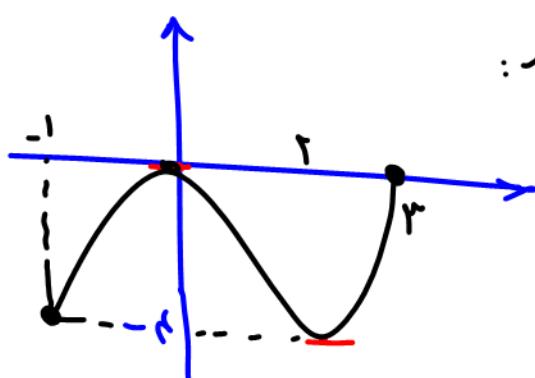
$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2) = 0.$$

که برای $x = -1$ و $x = 2$

x	-1	0	2	3
$f(x)$	-4	0	-4	27 - 3(9) = 0

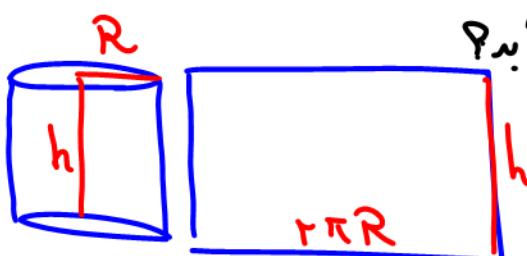
پس $\text{Max} = 0$ و $\text{Min} = -4$

اماکن : تابع را در سه کنید:



لینیه سازی: در استوانه ای مجموع شعاع قائم و دارتنمای برابر ۱۵ است. حالت مشحونت

جایگزین بارای کدام شعاع بخواست آب را



$$R + h = 15$$

$$h = 15 - R$$

$$S_{\text{جایگزین}} = 2\pi Rh = 2\pi R(15 - R)$$

$$S_{\text{جایگزین}} = 2\pi(15R - R^2)$$

$$S' = 2\pi(15 - 2R) = 0 \rightarrow R = \frac{15}{2} = 7.5$$

خطاطع محترفی:

تفکر تخصصی دوران در برش.

دایره دیسپلی

دایره های

نیت په مجه و منع دارند

$$(x-0)^2 + (y-0)^2 = R^2$$

$$x^2 + y^2 - 2x = \Sigma$$

$$x^2 + y^2 - 2x - \Sigma =$$

مرکز $O'(0,0)$

شعاع $R' = 2$

مرکز $O(1,0)$

$$R = \sqrt{1+0-(-1)} = \sqrt{3}$$

$$OO' = \sqrt{(0-1)^2 + (0-0)^2} = 1$$



$$R + R' = 2 + \sqrt{3} \quad |R - R'| = \sqrt{3} - 1 \quad |R - R'| < OO' = 1 < R + R'$$

نقطه A(1,0) نیت دایره حیونه است

$$1 + 2\delta - 2 - 20 - 10 < 0$$

خط

نیت دایره $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 1 = 0$ حیونه است

مرکز مستقاطع

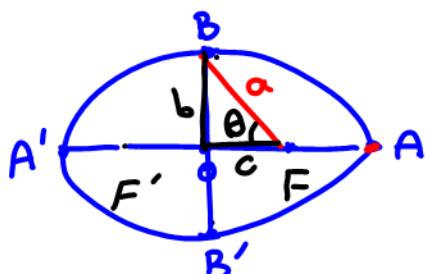
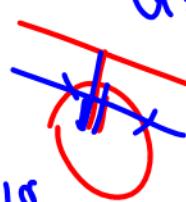
(1, -1)

$$\begin{aligned} ax + by + c &= \\ x + y - 1 &= \end{aligned}$$

$$R = \sqrt{1+9+1} = \sqrt{11} = 3,...$$

$$d = \frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$d = \frac{|x + y - 1|}{\sqrt{1+1}} = 3$$



$$MF + MF' = \text{علو نغ} = 2a$$

بیفر

$$BB' = 2b = \text{قطر کوچک} = 2b$$

$$AA' = 2a = \text{قطر بزرگ} = طول نغ = 2a$$

فاصله کانونی

$$c^2 = b^2 + a^2$$

$$e = \frac{c}{a} \leq 1$$

یاد خود دایره های

$$e = \frac{c}{a} = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}$$

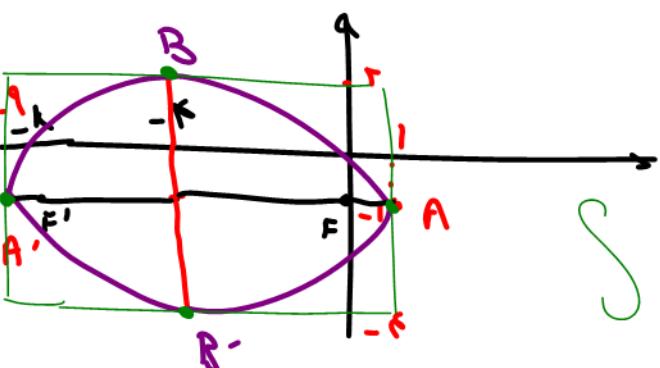
$$\cos \theta = \frac{c}{a} = e$$

درگیر بیهوده اتفاق با مرز (-4, 0)

اگر ناممکن رأس بینهایونی تمازن برابر ۵ است $a = 5$

و ناممکن کانونی برابر ۱ است . بعده دارسم کنید . شعاع سنجید مساحت مستطیلی که رأس های

بیهوده وسط خال دارند آن بود . بعده دارند آن هست .



$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$5^2 = b^2 + 3^2$$

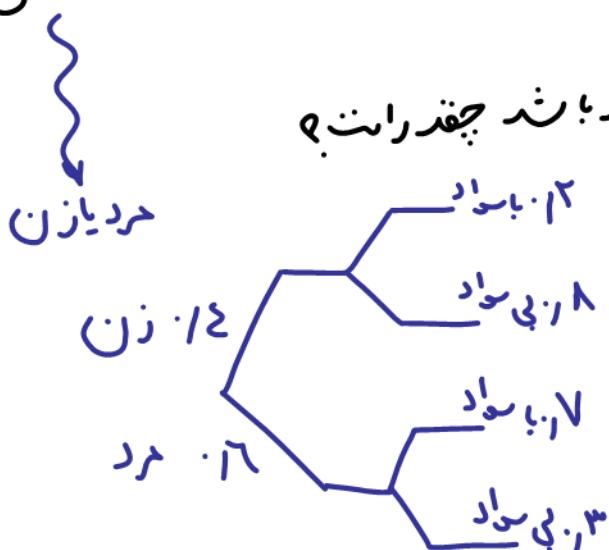
$$b=4$$

$$S = (2a)(2b) = (10)(8) = 80$$

فاصله افکار ملی :

خواهار بیفتی

درگیر اداره که ۴٪ از هازن هستند و ۷۰٪ مردان د ۲۰٪ زنان باشند . شعاعی
به معادله انتسابی می باشد که می سواد باشد چقدر است

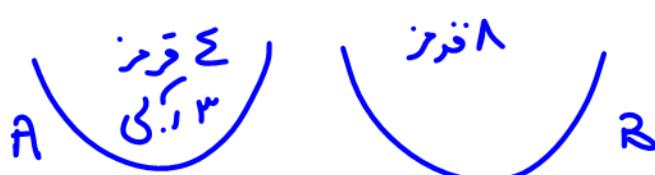


$$\begin{aligned}
 P(\text{بساد}) &= P(\text{مرد})P(\text{بساد}|\text{مرد}) + P(\text{زن})P(\text{بساد}|\text{زن}) \\
 &= 0.70 \times 0.12 + 0.30 \times 0.18 \\
 &= 0.18 + 0.054 = 0.234
 \end{aligned}$$

(ردن جعبه A، ۴ هر قدر زد ۳ هر آبی و درون جعبه B، ۲ هر قدر زد وجود

داده، اگر احتمال انتخاب جعبه A برابر احتمال انتخاب جعبه B باشد با

چشم اندازه جعبه ای را انتخاب داشتند آن دو هر هم مان انتخاب کنیم



با پهلو احتمالی دو هر هم زد است؟

$$P(A) + P(B) = 1 \implies \frac{P(B)}{P(A)} = \frac{1}{2} \quad P(B) = \frac{1}{3}$$

$$\frac{\sum}{\sum} \xrightarrow{\text{هر زد}} \frac{\binom{4}{2} + \binom{3}{2}}{\binom{7}{2}} = \frac{7+3}{21} = \frac{10}{21} = \frac{2}{7} \quad P(A) = \frac{3}{7}$$

$$\sum \xrightarrow{\text{هر زد}} 1$$

$$P(\text{هر زد}) = \left(\frac{3}{7} \times \frac{2}{7} \right) + \left(\frac{4}{7} \times 1 \right) = \frac{17}{49} = \frac{1}{7}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

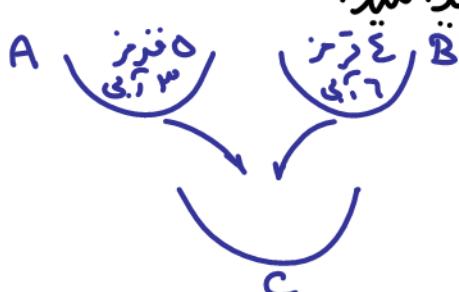
$$\binom{7}{2} = \frac{7!}{2!5!} = 7$$

$$\binom{3}{2} = \frac{3!}{2!1!} = \frac{3 \times 2}{2} = 3$$

در حرف A ۵ هر قدر زد ۳ هر آبی و در حرف B ۴ هر قدر زد ۲ هر آبی موجود است.

۵ هر از A و ۳ هر از B به تعداد خارج و در حرف C توزیع دهیم. آنها را ایجاد کنیم

از حرف C خارج نیست. احتمال این که این هر قدر زد را پیدا کنند.



$$A: \frac{5}{8} \quad \xrightarrow{\text{هر زد}} \quad \frac{5}{8} \text{ قدر زد}$$

$$B: \frac{3}{8} \quad \xrightarrow{\text{هر زد}} \quad \frac{3}{8} \text{ قدر زد}$$

با ذیل دو مرز یا از A:1 و قدر

$$P(\text{قرمز بدن}) = \left(\frac{5}{10} \times \frac{8}{10} \right) + \left(\frac{4}{10} \times \frac{2}{10} \right) = \frac{59}{100}$$

دیزه رشته ریاضی

جاهای خالی را با عدد یا کلمه مناسب کامل کنید.

اگر برای هر x در بازه I , $f''(x) > 0$ آنگاه نمودار (x) در این بازه تقریر به بالا دارد. ۱

اگر نقطه $A(-1, 1)$ نقطه عطف تابع با ضابطه $y = ax^3 + bx^2 + c$ باشد، مقادیر a و b را به دست آورید. ۲

$$\begin{aligned} f(-1) &= -a + b + c = 1 \quad \text{ردی تابع است و...} \\ f'(-1) &= 3ax^2 + 2bx \quad -a + b = -1 \\ f''(-1) &= 6ax + 2b \quad 2a = -1 \rightarrow a = -\frac{1}{2} \\ f''(-1) &= -6a + 2b \rightarrow -3a + b = . \quad b = 3a = -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

مقادیر a , b و c را در تابع $y = ax^3 + bx^2 + c$ طوری به دست آورید که در شرایط زیر صدق کند: ۳

$$f(1) = 1, f(0) = 2, f(-1) = 0 \quad \text{و } x = \frac{1}{2} \text{ طول نقطه عطف نمودار تابع } f \text{ باشد.}$$

$$\begin{aligned} f(1) &= a + b + c = 1 \rightarrow a + b = 1 \rightarrow a - \frac{3a}{2} = 1 \rightarrow -\frac{a}{2} = 1 \\ f'(1) &= 3ax^2 + 2bx \quad a = -2 \\ f''(1) &= 6ax + 2b \quad b = -\frac{3a}{2} \rightarrow b = -3 \end{aligned}$$

درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را تعیین کنید. ۴

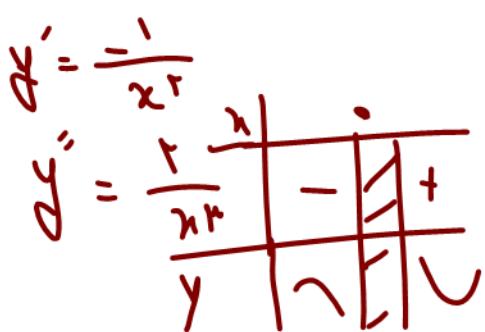
الف هر نقطه‌ای که در آن مقدار $f'''(x)$ برابر صفر شود، یک نقطه عطف تابع $f(x)$ است.

$$\begin{aligned} \text{مثل } y = x^n \text{ هر } n &= a \text{ عطف ندارد.} \\ f(x) &= x^n \quad f'(x) = nx^{n-1} \quad f''(x) = n(n-1)x^{n-2} \quad f'''(x) = n(n-1)(n-2)x^{n-3} \end{aligned}$$

تابع صعودی اکید، نقطه عطف ندارد. عطف صعودی ایده‌است. ۵

در نقطه عطف علامت $f'''(x)$ تغییر می‌کند. درست

دلي هر جا لاست گوصن شد عطف نیست مثل $y = \frac{1}{x}$



با این نهادی در $x = 0$ عوض شد لی چون $x = 0$ و پونه نیست عطف نیست.



حساب

$$f'(x) = 4x^3 + 2x$$

$$f''(x) = 2x + 2$$

جهت تکرار و نقطه عطف تابع $f(x) = x^3 + 3x^2 + 1$ را مشخص کنید.

$$\text{حلل الخط} \rightarrow n = -1$$

$$2x+1 = \frac{x}{y}$$

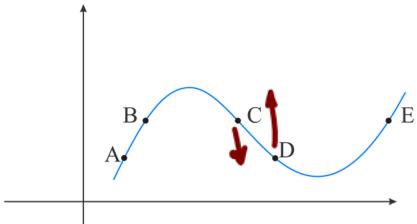
x	-1
$-$	$+$

$\curvearrowleft \quad \curvearrowright$

Y

شکل زیر را در نظر بگیرید. در کدامیک از پنج نقطه مشخص شده در نمودار:

八



الف $f'(x)$ و $f''(x)$ هر دو منفی اند.

نرمی شعوبala D=x ب (x) f' منفی و $(x)^{''}$ مثبت است.

$$y' = \frac{-1 - 1}{(x-1)^2} = -\frac{2}{(x-1)^2}$$

ابتدا جهت تقدیرتابع $y = \frac{x+1}{x-1}$ را مشخص کرده، سپس وجود نقطه عطف آن را بررسی کنید.

$$y'' = \frac{-2(x-1)(-2)}{(x-1)^4} = \frac{4}{(x-1)^3}$$

فـ عـطـفـ نـزـادـ

9

$$D^{\infty} = \frac{e}{(x-1)^k}$$

مقادیر a و b را در تابع $f(x) = ax^m + bx^n$ چنان بیابید که $(1, A)$ نقطه عطف منحنی باشد.

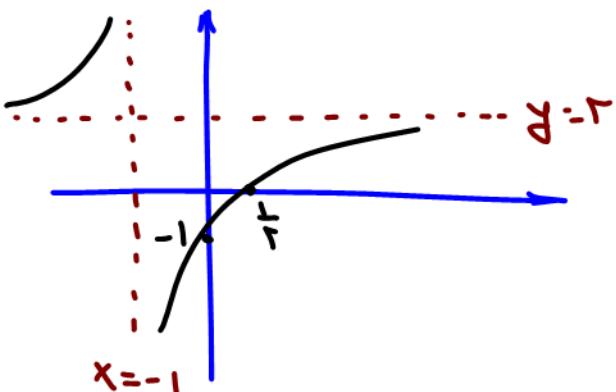
10

$$D_f : \mathbb{R} - \{-1\}$$

$$\begin{aligned}x &= -1 \quad \text{میں ناٹم} \\y &= 2 \quad \text{میں اتنی}\end{aligned}$$

جدول رفتار و نمودار تابع $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$ رسم کنید.

11



مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست)



حسابان

۱۲

$$g(x) = 3 \tan^3 x + \cos x^3$$

$$g'(x) = 3(2)(1+\tan^2 x) \tan x - 2x \sin x^2$$

مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست).

$$g(x) = 5 \tan\left(\frac{x}{\pi}\right) + \cos^3(\pi x)$$

$$g'(x) = 5 \left(\frac{1}{\pi}\right) \left(1 + \tan^2\left(\frac{x}{\pi}\right)\right) + (1)(3)(-1) \sin(\pi x) \cos^2(\pi x)$$

$$y = 3 \sin(\pi x) \rightarrow y' = 3(\pi)(\cos(\pi x)) \sin(\pi x)$$

مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست)

$$g(x) = (1 + \sin^3 x)^5 \times \tan\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\begin{aligned} y &= u^n \rightarrow y' = n u^{n-1} \\ y' &= u' v + v' u \end{aligned}$$

$$g'(x) = 5 \left(3 \cos^2 x\right) \left(1 + \sin^3 x\right)^4 \tan\left(\frac{1}{x}\right) + \left(-\frac{1}{x^2}\right) \left(1 + \tan^2\left(\frac{1}{x}\right)\right) \left(1 + \sin^3 x\right)^3$$

۱۳

