



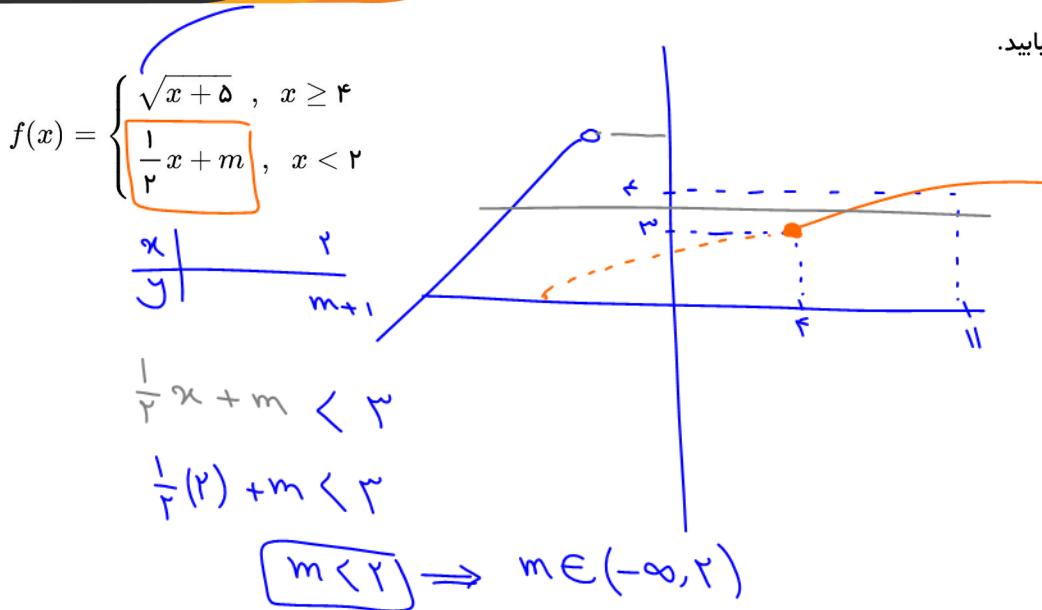
جمهوری اسلامی ایران

جمهوندی ریاضی یازدهم

کتابخانه ملی ایران

۱۴۰۳، بهار

۱- اگر تابع یک به یک باشد، حدود m را باید.



۲- توابع $g(x) = \sqrt{1-x^2}$ و $f = \{(-2, 2), (-1, 1), (0, 0), (1, -1)\}$ مفروضند، مطلوب است:

ب) تابع gof

الف) تابع $f-g+2$

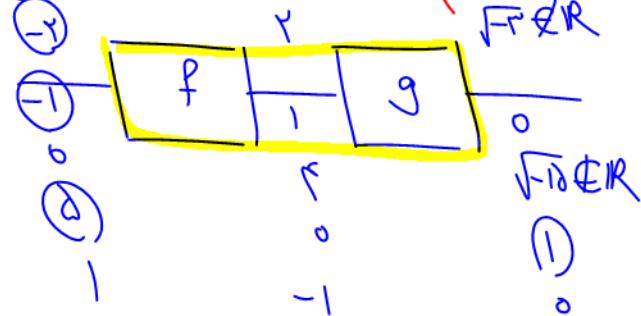
$$D_g: 1-x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 1 \Rightarrow \sqrt{x^2} \leq \sqrt{1} \Rightarrow |x| \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1$$

$$D_g = [-1, 1] \quad D_f = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$$

$$D_f \cap D_g = \{-1, 0, 1\}$$

$$f-g+2 = \{(-1, 1-0+2), (0, 4-1+2), (1, -1-0+2)\}$$

$$gof = g(f(x)) \quad f-g+2 = \{(-1, 3), (0, 2), (1, 1)\}$$



$$gof = \{(-1, 0), (0, 1), (1, 0)\}$$

۳- توابع $g(x) = \sqrt{x+3}-4$ و $f(x) = 2-\sqrt{x-1}$ مفروض هستند، دامنه تابع gof را باید.

$$D_{gof} = D_g(f(x)) = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$

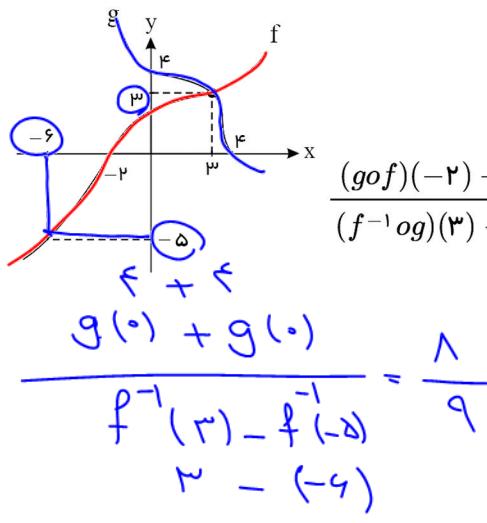
$x \geq 1 \Rightarrow 2 - \sqrt{x-1} \geq -3 \Rightarrow$

$$D_{gof} = [1, 24]$$

$$\begin{cases} x+3 \geq 0 \\ x \geq -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x \geq 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 2 &\geq \sqrt{x-1} \\ \sqrt{x-1} &\leq 2 \xrightarrow{(.)^2} \\ x-1 &\leq 4 \Rightarrow x \leq 25 \end{aligned}$$



۴- نمودار تابع f و g به صورت مقابل است.
حاصل عبارت زیر را باید.

$$\frac{(gof)(-2) + (gog)(4)}{(f^{-1}og)(3) - f^{-1}(-5)} = \frac{g(f(-2)) + g(g(4))}{f^{-1}(g(3)) - f^{-1}(-5)} =$$

$$\frac{g(0) + g(0)}{f^{-1}(3) - f^{-1}(-5)} = \frac{1}{9}$$

$$2 - (-4)$$

اگر $f(x) = 2 - 3x$ و $g(x) = 5x - 6$ ، ضابطه تابع g را باید.

$$f(g^{-1}) = 2 - 3g^{-1} = 2x - 5 \Rightarrow -3x + 5 = 3g^{-1} \Rightarrow$$

$$g^{-1} = \frac{-3}{3}x + \frac{5}{3}$$

$$\text{یافش طعن} : x = \frac{-3}{3}y + \frac{5}{3} \Rightarrow$$

$$+ \frac{3}{3}y = -x + \frac{5}{3} \Rightarrow y = \frac{-x}{3} + \frac{5}{3} \Rightarrow g(x) = \frac{-x}{3} + \frac{5}{3}$$

اگر $a + b$ حاصل $(f - g)(4) = 1$ باشد، آن‌گاه حاصل $D_{f+g} = [3, 5]$ ، $g(x) = \sqrt{a-x} + b$ ، $f(x) = \sqrt{x-3}$.

$$D_{f+g} = D_f \cap D_g = [3, 5] \quad (a=3)$$

$$g(x) = \sqrt{5-x} + b$$

$$\begin{aligned} a-x &\geq 0 \Rightarrow \\ a &\geq x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x-5 &\geq 0 \Rightarrow \\ x &\geq 5 \end{aligned}$$

$$(f-g)(4) = f(4) - g(4) = 1 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} 1 - (1+b) &= 1 \\ 1 - 1 - b &= 1 \Rightarrow -b = 1 \quad (b = -1) \end{aligned}$$

$$a+b = 3+(-1) = 2$$

۷- ضابطه تابع وارون تابع $f(x) = -x^3 + 9x^2 - 27x - 1$ را باید.

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$f(x) = -((x-3)^3 + 3(x-3)^2 \cdot 3 + 3(x-3) \cdot 3^2 + 3^3 + 1)$$

$$3(x-3)^2 = 9x^2$$

$$3x \text{ دوی} = 9 \quad (\text{دوی} = 3)$$

$$\begin{aligned} f(x) &= -((x-3)^3 + 27) \\ f(x) &= -(x-3)^3 - 27 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{وارون} \Rightarrow x &= -(y-3)^3 + 27 \\ (y-3)^3 &= -x + 27 \end{aligned}$$

$$y-3 = \sqrt[3]{-x+27} \rightarrow$$

$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{-x+27} + 3$$

اگر دامنه تابع $fog(x) = \sqrt{\frac{|x|+3}{|x|-1}}$ باشد، دامنه تابع $f(x) = \frac{x-1}{x-\sqrt{2}}$ را با استفاده از تعیف بباید.

$$D_f : x - \sqrt{2} \neq 0 \Rightarrow x \neq \sqrt{2}$$

$$D_g : \frac{|x|+3}{|x|-1} > 0 \Rightarrow \frac{1}{|x|-1} > 0 \quad \text{تصدرت} \neq 0 \Rightarrow |x|-1 > 0 \rightarrow |x| > 1$$

$$\sqrt{\frac{|x|+3}{|x|-1}} = \sqrt{2}$$

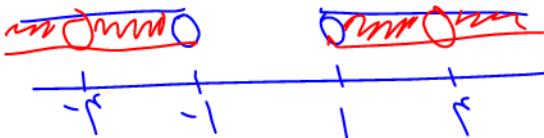
$$D_{fog} = D_f(g(x)) = \left\{ x \in D_g \Rightarrow g(x) \in D_f \right\}$$

$$x < -1 \vee x > 1 \quad \frac{|x|+3}{|x|-1} \neq \sqrt{2}$$

$$\frac{|x|+3}{|x|-1} \neq \frac{2}{1} \Rightarrow$$

$$|x|+3 \neq 2|x|-1$$

$$x \neq 1$$



$$D_{fog} = (-\infty, -1) \cup (1, 3) \cup (3, +\infty) \quad x \neq \pm 1$$

۹- اگر دامنه تابع $f(x) = \frac{x^r + 3}{ax^r + bx + 1}$ باشد، a و b را بباید.

$$a(-r)^r + b(-r) + 1 = 0$$

$$ar - br + 1 = 0 \quad \div r$$

$$r(a - b) + 1 = 0 \quad (I)$$

$$\Delta = 0 \Rightarrow b^r - a(1) = 0$$

$$b^r = vr a \quad (II)$$

$$a = \frac{b^r}{vr} \quad (I) \quad \frac{b^r}{vr} - b + 1 = 0$$

$$y = |x|[-x] - 1 ; \quad -r < x < 1$$

$$\begin{aligned} r(x+r) &= r(x^r + rx + r) \\ rx^r + rr + r &= 0 \quad D = \mathbb{R} - \{-r, r\} \\ a = r & \\ b = rr & \end{aligned}$$

نمودار تابع زیر رارسم کنید.

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

$$-r < x < -1 \xrightarrow{x(-1)} 1 < -x < r \rightarrow [-x] = 1 \Rightarrow |x| = -x$$

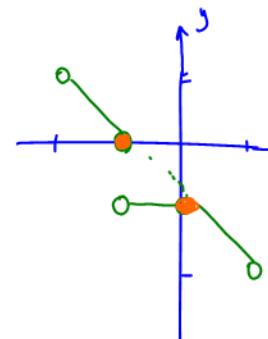
$$-1 < x < 0 \xrightarrow{x(-1)} 0 < -x < 1 \rightarrow [-x] = 0 \Rightarrow |x| = -x$$

$$x = -1 \rightarrow y = 0$$

$$0 < x < 1 \xrightarrow{x(-1)} -1 < -x < 0 \rightarrow [-x] = -1 \Rightarrow |x| = x$$

$$x = 0 \rightarrow y = -1$$

$$y = -x - 1$$



۱۱- اگر α و β ریشه‌های معادله $x^3 - 3x + 1 = 0$ باشند، حاصل عبارت زیر را بباید.

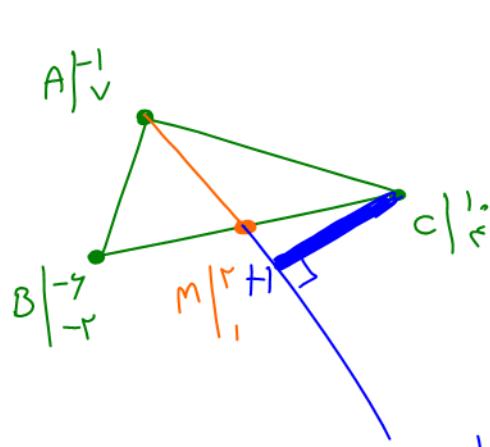
$$\frac{\alpha^2}{(\alpha - \beta)^2} + \frac{\beta^2}{(\alpha - \beta)^2} = \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{(\alpha - \beta)^2} = \frac{\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta - 2\alpha\beta}{(\alpha - \beta)^2} = \frac{\alpha^2 - 2\beta}{(\alpha - \beta)^2} = \frac{(\alpha - \beta)(\alpha + \beta)}{(\alpha - \beta)^2} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta}$$

$$\alpha + \beta = \frac{-b}{a} = \frac{-(-3)}{1} = 3 \quad \alpha - \beta = \frac{c}{a} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\alpha + \beta = 3 \quad \alpha - \beta = 1$$

$$\alpha = 2, \beta = 1$$

۱۲- مثلث ABC با رئوس $A(-1, 7)$ و $B(-6, -2)$ و $C(10, 4)$ مفروض است. فاصله رأس C از میانه نظیر رأس A چقدر است؟



$$A(-1, 7) \Rightarrow m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{7-1}{-1-2} = \frac{6}{-3} = -2$$

$$m \mid \text{میانه} \Rightarrow y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y - 1 = -2(x - 2)$$

$$y - 1 = -2x + 4$$

$$|CH| = \frac{|2(10) + 4 - 1|}{\sqrt{(2)^2 + (1)^2}} = \frac{19}{\sqrt{5}}$$

۱۳- اگر α و β ریشه‌های معادله $3x^3 - 5x + 1 = 0$ باشند، حاصل $\frac{(\alpha + \frac{1}{\alpha})^2}{(\beta^2 + 1)^2 + 25\alpha^2}$ را بباید.

۱۴- اگر α و β ریشه‌های معادله درجه دوم $x^3 - 5x - 3 = 0$ باشند، حاصل $\frac{\alpha}{\beta - \alpha}$ را بیابید.

$$\begin{aligned}
 & A = (x^2 + x + 1)^2 - 3(x^2 + x + 1) + 2 = 0 \\
 & (x^2 + x + 1)^2 - 3(x^2 + x + 1) + 2 = 0 \\
 & A^2 - 3A + 2 = 0 \\
 & (A-1)(A-2) = 0 \\
 & A=1, A=2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & x^2 + x + 1 = 1, \quad x^2 + x + 1 = 2 \\
 & x^2 + x = 0, \quad x^2 + x - 1 = 0 \\
 & x(x+1) = 0, \quad \Delta = 0 \\
 & x=0, x=-1 \quad x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{0}}{2}
 \end{aligned}$$

۱۵- صفرهای تابع $f(x) = (x^2 + x + 1)^2 - 3x^2 - 3x - 1$ را بیابید.

$$f(1) = 4 - 3 = 1$$

$$g(f(1)) = g(1) = 1$$

$$\begin{aligned}
 f(x) &= x^2 + x \\
 f(g) &= f(g) + 2 = x^2 - 14x + 24 \\
 f(g) &= x^2 - 14x + 24 \div 4 \\
 g(n) &= x^2 - x + 9
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{c}
 n=1 \xrightarrow{f} f(1)=1 \xrightarrow{g} g(f(1))=1
 \end{array}$$

۱۶- اگر $f(x) = 4x + 3$ و $fog(x) = 4x^2 - 16x + 27$ باشد، ضابطه تابع $g(x)$ و مقدار $(fog)^{-1}(1)$ را به دست آورید.

$$f(1) = 4 - 3 = 1$$

$$g(f(1)) = g(1) = 1$$

$$\begin{array}{c}
 n=1 \xrightarrow{f} f(1)=1 \xrightarrow{g} g(f(1))=1
 \end{array}$$

۱۷- اگر $f(x) = \frac{1}{x} - 5$ و $g(x) = 2x^2$ باشد، ضابطه $(fog)^{-1}(x)$ را به دست آورده و مقدار $(fog)^{-1}(1)$ را بنویسید.

$$(fog)^{-1} = (g^{-1} \circ f^{-1})(1) = g^{-1}(f^{-1}(1))$$

$$\sqrt{y^2} = |y|$$

$$\begin{aligned}
 y &= f(g(x)) = \frac{1}{2x^2} - 5 = \frac{x^2}{2} - 5 \\
 \text{اگر } x > 0 &\Rightarrow x = \frac{y^2}{2} - 5 \Rightarrow x + 5 = \frac{y^2}{2} \Rightarrow y^2 = 2x + 10 \Rightarrow y = \sqrt{2x + 10} \\
 \text{اگر } x < 0 &\Rightarrow x = \frac{y^2}{2} - 5 \Rightarrow x + 5 = \frac{y^2}{2} \Rightarrow y^2 = 2x + 10 \Rightarrow y = -\sqrt{2x + 10}
 \end{aligned}$$

۱۸- اگر $f(x) = \frac{2x}{x^2 - 2}$ و $g(x) = \frac{1}{x}$ باشد، ضابطه $fog(x)$ را تشکیل دهید و دامنه آن را به دست آورید.

$$D_f : x \neq \pm \sqrt{2}$$

$$D_g : x \neq 0$$

$$D_{f(g(x))} = \left\{ x \in D_g, g(x) \in D_f \right\} = \left\{ x \neq 0, \frac{1}{x} \neq \pm \sqrt{2} \right\}$$

$$D_{fog} = \mathbb{R} - \left\{ 0, \frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{+1}{\sqrt{2}} \right\}$$

$$y = \sqrt{2x + 10}$$

$$y = -\sqrt{2x + 10}$$

$$\begin{aligned}
 & x \neq \pm \sqrt{2} \\
 & x^2 - 2 \neq 0 \\
 & x^2 \neq 2 \\
 & x \neq \pm \sqrt{2}
 \end{aligned}$$

$$f(g(x)) = \frac{\frac{2}{x} - 2}{\left(\frac{1}{x}\right)^2 - 2} = \frac{\frac{2}{x} - 2}{\frac{1}{x^2} - 2} = \frac{\frac{2}{x} - 2}{\frac{1 - 2x^2}{x^2}} = \frac{2x}{1 - 2x^2}$$

۱۹- مقدار b را طوری تعیین کنید که تابع زیر در $x = -1$ حد داشته باشد:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + [x]}{|x|} & x < -1 \\ 3x + b & x > -1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{x^2 + \lceil x \rceil}{|x|} = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{x^2 - 2}{-x} = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{(-1)^2 - 2}{-x} = \frac{-1}{-(-1)} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = 3(-1) + b = b - 3$$

$$b - 3 = -1 \rightarrow b = 2$$

۲۰- با رسم نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & x > 0 \\ x^2 + 2x & x < 0 \end{cases}$ به سوالات زیر پاسخ دهید:

الف) اگر x از طرف چپ به عدد صفر نزدیک شود آنگاه مقادیر $f(x)$ به عدد صفر نزدیک می‌شوند، بنابراین:

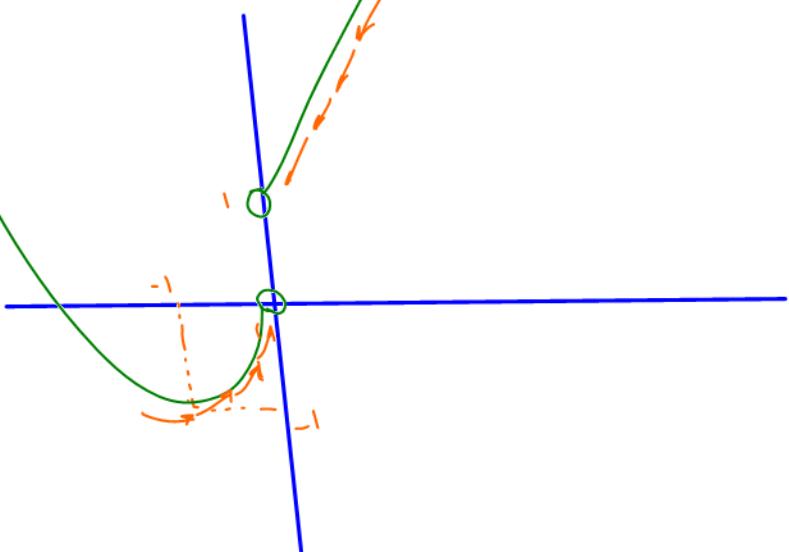
ب) حد راست تابع f در نقطه $x = 0$ را به دست آورید.

پ) آیا تابع f در نقطه $x = 0$ حد دارد؟ چرا؟

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & x \geq 0 \\ x^2 + 2x & x < 0 \end{cases}$$

$$y = (x+1)^2 - 1$$

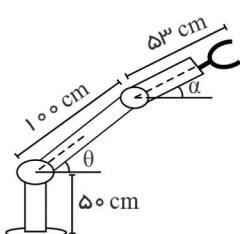
$$x_s = -1$$



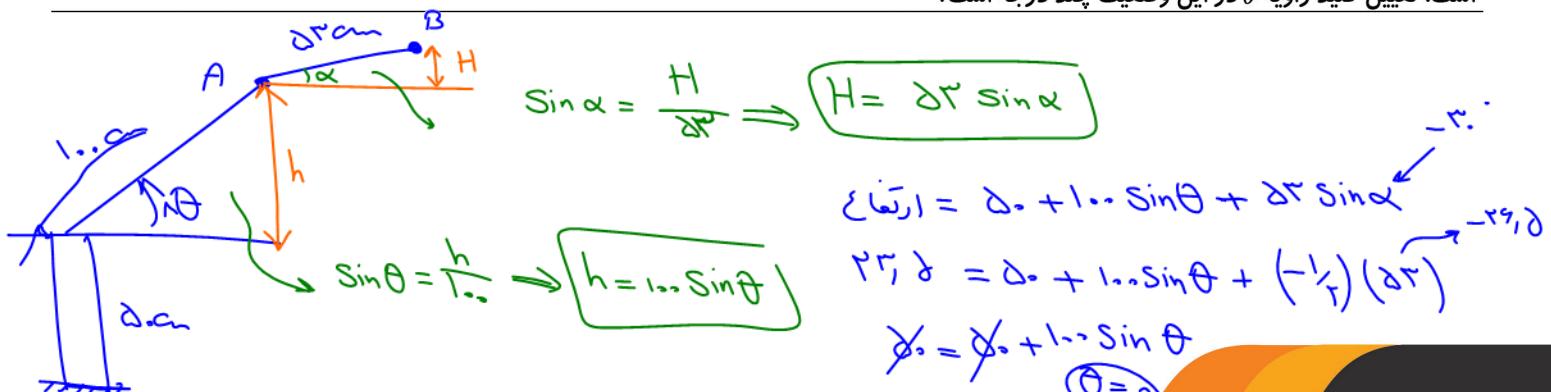
۲۱- در طراحی روبات‌های صنعتی برای انعطاف بیشتر در حرکت روبات‌ها، معمولاً دو مفصل مکانیکی برای بازوی آن به صورت روبه‌رو در نظر می‌گیرند.

الف) ارتفاع نوک گیره این ربات را از سطح زمین، بر اساس توابعی از θ و α مدل‌سازی کنید.

$$\left(-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right)$$

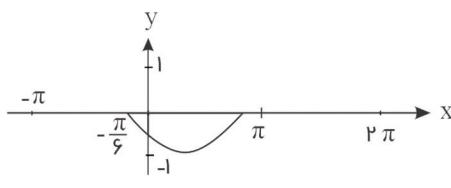


ب) فرض کنید این ربات برای گرفتن یک شیء در ارتفاع ۲۳,۵ cm مفصل دوم خود را در حالت $\alpha = -30^\circ$ قرار داده است. تعیین کنید زاویه θ در این وضعیت چند درجه است؟

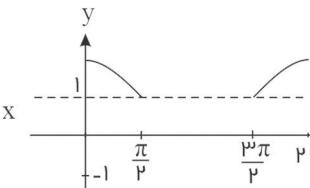


۲۲- با توجه به نمودارهای زیر، کدامیک از توابع مثلثاتی داده شده در بازه $(0, \pi)$ یک به یک است؟

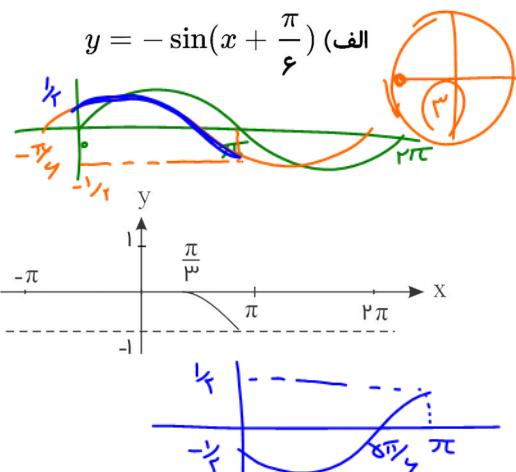
$$y = 1 + |\cos x| \quad (\text{ب})$$



$$y = \cos \left(x - \frac{\pi}{3} \right) \quad (-1)$$

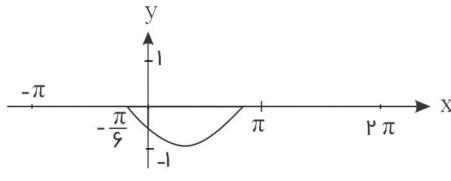


$$y = -\sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right) \quad (\text{الف})$$

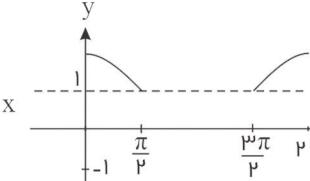


۲۳- با توجه به نمودارهای زیر، بیشترین و کمترین مقدار توابع مثلثاتی داده شده در چه نقاطی رخ می‌دهد؟

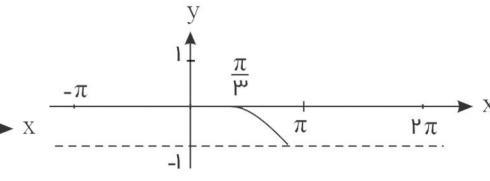
$$y = 1 + |\cos x| \quad (\text{ب})$$



$$y = \cos \left(x - \frac{\pi}{3} \right) \quad (-1)$$



$$y = -\sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right) \quad (\text{الف})$$



۲۴ - نیمه عمر یک ماده هسته‌ای ۳۰ سال است. نمونه‌ای از این ماده ۱۳۸ میلی‌گرم جرم دارد. جرمی که پس از ۳۰۰ سال باقی می‌ماند، چقدر است؟

- ۲۵ - (الف) جرم باکتری‌ها در زمان t از فرمول $m(t) = 2^t$ به دست می‌آید. معکوس این تابع را بنویسید و آن را تفسیر کنید.
 (ب) با استفاده از وارون تابع $m(t)$ برآورد کنید در چه زمانی جرم باکتری‌ها حدود ۵۰۰۰ گرم می‌شود؟ ($\log 2 \simeq 0,301$)

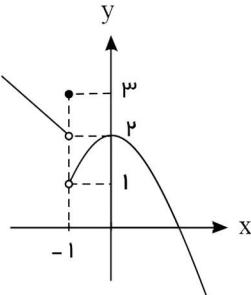
۲۶ - ثابت کنید فاصله دو خط موازی $ax + by + c' = 0$ و $ax + by + c = 0$ می‌باشد.

$$\frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

۲۷ - حد چپ $f(x) = \frac{x}{[x] + 3}$ را در نقطه $x = -2$ بررسی کنید.

۲۸ - فرض کنیم $f : A \rightarrow \mathbb{N}$, $\begin{cases} g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \\ g(n) = 2n \end{cases}$ به این صورت تعریف شود: $\{(1, 2), (2, 3), (3, 5), (4, 7)\}$ که در آن: $A = \{1, 2, 3, 4\}$. توابع $g \circ f$ و $f \circ g$, را به دست آورید.

۲۹ - با استفاده از نمودار رو به رو، عبارات خواسته شده را در صورت وجود محاسبه کنید.

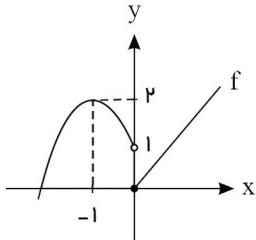


(الف) $2f(-1) + \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x)$

(ب) $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} [f(x)] - 2 \lim_{x \rightarrow \circ} [f(x)]$

۳۰ - برای دو تابع $g(x) = \frac{4}{x}$ و $f(x) = \frac{1}{x-4}$ تابع fog و دامنه آن را به دست آورید.

۳۱ - با استفاده از نمودار مقابل، عبارت‌های خواسته شده را در صورت وجود محاسبه کنید.



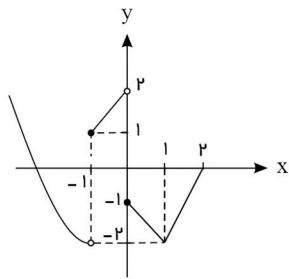
(الف) $\lim_{x \rightarrow \circ^-} f(x)$

(ب) $\lim_{x \rightarrow \circ^+} f(x)$

(پ) $\lim_{x \rightarrow \circ} f(x)$

(ت) $\lim_{x \rightarrow -1} [f(x)] + f(-1)$

۳۲ - شکل مقابل نمودار تابع f است. حد های زیر را در صورت وجود بیابید.



(الف) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$

(ب) $\lim_{x \rightarrow \circ} f(x)$

(پ) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

(ت) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$

۳۳- با رسم نمودار تابع $f(x) = -(x - 1)^2 + 2$ حدود زیر را مشخص کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 1} [f(x)]$

ب) $[\lim_{x \rightarrow 1} f(x)]$

() نماد جزء صحیح است.

۳۴- با توجه به دامنه تابع، در مورد حد چپ تابع f با ضابطه $x = 1$ چه می‌توان گفت؟
 $f(x) = \sqrt{x^2 - x}$

۳۵- اگر $(m+3, 1+2m)$ یک بازهٔ متقارن به شعاع ۳,۵ باشد، مرکز بازهٔ متقارن $(m-1, m)$ را بیابید.

۳۶- تابع $f(x) = \frac{\sqrt{x+2} + \sqrt{5-x}}{x^2 - 4}$ را در نظر بگیرید:

الف) دامنه تابع f را بیابید.

ب) دامنه تابع شامل همسایگی محذوف کدام نقاط است؟

پ) تعیین کنید تابع f فقط در همسایگی چپ چه نقطه‌ای و فقط در همسایگی راست چه نقطه‌ای تعریف شده است؟

۳۷- تابع f با ضابطه $f(x) = \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2-4}$ را در نظر بگیرید.

الف) دامنه تابع f را به دست آورید.

ب) دامنه تابع شامل همسایگی محذوف کدام نقاط است؟

پ) آیا این تابع در همسایگی $9/2$ تعریف شده است؟

ت) آیا تابع f در همسایگی چپ -3 تعریف شده است؟ در همسایگی راست -3 $x=$ چطور؟

۳۸- تابع $f(x) = \begin{cases} x-1 & x < 3 \\ 2x-4 & x > 3 \end{cases}$ را در نظر بگیرید:

الف) آیا تابع f در نقطه $x=3$ تعریف شده است؟

ب) با رسم نمودار f و یا نوشتند جدول مقادیر f در همسایگی محذوف 3 ، مقدار $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ را به دست آورید.

۳۹- اگر تعداد افرادی که، طی یک مدت معین، به وسیله یک نوع ویروس آلوده می‌شوند، با دستور $n(t) = \frac{9500t - 2000}{4+t}$

ه) زمان بر حسب ماه است:

الف) تعداد افرادی که در انتهای ماه پنجم آلوده شده‌اند چقدر است؟

ب) پس از چند ماه تعداد افراد آلوده به 5500 نفر خواهد رسید؟

۴۰- دو تابع $g(x) = \begin{cases} 2x + 4 & x \geq 2 \\ x + 3 & x < 2 \end{cases}$ و $f(x) = \begin{cases} x + 1 & x \geq 2 \\ 3x & x < 2 \end{cases}$ مفروضند:

الف) ضابطه تابع $f + g$ را بیابید. ب) آیا توابع f و g در $x = 2$ حد دارند؟

ج) آیا تابع $g + f$ در $x = 2$ حد دارد؟

د) آیا می‌توان از قضیه حد مجموع برای محاسبه حد $f + g$ در $x = 2$ استفاده کرد؟

۴۱- اگر تابع $f(x) = \begin{cases} 3x^3 + x & |x| > 1 \\ ax + b & |x| \leq 1 \end{cases}$ در نقاط $x = -1$, $x = 1$ حد داشته باشد. a و b را بیابید.

۴۲- m را چنان بیابید که تابع مقابل در نقطه $x = \pi$ حد داشته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} m\sin^2 \frac{x}{r} + \cos x & x < \pi \\ 2m - \cos \frac{x}{r} + \sin x & x \geq \pi \end{cases}$$

۴۳- مقادیر m و n را چنان بیابید که تابع مقابل در نقاط $x = -1$ و $x = 2$ حد داشته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + mx & x < -1 \\ 3x + n & -1 < x \leq 2 \\ nx^2 + 2x & x > 2 \end{cases}$$

۴۴- در تابع مقابل مقادیر m و n را چنان بباید که حد چپ تابع در $x = 1$ برابر -3 و حد راست تابع در $x = 1$ برابر 5 باشد.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + mx + 1 & x > 1 \\ 3x - n + 2 & x < 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{x^2 - ax + b} = 1 \text{ اگر } -45$$

۴۶- مقادیر a و b را چنان بباید که تابع مقابل در نقطه $x = -2$ حدی برابر 4 داشته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 - x & x < -2 \\ 2x + b & x > -2 \end{cases}$$

$$47- \text{تابع } f(x) = \frac{\sqrt{16 - x^2}}{x - [x]}$$

الف) دامنه تابع f را به دست آورید.

ب) دامنه تابع شامل همسایگی محدود کدام نقاط است؟

پ) آیا تابع f در همسایگی چپ $x = 4$ تعریف شده است؟ در همسایگی راست $x = 4$ چطور؟

ت) تابع در همسایگی راست کدام نقطه تعریف شده است که در هیچ همسایگی چپ آن تعریف نشده است؟

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{ax^r + b}{|x - 1|} = 2 \text{ اگر } a = 4 \text{ و } b = 1.$$

۴۹ - حاصل حد های زیر را بیابید.

(الف) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^r - 2x - 1}{x^r - 1}$

(ب) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^r + 2x - 3}{x^r + x - 2}$

۵۰ - حاصل حد زیر را بیابید.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{r}} [\sin x + \cos x]$$

۵۱ - حاصل حد زیر را بیابید.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{r\pi}{r}} ([\sin x] + [\cos x])$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^r + ax + b}{x^r + 1} = 4 \text{ اگر } a = -5 \text{ و } b = 1.$$

۵۳- اگر تابع $f(x) = \frac{ax + 4}{x^2 + x - 6}$ وقتی $x \rightarrow 2$ دارای حد باشد، حاصل این حد را بباید.

۵۴- حاصل حد های زیر را بباید.

(الف) $\lim_{x \rightarrow 0} [\sin x]$

(ب) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} [\cos x]$

۵۵- a و b را چنان بباید که تابع مقابل در نقطه $x = 2$ حد چپی برابر ۶ و حد راستی برابر ۱ داشته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} ax - [2x], & x < 2 \\ b[-x] + 3x, & x > 2 \end{cases}$$

۵۶- مقدار عددی عبارت زیر را حساب کنید.

$$\frac{2 \sin\left(\frac{49\pi}{10}\right) - \sin\left(\frac{7\pi}{5}\right) + \sin\left(\frac{18\pi}{5}\right) - 2 \cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)}{\cos\left(-\frac{3\pi}{5}\right) + 2 \cos\left(\frac{13\pi}{5}\right) - \sin\left(\frac{19\pi}{10}\right)}$$

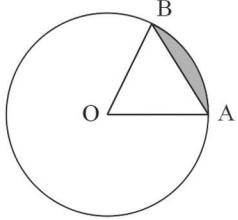
۵۷- m را چنان بباید که تابع $f(x) = \frac{m[x] - 1}{[-x] + 2x}$ در نقطه $x = -3$ حد داشته باشد.

۵۸- ثابت کنید:

$$\frac{2 \sin 22^\circ - \sin(-22^\circ) + 3 \sin 158^\circ}{2 \cos(-68^\circ) + \tan 158^\circ + \tan 22^\circ} = 3$$

۵۹- در مثلث ABC بر حسب درجه $\hat{A} = 90^\circ$ و $\hat{B} = \frac{45}{\pi}$ برابر اندازه C بر حسب رادیان است، اندازه \hat{B} و \hat{C} را بر حسب رادیان بباید.

۶۰- در شکل زیر اگر شعاع دایره $4cm$ و زاویه AOB رادیان باشد، مساحت قسمت هاشور خورده را بباید. ($\pi \approx 3$)



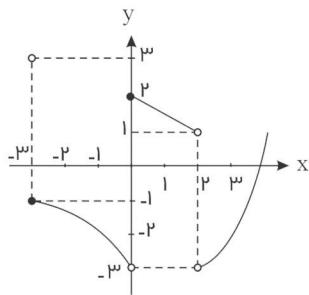
۶۱- معادله‌ی مقابل را به روش هندسی حل کنید.

$$3 + \log|x| = x$$

۶۲ - معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$\log_{\frac{1}{2}}(x+2) = \log_{\frac{1}{2}}(2x^2 + 3x + 2)$$

۶۳ - نمودار تابع f بصورت مقابل است، حاصل حدهای زیر را بیابید.



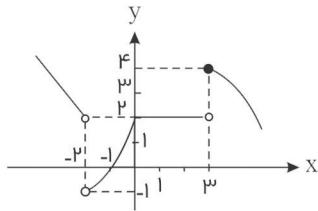
(الف) $\lim_{x \rightarrow 0^+} [f \circ f(x)] - \lim_{x \rightarrow 2^+} [f(x)]$

(ب) $\lim_{x \rightarrow 0^-} [f \circ f(x)] + [\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)]$

۶۴ - معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$\log_x(x+2) = \log_x(4-x) + 1$$

۶۵ - نمودار تابع f بصورت مقابل است، حاصل حدهای زیر را بیابید.



(الف) $\lim_{x \rightarrow (-2)^-} [f(x)] + 2 \lim_{x \rightarrow (-2)^+} [f(x)]$

(ب) $\lim_{x \rightarrow 2^-} [f(x)] - \lim_{x \rightarrow 2^+} [f(x)]$

۶۶- جمعیت شهری ۵۰۰۰۰ نفر است و هر سال ۶ درصد جمعیت این شهر افزایش می‌یابد.

الف) پس از ۵ سال جمعیت این شهر چند نفر است؟

ب) پس از چند سال جمعیت این شهر ۳ برابر می‌شود؟

$$(\log^w = 0,477, \log 1,06 = 0,025)$$

۶۷- نمودار تابع $f(x) = \frac{x|x-1|}{x-1}$ را رسم کرده و حد تابع را در نقطه $x=1$ بررسی کنید.

۶۸- نمودار تابع $f(x) = x - [x]$ را رسم کرده و حد تابع را در نقطه $x=2$ بررسی کنید.

۶۹- نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & x < 0 \\ x + 3 & x > 0 \end{cases}$ را رسم کرده و حدهای زیر را در صورت وجود بیابید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ب) $\lim_{x \rightarrow -1} [f(x)]$ پ) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ ت) $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} [f(x)]$

۷۰- با تکمیل جدول زیر، حد تابع f را در نقطه $x = -2$ به دست آورید.

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 1 & x \neq -2 \\ 5 & x = -2 \end{cases}$$

x	-2,5	-2,1	-2,01	-2,001	\rightarrow	-2	\leftarrow	-1,999	-1,99	-1,9	-1,8
$f(x)$											



جمهوری اسلامی ایران

جمهوندی ریاضی یازدهم

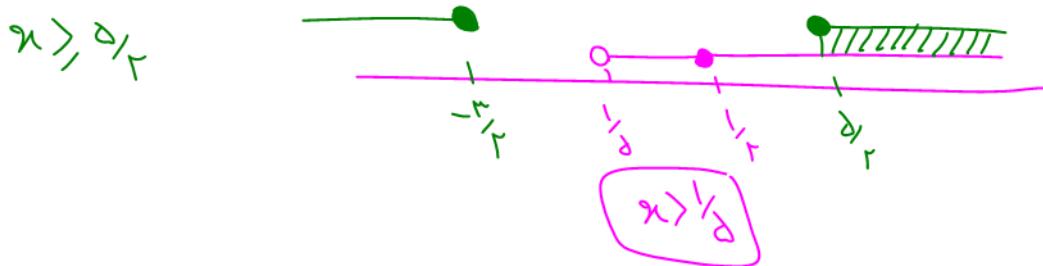
کتابخانه ملی ایران

۱۴۰۳، بهار

۱- نامعادله‌ی قدر مطلقی $|2x - 1| < 3x$ را حل کنید.

$$\begin{aligned} |2x - 1| \geq 4 &\Rightarrow \\ 2x - 1 \leq -4 &\quad \text{یا} \quad 2x - 1 \geq 4 \\ 2x \leq -3 & \quad \text{یا} \quad 2x \geq 5 \\ x \leq -\frac{3}{2} & \quad \text{یا} \quad x \geq \frac{5}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |2x - 1| < 3x & \quad n \geq \frac{1}{2} \\ x \geq \frac{1}{2} & \rightarrow 2x - 1 < 3x \rightarrow -1 < x \\ x < \frac{1}{2} & \rightarrow -2x + 1 < 3x \rightarrow 1 < 5x \quad \frac{1}{5} < x \\ \frac{1}{5} < x < \frac{1}{2} & \end{aligned}$$



۲- دو دنباله $\dots, 10, 7, 4, 1, \dots$ و $b_n : -5, -1, 3, \dots$ مفروضند، مجموع چند جمله از دنباله جملات مشترک دنباله‌های a_n و b_n برابر است؟

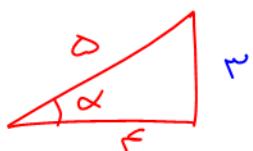
$$a_n : 1, 4, 7, 10, \dots \quad d_1 = 3 \rightarrow [d_1, d_r] = 12$$

$$b_n : -5, -1, 3, 7, 11, \dots \quad d_r = 4$$

$$\text{V), } 19, 31, \dots \quad k(4n+1) \quad 12n+2$$

$$S_n = 910 \Rightarrow \frac{n}{2} \left[2a_1 + (n-1)d \right] = 910 \quad n(4n+1) = 910 \quad n=10$$

۳- فرض کنید $\cos \beta = \frac{-12}{13}$ و $\cos \alpha = \frac{4}{5}$ و انتهای کمان α در ربع اول و انتهای کمان β در ربع دوم قرار دارد. اکنون به سوالات زیر پاسخ دهید.

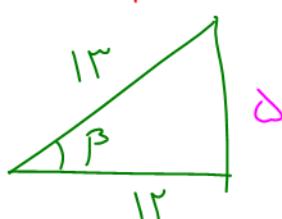


$$\cos \alpha = \frac{3}{5}$$

$$\sin \alpha = \frac{4}{5}$$

$$\sin \beta = \frac{5}{13}$$

$$\cos \beta = -\frac{12}{13}$$



الف) مقدار دقیق $\cos(\alpha - \beta)$ و $\sin(\alpha + \beta)$ چیست؟

ب) انتهای زاویه $\alpha + \beta$ در کدام ربع قرار می‌گیرد؟

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\left(\frac{4}{5} \right) \left(-\frac{12}{13} \right) + \left(\frac{3}{5} \right) \left(\frac{5}{13} \right) = -\frac{19}{65}$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = \left(\frac{4}{5} \right) \left(-\frac{12}{13} \right) - \left(\frac{3}{5} \right) \left(\frac{5}{13} \right) = -\frac{9}{13}$$

$$110^\circ < \alpha + \beta < 270^\circ$$



۴- نمودار تابع مقابله رسم کنید.

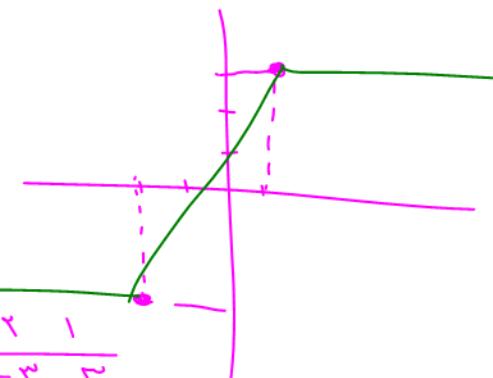
$$f(x) = |x+2| - |x-1|$$

$$\boxed{x=-2} \quad \boxed{x=1}$$

$$x < -2 \rightarrow y = -x-2 + x-1 = -3$$

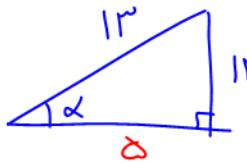
$$-2 \leq x < 1 \xrightarrow{x=0} y = x+2 + x-1 = 2x+1$$

$$1 \leq x \xrightarrow{x=1} y = x+2 - (x-1) = 3$$



۵- درستی اتحاد زیر را ثابت کنید.

$$\sin 2x = \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x} = \frac{\frac{2 \sin x}{\cos x}}{\frac{1}{\cos^2 x}} = \frac{2 \sin x \cos x}{\cancel{\cos^2 x}} = 2 \sin x \cos x = \sin 2x$$

۶- اگر α زاویه‌ای در بازه‌ی $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$ باشد که $\tan \frac{\alpha}{2}$ مقدار $\frac{9}{13}$ را حساب کنید.

$$\cos \alpha = \frac{-12}{13}$$

$$\sin \alpha = -\frac{5}{13}$$

$$\frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \tan \frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{9}{13}}{\frac{-12}{13}} = -\frac{9}{12} = -\frac{3}{4}$$

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{9}{12} \quad \text{لی} \quad \tan \frac{\alpha}{2} = -\frac{3}{4}$$

سوم

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2} = \frac{1 - \left(-\frac{12}{13}\right)}{2} = \frac{9}{13} \\ \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2} = \frac{1 + \left(-\frac{12}{13}\right)}{2} = \frac{5}{13} \end{array} \right.$$

$$\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow$$

$$\frac{3\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}$$

$$90^\circ < \alpha < 120^\circ$$

۷- اگر جملات چهارم و ششم و دوازدهم یک دنباله‌ی حسابی به ترتیب سه جمله‌ی متولای از یک دنباله‌ی هندسی باشند قدر نسبت دنباله‌ی هندسی را به دست آورید.

$$q = \frac{10 - 9}{9 - 5} = \frac{1}{4} = 0.25$$

۸- معادله زیر را حل کنید.

$$\frac{x}{x-1} = |x+1|$$

$$x < -1 \rightarrow \frac{x}{x-1} = -\frac{(x+1)}{1} \Rightarrow x = -x^2 + 1 \Rightarrow x^2 + x - 1 = 0$$

$$\Delta = 0 \quad x = \frac{-1 \pm \sqrt{0}}{2}$$

$$x \geq -1 \rightarrow \frac{x}{x-1} = \frac{(x+1)}{1} \quad -1,9 = \boxed{\frac{-1-\sqrt{8}}{2}}$$

$$\frac{-1+\sqrt{8}}{2} = 1,9 \notin (-\infty, -1)$$

$$x^2 - 1 = x \rightarrow$$

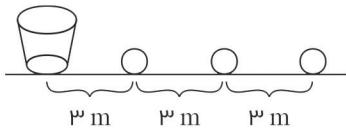
$$x^2 - x - 1 = 0 \quad x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\Delta = 0$$

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,9$$

$$\frac{1-\sqrt{5}}{2} \approx -0,9$$

۹- در یک مسابقه تعدادی توپ روی یک خط مستقیم و به فاصله‌ی ۳ متر از هم قرار دارند. فاصله‌ی توپ اول تا سبد ۳ متر است (شکل زیر). دونده‌ای باید از کنار سبد شروع کرده و هر توپ را برداشته و آن را تا سبد حمل کند و به سبد بیندازد و مجدداً به طرف توپ بعدی برود و آن را تا سبد حمل کند و به سبد اداخواز کند. اگر این دونده مجموعاً ۹۱ متر دونده باشد، تعیین کنید او چند قدم، ۱۲ سبد اداخوازه است؟



۱۰- درستی اتحاد زیر را ثابت کنید.

$$1 + \sin x = (\sin x + \cos x)^r$$

۱۱- اگر α زاویه‌ای در ربع اول و β زاویه‌ای در ربع سوم باشد که $\cos \beta = -\frac{5}{13}$ و $\sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta)$ ، مقدارهای $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ و $\tan(\alpha + \beta)$ را تعیین کنید.

۱۲- حد زیر را در صورت وجود بدست آورید.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{1 - \cos x}$$

۱۳- سینوس زاویه ۱۵ درجه را محاسبه کنید.

۱۴- فردی ۵۰ تن ماسه ساختمانسازی به یک پروژه در حال اجرا می‌فرستد و قرار می‌شود از آن روز به بعد هر روز ۸٪ روز قبل ماسه برای پروژه بفرستد. حداکثر ماسه‌ای که به این پروژه فرستاده می‌شود پس از ۱۰ روز چقدر است؟

۱۵- عبارت زیر را تا حد امکان ساده کنید.

$$\frac{(x+1)(x^r+1)(x^e+1)(x^k+1)}{x^{15} + x^{14} + \dots + x + 1}$$

۱۶ - حداقل چند جمله از دنباله $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots$ را جمع کنیم تا حاصل بیشتر از ۵۰۰ باشد؟

۱۷ - از رابطه زیر مقدار x را باید.

$$(x + 3) + (x + 5) + (x + 7) + \dots + (x + 23) = 253$$

۱۸ - در یک دنباله حسابی، مجموع ۶ جمله اول ۵۷ و مجموع ۶ جمله دوم ۱۶۵ می‌باشد: مجموع ۲۰ جمله اول را باید.

۱۹ - نمودار تابع $f(x) = ||x| - 2|$ را رسم کنید، سپس معادله $|f(x)| = 1$ را هم به روش هندسی و هم به روش جبری، حل نمایید.

۲۰- بر روی محور طول‌ها چه نقاطی وجود دارد که مجموع فاصله‌های آنها از دو نقطه به طول‌های ۱ و ۳ روی محور x ها برابر ۶ باشد؟

۲۱- سه جمله‌ی متوالی از یک دنباله‌ی هندسی باید که مجموعشان ۳۱ و حاصل‌ضربشان ۱۲۵ باشد.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a(n-1)}{\sqrt[3]{an-a}} \times \frac{\sqrt[3]{3n-\Delta+1}}{\sqrt[3]{3n-\Delta-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cancel{3a}(n-1)}{\cancel{3}(n-1)} = \frac{3a}{3} = \frac{a}{1} \quad \text{---}$$

$$a-b = 3n-\Delta - 1 = 3n-\Delta$$

۲۲- آنگاه a را باید.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{ax-2a}{\sqrt[3]{3x-\Delta}-1} = 3 \quad \text{اگر}$$

$$3a = 9 \quad \boxed{a = \frac{9}{3}}$$

۲۳- در ۲۰ جمله‌ی اول یک دنباله حسابی مجموع جملات شماره‌های فرد ۱۳۵ و مجموع جملات شماره‌های زوج ۱۵۰ می‌باشد. جمله‌ی اول و قدر نسبت دنباله را مشخص کنید.

۲۴- در یک دنباله هندسی مجموع جملات اول و پنجم برابر ۸۲ و مجموع جملات دوم و ششم برابر ۲۴۶ است. تعیین کنید مجموع چند جمله از این دنباله برابر ۱۳۲۸۰ است؟

۲۵- اگر $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax + 4a}{1 - \sqrt{5x + 16}} = 2$ آن‌گاه a را بیابید.

۲۶- اگر $|x - 1| + |x + 1| > 2|x|$ برقرار باشد حدود x را به دست آورید.

۲۷- برای محافظت از تابش مضر مواد رادیواکتیویته لایه‌های محافظتی ساخته شده است که شدت تابش پس از عبور از آنها نصف می‌شود. حداقل چند لایه باید استفاده کنیم تا شدت تابش مواد مضر ۹۷ درصد کاهش یابد؟

۲۸- اگر $\tan \alpha$ و $\tan \beta$ ریشه‌های معادله $x^3 + 5x - 1 = 0$ باشند، حاصل $\tan(\alpha + \beta)$ را بیابید.

۲۹- نسبت‌های مثلثاتی سینوس و کسینوس را برای زاویه $22,5^\circ$ به دست آورید.

۳۰- خط ۱ و نمودار $y = |x^3 - 2|x||$ در چند نقطه تلاقی دارند؟

۳۱- نامعادله ۱ $\left| \frac{3 - 2x}{x - 4} \right| \geq 1$ را حل کنید.

۳۲- اگر $\cos x = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$ باشد، حاصل $\cos 4x$ را بیابید.

۳۳ - نمودار تابع مقابله رسم کنید.

$$y = |x - 1| + \frac{|x|}{x}$$

۳۴ - نمودار تابع مقابله رسم کنید.

$$f(x) = |x - 2| - |x + 2| + x - 1$$

۳۵ - در یک دنباله‌ی حسابی $a_{15} = 34$ و $a_0 = 20$ است، حاصل S_8 را باید.

۳۶ - حاصل عبارت $(1 + x + x^2 + \dots + x^k)(1 - x + x^2 - \dots + x^k)$ را به ازای $x = \sqrt{3}$ به دست آورید.

۳۷ - سینوس زاویه 105° را حساب کنید.

۳۸ - حد تابع زیر را در بیاید.

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x+2} - 1}{2x^2 + 2x}$$

۳۹ - حد زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+\sin x} - \sqrt{1-\sin x})}{x} \times \frac{(\sqrt{1+\sin x} + \sqrt{1-\sin x})}{(\sqrt{1+\sin x} + \sqrt{1-\sin x})} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(\sqrt{1+\sin x} + \sqrt{1-\sin x})} = \frac{1}{\sqrt{1+0} + \sqrt{1-0}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$u \rightarrow 0 \Rightarrow \sin u \sim u$$

$$\tan u \sim u$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi + rt)}{rt} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi + \frac{\pi}{r} + t)}{rt} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\sin(\frac{\pi}{r} + t)}{rt} = -1$$

(Diagram of a unit circle with radius r and angle $\pi + rt$)

۴۰ - حد زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{r}} \frac{\sin(\pi x - \pi)}{x - \frac{\pi}{r}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(rt)}{t} = r$$

۴۱ - حد تابع زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

$$t = \pi - \frac{\pi}{r}$$

$$x = \frac{\pi}{r} + t$$

۴۲ - حد زیر را بدست آورید.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{rx}{\sqrt{r - r \cos x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{rx}{\sqrt{r - r \sin^2 \frac{x}{r}}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{rx}{\sqrt{r(1 - \sin^2 \frac{x}{r})}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{rx}{\sqrt{r \cos^2 \frac{x}{r}}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{rx}{r \cos \frac{x}{r}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\cos \frac{x}{r}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{dx}{r}}{-\frac{\sin \frac{x}{r}}{r^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{r}{-\sin \frac{x}{r}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{r}{-\frac{r}{2}} = -2$$

$1 - \cos x = r \sin^2 \frac{x}{r}$

۴۳ - مجموع چند جمله از دنباله هندسی $-12, 24, \dots, 6$ برابر ۱۰۲۶ است.

۴۴ - مقدار حد های زیر را بیابید.

الف

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^r}{|1 - \cos x|} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^r}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{dx^r}{r}}{\frac{d(1 - \cos x)}{dx}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{rx^{r-1}}{r}}{\frac{r \sin x}{r}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^{r-1}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{dx^{r-1}}{r-1}}{\frac{d(\sin x)}{dx}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{rx^{r-2}}{r-1}}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{rx^{r-2}}{\cos x} = 0$$

$$2 \left(\sin \frac{x}{r} \right)^r = 2 \times \frac{x^r}{r^r} = \frac{x^r}{r^r}$$

ب

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{r - r \cos rx}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{r(1 - \cos rx)}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{r(2 \sin^2 \frac{rx}{2})}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{r(2 \sin^2 \frac{rx}{2})}{x \times 2 \sin \frac{rx}{2} \cos \frac{rx}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{r \times 2 \sin^2 \frac{rx}{2}}{x \times 2 \sin \frac{rx}{2} \cos \frac{rx}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{r \sin \frac{rx}{2}}{x \cos \frac{rx}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{r \frac{d \sin \frac{rx}{2}}{d \frac{rx}{2}}}{x \frac{d \cos \frac{rx}{2}}{d \frac{rx}{2}}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{r \frac{r}{2} \cos \frac{rx}{2}}{x (-\sin \frac{rx}{2})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{r^2 \cos \frac{rx}{2}}{x (-\sin \frac{rx}{2})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{r^2}{x} = \infty$$

پ

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x - \frac{\pi}{2})}{6x - 2\pi}$$

۴۵- مقدار حد های زیر را بیابید.

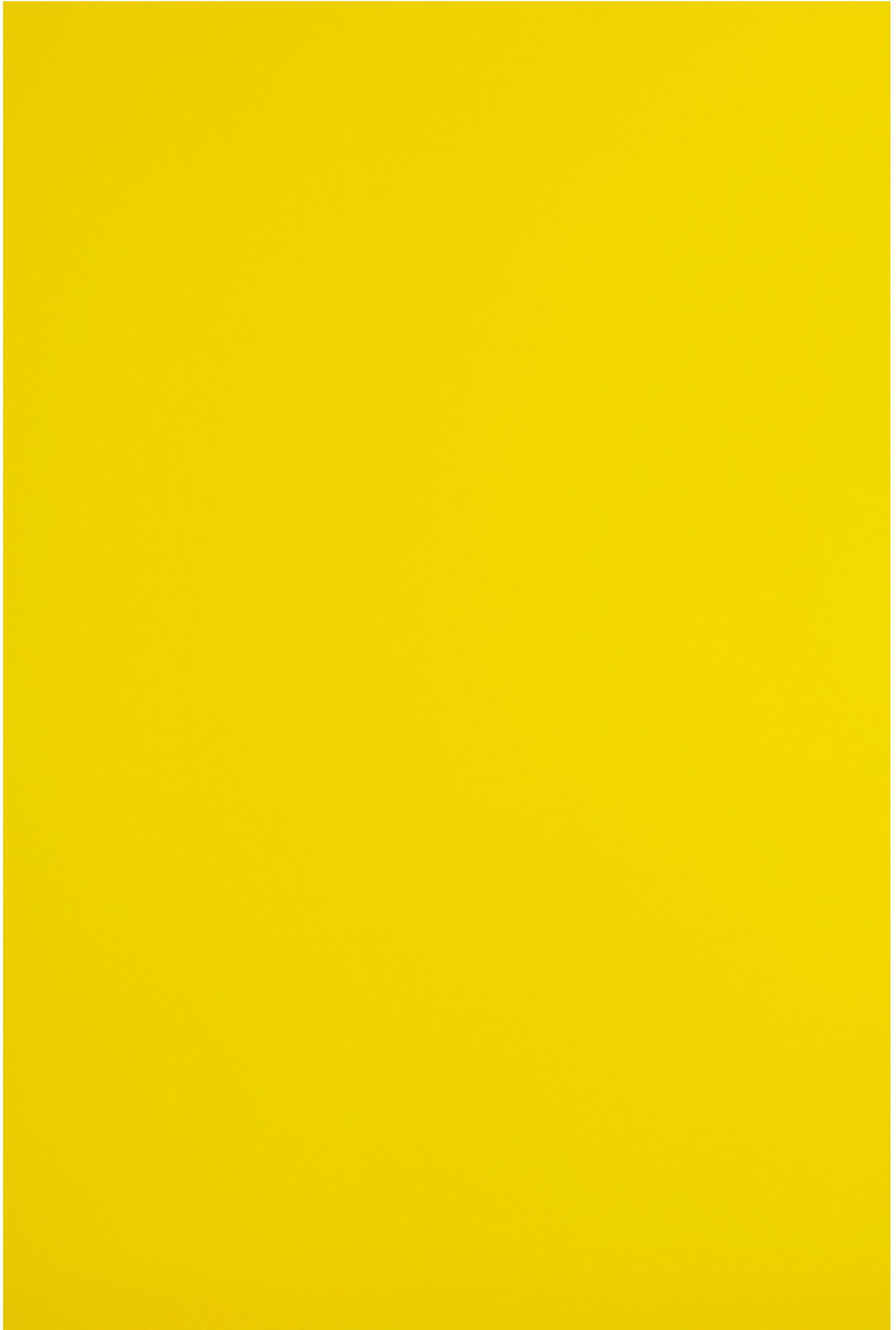
الف

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 + x - 1}{3x^2 + 3x}$$

$$= \lim_{n \rightarrow -1} \frac{(n+1)(2n-1)}{(n+1)(3n)} = \frac{-2}{-3} = 1$$

$n+1$
حاصل ضرب لجه

پ



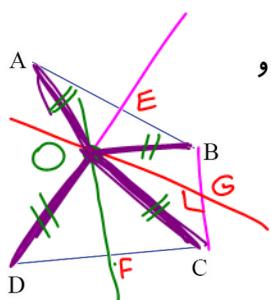


جمهوری اسلامی ایران

جمهوندی ریاضی یازدهم

کتابخانه ملی ایران

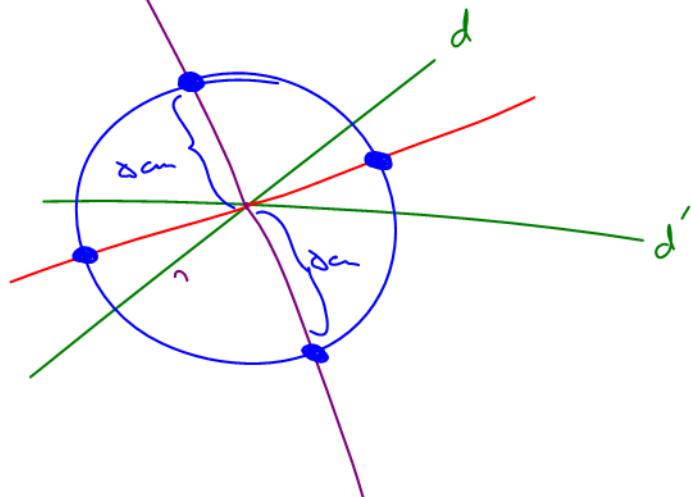
۱۴۰۳، بهار

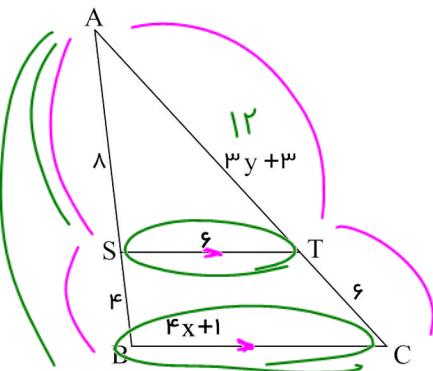


- ۱- الف) دو پاره خط AB و CD مطابق شکل داده شده‌اند.
نقطه‌ای بیابید که از دو نقطه A و B به یک فاصله باشد و از دو نقطه C و D نیز به یک فاصله باشد.

ب) نقطه مورد نظر در قسمت الف را O می‌نامیم. اگر نقطه O روی عمودمنصف پاره خط BC باشد و G دایره‌ای به مرکز O و به شعاع OA باشد، رأس‌های چهارضلعی $ABCD$ نسبت به دایره G چه وضعیتی دارند؟ چرا؟

- ۲- دو خط منقاطع d و d' را در نظر بگیرید. نقاطی را بیابید که از نقطه O (محل تقاطع) به فاصله 5 cm بوده و از دو خط به یک فاصله باشند.





۳- در شکل مقابل $ST \parallel BC$ است. مقادیر x و y را بدست آورید.

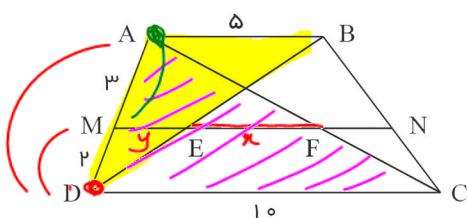
تالس:

$$ST \parallel BC \Rightarrow \frac{AS}{AB} = \frac{AT}{AC} \Rightarrow \frac{x}{x+y+z} = \frac{y}{y+z} \Rightarrow$$

$$xy = y^2 + yz \Rightarrow y = z \rightarrow y = 5$$

$$ST \parallel BC \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{AS}{AB} = \frac{ST}{BC} \Rightarrow$$

$$\frac{x}{x+y+z} = \frac{y}{y+z} \Rightarrow xy = y^2 + yz \Rightarrow y = z \rightarrow y = 5$$



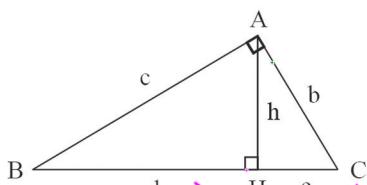
$$\triangle ABD: ME \parallel AB \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{MD}{AD} = \frac{ME}{AB} \Rightarrow$$

$$\frac{y}{\Delta} = \frac{y}{\Delta} \Rightarrow y = \Delta$$

$$\triangle ADC: ME \parallel CD \xrightarrow{\text{تالس}}$$

$$\frac{AM}{AD} = \frac{MF}{CD} \rightarrow$$

$$\frac{\Delta}{\Delta} = \frac{y+z}{10} \rightarrow \Delta + z = 10 \rightarrow z = 10 - \Delta$$

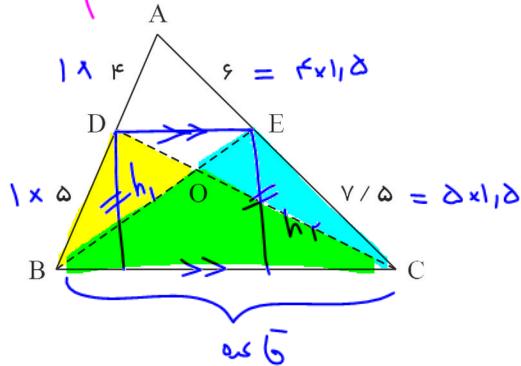


۵- در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ROBRO مقادیر خواسته شده را بدست آورید.

$$d = 5, e = 3, b = ?, c = ?$$

$$\left\{ \begin{array}{l} h = d \times e \rightarrow h = 5 \times 3 = 15 \rightarrow h = \sqrt{15} \\ C = d \times BC \rightarrow C = 5 \times 15 = 25\sqrt{3} \\ b = e \times BC \rightarrow b = 3 \times 15 = 25\sqrt{3} \end{array} \right.$$

۶- در شکل زیر نسبت مساحت مثلث OBD به مساحت مثلث OCE را بدست آورید.

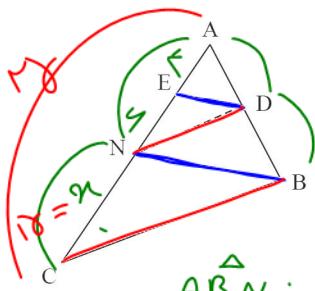


$$\frac{AD}{BD} = \frac{AE}{CE} = \frac{z}{y} \xrightarrow{\text{تالس}} DE \parallel BC$$

$$\triangle BCD, \triangle BCE$$

$$S_{BCD} = S_{BCE} - S_{OBD} \Rightarrow S_{OBD} = S_{OCE}$$

$$h_1 = h_2$$



۷- در شکل زیر $AC = 6$ و $AE = 4$. $DN \parallel BC$ و $DE \parallel BN$ می باشد. اندازه $\angle A$ را بدست آورید.

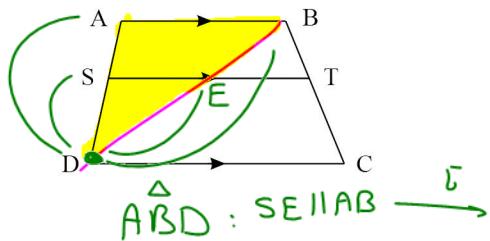
$$\frac{AD}{BD}$$

$$\triangle ABN : ED \parallel BN \xrightarrow{\text{تاس}} \frac{AD}{BD} = \frac{AE}{EN} \Rightarrow$$

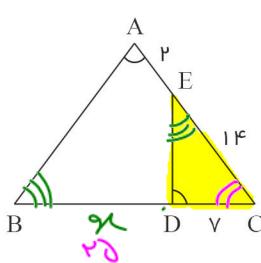
$$\triangle ABC : ND \parallel BC \xrightarrow{\text{ساده}} \frac{AD}{BD} = \frac{AN}{NC} \Rightarrow$$

$$\frac{AE}{NE} = \frac{AN}{NC} \quad \dots$$

$$\frac{4}{y} = \frac{1}{x} \Rightarrow x = 18$$



۸- در ذوزنقه مقابل $AB \parallel ST \parallel DC$ است. ثابت کنید: $\frac{AS}{SD} = \frac{BT}{TC}$



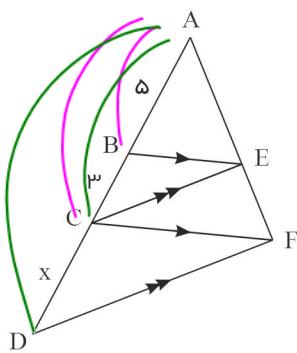
۹- در شکل روپرتو $\widehat{A} = \widehat{D}$ است طول BD را بدست آورید.

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{E} = \widehat{C} \\ \widehat{D} = \widehat{A} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{زیر}} \dots$$

نیست سایه، $\frac{EC}{BC} = \frac{ED}{AB} = \frac{CD}{AC} \Rightarrow$

~~$\frac{15}{x+y} = \frac{14}{19} \Rightarrow x+y = 34$~~

$\frac{15}{x+y} = \frac{14}{19} \Rightarrow x+y = 34$



۱۰ - در شکل زیر $CE \parallel DF$ و $BE \parallel CF$ می‌باشد. مقدار x را بدست آورید.

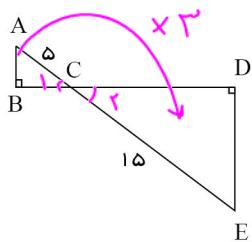
$$(4a + \delta)(\lambda + 4b) = (\delta + 4a)(4b + \lambda)$$

$$\cancel{4a} + \cancel{4a}b + \cancel{\delta} + \cancel{\lambda}b = \cancel{\lambda}b + \cancel{\delta} + \cancel{4a}b + \cancel{4a}\lambda$$

$$1 \cdot b = 19 \quad \textcircled{a}$$

$$\frac{b}{a} = \frac{19}{1} = \frac{\lambda}{\delta} = 19$$

اگر $\frac{b}{a} = \frac{4a + \delta}{\delta + 4a}$ باشد نسبت $\frac{b}{a}$ را بدست آورید. ۱۱



۱۲ - در شکل مقابل دو مثلث قائم‌الزاویه مشاهده می‌کنید. نسبت محیط‌ها و مساحت‌های آن‌ها را به دست آورید.

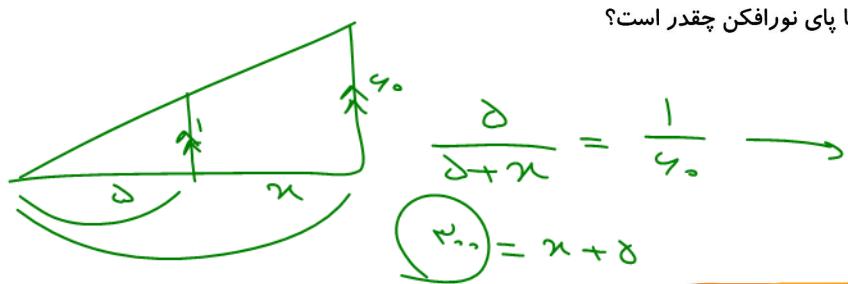
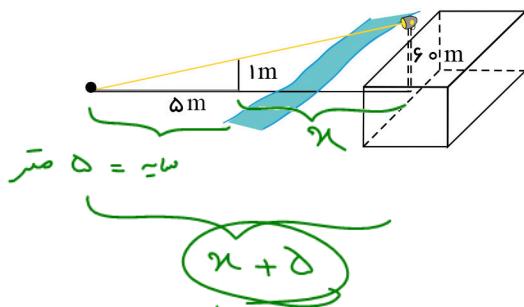
$$\left. \begin{array}{l} \hat{C}_1 = \hat{C}_2 \\ \hat{B} = \hat{D} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{jz}} \triangle ABC \sim \triangle CDE$$

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{CE} = \frac{\delta}{\lambda} = \frac{1}{2} \quad \textcircled{1}$$

$$\frac{S_{CDE}}{S_{ABC}} = (k)^2 = \frac{1}{4} = 9$$

$$\frac{P_{CDE}}{P_{ABC}} = k = 2$$

۱۳ - بر دیوار یک کمپ نظامی نورافکنی به ارتفاع ۶۰ متر (مانند شکل) قرار گرفته است. فردی که در طرف دیگر رودخانه است، می‌خواهد فاصله خود را تا پایه نورافکن محاسبه کند. برای این کار چوبی به طول متر را روی زمین قرار می‌دهد و مشاهده می‌کند که طول سایه چوب برابر ۵ متر است. فاصله این مرد تا پای نورافکن چقدر است؟



۱۴ - هر یک از حکم‌های کلی زیر را با یک مثال نقض رد کنید.

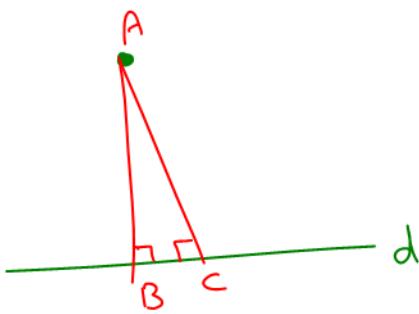
الف) هیچ عدد اول بزرگ‌تر از ۱۲۷ وجود ندارد.

ب) مساحت هر مثلث از مساحت هر مربع بیشتر است.

پ) در هر مثلث اندازه هر ضلع از اندازه هر ارتفاع بزرگ‌تر است.

ت) در هر مثلث میانه و عمودمنصف متناظر به هر ضلع بر هم منطبق هستند.

۱۵ - با برهان خلف ثابت کنید نمی‌توان از یک نقطه غیر واقع بر یک خط، دو خط عمود بر آن خط رسم کرد.



ی توانند دو مسیر : نقیض حکم
رسم کنند.

$$\triangle ABC: \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \hat{A} + 90^\circ + 90^\circ > 180^\circ$$

حکم اصلی اثبات شد.

۱۶ - قدر مطلق انحراف از میانگین داده‌هایی برابر با ۱، ۴، ۳، ۳، ۲، ۲، ۱، ۵ است. انحراف از معیار را به دست آورید.

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}$$

$$\sigma^2 = \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + 3^2 + 2^2 + 4^2 + 5^2}{7} = \frac{\sqrt{2}}{7} = 9$$

$$\sigma = \sqrt{9} = 3$$

۱۷ - درستی یا نادرستی جمله‌های زیر را مشخص کنید.

الف) اگر مقدار ثابت c از داده‌ها کم شود، انحراف معیار به اندازه \sqrt{c} کاهش می‌یابد.

ب) اگر مقدار ثابت c به داده‌ها اضافه شود، ضریب تغییرات بزرگ‌تر می‌شود.

پ) اگر مقدار ثابت c در داده‌ها ضرب شود، انحراف معیار $\frac{1}{c}$ برابر می‌شود.

ت) اگر مقدار ثابت c در داده‌ها ضرب شود، ضریب تغییر ثابت می‌ماند.

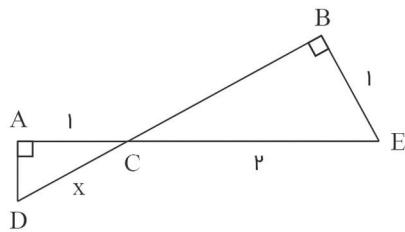
۱۸ - جدول زیر پول توجیبی (ده هزار ریال) هفتگی پنج دوست نزدیک مینا و مریم را نشان می‌دهد.

الف) میانگین و میانه پول توجیبی را برای دوستان مریم و مینا محاسبه کنید.

ب) انحراف معیار پول توجیبی را برای دوستان مریم و مینا محاسبه کنید.

پ) برنامه‌ریزی برای یک سفر یک روزه با دوستان برای مینا ساده‌تر است یا مریم؟

مینا	۲۳	۲۴	۲۵	۲۶	۲۷
مریم	۱۵	۲۰	۲۵	۳۰	۳۵



۱۹- در شکل زیر، دو زاویه‌ی A و B قائم هستند. مقدار x را بدست آورید.

۲۰- احتمال اینکه رویا در درس ریاضی قبول شود، دو برابر احتمال آن است که دوستش در این درس قبول شود. اگر احتمال اینکه حداقل یکی از آنها در درس ریاضی قبول شوند، برابر ۰,۶۲۵ باشد، رویا با چه احتمالی در این درس قبول خواهد شد؟

$$P(A) = ۰,۳x$$

$$P(B) = x$$

$$x_{\text{من}} = \frac{۳ + ۲}{۴} \quad / \quad \frac{\frac{۳}{۲}}{\Sigma} \times \quad \text{مسنون} \\ ۲x = ۳x + ۰,۶ \quad / \quad \text{مسنون}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \times P(B)$$

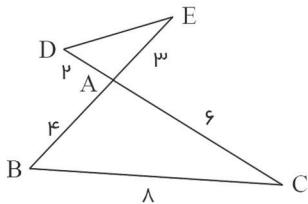
$$0,625 = ۳x + x - ۳x \times x$$

$$۲x^2 - ۳x + 0,625 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4(2)(-0,625)$$

$$\sqrt{\Delta} = ۲ \quad ۹ - ۸ = ۱$$

۲۱- در شکل روی روبرو طول پاره خط DE را بدست آورید.



۲۲- احتمال اینکه فرزندی در خانواده A با چشممانی به رنگ آبی متولد شود ۰,۴ درصد و احتمال اینکه فرزندی در خانواده B با چشممان آبی متولد شود

$$P(A) = ۰,۴ \longrightarrow P(A') = ۱ - P(A) = ۱ - ۰,۴ = ۰,۶$$

$$P(B) = ۰,۵$$

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = ۰,۴ \times ۰,۵ = ۰,۲$$

$$P(A' \cap B') = P(A') \times P(B') = ۰,۶ \times ۰,۵ = ۰,۳$$

درصد است. مطابقت احتمال آنکه:

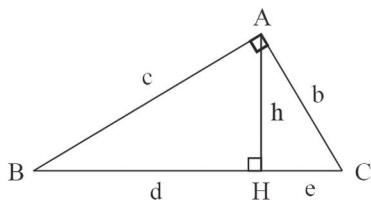
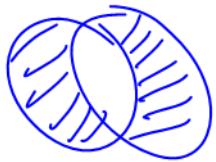
الف- هر دو نوزاد با چشممان به رنگ آبی متولد شوند.

ب- هر دو نوزاد با چشممانی به رنگ غیر از آبی متولد شوند.

پ- فقط یکی از نوزادان با چشممانی به رنگ آبی متولد شوند.

$$P(A \Delta B) = P(A \cup B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B) =$$

$$0.4 + 0.7 - 0.128 = 0.972$$



۲۳- در مثلث قائم‌الزاویه‌ی روبرو مقادیر خواسته شده را بدست آورید.

$$h = 5, d = 4, e = ?, c = ?$$

۲۴- برای دو پیشامد مستقل A و B ، اگر $n(A) = 12$ و $n(B) = 6$ و پیشامد این‌که حداقل یکی از این دو پیشامد A و B روی دهد ۱۶ عضو دارد.
فضای نمونه‌ای چند عضو دارد؟

۲۵- احتمال تولد فرزند پسر در یک خانواده $\frac{1}{4}$ است. چقدر احتمال دارد که فرزند اول و دوم این خانواده هم جنس باشند؟

$$P(A) = \frac{1}{4}$$

دویست و امیلیتر یا دویصد و هشتاد

$$\frac{3}{4} \times \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{9}{16} + \frac{1}{16} = \frac{10}{16} = \frac{5}{8} = 62.5\%$$

۲۶- احتمال وقوع یک بیماری در یک جامعه آماری برابر ۱۲٪ و احتمال این‌که فردی این بیماری را بگیرد و درمان شود برابر ۰.۱ درصد است. اگر فردی این بیماری را بگیرد، احتمال درمان او چقدر است؟

۲۷- اگر انحراف معيار داده های x_1, x_2, \dots, x_N را محاسبه کنید.

$$\frac{1}{4}x_1 + 5, -\frac{1}{4}x_2 + 5, \dots, -\frac{1}{4}x_N + 5$$

۲۸- اگر در یک فضای نمونه ای S داشته باشیم $P(A \cup B) = 0,7$ و $P(A|B') = 0,4$ آنگاه $P(B)$ را بدست اورید.

۲۹- اگر میانگین ۹ داده آماری برابر b و میانگین ۶ داده دیگر برابر $2b$ و میانگین این ۱۵ داده آماری، ۲۱ باشد، انحراف معيار اين جامعه آماری را به دست آورید.

۳۰- اگر $P(A - B)$ باشد، مقدار $P(A|B')$ را بدست آورید.

۳۱- یک سکه را سه بار پرتاب می کنیم. احتمال رو آمدن سکه در پرتاب سوم را به دست آورید، به شرط اینکه در دو پرتاب اول و دوم پشت ظاهر شده باشد.

۳۲- در یک جامعه آماری، انحراف ۷ تا از داده ها از میانگین برابر با ۴، انحراف ۵ تا از داده ها از میانگین برابر ۲ و انحراف x تا از داده ها از میانگین برابر ۳ است. واریانس این جامعه آماری را بدست آورید.

۳۳- ترکیبی از ۴ ماده شیمیایی داریم که دو تا از آنها مواد A و B هستند. احتمال واکنش نشان دادن ماده A , $\frac{1}{5}$ و احتمال واکنش نشان دادن ماده B , $\frac{1}{4}$

است. اگر ماده A واکنش نشان دهد، احتمال واکنش نشان دادن ماده B , $\frac{1}{4}$ خواهد شد. با چه احتمالی، حداقل یکی از مواد A یا B واکنش نشان خواهد داد؟

۳۴- واریانس داده‌های ۱۹, ۲۶, ۲۴, ۲۲, ۲۰ را بدست آورید.

۳۵- اعداد ۱۸, ۲۹, ۳۴ به ترتیب چارک اول، میانه و چارک سوم داده متمایز هستند.

الف- چه تعداد از داده‌ها بیشتر از ۳۴ است؟

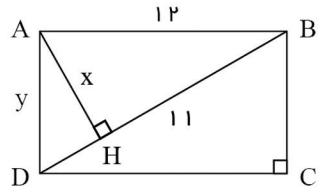
ب- چه تعداد از داده‌ها کمتر از ۱۸ است؟

پ- چه تعداد داده بین ۱۸ و ۳۴ است؟

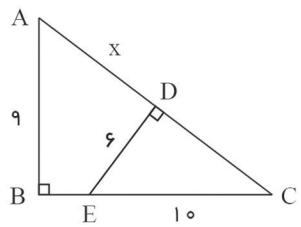
۳۶- اگر $P(A|B) = \frac{1}{4}$ و $P(B) = \frac{1}{3}$ و $P(A) = \frac{1}{2}$ باشد، آنگاه $P(A \cup B)$ را بدست آورید.

۳۷- اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه S باشند و داشته باشیم $P(A \cup B) = \frac{1}{4}$ و $P(A') = \frac{1}{3}$ و $P(B) = \frac{1}{4}$ ، مقدار $P(A \cap B)$ را بدست آورید.

۳۸- در $\triangle ABC$ داده آماری میانگین 3 و انحراف معیار 1 , 2 محاسبه شده است. اگر به تمام داده ها 9 واحد اضافه شود، ضریب تغییرات داده های جدید را بدست آورید.



۳۹- در مستطیل مقابل مقادیر x و y را بدست آورید.



۴۰- در شکل رویرو مقدار x را بدست آورید.