ریاضیات کنکور

بخش نخست

توان، ریشه، رادیکال، عبارات جبری، اتحاد، تجزیه، تابع، قدرمطلق و جزء صحیح

مدرس: دکتر سامان سلامیان

توان، ریشه، رادیکال، عبارات جبری، اتحاد، تجزیه، تابع، قدرمطلق و جزء صحیح

$۲^۵ \times ۲^۳ = ۲^۸ = ۲۵۶$ $\quad \frac{۲^۵}{۲^۲} = ۲^{۵-۲=۳} = ۸$ $\quad ۲^۵\, ۳^۵ = ۶^۵$ $\quad \frac{۲^۵}{۳^۵} = (\frac{۲}{۳})^۵$

روابط و قضیه‌ها

۱– روابط توان:

$\frac{a^m}{b^m} = (\frac{a}{b})^m$	$a^m \times b^m = (ab)^m$	$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$a^m \times a^n = a^{m+n}$
$(۲^۲)^۳ = ۲^۶ = ۶۴ \neq ۲^{۲^۳} = ۲^۸ = ۲۵۶$	$(a^m)^n = a^{mn}$	$a^{-m} = \frac{۱}{a^m}$	$a^{\circ} = ۱$ هر عدد به توان صفر ۱ $a \neq ۰$
زوج $n \Rightarrow (-a)^n = a^n$ $\quad (-۲)^۴ = ۱۶$		فرد $n \Rightarrow (-a)^n = -a^n$ $\quad (-۲)^۳ = -۸$	

اگر توان عدد غیرصحیح باشد، پایه را مثبت در نظر می‌گیریم.
$a^{\frac{۱}{۲}} \longrightarrow a > ۰$

هر عدد به توان منفی برابر است با عکس همان عدد به همان توان ولی مثبت
$۲^{-۳} = (\frac{۱}{۲})^۳ = \frac{۱}{۲^۳} = \frac{۱}{۸}$

۲– رادیکال:

توان کسری: عدد $\sqrt[n]{a^m}$ وقتی a مثبت باشد را به صورت $a^{\frac{m}{n}}$ می‌نویسیم.

$\sqrt{۲}\sqrt{۳} = \sqrt{۶}$ $\quad \frac{\sqrt[۳]{۸}}{\sqrt[۳]{۲}} = \sqrt[۳]{\frac{۸}{۲}} = \sqrt[۳]{۴}$

$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$	$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nk]{a^{mk}}$	$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$	$\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$
$a\sqrt{b} = \begin{cases} \sqrt{a^۲ b} & a > \circ \\ -\sqrt{a^۲ b} & a < \circ \end{cases}$		فرد $n \Rightarrow \sqrt[n]{a^n} = a$ زوج $n \Rightarrow \sqrt[n]{a^n} = \|a\|$	

مهم

منظور از ریشهٔ دوم ۹، دو عدد ۳+ و ۳− است. ولی منظور از $\sqrt{۹}$ فقط ۳+ هست.

$\sqrt[۵]{۲^۳} = ۲^{\frac{۳}{۵}}$ $\quad \sqrt[۳]{۷} = \sqrt[۶]{۷^۲} = \sqrt[۶]{۴۹}$

توجه کنید که $(\sqrt{x})^۲ = x$ و x حتماً نامنفی است ولی $y = \sqrt{x^۲} = |x|$

۳– اتحادها:

مکعب ۲ جمله $\begin{cases} (a+b)^۳ = a^۳ + ۳a^۲b + ۳ab^۲ + b^۳ \\ (a-b)^۳ = a^۳ - ۳a^۲b + ۳ab^۲ - b^۳ \end{cases}$	مربع ۲ جمله $\begin{cases} (a+b)^۲ = a^۲ + ۲ab + b^۲ \\ (a-b)^۲ = a^۲ - ۲ab + b^۲ \end{cases}$
چاق و لاغر $\begin{cases} a^۳ + b^۳ = (a+b)(a^۲ - ab + b^۲) \\ a^۳ - b^۳ = (a-b)(a^۲ + ab + b^۲) \end{cases}$	$\begin{cases} a+b = S \\ ab = P \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^۲ + b^۲ = S^۲ - ۲P \\ a^۳ + b^۳ = S^۳ - ۳PS \end{cases}$
یک جمله مشترک $(x+a)(x+b) = x^۲ + (a+b)x + ab$	مزدوج $(a+b)(a-b) = a^۲ - b^۲$
مربع ۳ جمله $(a+b+c)^۲ = a^۲ + b^۲ + c^۲ + ۲ab + ۲ac + ۲bc$	

دسته‌بندی تست‌ها:

۱- ساده‌کردن عبارت‌های توانی و رادیکالی:

تست ۱: اگر $A=\frac{\sqrt[3]{18}}{\sqrt{6}}\times 12^{\frac{1}{12}}$ باشد، کدام درست است؟

۱) $A^4=2$ ۲) $A^4=3$ ۳) $A^6=2$ ۴) $A^6=3$

۲- استفاده از اتحادها:

تست ۲: اگر $x+y=11$ و $x^3+y^3=407$ باشد، حاصل xy برابر کدام است؟

۱) ۲۴ ۲) ۲۸ ۳) ۳۰ ۴) ۳۳

تست ۳: اگر $f(x)=\sqrt[3]{8x^3+ax^2+54x+b}$ یک تابع خطی باشد، مقدار $a-b$ کدام است؟

۱) ۹- ۲) ۸- ۳) ۸ ۴) ۹

۳- کار کردن با عبارت‌های $x\pm\frac{1}{x}$: معمولاً با توان ۲ یا ۳ رساندن و یا استفاده از اتحادهای S^2-2P و S^3-3PS مسئله حل می‌شود.

تست ۴: اگر $\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}=3$ باشد، مقدار مثبت $x-\frac{1}{x}$ کدام است؟

۱) $3\sqrt{5}$ ۲) $5\sqrt{3}$ ۳) $3\sqrt{7}$ ۴) $7\sqrt{3}$

$|□|$ $\sqrt[۲k]{□}$ $(□)^{۲k}$

فرجه زوج

۴- مجموع چند عبارت نامنفی (مثل عبارت‌های با توان زوج، رادیکال و قدرمطلق) وقتی صفر است که همگی صفر باشند.

تست ۵: اگر $۴a^{۲}+۲b^{۲}+۴=۴b(a+۱)$ باشد، حاصل $a+b$ کدام است؟

۱) ۱   ۲) ۲   ۳) ۳   ۴) ۴

اینستاگرام @salamianriazi

تلگرام

سامان سلامیان و سایت

www.samansalamian.ir

نام و نام خانوادگی

mob

۵- گویا کردن رادیکال‌ها:

تست ۶: اگر $b+۳=a-۱=۲+\sqrt{۷}$ باشد، حاصل $\sqrt{\frac{۱}{a}+\frac{۳}{b}}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) ۲   ۳) $\sqrt[۴]{۷}$ ۴) $۲\sqrt[۴]{۷}$

تست ۷: اگر $\sqrt[۳]{a}=\frac{\sqrt[۳]{۳}+\sqrt[۳]{۲}}{\sqrt[۳]{۹}+\sqrt[۳]{۶}+\sqrt[۳]{۴}}+\sqrt{۲\sqrt[۳]{۲}}$ باشد، مقدار a برابر کدام است؟

۱) ۹   ۲) ۸   ۳) ۳   ۴) ۶

۶- رادیکال‌های مرکب:

۱) مربع‌کردن عبارت زیر رادیکال

$$\sqrt{۱۷-۱۲\sqrt{۲}} \quad \begin{cases} a^{۲}+b^{۲}=۱۷ \\ ۲ab=۱۲\sqrt{۲} \end{cases} \Rightarrow \sqrt{(۳-۲\sqrt{۲})^{۲}}=|۳-۲\sqrt{۲}|=۳-۲\sqrt{۲}$$

۲) دو برابر کردن صورت و مخرج

$$\sqrt{۴+\sqrt{۱۵}}=\sqrt{\frac{۸+۲\sqrt{۱۵}}{۲}}=\sqrt{\frac{(\sqrt{۵}+\sqrt{۳})^{۲}}{۲}}=\frac{\sqrt{۵}+\sqrt{۳}}{\sqrt{۲}}$$

۳) به توان ۲ رساندن در عبارت‌های متقارن

$$A=\sqrt{۳+\sqrt{۵}}-\sqrt{۳-\sqrt{۵}} \Rightarrow A^{۲}=(۳+\sqrt{۵})+(۳-\sqrt{۵})-۲\sqrt{۹-۵}=۲ \xrightarrow{A>۰} A=\sqrt{۲}$$

تست ۸: اگر $\sqrt{a} = \sqrt{۳} + ۲\sqrt{۲+\sqrt{۳}} + \sqrt{۱۳-۴\sqrt{۳}} \cdot \sqrt{۲}$ باشد، a کدام است؟

۱) ۲۴ ۲) ۳۲ ۳) ۴۸ ۴) ۵۴

تست ۹: حاصل عبارت $\dfrac{\sqrt{۵+\sqrt{۲۱}} - \sqrt{۵-\sqrt{۲۱}}}{\sqrt{۲}}$ برابر کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\sqrt{۳}$ ۴) $\sqrt{۷}$

۷- به عبارت‌های رادیکالی مزدوج توجه کنید، به خصوص وقتی ضرب آن‌ها ۱ باشد، وارون یکدیگرند:

$$(۲-\sqrt{۳})(۲+\sqrt{۳}) = ۴-۳ = ۱ \Rightarrow (۲-\sqrt{۳}) = (۲+\sqrt{۳})^{-۱} \;,\; (۲+\sqrt{۳}) = (۲-\sqrt{۳})^{-۱}$$

تست ۱۰: اگر $\sqrt[n]{۷-۴\sqrt{۳}} = \sqrt[۱۲]{۲+\sqrt{۳}} \cdot \sqrt[۳]{۲-\sqrt{۳}}$، مقدار n کدام است؟

۱) ۱۸ ۲) ۸ ۳) ۶ ۴) ۴

تست ۱۱: اگر $\sqrt{x+۲} - \sqrt{x-۴} = ۲$، مقدار $\sqrt{x+۲} + \sqrt{x-۴}$ کدام است؟

۱) ۱/۵ ۲) ۲/۵ ۳) ۳ ۴) ۳/۵

۸- تجزیه عبارت‌های جبری:

۱) استفاده از اتحاد جمله مشترک

$$x^{۲}\underbrace{-۷}_{a+b}x+\underbrace{۱۲}_{ab}=(x-۳)(x-۴)$$

۲) حل معادلهٔ درجه دوم به کمک فرمول

$$۲x^{۲}+۵x-۳: x=\frac{-۵\pm\sqrt{۲۵+۲۴}}{۴}=\frac{۱}{۲},-۳ \Rightarrow ۲(x-\frac{۱}{۲})(x-(-۳))=(۲x-۱)(x+۳)$$

۳) حدس زدن ریشه و سپس تقسیم یا جور کردن ضرایب (به ویژه در عبارت‌های درجه سوم و بالاتر)

$x^{۳}-۳x+۲$ (حدس ریشه: $x=۱$) $x^{۳}-۳x^{۲}+۲=(x-۱)(x^{۲}+x-۲)$ (پرانتز دوم: تقسیم یا جور کردن ضرایب)

$x^{۳}-۳x+۲=(x-۱)(x^{۲}+x-۲)$ (تجزیهٔ پرانتز دوم) $(x-۱)(x-۱)(x+۲)=(x-۱)^{۲}(x+۲)$

۴) مربع کامل کردن

$$a^{۴}+۴b^{۴}=(a^{۲}+۲b^{۲})^{۲}-۴a^{۲}b^{۲}=(a^{۲}+۲b^{۲})^{۲}-(۲ab)^{۲}=(a^{۲}+۲b^{۲}-۲ab)(a^{۲}+۲b^{۲}+۲ab)$$

۵) دسته‌بندی

$$x^{۳}-a-x^{۲}+ax=(x^{۳}-x^{۲})+(-a+ax)=x^{۲}(x-۱)+a(x-۱)=(x-۱)(x^{۲}+a)$$

تست ۱۲: کدام عامل در تجزیهٔ $(x^{۲}-۴x)^{۲}-۲(x^{۲}-۴x)-۱۵$ وجود ندارد؟

۱) $x-۱$ ۲) $x-۲$ ۳) $x-۳$ ۴) $x-۵$

تست ۱۳: عبارت $x^{۶}+۴x^{۲}-۵$ بر کدام‌یک از عبارات زیر بخش‌پذیر است؟

۱) $x^{۲}-x+۵$ ۲) $x^{۲}+x+۵$ ۳) $x^{۴}-x^{۲}+۵$ ۴) $x^{۴}+x^{۲}+۵$

۹- ساده‌کردن عبارت‌های جبری: در مجموع چند کسر حتماً مخرج‌ها را تجزیه کنید و «ک.م.م» آن‌ها را به عنوان مخرج مشترک در نظر بگیرید.

تست ۱۴: اگر $\frac{a}{x^{۲}+۳x+۲}=\frac{۱}{x^{۲}-x}+\frac{۱}{x^{۲}+x}-\frac{۳}{x^{۲}+x-۲}$ باشد، a کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۱- ۴) ۲-

زوج مرتب

زوج مرتب به دوتایی (a,b) گفته می‌شود که a را مؤلفه اول و b را مؤلفه دوم می‌نامیم. دقت کنید که در زوج مرتب، ترتیب مؤلفه‌ها مهم است، یعنی زوج مرتب (a,b) با زوج مرتب (b,a) فرق دارد.

هر زوج مرتب، یک نقطه را در صفحه مشخص می‌کند و دو زوج مرتب، وقتی با هم برابرند که مؤلفه‌های اولشان با هم و مؤلفه‌های دومشان نیز با هم برابر باشند.

$$(a,b)=(c,d) \Leftrightarrow a=c\,,\,b=d$$

تست ۱۵: اگر دو زوج مرتب $(x-y,۱)$ و $(۳,۲x+۳y)$ یک نقطه را در صفحه مشخص کنند، حاصل $۳x+۲y$ کدام است؟ ۱

۱) ۴　　۲) ۵　　۳) ۶　　۴) ۹

$$\begin{cases} x-y=۳ \\ ۲x+۳y=۱ \end{cases}$$
$$+$$
$$۳x+۲y=۴$$

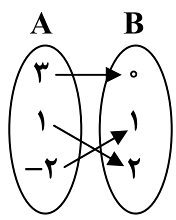
رابطه

برای نشان دادن ارتباط و وابستگی بین دو مجموعه از رابطه استفاده می‌شود و آن را معمولاً با حرف R نشان می‌دهند. رابطه‌ها را می‌توان به شکل زوج مرتب، جدول، نمودار ون و نمودار دکارتی نشان داد.

الف) $R=\{(۱,۲),(۳,۰),(-۲,۱)\}$　(زوج مرتب)

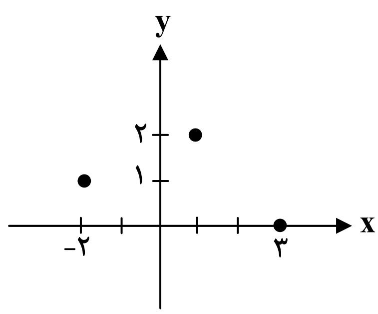
ب) (جدول)

(مؤلفه اول) x	۱	۳	−۲
(مؤلفه دوم) y	۲	۰	۱

پ) 

(مؤلفه اول)　(مؤلفه دوم)

(نمودار ون)

ت) 

(نمودار دکارتی یا نمایش هندسی)

حل با جدول نظام دار

٤ تست ۱۶: رابطه‌ی $R=\{(x,y)\mid x,y\in N, 2x+y\le 7\}$ ، دارای چند زوج مرتب است؟ تغییر منظم (سراسری ریاضی خارج)

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۹

$\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1)\}$

۱ تست ۱۷: رابطه‌ی $R=\{(x,y)\mid x,y\in \mathbb{Z}, |x|+|y|=2\}$ ، چند زوج مرتب دارد؟ (سراسری ریاضی)

۱) ۸ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۴

$\{(1,1),(-1,-1),(1,-1),(2,0),(-2,0),(-1,1),(0,2),(0,-2)\}$

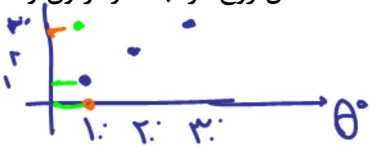
حرف اصلی (ت ب ع) تابع اسم فاعل از تبع یعنی پیرو، دنباله‌رو و تبعیت کننده است. x متغیر مستقل است و اول تعیین کننده ولی y به دنبال x و تابع x است و دنباله‌رو x است

تابع

گفتیم که رابطه‌ها را می‌توان به شکل‌های مختلف مثل زوج مرتب، نمودار ون و ... نشان داد. بدانید که تابع را هم می‌توانیم به همان شکل‌ها نشان دهیم. با هم ببینیم:

$y=f(x)$ طول نقطه x

y تابعی از x است



۱) تعریف تابع از نظر زوج‌های مرتب

تابع مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب است که در آن مؤلفه‌های اول متمایز باشند، پس اگر دو زوج مرتب پیدا شوند که مؤلفه‌های اول مساوی داشتند، آن رابطه تابع نیست، مگر این‌که مؤلفه‌های دوم آن زوج مرتب‌ها نیز برابر باشند:

اگر $(x,y_1)\in f\,,(x,y_2)\in f\Rightarrow y_1=y_2$

مثال ۱۸: کدام‌یک از رابطه‌های زیر تابع نیست؟ f_2 زیرا در f_2 عدد $x=1$ به دو تا y رابطه دارد و تابع نیست

$f_1=\{(0,1),(-2,3),(4,2)\}$ $\qquad$ $f_2=\{(1,2),(3,4),(1,3)\}$

$f_3=\{(2,3),(1,-4),(2,\sqrt{9})\}$ $\qquad$ $f_4=\{(-1,2)\}$

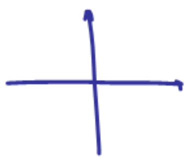
$f_5=\{\ \}$ $\qquad$ $f_6=\{(1,2),(2,2),(1,5)\}$

در مجموعه‌ها تکرار اعضا مهم نیست عیب ندارد که ۲ تا (۱,۲) دارد

A(-1,2) یک نقطه است و یک نقطه تابع است.

$f_4=\{(-1,2)\}$

∅ تابع است



$f_5=\{\ \}=\varnothing$

شکلی تابع است که هر خط موازی محور y ها (قائم) آن را حداکثر یک بار قطع کند (یا قطع نکند یا یک بار قطع کند) و امثال ∅ توسط خط قائم زنیم تابع است.

فرض سوال $a>0$

$\boxed{a=1} \leftarrow a>0 \quad a=\pm 1 \leftarrow a^2=1$

تمرینی

تست ۱۹: اگر رابطه‌ی $f=\{(a,1),(2,a-b),(b-a,a^2),(1,b^2),(b,a+b),(b-a,1)\}$ ، $(a>0)$ تابع باشد، مقدار $a.b$ کدام است؟

۱) -2 ۲) -1 ۳) 1 ۴) 2

برای این که تابع باشد می‌بینیم $b-a$ هم با a^2 و هم با ۱ در رابطه است پس باید $a^2=1$ ، $a=\pm 1$

$a>0$: $\boxed{a=1} \rightarrow f=\{(1,1),(2,1-b),(b-1,1),(1,b^2),(b,1+b),(b-1,1)\}$

می‌بینیم عدد $x=1$ هم با ۱ هم با b^2 در رابطه است پس $b^2=1$ و $b=1$ یا $b=-1$ حال $b=1$ را امتحان کنیم

$b=1 \rightarrow \{(1,1),(2,0),(0,1),(1,1),(1,2),(0,1)\}$ $x=1$ با ۲ تای مختلف در رابطه است پس تابع نیست

$\boxed{b=-1}$

$ab=-1$

تست ۲۰: اگر رابطهٔ $f=\{(1,n),(m,n+2),(1,m^2-2),(m,n^2)\}$ یک تابع باشد، آن‌گاه کدام گزینه نمی‌تواند صحیح باشد؟

۱) $mn=-1$ ۲) $mn=1$ ۳) $mn=-4$ ۴) $mn=4$

پاسخ: گزینهٔ «۱» ـ چون عضو اول زوج‌های $(1,n)$ و $(1,m^2-2)$ برابرند، باید عضو دوم آن‌ها نیز برابر باشند، یعنی باید $n=m^2-2$ ، به همین ترتیب در زوج‌های (m,n^2) و $(m,n+2)$.

$$n^2=n+2 \Rightarrow \begin{cases} n=-1 \Rightarrow m=\pm 1 \\ n=2 \Rightarrow m=\pm 2 \end{cases}$$

$n^2-n-2=0$

حالت خاص: $ax^2+bx+c=0$

$a+b+c=0 \rightarrow x_1=1 , x_2=\frac{c}{a}$

$a+c=b \rightarrow x_1=-1 , x_2=-\frac{c}{a}$

$n=-1 \ , \ m=1 \Rightarrow \{(1,-1),(1,1)\}$ تابع نیست

$n=-1 \ , \ m=-1 \Rightarrow \{(1,-1),(-1,1)\}$ تابع است $\Rightarrow mn=1$

$n=2 \ , \ m=2 \Rightarrow \{(1,2),(2,4)\}$ تابع است $\Rightarrow mn=4$

$n=2 \ , \ m=-2 \Rightarrow \{(1,2),(-2,4)\}$ تابع است $\Rightarrow mn=-4$

۲) تعریف تابع از نظر نمودار ون

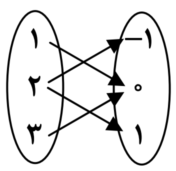
یک رابطه بین مجموعه A و مجموعه B که با نمودار ون نمایش داده می‌شود، وقتی تابع است که از هر مؤلفه مجموعه A (مؤلفه اول) فقط و فقط یک فلش خارج شود نه بیشتر و همه اعضای A به بازی گرفته شوند و هیچ عضوی از A نباشد که از آن فلش خارج نشود A همان دامنه‌ی تابع است.

$Domain = D_f =$ دامنه $= A$

$B =$ هم دامنه

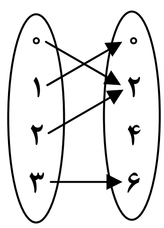
$R_f =$ برد

R: Range



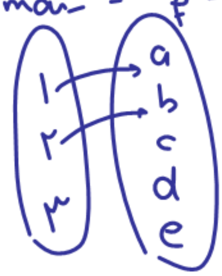
A B

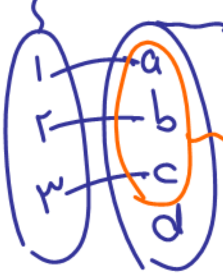
تابع نیست



A B

تابع است





چون از ۳ دو فلش خارج شده تابع نیست

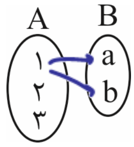
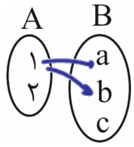
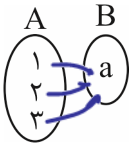
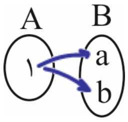
$f: A \rightarrow B$ از A به B

تعریف می‌شود A دامنه و B هم دامنه

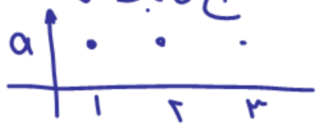
نکته: همیشه برد کوچکتر یا مساوی B است یعنی

$R_f \subseteq B$ یعنی برد می‌تواند همان مجموعه B یا زیرمجموعه آن باشد

۳ تست ۲۱: در گزینه‌های زیر اگر از تمام اعضای **A** به اعضای **B** پیکان رسم کنیم، کدام گزینه همیشه نشان‌دهنده‌ی یک تابع است؟

۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

تابع هست
تابع ثابت است



نکته تست ۲۲: اگر A، m عضوی و B، n عضوی باشد،
$f: A \to B$
توابع از A به B، n^m است.

تست ۲۲: از مجموعه‌ی $A=\{1,2,3,4\}$ چند تابع به مجموعه‌ی $B=\{1,2,3\}$ می‌توانیم تعریف کنیم به شرطی که $f(1)=1$ باشد؟

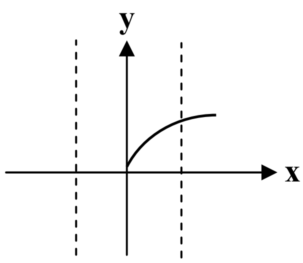
۱) ۱۶ ۲) ۶۴ ۳) ۲۷ ۴) ۸۱

A: ۱، ۲، ۳، ۴ B: ۱، ۲، ۳

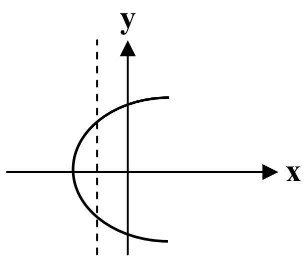
در حالت کلی $3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^4 = 81$ حالت
برای هرکدام از اعضای A به تعداد اعضای B، حالت داریم.
یک حالت $\times 3 \times 3 \times 3 = 3^3 = 27$ جواب تست
$x=1$ فقط می‌تواند با $y=1$ رابطه دهد. $f(1)=1$

۳) تعریف تابع از نظر نمودار دکارتی (هندسی)

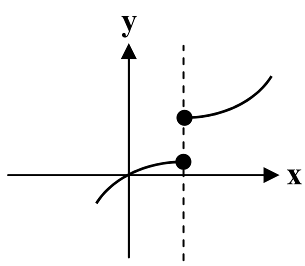
نمودار دکارتی وقتی نشان‌دهنده یک تابع است که هر خط عمودی (موازی محور **y**ها) نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کند، نه بیشتر.



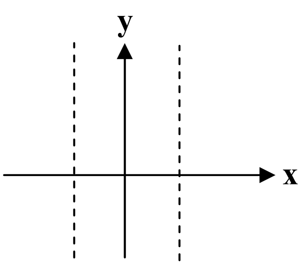
تابع است.
چون هر خط به موازات محور **y**، حداکثر در یک نقطه نمودار را قطع می‌کند.



تابع نیست.
چون خطی به موازات محور **y** در بیش از یک نقطه، نمودار را قطع می‌کند.

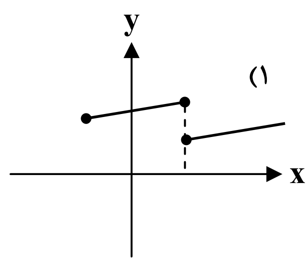
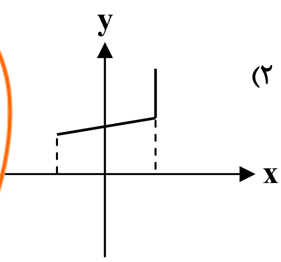
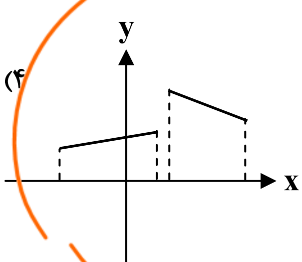
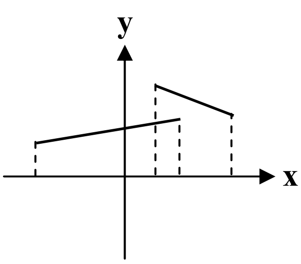


تابع نیست.
چون خطی به موازات محور **y** در بیش از یک نقطه نمودار را قطع می‌کند.



تابع است
(تهی) چون هر خطی به موازات محور **y**ها، در هیچ جا چیزی را قطع نمی‌کند.
تهی یک تابع است.

تست ۲۳: کدام شکل نمودار یک تابع است؟

۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

۴) تعریف تابع از نظر ضابطه

ضابطه $y = f(x)$ وقتی نشان‌دهنده‌ی یک تابع است که به ازای هر x حداکثر یک y به‌دست آید.

توی این مدل از سوال‌ها xای رو انتخاب کن به ازای اون مشکوک به تولید چند تا y بشی. در واقع برای اثبات تابع نبودن از مثال نقض استفاده می‌کنیم.

۱- اگر عبارت yدار توی قدرمطلق و یا درون پرانتز توان زوج بود کاری کن عبارت قدرمطلقی و یا توان زوج با یک عدد مثبت برابر بشه:

الف) $|2y-1|+x-2=0 \xrightarrow{x=0} |2y-1|=2$ ؛ $2y-1=2 \to y=\frac{3}{2}$ ؛ $2y-1=-2 \to y=-\frac{1}{2}$

ب) $(y-1)^2+x^2=1 \xrightarrow{x=0} (y-1)^2=1 \to \begin{cases} y-1=1 \to y=2 \\ y-1=-1 \to y=0 \end{cases}$

(الف) و (ب) تابع نیستند زیرا یک x با ۲ تا y دارد

۲- وقتی چند y با توان‌های فرد و مختلف کنار هم هستند، xای را انتخاب کنید که سمت راست تساوی صفر بشه:

پ) $y^3-y=2x-1 \xrightarrow{x=\frac{1}{2}} y^3-y=0 \to y(y^2-1)=0 \to y=0$ یا 1 یا -1

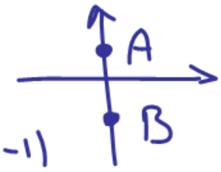
یک x مثل $\frac{1}{2}$ با سه تا y ارتباط دارد بنابراین تابع نیست

۳- اگر جمع چند عبارت نامنفی برابر صفر بشه، باید تک‌تک آن‌ها را برابر صفر قرار دهیم.

ت) $(y-1)^2+x^2=0 \to \begin{matrix} y-1=0 \\ x=0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} y=1 \\ x=0 \end{matrix} \quad A(0,1)$ یک نقطه تابع است

ث) $(y^2-1)^2+x^2=0 \to \begin{cases} y^2-1=0 \to y^2=1 \to y=1 \text{ یا } y=-1 \\ x^2=0 \to x=0 \end{cases} \quad A(0,1) \quad B(0,-1)$

یک x دو تا y دارد تابع نیست



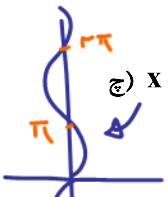
ج) $x^2+y^4+2y^3+y^2+4x+4=0 \to (x^2+4x+4)+y^2(y^2+2y+1)=0$

$(x+2)^2+y^2(y+1)^2=0 \to (x+2)^2+(y(y+1))^2=0 \to \begin{cases} x+2=0 \to x=-2 \\ y(y+1)=0 \quad y=0 \text{ یا } -1 \end{cases} \quad A(-2,0) \quad B(-2,-1)$

یک x دو y دارد تابع نیست

معمولاً روابطی که در آن‌ها $|y|$، y^{2n} یا $[y]$ و یا $\sin y$، $\cos y$، $\tan y$ و یا $\cot y$ دیده می‌شه تابع نیستند.

چ) $x=\sin y \xrightarrow{x=0} \sin y=0 \quad x=0, \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi, \ldots$



می‌بینیم یک x بی‌شمار y دارد تابع نیست

ح) $[y]+x^2-1=0 \xrightarrow{x=0} [y]=1 \to 1 \le y < 2$ ؛ $[1.3]=1$ ، $[1.9]=1$

یک x بی‌شمار y دارد پس تابع نیست

نکته: تابع هایی مثل $y=3^x$ یا $y=(\frac{1}{3})^x$ که متغیرش در نما (توان) هست تابع نمایی نام دارد که همواره مثبت و نمودارش بالای محور x هست و هرگز به محور xها برخورد نمی‌کنند

۴- اگر جمع چند عبارت نامنفی و یا چند عبارت همواره مثبت برابر یک عدد منفی بشه به رابطه‌ای برخورد کردیم کـه بیـانگر تهـی اسـت و می‌دانیم تهی یک تابع است.

خ) $\underbrace{|y|+3^x}_{\text{مثبت}}=-1$

در مورد (خ) و (د) طرف چپ تساوی یک عبارت مثبته و نمی‌تواند برابر منفی یک باشد. هیچ زوج مرتب (x,y) در این دو رابطه صدق نمی‌کند

د) $\underbrace{\sqrt{x-1}+y^2}_{\text{مثبت}}=-1$

پس مجموعه جواب $\varnothing$ و تابع است.

تست ۲۴: کدام رابطه یک تابع است؟

۱) $y^3-3y^2+x=0$ ۲) $y+y^3=x^3+1$ ۳) $|y-1|+x=0$ ۴) $xy^2-x=1$

گزینه‌های ۱ و ۳ و ۴ رو تحلیل می‌کنیم و ثابت می‌کنیم که به ازای یک x بیش از یک مقدار واسه y بدست میاد پس تابع نیستن.

$$1)\ y^3-3y^2+x=0 \xrightarrow{x=0} y^3-3y^2=0 \Rightarrow y^2(y-3)=0 \Rightarrow \begin{cases} y^2=0 \Rightarrow y=0 \\ y-3=0 \Rightarrow y=3 \end{cases}$$

$$3)\ |y-1|+x=0 \xrightarrow{x=-1} |y-1|-1=0 \Rightarrow |y-1|=1 \Rightarrow y-1=\pm 1 \Rightarrow y=2\,,\,y=0$$

$$4)\ xy^2-x=1 \xrightarrow{x=1} y^2-1=1 \Rightarrow y^2=2 \Rightarrow y=\pm\sqrt{2}$$

$x=1 \longrightarrow y^2-1=1 \longrightarrow y^2=2 \longrightarrow y=\pm\sqrt{2}$

نامعادله‌ها

تعیین علامت

یکی از روش‌های اصلی حل نامعادله‌ها، تعیین علامت عبارت‌های جبری است. برای تعیین علامت یک عبارت جبری (به هر شکلی که باشد)، کارهای زیر را انجام می‌دهیم:

الف) ریشه‌ی عبارت‌ها را (چه در صورت و چه در مخرج) پیدا می‌کنیم.

ب) مرتبه‌ی ریشه‌ها را تعیین می‌کنیم.

پ) ریشه‌ها را به ترتیب در جدول تعیین علامت می‌نویسیم و ریشه‌های با مرتبه‌ی زوج را مشخص می‌نیم (ما در این‌جا برای مشخص‌کردنشان، بالایشان یک * می‌گذاریم).

ت) عبارت در ریشه‌های صورت برابر صفر و در ریشه‌های مخرج تعریف‌نشده است. (بعضی‌ها روی خط ریشه‌های مخرج می‌نویسند ت.ن (تعریف‌نشده) ولی ما بر اساس آن‌چه متداول شده (ولی درست نیست) نماد ∞ می‌گذاریم.)

ث) علامت ضریب بزرگ‌ترین توان x را در صورت (بعد از ضرب‌کردن عامل‌ها) و علامت ضریب بزرگ‌ترین توان x را در مخرج، در هم ضرب می‌کنیم و نتیجه را می‌گذاریم توی اولین خانه‌ی سمت راست جدول.

ج) به سمت چپ حرکت می‌کنیم و با عبور از هر ریشه‌ی مرتبه‌ی فرد، علامت را عوض می‌کنیم؛ ولی با عبور از ریشه‌ی مرتبه‌ی زوج علامت را عوض نمی‌کنیم.

چ) ریشه‌ی قدرمطلق مثل ریشه‌ی مرتبه‌ی زوج عمل می‌کند.

برای حل یک نامعادله با روش تعیین علامت، اول همه‌ی اجزا را می‌آوریم یک‌طرف تا به یک نامعادله به شکل $A>0$ یا $A<0$ برسیم و سپس عبارت A را تعیین علامت می‌کنیم و با توجه به جهت نامعادله، مجموعه جواب را انتخاب می‌کنیم.

تست ۲۵: مجموعه جواب نامعادله‌ی $\frac{x+6}{x+2} - \frac{x+1}{x-1} > 1$، شامل چند عدد صحیح است؟

۱) هیچ ۲) یک ۳) دو ۴) بی‌شمار

پاسخ: گزینه‌ی «۳» ـ اول همه‌ی عوامل را می‌آوریم یک‌طرف و مخرج مشترک می‌گیریم:

$$\frac{x+1}{x-1} - \frac{x+6}{x+2} - 1 > 0 \Rightarrow \frac{x^2+3x-2-x^2-5x+6-x^2-x+2}{(x-1)(x+2)} > 0 \Rightarrow \frac{-x^2-3x+10}{(x-1)(x+2)} > 0$$

$$-x^2-3x+10=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-5 & (1) \\ x=2 & (1) \end{cases} \qquad (x-1)(x+2)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 & (1) \\ x=-2 & (1) \end{cases}$$

x	$-\infty$		-5		-2		1		2		$+\infty$
		$-$	0	$+$	∞	$-$	∞	$+$	0	$-$	

با توجه به جهت نامعادله، مجموعه جواب برابر است با $1 < x < 2$ یا $-5 < x < -2$ که شامل اعداد صحیح ۴- و ۳- یعنی دو عدد صحیح است.

تست ۲۶: طول بزرگ‌ترین بازه‌ای که نامساوی $\frac{x^4-3x+2}{(x-1)(x-2)} \leq 1$ در آن برقرار است، برابر کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ: گزینه‌ی «۳» ـ اول همه را می‌آوریم یک طرف و مخرج‌مشترک می‌گیریم:

$$\frac{x^4-4x+2}{x^2-3x+2} - 1 \leq 0 \Rightarrow \frac{x^4-3x+2-x^2+3x-2}{x^2-3x+2} \leq 0 \Rightarrow \frac{x^4-x^2}{x^2-3x+2} \leq 0$$

حالا کسر به دست آمده را تعیین علامت می‌کنیم:

$$x^4-x^2=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 & (2) \\ x=1 & (1) \\ x=-1 & (1) \end{cases} \qquad x^2-3x+2=0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 & (1) \\ x=2 & (1) \end{cases}$$

دقت کنید که چون ریشه‌ی $x=1$ دو بار (یک بار در صورت و یک بار در مخرج) به دست آمده، پس مرتبه‌ی ریشه‌ی $x=1$ زوج است؛ یعنی دو ریشه‌ی مرتبه‌ی زوج داریم: یکی $x=0$ و دیگری $x=1$:

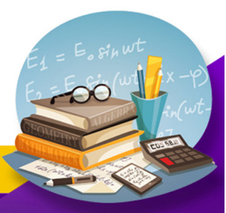
x	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
		$+$	0	$-$	0	$-$	∞	$-$	∞	$+$	

بنابراین بازه‌های جواب نامعادله عبارت‌اند از $[-1,1)$ و $(1,2)$؛ پس طول بزرگ‌ترین بازه‌ی جواب نامعادله برابر طول بازه‌ی $[-1,1)$ یعنی ۲ است.

اگر بخواهیم عبارت درجه دوم ax^2+bx+c همواره مثبت یا همواره منفی یا همواره نامنفی یا همواره نامثبت باشد، باید داشته باشیم:

همواره منفی (کوچک‌تر از صفر) $\begin{cases} \Delta < 0 \\ a < 0 \end{cases}$ همواره مثبت (بزرگ‌تر از صفر) $\begin{cases} \Delta < 0 \\ a > 0 \end{cases}$

همواره نامثبت (کوچک‌تر یا مساوی صفر) $\begin{cases} \Delta \leq 0 \\ a < 0 \end{cases}$ همواره نامنفی (بزرگ‌تر یا مساوی صفر) $\begin{cases} \Delta \leq 0 \\ a > 0 \end{cases}$



تست ۲۷: اگر نمودار تابع $y=(m+۳)x^{۲}+۲mx+۴$ به ازای تمام مقادیر x بالای محور xها قرار گیرد، حدود m کدام است؟

۱) $-۳<m<۲$ ۲) $-۳<m<۶$ ۳) $-۳<m<-۲$ ۴) $-۲<m<۶$

پاسخ: گزینه‌ی «۴» ـ با توجه به چیزهایی که در مورد تعیین علامت گفتیم، برای آن که عبارت درجه دوم $ax^{۲}+bx+c$ همواره مثبت باشد، باید ریشه نداشته باشد؛ یعنی $\Delta<۰$ و از طرفی عبارت هم‌علامت ضریب $x^{۲}$ یعنی a است یعنی برای مثبت‌بودن عبارت، باید $a>۰$ باشد:

$$\Delta<۰ \Rightarrow ۴m^{۲}-۱۶(m+۳)<۰ \Rightarrow ۴(m^{۲}-۴m-۱۲)<۰ \Rightarrow -۲<m<۶$$

$$a>۰ \Rightarrow m+۳>۰ \Rightarrow m>-۳$$

و اشتراک دو بازه‌ی $-۲<m<۶$ و $m>-۳$ می‌شود: $-۲<m<۶$.

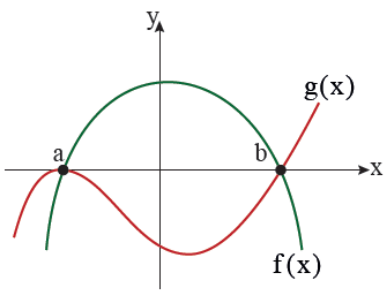
تست ۲۸: مجموعه جواب نامعادلهٔ $۱<\frac{۲x-۳}{x+۱}<۳$ به کدام صورت است؟ (تجربی ۹۸ و مشابه ۹۶)

۱) $\mathbb{R}-[-۶,۴]$ ۲) $\mathbb{R}-[-۴,۶]$ ۳) $x>۴$ ۴) $x<-۶$

تست ۲۹: در کدام بازه‌ها، نمودار تابع $y=\frac{۲x^{۲}-۶}{x^{۲}-x-۲}$، در زیر خط به معادلهٔ $y=۲$ قرار دارد؟

۱) $(۱,+\infty)$ ۲) $(-۱,۲)$ ۳) $(-\infty,-۱)\cup(۱,۲)$ ۴) $(-۱,۱)\cup(۲,+\infty)$

تست ۳۰: با توجه به نمودار توابع f و g، اگر مجموعه جواب نامعادله‌ی $(f.g)(x)>۰$ به صورت $(-\infty,-۲)$ و مجموعه جواب نامعادله‌ی $(f-g)(x)>۰$ به صورت $(-۱-b,c-۱)$ باشد، حاصل $a+b+c$ کدام است؟



۱) ۱
۲) ۱-
۳) صفر
۴) ۲

تست ۳۱: مجموع جواب نامعادله‌ی $x^3-2ax^2+bx+c>3$ به صورت $(-1,1)\cup(1,+\infty)$ است. مقدار ac کدام است؟

۱) ۲-　　۲) ۲　　۳) ۴-　　۴) ۴

با فرض $\sqrt{x}$ باید $x\geq$.

$(\sqrt{x}-2)\boxed{(\sqrt{x}-1)}$ +　　$x>1.5$

۲ گ

تست ۳۲: فرض کنید مجموعه جواب نامعادله‌ی $\frac{((m^2-1)x^2-4mx+4)(x-3\sqrt{x}+2)}{\boxed{2x-3}}>0$، به ازای $x>\frac{3}{2}$ بازه‌ی $[2,4]$ باشد. مقدار m کدام است؟ (ریاضی ۱۴۰۰)

۱) ۲-　　$\boxed{\text{۲) صفر}}$　　۳) ۱　　۴) ۲

x	۰		۲		۴	
$\sqrt{x}-2$		−		−	0	+
درجه ۲		+	0	باید ⊖ باشد		
$(\text{درجه ۲})(\sqrt{x}-2)>0$		−	0	+ جواب	0	

$x=2$ ریشه درجه ۲ هست

$(m^2-1)(2)^2-4m(2)+4=0$

$4m^2-4-8m+4=0$

$4m^2-8m=0$

$4m(m-2)=0$

$m=0$ یا $m=2$

درجه ۲ منفی شه

اول m ها را امتحان کنیم که عبارت درجه ۲ اما بین $2<x<4$ منفی نشد غلطه اگر $x=2$ عبارت

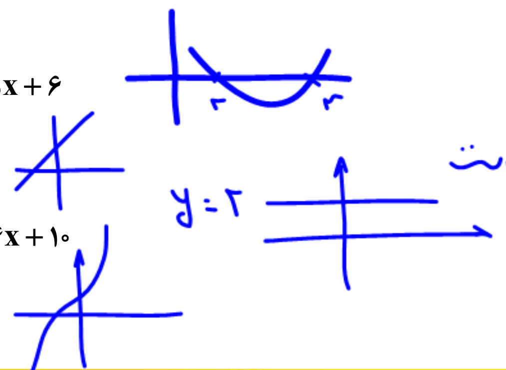
$\boxed{m=0}$ درجه ۲ : $y=-x^2+4$

قواعد تعیین دامنه

الف) توابع چند جمله‌ای: دامنه این توابع برابر با $\mathbf{R}$ است.

مثال ۳۳:

$$\begin{cases} f(x)=x^2-5x+6 \\ f(x)=x+1 \\ f(x)=2 \\ f(x)=x^3+4x+10 \end{cases}$$



$y=2$

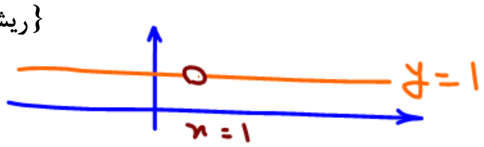
۲: y از خانواده چند جمله‌ای هست

کسرها را از مخرج نگاه کن.

ب) توابع کسری: اگر ضابطه f کسری باشد (تابع گویا)، x هایی که مخرج را صفر می‌کنند، قابل قبول نیستند.

$f(x)=\dfrac{g(x)}{h(x)} \qquad D_f = R-\{x \mid h(x)=0\} = R-$ {ریشه‌های مخرج}

1) $f(x)=\dfrac{x-1}{x-1} \Rightarrow x-1=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{1\}$

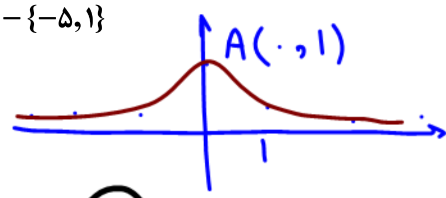


در x=1 تعریف نمی‌شود.

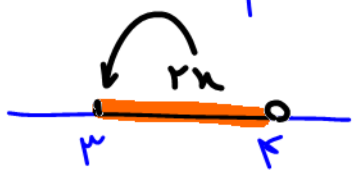
2) $f(x)=\dfrac{x+5}{x^2-1} \Rightarrow x^2-1=0 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1 \Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{\pm 1\}$

3) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+4x-5} \Rightarrow x^2+4x-5=0 \xrightarrow{a+b+c=0} x=1, x=-5 \Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{-5,1\}$

4) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1} \Rightarrow x^2+1=0 \Rightarrow x^2=-1$ غ.ق.ق $\Rightarrow$ مخرج ریشه ندارد $\Rightarrow D_f=\mathbb{R}$

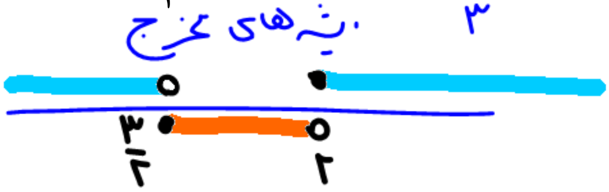


5) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+x+1} \Rightarrow x^2+x+1=0 \Rightarrow \Delta<0$ مخرج ریشه ندارد $\Rightarrow D_f=\mathbb{R}$



6) $f(x)=\dfrac{x+1}{[2x-3]}$ $=0$ $\quad [2x]-3=0 \Rightarrow [2x]=3 \Rightarrow 3\le 2x<4 \Rightarrow \frac{3}{2}\le x<2$

$\Rightarrow D_f = R-[\frac{3}{2},2)=(-\infty,\frac{3}{2})\cup[2,+\infty)$



7) $f(x)=\dfrac{1}{[x]-\frac{1}{2}}$ $=0$ $\Rightarrow$ $[x]=\frac{1}{2}$: نه هرگز

$D_f:\mathbb{R}$

قبل از تعیین دامنه، حق ساده کردن عبارت را ندارید!

برای تعیین دامنه هرگز ساده نکن.

8) $g(x)=\dfrac{\frac{1}{x-1}-1}{\boxed{\frac{3x}{x-2}}}$ $\qquad D_g = R-\{0,1,2\}$

9) $g(x)=\dfrac{\frac{x^2-1}{x-2}}{\frac{x-3}{x-4}}$ $\qquad D_g:\mathbb{R}-\{2,3,4\}$

$\mathbb{R}-(a,b)=(-\infty,a]\cup[b,+\infty)$

$\mathbb{R}-(a,b]=(-\infty,a]\cup(b,+\infty)$

$\mathbb{R}-[a,b)=(-\infty,a)\cup[b,+\infty)$

$\mathbb{R}-[a,b]=(-\infty,a)\cup(b,+\infty)$

ج) توابع رادیکالی با فرجه زوج: در این توابع باید عبارت زیر رادیکال را بزرگ‌تر یا مساوی صفر قرار دهیم:

$f(x)=\sqrt[2k]{g(x)} \qquad D_f=\{x \mid g(x)\ge 0\}$

اگر رادیکال با فرجه زوج در مخرج کسر باشد، باید زیر رادیکال را فقط بزرگ‌تر از صفر قرار دهیم:

9) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow x>0 \Rightarrow D_f=(0,+\infty)$

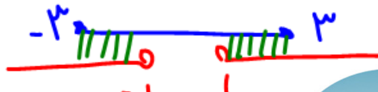
کسر $\frac{1}{\sqrt{x}}$ هم صورت هم مخرجش مثبت، ارزش آن مثبت و بالای محور x هست.

$9\ge x^2 \to 3\ge|x|$

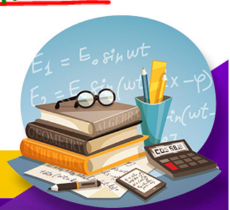
10) $f(x)=\dfrac{\sqrt{9-x^2}}{\sqrt{x^2-1}}$ ≥ 0, >0

$\begin{cases} 1)\ 9-x^2\ge 0 \Rightarrow -3\le x\le 3 \\ 2)\ x^2-1>0 \Rightarrow x<-1 \text{ یا } x>1 \end{cases}$ $\Rightarrow (1),(2) \xrightarrow{\cap} D_f=[-3,-1)\cup(1,3]$

$x^2>1 \to |x|>1$



$\begin{cases} u^2<a^2 \to |u|<a \xrightarrow{a>0} -a<u<a \\ u^2=a^2 \to |u|=a \longrightarrow u=\pm a \\ u^2>a^2 \to |u|>a \longrightarrow u<-a \text{ یا } u>a \end{cases}$



$D_f = D_{|f|} = D_{[f]} = D_{\sin f} = D_{\cos f} = D_{f^{2n}} = D_{af} = D_{af+b} = D_{\sqrt[2n+1]{f}}$

عواملی که دامنه را عوض نمی‌کنند:
عوامل بی تأثیر در دامنه

۱۱) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-3}{x+4}} \Rightarrow \dfrac{x-3}{x+4}\geq 0$

x		-4		3	
	+	ن	−	0	+

ساده ساده

$D_f\ (-\infty,-4)\cup[3,+\infty)$

دامنه $f(x)=5\left[\sin\left(\cos\left|\sqrt[9]{\frac{1}{x}}\right|\right)\right]+7$ کدام است؟

$D_f: \mathbb{R}-\{0\}$

د) توابع رادیکالی با فرجه فرد: برای تعیین دامنه توابع رادیکالی با فرجه فرد، رادیکال را نادیده می‌گیریم:

$f(x)=\sqrt[2k+1]{g(x)} \qquad D_f=D_g$

۱۲) $f(x)=\sqrt[3]{\dfrac{5}{x^2+x-12}}$ $=0$ $\rightsquigarrow D_f: \mathbb{R}-\{3,-4\}$

۱۳) $f(x)=\sqrt[3]{5x^2-7} \Rightarrow D_f=\mathbb{R}$

۱۴) $f(x)=\sqrt[3]{\dfrac{1}{x-1}} \Rightarrow x-1=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{1\}$

۱۵) $f(x)=\dfrac{1-x}{\sqrt[3]{x}} \rightsquigarrow D_f: \mathbb{R}-\{0\}$

در تعیین دامنه توابع $f(x)=[g(x)]\,,\,f(x)=|g(x)|$ قدرمطلق و براکت را نادیده می‌گیریم یعنی $D_f=D_g$ است:

۱۶) $f(x)=[\sqrt{x}] \Rightarrow D_f = x\geq 0$

۱۷) $f(x)=[\frac{1}{x}] \Rightarrow D_f=R-\{0\}$

[ ] جزء صحیح یا براکت: اگر عدد صحیح بگیره همونو میده
اگر عدد اعشاری بگیره، عدد صحیح قبلی رو میده
$[-2.3]=-3$

ریشه های مخرج

۱۸) $f(x)=\dfrac{1}{[x]} \Rightarrow [x]=0 \Rightarrow 0\leq x<1 \Rightarrow D_f=R-[0,1)$

۱۹) $f(x)=\dfrac{\sqrt{9-x^2}}{|x-1|}$ ≥ 0, $=0 \rightsquigarrow x=1$

$9-x^2\geq 0$
$9\geq x^2$
$3\geq |x|$
$-3\leq x\leq 3$

$D_f: [-3,3]-\{1\}$

تست ۳۴: دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $f(x)=\dfrac{1}{x^2-(a+1)x-b}$ به صورت $\mathbb{R}-\{-1,6\}$ است. مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

Setting → کسر را از مخرج نگاه کن

ریشه‌های مخرج کسرند

$f(x)=\dfrac{1}{(x+1)(x-6)} = x^2-5x-6$

با مخرج مقایسه کن

$a+1=5 \rightarrow a=4$
$b=6$

$a+b=10$

تست ۳۵: اگر دامنه تابع $f(x)=\dfrac{x}{2x^2+ax+b}$ برابر $R-\{-2\}$ باشد، $b+a$ چه‌قدر است؟

۱) ۸ ۲) ۱۶ ۳) ۲۰ ۴) ۴

$x=-2$ تنها ریشه مخرج کسر است پس مخرج که درجه ۲ است یک ریشه مضاعف دارد.

$2(x+2)^2=2(x^2+4x+4)$

مقایسه با مخرج $2x^2+8x+8$

$a=8=b$

$a+b=16$ گزینه ۲

تست ۳۶: دامنه‌ی تابع $y=\sqrt{-x^2(x^2-4)^2}$ چند عضو دارد؟

VIP
م

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) بی‌شمار

زیر رادیکال فرجه زوج $= -x^2(x^2-4)^2 \geq 0$ طرفین ضرب در (۱-) جهت نامساوی عوض میشه $x^2(x^2-4)^2 \leq$

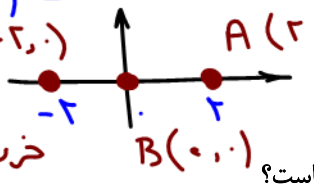
$x^2(x^2-4)^2<0$ امکان ندارد

$x^2(x^2-4)^2=0 \rightsquigarrow x=0,\pm 2$

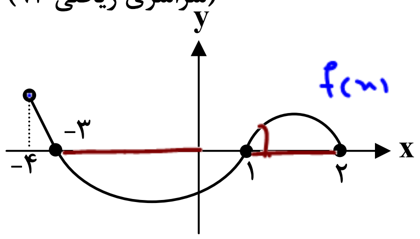
$D_f:\{0,\pm2\}$ گزینه ۳ سه عضو

$R_f:\{0\}$ برد تک نقطه‌ای صفر دارد.

$f(\underbrace{0 \text{ یا } \pm2}_{\text{ورودی}})=0$ خروجی



تست ۳۷: شکل روبه‌رو نمودار تابع $y=f(x)$ است. دامنه‌ی تابع $\sqrt{xf(x)}$ ، کدام است؟ (سراسری ریاضی ۹۲)



۱) $[0,2]$
۲) $[-3,2]$
۳) $[-4,-3]\cup[1,2]$
۴) $[-3,0]\cup[1,2]$

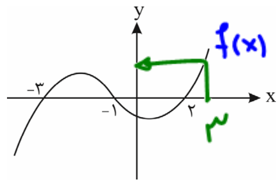
$xf(x)\geq 0$

پس x و f(x) باید هم‌علامت باشند
هر دو مثبت یا هر دو منفی باشند

Setting ⟶ عوارض را از چپ به راست نگاه کن

f(x) مثبت: بالای x هاست
f(x) منفی: زیر x هاست
f(x) صفر: روی x هاست.

تست ۳۸: شکل زیر، نمودار تابع با ضابطهٔ $y = f(x)$ است. دامنهٔ تابع غیرنقطه‌ای $\sqrt{(x+1)f(x)}$ کدام است؟ (خارج ریاضی ۹۷)



۱) $[-3,2]$

۲) $[-1,+\infty)$

۳) $(-\infty,-1]$

۴) $\mathbb{R}-(-3,2)$

$(x+1)f(x)=0 : \begin{cases} x+1=0 \longrightarrow x=-1 \\ f(x)=0 \longrightarrow x=-3,\ -1,\ 2 \end{cases}$ ساده

$(x+1)f(x)$ ۲ بار تکرار شده ریشه‌ی مرتبه زوج است. زیرا هم $x+1$ و هم $f(x)$

دامنه غیرنقطه‌ای $\mathbb{R}-(-3,2)$

x	$-\infty$	-3 (ساده)		-1 (مضاعف)		2 (ساده)	3 (مثبت)	$+\infty$
$(x+1)f(x)\geq 0$	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

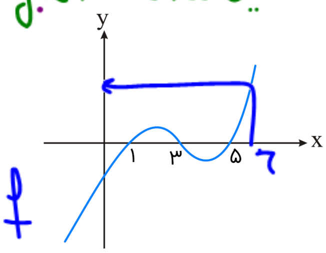
$D_f : (-\infty,-3]\cup\{-1\}\cup[2,+\infty)$

Single Point یک نقطه

$y=\sqrt{(x+1)f(x)}$

تست ۳۹: اگر نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت زیر باشد، دامنهٔ $y = \dfrac{4}{\sqrt{(x^2-5x+4)f(x)}}$ کدام است؟

$(x-1)(x-4)f(x)>0$



۱) $(4,+\infty)$

۲) $(-\infty,1)$

۳) $(1,3)\cup(5,+\infty)$

۴) $(3,4)\cup(5,+\infty)$

x	$-\infty$	1 (مضاعف)		3 (ساده)		4 (ساده)		5 (ساده)	6 (مثبت)	$+\infty$
$(x-1)(x-4)f(x)>0$	$-$	ت‌ن	$-$	ت‌ن	$+$	ت‌ن	$-$	ت‌ن	$+$	

$x=1 \quad x=4 \quad x=1,3,5$

تست ۴۰: اگر دامنهٔ $f(x)=\sqrt{(2a-3)x^2+4ax+2a-3}$ مجموعهٔ اعداد حقیقی باشد، حدود a کدام است؟

۱) $0 \leq a < \frac{3}{2}$ ۲) $a\in\mathbb{R}$ ۳) $\{\}$ ۴) $a \geq \frac{3}{2}$

پاسخ: گزینهٔ «۳» ـ برای این که دامنه $\mathbb{R}$ باشد، باید زیر رادیکال همواره نامنفی باشد.

$$(2a-3)x^2+4ax+2a-3 \geq 0$$

برای آن که نامعادلهٔ درجه دو نامنفی باشد، باید ضریب x^2 مثبت و دلتای عبارت درجهٔ دوم منفی یا صفر باشد.

دهانه به بالا

$$\begin{cases} 2a-3>0 \Rightarrow a>\frac{3}{2} \quad (1) \\ \Delta \leq 0 \Rightarrow (4a)^2-4(2a-3)(2a-3)\leq 0 \Rightarrow 16a^2-4(4a^2-12a+9)\leq 0 \Rightarrow -4(-12a+9)\leq 0 \Rightarrow a\leq\frac{3}{4} \quad (2) \end{cases}$$

شرط

$0.75=\frac{3}{4} \qquad \frac{3}{2}=1.5$

$-12a+9\geq 0 \quad 9\geq 12a \quad \frac{9}{12}\geq a$

$(1)\cap(2)=\varnothing$

۶ حالت معادله درجه ۲ داریم:

$a>0,\ \Delta<0 \qquad a>0,\ \Delta=0 \qquad a>0,\ \Delta>0 \qquad a<0,\ \Delta<0 \qquad a<0,\ \Delta=0 \qquad a<0,\ \Delta>0$

$y=$ صفر

$a=1 \longrightarrow y=\frac{1}{x^2+2x+1}=\frac{1}{(x+1)^2}$ $\quad D_f: \mathbb{R}-\{-1\}$

$a=3 \longrightarrow y=\frac{1}{9x^2+6x+1}=\frac{1}{(3x+1)^2}$ $\quad D_f: \mathbb{R}-\{-\frac{1}{3}\}$

$a=\frac{3}{4} \longrightarrow y=\frac{1}{\frac{3}{2}x+1}$ $\quad D_f: \mathbb{R}-\{-\frac{2}{3}\}$

اینم درستی جواب تست ۴۱

VIP

گ ۳

تست ۴۱: اگر دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{1}{(4a-3)x^2+2ax+1}$ شامل همهٔ اعداد حقیقی به غیر از یک عدد حقیقی باشد، چند مقدار برای a وجود دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

$D_f: \mathbb{R}-\{$ یه عدد $\}$ ← ریشه مخرج است

حتماً مخرج یک ریشه دارد پس یا مخرج درجه دو با $\Delta=0$ است یا مخرج درجه یک است که یک ریشه دارد:

الف) $\Delta_{\text{مخرج}}=b^2-4ac=0 \longrightarrow \Delta=(2a)^2-4(4a-3)(1)=0$

$4a^2-4(4a-3)=0 \longrightarrow$ طرفین ÷ ۴

$a^2-4a+3=0 \longrightarrow \boxed{a=1,3}$ ضریب صفر

ب) مخرج درجه یک است ← ضریب x^2 صفر $\quad 4a-3=0 \longrightarrow \boxed{a=\frac{3}{4}}$

$a\in\{1,3,\frac{3}{4}\}$

VIP

گ ۳

تست ۴۲: اگر دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{(a+2)x^2+ax+b}$ به صورت $(-\infty,3]$ باشد، مقدار b کدام است؟

۱) -2 ۲) -3 ۳) ۶ ۴) ۴

x	$-\infty$		۳ ساده		$+\infty$
زیر رادیکال $\geq$		$+$	○	$-$	

یک ریشه ساده $x=3$ دارد و جدول تعیین علامت است. اما همه ما می‌دانیم که درجه ۲ نمی‌تواند یک ریشه ساده داشته باشد پس زیر رادیکال درجه ۲ نیست و ضریب x^2 صفر است، $a+2=0$ ، $\boxed{a=-2}$

$f(x)=\sqrt{-2x+b}\geq 0$

$b\geq 2x$

$\frac{b}{2}\geq x \longrightarrow D_f(-\infty,\frac{b}{2}=3] \longrightarrow \boxed{b=6}$

$f(x)=\sqrt{-2x+6}\geq 0$

$6\geq 2x$

$3\geq x$

$D_f(-\infty,3]$

یازدهم «تساوی دو تابع»

دو تابع f و g مساوی هستند هر گاه: دامنه‌ها مساوی، ضابطه‌ها مساوی

الف) دامنه‌ی f و g با هم برابر باشند.

ب) برای هر x از دامنه‌ی f (یا g) داشته باشیم، $f(x)=g(x)$ (ضابطه‌ها برابر باشند).

تست ۴۳: به ازای چند مقدار a دو تابع $f(x)=\frac{2x^2+2x-2a}{x^2+x-a}$ و $g(x)=a^3-a+2$ با هم مساوی هستند؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) ۲

پاسخ: گزینهٔ «۲»

$$f(x)=\frac{2(x^2+x-a)}{x^2+x-a}=2=g(x)=a^3-a+2 \Rightarrow a^3-a=0 \Rightarrow a(a^2-1)=0 \Rightarrow a=0,\pm 1$$

اول a را در نظر نگیریم Δ مخرج f را ⊖ کنیم که مخرج f ریشه نداشته باشد $D_f: \mathbb{R}$ و با $D_g=\mathbb{R}$ برابر شود

از طرفی $D_g=\mathbb{R}$ پس $D_f=\mathbb{R}$، یعنی مخرج تابع f نباید دارای ریشه باشد.

$$x^2+x-a\neq 0 \Rightarrow \Delta<0 \Rightarrow 1+4a<0 \Rightarrow a<\frac{-1}{4} \Rightarrow a=-1$$

تست ۴۴: کدام دو تابع با هم، برابرند؟

۱) $g(x)=x\sqrt{x}\,.\sqrt{x+1}\,,\ f(x)=x\sqrt{x^2+x}$

۲) $g(x)=\dfrac{\frac{x}{2+x}}{\frac{1-x}{x+1}}\ ,\ f(x)=\dfrac{x(x+1)}{(1-x)(2+x)}$

۳) $g(x)=\cos x\ ,\ f(x)=\sqrt{1-\sin^2 x}$

۴) $g(x)=0\ ,\ f(x)=[\dfrac{x^2+1}{x^2+2}]$ ✓

1) $g(x)=x\sqrt{x}\sqrt{x+1}\geq 0$

$(x\geq 0)\cap(x\geq -1)=D_g:[0,+\infty)$

$f(x)=x\sqrt{x^2+x}=x(x+1)\geq 0$

x		-1		0	
$x(x+1)\geq 0$	+	0	−	0	+

$D_f:(-\infty,-1]\cup[0,+\infty)\neq D_g$ برابر نیستند.

2) $D_g:\mathbb{R}-\{-2,1,-1\}\neq D_f:\mathbb{R}-\{1,-2\}$ برابر نیستند.

3) $\sin^2x+\cos^2x=1 \quad f(x)=\sqrt{1-\sin^2x}=\sqrt{\cos^2x}=|\cos x|\neq g(x)=\cos x$ برابر نیستند.

4) $g(x)=0 = f(x)=[0<\frac{x^2+1}{x^2+2}<1]=0$ کسر بین ۰ تا ۱

$D_g=\mathbb{R} = D_f:\mathbb{R}$

f و g هم دامنه هم ضابطه

VIP تست ۴۵: اگر دو تابع $f(x)=\dfrac{ax+2}{x^2-mx+n}$ و $g(x)=\dfrac{x-b}{2x^2-3x-5}$ مساوی باشند، حاصل $am-bn$ کدام است؟

۱) $-\frac{29}{4}$ ۲) $\frac{17}{2}$ ۳) $-\frac{37}{4}$ ✓ ۴) $\frac{23}{2}$

$am-bn=\frac{1}{2}(\frac{3}{2})-10=\frac{3}{4}-10=\frac{-37}{4}$

$D_g:\mathbb{R}-\{-1,\frac{5}{2}\}\overset{\text{باید}}{=}D_f$ ~ مخرج f باید دو ریشه $x=-1$, $\frac{5}{2}$ به هم $f(x)=\dfrac{\quad}{(x+1)(x-\frac{5}{2})}$

$g(x)=\dfrac{x-b}{2x^2-3x-5}=\dfrac{\frac{1}{2}(x-b)}{x^2-\frac{3}{2}x-\frac{5}{2}}=\dfrac{\frac{1}{2}x-\frac{b}{2}}{\underbrace{x^2-\frac{3}{2}x-\frac{5}{2}}_{\text{مشابه}}}=f(x)=\dfrac{ax+2}{\underbrace{x^2-\frac{3}{2}x-\frac{5}{2}}}$

$2x^2-3x-5=2(x^2-\frac{3}{2}x-\frac{5}{2})$

f مخرج‌ها باید یکسان باشند $\begin{cases}x^2-\frac{3}{2}x-\frac{5}{2}\\x^2-mx+n\end{cases}$

$\boxed{m=\frac{3}{2} \quad n=-\frac{5}{2}}$

$\boxed{\frac{1}{2}=a}$

$-\frac{b}{2}=2\rightarrow\boxed{b=-4}$

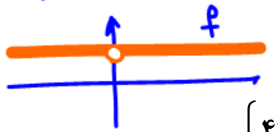
برای این که مخرج‌ها هم شکل شوند از ۲ از مخرج فاکتور گرفتیم

آیا $f(x)=\frac{x}{x}$ ، $g(x)=1$ برابرند؟

$D_f:\mathbb{R}-\{0\}\neq D_g:\mathbb{R}$ برابر نیستند.

$f(x)=\frac{x}{x}=1$

$x\neq 0$



تست ۴۶: به ازای کدام مقدار k ، دو تابع $f(x)=2x-1$ و $g(x)=\begin{cases}\frac{4x^2-1}{2x+1}, & x\neq-\frac{1}{2}\\ 1-k, & x=-\frac{1}{2}\end{cases}$ برابرند؟

۱) -3 ۲) 3 ۳) صفر ۴) -1

چون دو تابع برابرند باید به ازای $x=-\frac{1}{2}$ هر دو یک چیز برابر شوند:

$g(x=-\frac{1}{2})=1-k=f(x=-\frac{1}{2})=2(-\frac{1}{2})-1=-2$

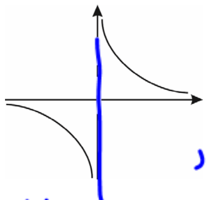
$1+2=k \longrightarrow \boxed{k=3}$

تابع گویا (عبارات گویا)

هر تابع کسری که صورت و مخرج آن چندجمله‌ای‌های جبری باشند به طوری که مخرج صفر نشود، تابع گویا نام دارد.

هموگرافیک ساده

ساده‌ترین تابع گویا $f(x)=\frac{1}{x}$ با دامنه‌ی $\mathbb{R}-\{0\}$ است که به صورت



می‌باشد. حال با توجه به این تابع، بقیه را با استفاده از انتقال رسم می‌کنیم.

تابع کسری $y=\frac{1}{x}$ در ریشه مخرج که $x=0$ تعریف نمی‌شود

$x=0$ طول (ایکس) ناپیوستگی تابع $y=\frac{1}{x}$ است

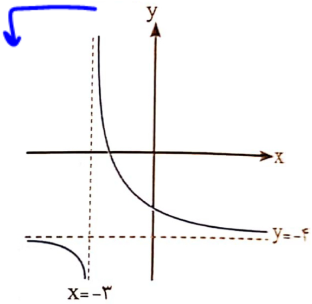
جدایی

انفصال

تست ۴۷: نمودار $y=\frac{1}{x+4}-3$ در کدام گزینه به درستی نمایش داده شده است؟

دقت: در کسرها اول به ریشه های مخرج نگاه کن

۱)

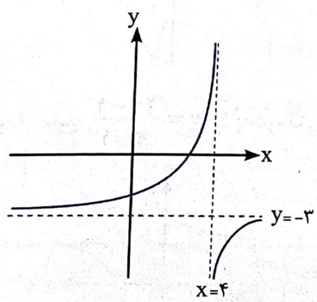


اولاً در $x=-4$ تعریف نمی‌شود

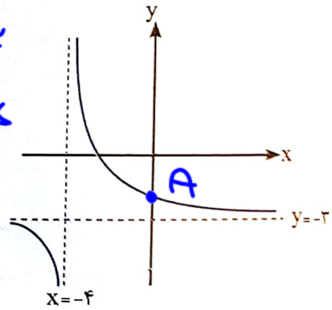
یا گزینه ۳ درسته

یا گزینه ۴ درسته

۲)



۳)

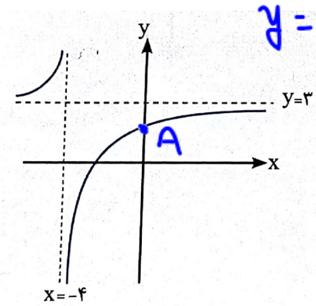


به ضابطه $y=\frac{1}{x+4}-3$ اگر $x=0$ قرار دهیم

$A(0,\frac{1}{4}-3=-\frac{11}{4})$

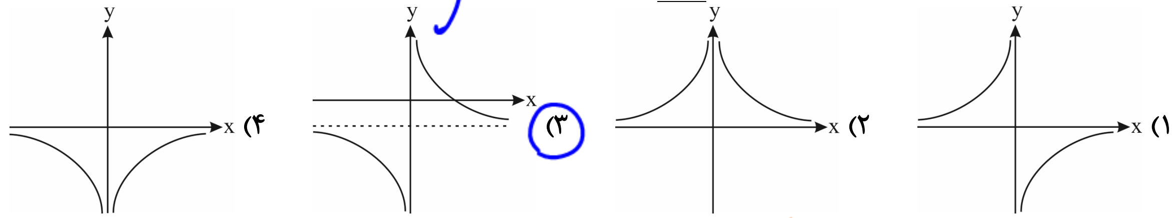
که با گزینه ۳ سازگار است.

۴)



تست ۴۸: در کدام گزینه، شکل تابع به درستی رسم نشده است؟ (مشابه تمرین کتاب درسی)

$y=\frac{1}{x}-1$



۱) $y=-\frac{1}{x}$ ۲) $y=\frac{1}{|x|}=\left|\frac{1}{x}\right|$ ۳) $y=\frac{1}{x+1}$ ۴) $y=-\frac{1}{|-x|}$

قدرمطلق حذف شده

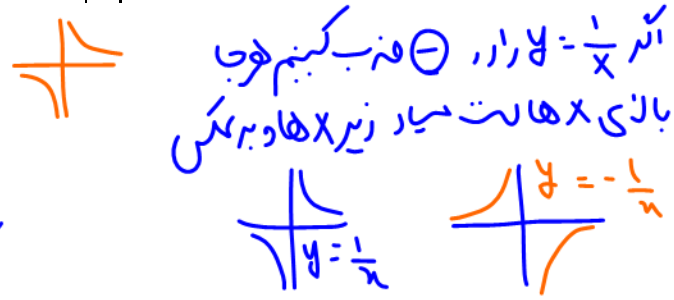
$y=-\frac{1}{|x|}$

قرینه $y=\frac{1}{|x|}$ است نسبت به محور xها

همان $y=\frac{1}{x}$ است که باید یک واحد به سمت چپ برود

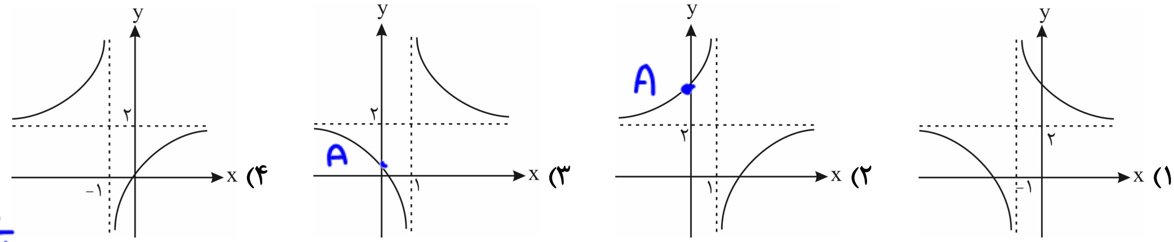
و با $x=-1$ را توضیح

اگر $y=\frac{1}{x}$ را در ⊖ ضرب کنیم جواب بالای x ها میاد زیر x ها و برعکس



$y=\frac{1}{x}$ $y=-\frac{1}{x}$

تست ۴۹: کدام‌یک از گزینه‌های زیر نمودار تابع $y=\frac{2x-1}{x-1}$ را به درستی نمایش می‌دهد؟



$y=\frac{2x-1}{x-1}$

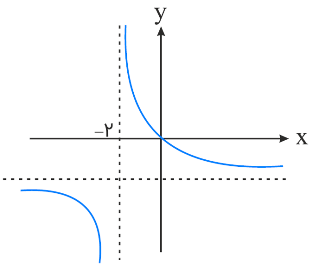
$A(0,1)$

محل برخورد تابع با محور yها

$y=\frac{\quad}{x-1}$ در $x=1$ تعریف نمی‌شود پس یا گزینه ۲ درسته یا گزینه ۳

$A(0,1)$ در تابع صادقه که فقط با گزینه ۳ سازگار است.

تست ۵۰: اگر نمودار تابع $f(x)=\frac{x+a}{bx-2}$ به صورت زیر باشد، $f(1)$ کدام است؟



۱) -1

۲) $-\frac{1}{2}$

۳) $-\frac{3}{2}$

۴) $-\frac{1}{3}$ ✓

می‌بینیم شکل در $x=-2$ تعریف نشده است.

پس $x=-2$ ریشه مخرج کسر است $b(x=-2)-2=0$

$-2b=2 \to \boxed{b=-1}$

می‌بینیم تابع از مبدأ $(0,0)$ عبور کرده است پس

$f(0)=\frac{\cancel{x}+a}{b\cancel{x}-2}=0 \to \boxed{a=0}$

$f(x)=\frac{x+a}{bx-2}=\frac{x}{-x-2}$

$f(1)=\frac{1}{-1-2}=-\frac{1}{3}$

تست ۵۱: اگر $f=\{(۱,۴),(۲,۳),(۵,۱),(۴,۲)\}$ و $g(x)=\frac{x+۱}{x-۱}$ باشد، کدام مجموعه‌ی زیر نشان‌دهنده‌ی تابع $f+g$ می‌باشد؟

۱) $\{(۲,۶),(۵,\frac{۵}{۲}),(۴,\frac{۱۱}{۳})\}$ ✓
۲) $\{(۲,۶),(۵,\frac{۵}{۲})\}$
۳) $\{(۲,۶),(۵,۱۰),(۴,۱۱)\}$
۴) $\{(۲,۴),(۵,۱),(۴,۱۰)\}$

$g(۱)=$ ت.ن

نکته: $f \frac{\pm}{\times \div} g$ در ایکس‌های مساوی روی مولفه‌های دوم انجام می‌شود.

$g=\{(۲,۳),(۵,\frac{۶}{۴}=\frac{۳}{۲}),(۴,\frac{۵}{۳})\}$ $f+g=\{(۲,۳+۳),(۵,۱+\frac{۳}{۲}),(۴,۲+\frac{۵}{۳})\}$

اعمال روی توابع

جمع عمل یعنی چهار عمل اصلی $\frac{\pm}{\times \div}$

اگر f و g دو تابع باشند، آن‌گاه جمع، تفاضل، ضرب و تقسیم این دو تابع به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$(f-g)(x)=f(x)-g(x)$ $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$

$(\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$ $(f\cdot g)(x)=f(x)\times g(x)$

> دامنه‌ی توابع $f\pm g$ و $f\cdot g$ اشتراک دامنه‌های f و g است و دامنه‌ی $\frac{f}{g}$ اشتراک دامنه‌های f و g است به‌جز نقاطی که $g(x)=۰$.

اگر توابع f و g به‌صورت زوج‌های مرتب مطرح شوند، مثلاً $f=\{(a,b)\ ,\ (۱,۲)\}$ و $g=\{(a,c)\ ,\ (۲,۱)\}$، منظور از $f+g$ آن است که مؤلفه‌های دوم زوج‌های مرتبی از f و g را که دارای مؤلفه‌های اوّل یکی هستند (اشتراک دامنه‌ها)، با هم جمع کنیم. یعنی:

$f+g=\{(a\ ,\ b+c)\}$

و به همین ترتیب $f-g$، $f\cdot g$ و $\frac{f}{g}$ عبارت است از:

$$f-g=\{(a\ ,\ b-c)\}\quad ,\quad f\cdot g=\{(a\ ,\ b\times c)\}\quad ,\quad \frac{f}{g}=\left\{(a\ ,\ \frac{b}{c})\right\}\ ,\ c\neq ۰$$

حواستون باشه که دو زوج مرتب $(۱,۲)$ و $(۲,۱)$ در f و g، چون مؤلفه‌های اوّل یکسان ندارن در $f\pm g$ و $f\cdot g$ و $\frac{f}{g}$ به بازی گرفته نمی‌شن!

تذکر: $(kf)(x)=kf(x)$ و $D_{kf}=D_f$ و منظور از $(kf)(x)$ آن است که اعضای برد f در k ضرب شوند. مثلاً:

$f=\{(a,b)\ ,\ (۱,۲)\}\ \Rightarrow\ ۳f=\{(a,۳b)\ ,\ (۱,۶)\}$

تست ۵۲: اگر $f(x)=\sqrt{x+۱}$ و $g(x)=\frac{x+۱}{x-۲}$، مقدار $(۲f-g)(۳)$ کدام است؟

۱) ۱- ۲) ۰ ✓ ۳) ۱ ۴) ۲

$۲f(۳)-g(۳)=۲\sqrt{x+۱}-\frac{x+۱}{x-۱}=۲\sqrt{۳+۱}-\left(\frac{۳+۱}{۳-۲=۱}\right)=۲(۲)-۴=$ صفر

٤ تست ۵۳: اگر $f=\{(۱,۲),(۲,۳),(۳,۴)\}$ و $g=\{(۱,۵),(۲,۶),(۳,۰)\}$ باشد، آن‌گاه تابع $\frac{۲f}{g}$ کدام است؟

۱) $\varnothing$　　۲) $\left\{(۱,\frac{۴}{۵}),(۳,۱)\right\}$　　۳) $\left\{(۱,\frac{۴}{۵}),(۲,\frac{۱}{۲})\right\}$　　۴) $\left\{(۲,۱),(۱,\frac{۴}{۵})\right\}$

$۲f=\{(۱,٤),(۲,٦),(۳,۸)\}$

$g=\{(۱,۵),(۲,٦),(۳,۰)\}$

$\frac{۲f}{g}=\{(۱,\frac{٤}{۵}),(۲,\frac{٦}{٦})\}$ $(۳,\cancel{\frac{۸}{۰}})$ ق.ن

٣ تست ۵۴: اگر $f=\{(۴,۳),(۳,۱),(۵,۴)\}$ و $۲f-g=\{(۳,۶),(۴,۴)\}$ باشد، تابع $\frac{f}{g}$ کدام است؟

$۲f=\{(٤,٦),(۳,۲),(۵,۸)\}$

۱) $\{(۳,-\frac{۱}{۴}),(۴,\frac{۳}{۲})\}$　　۲) $\{(۳,-\frac{۱}{۴})\}$

۳) $\{(۳,\frac{۳}{۸}),(۴,\frac{۳}{۲})\}$　　۴) $\{(۴,\frac{۳}{۲})\}$

$g=\{(٤,a),(۳,b)\}$ تابع g را به صورت «» نظر بگیریم

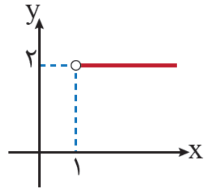
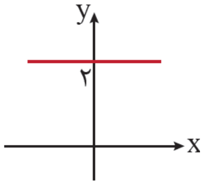
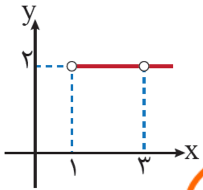
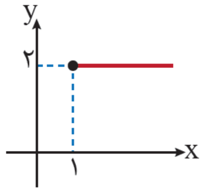
$۲f-g=\{(٤,٦-a),(۳,۲-b)\}$

$۲f-g=\{(٤,٤),(۳,٦)\}$

$٦-a=۴ \longrightarrow a=۲$

$۲-b=٦ \longrightarrow b=-۴ \longrightarrow g=\{(۴,۲),(۳,-٤)\}$　$\frac{f}{g}=\{(٤,\frac{۳}{۲}),(۳,-\frac{۱}{۴})\}$

تست ۵۵: اگر $f(x)=\frac{\sqrt{x-۱}}{x-۳}$ و $g(x)=\frac{۲x-۶}{\sqrt{x-۱}}$، آن‌گاه نمودار تابع $f.g$ کدام است؟

۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

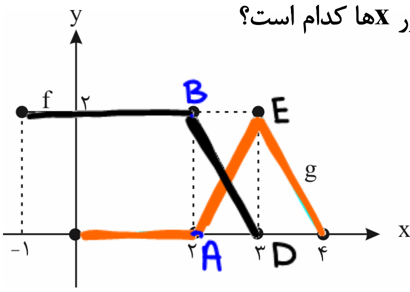
راه سریع: $x=۳$ نباید در جواب نهایی باشد چون ریشه مخرج است، لذا گزینه ۳ درسته! $y=fg$ «» جا تعریف نمی‌شه

راه اصلی: $D_{f\times g}=D_f\cap D_g=\underbrace{[۱,+\infty)-\{۳\}}_{D_f}\cap\underbrace{(۱,+\infty)}_{D_g}=(۱,+\infty)-\{۳\}$

$y=f\cdot g=\frac{\sqrt{x-۱}}{\cancel{x-۳}}\cdot\frac{۲(\cancel{x-۳})}{\cancel{\sqrt{x-۱}}}=۲$ تابع ثابت $y=۲$ را با توجه به D_{fg} رسم کن.

اسم مفعول از (ح ص ر) یعنی گیر افتاده

تست ۵۶: اگر نمودار توابع f و g به صورت زیر باشد، مساحت محصور بین نمودار تابع $f+g$ و محور xها کدام است؟



۱) $\frac{3}{2}$

۲) ۶

۳) $\frac{5}{2}$

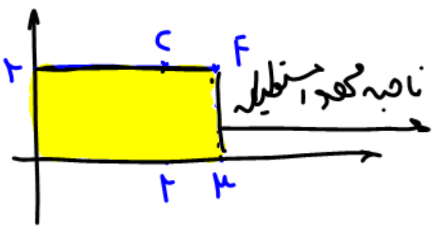
۴) ۱۸

$D_{f+g}=D_f\cap D_g:[-1,3]\cap[0,4]=[0,3]$

در $0\le x<2$ عرض f و g را جمع کن $y:0+2:2$

$(A|^{2}_{0}\in g)(B|^{2}_{2}\in f)\xrightarrow{جمع} C|^{2}_{2}$

$(D|^{3}_{0}\in f)(E|^{3}_{2}\in g)\to F|^{3}_{2}$



$S:2(3):6$

تست ۵۷: توابع $f(x)=\frac{x+1}{x}$ و $g(x)=\frac{x^2+1}{x}$ مفروض‌اند. برد تابع $f-g$ کدام است؟ محدوده تغییرات yها

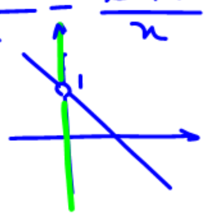
۱) $\mathbb{R}-\{0\}$ ۲) $\mathbb{R}-\{1\}$ ۳) $\mathbb{R}-\{-1\}$ ۴) $\mathbb{R}$

اول $y=f-g$ را می‌سازیم، آن را رسم می‌کنیم روی محور yها آن را پرس می‌کنیم هر جا که شد برداشت:

$y=f-g=\frac{x+1}{x}-\frac{x^2+1}{x}=\frac{x+1-x^2-1}{x}=\frac{x-x^2}{x}=\frac{\cancel{x}(1-x)}{\cancel{x}}=1-x$

خط f-g است که تازه در $\boxed{x=0}$ تعریف نشده

$D_{f-g}:\mathbb{R}-\{0\}$



$R_{f-g}:\mathbb{R}-\{y=1\}$

تست ۵۸: تابع $f(x)=\frac{x^3-x}{x-1}$ با دامنه‌ی $\mathbb{R}-\{a,b\}$ و برد $[c,+\infty)-\{2\}$ مفروض است. حاصل $a+b+c$ کدام است؟ V.I.P

۱) $\frac{7}{4}$ ۲) $-\frac{9}{4}$ ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) $-\frac{5}{4}$

عرض رأس سهمی

$f(x)=\frac{x^3-x}{x-1}=\frac{x(x^2-1)}{x-1}=\frac{x(x-1)(x+1)}{x-1}=x(x+1)=x^2+x$

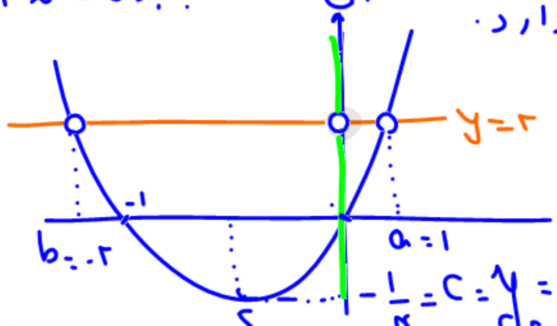
$f=\frac{درجه\ ۳}{درجه\ یک}=درجه\ ۲$ سهمی

$D_f:\mathbb{R}-\{a,b\}$ $x=-1$ و $x=0$ تابع f یک سهمی دهانه به بالاست که ۲ ریشه دارد:

$R_f:[c,+\infty)-\{2\}\to y=2$

$\begin{cases}y=ax^2+bx+c\\ رأس\ S(-\frac{b}{2a},-\frac{\Delta}{4a})\end{cases}$

$y=x^2+x$ عرض رأس



$\begin{cases}y=2\\y=x^2+x\end{cases}\to x^2+x=2$

$x^2+x-2=0$

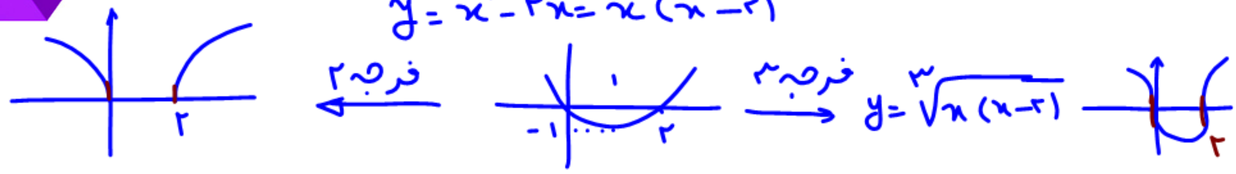
$x=1,-2$

$-\frac{1}{4}=c:y_S=\frac{-\Delta}{4a}=\frac{-1}{4}$

$(a=1)+(b=-2)+(c=-\frac{1}{4})=-\frac{5}{4}$

$y = x^2 - 2x = x(x-2)$

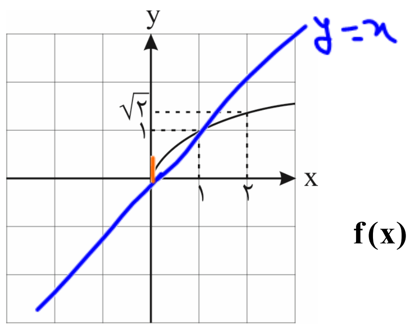
$y=\sqrt{x(x-2)}$



$y=\sqrt[3]{x(x-2)}$

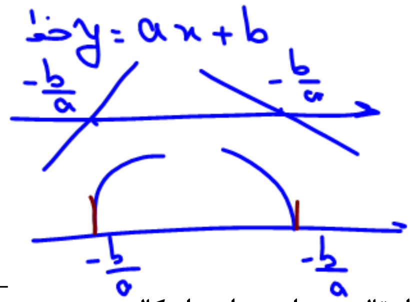
تابع رادیکالی

هر تابع به صورت $f(x)=\sqrt{p(x)}$ ($p(x)$ یک تابع از x است) را یک تابع رادیکالی (ریشه دوم) می‌نامیم. برای محاسبه دامنه‌ی این نوع توابع باید نامعادله‌ی $p(x)\ge 0$ را حل کرد. به طور مثال به تابع زیر و نمودار آن توجه کنید:



$f(x)=\sqrt{x}$

ارزش تابع $f(x)\ge 0$: $f(x)=\sqrt{\ }$ مثبت یا صفر.



اکنون با استفاده از قوانین انتقال می‌توانیم توابع رادیکالی به صورت $k\sqrt{ax+b}$ را رسم کنیم.

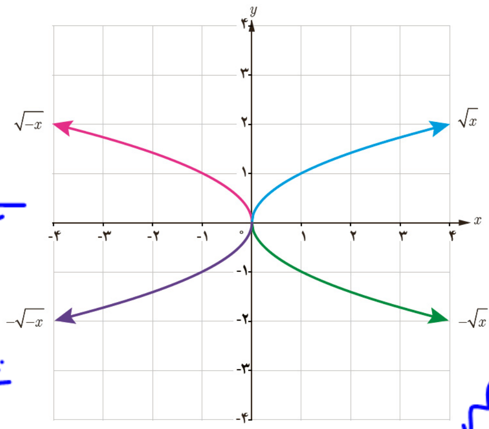
مثال ۵۹: نمودار توابع $\sqrt{-x}$ و $-\sqrt{x}$ و $-\sqrt{-x}$ را به کمک نمودار تابع $\sqrt{x}$ رسم کنید.

قرینه محوری

$\sqrt{-x}$ قرینه $\sqrt{x}$ نسبت به محور y ها

$-x\ge 0 \to x\le 0$ ضرب در (−۱)

اگر هم x را به −x تبدیل کنیم و هم کل تابع را در − ضرب کنیم شکل نسبت به مبدا مختصات قرینه می‌شود (قرینه مرکزی)

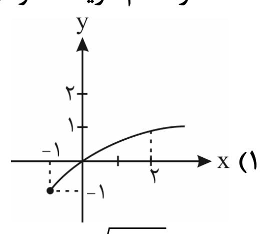


اگر تابع در علامت − ضرب شود نسبت به محور x ها قرینه می‌شود مثل $-\sqrt{x}$ که قرینه $\sqrt{x}$ نسبت به x است

قرینه محوری

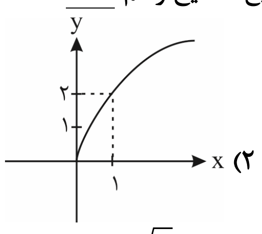
اگر x به −x تبدیل شود $(x\to -x)$ x ها رو برمی‌داریم به جاش −x می‌ذاریم شکل نسبت به محور y ها قرینه میشه مثل $\sqrt{-x}$

تست ۶۰: در کدام گزینه، نمودار تابع صحیح رسم نشده است؟



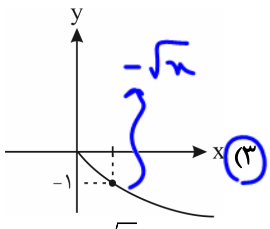
۱) $y=\sqrt{x+1}-1$

هرجا x دیدی $\sqrt{x}$ به اندازه ۱ واحد به چپ، ۱ واحد به پایین

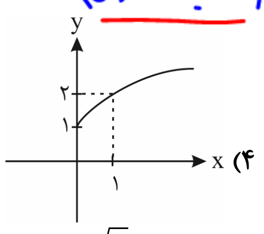


۲) $y=2\sqrt{x}$

عرض های $\sqrt{x}$ ضربدر ۲



۳) $y=\sqrt{x}-1$



۴) $y=\sqrt{x}+1$

$\sqrt{x}$ به اندازه ۱ واحد بالا بره

فرق این ۲ تا رو بیاموز!

$y=\sqrt{x+1}$

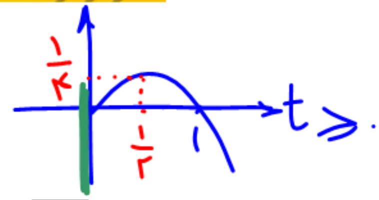
$\sqrt{x}$ که ۱ واحد به چپ بره

A را به محور عمود کن و به اندازه خودش ادامه بده

A را به نقطه O وصل و به اندازه خودش امتداد بده

$y=\sqrt{x-1}-(x-1) \xrightarrow{\sqrt{x-1}=t\geq 0} t-t^2=t(1-t)=0 \quad \begin{cases} t=0 \\ t=1 \end{cases}$

سهمی دهانه به پایین با ریشه ۲ تا $t=1$, $t=0$ رسم کنم



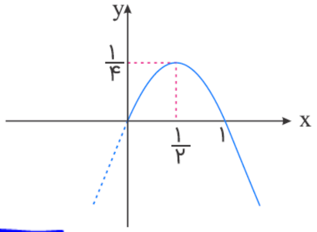
تست ۶۱: برد تابع $f(x)=\sqrt{x-1}+1-x$ کدام است؟

۱) $(-\infty,\frac{1}{4}]$ ۲) $[0,+\infty)$ ۳) $(-\infty,\frac{1}{2}]$ ۴) $(-\infty,1]$

جدول ها

پاسخ: گزینهٔ «۱» ـ با تغییر متغیر $t=\sqrt{x-1}$ ضابطهٔ تابع به صورت زیر درمی‌آید: $y=t-t^2$

برد سهمی فوق با دامنهٔ $[0,\infty)$، برابر برد تابع f است. این سهمی در شکل زیر رسم شده است:



برد سهمی فوق و در نتیجه برد f برابر $(-\infty,\frac{1}{4}]$ است.

$y=\frac{\sqrt{x-2}-1}{|2-x|-x} \xrightarrow{x\geq 2} \frac{\sqrt{x-2}-1}{-2+x-x}=-\frac{1}{2}(\sqrt{x-2}-1)$

$x-2\geq 0$ $x\geq 2$

تست ۶۲: برد تابع $f(x)=\frac{\sqrt{x-2}-1}{|2-x|-x}$ کدام است؟

۱) $(-\infty,\frac{1}{2}]$ ۲) $[\frac{1}{2},+\infty)$ ۳) $(-\infty,1]$ ۴) $[1,+\infty)$

پاسخ: گزینهٔ «۱» ـ به ازای مقادیر $x\geq 2$ عبارت زیر رادیکال نامنفی است و داریم $|2-x|=x-2$ و تابع به صورت زیر ساده می‌شود:

$$f(x)=\frac{\sqrt{x-2}-1}{|2-x|-x}=\frac{\sqrt{x-2}-1}{x-2-x}=\frac{\sqrt{x-2}-1}{-2}$$

تابع را با توجه به دامنه‌ی $x\geq 2$ می‌سازیم:

دقت!

دامنه

$$x\geq 2 \Rightarrow \sqrt{x-2}\geq 0 \Rightarrow \sqrt{x-2}-1\geq -1 \Rightarrow \frac{\sqrt{x-2}-1}{-2}\leq\frac{1}{2} \Rightarrow f(x)\leq\frac{1}{2} \Rightarrow R_f=(-\infty,\frac{1}{2}]$$

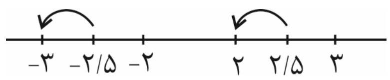
$x-2\geq 0$ جذر

۲ طرف ضرب در $-\frac{1}{2}$ جهت نامساوی عوض میشه

راه ۲: رسم به کمک انتقال زیرصفحه

جزء صحیح

جزء صحیح هر عددی مانند x را به شکل $[x]$ نمایش می‌دهیم و به این صورت تعریف می‌کنیم که اگر x عدد صحیح باشد جزء صحیح آن با خودش برابر است. مثلاً $[2]=2$ و اگر x عددی غیرصحیح باشد، اولین عدد صحیح قبل آن، برابر جزء صحیح x است. مـثلاً $[2/5]=2$ و $[-2/5]=-3$ می‌باشد.



خاصیت جزء صحیح

۱) خروجی جزء صحیح همواره یک عدد صحیح است، یعنی برای هر $x\in\mathbb{R}$: $[x]\in\mathbb{Z}$ مثلاً $[4]=4$ و $[\pi=3/14]=3$ و $[-0/6]=-1$.

۲) اگر عبارت داخل جزء صحیح یک عدد صحیح باشد می‌توانیم جزء صحیح را حذف می‌کنیم. یعنی برای هر $x\in\mathbb{Z}$ داریم: $[x]=x$.

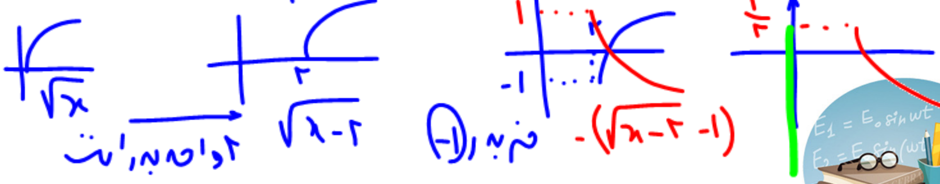
۳) اعداد ثابت و عبارت‌هایی که مطمئن هستیم صحیح هستند می‌توانیم از جزء صحیح خارج کنیم یعنی اگر $k\in\mathbb{Z}$ باشد $[x+k]=[x]+k$ است.

مثلاً $[x+3]$ همان $[x]+3$ است. به مثال‌های زیر توجه کنید:

۱) $[x+\overbrace{[x]}^{\in\mathbb{Z}}]=[x]+[x]=2[x]$

۲) $[x+\underbrace{2[x]}_{\in\mathbb{Z}}]=[x]+2[x]=3[x]$

$f(x)=\frac{\sqrt{x-2}-1}{-2}$ به واحد پایین $\sqrt{x-2}-1$ $-\frac{1}{2}(\sqrt{x-2}-1)$



۳) $[x-\underbrace{[x]}_{\in\mathbb{Z}}]=[x]-[x]=0$

۴) خاصیت روبه‌رو در برخی از تست‌ها مورد استفاده قرار می‌گیرد: $[2x]=[x]+[x+\frac{1}{2}]$

مثلاً اگر دامنهٔ تابع $y=\dfrac{2x}{[2x]-[x]}$ را بپرسند، داریم:

$$\text{مخرج}=0 \Rightarrow [2x]-[x]=0 \xrightarrow{[2x]=[x]+[x+\frac{1}{2}]} \cancel{[x]}+[x+\tfrac{1}{2}]-\cancel{[x]}=0$$

$$\Rightarrow [x+\tfrac{1}{2}]=0 \xrightarrow[k\le u<k+1]{[u]=k\,,\,k\in\mathbb{Z}} 0\le x+\tfrac{1}{2}<1 \xrightarrow{-(\frac{-1}{2})} \tfrac{-1}{2}\le x<\tfrac{1}{2}$$

$$\Rightarrow D_f=\mathbb{R}-[\tfrac{-1}{2},\tfrac{1}{2})=(-\infty,\tfrac{-1}{2})\cup[\tfrac{1}{2},+\infty)$$

۵) برای هر $k\in\mathbb{Z}$ داریم: $[x]=k \Rightarrow k\le x<k+1$ یعنی اگر $[x]=2$ باشد، حدود x به صورت $2\le x<3$ است.

۶) مجموع عبارت‌های $[x]$ و $[-x]$ را می‌توان به صورت یک تابع دو ضابطه‌ای به شکل زیر نوشت:

$$[x]+[-x]=\begin{cases}0 & x\in\mathbb{Z}\\ -1 & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$$

اگر $[x]$ را به سمت راست تساوی ببریم، در این صورت داریم:

اگر $x\in\mathbb{Z} \Rightarrow [-x]=-[x]$

اگر $x\notin\mathbb{Z} \Rightarrow [-x]=-[x]-1$

۷) همواره رابطهٔ $[x]+[y]\le[x+y]$ برقرار است.

به مقایسهٔ مقابل توجه کنید:

$$\begin{cases}|x+y|\le|x|+|y|\\ [x]+[y]\le[x+y]\end{cases}$$

۸) برای هر دو عدد حقیقی x و y، مقدار $[x+y]$ می‌تواند دو مقدار متمایز زیر را اختیار کند:

$[x+y]=[x]+[y]$ یا $[x]+[y]+1$

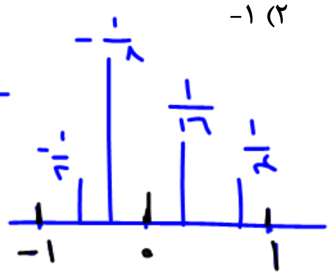
تست ۶۳: اگر $x^2+x<0$، آن‌گاه $[x]+[x^2]+[x^3]+[x^4]$ کدام است؟ (خارج تجربی)

۱) -2 ۲) -1 ۳) صفر ۴) ۱

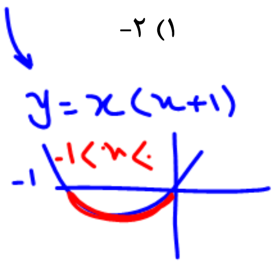
$x^2+x=x(x+1)<0$

x		-1		0	
	$+$	0	$-$	0	$+$

جواب: $-1<x<0$ ← یه عدد تعیین کن: $x=-\frac{1}{2}$



یا



$$\underbrace{[x=-\tfrac{1}{2}]}_{-1}+\underbrace{[x^2=(-\tfrac{1}{2})^2=\tfrac{1}{4}]}_{\text{صفر}}+\underbrace{[(-\tfrac{1}{2})^3=-\tfrac{1}{8}]}_{-1}+\underbrace{[(-\tfrac{1}{2})^4=\tfrac{1}{16}]}_{\text{صفر}}=-2$$

تست ۶۴: اگر $[\frac{x}{2}]=1$ باشد، حاصل $\sqrt{x^2-4x+4}+\sqrt{x^2-8x+16}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

$1 \le \frac{x}{2} < 2 \xrightarrow{\text{ضرب در ۲}} 2 \le x < 4$

به عدد نشون مثل $x=3$

$\sqrt{(x-2)^2}+\sqrt{(x-4)^2}=|\overset{+}{x-2}|+|\overset{-}{x-4}|=x-2-x+4=2$

تست ۶۵: در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=x^2-2[x]$، مقدار $f(-\frac{1}{2}f(\sqrt{3}))$ کدام است؟ (سراسری تجربی خارج از کشور ۹۰)

۱) ۱/۷۵ ۲) ۲/۲۵ ۳) ۲/۵ ۴) ۲/۷۵

$f(-\frac{1}{2}\underbrace{f(\sqrt{3})}) = f((-\frac{1}{2})(1)=-\frac{1}{2})=f(-\frac{1}{2})=(-\frac{1}{2})^2-2[-\frac{1}{2}]=\frac{1}{4}-2(-1)=2.25$

بازی از داخلی‌ترین تابع شروع میشه

$f(\sqrt{3})=(\sqrt{3})^2-2[\sqrt{3}=1.7]=3-2(1)=3-2=1$

تست ۶۶: اگر $[x^2-6x]=[x^2-10x]=7$ باشد، حاصل $[(x-4)^2]$ کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۱۶ ۳) ۲۴ ۴) ۲۳

$[x^2-6x]=7 \rightsquigarrow 7 \le x^2-6x < 8$

$[x^2-10x]=7 \rightsquigarrow 7 \le x^2-10x < 8$

$+$

$14 \le 2x^2-16x < 16 \xrightarrow{\div 2} 7 \le x^2-8x < 8$

$[(x-4)^2]=[x^2-8x+16]=[\underbrace{x^2-8x}_{7}]+16=7+16=23 \rightsquigarrow$ گ۴

تست ۶۷: اگر $(1+\sqrt{2})^6+(1-\sqrt{2})^6=198$، جزء صحیح عدد $(1+\sqrt{2})^6$ کدام است؟

۱) ۱۹۵ ۲) ۱۹۶ ۳) ۱۹۷ ۴) ۱۹۸

$[(1+\sqrt{2})^6]=[198-(1-\sqrt{2})^6=198-(1-1.4=-0.4)^6=198-\varepsilon=197.\ldots]=197$

اپسیلون منظور یک عدد ریز مثبته

یه عدد طبیعی بزرگتر از ۲ دلخواه انتخاب کن و به عبارت بده: مثلاً $n=3$

تست ۶۸: برای هر عدد طبیعی $n > ۲$، حاصل $[\sqrt{۴n^۲ - ۳n + ۱}] - ۲[\sqrt{n^۲ - ۲n}]$ کدام است؟ (سراسری تجربی ۹۱)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

$$\left[\sqrt{4(3)^2-3(3)+1} = \sqrt{28} = 5,\dots\right] - 2\left[\sqrt{3^2-2(3)} = \sqrt{9-6} = \sqrt{3} = 1/7\right]$$

$$5-2(1) = 5-2 = 3 \qquad \underline{3} =$$

خیلی مهم

$3 \leq x < 4$

تست ۶۹: اگر $[x-۲]=۱$ باشد، نمودارهای دو تابع $f(x)=|x-۳|-|x-۴|$ و $g(x)=۲x^۲+x-۱۷$ در چند نقطه مشترک هستند؟

$f(x): x-3+x-4 = 2x-7$; $f(x) = 2x-7$

$[x]-2=1$; $[x]=3$; $3 \leq x < 4$; $x: 3,5$ از ۳ تا ۵

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) فاقد نقطه‌ی مشترک ✓

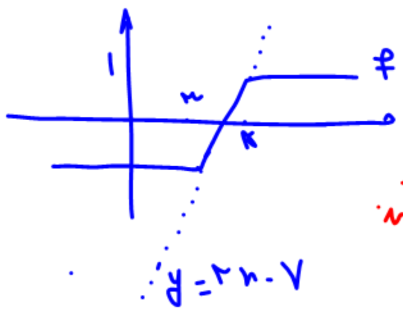
گزینه $\boxed{4}$

$$2x^2+x-17 = 2x-7 \longrightarrow \overset{\text{ضرب}}{2}x^2 - x - 10 = 0 \longrightarrow x^2-x-20=0$$

$(x+4)(x-5)=0$

$x_1 = -4 \longrightarrow x_1 = -\frac{4}{2} = -2$

$x_2 = 5 \longrightarrow x_2 = \frac{5}{2} = 2/5$



هیچ یک از بازه $3 \leq x < 4$ نیستند

تست ۷۰: معادله‌ی $[x]+[x^۲]=\frac{x}{۲}$ چند جواب دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ✓ ۳) ۲ ۴) ۳

جمع ۲ تا جزء صحیح یک عدد صحیح است پس باید $\frac{x}{2} = k \in Z$ ، $x=2k$ پس x یک عدد زوج و صحیح است و x^2 هم صحیح است پس x و x^2 از براکت خارج می‌شوند:

$x + x^2 = \frac{x}{2}$

$\frac{x}{2} + x^2 = 0 \longrightarrow x(\frac{1}{2}+x) = 0 \begin{cases} x=0 & \text{زوج صحیح است} \longrightarrow \text{یک جواب دارد } x=0 \\ x = -\frac{1}{2} \neq 2k \end{cases}$

مهم

تست ۷۱: دامنه و برد تابع $f(x)=\frac{x-[x]}{\sqrt{[x]+[-x]+۱}}$، کدام است؟

$[x]+[-x] = \begin{cases} 0 & x \in Z \text{ می‌دانیم} \\ -1 & x \notin Z \end{cases}$

۱) $D_f = \mathbb{N} , R_f = \{۰\}$ ۲) $D_f = \mathbb{Z} , R_f = \{۰\}$ ✓

۳) $D_f = \mathbb{R}-\mathbb{Z} , R_f = [۰,۱)$ ۴) $D_f = \mathbb{R}-\mathbb{N} , R_f = [۰,۱)$

$$f(x) = \frac{x-[x]}{\sqrt{\underbrace{[x]+[-x]}+1}}$$

$\text{if } x \in Z \quad f(x) = \frac{x-x}{\sqrt{0+1}} = \frac{\text{صفر}}{1} = 0$

$\text{if } x \notin Z \quad f(x) = \frac{x-[x]}{\sqrt{-1+1}}$ صفر مطلق = تعریف نشده

$D_f: Z \quad R_f: \{0\}$ برای تک نقطه‌ها داریم

راه دوم: دو تا عدد دلخواه به عبارت می‌دهیم که ببینیم خروجی چه اعدادی خواهد شد؟

دلخواه $x=0$: $[\frac{0-1}{2}] + [\frac{3-0}{2} = 1/5] = -1 + 1 = 0$ ($-0/5$)

تست ۷۲: حاصل عبارت $[\frac{x-1}{2}]+[\frac{3-x}{2}]$ چه اعدادی می‌تواند باشد؟

۱) صفر و ۱ ۲) صفر و ۱- ۳) ۱- و ۲- ۴) ۱ و ۲

دلخواه $x=1$: $[\frac{1-1}{2}] + [\frac{3-1=2}{2} = 1] = 0 + 1 = 1$

پاسخ: گزینه‌ی «۱» صحیح است.

عبارت را ساده می‌کنیم و از خاصیت‌ها استفاده می‌کنیم:

$$[\frac{x-1}{2}]+[\frac{3-x}{2}]=[\frac{x-1}{2}]+[\frac{2+1-x}{2}]=[\frac{x-1}{2}]+[\frac{1-x}{2}+1]=[\underbrace{\frac{x-1}{2}}_{u}]+[\underbrace{\frac{1-x}{2}}_{-u}]+1$$

چون $[u]+[-u]=\begin{cases}0 & u\in\mathbb{Z}\\ -1 & u\notin\mathbb{Z}\end{cases}$، پس:

$$\underbrace{[\frac{x-1}{2}]+[\frac{1-x}{2}]}_{\text{صفر یا } -1}+1=\text{۱ یا صفر}$$

تست ۷۳: مجموعهٔ جواب معادلهٔ $[x]-[-x]=3$ کدام است؟ ([ ] علامت جزء صحیح است.)

۱) $[0,1)$ ۲) $[1,2)$ ۳) $\{\frac{3}{2}\}$ ۴) $(1,2)$

پاسخ: گزینهٔ «۴»

نکته:
$$[-x]=\begin{cases}-[x] & x\in\mathbb{Z}\\ -[x]-1 & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$$

شرط:

اگر $x\in\mathbb{Z} \Rightarrow [x]-(-[x])=3 \Rightarrow 2[x]=3 \Rightarrow [x]=\frac{3}{2}$ غ.ق.ق

اگر $x\notin\mathbb{Z} \Rightarrow [x]-(-[x]-1)=3 \Rightarrow 2[x]+1=3 \Rightarrow [x]=1 \rightsquigarrow 1\le x<2 \xrightarrow{x\notin\mathbb{Z}} x\in(1,2)$

$2[x]=2$

مهم

تست ۷۴: اگر $\frac{4-2x}{3x+1}\ge 0$ باشد، مجموعه مقادیر $[3x]$ چند عضو دارد؟ (تجربی ۱۴۰۱)

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۵

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		2		$+\infty$
$\frac{4-2x}{3x+1}\ge 0$		$-$	ت‌ن	$+$	0	$-$	

جواب $-\frac{1}{3}<x\le 2 \xrightarrow{\text{طرفین ضرب در ۳}} -1<3x\le 6$

$[3x]:\{-1,0,1,2,3,4,5,6\}$ ۸ عضو

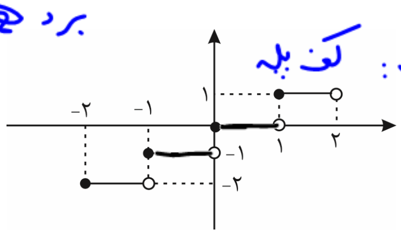
نمودارهای معروف براکتی

شکل‌های بسیار مهم توابع معروف براکتی (شامل جزء صحیح)

اگر دامنه $\mathbb{R}$ باشد برد هم $\mathbb{Z}$ است.

طول کف پله $[ax]$: برابر $\frac{1}{|a|}$ است: کف پله

۱) $y=[x]$



توجه کنید در تابع $y=[x]$، طول هر پله یک واحد است و نقاط سمت چپ همگی توپر می‌باشند. این‌جا به صورت دلخواه در بازهٔ $(-2,2)$ آن را رسم کردیم. اگر بازه به صورت $[-2,2]$ باشد (یعنی انتهای بازه بسته باشد) نقطهٔ $x=2$ را جداگانه بررسی می‌کنیم و داریم:

$$x=2 \Rightarrow y=[2]=2 \Rightarrow A(2,2)$$

$y = x - [x]$
$-1 \le x < 0 \rightsquigarrow y = x + 1$
$0 \le x < 1 \rightsquigarrow y = x$
$1 \le x < 2 \rightsquigarrow y = x - 1$
$2 \le x < 3 \rightsquigarrow y = x - 2$

نکته: در توابع شامل $[x]$ در هر زیربازه $[x]$ رو برمی‌داریم (یک ثابت) به جاش عدد می‌ذاریم.

و این یعنی به شکل بالا باید نقطهٔ $A(2,2)$ نیز اضافه شود.

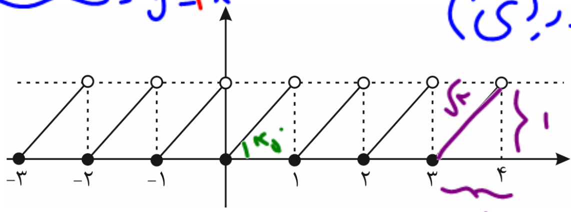
معرفی $y = x - [x]$ تابع جزء اعشاری (خوردی)

Partial: $P = x - [x]$

$2.3 - [2.3] = 0.3 = P$
$2 - [2] = 0 = P$
$-2.3 - [-2.3] = 0.7 = P$

۲) $y = x - [x]$

$D_f : \mathbb{R}$
$R_f : [0,1)$



دارا ثابت و صعودی
خوردی $x \ge 0$
دارا منفی نیست

ویژگی‌های تابع $y = x - [x]$

۱) دامنهٔ $\mathbb{R}$

۲) برد $[0,1)$ یعنی: $0 \le x - [x] < 1$ — برد (خوردی) $[0,1)$

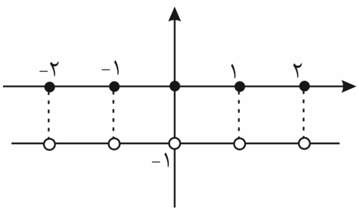
۳) در نقاط $x \in \mathbb{Z}$ حد ندارد و ناپیوسته است ولی در سایر نقاط حد دارد و پیوسته است.

۴) طول هر پله $\sqrt{2}$ واحد است.

۵) متناوب است با دورهٔ تناوب $T = 1$

در این‌جا به طور دلخواه آن را در بازهٔ $[-3,4)$ رسم کردیم.

۳) $y = [x] + [-x] = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Z} \\ -1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$



ویژگی‌های تابع $y = [x] + [-x]$

۱) دامنهٔ $\mathbb{R}$

۲) برد دو عضوی $R_f = \{-1, 0\}$

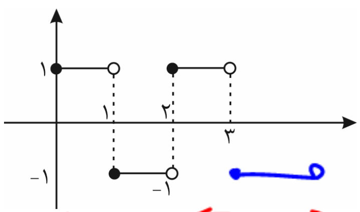
۳) در نقاط $x \in \mathbb{Z}$ ناپیوسته است.

۴) در تمام نقاط دارای حد ۱- است یعنی $\lim\limits_{x \to a \in \mathbb{R}} [x] + [-x] = -1$

۵) متناوب است با دورهٔ تناوب $T = 1$.

۶) نمودار به ازای اعداد صحیح صفر می‌شود و ریشه می‌دهد و به ازای سایر اعداد، ۱- می‌شود.

۴) $y = (-1)^{[x]}$ $\quad 0 \le x < 3$



عشق فراح

$T=2 \quad T=2$

$0 \le x < 1 \rightsquigarrow y = (-1)^0 = 1$
$1 \le x < 2 \rightsquigarrow y = (-1)^1 = -1$
$2 \le x < 3 \rightsquigarrow y = (-1)^2 = 1$
$3 \le x < 4 \rightsquigarrow y = (-1)^3 = -1$

ویژگی‌های $y = (-1)^{[x]}$

در این‌جا به طور مثال در بازهٔ $[0,3)$ رسمش کردیم.

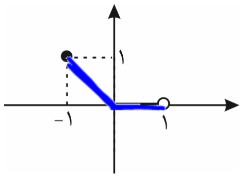
۱) دامنهٔ $\mathbb{R}$

۲) برد دو عضوی $R_f = \{-1, 1\}$

۳) در نقاط $x \in \mathbb{Z}$ حد ندارد و ناپیوسته است.

بازه را ۱ cm ۱ cm بشکن
در هر زیربازه براکتو بردار
عدد بذار

۴) متناوب است با دورهٔ تناوب $T=2$.



۵) $y=x[x]$ $\qquad -1\le x<1$

$-1\le x<0 \rightsquigarrow y=x(-1)=-x$

$0\le x<1 \rightsquigarrow y=x(0)=0$

در این‌جا به طور مثال در بازهٔ $[-1,1)$ رسمش کردیم.

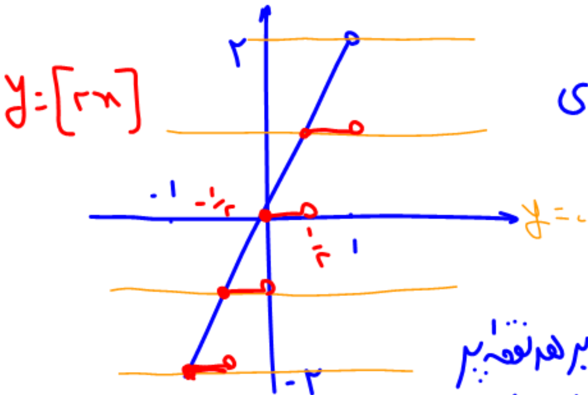
توجه کنید نقطهٔ $x=0$ برای این تابع، نقطهٔ گوشه به حساب می‌آید.

رسم نمودار $y=[ax]$

تابع $y=[ax]$ از روی تابع $y=[x]$ رسم می‌شود. فقط توجه کنید که طول هر پله $\frac{1}{|a|}$ برابر می‌شود. مثلاً در رسم $y=[\frac{x}{2}]$ که $a=\frac{1}{2}$ است طول پله‌ها $2=\frac{1}{\frac{1}{2}}$ برابر و در رسم $y=[2x]$ که $a=2$ است طول پله‌ها $\frac{1}{2}$ برابر می‌شود.

نور

مثال ۷۵: تابع $y=[2x]$ را در بازهٔ $[-1,1)$ رسم کنید.



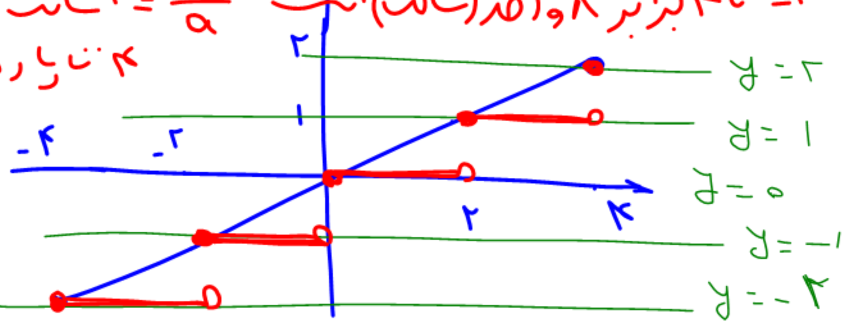
طرز رسم $y=[u]$ با داشتن $y=u$: ابتدا $y=u$ را رسم کنید. سپس خط‌های متوالی $y=k$ و $y=k+1$ که $k\in Z$ را بکشید. هر جا $y=u$ به این خط‌ها برخورد کرد را پررنگ کنید. از بالا به تابع نور بتابانید. سایه بخش‌هایی که بین ۲ خط متوالی هستند را روی خط پایینی‌تر بیاندازید. زیر هر نقطه پر یک نقطه توخالی داریم. که تا [illegible] ببندید.

مثال ۷۶: نمودار تابع $y=[\frac{x}{2}]$ را در بازهٔ $[-4,4]$ رسم کنید.

از -4 تا 4 برابر ۸ واحد (سانت) است. $2=\frac{1}{a}$ سانت ۲ سانت بشکنید پس ۴ تا بازه خط شد و یک نقطه $A(4,2)$

$a=\frac{1}{2}$

$2=\frac{1}{a}$



تست ۷۷: معادله‌ی $x=[x]+\frac{1}{5}$ در فاصله‌ی $(-2,3)$ چند جواب دارد؟ $\frac{1}{5}=\frac{2}{10}=0.2$

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

چون $[x]$ داریم بازه را یک سانت یک سانت بشکن

$-2\le x<-1 \longrightarrow x=\frac{1}{5}+(-2)=-1.8$

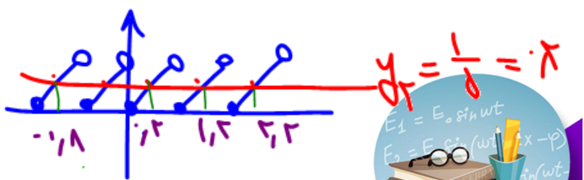
$-1\le x<0 \longrightarrow x=\frac{1}{5}+(-1)=-0.8$

$0\le x<1 \longrightarrow x=\frac{1}{5}+0=0.2$

$1\le x<2 \longrightarrow x=\frac{1}{5}+1=1.2$

$2\le x<3 \longrightarrow x=\frac{1}{5}+2=2.2$

$\underbrace{x-[x]}_{y_1}=\underbrace{\frac{1}{5}}_{y_2}$



نکته: برای تست ۷۷: یکی از روش‌های حل معادله، تبدیل معادله به تساوی ۲ تابع قابل رسم است. هر ۲ را روی یک دستگاه رسم می‌کنیم. تعداد نقاط برخورد ۲ تابع، تعداد ریشه‌هاست. در تست ۷۷، y_1 و y_2 ۵ برخورد داشتند.

تست ۷۸: برد تابع $y = x - ۲[\frac{x}{۲}+۱]$ کدام است؟

۱) $[-۲,۰)$ ۲) $[-۱,۲]$ ۳) $[۰,۲]$ ۴) $[-۱,۱)$

راه یک: به عدد دلخواه ۰=x به تابع می‌دهیم خروجی ۲- می‌گیریم. تنها گزینه‌ای که ۲- دارد یک است.

راه ۲: $y = x-۲([\frac{x}{۲}]+۱) = x - ۲[\frac{x}{۲}] - ۲ = ۲(\frac{x}{۲}-[\frac{x}{۲}]) - ۲$

$= ۲(۰ \le u-[u]<۱)-۲$

$= (۰ \le \quad <۲)-۲ \to -۲\le y<۰$ تست ①

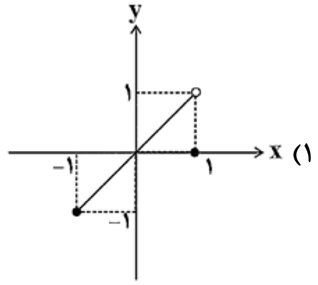
$u-[u]$ تولید می‌کنیم، می‌دانیم $۰\le u-[u]<۱$.

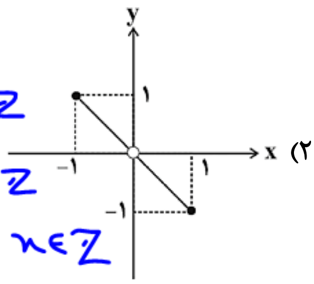
تست ۷۹: نمودار تابع $y = x([-x]+[x])$ با دامنهٔ $-۱ \le x \le ۱$ کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

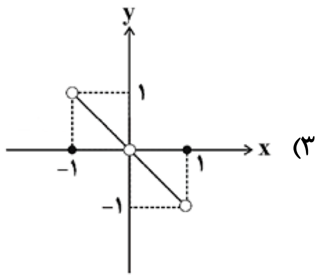
می‌دانیم: تابع جنبی معروف

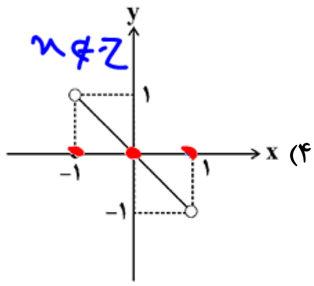
$[x]+[-x] = \begin{cases} ۰ & x\in Z \\ -۱ & x\notin Z \end{cases}$

$y = x(\underbrace{[x]+[-x]}_{\text{با صفر یا } -۱}) \begin{cases} ۰ & x\in Z \\ -x & x\notin Z \end{cases}$









پاسخ: گزینهٔ «۴» ـ راه‌حل اول: عددگذاری:

$$x = ۱ \xrightarrow{\text{در ضابطهٔ تابع قرار می‌دهیم}} y = ۱([-۱]+[۱]) = ۱\times\underbrace{(-۱+۱)}_{۰} = ۰$$

$x = ۰ \Rightarrow y = ۰$

$x = -۱ \Rightarrow y = ۰$

یعنی تابع در سه نقطهٔ دلخواهی که دادیم مقداری برابر با صفر دارد که این سه نقطه فقط در نمودار گزینهٔ (۴) صدق می‌کند.

راه‌حل دوم:

نکته: $y = [x]+[-x] = \begin{cases} -۱ & x\notin \mathbb{Z} \\ ۰ & x\in \mathbb{Z} \end{cases}$

با توجه به نکته داریم:

$$\begin{cases} -۱ < x < ۱ \xrightarrow[x\notin\mathbb{Z}]{x\neq ۰} y = -x \\ x = -۱,۰,۱ \Rightarrow y = ۰ \end{cases}$$

تابع رسم‌شده در گزینهٔ (۴) در نقاط $x = -۱,۰,۱$ مقداری برابر با صفر دارد و در $-۱ < x < ۱$ برابر با $y = -x$ است.

مثال ۸۰: نمودار تابع $y=۲\left[\frac{x}{۲}\right]+۱\ ;\ x\in[-۲,۶)$ ازچند پاره خط مساوی هم تشکیل شده است؟ (تجربی خارج)

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

از $x=-۲$ تا $x=۶$ برابر ۸ واحد است تابع ما $\frac{۱}{a=\frac{۱}{۲}}=۲$ واحد ۲ واحد می‌شکند
۸ واحد ۴ تا ۲ واحدی است. گزینه ② درسته.

دقت: در $y=②\left[\frac{x}{۲}\right]+①$ بی‌تاثیره، تعداد پاره‌خط‌ها هستند چرا که ۲ تا براکت عرض‌های $\left[\frac{x}{۲}\right]$ ۲ برابر می‌کند دیگر ① تابع را فقط ① واحد بالا می‌برد و در تعداد پاره‌خط‌ها تاثیر ندارند.

تابع مرکّب

به شکل زیر دقّت کنید، می‌خواهیم با هم فرآیند آن را مرور کنیم. اگر x را به عنوان ورودی به ماشین g دهیم، خروجی آن $g(x)$ خواهد بود، حال این خروجی را به عنوان ورودی به ماشین f می‌دهیم و در نتیجه خروجی $f(g(x))$ حاصل می‌شود که ما آن را $fog(x)$ می‌نامیم. پس در واقع می‌توانیم بگوییم $fog(x)$، ماحصل رفتار ماشین h است وقتی به آن ورودی x را می‌دهیم.

$$x \xrightarrow{\text{ورودی}} \boxed{g} \xrightarrow{\text{خروجی}} g(x) \xrightarrow{\text{ورودی}} \boxed{f} \xrightarrow{\text{خروجی}} fog(x)$$

h

مثال ۸۱: اگر $f=\{(۱,۲),(۳,-۱),(۲,۰),(-۱,۴),(۵,-۷)\}$ و $g=\{(۰,-۱),(۵,۲),(۳,۵),(-۲,۴)\}$، تابع fog را در صورت امکان بنویسید.

اول g کاری کنند

$f(g(x))=\{(۰,۴),(۵,۰),(۳,-۷)\}$

$g(۰)=-۱ \quad f(-۱)=۴$
$g(۵)=۲ \quad f(۲)=۰$
$g(۳)=۵ \quad f(۵)=-۷$
$g(-۲)=۴ \quad f(۴)=$ ت.ن

تست ۸۲: اگر $f=\{(۱,۱),(۲,۳),(۳,۳),(۴,۲)\}$ و $g=\{(۱,۲),(۲,۳),(۳,۱),(۴,۶)\}$ باشد، برد تابع fog چند عضو دارد؟

۱) هیچ ۲) یک ۳) دو ۴) سه

پاسخ: گزینه‌ی «۳» ـ اول x را در g قرار می‌دهیم (چون در fog، تابع g تابع درونی است) و بعد حاصلش را در f:

$۱ \xrightarrow{g} ۲ \xrightarrow{f} ۳ \Rightarrow (۱,۳)$ $\qquad ۲ \xrightarrow{g} ۳ \xrightarrow{f} ۳ \Rightarrow (۲,۳)$

$۳ \xrightarrow{g} ۱ \xrightarrow{f} ۱ \Rightarrow (۳,۱)$ $\qquad ۴ \xrightarrow{g} ۶ \xrightarrow{f} \boxtimes$

پس fog به صورت $fog=\{(۱,۳),(۲,۳),(۳,۱)\}$ است که بردش برابر $R=\{۱,۳\}$ می‌باشد و دو عضو دارد.

تست ۸۳: اگر $f=\{(۱,۲),(۲,۳),(۳,۴),(۴,۵)\}$ باشد، تابع $((fof)-f)$ چگونه تابعی است؟

۱) تهی　　۲) همانی　　۳) ثابت　　۴) خطی

پاسخ: گزینه‌ی «۳» ـ ابتدا fof را پیدا می‌کنیم:

$$\begin{aligned} &۱ \xrightarrow{f} ۲ \xrightarrow{f} ۳ \Rightarrow (۱,۳)\\ &۲ \xrightarrow{f} ۳ \xrightarrow{f} ۴ \Rightarrow (۲,۴)\\ &۳ \xrightarrow{f} ۴ \xrightarrow{f} ۵ \Rightarrow (۳,۵)\\ &۴ \xrightarrow{f} ۵ \xrightarrow{f} \boxtimes \end{aligned} \Rightarrow fof=\{(۱,۳),(۲,۴),(۳,۵)\}$$

حالا $((fof)-f)$ را تشکیل می‌دهیم: $((fof)-f)=\{(۱,۱),(۲,۱),(۳,۱)\}$

می‌بینیم که $((fof)-f)$ همواره مقداری ثابت یعنی برابر ۱ دارد؛ پس تابع ثابت است.

تست ۸۴: $f=\{(۲,۱),(۳,۲),(۴,۵),(۱,۷)\}$ و $g=\{(۱,۲),(۳,۱),(a,۳),(b,۱)\}$ مفروض‌اند. اگر $(۴,۲)\in fog$ و $(۴,۱)\in gof$ باشند، دوتایی مرتب (a,b) کدام است؟ (سراسری ریاضی)

۱) $(۳,۴)$　　۲) $(۴,۳)$　　۳) $(۴,۵)$　　۴) $(۵,۴)$

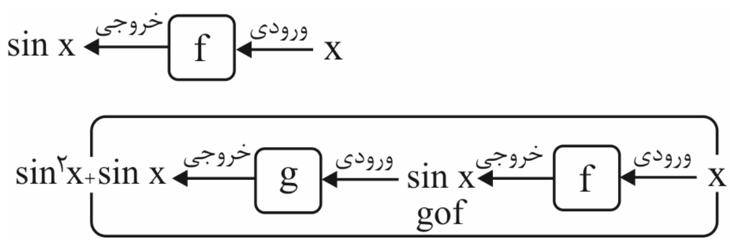
پاسخ: گزینهٔ «۳»　طبق فرض مسئله از آن‌جایی که $(۴,۱)\in gof$، پس $(gof)(۴)=۱$ است، در نتیجه داریم:

$$g(f(۴))=۱ \xrightarrow{f(۴)=۵} g(۵)=۱ \xrightarrow{g(b)=۱} b=۵$$

همچنین $(۴,۲)\in fog$، پس $(fog)(۴)=۲$ است، یعنی باید عدد ۴ در دامنهٔ تابع g که به صورت $g=\{(۱,۲),(۳,۱),(a,۳),(۵,۱)\}$ باشد، خیلی واضح است که باید $a=۴$ باشد. در نهایت خواستهٔ مسئله برابر $(a,b)=(۴,۵)$ است.

ترکیب تابع با ایده‌ی ماشین

اگر هر تابع را به عنوان یک ماشین در نظر بگیریم که x را به عنوان یک مقدار ورودی می‌پذیرد و مقدار $f(x)$ را به عنوان خروجی تحویل می‌دهد می‌توانیم ترکیب تابع‌ها را به عنوان ترکیب ماشین‌ها که به دنبال هم روی یک مقدار ورودی x اثر می‌گذارند در نظر بگیریم. مثلن اگر $f(x)$ تابعی با ضابطه‌ی $f(x)=\sin x$ و $g(x)$ تابعی با ضابطه‌ی $g(x)=x^۲+x$ باشد، ترکیب این دو تابع را می‌توانیم به شکل زیر نشان دهیم:



تست ۸۵: اگر $f(x)=\dfrac{۲x+۳}{۲-x}$ و $g(x)=\dfrac{۱-۳x}{x+۲}$ باشند، ضابطه‌ی تابع $g(f(x))$ کدام است؟ (تجربی خارج ۹۶)

۱) x　　۲) $-x$　　۳) $-x-۱$　　۴) $x+۱$

$$g(f(x))=\frac{۱-۳f(x)}{f(x)+۲}=\frac{۱-۳\left(\frac{۲x+۳}{۲-x}\right)}{\frac{۲x+۳}{۲-x}+۲}\ \frac{\text{عدد دلخواه مثلاً } x=۱}{}\ \frac{-۱۴}{۷}=-۲$$

تنها گزینه‌ای که با $x=۱$ برابر -۲ شده گزینه ۳ است.

قدر منفی خوره منفی روی خوره

$|-U| = |U|$

$|U| = \begin{cases} \text{خودش} & \text{توش مثبته} \\ \text{قرینش} & \text{توش منفیه} \end{cases}$

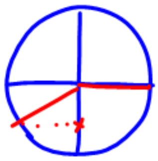
تست ۸۶: اگر $f(x) = ۲ - |x-۲|$ ، ضابطه‌ی تابع $f(f(x))$ برابر کدام است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور ۹۰)

۱) x ۲) $۴-x$ ۳) $f(x)$ ✓ ۴) $۲-f(x)$

$$f(f(x)) = ۲ - |f(x) - ۲| = ۲ - \big|۲ - |x-۲| - ۲\big| = ۲ - \underbrace{\big|-|x-۲|\big|}_{\text{قدر منفی خوره}} = ۲ - \big|x-۲\big|$$

$$= ۲ - |x-۲| = f(x)$$

تست ۸۷: اگر $f(x) = \dfrac{\sqrt{۱-x^۲}}{x}$ و $g(x) = \cos x$ باشند، ضابطهٔ تابع $y = f(g(x))$ کدام است؟ (x در ربع سوم است.)



۱) $\cot x$ ۲) $\tan x$ ۳) $-\tan x$ ۴) $-\cot x$

$\sin^۲x + \cos^۲x = ۱$

پاسخ: گزینهٔ «۳» ـ ضابطهٔ تابع $y = f(g(x))$ را به دست می‌آوریم. ببینید:

$$y = f(g(x)) = f(\cos x) = \frac{\sqrt{۱-\cos^۲ x}}{\cos x} = \frac{\sqrt{\sin^۲ x}}{\cos x} = \frac{|\sin x|}{\cos x} = -\frac{\sin x}{\cos x} = -\tan x$$

از طرفی x در ربع سوم است، پس $\sin x$ عددی منفی است، در نتیجه خواهیم داشت:

$$y = f(g(x)) = \frac{|\sin x|}{\cos x} = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x$$

تست ۸۸: اگر خروجی ماشین مقابل $\frac{۴}{۳}$ باشد، مقدار ورودی کدام است؟ (سراسری ریاضی)

ورودی $\rightarrow \boxed{۲x-۲} \rightarrow \boxed{\dfrac{x}{\sqrt{x}+۱}} \rightarrow$ خروجی

۱) $\frac{۱۱}{۹}$ ۲) $\frac{۷}{۲}$ ۳) ۳ ۴) ۴

با کنترل نزنید

تست ۸۹: اگر $f(x) = \dfrac{x}{x-۱}$ باشد، ضابطه تابع $f(x^۲) - ۲f(x) + ۱$ کدام است؟

۱) $\dfrac{۱}{۱-x^۲}$ ۲) $\dfrac{۲x}{x^۲-۱}$ ۳) $\dfrac{۲x+۱}{۱-x^۲}$ ۴) $\dfrac{۲x-۱}{x^۲-۱}$

$$\frac{x^۲}{x^۲-۱} - \frac{۲x}{x-۱} + ۱ \xrightarrow{\text{عدد گذاری } x=۲} \frac{۴}{۳} - ۴ + ۱ = \frac{۴-۱۲+۳}{۳} = -\frac{۵}{۳}$$

گزینه ۳ به ازای $x=۲$ حاصل $-\frac{۵}{۳}$ می‌شود

$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$(x-2)^3 = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$

بکش تا بشه $(x-2)^3$

تست ۹۰: اگر $\underbrace{f(x) = x^{3} - 6x^{2} + 12x}+5$ باشد، آن‌گاه $f(\sqrt[3]{3}+2)$ کدام است؟

۱) صفر　　۲) $(\sqrt[3]{3}+1)^{3}-1$　　۳) ۵　　۴) ۱۶ ✓

$f(x) = (x^3 - 6x^2 + 12x - 8) + 13 = (x-2)^3 + 13$

$f(x) = (x-2)^3 + 13$

$f(\sqrt[3]{3}+2) = (\sqrt[3]{3}+\cancel{2}-\cancel{2})^3 + 13 = 3 + 13 = 16$

$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

تست ۹۱: اگر $f(x) = \dfrac{\sqrt{2}x}{3x-\sqrt{2}}$ باشد، حاصل $fofof(\sqrt{2})$ کدام است؟ (ریاضی ۱۴۰۱)

۱) $\frac{1}{2}$　　۲) $\frac{1}{\sqrt{2}}$　　۳) $\sqrt{2}$　　۴) ۲

$\frac{\sqrt{2}}{2}$

$f(f(f(\sqrt{2})))$　$f(\sqrt{2})$ قبلاً حساب کردم $= \frac{1}{\sqrt{2}}$ *

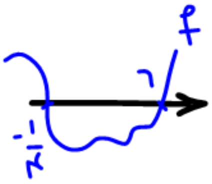
$\sqrt{2}\sqrt{2}$

$f(\sqrt{2}) = \dfrac{\sqrt{2}(\sqrt{2})}{3\sqrt{2}-\sqrt{2}} = \dfrac{2}{2\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} * = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

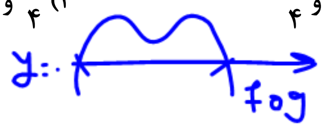
$f(\frac{\sqrt{2}}{2}) = \dfrac{\sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}) = 1}{3(\frac{\sqrt{2}}{2})-\sqrt{2} = \frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

تست ۹۲: تابع با ضابطه‌ی $g(x) = x - \sqrt{x}$ مفروض است. اگر نمودار تابع f، محور xها را در دو نقطه به طول‌های ۶ و $-\frac{1}{4}$ قطع کند، آنگاه، نمودار تابع fog، محور xها را با کدام طول قطع می‌کند؟ (سراسری ریاضی خارج ۹۴)

۱) ۴ و $\frac{1}{9}$　　۲) ۹ و $\frac{1}{4}$　　۳) $\frac{1}{4}$ و ۴　　۴) ۹ و ۴



$f(6) = 0 \quad f(-\frac{1}{4}) = 0$



$fog = 0$ ریشه

$fog = f(g(x)) = 0$

f زمانی صفر میشه که توی شکمش ۶ یا $-\frac{1}{4}$ بشه

$g(x) = x - \sqrt{x} = 6$　حدس بازینه‌ها $\rightarrow x = 9$

$g(x) = x - \sqrt{x} = -\frac{1}{4} \rightarrow x = \frac{1}{4}$

تست ۹۳: اگر $5f(x-2) + f(2-x) = 4x+1$ باشد، آن‌گاه $f(3)$ کدام است؟

۱) ۴　　۲) ۴/۵　　۳) ۵　　۴) ۵/۵

$x - 2 = 3 \longrightarrow x = 5$

$2 - x = 3 \longrightarrow x = -1$

پاسخ: گزینهٔ «۲»

$$\begin{cases} x=5: 5f(3)+f(-3)=21 \\ x=-1: 5f(-3)+f(3)=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -25f(3)-5f(-3)=-105 \\ 5f(-3)+f(3)=-3 \end{cases} \Rightarrow -24f(3)=-108 \Rightarrow f(3)=4/5$$

هر وقت بخواهیم از روی تابعِ (یه عبارتِ xدار)f ضابطه‌ی $f(x)$ رو پیدا کنیم، کافیه توی پرانتز رو t بگیریم و سپس x رو تنها کنیم و هرجا سمت راستِ مساوی x دیدیم مقدارش رو برحسب t جای‌گذاری کنیم و آخرش هم $x \to t$.

تست ۹۴: اگر $f(۲x-۳)=۴x^۲-۱۴x+۱۳$ باشد، ضابطهٔ $f(x)$ برابر کدام است؟ (تجربی ۹۷)

۱) $x^۲-x+۳$ ۲) $x^۲-۲x-۱$ ۳) $x^۲-۲x+۱$ ۴) $x^۲-x+۱$

$۲x-۳=t \longrightarrow x=\frac{t+۳}{۲}$ $f(۲x-۳=t)=۴\left(\frac{t+۳}{۲}\right)^۲-۱۴\left(\frac{t+۳}{۲}\right)+۱۳$

$f(t)=(t+۳)^۲-۷(t+۳)+۱۳$

$f(t)=t^۲+۶t+۹-۷t-۲۱+۱۳$

$f(t)=t^۲-t+۱$

$f(x)=x^۲-x+۱$ گزینه ۴

یه مدل خوشگله تست کن: شق $x=$

$f(۲x-۳)=۴x^۲-۱۴x+۱۳$

اِف اونی است که ۳- بدیم

$f(-۳)=۱۳$

۱۳ بگه یا ۱۳ بده

تست ۹۵: اگر $g(x)=۲x-۳$ و $(fog)(x)=۴(x^۲-۴x+۵)$ باشند، تابع $f(x)$ کدام است؟ (ریاضی داخل ۹۳)

۱) $x^۲-۴x+۳$ ۲) $x^۲-۴x+۵$ ۳) $x^۲-۲x+۵$ ۴) $x^۲-۲x+۳$

پاسخ: گزینهٔ «۳» ـ می‌دانیم $(fog)(x)$ همان $f(g(x))$ است. پس می‌توان نوشت:

$$f(g(x))=۴(x^۲-۴x+۵)\xrightarrow{g(x)=۲x-۳}f(۲x-۳)=۴x^۲-۱۶x+۲۰$$

حالا برای این‌که $f(x)$ را به دست آوریم، از تغییر متغیر $۲x-۳=t$ کمک می‌گیریم. پس داریم:

$$۲x-۳=t \Rightarrow ۲x=t+۳ \Rightarrow x=\frac{t+۳}{۲}$$

$$f(t)=۴\left(\frac{t+۳}{۲}\right)^۲-۱۶\left(\frac{t+۳}{۲}\right)+۲۰=۴\left(\frac{t^۲+۶t+۹}{۴}\right)-۸(t+۳)+۲۰$$

$$\Leftrightarrow f(t)=t^۲+۶t+۹-۸t-۲۴+۲۰=t^۲-۲t+۵$$

پس ضابطهٔ تابع $f(x)$ به صورت $f(x)=x^۲-۲x+۵$ است.

تست ۹۶: اگر $gof(x)=۵x^۲+۱۱$ و $f(x)=۲x$ باشد، کم‌ترین مقدار $g(x-۷)$ چقدر است؟ (تجربی ۱۴۰۱)

۱) ۷ ۲) ۹ ۳) ۱۱ ۴) ۳

$\underbrace{}_{Min}$

همان g(x) است که ۷ واحد به راست رفته و Min آن عوض نمی‌شود

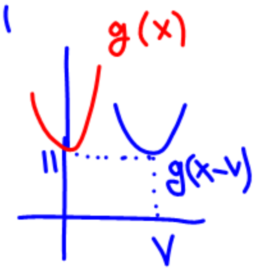
$g(\overset{۲x}{f(x)})=۵x^۲+۱۱$

$۲x=t \longrightarrow x=\frac{t}{۲} \longrightarrow g(۲x=t)=۵(x=\frac{t}{۲})^۲+۱۱=\frac{۵}{۴}t^۲+۱۱$

$g(t)=\frac{۵}{۴}t^۲+۱۱ \longrightarrow g(x)=\frac{۵}{۴}x^۲+۱۱$

$g(x-۷)=\frac{۵}{۴}(x-۷)^۲+۱۱$

سهمی دهانه به بالا با رأس $S(۷,۱۱)$



راه تنبلی: به ۲ طرف $x=۲$ بده: اونیه که صفر بگیره ۳ میشه

$f(\frac{۲-۲}{۲+۱}=۰)=۲+۱=۳$

تست ۹۷: اگر $f(\frac{x-۲}{x+۱})=x+۱$ باشد، $f(x)$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۱-x}$ ۲) $\frac{۳}{x-۱}$ ۳) $\frac{۱-x}{۳}$ ۴) $\frac{x-۱}{۳}$

پاسخ: توی پرانتز رو t می‌گیریم.

$$\frac{x-۲}{x+۱}=t$$

پس $f(t)=x+۱$ حالا باید x رو تنها کنیم:

$$x-۲=tx+t \Rightarrow tx-x=-t-۲ \Rightarrow x(t-۱)=-t-۲ \Rightarrow x=\frac{-t-۲}{t-۱} \quad (*)$$

حالا سمت راست هرجا x دیدیم $(*)$ رو می‌ذاریم:

$$f(t)=\frac{-t-۲}{t-۱}+۱ \xrightarrow{t\to x} f(x)=\frac{-x-۲}{x-۱}+۱=\frac{-x-۲+x-۱}{x-۱}=\frac{-۳}{x-۱}=\frac{۳}{۱-x}$$

بعضی وقت‌ها هم نیازی به t نیست فقط کافیه از اتحادها استفاده کنیم:

$$a^۳+b^۳=(a+b)^۳-۳ab(a+b)$$
$$a^۲+b^۲=(a+b)^۲-۲ab$$
$$a^۲+b^۲=(a-b)^۲+۲ab$$

۲ تا مثال خوب:

۱) $f(x-\frac{۱}{x})=x^۲+\frac{۱}{x^۲}-۴ \ , \ f(x)=?$

پاسخ:

$$f(x-\frac{۱}{x})=(x-\frac{۱}{x})^۲+۲x\frac{۱}{x}-۴=(x-\frac{۱}{x})^۲+۲-۴=(x-\frac{۱}{x})^۲-۲$$

حالا $x-\frac{۱}{x}=t$ پس:

$$f(t)=t^۲-۲ \xrightarrow{t\to x} f(x)=x^۲-۲$$

واسه حلّش از اتحاد $\boxed{a^۲+b^۲=(a-b)^۲+۲ab}$ استفاده کردیم.

۲) $f(x+\frac{۱}{x})=x^۲+\frac{۱}{x^۲}-۴$

$$f(x+\frac{۱}{x})=(x+\frac{۱}{x})^۲-۲x\cdot\frac{۱}{x}-۴=(x+\frac{۱}{x})^۲-۲-۴=(x+\frac{۱}{x})^۲-۶$$

حالا $x+\frac{۱}{x}=t$ پس:

$$f(t)=t^۲-۶ \xrightarrow{t\to x} f(x)=x^۲-۶$$

واسه حلّش از اتحاد $\boxed{a^۲+b^۲=(a+b)^۲-۲ab}$ استفاده کردیم.

تست ۹۸: اگر $f(x+\frac{۱}{x})=x^۳+\frac{۱}{x^۳}$ ضابطه‌ی تابع $f(x)$ کدام است؟

۱) $x^۲+۳x$ ۲) $x^۳-۳x$ ۳) $(x-۱)^۳$ ۴) $(x+۱)^۳$

پاسخ: باید ببینیم f با ورودی‌های خود چه کرده است. یعنی دقیقاً بلایی که به سر $x+\frac{۱}{x}$ اومده چیه؟

$$f(x+\frac{۱}{x})=x^۳+\frac{۱}{x^۳}=(x+\frac{۱}{x})^۳-۳x\cdot\frac{۱}{x}(x+\frac{۱}{x})=(x+\frac{۱}{x})^۳-۳(x+\frac{۱}{x})$$

الان اگر $x+\frac{۱}{x}=t$ بگیریم:

$$f(t)=t^۳-۳t$$

پس $t\to x$:

$$f(x)=x^۳-۳x$$

تذکر: چنانچه تابع fog و تابع بیرونی f را داشته باشیم و تابع درونی g را بخواهیم، ابتدا به جای xهای تابع f، $g(x)$ قرار می‌دهیم و تابع $f(g(x))$ را برحسب $g(x)$ می‌یابیم. از آنجا که تابع fog را هم داریم، با مقایسه‌ی این دو ضابطه، تابع g را بدست می‌آوریم.

تست ۹۹: اگر f و g به عنوان ماشین به صورت $\underbrace{x \to f \to g \to 2x}$ و $g(x)=3x+4$ باشند، آنگاه مقدار $f(5)$ کدام است؟

(سراسری تجربی خارج از کشور ۹۱)

۱) ۱   ۲) ۲   ۳) ۳   ۴) ۴

تو اینجا اونی که اول عمل می‌کنه تابع داخلیه

$$g(f(x))=2x$$

$$3f(x)+4=2x$$

$x=5$

$$3f(5)+4=2(5) \rightsquigarrow \boxed{f(5)=2}$$

تست ۱۰۰: اگر $f(x)=x^2-x-2$ و $f(g(x))=x^2+x-2$، آن‌گاه $(f+g)(x)$ کدام گزینه می‌تواند باشد؟ (خارج تجربی ۹۰)

۱) x^2-1 ۲) x^2+1 ۳) x^2-2x ۴) x^2+2x

مهم
و فرض کنید g تابعی از درجه یک خطی به صورت $g(x)=ax+b$ است.

تست ۱۰۱: اگر $f(x)=x^2+1$ و $(fog)(x)=x^3-3x^2+3x$ باشد، با شرط $x\ge 1$، ضابطه‌ی $g(x)$ کدام است؟

۱) $\sqrt{x-1}$ ۲) $\sqrt[3]{x-1}$ ۳) $(x-1)\sqrt{x-1}$ ۴) $(x-1)\sqrt[3]{x-1}$

پاسخ: گزینه‌ی «۳» ـ $(fog)(x)$ یعنی $f(g(x))$ پس $(fog)(x)=g^2+1$، بنابراین:

$$g^2+1=x^3-3x^2+3x \Rightarrow g^2=x^3-3x^2+3x-1 \Rightarrow g^2=(x-1)^3 \Rightarrow g=\sqrt{(x-1)^3}$$

بنابراین ضابطه‌ی $g(x)$ به صورت $g(x)=|x-1|\sqrt{x-1}$ است. شرط $x\ge 1$ هم برای این داده شده که در این صورت $g(x)=(x-1)(\sqrt{x-1})$

دامنه‌ی تابع مرکب

اگر f و g دو تابع باشند، آنگاه ترکیب آن‌ها یعنی $f(g(x))$ به شرطی تشکیل می‌شود که اولاً x اجازه داشته باشد به عنوان دامنه وارد g بشود ($x\in D_g$) و ثانیاً، $g(x)$ هم اجازه داشته باشد تا به عنوان دامنه وارد $f(x)$ بشود ($g(x)\in D_f$) و خواهیم داشت:

$$D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}$$

برای ترکیب $g(f(x))$ نیز داریم:

$$D_{gof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}$$

اگر نخواستید از راه تعریف، دامنه را بدست آورید، ضابطه‌ی **fog** یا **gof** را نوشته ولی به هیچ عنوان، آن را ساده نمی‌کنیم و از روی ضابطه، دامنه را بدست می‌آوریم.

مثال ۱۰۲: اگر $f(x)=\frac{۲}{x-۱}$ و $g(x)=\frac{۳}{x}$، دامنه و ضابطه‌ی **fog** را به دست آورید.

تست ۱۰۳: اگر $f(x)=\sqrt{۱-x}$ و $g(x)=\sqrt{x-۱}$، دامنه‌ی تابع **fog** کدام است؟

۱) $[۰,۱]$ ۲) $[۰,۲]$ ۳) $[۱,۲]$ ۴) $[۱,۳]$

$y=f(g(x))=\sqrt{1-g(x)}=\sqrt{1-\sqrt{x-1}}$

$x=0$ زیر $\sqrt{x-1}$ را ⊖ می‌کند پس گ ۱ و ۲ غلطه

$x=3$ زیر $\sqrt{1-\sqrt{3-1}=2}$ را ⊖ می‌کند پس گ ۴ غلطه و فقط ۳ درسته

$x-1\geq 0$ $\boxed{x\geq 1}$ (الف) (الف) $\cap$ (ب) $[1,2]$

۲۰۱

$1-\sqrt{x-1}\geq 0$

$1\geq\sqrt{x-1}$

$1\geq x-1$

$\boxed{2\geq x}$ (ب)

تست ۱۰۴: اگر $f(x)=۴x^۲-۱$ و $g(x)=\sqrt{۱-x^۲}$ باشد، دامنه‌ی تعریف $fog(x)$ کدام است؟

۱) $[-\frac{\sqrt{۲}}{۲},\frac{\sqrt{۲}}{۲}]$ ۲) $[-۱,۱]$ ۳) $(-\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲})$ ۴) $[-۱,۱)$

$y=f(g(x))=4g^2(x)-1=4(\sqrt{1-x^2})^2-1$

برای دامنه ساده نکن

$1-x^2\geq 0$

$1\geq x^2 \longrightarrow 1\geq|x| \rightsquigarrow -1\leq x\leq 1$ گ ۲

تست ۱۰۵: اگر $f(x)=\frac{۱+x^۲}{۱-x^۲}$ و $g(x)=\sqrt{x-x^۲}$ باشند، دامنه‌ی تابع **gof**، کدام است؟ (ریاضی ۹۶)

۱) $[۰,۱)$ ۲) $\{۰\}$ ۳) $(-۱,۱)$ ۴) $\mathbb{R}-\{۱,-۱\}$

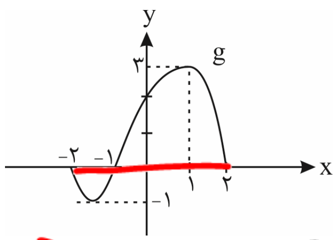
$y=g(f(x))=\sqrt{f-f^2}=\sqrt{\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)-\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)^2}$

گزینه‌های شامل $x=\frac{1}{2}$ غلطه و گ ۲ درسته

$x=\frac{1}{2}\longrightarrow\sqrt{\left(\frac{1+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}}{1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}}=\frac{5}{3}\right)-\left(\frac{5}{3}\right)^2}=\frac{5}{3}-\frac{25}{9}=\frac{15-25}{9}=\frac{-10}{9}$

f چندجمله‌ای
$D_f : \mathbb{R}$

تست ۱۰۶: اگر $f(x)=4x^2-2$ و نمودار تابع g به صورت زیر باشد، دامنه‌ی تعریف تابع gof کدام است؟



۱) $[-1,1]$
۲) $[\frac{1}{2},\frac{\sqrt{5}}{2}]$
۳) $[-\frac{\sqrt{5}}{2},-\frac{1}{2}]$
۴) $[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$

$D_{g(f(x))}=\{x\in D_f \,,\, f(x)\in D_g\}$

$x\in\mathbb{R} \,,\, 4x^2-2\in[-2,2]$

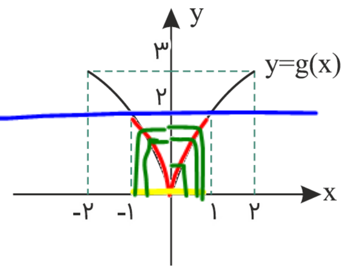
$D_{g(x)}:[-2,2]$ $\quad D_{g(f(x))}=[-1,1]$

$-2\le 4x^2-2\le 2 \quad +2$

$0\le 4x^2\le 4 \quad \div 4$

$x\in\mathbb{R} \quad 0\le x^2\le 1 \;\rightarrow\; |x|\le 1 \quad (-1\le x\le 1)$

تست ۱۰۷: اگر $D_f=[0,2]$ باشد و نمودار تابع g به صورت زیر باشد، دامنهٔ fog کدام است؟



$D_{g(x)}:[-2,2]$

$f(x): 0\le x\le 2$
f ورودی

۱) $[-2,2]$
۲) $[-1,1]$
۳) $[-2,-1]\cup[1,2]$
۴) $[0,2]$

(الف)

$D_{f(g(x))}=\{x\in D_g \,,\, g(x)\in D_f\}=\{\boxed{-2\le x\le 2}\cap g(x)\in[0,2]\}$

$y=0\le g(x)\le 2=y$

دنبال x ها (کجاها) g(x) بین دو خط $y=0$, $y=2$ قرار دارد؟ x های بین ۱- و ۱

(ب) $\boxed{-1\le x\le 1}$

(الف) ∩ (ب) $\quad$ -۲ ۲ $\quad$ -۱ ۱ $\quad$ جواب: $[-1,1]$

مقایسه‌ی دامنه‌ی $f(x)$ و $f(g(x))$

۱) اگر دامنه‌ی تابع $f(x)$ بازه‌ی $[a,b]$ باشد و بخواهیم دامنه‌ی تابع $f(g(x))$ را پیدا کنیم، باید نامعادله‌ی $a\le g(x)\le b$ را حل کنیم. جواب آخر برابر اشتراک جواب این نامعادله و دامنه‌ی تابع g است.

۲) اگر دامنه‌ی تابع $f(g(x))$ بازه‌ی $[a,b]$ باشد و بخواهیم دامنه‌ی تابع $f(x)$ را پیدا کنیم، باید برد تابع g را به ازای xهای متعلق به بازه‌ی $[a,b]$ پیدا کنیم.

تست ۱۰۸: اگر دامنه‌ی تابع f بازه‌ی $[3,12]$ باشد، دامنه‌ی تابع $f(\frac{x}{3}-3)$ کدام است؟

۱) $[-2,1]$ $\quad$ ۲) $[-1,2]$ $\quad$ ۳) $[18,45]$ $\quad$ ۴) $[6,39]$

پاسخ: گزینه‌ی «۳» ـ همان‌طور که گفتیم باید نامعادله‌ی $3\le\frac{x}{3}-3\le 12$ را حل کنیم:

$$3\le\frac{x}{3}-3\le 12 \Rightarrow 6\le\frac{x}{3}\le 15 \Rightarrow 18\le x\le 45$$

پس دامنه‌ی تابع $f(\frac{x}{3}-1)$ برابر بازه‌ی $[18,45]$ است.

تست ۱۰۹: اگر دامنه‌ی تابع $f([x])$ بازه‌ی $[1,5)$ باشد، دامنه‌ی تابع $f(\sqrt{x})$ حتمن شامل کدام مجموعه است؟

۱) $\{1,2,3,4\}$ ۲) $\{1,4,9,16\}$ ۳) $[1,16]$ ۴) $[1,2]$

پاسخ: گزینه‌ی «۲» ـ اول برد $[x]$ را به ازای $1 \le x < 5$ پیدا می‌کنیم. اگر $1 \le x < 5$ باشد، $[x]$ مقادیری برابر ۱، ۲، ۳ و ۴ دارد، پس دامنه‌ی تابع $f(x)$ مجموعه‌ی $\{1,2,3,4\}$ است. حالا دامنه‌ی تابع $f(\sqrt{x})$ را پیدا می‌کنیم. اگر $\sqrt{x}$ بخواهد برابر ۱ یا ۲ یا ۳ یا ۴ باشد x باید برابر ۱، ۴، ۹ و ۱۶ باشد، پس دامنهی تابع $f(\sqrt{x})$ حتمن شامل اعضای مجموعه‌ی $\{1,4,9,16\}$ است. دقت کنید که دامنه‌ی تابع $\sqrt{x}$ ممکن است شامل تمام بازه‌ی $[1,16)$ هم باشد.

تست ۱۱۰: اگر $f(x) = 2x - [2x]$ و $g(x) = -x^2 + 4x$ باشند، برد تابع gof کدام است؟ (تجربی ۹۹)

۱) $[0,2)$ ۲) $[0,3)$ ۳) $[0,4)$ ۴) $[1,4)$

ق دانیم: $0 \le u - [u] < 1$. پس $0 \le f(x) = 2x - [2x] < 1$

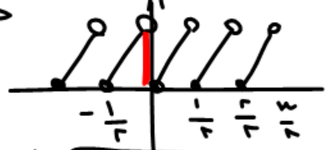
$0 \le y = g(0 \le f(x) < 1) < 3$ گ ۲

خروجی f ورودی g است.

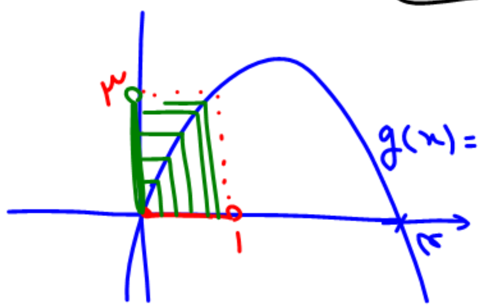
$y = g(x) = -x^2 + 4x = x(-x+4)$

جزء صحیح سؤال نیست!

$0 \le f(x) = 2x - [2x] < 1$



خروجی با برد تابع f ورودی تابع g خواهد شد



قدرمطلق

تابع $f(x) = \begin{cases} x & x \ge 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$ را تابع قدرمطلق می‌خوانند و آن را با نماد $f(x) = |x|$ نمایش می‌دهند.

تذکر: $\sqrt{a^2} = |a|$

قدری که توش مثبته خودش میاد بیرون. قدری که توش منفیه قرینه‌اش!

$|\sqrt{3} - \sqrt{5}| =$

$|1 - \sqrt{2}| =$

$|\sqrt{3} - \sqrt{2}| =$

$|\sin x - 1| =$

$|1 - \cos x| =$

تست ۱۱۱: اگر $b < 0 < a$ و $|a| < |b|$ باشد، حاصل $|a+b| + |a-b| + |a| + |b|$ کدام است؟

۱) $3a + b$ ۲) $a + 3b$ ۳) $3b - a$ ۴) $b - 3a$

پاسخ: گزینه‌ی «۴» ـ چون $a < 0$ و $b > 0$ است، پس $|a| = -a$ و $|b| = b$ و چون $|a| > |b|$ است (یعنی زور عدد منفی بیشتر است) پس $|a+b| = -a-b$ و $|a-b| = -a+b$ پس:

$$|a+b| + |a-b| + |a| + |b| = -a-b-a+b-a+b = -3a+b$$

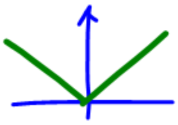
تست ۱۱۲: هرگاه x و y دو عدد حقیقی ناصفر باشند و $|x| + |y| = x - y$ حاصل $\sqrt{x|x| + x|y| - y|x| - y|y|}$ کدام است؟

۱) $-x-y$ ۲) $y-x$ ۳) $x-y$ ۴) $x+y$

پاسخ: گزینه‌ی «۳» ـ چون $|x| + |y| = x - y$ شده است، پس $x > 0$ و $y < 0$ است و در نتیجه:

$$\sqrt{x|x| + x|y| - y|x| - y|y|} = \sqrt{x^2 - xy - yx + y^2} = \sqrt{x^2 - 2xy + y^2} = \sqrt{(x-y)^2} = |x-y| = x-y$$

ویژگی‌های تابع قدرمطلق:



۱) $|x|\geq ۰$ مثبت یا صفر نامنفی

۲) $\sqrt{u^{۲}}=|u|$

|۲-۳|=|۳-۲|

۳) $|-x|=|x| \Rightarrow |a-b|=|b-a|$ یعنی داخل قدرمطلق را می‌توان در منفی ضرب نمود

قدر منفی خوده منفی رو می‌خوره!

۴) پرتکرار

$$\begin{cases} |u|=a \xrightarrow{a\geq ۰} u=\pm a \xrightarrow{\text{مثلاً}} |x-۱|=۳ \Rightarrow x-۱=\pm ۳ \Rightarrow x=۴,-۲ \\ |u|\leq a \xrightarrow{a\geq ۰} -a\leq u\leq a \xrightarrow{\text{مثلاً}} |x-۱|\leq ۳ \Rightarrow -۳\leq x-۱\leq ۳ \Rightarrow -۲\leq x\leq ۴ \\ |u|\geq a \xrightarrow{a\geq ۰} u\geq a \text{ یا } u\leq -a \xrightarrow{\text{مثلاً}} |x-۱|\geq ۳ \Rightarrow \begin{cases} x-۱\geq ۳ \Rightarrow x\geq ۴ \\ \text{یا} \\ x-۱\leq -۳ \Rightarrow x\leq -۲ \end{cases} \end{cases}$$

۵) $|x|\geq x \xrightarrow{\text{مثلاً}} y=\sqrt{|x|-x} \xrightarrow{\text{دامنه}} |x|-x\geq ۰ \Rightarrow |x|\geq x$ بدیهی $\Rightarrow D_f=\mathbb{R}$

۶) $|x|^{۲}=|x^{۲}|=x^{۲}$

۷) $|x+y|\leq |x|+|y|$ نامساوی مثلثی $\Rightarrow \begin{cases} |x+y|=|x|+|y| \Rightarrow xy\geq ۰ & \text{x و y هم‌علامت} \\ |x+y|<|x|+|y| \Rightarrow xy<۰ & \text{x و y مختلف‌العلامت} \end{cases}$

تست ۱۱۳: اگر به ازای هر $x\in\mathbb{R}$، $A=\dfrac{x^{۲}-x+۱}{|x^{۲}-۱|+|x-۲|}$ باشد، دقیق‌ترین محدوده‌ی A کدام است؟

۱) $A>۰$ ۲) $۰<A\leq ۱$ ۳) $۰<A<۱$ ۴) $A\geq ۱$

پاسخ: گزینه‌ی «۲» ـ با توجه به نامساوی مثلثی $|a+b|\leq|a|+|b|$ نتیجه می‌گیریم که:

$$۰\leq \frac{|a+b|}{|a|+|b|}\leq ۱ \xrightarrow[b=۲-x]{a=x^{۲}-۱} ۰\leq \frac{|x^{۲}-x+۱|}{|x^{۲}-۱|+|۲-x|}\leq ۱$$

از طرفی $x^{۲}-x+۱$ یک عبارت همواره مثبت است چون $\Delta<۰$ و $a>۰$ می‌باشد:

$$۰<\frac{x^{۲}-x+۱}{|x^{۲}-۱|+|x-۲|}\leq ۱ \Rightarrow ۰<A\leq ۱$$

۸) $|xy|=|x||y| \xrightarrow{\text{مثلاً}} |x^{۲}-۱|=|x-۱||x+۱|$

۹) $\left|\dfrac{x}{y}\right|=\dfrac{|x|}{|y|}$

مثال: $\left|\dfrac{x-۱}{x+۲}\right|<۱$

یادت باشه: برای حل نامعادلهٔ قدرمطلقی $|u|<|v|$ می‌توانیم دو طرف را به توان ۲ برسانیم تا قدرمطلق‌ها از بین بروند:

$$|x-۱|<|x+۲| \xrightarrow{\text{توان ۲}} (x-۱)^{۲}<(x+۲)^{۲} \Rightarrow x^{۲}-۲x+۱<x^{۲}+۴x+۴ \Rightarrow -۶x<۳ \Rightarrow x>\frac{-۱}{۲}$$

حل معادلات قدرمطلقی

۱) معادلات به فرم $|f(x)|=a$، $(a \geq 0)$: برای حل این معادله به صورت مقابل عمل می‌کنیم:

$$|f(x)|=a \Rightarrow f(x)=\pm a$$

مثلاً $|x-3|=2$ به صورت $x-3=\pm 2$ حل می‌شود که یک‌بار $x=5$ و یک‌بار $x=1$ به دست می‌آید.

۲) معادلات به فرم $|f(x)|=|g(x)|$: حل این مدل از معادلات به صورت زیر است:

$$|f(x)|=|g(x)| \Rightarrow f(x)=\pm g(x)$$

مثلاً برای حل معادلهٔ $|2x-1|=|x|$ داریم:

$$|2x-1|=|x| \Rightarrow 2x-1=\pm x \Rightarrow \begin{cases} 2x-1=x \Rightarrow x=1 \\ 2x-1=-x \Rightarrow 3x=1 \Rightarrow x=\frac{1}{3} \end{cases}$$

۳) معادلات به فرم $|f(x)|=g(x)$: در حل این دسته از معادلات چون طرف چپ، یک عبارت نامنفی است پس برای برقرار بودن تساوی باید عبارت سمت راست هم، نامنفی باشد یعنی $g(x) \geq 0$. حالا با این شرط، جاب‌ها را به صورت زیر می‌یابیم:

$$|f(x)|=g(x) \Rightarrow f(x)=\pm g(x)$$

فقط xهایی قبول می‌شوند که $g(x)$ را منفی نکنند.

مثلاً برای حل معادلهٔ $|x-1|=-2x$ داریم:

$$|x-1|=-2x \Rightarrow x-1=\pm 2x \Rightarrow \begin{cases} x-1=2x \Rightarrow x=-1 \\ x-1=-2x \Rightarrow 3x=1 \Rightarrow x=\frac{1}{3} \end{cases}$$

اگر $x=\frac{1}{3}$ باشد سمت راست تساوی یعنی $-2x$، منفی می‌شود پس $x=\frac{1}{3}$ قبول نیست ولی اگر $x=-1$ باشد سمت راست یعنی $-2x$، منفی نمی‌شود پس $x=-1$ قبول است.

۴) معادلات به فرم $|f(x)|=f(x)$: این دسته از معادلات زمانی برقرار هستند که $f(x) \geq 0$ باشد. مثلاً برای حل $|x-1|=x-1$ داریم:

$$|x-1|=x-1 \Rightarrow x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$$

۵) معادلات به فرم $|f(x)|=-f(x)$: این دسته از معادلات زمانی برقرار هستند که $f(x) \leq 0$ باشد. مثلاً برای حل $|x-2|=2-x$ داریم:

$$|x-2|=2-x \Rightarrow x-2 \leq 0 \Rightarrow x \leq 2$$

۶) معادلات به فرم $|f(x)|+|g(x)|=0$: چون قدرمطلق یک عبارت همواره نامنفی است، از درسنامه معادلات گنگ فهمیدیم که جمع چند عبارت نامنفی زمانی صفر است که هر کدام از آن‌ها صفر باشد.

تست ۱۱۴: معادلهٔ $|x-x^2|+|x^3-2x^2+4x-3|=0$ چند جواب دارد؟ جمع دو نامنفی صفره تک تک صفرند.

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

$x-x^2=0$

$x(1-x)=0$

$\boxed{x=0}$ $x=1$

فقط $x=0$ تکه دوم را صفر می‌کند.

۷) اگر معادله با هیچ‌یک از ۶ حالت قبل تطابق نداشت، باید به کمک تعیین علامت جواب‌ها را در صورت وجود پیدا کنیم. مثلاً معادلهٔ $|x|+|2x-2|=x-3$ با هیچ‌یک از ۶ مورد فوق حل نمی‌شود پس به کمک تعیین علامت حلش می‌کنیم.

برای این منظور ابتدا ریشه‌های داخل قدرمطلق‌ها را به دست می‌آوریم که می‌شود $x=0$ و $x=1$ و سپس x را یک‌بار کوچک‌تر از ریشهٔ کوچک، یک‌بار بین دو ریشه و یک‌بار بزرگ‌تر از ریشهٔ بزرگ‌تر قرار می‌دهیم. سپس جواب به‌دست آمده را به شرطی قبول می‌کنیم که در محدودهٔ تعیین‌شده قرار گرفته باشد.

$$x<0 \Rightarrow -x-(2x-2)=x-3 \Rightarrow -x-2x+2=x-3 \Rightarrow x=\frac{5}{4}$$

$x=\frac{5}{4}$ در محدودهٔ $x<0$ قرار ندارد و اشتراکشان $\varnothing$ شد پس $x=\frac{5}{4}$ قبول نمی‌شود.

$$0\le x<1 \Rightarrow x-(2x-2)=x-3 \Rightarrow x-2x+2=x-3 \Rightarrow -2x=-5 \Rightarrow x=\frac{5}{2}$$

اشتراکشان $\varnothing$ شد پس $x=\frac{5}{2}$ قبول نمی‌شود.

$$x\ge 1 \Rightarrow x+2x-2=x-3 \Rightarrow 2x=-1 \Rightarrow x=-\frac{1}{2}$$

اشتراکشان $\varnothing$ شد پس $x=\frac{-1}{2}$ قبول نمی‌شود.

پس این معادله جواب ندارد.

تست ۱۱۵: مجموعه جواب معادله‌ی $|x^3-9x|+x^3-9x=0$ شامل چند عدد طبیعی می‌باشد؟

۱) ۱　　۲) ۲　　۳) ۳　　۴) ۴

$|x^3-9x|=-x^3+9x$

$|u|=-u \longrightarrow u\le 0 \qquad x^3-9x\le 0$

$x^3-9x=x(x^2-9)=x(x+3)(x-3)\le 0$

x: $-\infty$, -3, 0, 3, $+\infty$ — $-$ + $-$ +

ج

$x\in \mathbb{N}:\ 1,2,3$

تست ۱۱۶: مجموعه جواب معادلهٔ $x+\sqrt{x^2-x\sqrt{12}+3}=\sqrt{3}$ کدام است؟

۱) $\mathbb{R}$　　۲) $\{\sqrt{3}\}$　　۳) $(-\infty,\sqrt{3}]$　　۴) $[\sqrt{3},+\infty)$

پاسخ: گزینهٔ «۳»

$$x+\sqrt{x^2-2\sqrt{3}x+3}=\sqrt{3} \Rightarrow x+\sqrt{(x-\sqrt{3})^2}=\sqrt{3} \Rightarrow |x-\sqrt{3}|=\sqrt{3}-x$$

می‌دانیم اگر $|u|=-u$ باشد، آن‌گاه $u\le 0$ است؛ پس:

$$x-\sqrt{3}\le 0 \Rightarrow x\le\sqrt{3} \Rightarrow x\in(-\infty,\sqrt{3}]$$

تست ۱۱۷: مجموعه‌ی جواب نامعادله‌ی $(-x^2-6)(5-|2x-1|)\le 0$ کدام است؟

۱) $\mathbb{R}-(-2,3)$　　۲) $[-2,3]$　　۳) $(-2,3)$　　۴) $\mathbb{R}-[-2,3]$

$$\underbrace{-(x^2+6)}_{\text{منفی}}\underbrace{(5-|2x-1|)}_{\text{باید مثبت یا صفر}}\le 0$$

$5-|2x-1|\ge 0 \qquad 5\ge|2x-1| \longrightarrow -5\le 2x-1\le 5 \longrightarrow -4\le 2x\le 6$

$-2\le x\le 3$

$x=0$ $x=1$

تست ۱۱۸: مجموع ریشه‌های معادلهٔ $3|x|-|x-1|+x=0$ کدام است؟

۱) $-\frac{4}{3}$ ۲) $-\frac{2}{15}$ ۳) $-\frac{7}{15}$ ۴) $-\frac{4}{5}$ ✓

$$\begin{cases} x<0 \longrightarrow -3x+x-1+x=0 \longrightarrow x=-1<0 \ \checkmark \\ 0\le x\le 1 \longrightarrow 3x+x-1+x=0 \longrightarrow x=\frac{1}{5}\in[0,1] \ \checkmark \\ x>1 \longrightarrow 3x-x+1+x=0 \longrightarrow x=-\frac{1}{3} \ \times \end{cases}$$

$(x_1=-1)+(x_2=\frac{1}{5})=-\frac{4}{5}$

$x=0$ $x=\frac{1}{3}$

تست ۱۱۹: مجموعه جواب نامعادله‌ی $|x|+|3x-1|\le 5$ شامل چند عدد صحیح است؟

حل نامعادله قدرمطلق:

۱) هیچ ۲) یک ۳) دو ۴) سه

پاسخ: گزینه‌ی «۴» ـ ریشه‌های قدرمطلق‌ها $x=0$ و $x=\frac{1}{3}$ است، پس:

$|x|+|3x-1|\le 5$

ریشه قدرمطلق را بیابید در هر زیربازه نامعادله را حل کنید. بین فرض و جواب‌ها اشتراک بگیرید، آخر بین جواب‌های نهایی اجتماع بگیرید.

فرض
$$\left.\begin{cases} x\le 0 \Rightarrow -x-3x+1\le 5 \Rightarrow \overset{\text{جواب}}{x\ge -1} \xrightarrow{\cap \text{ و}} -1\le x\le 0 \\ 0\le x\le \frac{1}{3} \Rightarrow x-3x+1\le 5 \Rightarrow x\ge -2 \xrightarrow{\cap \text{ و}} 0\le x\le \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3}\le x \Rightarrow x+3x-1\le 5 \Rightarrow x\le \frac{3}{2} \xrightarrow{\cap \text{ و}} \frac{1}{3}\le x\le \frac{3}{2} \end{cases}\right\} \xrightarrow{\cup} -1\le x\le \frac{3}{2}$$

یا یا

پس مجموعه جواب نامعادله می‌شود بازه‌ی $[-1,\frac{3}{2}]$ که شامل ۳ عدد صحیح ۱-، ۰ و ۱ است.

تست ۱۲۰: تمام جواب‌های نامعادله‌ی $|x-1|<|x-3|$ کدام است؟

مهم: چون ۲ طرف مثبته به توان ۲ برسون جهت رو عوض نکن.

۱) $x\le 2$ ۲) $x>2$ ۳) $1\le x\le 3$ ۴) $x<2$

پاسخ: گزینه‌ی «۴» ـ طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$|x-1|<|x-3| \xrightarrow{\text{توان ۲}} x^2-2x+1<x^2-6x+9 \Rightarrow 4x<8 \Rightarrow x<2$$

یا $|x-1|<|x-3| \Rightarrow (x-1)^2-(x-3)^2<0 \Rightarrow 2(2x-4)<0 \Rightarrow x<2$

مهم

تست ۱۲۱: اگر مجموعه جواب نامعادلهٔ $|ax+b|>3$ به صورت $\mathbb{R}-[-1,2]$ باشد، $a+b$ کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲/۵ ۳) ۳ ۴) ۳/۵

$\boxed{|u|>a \longrightarrow u<-a \quad \text{یا} \quad u>a}$

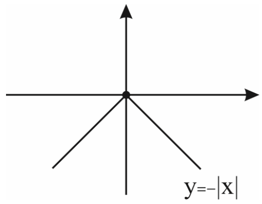
$$\begin{cases} ax+b>3 \longrightarrow x>\frac{3-b}{a}=2 \\ ax+b<-3 \longrightarrow x<\frac{-3-b}{a}=-1 \end{cases}$$

-1 2

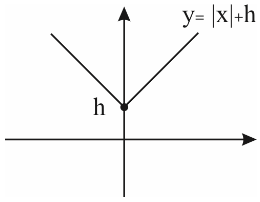
$$\begin{cases} 3-b=2a \\ -3-b=-a \end{cases} \qquad \begin{cases} 3-b=2a \\ 3+b=a \end{cases} \quad + \qquad 6=3a \longrightarrow a=2 \xrightarrow{3-b=2a} b=-1$$

نمودارهای قدرمطلقی

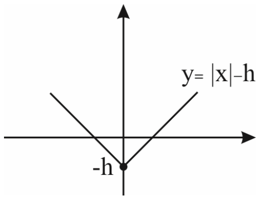
۱) رسم به کمک انتقال: این روش برای رسم تابع‌هایی به فرم $\pm|x\pm k|\pm h$ کاربرد دارد. به مثال‌های زیر توجه کنید:



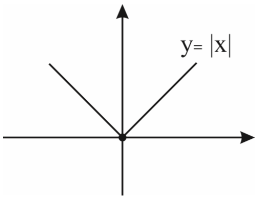
اگر $|x|$ را نسبت به محور xها قرینه کنیم به $-|x|$ می‌رسیم.

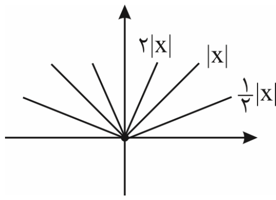


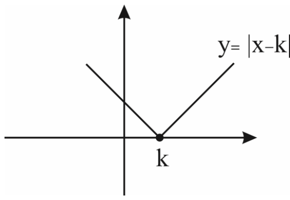
همان $|x|$ است که به اندازهٔ h بالا رفته است. $(h>0)$



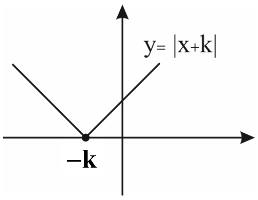
همان $|x|$ است که به اندازهٔ h پایین آمده است. $(h>0)$







همان $|x|$ است که به اندازهٔ k به راست رفته است. $(k>0)$



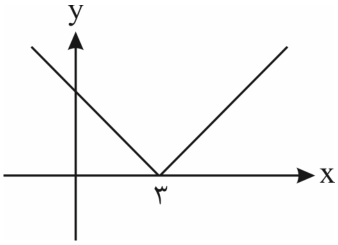
همان $|x|$ است که به اندازهٔ k به چپ رفته است. $(k>0)$

رسم چند تابع قدرمطلقی:

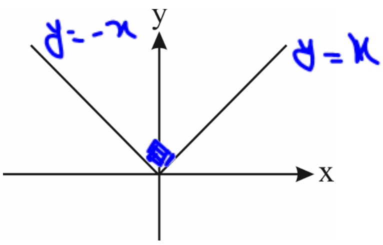
۱) در تابع‌های ساده مثل $y=|x-a|+k$ می‌شود نمودار را با انتقال نمودار تابع $y=|x|$ رسم کرد.

توجه: برای رسم نمودار تابع $f(x+a)$ نمودار $f(x)$ را به اندازهٔ $-a$ در امتداد محور xها انتقال می‌دهیم و برای رسم نمودار تابع $f(x)+k$ نمودار $f(x)$ را به اندازهٔ k در امتداد محور yها انتقال می‌دهیم. این مثال را ببینید: $f(x)=|x-3|$

نمودار $y=|x|$ را به اندازهٔ ۳ واحد ($-a$ می‌شود $-(-3)$) در امتداد محور xها انتقال می‌دهیم.



$y=|x-3|$

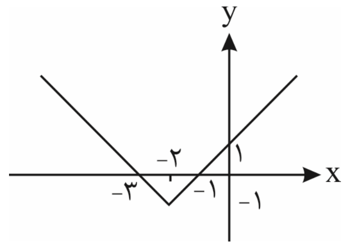


$y=|x|$

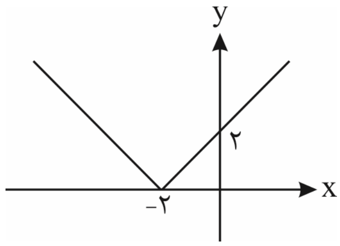
ریشهٔ سادهٔ داخل قدرمطلق طول نقطهٔ زاویه‌دار (گوشه) است.

حالا یکی دیگر: $y=|x+2|-1$

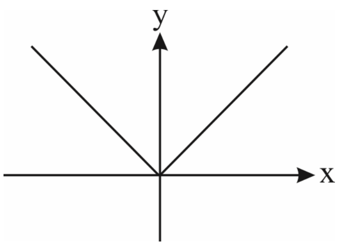
اول نمودار $|x|$ را به اندازهٔ ۲- واحد در امتداد محور xها انتقال می‌دهیم و بعد به اندازهٔ ۱- واحد در امتداد محور yها:



$y=|x+2|-1$



$y=|x+2|$



$y=|x|$

در x=-۲ تیز شده.

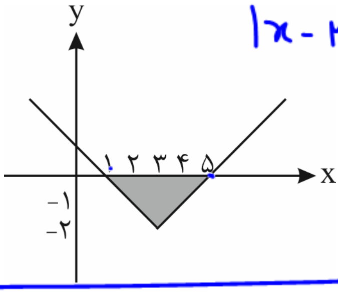
از رسم نمودار توابع شامل قدرمطلق می‌توان برای پیداکردن مینیمم و ماکسیمم تابع (و در نتیجه برد تابع) استفاده کرد. کافی است نمودار را رسم کنیم و سپس کم‌ترین یا بیشترین مقدار y را از روی نمودار پیدا کنیم.

تست ۱۲۲: مساحت مثلث که بین نمودار تابع $y=|x-3|-2$ و محور طول‌ها تشکیل می‌شود، چند واحد سطح است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

پاسخ: گزینه‌ی «۳» ـ نمودار تابع را رسم می‌کنیم: $y=|x-3|-2 \Rightarrow (2,-1)\ (3,-2)\ (4,-1)$

مثلثی که بین نمودار تابع و محور xها تشکیل می‌شود، مثلثی است با قاعده‌ی به طول ۴ (نمودار محور xها را در $x=1$ و $x=5$ قطع کرده است (چرا؟)) و ارتفاع ۲ پس مساحتش برابر $\frac{4\times 2}{2}=4$ است.

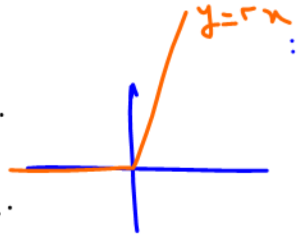


$|x-3|-2=0$
$|x-3|=2$
$\begin{cases} x-3=2 & x=5 \\ x-3=-2 & x=1 \end{cases}$

مطلوبست رسم نمودار توابع زیر:

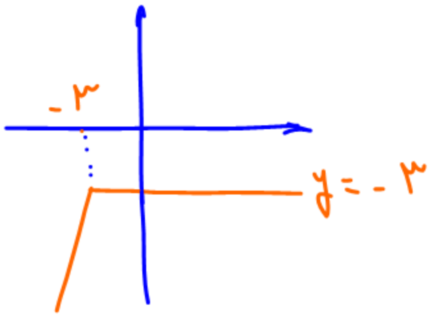
ریشه, $x=0$

① $y=x+|x|=\begin{cases} x-x=0 & x\leq 0 \\ x+x=2x & x\geq 0 \end{cases}$



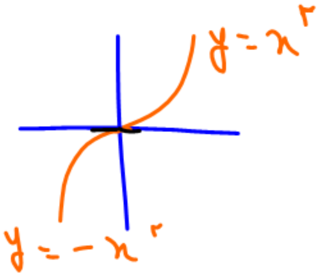
② $y=x-|x+3|=\begin{cases} x-x-3=-3 & x\geq -3 \\ x+x+3=2x+3 & x\leq -3 \end{cases}$

$x=-3$



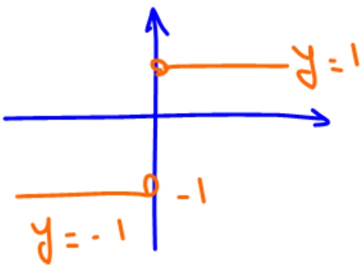
③ $y=x\sqrt{x^2}$
$y=x|x|=\begin{cases} x(x)=x^2 & x\geq 0 \\ x(-x)=-x^2 & x<0 \end{cases}$

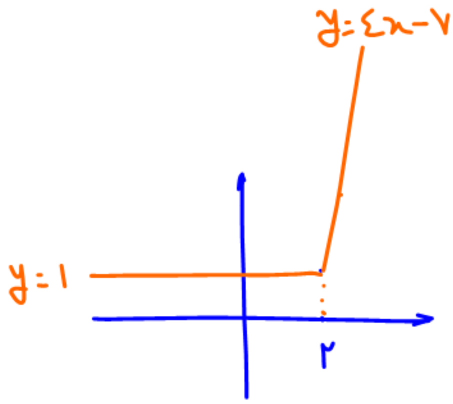
نکته: اگر ریشه ساده داخل قدرمطلق ضریب آن را صفر کند آن نقطه زاویه دار نیست



④ $y=\frac{|x|}{x}=\begin{cases} \frac{x}{x}=1 & x>0 \\ \frac{-x}{x}=-1 & x<0 \end{cases}$

$D_f: \mathbb{R}-\{0\}$





⑤ $y=2x-3+|2x-4|\begin{cases} x\geq 2 & y=2x-3+2x-4=4x-7 \\ x<2 & y=2x-3-2x+4=1 \end{cases}$

ریشه, $x=2$

۶) $y=|x-1|+|x-3|$ ، $x=1$ ، $x=3$

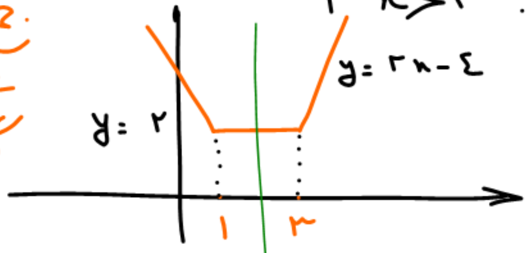
$$y=\begin{cases} x<1: & y=-x+1-x+3=-2x+4 \\ 1\leq x\leq 3: & y=x-1-x+3=2 \\ x>3: & y=x-1+x-3=2x-4 \end{cases}$$

نیم خط
پاره خط
نیم خط

$y_{min}=2$

برد $y\geq y_{min}=2$

جمع دو قدر مطلق شکل x گلدونه!



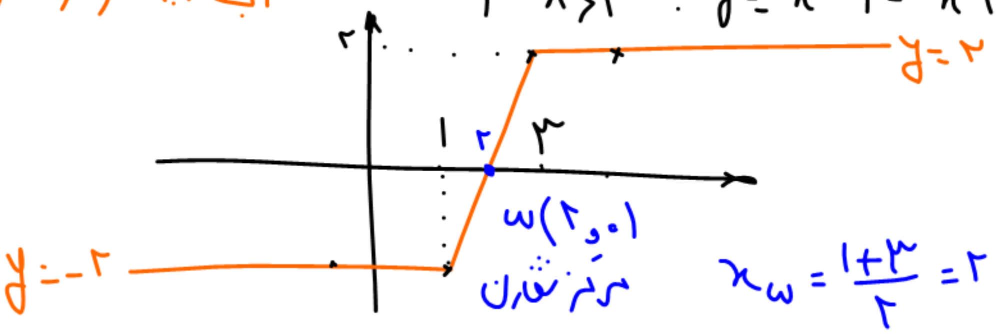
$x=\frac{1+3}{2}=2$ محور تقارن

۷) $y=|x-1|-|x-3|$ ، $x=1$ ، $x=3$

تفریق دو قدر مطلق شکل آبشار یا سرسره است!

$$=\begin{cases} x<1: & y=-x+1+x-3=-2 \\ 1\leq x\leq 3: & y=x-1+x-3=2x-4 \\ x>3: & y=x-1-x+3=2 \end{cases}$$

نیم خط
پاره خط
نیم خط



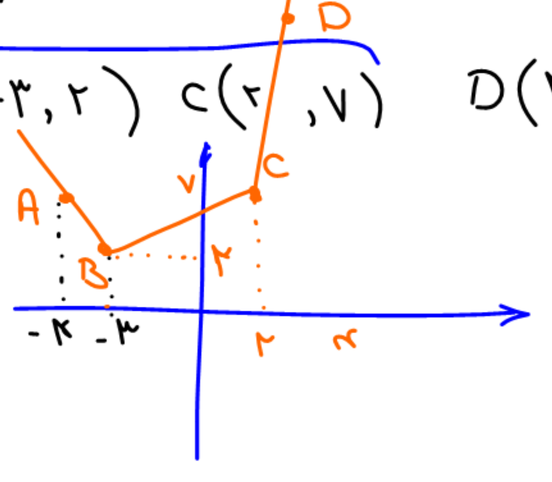
برد $-2\leq y\leq 2$

$x_w=\frac{1+3}{2}=2$

نکته: برای یافتن min توابع $y=|a_1x-b_1|+|a_2x-b_2|+\dots+|a_nx-b_n|$ ریشه تک تک قدر مطلق‌ها را یافته، آن‌ها را در کل عبارت بگذارید کمترین عدد بدست آمده y_{min} است.

۸) $y=x+|x-2|+|x+3|$ ، $x=2$ ، $x=-3$

$A(-4,3)$ $B(-3,2)$ $C(2,7)$ $D(4,13)$

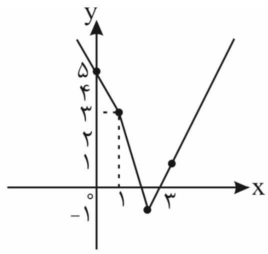


$y_{min}=2$

برد $y\geq y_{min}=2$

۲) برای رسم توابعی که به صورت $y=|a_۱x-x_۱|+|a_۲x-x_۲|+\cdots+|a_nx-x_n|+k$ هستند کافی است ریشه‌ی هر کدام از قدرمطلق‌ها را پیدا کنیم و بعد یک عدد کوچک‌تر از کوچک‌ترین ریشه و یک عدد بزرگ‌تر از بزرگ‌ترین ریشه در نظر بگیریم و بعد مختصات نقاطی را که این عددها و ریشه‌ها طول‌هایشان هستند، پیدا کنیم و آن‌ها را روی محور مختصات مشخص و به ترتیب به هم وصل کنیم و دو پاره‌خط اول و آخر را امتداد دهیم.

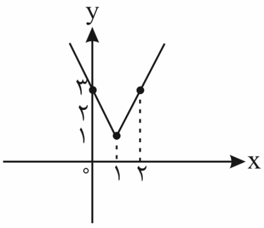
این مثال‌ها را ببینید:



$y=۳|x-۲|-|x-۱|$ ($x=۲$، $x=۱$)

عدد کوچک‌تر، عدد بزرگ‌تر

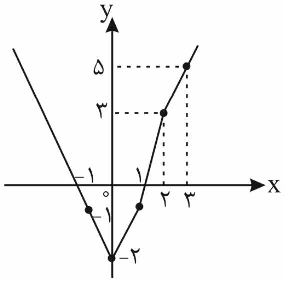
$\Rightarrow (۰,۵),\underbrace{(۱,۳),(۲,-۱)}_{\text{ریشه‌ها}},(۳,۱)$



$y=۲|x-۱|+۱$ ($x=۱$)

عدد کوچک‌تر، عدد بزرگ‌تر

$\Rightarrow (۰,۳),\underbrace{(۱,۱)}_{\text{ریشه}},(۲,۳)$



$y=۲|x|-|x-۲|+|x-۱|-۲$ ($x=۰$، $x=۲$، $x=۱$)

عدد کوچک‌تر، عدد بزرگ‌تر

$\Rightarrow (-۱,-۱),\underbrace{(۰,-۳),(۱,-۱),(۲,۳)}_{\text{ریشه‌ها}},(۳,۵)$

اگر دقت کنید در این ضابطه‌ها پس از ساده‌کردن قدرمطلق‌ها و تعیین علامت آن‌ها در بازه‌ای مختلف یک معادله خط در هر بازه باقی خواهد ماند و از آن‌جا که خطی که از هر دو نقطه می‌گذرد منحصربه‌فرد می‌باشد ما با این کار از هر خط دو نقطه را می‌دهیم که با وصل‌کردن آن‌ها به یکدیگر نمودار خط هر قسمت به دست می‌آید.

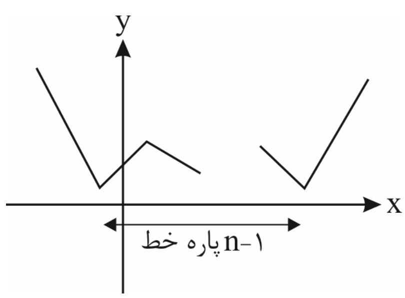
تست ۱۲۳: کم‌ترین مقدار تابع $f(x)=|۳x|+|x+۲|-x$ برابر کدام است؟

۱) صفر　　۲) ۱　　۳) ۲ ✓　　۴) -۱

$x=0 \longrightarrow f(0)=0+2-0=2=y_{min}$

$x=-2 \longrightarrow f(-2)=6+0+2=8$

چند نکته در مورد نمودارهای توابع شامل قدرمطلق

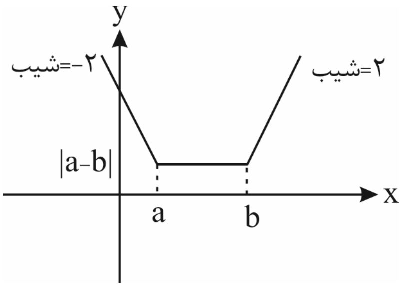


۱) با توجه به روش رسم نمودار تابع $y=|a_۱x-b_۱|+|a_۲x-b_۲|+\cdots+|a_nx-b_n|$ مشخص است که نمودار این تابع از $n-۱$ پاره‌خط و دو نیم‌خط تشکیل شده است. (چرا؟)

پس کم‌ترین مقدار تابع همیشه به ازای یکی از ریشه‌ها به دست می‌آید.

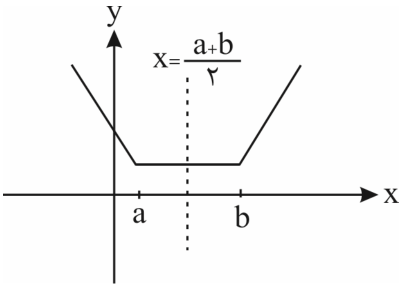
بنابراین برای پیداکردن حداقل عبارت‌هایی مثل عبارت بالا کافی است مقدار تابع را به ازای ریشه‌ی هر کدام از قدرمطلق‌ها پیدا کنیم و کم‌ترین مقدار به دست‌آمده را انتخاب کنیم.

۲) نمودار تابع با ضابطه‌ی $y=|x-a|+|x-b|$ را می‌توانیم با همان روشی که تا الان یاد گرفته‌ایم، رسم کنیم. ولی در مورد این تابع می‌توانید این نکته را هم یاد بگیرید.



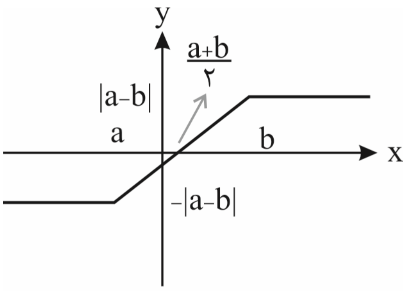
نمودار این تابع‌ها به صورت روبه‌رو است: (بعضی‌ها دوست دارند بگویند گلدانی است!)

کم‌ترین مقدار تابع برابر $|a-b|$ و طول نقاط زاویه‌دار نمودار ریشه‌های عبارت‌های داخل قدرمطلق است، شیب دو نیم‌خطی هم که در سمت چپ و راست پاره‌خط افقی رسم می‌شوند برابر ۲- و ۲ است. منحنی دارای یک محور تقارن است به معادله‌ی $x=\frac{a+b}{2}$ یا «میانگین ریشه‌ها» $=x$

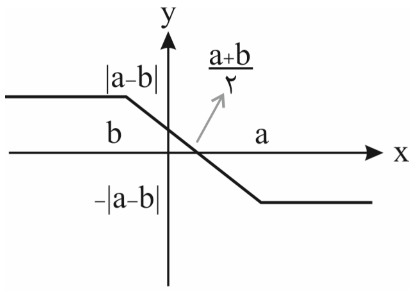


۳) محور تقارن تابع $y=|x-a|+|x-b|$ خط $x=\frac{a+b}{2}$ است. اگر به نمودار نگاه کنید، می‌بینید محور تقارن در اصل همان میانگین ریشه‌ها است. پس به طور کلی معادله‌ی محور تقارن هر تابع با ضابطه‌ی $y=|a_1x+b_1|+|a_2x+b_2|$ (به شرط این‌که $|a_1|=|a_2|$ باشد) به صورت «میانگین ریشه‌ها» $=x$ است.

۴) نمودار تابع‌هایی با ضابطه‌ی $y=|x-a|-|x-b|$ را هم می‌توان با استفاده از روشی که برای رسم نمودار تابع‌های شامل قدرمطلق یاد گرفتید رسم کرد. ولی در مورد این تابع خوب است این‌ها را هم بدانید:

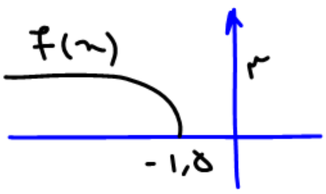


a<b



a>b

نمودار تابع به یکی از دو صورت بالا است (بعضی‌ها دوست دارند بگویند سرسره‌ای یا آبشاری!) تابع همواره بین $|a-b|$ و $-|a-b|$ است یعنی $-|a-b|\le y\le |a-b|$. نمودار تابع یک مرکز تقارن دارد که مختصاتش $(\frac{a+b}{2},0)$ است، شیب خطی که دو پاره‌خط افقی را به هم وصل می‌کند برابر ۲ یا ۲- است.



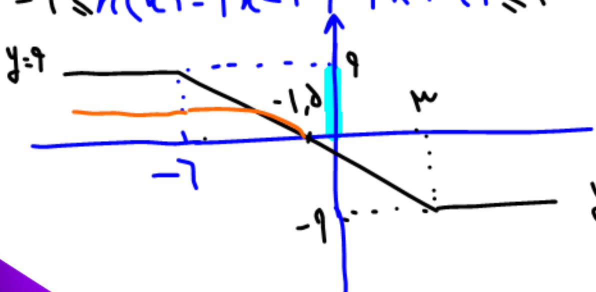
فهم

تست ۱۲۴: برد تابع $f(x)=\sqrt{|x-3|-|x+6|}$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۱۰ ۲) ۷ ۳) ۳ ۴) ۴

می دانیم این تابع ترکیب دو تابع $g(x)=\sqrt{x}$ ، $h(x)=|x-3|-|x+6|$ است. $f(x)=g(h(x))$

خروجی های تابع $h(x)$ ورودی تابع $g(x)$ می‌شود داریم: $-9\le h(x)=|x-3|-|x+6|\le 9$



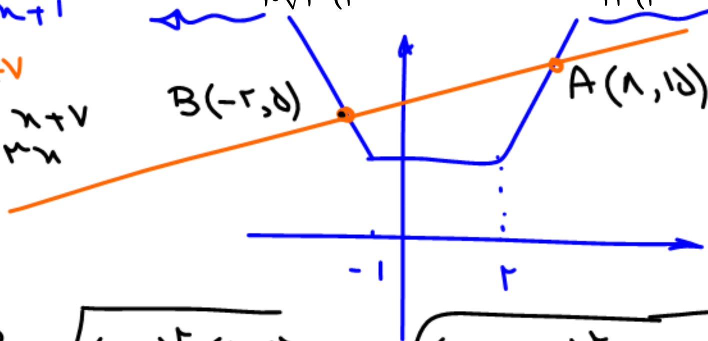
$f(x)=\sqrt{\underbrace{-9\le h(x)\le 9}_{0\le h(x)\le 9}}$ جذر $\Rightarrow 3$

$0\le f(x)=g(h(x))\le 3$

تست ۱۲۵: نمودارهای دو تابع $y=|x-2|+|x+1|$ و $y=x+7$، در دو نقطه‌ی A و B متقاطع هستند. اندازه‌ی پاره‌خط AB، کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۹)

۱) $8\sqrt{2}$ ۲) ۱۲ ۳) ۱۳ ۴) $10\sqrt{2}$

$$\begin{cases} y=-2x+1 \\ y=x+7 \end{cases}$$
$-2x+1=x+7$
$-6=3x$
$x=-2$



$$\begin{cases} y=2x-1 \\ y=x+7 \end{cases}$$
$2x-1=x+7$
$x=8$
$A(8,15)$

$$AB=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}=\sqrt{(8-(-2))^2+(15-5)^2}=\sqrt{10^2+10^2}=\sqrt{200}=\sqrt{100(2)}=10\sqrt{2}$$

تست ۱۲۶: اگر $A(3,0)$ مرکز تقارن نمودار تابع $y=|x-k+1|-|x+2|$ باشد، کم‌ترین مقدار تابع $y=|x+2|+|x-k|$ کدام است؟

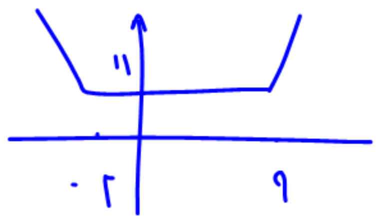
۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۱ ۴) ۱۲

طول مرکز تقارن آنها وسط ۲ ریشه است

$$\boxed{k=9} \leftarrow 3=x_w=\frac{(k-1)+(-2)}{2}$$

$y=|x+2|+|x-9|$

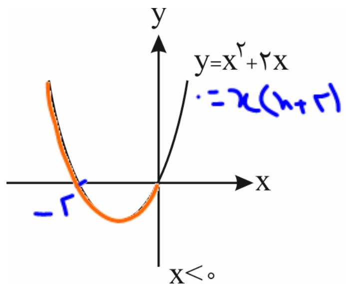
$$\begin{cases} x=-2 \longrightarrow f(-2)=11 \\ x=9 \longrightarrow f(9)=11 \end{cases}$$

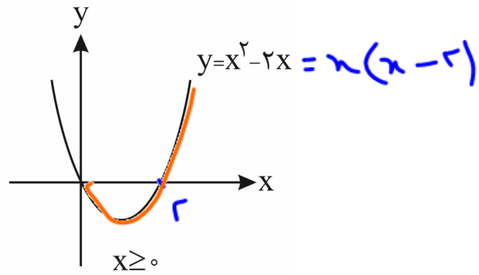


۳) راه اصلی رسم نمودار این توابع تعیین علامت عبارت داخل قدرمطلق است. به این مثال توجه کنید:

$$y=x^2-2|x|=\begin{cases} x^2-2x & x\ge 0 \\ x^2+2x & x<0 \end{cases}$$

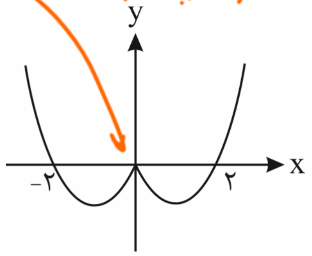
$x=0$





قسمتی از نمودار اول که $(x\ge 0)$ در ناحیه‌ی اول یا چهارم است را به قسمتی از نمودار دوم که $(x\le 0)$ در ناحیه‌ی سوم یا دوم است متصل می‌کنیم.

$x=0$ زاویه‌دار (گوشه)

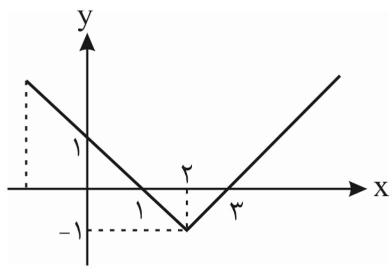


۴) برای رسم نمودار تابع $y=|f(x)|$ ابتدا نمودار تابع $y=f(x)$ را رسم می‌کنیم و سپس قسمت‌های پایین محور طول‌ها را نسبت به محور طول‌ها قرینه می‌کنیم.

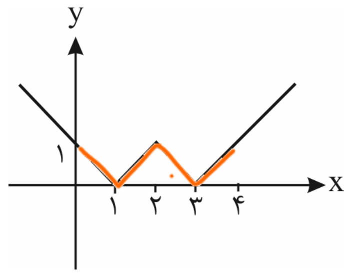
تست ۱۲۷: مجموع طول پاره‌خط‌های تشکیل‌دهنده‌ی نمودار تابع $y=||x-۲|-۱|$ در بازه‌ی $۰\le x\le ۴$ کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۲}$ ۲) $۴\sqrt{۲}$ ۳) $۶\sqrt{۲}$ ۴) $۸\sqrt{۲}$

پاسخ: گزینه‌ی «۲» ـ ابتدا نمودار تابع $f(x)=|x-۲|-۱$ را رسم می‌کنیم و سپس قسمت‌های پایین محور xها را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم:



$y=|x-۲|-۱$



$y=||x-۲|-۱|$

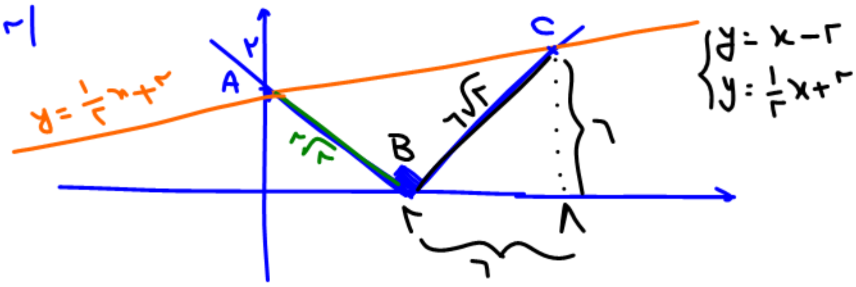
حالا برای آن که طول پاره‌خط‌ها را پیدا کنیم مختصات دو نقطه به طول $x=۰$ و $x=۴$ را پیدا می‌کنیم که می‌شود $(۰,۱)$ و $(۴,۱)$. حالا به شکل نگاه کنید نمودار از چهار پاره‌خط تشکیل شده که طول همه‌شان $\sqrt{۲}$ است پس مجموع طول پاره‌خط‌ها می‌شود $۴\sqrt{۲}$.

تست ۱۲۸: مساحت ناحیهٔ محدود به نمودارهای دو تابع $y=\sqrt{x^۲-۴x+۴}$ و $y=\frac{۱}{۲}x+۲$، کدام است؟ (ریاضی ۹۹)

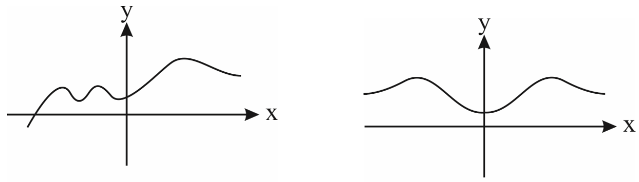
۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

$y=\sqrt{x^2-4x+4}=\sqrt{(x-2)^2}=|x-2|$

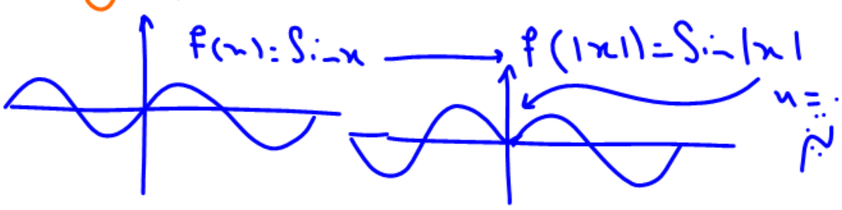
$S=\frac{(AB)(BC)}{2}=\frac{(2\sqrt{2})(6\sqrt{2})}{2}=12$



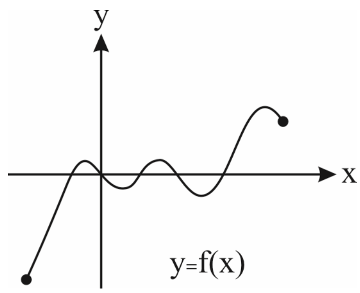
۵) برای رسم نمودار تابع $y=f(|x|)$ ابتدا نمودار تابع $y=f(x)$ را رسم می‌کنیم و سپس قسمتی را که سمت چپ محور yها (یعنی $x<۰$) است، حذف می‌کنیم و قرینهٔ قسمت سمت راست (یعنی $x>۰$) را نسبت به محور yها رسم می‌کنیم.

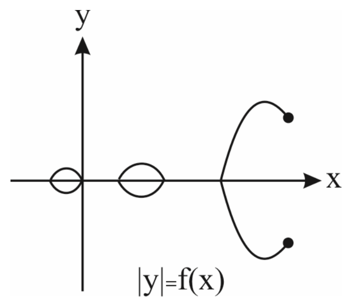


x هاو بر برابر یش |x| بذارید.



۶) برای رسم نمودار ضابطه‌ی $|y|=f(x)$ که عموماً یک تابع نیست، ابتدا نمودار تابع $y=f(x)$ را رسم می‌کنیم و سپس قسمت زیر محور xها را حذف می‌کنیم و قرینه‌ی قسمت بالای محور xها را نسبت به محور xها رسم می‌کنیم.



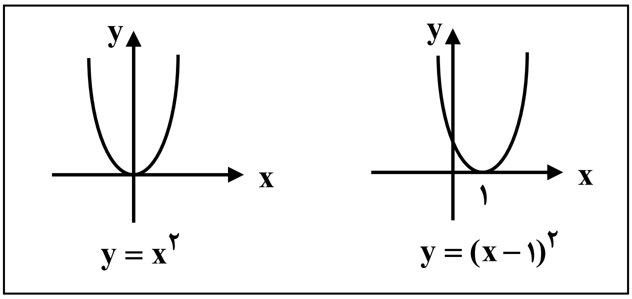


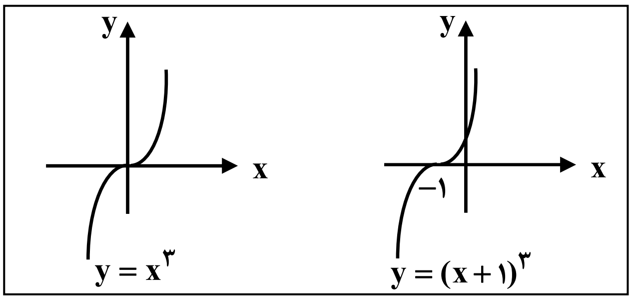
تبدیل نمودار توابع

۱– انتقال افقی

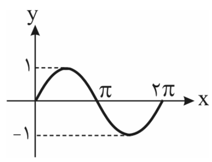
۱) اگر $a>0$ باشد، نمودار $y=f(x-a)$ همان نمودار f است که a واحد به سمت راست انتقال داده شده است. در این حالت به مقادیر x، a واحد اضافه شده است. (دامنه تغییر می‌کند.)

۲) اگر $a>0$ باشد نمودار $y=f(x+a)$ همان نمودار f است که a واحد به چپ انتقال داده شده است. در این حالت از مقادیر x، a واحد کم می‌شود. (دامنه تغییر می‌کند.)

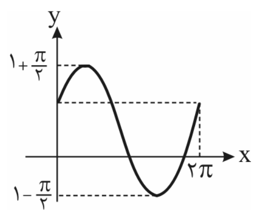


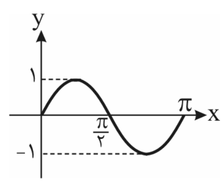


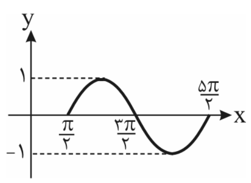
تست ۱۲۹: نمودار تابع $y=f(x)$ به صورت

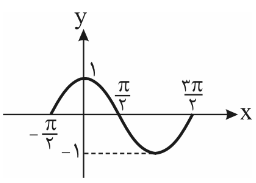


است، نمودار تابع $y=f(x+\frac{\pi}{2})$ کدام است؟

۱)


۲)


۳)


۴)


تست ۱۳۰: اگر نقطهٔ $A(۳,۴)$ روی تابع $f(x)$ قرار گیرد، در این صورت کدام نقطهٔ زیر، روی تابع $y=f(x+m)$ قرار می‌گیرد؟

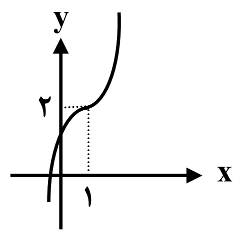
۱) $(۳+m,۴)$ ۲) $(۳-m,۴-m)$ ۳) $(۳-m,۴)$ ۴) $(۳+m,۴+m)$

۲- انتقال عمودی

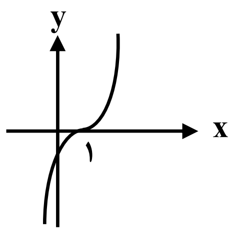
۱) اگر $a>۰$ باشد نمودار $y=f(x)+a$ همان نمودار f است که a واحد به بالا انتقال داده شده است. در این حالت به مقادیر y (برد) a واحد اضافه می‌شود (برد تغییر می‌کند).

۲) اگر $a<۰$ باشد نمدار $y=f(x)+a$ همان نمودار f است که a واحد به پایین انتقال داده شده است. در این حالت از مقادیر y (برد) a واحد کم می‌شود (برد تغییر می‌کند).

مثلاً برای رسم نمودار $y=x^۳-۳x^۲+۳x+۱$ می‌نویسیم: $y=(x^۳-۳x^۲+۳x-۱)+۲=(x-۱)^۳+۲$ حالا:



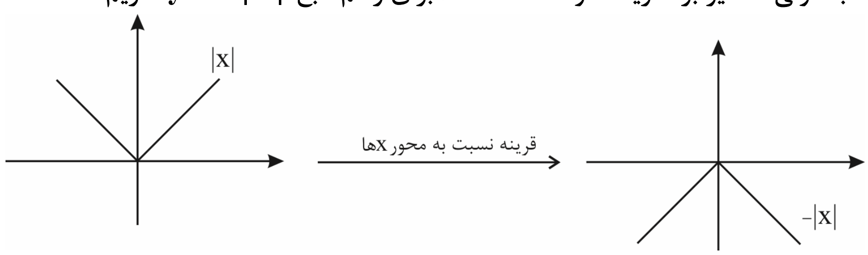
$y=(x-۱)^۳+۲$



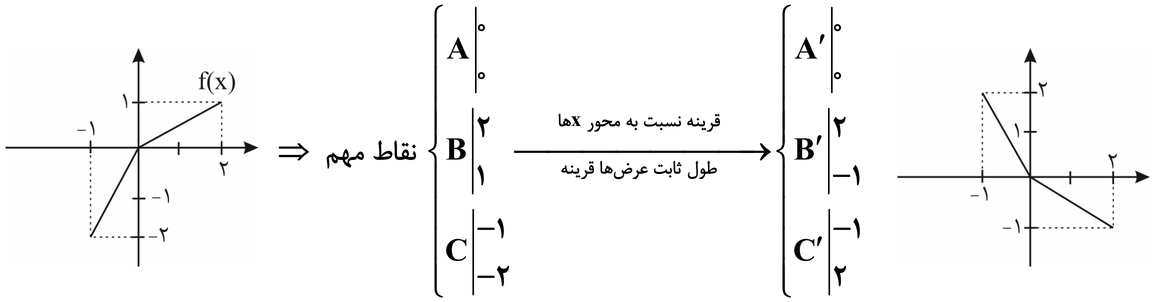
$y=(x-۱)^۳$

۳- رسم $-f(x)$:

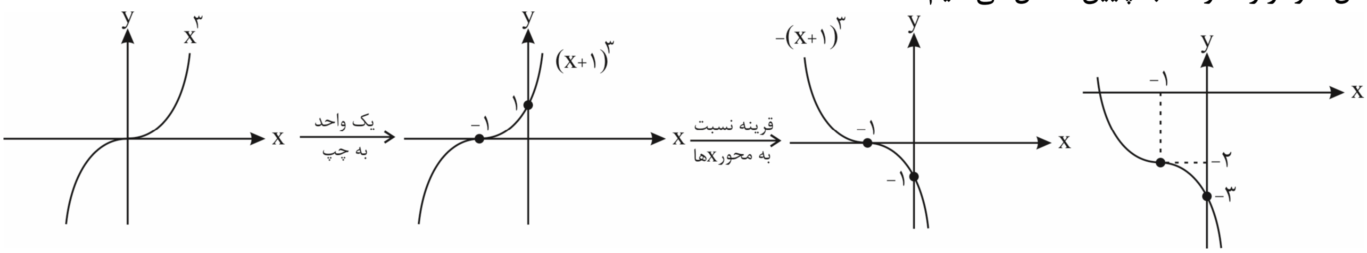
برای رسم $-f(x)$ کافی است نمودار f را نسبت به محور xها قرینه کنیم. توجه کنید در این حالت طول نقاط ثابت ولی عرضشان قرینه می‌شود. پس مقادیر دامنه ثابت ولی مقادیر برد قرینه خواهند شد. مثلاً برای رسم تابع $y=-|x|$ داریم:



و یا مثلاً اگر $f(x)$ به صورت مقابل باشد داریم:



برای رسم تابع $y=-(x+1)^3-2$، ابتدا x^3 را یک واحد به سمت چپ انتقال داده و سپس نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم و در نهایت کل نمودار را ۲ واحد به پایین منتقل می‌کنیم:



همان‌طور که دیدید اولویت با انتقال افقی، سپس با علامت منفی پشت تابع و در نهایت با انتقال عمودی است.

۴- رسم $f(-x)$:

برای رسم نمودار $f(-x)$ کافی است نمودار f را نسبت به محور yها قرینه کنیم. توجه کنید در این حالت طول نقاط قرینه شده ولی عرضشان ثابت می‌ماند. پس مقادیر دامنه قرینه خواهند شد ولی برد تغییری نمی‌کند.

مثلاً برای رسم $y=\sqrt{-x}$ داریم:

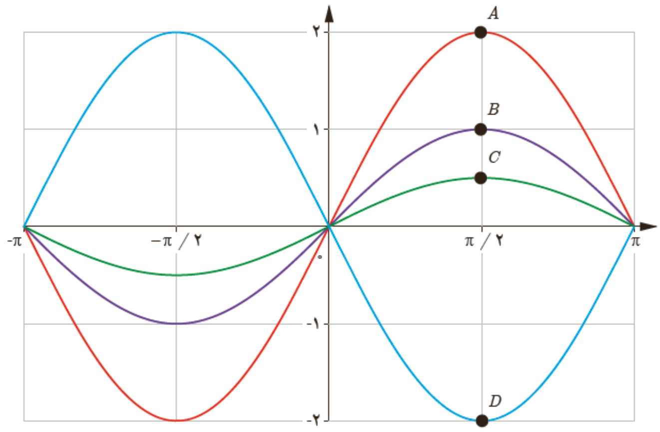
۵- رسم $y=af(x)$

۱) اگر $a>1$ باشد، نمودار $f(x)$ در امتداد محور yها با ضریب a کشیده می‌شود که به آن انبساط عمودی می‌گوییم. در این حالت مقادیر برد (yها)، a برابر می‌شوند.

۲) اگر $0<a<1$ باشد، نمودار $f(x)$ در امتداد محور yها با ضریب a فشرده می‌شود که به آن انقباض عمودی می‌گوییم. در این حالت نیز مقادیر برد (yها)، a برابر می‌شوند.

۳) اگر پشت تابع یک عدد منفی ضرب شده باشد $(a<0)$ ابتدا تابع را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم که از منفی خلاص شویم و سپس عرض‌ها را در عدد مثبت a ضرب می‌کنیم (مثل ۲ حالت بالا).

مثال ۱۳۱: در شکل زیر نمودار توابع با ضابطه‌های $y=\sin x$ و $y=۲\sin x$ و $y=-۲\sin x$ و $y=\frac{۱}{۲}\sin x$ در بازه‌ی $[-\pi,\pi]$ رسم شده است. مشخص کنید هر کدام از ضابطه‌ها مربوط به کدام نمودار است. دامنه و برد هر کدام را مشخص کنید.



یادت باشه: در این نوع از توابع $(af(x))$، عرض نقاط در عدد a ضرب می‌شود اما xها (طول نقاط) ثابت می‌ماند.

۶- رسم $f(ax)$

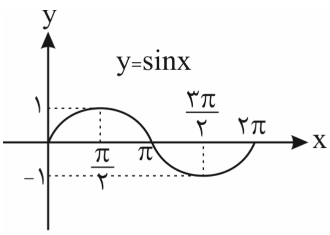
با فرض این که $a>۰$ است، برای رسم $f(ax)$ کافی است طول هر نقطه از نمودار $f(x)$ را $\frac{۱}{a}$ برابر کنیم.

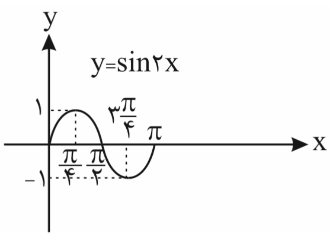
۱) اگر $a>۱$ باشد منحنی با ضریب $\frac{۱}{a}$ در امتداد محور xها منقبض (فشرده) می‌شود.

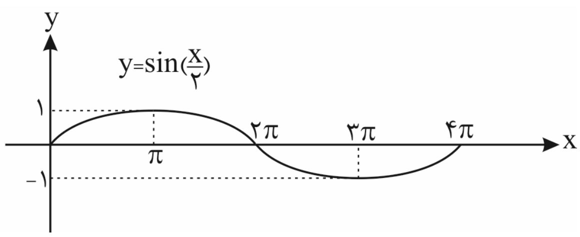
۲) اگر $۰<a<۱$ باشد منحنی با ضریب $\frac{۱}{a}$ در امتداد محور xها کشیده می‌شود.

در هر دو حالت فوق، مقادیر دامنه $\frac{۱}{a}$ برابر می‌شود.

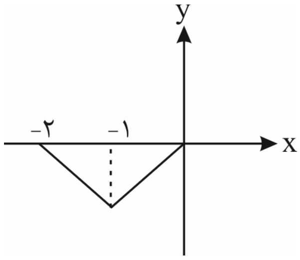
یادت باشه: در این مدل از توابع $(f(ax))$، طول نقاط در عدد $\frac{۱}{a}$ ضرب می‌شود اما عرض نقاط ثابت می‌ماند. مثلاً اگر $f(x)=\sin x$ باشد برای رسم $f(\frac{x}{۲})$ و $f(۲x)$، به ترتیب طول نقاط را در ۲ و $\frac{۱}{۲}$ ضرب می‌کنیم:







مثال ۱۳۲: اگر شکل زیر مربوط به نمودار تابع $y=f(1-x)$ باشد، نمودار تابع $y=f(2x)$ کدام است؟ (قلم‌چی رشتهٔ ریاضی)



تست ۱۳۳: اگر $f(x)=\cos x$ باشد، آن‌گاه نمودار دو تابع $y=f(x)$ و $y=f(\frac{x}{2})$ در بازهٔ $[0,4\pi]$ در چند نقطه مشترک‌اند؟

۱) ۲ ۲) ۵ ۳) ۳ ۴) ۴

۷- رسم $y=Af(bx+c)+D$

بهترین و کامل‌ترین روش رسم، همین مورد است که تمام موارد قبلی را شامل می‌شود.

مراحل رسم:

۱) ابتدا انتقال عدد ثابت c را انجام می‌دهیم.

۲) با توجه به مقدار b نمودار را در راستای افقی یعنی محور xها منبسط یا منقبض می‌کنیم.

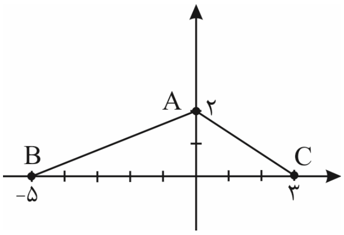
۳) اگر b منفی باشد، در پایان، نمودار را نسبت به محور yها قرینه می‌کنیم.

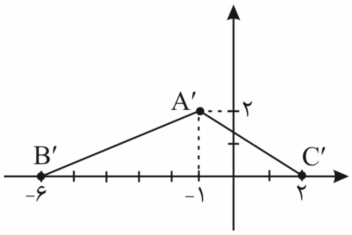
۴) با توجه به مقدار A نمودار در راستای محور yها کشیده و یا فشرده می‌کنیم (عرض نقاط را در A ضرب می‌کنیم).

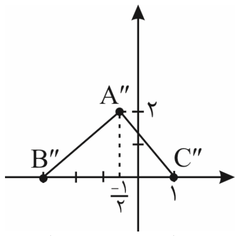
۵) اگر A منفی باشد پس از آن که عرض نقاط را در عدد مثبت پشت تابع ضرب کردیم، تابع را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم (یعنی با ثابت نگه داشتن xها، عرض نقاط را در منفی ضرب می‌کنیم).

۶) انتقال عمودی عدد D را انجام می‌دهیم.

مثال ۱۳۴: اگر $f(x)$ به صورت زیر باشد، نمودار $y=-2f(1-2x)$ را رسم کنید.







$A\left|\begin{matrix}0\\2\end{matrix}\right. \to A'\left|\begin{matrix}-1\\2\end{matrix}\right.$

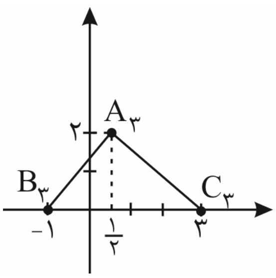
$B\left|\begin{matrix}-5\\0\end{matrix}\right. \to B'\left|\begin{matrix}-6\\0\end{matrix}\right.$

$C\left|\begin{matrix}3\\0\end{matrix}\right. \to C'\left|\begin{matrix}2\\0\end{matrix}\right.$

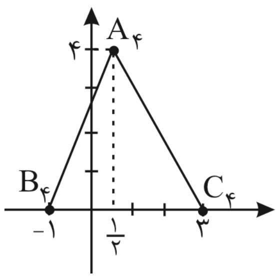
$B'\left|\begin{matrix}-6\\0\end{matrix}\right. \to B''\left|\begin{matrix}-3\\0\end{matrix}\right.$

$C'\left|\begin{matrix}2\\0\end{matrix}\right. \to C''\left|\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right.$

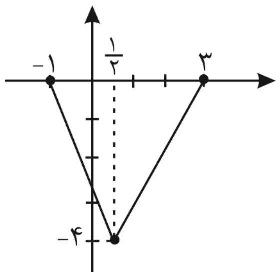
$A'\left|\begin{matrix}-1\\2\end{matrix}\right. \to A''\left|\begin{matrix}-\frac{1}{2}\\2\end{matrix}\right.$



عرض‌ها دو برابر می‌شوند $\longrightarrow$



تقارن عمودی $\longrightarrow$



$B''\left|\begin{matrix}-3\\0\end{matrix}\right. \to B_3\left|\begin{matrix}3\\0\end{matrix}\right.$

$A''\left|\begin{matrix}-\frac{1}{2}\\2\end{matrix}\right. \to A_3\left|\begin{matrix}\frac{1}{2}\\2\end{matrix}\right.$

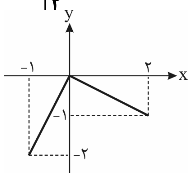
$C''\left|\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right. \to C_3\left|\begin{matrix}-1\\0\end{matrix}\right.$

$C_3\left|\begin{matrix}-1\\0\end{matrix}\right. \to C_4\left|\begin{matrix}-1\\0\end{matrix}\right.$

$B_3\left|\begin{matrix}3\\0\end{matrix}\right. \to B_4\left|\begin{matrix}3\\0\end{matrix}\right.$

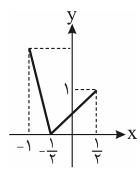
$A_3\left|\begin{matrix}\frac{1}{2}\\2\end{matrix}\right. \to A_4\left|\begin{matrix}\frac{1}{2}\\4\end{matrix}\right.$

تست ۱۳۵: نمودار تابع $y=f(x)$ به صورت

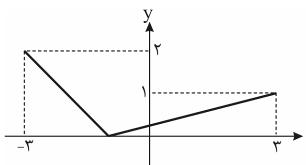


است، نمودار تابع $y=-f(1-2x)$ کدام است؟

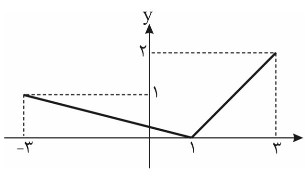
۱)



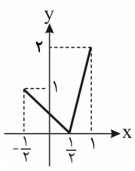
۲)



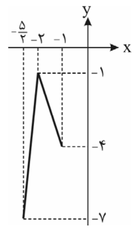
۳)

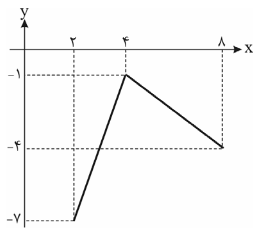


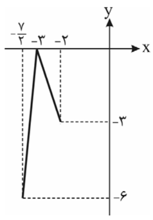
۴)

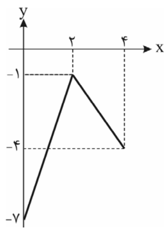


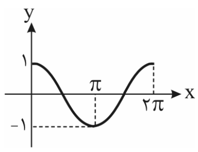
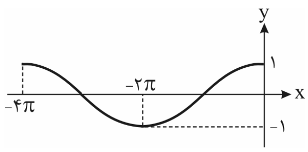
تست ۱۳۶: بر اساس نمودار تابع $y = f(x)$ در تست قبلی، نمودار تابع $y = ۳f(\frac{x}{۲} - ۲) - ۱$ کدام است؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

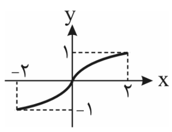
تست ۱۳۷: نمودار تابع $y = f(x)$ به شکل  است، ضابطه‌ی نمودار  کدام است؟

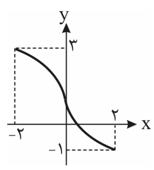
۱) $y = f(\frac{x}{۲})$

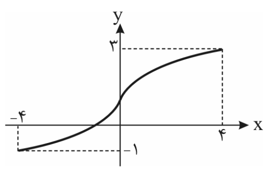
۲) $y = f(-\frac{x}{۲})$

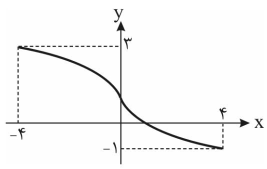
۳) $y = f(۲x)$

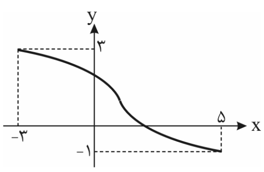
۴) $y = f(-۲x)$

تست ۱۳۸: نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت  است، نمودار تابع $y = -۲f(\frac{x}{۲}) + ۱$ کدام است؟

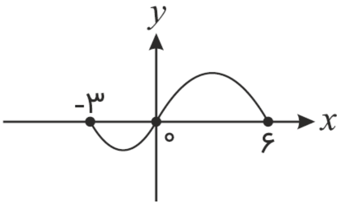
۱) 

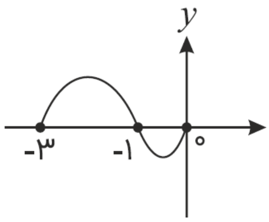
۲) 

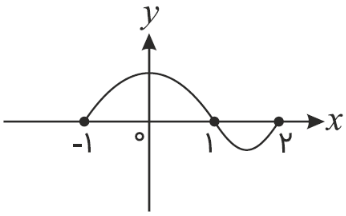
۳) 

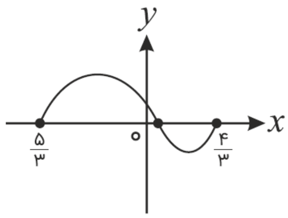
۴) 

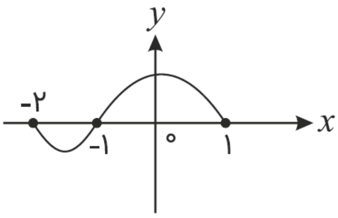
تست ۱۳۹: اگر نمودار $y = f(x)$ به صورت زیر باشد، نمودار تابع $y = f(1-3x)$ کدام است؟



۱)


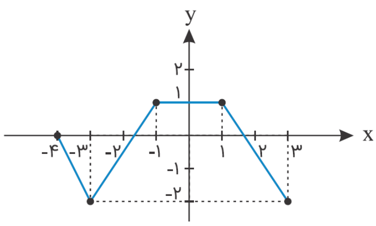
۲)


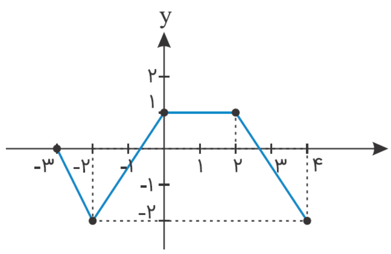
۳)


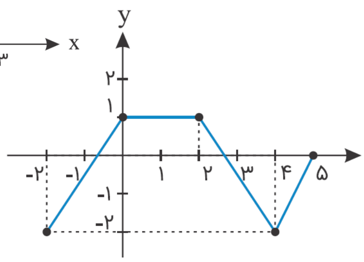
۴)


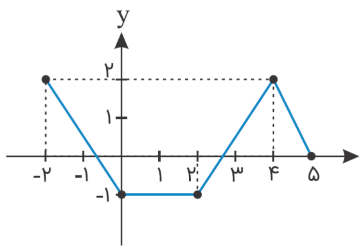
پاسخ: گزینهٔ «۳» ـ باید تابع نسبت به محور yها قرینه شود و همچنین xهای آن $\frac{1}{3}$ گردد و در آخر نمودار $\frac{1}{3}$ به سمت راست منتقل گردد.

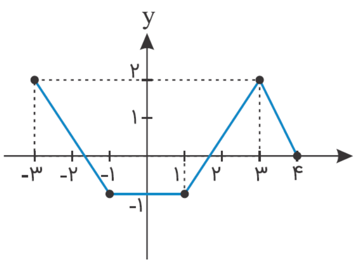
تست ۱۴۰: اگر نمودار تابع $f(x)$ به صورت زیر باشد، نمودار $-f(-x+1)$ کدام است؟



۱)


۲)


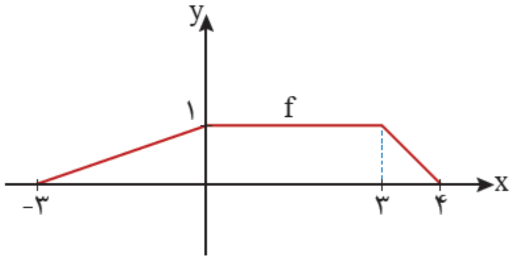
۳)


۴)


پاسخ: گزینهٔ «۳» ـ برای رسم نمودار تابع $-f(-x+1)$ باید مراحل زیر را انجام داد:

ابتدا نمودار ۱ واحد به سمت چپ انتقال داده شود و نمودار نسبت به محور yها قرینه شود، سپس برای این که نمودار $-f(-x+1)$ را رسم کنید باید نمودار را نسبت به محور xها قرینه کنید که در نهایت به گزینهٔ (۳) می‌رسیم.

تست ۱۴۱: اگر نمودار تابع $\mathbf{f}$ به صورت شکل زیر و $g(x)=\begin{cases} f(x+۱) & x\geq ۰ \\ f(۲x) & x<۰ \end{cases}$ باشد، مساحت سطح محدود بین نمودار تابع $\mathbf{g}$ و محور $\mathbf{x}$ها کدام است؟



۱) $\frac{۷}{۴}$
۲) $\frac{۱۱}{۴}$
۳) $\frac{۱۳}{۴}$
۴) $\frac{۱۵}{۴}$

تست ۱۴۲: تابع $y=۲^{x+|x|}$ را ۳ واحد در امتداد محور $\mathbf{x}$ها در جهت منفی و سپس در امتداد محور $\mathbf{y}$ها ۲ واحد در جهت منفی انتقال می‌دهیم. منحنی حاصل، محور $\mathbf{x}$ها را با کدام طول، قطع می‌کند؟ (خارج تجربی ۱۴۰۰)

۱) $-\frac{۵}{۲}$
۲) $-\frac{۳}{۲}$
۳) $\frac{۵}{۲}$
۴) $\frac{۷}{۲}$

تست ۱۴۳: نقطهٔ $A(-۱,۳)$ روی نمودار تابع $f(x)$ و نقطهٔ متناظر با آن یعنی $A'(a,b)$ روی نمودار تابع $y=۳f(۲x-۵)-۷$ قرار دارد. $a-b$ کدام است؟

۱) -۲
۲) صفر
۳) ۲
۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ «۲»

$$A\left|\begin{matrix}-۱\\ ۳\end{matrix}\right. \xrightarrow{\text{۵واحدبه‌راست}} \left|\begin{matrix}۴\\ ۳\end{matrix}\right. \xrightarrow{\text{انقباض‌طولی}} \left|\begin{matrix}۲\\ ۳\end{matrix}\right. \xrightarrow{\text{انبساط عرضی}} \left|\begin{matrix}۲\\ ۹\end{matrix}\right. \xrightarrow{\text{انتقال به پایین}} \left|\begin{matrix}۲\\ ۲\end{matrix}\right.$$

$$\Rightarrow A'(۲,۲) \Rightarrow a-b=۲-۲=۰$$

تست ۱۴۴: قرینهٔ نمودار $f(x)=\sqrt{x}$ را نسبت به محور $\mathbf{y}$ها تعیین کرده، سپس ۲ واحد به طرف $\mathbf{x}$های مثبت انتقال می‌دهیم. نمودار حاصل، نیمساز ناحیهٔ اول و سوم را با کدام طول قطع می‌کند؟ (خارج تجربی ۹۷)

۱) -۲
۲) ۰/۵
۳) ۱
۴) ۱/۵

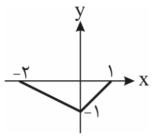
تست ۱۴۵: اگر $x=۲$ محور تقارن $y=f(x+۱)$ باشد، محور تقارن $y=f(۱-x)$ کدام است؟

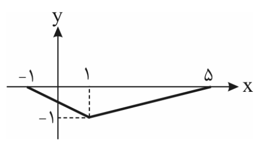
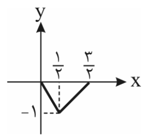
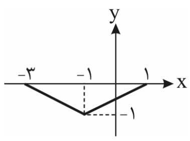
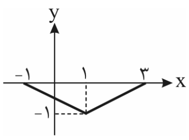
۱) $x=-۴$ ۲) $x=۴$ ۳) $x=-۲$ ۴) $x=-۱$

تست ۱۴۶: ابتدا قرینه نمودار تابع $f(x)=(x-۱)^۲$ را نسبت به مبدأ مختصات رسم کرده، سپس منحنی حاصل را ۴ واحد به سمت بالا انتقال می‌دهیم. طول نقاط تلاقی منحنی اخیر با منحنی اصلی کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۹)

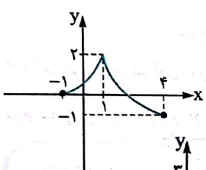
۱) ۲، ۰ ۲) ۱، ۱- ۳) ۲، ۱ ۴) ۱، ۲-

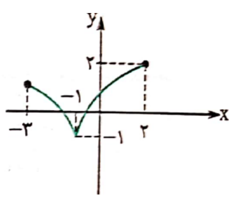
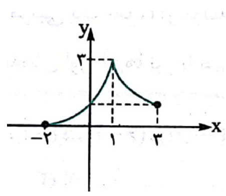
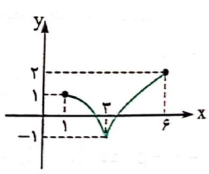
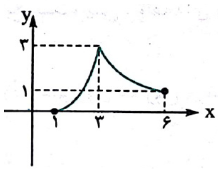
گاهی اوقات نمودار انتقال‌یافته رو میدن و نمودار خود $f(x)$ رو می‌پرسن.

تست ۱۴۷: نمودار $y=f(۱-۲x)$ به صورت  است، نمودار $y=f(x)$ کدام است؟

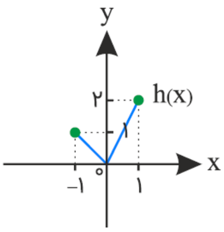
۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

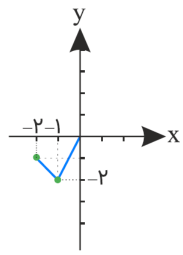
تست ۱۴۸: اگر نمودار تابع $y=-f(x-۲)$ به شکل مقابل باشد، نمودار تابع $y=۱+f(x)$ کدام است؟

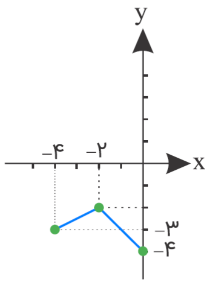


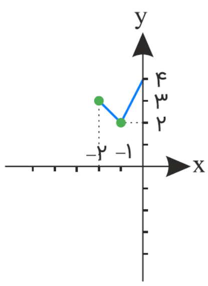
۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

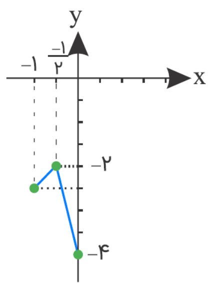
تست ۱۴۹: نمودار تابع $h(x)=f(x-1)-2$ مطابق شکل زیر است. کدام گزینه نمودار تابع $-f(\frac{x}{2})$ را به درستی نشان می‌دهد؟



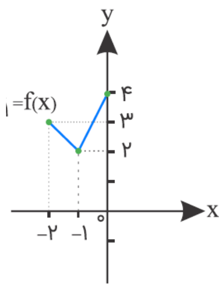
۱) 

۲) 

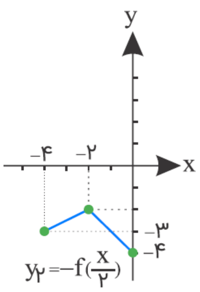
۳) 

۴) 

پاسخ: گزینهٔ «۲» ـ ابتدا باید نمودار تابع $y_1=f(x)$ را به دست آوریم. برای این منظور، کافی است نمودار $y=h(x)$ را یک واحد به سمت چپ و دو واحد به سمت بالا انتقال دهیم؛ بنابراین:



حال برای رسم $y_2=-f(\frac{x}{2})$ کافی است نمودار تابع $y_1=f(x)$ را در راستای افقی دو برابر منبسط و سپس نسبت به محور xها قرینه کنیم؛ در نتیجه تابع $y_2=-f(\frac{x}{2})$ به صورت زیر به دست می‌آید:



«تاثیر انتقال روی دامنه و برد تابع»

۱) اگر دامنه‌ی f، بازه‌ی $[a,b]$ باشد، برای یافتن دامنه‌ی $A.f(Bx+c)+D$ کافی است نامعادله‌ی $a\le Bx+c\le b$ را حل کنید.

مثال ۱۵۰: اگر دامنه‌ی تابع f بازه‌ی $[-2,3)$ باشد، دامنه‌ی $y=5f(3x)-3$ را بیابید.

۲) اگر دامنه‌ی $A.f(Bx+c)+D$ بازه‌ی $[a,b]$ باشد، برای یافتن دامنه‌ی $f(x)$ با قرار دادن $a \le x \le b$ ، عبارت $Bx+c$ را بسازیم و محدوده‌اش را بیابیم.

مثال ۱۵۱: اگر دامنه‌ی $y=-۲f(۴x-۱)$ بازه‌ی $[-۳,۳)$ باشد، دامنه‌ی f را بیابید.

۳) اگر برد f، بازه‌ی $[a,b]$ باشد، برای یافتن برد $A.f(Bx+c)+D$ کافی است برد f را در A ضرب کنیم و سپس با D جمع می‌کنیم.

تست ۱۵۲: اگر برد تابع f برابر $R_f=[-\sqrt{۳},۲]$ باشد، برد تابع $y=\sqrt{۲}f(x-۱)+۱$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۵ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

تست ۱۵۳: دامنهٔ تابع $y=\frac{-f(x)}{۲}$ به صورت $[۰,۴)$ است. دامنهٔ تابع $y=-f(\frac{-x}{۲})$ کدام است؟

۱) $[-۸,۰]$ ۲) $(-۸,۰]$ ۳) $[۰,۸]$ ۴) $[۰,۸)$

پاسخ: گزینهٔ «۲» ـ می‌دانیم دامنهٔ توابع $y=\frac{-f(x)}{۲}$ و $y=f(x)$ برابر است. (قبوله؟) پس داریم: $D_{-\frac{f(x)}{۲}}=D_{f(x)}=[۰,۴)$

از طرفی برای محاسبهٔ دامنهٔ تابع $y=-f(\frac{-x}{۲})$ می‌توان نوشت: $۰\le -\frac{x}{۲}<۴ \xrightarrow{\times(-۲)} -۸<x\le ۰$

پس دامنهٔ تابع $y=-f(-\frac{x}{۲})$ برابر $(-۸,۰]$ است.

تست ۱۵۴: اگر برد تابع $y=f(x-۱)$ به صورت $[۰,۲)$ باشد، برد تابع $y=-۳f(۲-x)+۱$ کدام است؟

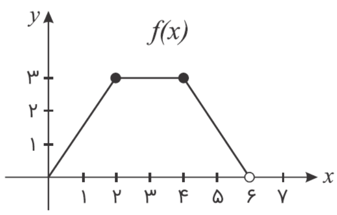
۱) $(-۱,۵]$ ۲) $[-۱,۵)$ ۳) $(-۵,۱]$ ۴) $[-۵,۱)$

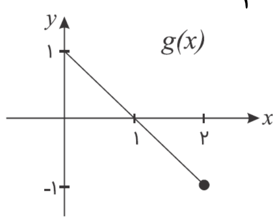
پاسخ: گزینهٔ «۳» ـ می‌دانیم انتقال افقی روی برد تابع اثر ندارد یعنی برد دو تابع $f(x-۱)$ و $f(۲-x)$ یکی است. حالا شروع می‌کنیم و محدودهٔ برد تابع خواسته‌شده را پیدا می‌کنیم، پس داریم:

$$۰\le f(۲-x)<۲ \xrightarrow{\times(-۳)} -۶<-۳f(۲-x)\le ۰ \xrightarrow{+۱} -۵<-۳f(۲-x)+۱\le ۱$$

پس برد تابع $y=-۳f(۲-x)+۱$ بازهٔ $(-۵,۱]$ است.

تست ۱۵۵: اگر نمودار توابع $\mathbf{f}$ و $\mathbf{g}$ به صورت زیر باشند، دامنهٔ تابع $\dfrac{f(۲x)}{g(\frac{۱}{۲}x)}$ کدام است؟





۱) $[۰,۳)-\{۲\}$

۲) $[۰,۳]-\{۲\}$

۳) $[۰,۳)-\{۱\}$

۴) $[۰,۳]-\{۱\}$

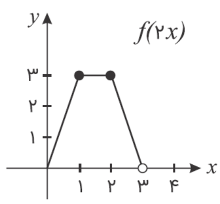
پاسخ: گزینهٔ «۱»

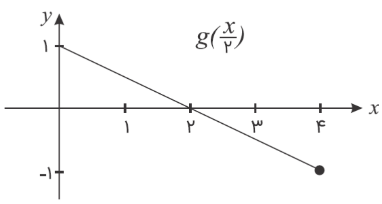
$$D_{f(x)}=[۰,۶)\Rightarrow D_{f(۲x)}=[۰,۳)$$

$$D_{g(x)}=[۰,۲]\Rightarrow D_{g(\frac{x}{۲})}=[۰,۴]$$

$$D_{\frac{f(۲x)}{g(\frac{x}{۲})}}=[۰,۳)\cap[۰,۴]-\{x\,|\,g(\frac{x}{۲})=۰\}=[۰,۳)-\{۲\}$$

نکته: اگر دامنهٔ $f(x)$ تقسیم بر k شود، دامنهٔ $f(kx)$ به دست می‌آید و اگر $۰<k<۱$ باشد، این دامنه بزرگ‌تر و اگر $k>۱$ باشد، این دامنه کوچک‌تر می‌شود.





توابع چندجمله‌ای

در سال‌های گذشته با توابع خطی آشنا شدید. هر تابع به صورت $f(x)=ax+b$ را یک تابع خطی می‌نامیم. اگر $a=۰$، تابع به صورت $f(x)=b$ درمی‌آید که آن را تابع ثابت می‌نامیم. تابع ثابت و تابع خطی حالت خاصی از توابعی هستند که توابع چندجمله‌ای نام دارند. توابع درجه دوم نیز حالت خاصی از توابع چندجمله‌ای هستند.

هر تابع به صورت $f(x)=a_nx^n+a_{n-۱}x^{n-۱}+\cdots+a_۲x^۲+a_۱x+a_۰$ را که در آن a_n و $a_{n-۱}$ و ... و $a_۲$ و $a_۱$ و $a_۰$ اعداد حقیقی و n یک عدد صحیح نامنفی و $a_n\neq۰$، یک تابع چندجمله‌ای از درجه‌ی n می‌نامند. دامنه‌ی توابع چندجمله‌ای مجموعه‌ی اعداد حقیقی است.

مثال ۱۵۶: توابع زیر نمونه‌ای از توابع چندجمله‌ای هستند که به ترتیب از درجه‌ی ۱، ۲، ۳ و ۵ هستند.

$$y=۳x+۵\quad,\quad y=-۸x^۲+۲x-\frac{۱}{۲}\quad,\quad y=\sqrt{۲}x^۳-\frac{۳}{۴}x\quad,\quad y=۲x^۵-۴x^۳+\sqrt{۷}x^۲$$

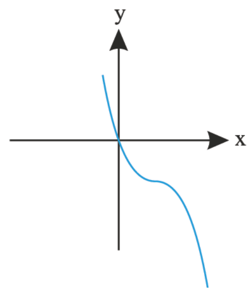
تست ۱۵۷: نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=-(x-۱)^۳+m$ به ازای چه مقادیری از m، از ناحیهٔ سوم عبور نمی‌کند؟

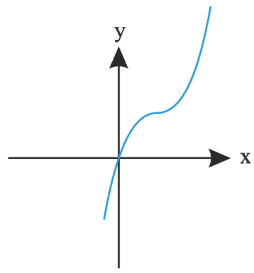
۱) $m\leq۱$　　۲) $m\geq۱$　　۳) $m\leq-۱$　　۴) $m\geq-۱$

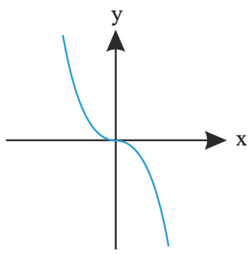
تست ۱۵۸: نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=x^3-3(x^2-x)+2$ از کدام ناحیهٔ دستگاه مختصات عبور نمی‌کند؟

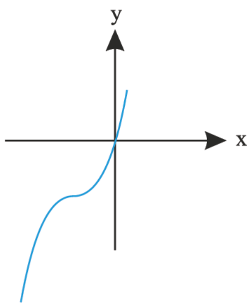
۱) اول ۲) دوم ۳) سوم ۴) چهارم

تست ۱۵۹: نمودار تابع $f(x)=6x^2-x^3-12x$ شبیه کدام گزینه است؟

۱) 

۲) 

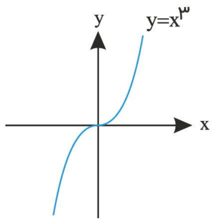
۳) 

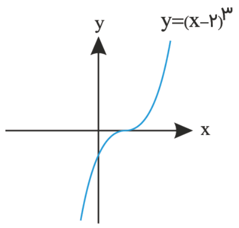
۴) 

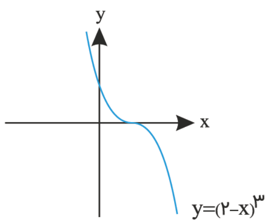
پاسخ: گزینهٔ «۱»

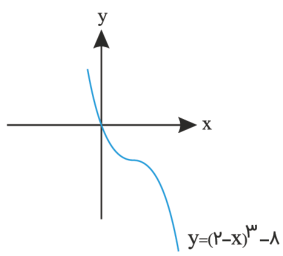
$$f(x)=\underbrace{6x^2-x^3-12x+8}_{(2-x)^3}-8=(2-x)^3-8$$

حالا مرحله به مرحله نمودار تابع را رسم می‌کنیم:







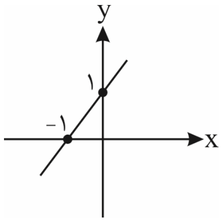


تابع‌های خطی، ثابت، همانی

۱– تابع خطی

به هر تابع که بتوان ضابطهٔ آن را به شکل $f(x)=ax+b$ نوشت یک تابع خطی می‌نامند. برای یافتن معادلهٔ یک تابع خطی کافی است دو نقطه از آن را داشته باشیم. نمودار یک تابع خطی به صورت یک خط راست می‌باشد. مثلاً برای رسم تابع $f(x)=x+۱$ دو نقطه را به شکل زیر در نظر گرفته و آن را رسم می‌کنیم:

بهتر است یک بار $x=۰$ داده و y را پیدا کنیم و بار دیگر $y=۰$ داده و x را پیدا کنیم.

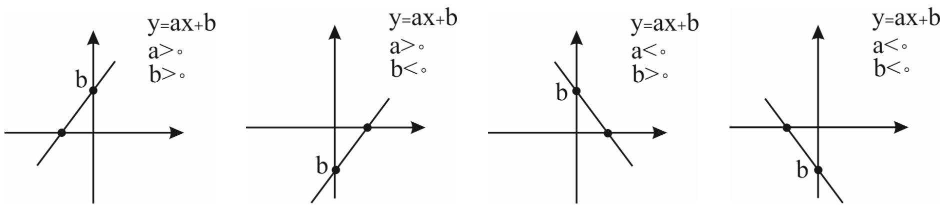


$y=x+۱$

x	۰	−۱
y	۱	۰

در تابع خطی $f(x)=ax+b$، a شیب تابع و b عرض از مبدأ آن است. در این نوع توابع با افزایش منظم در xها، yها به طور منظم تغییر می‌کنند. برای تشخیص خطی بودن یک تابع باید بفهمیم که نسبت تغییرات y به x (همان $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ یا شیب) ثابت است یا خیر.

به شکل‌های زیر توجه کنید:



تست ۱۶۰: اگر برد تابع خطی $f(x)=ax+b$ با دامنهٔ $[۱,۳]$ برابر $[-۳,۴]$ باشد با فرض مثبت بودن a مقدار b کدام است؟

۱) ۶/۵ ۲) ۶/۵- ۳) ۳/۵- ۴) ۳/۵

تست ۱۶۱: تابع خطی f برای هر x در تساوی $f(۲x)=۲f(x)$ صدق می‌کند. اگر مساحت محدود به $y=|f(x)|$ و خط $y=۶$ برابر ۱۲ باشد، مقدار $f(۹)$ کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۱۸ ۲) ۲۴ ۳) ۲۷ ۴) ۳۶

۲– تابع ثابت

به تابعی گفته می‌شود که برد آن فقط شامل یک عضو است. نمایش این تابع به صورت $f(x)=c$ است مثل $f(x)=0$، $f(x)=2$. اگر این تابع را رسم کنیم به صورت یک خط افقی درمی‌آید. نمودار تابع ثابت با دامنهٔ $\mathbb{R}$، خط افقی است ولی اگر دامنهٔ تابع $\mathbb{R}$ نباشد نمودار تابع بخشی از یک خط افقی و یا نقاطی روی آن است.

در تابع خطی $f(x)=ax+b$ اگر $a=0$ باشد به تابع ثابت می‌رسیم.

تست ۱۶۲: اگر تابع $f(x)=(a+1)x^2-(b+2)x+a-2b$ یک تابع ثابت باشد، حاصل $f(5)$ کدام است؟

۱) ۳-　　۲) ۵　　۳) ۵-　　۴) ۳

تست ۱۶۳: مجموع دو تابع $4-f(x)$ و $f(4-x)$ تابعی ثابت است. ضابطه‌ی $f(x)$ کدام می‌تواند باشد؟

۱) x^2+2x　　۲) x^2-2x　　۳) x^2-4x　　۴) x^2+4x

تست ۱۶۴: به ازای کدام مقدار a، نمودار تابع $y=\dfrac{(a-2)x+3}{a+5-2x}$، نمایش یک خط افقی با حذف یک نقطهٔ آن است؟ (سنجش جامع)

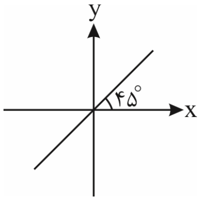
۱) ۴- و ۱　　۲) ۳ و ۱-　　۳) ۵ و ۱-　　۴) ۵- و ۱-

۳– تابع همانی

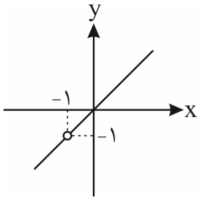
اگر در یک تابع، هر عضو از دامنه، دقیقاً به همان عضو از برد نظیر شود، تابع همانی است. ضابطهٔ تابع همانی $f(x)=x$ است.

نمودار تابع همانی با دامنهٔ $\mathbb{R}$، خط $y=x$ (نیمساز ناحیه اول و سوم) است. ولی اگر دامنه $\mathbb{R}$ نباشد، نمودار بخشی از $y=x$ و یا نقاطی بر روی ان است. توابع زیر همگی همانی هستند:

۱) $f(x)=x \ , \ D_f=\mathbb{R}$

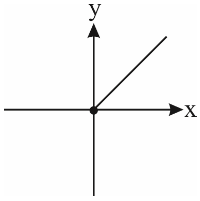


۲) $f(x)=\dfrac{x^۲+x}{x+۱}=\dfrac{x\cancel{(x+۱)}}{\cancel{(x+۱)}}=x$



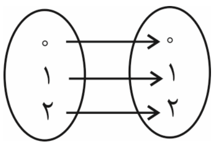
این تابع روی دامنه‌اش یعنی $\mathbb{R}-\{-۱\}$ همانی است.

۳) $f(x)=(\sqrt{x})^۲=x$



این تابع نیز روی دامنه‌اش یعنی $[۰,+\infty)$ همانی است.

۴) $\{(۰,۰)(۱,۱)(۲,۲)\}$ یا



تست ۱۶۵: اگر $f(x)=\dfrac{ax+۲b+۶}{(b+۳)x+۲}$ ضابطهٔ یک تابع همانی باشد $a+b$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱- ۳) ۱ ۴) ۲-

تست ۱۶۶: اگر تابع $y=\dfrac{۳x^۲+x}{(a-۱)x^۲+bx+c}$ یک تابع همانی باشد، حاصل $a+b+c$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

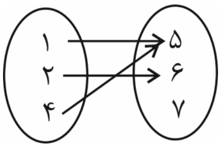
تابع یک‌به‌یک

۱) تابعی که در آن هیچ دو زوج متمایزی، مولفهٔ دوم تکراری نداشته باشد، یک‌به‌یک می‌گویند. تابع یک‌به‌یک دارای تعداد عضوهای یکسان دامنه و برد است.

برای پیدا کردن مجهول در تست‌های مربوط به تابع یک‌به‌یک، ابتدا سراغ مولفه‌های دوم یکسان می‌رویم و مولفه‌های اولشان را برابر می‌گذاریم. مثلاً در $f=\{(۲,۵)(۳,۱)(m,۵)\}$ به سراغ $(m,\underline{۵}),(۲,\underline{۵})$ می‌رویم و مولفه‌های اولشان را مساوی قرار می‌دهیم: $m=۲$

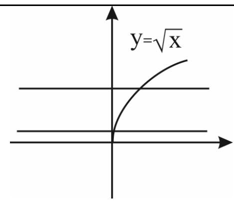
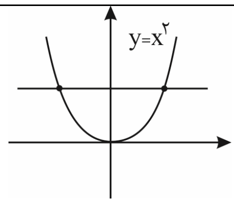
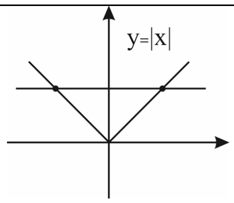
توجه کنید در این مدل از سؤالات شرط تابع‌بودن را نیز کنترل کنید. مثلاً $f=\{(۱,۵)(۱,۶)\}$ اصلاً تابع نیست پس شرط یک‌به‌یک‌بودن را کنترل نمی‌کنیم.

۲) در نمودار ون چنان‌چه بیش از یک فلش به مولفه‌های دوم وارد شود، تابع دیگر یک‌به‌یک نخواهد بود. مثلاً:

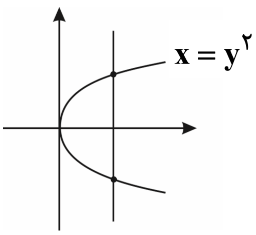


یک‌به‌یک نیست چون $(۱,۵),(۴,۵)$ دارای مولفهٔ دوم تکراری هستند.

۳) در نمودار دکارتی، تابعی یک‌به‌یک است که در آن هر خط به موازات محور xها، نمودار تابع را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

		
یک‌به‌یک است. چون هر خط افقی دلخواه، حداکثر در یک نقطه نمودار تابع را قطع کرده است.	یک‌به‌یک نیست، چون یک خط افقی نمودار تابع را در بیشتر از یک نقطه قطع کرده است.	یک‌به‌یک نیست چون یک خط افقی نمودار تابع را در بیشتر از یک نقطه قطع کرده است.

توجه کنید نمودار اصلاً بیانگر یک تابع نیست پس شرط یک‌به‌یک‌بودن را اصلاً کنترل نمی‌کنیم.



یادت باشه: معمولاً وجود $x^۲$، $|x|$، $[x]$ یا نسبت‌های مثلثاتی $\sin x$، $\cos x$، $\tan x$ و $\cot x$ تابع را غیریک‌به‌یک می‌کند.

چند نکتهٔ مهم:

۱) تابع خطی $y=ax+b$ با شرط $a\neq ۰$ (شیب غیرصفر، خطی که افقی نباشد) همواره یک‌به‌یک است.

۲) تابع $f(x)=ax^۲+bx+c$ در فاصلهٔ طول رأس به بعد و یا طول رأس به قبل، یک‌به‌یک است یعنی در این فاصله‌ها: $[\frac{-b}{۲a},+\infty)$ یا $(-\infty,\frac{-b}{۲a}]$

۳) توابع چند جمله‌ای از درجه زوج (بزرگ‌توان x زوج است) غیر یک‌به‌یک هستند.

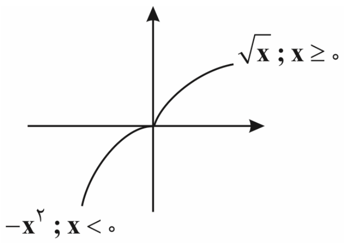
۴) توابع $|x|-x$ ، $x-|x|$ ، $|x|$ ، $x+|x|$ ، $\frac{|x|}{x}$ یا $\frac{x}{|x|}$ با توجه به نمودارشان که در درس‌نامهٔ قدرمطلق دیدیم، یک‌به‌یک نیستند چون در بخشی از نمودارشان به شکل یک خط افقی درمی‌آیند و هروقت قسمتی از نمودار به شکل یک خط افقی باشد تابع حتماً غیریک‌به‌یک است.

۵) توابع $[x]$، $x-[x]$ ، $[x]+[-x]$ و $(-۱)^{[x]}$ به دلیل مشابه مورد بالا، غیریک‌به‌یک هستند.

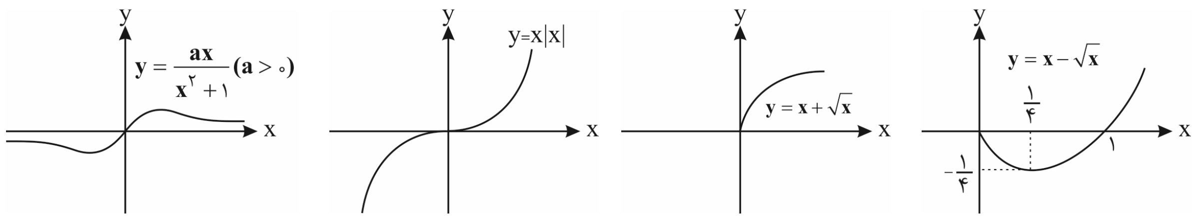
۶) تابع $x+[x]$ یک‌به‌یک است.

۷) تابع هموگرافیک $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ با شرط $ad-bc\neq ۰$ یک‌به‌یک است.

۸) در بررسی یک‌به‌یک بودن توابع دو یا چند ضابطه‌ای ابتدا یک‌به‌یک بودن ضابطه را در دامنهٔ آن بررسی کرده و سپس بررسی می‌کنیم که هر خط افقی بیشتر از یک مرتبه نمودار تابع را قطع نکند (برد ضابطه‌ها با هم اشتراک نداشته باشد)، مثلاً تابع $y=\begin{cases}\sqrt{x} & x\geq ۰\\ -x^۲ & x<۰\end{cases}$ یک‌به‌یک است چون طبق نمودار هر خط افقی فقط در یک نقطهٔ نمودار تابع را قطع می‌کند.



۹) توابع $x|x|$ و $x+\sqrt{x}$ یک‌به‌یک و توابع $x-\sqrt{x}$ و $\frac{ax}{x^۲+۱}$ غیر یک‌به‌یک هستند.



تست ۱۶۷: اگر تابع $f=\{(-۱,۱),(۱,۲),(۲,۳),(a,m-۱),(a+۲,n),(m,۳)\}$ یک‌به‌یک باشد، مقدار n کدام است؟

۱) ۱-　　۲) ۱　　۳) ۳　　۴) ۲

تست ۱۶۸: تابع $f:R\longrightarrow R$ با کدام ضابطه، یک به یک است؟

۱) $f(x)=x-|x|$　　۲) $f(x)=x+|x|$　　۳) $f(x)=x|x|$　　۴) $f(x)=\frac{|x|}{x}$

تست ۱۶۹: اگر تابع $f(x)=a|x|+۲x$ یک‌به‌یک باشد، حدود a کدام است؟

۱) $(۲,+\infty)$ ۲) $(-\infty,-۲)\cup(۲,+\infty)$ ۳) $(۰,۲)$ ۴) $(-۲,۲)$

تست ۱۷۰: اگر تابع $f(x)=\begin{cases}۳x+۲ & x\ge ۱\\ ۲x-a & x<۱\end{cases}$ یک‌به‌یک باشد، حدود a کدام است؟

۱) $\mathbb{R}$ ۲) $\varnothing$ ۳) $[-۳,+\infty)$ ۴) $(-\infty,-۳]$

تابع معکوس (تابع وارون)

تابع یک‌به‌یک f، در زیر داده شده است. اگر جای مولفه‌های اول و دوم زوج‌های مرتب f را عوض کنیم، تابع دیگری مانند g به دست می‌آید:

$$f=\{(۱,۲)(۰,-۳)(۴,۷)\}\ ,\ g=\{(۲,۱)(-۳,۰)(۷,۴)\}$$

دو تابع f و g را معکوس هم می‌نامند اگر برد و دامنهٔ دو تابع بالا را مقایسه کنید می‌بینید که دامنهٔ f برابر برد g و بـرد f مـساوی دامنـهٔ g است:

$$D_f=R_g=\{۱,۰,۴\}\ \ ,\ \ R_f=D_g=\{۲,-۳,۷\}$$

هرگاه $f:A\to B$ یک‌به‌یک باشد، تابع معکوس f را که با نماد $f^{-۱}$ نشان می‌دهیم به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f^{-۱}=\{(y,x)\,|\,(x,y)\in f\}$$

همان‌طور که در مثال دیدیم، می‌توانیم بگوییم که همواره $D_f=R_{f^{-۱}}$ و $R_f=D_{f^{-۱}}$ می‌باشد.

توجه کنید که شرط لازم و کافی برای آن که $f^{-۱}$ تابع باشد (f معکوس‌پذیر باشد) آن است که f یک‌به‌یک باشد. پس اگر در یک سؤال از ما شرط وارون‌پذیری بپرسند، در واقع منظور همان شرط یک‌بیک بودن است که در درس‌نامهٔ قبلی بسیار کامل بررسی کردیم.

نکتهٔ مهم در معکوس توابع مرکب: اگر f و g دو تابع یک‌به‌یک باشند آن‌گاه همواره داریم:

۱) $(g^{-۱}of^{-۱})(x)=(fog)^{-۱}(x)$

۲) $(f^{-۱}og^{-۱})(x)=(gof)^{-۱}(x)$

تذکر: اگر نقطهٔ $A(a,b)$ روی تابع f باشد، نقطهٔ $A'(b,a)$ روی $f^{-۱}$ است یعنی: $f(a)=b\ \Rightarrow\ f^{-۱}(b)=a$

مثلاً اگر $A(۲,۳)\in f$ باشد: $f(۲)=۳\ \Rightarrow\ f^{-۱}(۳)=۲$

تست ۱۷۱: در تابع $f=\{(۱,۲),(۲,۳),(۴,۵),(۳,۴)\}$ و $g=\{(۲,۱),(۳,۲),(۵,۴)\}$ مفروض‌اند. تابع $g^{-۱}of^{-۱}$ کدام است؟

۱) $\{(۴,۴),(۱,۱),(۳,۴)\}$
۲) $\{(۳,۳),(۵,۵),(۴,۳)\}$ (ریاضی خارج ۹۰)
۳) $\{(۲,۲),(۱,۱),(۴,۴)\}$
۴) $\{(۲,۲),(۳,۳),(۵,۵)\}$

تست ۱۷۲: دو تابع $f=\{(۵,۲),(۷,۳),(۱,۴),(۳,۶),(۹,۱)\}$ و $g(x)=\sqrt{۵x+۹}$ مفروض‌اند. اگر $(g^{-۱}of^{-۱})(a)=۸$ باشد، a کدام است؟ (تجربی خارج ۹۶)

۱) ۲
۲) ۳
۳) ۶
۴) ۷

تست ۱۷۳: دو تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & , \ x\geq ۰\\ -\sqrt{-x} & , \ x<۰\end{cases}$ و $g=\{(۲,-۱),(-۱,۴),(۳,-۲),(-۴,-۳)\}$ مفروض‌اند. اگر $g^{-۱}(f(a))=۳$ باشد، a کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۳)

۱) -۴
۲) -۱
۳) ۲
۴) ۴

۷) اگر $f^{-۱}(a)$ را بپرسند، اسم آن را x گذاشته و $f(x)=a$ را حل می‌کنیم. x همان جواب مسئله است. مثلاً اگر $f(x)=-x+\sqrt{-۲x}$ و $f^{-۱}(۴)$ را بپرسند:

$$f^{-۱}(۴)=x \Rightarrow f(x)=۴ \Rightarrow -x+\sqrt{-۲x}=۴$$

$$\Rightarrow \sqrt{-۲x}=x+۴ \xrightarrow[x=-۲]{\text{حدس}} \sqrt{-۲(-۲)}=-۲+۴ \Rightarrow ۲=۲ \ \checkmark$$

پس $x=-۲$ جواب مسئله است. (ریاضی ۸۸)

تست ۱۷۴: فرض کنید $g(x)$ وارون تابع $f(x)=x+2\sqrt{x}$ باشد. حاصل $g(3)+g(15)$ کدام است؟ (تجربی خارج ۹۹)

۱) ۱۲ ۲) ۱۱ ۳) ۱۰ ۴) ۸

تست ۱۷۵: اگر $f(x)=x+\sqrt{x}$ و $g(x)=\dfrac{9x+6}{1-x}$ باشند، مقدار $(g^{-1}of^{-1})(20)$، کدام است؟ (ریاضی ۹۹)

۱) $\frac{2}{5}$ ۲) $\frac{3}{5}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{3}{4}$

تست ۱۷۶: تابع f با ضابطهٔ $f(x)=x-\dfrac{2}{x}$ در دامنهٔ $D_f=(-\infty,0)$ را در نظر بگیرید. نمودار تابع f^{-1} نیمساز ناحیه چهارم را با کدام طول قطع می‌کند؟ (تجربی ۹۹)

۱) $\frac{3}{4}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) ۲

۱) نمودار تابع‌های f، f^{-1} نسبت به خط $y=x$ قرینهٔ یکدیگرند. بنابراین اگر نمودار یک تابع یک‌به‌یک نسبت به خط $y=x$ متقارن باشد، آن‌گاه تابع و وارونش با هم برابرند.

۲) اگر $f(a)=b$، آن‌گاه $f^{-1}(b)=a$ به عبارت دیگر اگر نقطهٔ (a,b) روی نمودار تابع f باشد، آن‌گاه نقطهٔ (b,a) روی نمودار f^{-1} است.

۳) $(f^{-1})^{-1}(x)=f(x)$

۴) اگر نمودارهای f و f^{-1}، یکدیگر را در نقطهٔ (a,b) قطع کنند آن‌گاه $f(a)=b$ و $f(b)=a$. یعنی هم (a,b) و هم (b,a)، نقاط تقاطع هستند.

۵) اگر f تابعی وارون‌پذیر باشد، آن‌گاه:

الف) $(f^{-1}of)(x)=x \quad , \quad x\in D_f$ یا $x\in R_{f^{-1}}$

فرقی نمی‌کند، اگر f را داشتید دامنه‌اش و اگر f^{-1} را داشتید بردش را حساب می‌کنید.

ب) $(fof^{-1})(x)=x \quad , \quad x\in D_{f^{-1}}$ یا $x\in R_f$

فرقی نمی‌کند، اگر f را داشتید بردش و اگر f^{-1} را داشتید دامنه‌اش را حساب می‌کنید.

۶) دو تابع fof^{-1} و $f^{-1}of$ فقط به شرطی با هم مساوی هستند که f وارون‌پذیر باشد و دامنه و برد f یکسان باشد. بعضی‌ها فکر می‌کنند که چون $f^{-1}(f(x))=x$ و $f(f^{-1}(x))=x$ هستند پس این دو همیشه برابرند.

مثال: در تابع $f(x)=-x+1$ با شرط $-1\le x\le 2$، $f^{-1}of=fof^{-1}$ است چون برد این تابع در محدودهٔ دامنهٔ $[-1,2]$، برابر $[-1,2]$ است.

۷) اگر دو تابع f و g وارون یکدیگر باشند، ترکیب آن‌ها همانی است اما عکس موضوع همواره برقرار نیست.

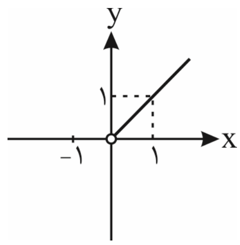
تست ۱۷۷: ضابطه‌ی وارون $y=\dfrac{x}{1+|x|}$ کدام است؟ (تجربی ۹۱)

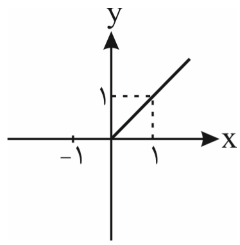
۱) $y=\dfrac{x}{1-|x|}\,,|x|<1$
۲) $y=\dfrac{1-|x|}{|x|}\,,|x|>1$
۳) $y=\dfrac{x}{|x|-1}\,,|x|>1$
۴) $y=\dfrac{|x|-1}{x}\,,|x|<1$

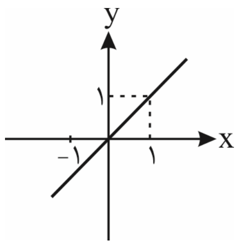
تست ۱۷۸: ضابطه‌ی معکوس $y=\begin{cases}\dfrac{|x|}{x}\sqrt{|x|} & , \quad x\neq 0\\ 0 & , \quad x=0\end{cases}$ به کدام صورت است؟ (تجربی خارج ۹۲)

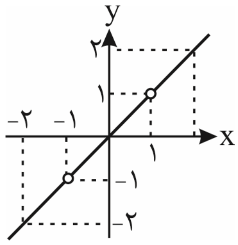
۱) $y=x\sqrt{|x|} \quad , \quad x\in\mathbb{R}$
۲) $y=x\sqrt{|x|} \quad , \quad x\in\mathbb{R}-\{0\}$
۳) $y=x|x| \quad , \quad x\in\mathbb{R}-\{0\}$
۴) $y=x|x| \quad , \quad x\in\mathbb{R}$

تست ۱۷۹: اگر $f(x)=\sqrt{۱-x}$ باشد، نمودار $(fof^{-۱})(x)$ کدام است؟

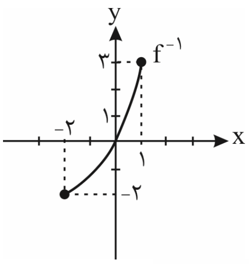
۱)


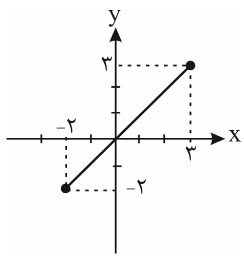
۲)


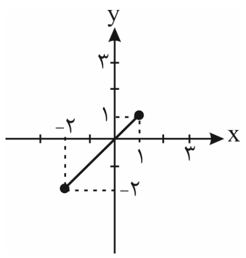
۳)


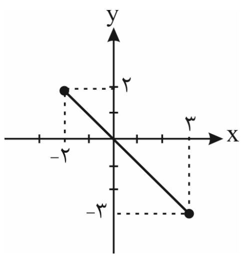
۴)


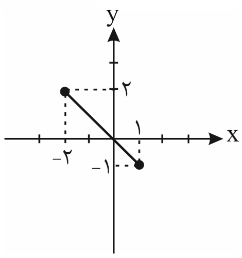
تست ۱۸۰: نمودار تابع $f^{-۱}$ به صورت زیر است. نمودار تابع $y=f^{-۱}of(x)$ کدام است؟



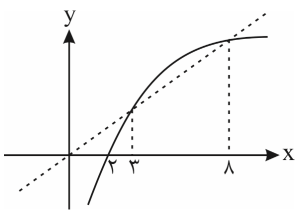
۱)


۲)


۳)


۴)


تست ۱۸۱: شکل روبه‌رو، نمودار تابع $y=f(x)$ و نیمساز ناحیه اول و سوم است. دامنه تابع با ضابطه‌ی $\sqrt{x-f^{-۱}(x)}$، کدام است؟
(تجربی ۹۴)



۱) $[۰,۲]$
۲) $[۲,۳]$
۳) $[۲,۸]$
۴) $[۳,۸]$

به دست آوردن ضابطه‌ی وارون

برای به دست آوردن ضابطه‌ی تابع وارون (البته تابع اصلی باید یک‌به‌یک باشد) این ۳ کار رو می‌کنیم:

۱- به جای $f(x)$ می‌نویسیم y.

۲- x رو تنها می‌کنیم.

۳- وقتی x تنها شد، به جای x قرار می‌دهیم $f^{-1}(x)$ و به جای y می‌ذاریم x.

$$۱)\ f(x)=۲x-۳ \Rightarrow y=۲x-۳ \Rightarrow y+۳=۲x \xrightarrow{\div ۲} \frac{y+۳}{۲}=x \xrightarrow{\text{تعویض } x \text{ و } y} \frac{x+۳}{۲}=y \Rightarrow \frac{x+۳}{۲}=f^{-1}(x)$$

$$۲)\ f(x)=\frac{۱}{x-۱} \Rightarrow y=\frac{۱}{x-۱} \Rightarrow x-۱=\frac{۱}{y} \Rightarrow x=\frac{۱}{y}+۱ \Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{۱}{x}+۱=\frac{x+۱}{x}$$

$$۳)\ f(x)=(x-۱)^۲; x\geq ۱ \Rightarrow y=(x-۱)^۲ \xrightarrow[\text{۲ واسه } x \text{ خلاص بشیم.}]{\text{جذر می‌گیریم تا از شر توان}} \sqrt{y}=|x-۱| \xrightarrow[|x-۱|=x-۱ \ \ \overset{+}{\text{خودش}}]{\text{خودش گفته } x\geq ۱ \text{ پس}} \sqrt{y}=x-۱$$

$$\Rightarrow x=\sqrt{y}+۱ \xrightarrow{\text{مرحله‌ی سوم}} f^{-1}(x)=\sqrt{x}+۱$$

$$۴)\ f(x)=(x-۱)^۲\ ;\ x<۱$$

$$\Rightarrow y=(x-۱)^۲ \xrightarrow{\sqrt{\ }} \sqrt{y}=|x-۱| \xrightarrow[|x-۱|=۱-x \ \ \overset{-}{\text{قرینش}}]{\text{خودش گفته } x<۱} \sqrt{y}=۱-x \Rightarrow x=۱-\sqrt{y}$$

$$\xrightarrow{\text{مرحله‌ی سوم}} f^{-1}(x)=۱-\sqrt{x}$$

$$۵)\ f(x)=\sqrt{x-۱} \Rightarrow y=\sqrt{x-۱} \xrightarrow[\text{رادیکال خلاص بشیم و } x \text{ آزاد بشه}]{\text{به توان ۲ می‌رسونیم تا از شرّ}} y^۲=x-۱ \Rightarrow x=y^۲+۱$$

$$\xrightarrow{\text{مرحله‌ی سوم}} f^{-1}(x)=x^۲+۱$$

$$۶)\ f(x)=-\sqrt{x-۱} \Rightarrow y=-\sqrt{x-۱} \xrightarrow{\text{توان ۲}} y^۲=(-\sqrt{x-۱})^۲=+(x-۱) \Rightarrow x=y^۲+۱$$

$$\xrightarrow{\text{مرحله‌ی سوم}} f^{-1}(x)=x^۲+۱$$

$$۷)\ f(x)=x^{۳} \Rightarrow y=x^{۳} \xrightarrow{\sqrt[۳]{\ }} \sqrt[۳]{y}=x \xrightarrow{\text{مرحله‌ی سوم}} f^{-۱}(x)=\sqrt[۳]{x}$$

$$۸)\ f(x)=x^{۳}-۳x^{۲}+۳x+۵ \Rightarrow y=x^{۳}-۳x^{۲}+۳x+۵ \Rightarrow y=x^{۳}-۳x^{۲}+۳x-۱+۶ \Rightarrow y=(x-۱)^{۳}+۶$$

حالا عبارت xدار رو تنها کن.

$$(x-۱)^{۳}=y-۶ \xrightarrow{\sqrt[۳]{\ }} x-۱=\sqrt[۳]{y-۶} \Rightarrow x=\sqrt[۳]{y-۶}+۱ \xrightarrow{\text{مرحله‌ی سوم}} f^{-۱}(x)=\sqrt[۳]{x-۶}+۱$$

تست ۱۸۲: قرینهٔ خط به معادلهٔ $۳y-۲x=۴$ را نسبت به خط $y=x$، خط d می‌نامیم. عرض از مبدأ خط d کدام است؟

(سراسری تجربی داخل ۹۷)

۱) ۲- ۲) ۱- ۳) ۱ ۴) ۲

تست ۱۸۳: درباره‌ی تابع خطی f به ازای هر مقدار حقیقی x می‌دانیم $f^{-۱}(x)=f(x-۱۰)$. مقدار $f(۷)$ کدام است؟

۱) ۳- ۲) ۲ ۳) ۱۷ ۴) ۱۲

۱) وارون تابع هموگرافیک $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ با شرط $ad-bc\neq ۰$ به شکل $f^{-۱}(x)=\dfrac{-dx+b}{cx-a}$ است.

۲) در تابع هموگرافیک $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ با شرط $ad-bc\neq ۰$ اگر $a+d=۰$ باشد، تابع و وارونش بر یکدیگر منطبق هستند یعنی:

$$f(x)=f^{-۱}(x)$$

تست ۱۸۴: نمودار تابع $f(x)=\dfrac{x+۴}{x-۲}$، با دامنه‌ی $\mathbb{R}-\{۲\}$، نمودار وارون خود را با کدام طول قطع می‌کند؟ (تجربی خارج ۹۶)

۱) $-۱,-۴$ ۲) $-۱,۴$ ۳) $۱,-۴$ ۴) $۱,۴$

تست ۱۸۵: قرینه‌ی نمودار تابع $y = ۲ + \sqrt{x-۱}$ را نسبت به خط $y = x$ رسم کرده و سپس نمودار حاصل را ۲ واحد در جهت مثبت محور xها و ۳ واحد در جهت منفی محور yها انتقال می‌دهیم و آن را $y = g(x)$ می‌نامیم. مقدار $g(۴)$ کدام است؟ (تجربی ۱۴۰۰)

۱) ۳ ۲) ۳- ۳) ۲- ۴) ۴-

تست ۱۸۶: تابع $f(x) = x^۲\sqrt{x^۲}$ در یک بازه نزولی است. ضابطه‌ی وارون تابع در این بازه کدام است؟ (ریاضی ۱۴۰۱)

۱) $-\sqrt[۳]{x}\ ;\ x \geq ۰$ ۲) $-\sqrt{x^۳}\ ;\ x \leq ۰$ ۳) $-\sqrt[۳]{x}\ ;\ x \leq ۰$ ۴) $-\sqrt{x^۳}\ ;\ x \geq ۰$

تست ۱۸۷: وارون تابع $y = x^۳ - x + ۱$ از کدام نقطه عبور می‌کند؟ (تجربی ۱۴۰۱)

۱) $(\frac{۵}{۸}, \frac{۱}{۲})$ ۲) $(۱, ۲)$ ۳) $(-\frac{۱}{۲}, -\frac{۱۱}{۸})$ ۴) $(-۱, -۲)$

تست ۱۸۸: تابع با ضابطه‌ی $f(x) = ۲x - |۴ - ۲x|$ در بازه‌ای وارون‌پذیر است. ضابطه‌ی $f^{-۱}(x)$ در آن بازه کدام است؟(ریاضی خارج ۹۲)

۱) $\frac{۱}{۴}x + ۱, x \geq ۴$ ۲) $\frac{۱}{۴}x - ۱\ ,\ x \leq ۴$ ۳) $\frac{۱}{۴}x - ۱, x \geq ۴$ ۴) $\frac{۱}{۴}x + ۱, x \leq ۴$

تست ۱۸۹: تابع با ضابطهٔ $y = x\,|\,x-۲\,|$ در یک بازه نزولی است. ضابطهٔ معکوس آن در این بازه کدام است؟ (تجربی ۹۴)

۱) $۱-\sqrt{۱+x}\ ,\ x<۰$
۲) $۱-\sqrt{۱-x}\ ,\ x<۱$
۳) $۱+\sqrt{۱-x}\ ,\ ۰<x<۱$
۴) $۱-\sqrt{۱-x}\ ,\ ۰<x<۱$

تست ۱۹۰: اگر $f(x)=\frac{۱}{۲}(x+\sqrt{x^۲+۴})$ باشد، حاصل $f^{-۱}(x)+f^{-۱}(\frac{۱}{x})$ کدام است؟ (سراسری داخل ۹۵)

۱) $۲x$
۲) $\frac{۲}{x}$
۳) $x^۲-۱$
۴) صفر

پاسخ: گزینهٔ «۴» ـ ابتدا باید $f^{-۱}(x)$ را به دست آوریم، پس می‌توان نوشت:

$$y=\frac{۱}{۲}(x+\sqrt{x^۲+۴}) \xrightarrow{\times ۲} ۲y=x+\sqrt{x^۲+۴} \Rightarrow ۲y-x=\sqrt{x^۲+۴} \xrightarrow{\text{توان‌دو}} ۴y^۲+\cancel{x^۲}-۴xy=\cancel{x^۲}+۴$$

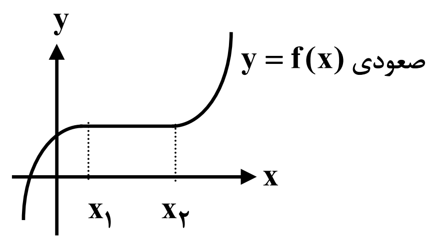
$$\Rightarrow ۴y=۴y^۲-۴ \xrightarrow{\div ۴} xy=y^۲-۱ \Rightarrow x=\frac{y^۲-۱}{y} \Rightarrow f^{-۱}(x)=\frac{x^۲-۱}{x}=x-\frac{۱}{x}$$

هم‌چنین $f^{-۱}(\frac{۱}{x})=\frac{۱}{x}-\frac{۱}{\frac{۱}{x}}=\frac{۱}{x}-x$ است، پس داریم:

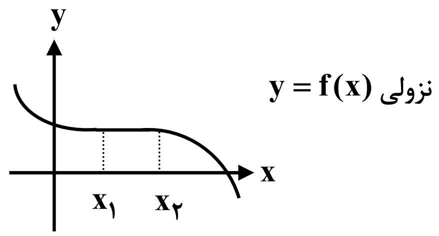
$$f^{-۱}(x)+f^{-۱}(\frac{۱}{x})=(x-\frac{۱}{x})+(\frac{۱}{x}-x)=۰$$

«توابع صعودی و نزولی»

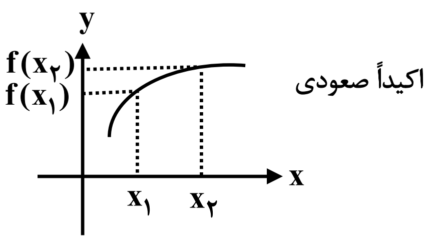
اگر با افزایش x ، مقادیر y افزایش یافته و یا تغییر نکند، تابع صعودی و اگر با افزایش x مقادیر y کاهش یافته و یا تغییر نکند، تابع نزولی است. توابع صعودی یا نزولی را (یکنوا) نیز می‌گویند.



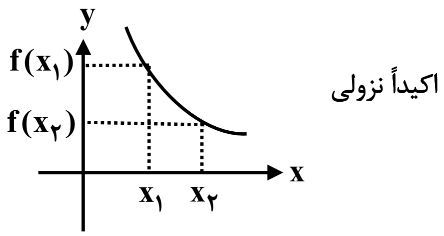
$x_۱,x_۲\in D_f : x_۱<x_۲ \Rightarrow f(x_۱)\le f(x_۲)$



$x_۱,x_۲\in D_f : x_۱<x_۲ \Rightarrow f(x_۱)\ge f(x_۲)$



$x_۱,x_۲\in D_f : x_۱<x_۲ \Rightarrow f(x_۱)<f(x_۲)$

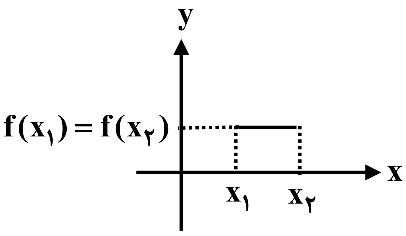


$x_۱,x_۲\in D_f : x_۱<x_۲ \Rightarrow f(x_۱)>f(x_۲)$

۱) تابعی که اکیداً صعودی یا نزولی باشد، اکیداً یکنوا نام دارد.

۲) توابع ثابت هم صعودی و هم نزولی‌اند ولی اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی نیستند.

مثلاً $y=[x]$ و $y=x+|x|$، توابعی صعودی هستند.

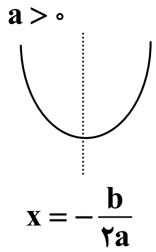


$$x_1,x_2 \in D_f : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1)=f(x_2)$$

۳) توابع درجه دوم $y=ax^2+bx+c$ در کل روی R نه صعودی است و نه نزولی، اما از راس سهمی به قبل و یا از راس سهمی به بعد اکیداً یکنوا (اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی) هستند.

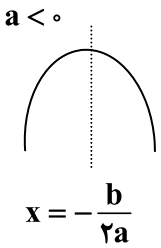
نزولی اکید: $(-\infty,-\frac{b}{2a}]$

صعودی اکید: $[-\frac{b}{2a},+\infty)$



صعودی اکید: $(-\infty,-\frac{b}{2a}]$

نزولی اکید: $[-\frac{b}{2a},+\infty)$

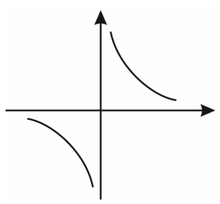


تست ۱۹۱: تابع $f(x)=3x^2+kx+3k^2$ در بازهٔ $[-2,+\infty)$ صعودی است. حدود k کدام است؟

۱) $k\geq -12$ ۲) $k\leq -12$ ۳) $k\geq 12$ ۴) $k\leq 12$

۴) اگر تابع در قسمت‌هایی از دامنه صعودی و در قسمت‌های دیگر نزولی باشد می‌گوییم نه صعودی و نه نزولی است. به این توابع غیریکنوا گفته می‌شود.

۵) ممکن است یک تابع در دامنه‌اش نه صعودی و نه نزولی باشد ولی در بازه‌هایی از دامنه‌اش صعودی و یا نزولی باشد. مثلاً $y=\frac{1}{x}$ در فاصلهٔ $(0,+\infty)$ و یا در فاصلهٔ $(-\infty,0)$ اکیداً نزولی است ولی روی دامنه‌اش نه صعودی و نه نزولی است.

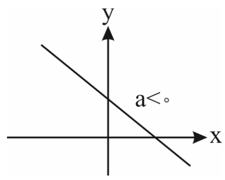


۶) توابع $y = a^x$ و $y = \log_a x$ به ازای $a > ۱$ اکیداً صعودی هستند.

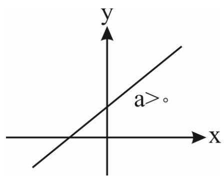
۷) توابع $y = a^x$ و $y = \log_a x$ به ازای $۰ < a < ۱$ اکیداً نزولی هستند.

۸) تابع خطی $f(x) = ax + b$ با شرط $a \neq ۰$ اکیداً یکنوا است و اگر $a = ۰$ باشد به صورت یک خط افقی درمی‌آید که هم صعودی و هم نزولی است اما اکیداً صعودی و یا اکیداً نزولی نیست.

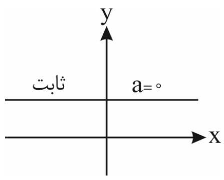
در خصوص دو مورد قبلی در بخش توابع نمایی و لگاریتمی صحبت کرده‌ایم.



اکیداً نزولی



اکیداً صعودی



هم صعودی، هم نزولی

تست ۱۹۲: اگر $f = \{(-۳,۴)(۰,-۲m+۱)(-۱,m)\}$ نزولی باشد، حدود m کدام است؟

۱) $(-\infty,۴)$ ۲) $(\frac{۱}{۳},۴)$ ۳) $[\frac{۱}{۳},۴]$ ۴) $[\frac{۱}{۳},+\infty)$

تست ۱۹۳: تابع با ضابطهٔ $f(x) = x^۲ - ۲x - ۳$ با دامنهٔ $\{x : |x-۱| < ۲\}$، همواره چگونه است؟ (ریاضی ۹۱)

۱) منفی ۲) مثبت ۳) صعودی ۴) نزولی

تست ۱۹۴: در بازه‌ای که تابع با ضابطهٔ $f(x)=|x-2|+|x-3|$ اکیداً نزولی است، نمودار آن با نمودار تابع $g(x)=2x^2-x-10$ در چند نقطه مشترک هستند؟ (تجربی داخل ۹۷)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) فاقد نقطهٔ مشترک

اگر $x_1,x_2\in D_f : x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$ یعنی f تابعی است اکیداً صعودی و اگر $x_1,x_2\in D_f : x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$ یعنی f تابعی است اکیداً نزولی پس اگر مثلاً داشته باشیم $f(x^2)>f(x)$ و f تابعی اکیداً صعودی باشد نتیجه می‌گیریم که $x^2>x$ است و داریم $x^2>x \Rightarrow x^2-x>0 \Rightarrow x<0$ یا $x>1$ و اگر مثلا داشته باشیم $f(x^2)>f(x)$ و f تابعی اکیداً نزولی باشد نتیجه می‌گیریم که $x^2<x$ است و داریم:

$$x^2<x \Rightarrow x^2-x<0 \Rightarrow 0<x<1$$

در واقع در تابع اکیداً نزولی با حذف fها، جهت نامساوی عوض می‌شود و در تابع اکیداً صعودی با حذف fها جهت نامساوی عوض نمی‌شود.

تست ۱۹۵: اگر f تابعی نزولی اکید با دامنه‌ی R باشد، دامنه‌ی تعریف $y=\sqrt{f(|x-2|)-f(|2x-1|)}$ کدام است؟

۱) $[1,+\infty)$ ۲) R ۳) $[-1,1]$ ۴) $(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$

تست ۱۹۶: تابع $f(x)=|\sin x|$ مفروض است. در کدام‌یک از بازه‌های زیر، برای هر x_1 و x_2 عضو این بازه، رابطهٔ $x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$ برقرار است؟

۱) $(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})$ ۲) $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ ۳) $[-\frac{\pi}{2},0]$ ۴) $[0,\frac{\pi}{2}]$

تست ۱۹۷: اگر تابع f اکیداً صعودی و $f(۱)=۰$ باشد، آن‌گاه دامنهٔ $\sqrt{(x^{۳}-x)f(x)}$ برابر با $\mathbb{R}-(a,b)$ است. حاصل $a+b$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) صفر ۳) -۱ ۴) ۲

تست ۱۹۸: کدام‌یک از توابع زیر یک‌به‌یک است؟

۱) $y=x^{۲}+۲\sqrt{x}$ ۲) $y=x-x\sqrt{x}$ ۳) $y=x+\frac{۱}{x}$ ۴) $y=۲x^{۲}-|x|$

پاسخ: گزینهٔ «۱» ـ تابع $y=۲\sqrt{x}$ با شرط $x\geq ۰$ اکیداً صعودی است، به علاوه $x^{۲}$ هم در این فاصله اکیداً صعودی است. پس $y=x^{۲}+۲\sqrt{x}$ اکیداً صعودی خواهد بود و در نتیجه یک‌به‌یک است.

گزینهٔ (۲): یک‌به‌یک نیست.

$$y=x(۱-\sqrt{x})\ ,\ y=۰\ \Rightarrow \begin{cases} x=۰ \\ x=۱ \end{cases}$$

گزینهٔ (۳):

$$y=x+\frac{۱}{x}=\frac{x^{۲}+۱}{x}\ ,\ y=۳\Rightarrow \frac{x^{۲}+۱}{x}=۳\ \Rightarrow\ x^{۲}-۳x+۱=۰\ \Rightarrow\ \Delta>۰$$

به ازای دو مقدار از x مقدار تابع ۳ می‌شود پس تابع یک‌به‌یک نیست.

گزینهٔ (۴):

$$y=۲x^{۲}-|x|=|x|(۲|x|-۱)\ ,\ y=۰\ \Rightarrow \begin{cases} x=۰ \\ x=\pm\frac{۱}{۲} \end{cases}$$

به ازای سه مقدار از x مقدار تابع صفر می‌شود و یک‌به‌یک نیست.

تست ۱۹۹: اگر $f(x)=\frac{x^{۴}-۱}{\sqrt{x-۲}}$ و $g(x)=\frac{\sqrt{x-۲}}{x^{۲}-۱}$، آن‌گاه نمودار تابع $y=(f.g)(x)$ چگونه است؟

۱) صعودی ۲) نزولی

۳) ابتدا صعودی، سپس نزولی ۴) ابتدا نزولی، سپس صعودی

پاسخ: گزینهٔ «۱» ـ ابتدا دامنهٔ تابع $y=(f.g)(x)$ را می‌یابیم:

$$\left.\begin{array}{l} D_{f.g}=D_f\cap D_g \\ D_f: x-۲>۰\ \Rightarrow\ x\in(۲,+\infty) \\ D_g: \begin{cases} x-۲\geq ۰ \\ x^{۲}-۱\neq ۰ \end{cases} \Rightarrow\ x\in[۲,+\infty) \end{array}\right\}\Rightarrow D_{f.g}=(۲,+\infty)$$

$$y=(f.g)(x)=f(x)\times g(x)=\frac{x^{۴}-۱}{\sqrt{x-۲}}\times\frac{\sqrt{x-۲}}{x^{۲}-۱}=\frac{x^{۴}-۱}{x^{۲}-۱}=\frac{(x^{۲}-۱)(x^{۲}+۱)}{x^{۲}-۱}\ \Rightarrow\ y=(f.g)(x)=x^{۲}+۱$$

این تابع در بازهٔ $(۲,+\infty)$ صعودی است.

تست ۲۰۰: تابع $f(x)=(-9+k^2)x^3+5$ اکیداً نزولی است. مجموع مقادیر صحیح k چقدر است؟ (تجربی ۱۴۰۱)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۶ ۴) صفر

تست ۲۰۱: اگر تابع $f(x)=\begin{cases}-3x+1 & x\ge 0\\ ax+a+4 & x<0\end{cases}$ در تمام دامنه‌اش نزولی اکید باشد، مجموعهٔ تمام مقادیر ممکن برای a کدام است؟

۱) $a\le 0$ ۲) $-3\le a\le 0$ ۳) $-3\le a<0$ ۴) $a<0$

تست ۲۰۲: تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}x^2-1 & x\ge 0\\ 1-x^2 & x<0\end{cases}$، بر روی مجموعه اعداد حقیقی چگونه است؟ (سراسری - ۸۹)

۱) یکنوا ـ یک به یک ۲) غیریکنوا ـ یک به یک ۳) یکنوا ـ غیر یک به یک ۴) غیریکنوا ـ غیر یک به یک

تست ۲۰۳: تابع با ضابطهٔ $f(x)=|x+2|+|x-1|$ در کدام بازه اکیداً نزولی است؟ (تجربی ۹۸)

۱) $(-\infty,-2)$ ۲) $(-\infty,1)$ ۳) $(-2,1)$ ۴) $(1,+\infty)$

نامعادلات نمایی و لگاریتمی

با توجه به مفهوم یکنوایی توابع $y = a^x$ و $y = \log_a x$ می‌توان نکات زیر را برای حل نامعادلات نمایی و لگاریتمی نتیجه گرفت:

نامعادلات نمایی: در حل نامعادلات توابع نمایی از روابط زیر استفاده می‌کنیم:

۱) $a^x > a^y \xleftrightarrow{a>1} x > y$

۲) $a^x > a^y \xleftrightarrow{0<a<1} x < y$

یعنی در حل نامعادلات نمایی، اگر پایه بین صفر و یک باشد، جهت نامساوی عوض می‌شود. (حتماً می‌دانید که دلیل این تغییر جهت آن است که تابع $y = a^x$ با شرط $0 < a < 1$ اکیداً نزولی است.)

نامعادلات لگاریتمی: در حل نامعادلات لگاریتمی از روابط زیر استفاده می‌کنیم:

۱) $\log_a x > y \xleftrightarrow{a>1} x > a^y$

۲) $\log_a x > y \xleftrightarrow{0<a<1} x < a^y$

۳) $\log_a x > \log_a y \xleftrightarrow{a>1} x > y$

۴) $\log_a x > \log_a y \xleftrightarrow{0<a<1} x < y$

تست ۲۰۴: مجموعه جواب نامعادلهٔ $(\frac{\sqrt{2}}{2})^{x^2} \geq (\frac{\sqrt{2}}{2})^x$ به کدام صورت است؟

۱) $[0, +\infty)$ ۲) $\mathbb{R} - (0, 1)$ ۳) $[0, 1]$ ۴) $(-\infty, 1]$

تست ۲۰۵: مجموعه جواب نامعادلهٔ $\log_{0/1}(x-3) \geq \log_{0/1}(5-x)$ شامل چند عدد طبیعی است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

تست ۲۰۶: اگر $f(x) = ۳ - ۲^x$ باشد، دامنهٔ تابع $g(x) = \sqrt{xf^{-۱}(x)}$ کدام است؟

۱) $[۰,۲]$ ۲) $[۰,۳)$ ۳) $[۲,۳)$ ۴) $[۱,۳)$

تست ۲۰۷: بزرگ‌ترین بازه برای k که در آن تابع نمایی $y = (\frac{۵-k}{۱-۳k})^x$ همواره اکیداً صعودی باشد، کدام است؟

۱) $(-۱,\frac{۱}{۳})$ ۲) $(-۲,\frac{۱}{۳})$ ۳) $(-۳,\frac{۱}{۳})$ ۴) $(-۴,\frac{۱}{۳})$

تست ۲۰۸: تابع $f(x) = \begin{cases} a - \log_{\frac{۱}{۳}} x & x \geq ۳ \\ ۲x+۱ & x < ۳ \end{cases}$ به ازای چه حدودی از a همواره در شرط $x_۲ > x_۱ \Rightarrow f(x_۲) \geq f(x_۱)$ صدق می‌کند؟

۱) $a \leq ۶$ ۲) $a \geq ۶$ ۳) هیچ مقدار a ۴) فقط $a = ۶$

تقسیم و روابط آن

یکی از سؤالات معروف در دوره‌ی اول این بود که «عدد ۳۱ را بر ۷ تقسیم کنید و خارج‌قسمت و باقی‌مانده را بیابید.»

باقی‌مانده + خارج‌قسمت × مقسوم‌علیه = مقسوم

۳۱ = ۷ × ۴ + ۳

با استفاده از همین موضوع ساده، تقسیم چندجمله‌ای‌ها را به این صورت انجام می‌دهیم:

۱- مقسوم را بر اساس توان‌های نزولی از بزرگ به کوچک مرتب می‌کنیم.

۲- جمله‌ای که در مقسوم، بزرگ‌ترین درجه را دارد بر جمله‌ای از مقسوم‌علیه که بزرگ‌ترین درجه را دارد تقسیم می‌کنیم.

۳- عبارت به‌دست‌آمده در خارج‌قسمت را در مقسوم‌علیه ضرب می‌کنیم و علامتش را قرینه کرده با مقسوم جمع می‌کنیم.

۴- این مراحل سه‌گانه را تا جایی ادامه می‌دهیم که درجه‌ی به‌دست‌آمده در ردیف باقی‌مانده کم‌تر از درجه‌ی مقسوم‌علیه باشد.

مثلاً: عبارت $x^3 + x^2 - 2$ را بر $x - 1$ تقسیم می‌کنیم:

$$
\begin{array}{l|l}
\text{مقسوم} & \text{مقسوم‌علیه} \\
\cancel{x^3} + x^2 - 2 & x - 1 \\
\hline
-\cancel{x^3} + x^2 & x^2 + 2x + 2 \\
\cline{1-1}
\cancel{2x^2} - 2 & \text{خارج‌قسمت} \\
-\cancel{2x^2} + 2x & \\
\cline{1-1}
2x - 2 & \\
-2x + 2 & \\
\cline{1-1}
0 = R & \\
\text{باقی‌مانده} &
\end{array}
$$

با توجه به قانون تقسیم داریم:

باقی‌مانده + خارج‌قسمت × مقسوم‌علیه = مقسوم

$$x^3 + x^2 - 2 = (x-1)(x^2 + 2x + 2) + 0$$

پس اگر مقسوم را با $P(x)$، مقسوم‌علیه را با $D(x)$، خارج‌قسمت را با $Q(x)$ و باقی‌مانده را با $R(x)$ نمایش دهیم، خواهیم داشت:

باقی‌مانده + خارج‌قسمت × مقسوم‌علیه = مقسوم

$$P(x) = D(x) \times Q(x) + R(x)$$

یادت باشه همواره باقی‌مانده حداقل یک درجه کم‌تر از مقسوم‌علیه است.

۱- محاسبه‌ی باقی‌مانده‌ی تقسیم $P(x)$ بر چندجمله‌ای درجه اول $ax + b$:

وقتی $P(x)$ را بر $ax + b$ تقسیم می‌کنیم کافی است، برای یافتن باقی‌مانده، به جای x قرار دهیم $\frac{-b}{a}$. به این ترتیب داریم:

$$ax + b = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$$

$$\text{باقی‌مانده } R = P\left(-\frac{b}{a}\right)$$

مثال ۲۰۹: باقی‌مانده‌ی تقسیم $x^4 - ax^3 + x^2 + 2ax + 1$ بر $x+1$ برابر ۴ شده است. a کدام است؟ (سراسری ریاضی ۸۰)

پاسخ: $x+1=0 \Rightarrow x=-1$

$$R = P(-1) = 4 \Rightarrow (-1)^4 - a(-1)^3 + (-1)^2 + 2a(-1) + 1 = 4 \Rightarrow 1 + a + 1 - 2a + 1 = 4 \Rightarrow -a = 1 \Rightarrow a = -1$$

مثال ۲۱۰: باقی‌مانده‌ی تقسیم $15x^2 + 14x - 29$ را بر $x-1$ بیابید.

پاسخ: $x-1=0 \Rightarrow x=1$

$$R = P(1) = 15(1)^2 + 14(1) - 29 = 29 - 29 = 0 \Rightarrow R = 0$$

باقی‌مانده صفر شد، یعنی این که $15x^2 + 14x - 29$ بر $x-1$ بخش‌پذیر است. پس عامل $x-1$ را در خود دارد.

۲- محاسبه‌ی باقی‌مانده‌ی تقسیم $P(x)$ بر یک چندجمله‌ای با درجه‌ی بیشتر از یک:

گفتیم برای پیدا کردن باقی‌مانده، مقسوم‌علیه را صفر می‌کنیم: $P(x) = \overbrace{D(x)}^{0} \times Q(x) + R(x)$

و این برای وقتی بود که مقسوم‌علیه از درجه‌ی اول بود. حال اگر مقسوم‌علیه از درجه‌ی اول نباشد باز هم آن را مساوی صفر قرار می‌دهیم. اما این‌جا، جمله‌های پرتوان را برحسب جمله‌های با توان کم‌تر می‌نویسیم و با ظاهر کردن جملات پرتوان در مقسوم، معادل کم‌توانشان را جاگذاری می‌کنیم.

مثال ۲۱۱: باقی‌مانده‌ی تقسیم $2x^9 + x^5 + 2$ را بر $x^3 - 1$ بیابید.

پاسخ: ابتدا قرار می‌دهیم $x^3 - 1 = 0$ پس $x^3 = 1$ (این یک معادله نیست. یعنی نباید نتیجه بگیرید که $x=1$ است). حال در رابطه‌ی $2x^9 + x^5 + 2$، x^3 می‌سازیم و به جایش $(x^3 = 1)$ قرار می‌دهیم.

$$2x^9 + x^5 + 2 = 2(x^3)^3 + (x^3)x^2 + 2 \overset{x^3=1}{=\!=\!=} 2(1)^3 + (1)x^2 + 2 = x^2 + 4$$

یعنی باقی‌مانده، $x^2 + 4$ است.

۳- اگر باقی‌مانده‌ی تقسیم عبارت $P(x)$ بر $x-a$ و $x-b$ به ترتیب R_1 و R_2 باشد، باقی‌مانده‌ی تقسیم $P(x)$ بر $(x-a)(x-b)$ برابر است با $R(x) = Ax + B$ چرا که مقسوم‌علیه از درجه دو است و باقی‌مانده باید درجه‌اش از مقسوم‌علیه کم‌تر باشد:

$$\begin{array}{c|c} P(x) & (x-a)(x-b) \\ \hline R = Ax + B & Q(x) \end{array}$$

مثال ۲۱۲: اگر باقی‌مانده‌ی تقسیم $f(x)$ بر $x+1$ و $x-2$ به ترتیب -1 و ۵ باشد، باقی‌مانده‌ی $f(x)$ بر $x^2 - x - 2$ کدام است؟

$$\begin{array}{c|c} f(x) & x^2 - x - 2 \\ \hline R = Ax + B & Q(x) \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+1=0 \Rightarrow x=-1 \Rightarrow R = f(-1) = -1 \\ x-2=0 \Rightarrow x=2 \Rightarrow R = f(2) = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(-1) + B = -1 & (I) \\ A(2) + B = 5 & (II) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} (I)\times 2 \\ (II) \end{matrix} \begin{cases} -2A + 2B = -2 \\ 2A + B = 5 \end{cases} \Rightarrow 3B = 3 \Rightarrow B = 1 \Rightarrow A = 2 \Rightarrow R = Ax + B = 2x + 1$$

پس باقی‌مانده $R = 2x + 1$ است.

۴- هرگاه باقی‌مانده‌ی تقسیم عبارتی، اغلب با درجه بالاتر بر عبارتی مثل $x^2 \pm x + 1$ یا $x^2 \pm 2x + 4$ خواسته شود (مرتبط با اتحاد چاق و لاغر) کافی است عبارات فوق را در قسمت لاغر $(x \mp 1)$ یا $(x \mp 2)$ ضرب کنیم.

مثال ۲۱۳: باقی‌مانده‌ی تقسیم $x^{۲۷}$ بر $x^۲-x+۱$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) ۱ ۳) $x-۷$ ۴) $۳x+۱$

پاسخ: گزینه‌ی «۱»

یادت باشه

$(x^۲-x+۱)(x+۱) \Rightarrow x^۳+۱=۰ \Rightarrow x^۳+۱=۰ \Rightarrow x^۳=-۱$ (این یک معادله نیست)

$\Rightarrow R=x^{۲۷}=(x^۳)^۹=(-۱)^۹=-۱$

این مورد را پس از فصل مشتق یادتان می‌دهم.

۵- اگر عبارت $P(x)$ بر $(x-a)^n$ بخش‌پذیر باشد، $x=a$ خود $P(x)$ و مشتقات متوالی آن را تا $(n-۱)$ مرتبه صفر می‌کند.

$$P(a)=P'(a)=P''(a)=\cdots=P^{(n-۱)}(a)=۰$$

مثال ۲۱۴: به ازای چه مقدار از a و b عبارت $ax^۶+bx^۵-۱$ بر $(x-۱)^۲$ بخش‌پذیر است؟

پاسخ:

$(x-۱)^۲=۰ \Rightarrow x=۱$ (ریشه $P(x)$ و ریشه $P'(x)$)

$$\begin{matrix} P(x)=ax^۶+bx^۵-۱ \Rightarrow P(۱)=۰ \Rightarrow \\ P'(x)=۶ax^۵+۵bx^۴ \Rightarrow P'(۱)=۰ \Rightarrow \end{matrix} \begin{cases} a+b-۱=۰ \\ ۶a+۵b=۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b=۱ \xrightarrow{-۵} -۵a-۵b=-۵\ (I) \\ ۶a+۵b=۰\ (II) \end{cases} \xrightarrow[(I)+(II)]{\text{حل دستگاه}} a=-۵\ ,\ b=۶$$

۶- اگر باقی‌مانده‌ی تقسیم عبارات $f(x)$ و $g(x)$ بر عبارت $h(x)$ به ترتیب $R_۱$ و $R_۲$ باشد، باقی‌مانده‌ی تقسیم $f(x)\cdot g(x)$ بر عبارت $h(x)$ برابر است با، باقی‌مانده‌ی تقسیم $R_۱R_۲$ بر $h(x)$.

مثال ۲۱۵: اگر باقی‌مانده‌ی تقسیم عبارت‌های $f(x)$ و $g(x)$ بر $x^۲-x-۵$ به ترتیب x و $x+۲$ باشد، باقی‌مانده‌ی تقسیم $f(x)\cdot g(x)$ را بر $x^۲-x-۵$ بیابید.

پاسخ:

$$R_۱R_۲=x(x+۲)=x^۲+۲x$$

$$\begin{array}{r|l} x^۲+۲x & x^۲-x-۵ \\ \cline{2-2} -x^۲+x+۵ & ۱ \\ \cline{1-1} ۳x+۵ & \end{array}$$

پس باقی‌مانده‌ی تقسیم $f(x)\cdot g(x)$ بر $x^۲-x-۵$ برابر است با $۳x+۵$.

۷- x^n-y^n همواره بر $x-y$ بخش‌پذیر است. چون:

$P(x)=x^n-y^n$

$x-y=۰ \Rightarrow x=y \Rightarrow P(y)=y^n-y^n=۰$

$x^n-y^n=(x-y)(x^{n-۱}+x^{n-۲}y^۱+x^{n-۳}y^۲+\cdots+xy^{n-۲}+y^{n-۱})$

۸- x^n-y^n زمانی بر $x+y$ بخش‌پذیر است که n زوج باشد. چون:

$P(x)=x^n-y^n$

$x+y=۰ \Rightarrow x=-y \Rightarrow P(-y)=(-y)^n-(y)^n \overset{n\ \text{زوج}}{=\!=} y^n-y^n=۰$

$x^n-y^n=(x+y)(x^{n-۱}-x^{n-۲}y^۱+\cdots+xy^{n-۲}-y^{n-۱})$

۹- x^n+y^n هیچ‌گاه بر $x-y$ بخش‌پذیر نیست.

۱۰- x^n+y^n زمانی بر $x+y$ بخش‌پذیر است که n فرد باشد، چون: $P(x)=x^n+y^n$

$$x+y=0 \Rightarrow x=-y \Rightarrow P(-y)=(-y)^n+y^n \xlongequal{n\text{ فرد}} -y^n+y^n=0$$

تست‌ها:

تست ۲۱۶: اگر عبارت x^4+ax^2-bx+4 بر $(x-1)^2$ بخش‌پذیر باشد، b کدام است؟ (سراسری ریاضی خارج ۹۴)

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

پاسخ: گزینه‌ی «۴»

$\boxed{\text{بهت یاد دادم که}}$ اگر $P(x)$ بر $(x-a)^n$ بخش‌پذیر باشد، خودش و مشتق‌هاشو تا $(n-1)$ مرتبه صفر می‌کند. پس این‌جا $(x-1)^2=0 \Rightarrow x=1$، هم $P(x)$ و هم $P'(x)$ رو صفر می‌کند.

$$P(1)=0 \Rightarrow 1+a-b+4=0 \Rightarrow a-b=-5 \quad (I)$$

$$P'(x)=4x^3+2ax-b \Rightarrow P'(1)=4+2a-b=0 \Rightarrow 2a-b=-4 \quad (II)$$

$$\begin{matrix}(I)\times(-2)\\(II)\end{matrix}\begin{cases}-2a+2b=10\\2a-b=-4\end{cases} \Rightarrow b=6\,,\,a=1$$

تست ۲۱۷: به ازای مقداری از a، چندجمله‌ای $f(x)=x^4+ax^3-8x$ بر $x+2$ بخش‌پذیر است. کوچک‌ترین ریشه‌ی معادله‌ی $f(x)=0$ کدام است؟ (سراسری ریاضی ۹۴)

۱) $1-\sqrt{3}$ ۲) $1-\sqrt{5}$ ۳) $-1-\sqrt{3}$ ۴) $-1-\sqrt{5}$

پاسخ: گزینه‌ی «۴» ـ $f(x)$ بر $x+2$ بخش‌پذیره یعنی این که $f(-2)=0 \Leftarrow x=-2 \Leftarrow x+2=0$، می‌شه پس:

$$f(-2)=(-2)^4+a(-2)^3-8(-2)=16-8a+16=0 \Rightarrow 8a=32 \Rightarrow a=4$$

حالا بیا $f(x)$ رو بنویس: $f(x)=x^4+4x^3-8x=0 \Rightarrow x(x^3+4x^2-8)=0$

حالا چون صورت سؤال گفته $(x+2)$ یک عامل عبارت است، می‌تونیم عامل x^3+4x^2-8x رو به $x+2$ تقسیم کنیم و عامل درجه دوم حاصل رو حل کنیم و کوچک‌ترین ریشه رو به دست بیاریم.

$$\begin{array}{l|l} x^3+4x^2-8 & x+2 \\ \cline{2-2} -x^3-2x^2 & x^2+2x-4 \\ \cline{1-1} 2x^2-8 & \\ -2x^2-4x & \\ \cline{1-1} -4x-8 & \\ 4x+8 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

$$\Rightarrow x^2+2x-4=0 \xrightarrow[\Delta=20]{\text{حل به روش دلتا}} x=\frac{-2\pm\sqrt{20}}{2}=\frac{-2\pm2\sqrt{5}}{2}=-1\pm\sqrt{5} \xrightarrow{\text{کوچک‌ترین ریشه}} -1-\sqrt{5}$$

ریشه‌های این معادله عبارت‌اند از: $0, -2, -1+\sqrt{5}, -1-\sqrt{5}$

تست ۲۱۸: عبارت $x^{۴}+۴ax^{۲}+۲bx+۱$ بر $x^{۲}-۴$ بخش‌پذیر است. $a+b$ کدام است؟ (سراسری ریاضی ۸۶)

۱) $-\frac{۱۵}{۸}$ ۲) $-\frac{۱۷}{۱۶}$ ۳) $\frac{۱۷}{۶}$ ۴) $\frac{۱۵}{۸}$

پاسخ: گزینه‌ی «۲»

مقسوم‌علیه را مساوی صفر قرار بده: $x^{۲}-۴=۰ \Rightarrow x^{۲}=۴$

حالا در مقسوم به جای $x^{۲}$، ۴ رو قرار بده و کل عبارت رو مساوی صفر بذار چون قراره بخش‌پذیر بشه پس باقی‌مانده صفر هست.

$$x^{۴}+۴ax^{۲}+۲bx+۱=(x^{۲})^{۲}+۴a(x^{۲})+۲bx+۱ \xlongequal{x^{۲}=۴} (۴)^{۲}+۴a(۴)+۲bx+۱=۱۶+۱۶a+۲bx+۱=۰$$

حالا چون این تساوی باید به ازای هر x برقرار باشد، پس این رابطه به x وابسته نیست و باید یه جوری x رو حذف کنیم. پس ضریب x رو صفر قرار می‌دهیم:

$$۲b=۰ \Rightarrow b=۰ \Rightarrow ۱۶+۱۶a+۱=۰ \Rightarrow ۱۶a=-۱۷ \Rightarrow a=-\frac{۱۷}{۱۶}$$

بنابراین: $a+b=۰-\frac{۱۷}{۱۶}=-\frac{۱۷}{۱۶}$

روش دوم: مقسوم‌علیه قابل تجزیه است. پس رابطه‌ی تقسیم رو این‌جوری می‌نویسیم:

$$x^{۴}+۴ax^{۲}+۲bx+۱=\underbrace{(x-۲)(x+۲)}_{x^{۲}-۴}Q(x)+\overset{۰}{\cancel{R(x)}}$$

حالا با قرار دادن $x=۲$ و $x=-۲$، $Q(x)$ رو حذف می‌کنیم.

$$\begin{matrix} x=۲ \Rightarrow ۱۶+۱۶a+۴b+۱=۰ \\ x=-۲ \Rightarrow ۱۶+۱۶a-۴b+۱=۰ \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} ۱۶a+۴b=-۱۷ \\ ۱۶a-۴b-۱۷ \end{cases} \xrightarrow{\text{جمع}} ۳۲a=-۳۴ \Rightarrow a=-\frac{۱۷}{۱۶} \Rightarrow b=۰$$

پس $a+b=-\frac{۱۷}{۱۶}$.

تست ۲۱۹: اگر عبارت $x^{۲n+۱}+۲x^{۲n}+x^{۵}-۵x^{۳}+k$، به ازای هر عدد طبیعی x بر دو جمله‌ای $x+۲$ بخش‌پذیر باشد، آن‌گاه باقی‌مانده‌ی تقسیم آن بر $x^{۲}-۱$ کدام است؟ (سراسری ریاضی ۸۹)

۱) $-۳x-۶$ ۲) $-۲x+۱$ ۳) $۲x+۴$ ۴) $۳x-۴$

پاسخ: گزینه‌ی «۱»

چون $P(x)$ بر $x+۲$ بخش‌پذیره، پس $P(-۲)=۰ \Rightarrow x=-۲ \Rightarrow x+۲=۰$، است. لذا داریم:

$$(-۲)^{۲n-۱}+۲(-۲)^{۲n}+(-۲)^{۵}-۵(-۲)^{۳}+k=۰ \Rightarrow \underbrace{(-۲)(-۲)^{۲n}+۲(-۲)^{۲n}}_{\text{صفر}}-۳۲+۴۰+k=۰ \Rightarrow k=-۸$$

حالا $P(x)$ رو بنویس: $P(x)=x^{۲n+۱}+۲x^{۲n}+x^{۵}-۵x^{۳}-۸$

واسه این که باقی‌مانده‌ی تقسیم $P(x)$ بر $x^{۲}-۱$ رو به دست بیاریم کافیه که $x^{۲}=۱$ (مقسوم‌علیه رو مساوی صفر گذاشتیم) رو در $P(x)$ جاگذاری کنیم:

$$P(x)=(x^{۲})^{n}x+۲(x^{۲})^{n}+(x^{۲})^{۲}x-۵(x^{۲})x-۸ \xlongequal{x^{۲}=۱} x+۲+x-۵x-۸=-۳x-۶$$

تست ۲۲۰: اگر باقی‌مانده‌ی تقسیم $f(x)$ بر $x(x-۳)(x+۳)$ برابر $۵x^۲+۳x+۱$ باشد و باقی‌مانده‌ی تقسیم $f(x)$ بر $x^۲-۳x$ برابر $ax+b$ باشد، آن‌گاه $۲a+b$ کدام است؟

۱) ۲۰   ۲) ۳۷   ۳) -۲۳ ۴) ۱۹

پاسخ: گزینه‌ی «۲»

رابطه‌ی کلی تقسیم $P(x)$ به $Q(x)$ رو یادته؟

$$P(x)=\overset{\text{مقسوم‌علیه}}{D(x)}\ \overset{\text{خارج‌قسمت}}{Q(x)}+\overset{\text{باقی‌مانده}}{R(x)}$$

حالا این‌جا هم $f(x)$ مقسوم و $x(x-۳)(x+۳)$ مقسوم‌علیه و $۵x^۲+۳x+۱$ باقی‌مانده است. و در حالت بعدی $f(x)$ مقسوم، $x^۲-۳x$ مقسوم‌علیه و $ax+b$ باقی‌مانده است. پس:

$$\begin{cases} f(x)=x(x-۳)(x+۳)Q(x)+۵x^۲+۳x+۱\ \ (I) \\ f(x)=(x^۲-۳x)Q'(x)+ax+b=x(x-۳)Q'(x)+ax+b\ \ (II) \\ (II):f(۰)=b\ ,\ f(۳)=۳a+b \\ (I):f(۰)=۱\ ,\ f(۳)=۵۵ \end{cases} \xrightarrow{\text{مقایسه}} b=۱\ ,\ ۳a+۱=۵۵\ \Rightarrow\ ۳a=۵۴\Rightarrow\ a=۱۸$$

بنابراین $۲a+b=۳۶+۱=۳۷$.

تست ۲۲۱: باقی‌مانده‌ی تقسیم عبارت $f(x)=(x+۱)^۳(x-۱)^۲+x^۴-x^۲-۱$ بر $x^۲-۱$ کدام است؟

۱) $x+۱$ ۲) ۱   ۳) -۱ ۴) $-x-۱$

پاسخ: گزینه‌ی «۳» ـ برای یافتن باقی‌مانده بهت یاد دادم که مقسوم‌علیه رو صفر کنی $x^۲-۱=۰\ \Rightarrow\ x^۲=۱$، و در مقسوم به جای $x^۲$، ۱ بذاری؛ اما اول $f(x)$ رو جمع و جورتر بنویس:

$$f(x)=(x+۱)\overbrace{(x+۱)^۲(x-۱)^۲}^{\text{مزدوج}}+x^۴-x^۲-۱=(x+۱)(x^۲-۱)^۲+x^۴-x^۲-۱=(x+۱)((x)^۲-۱)^۲+(x^۲)^۲-(x^۲)-۱$$

$$\overset{x^۲=۱}{=\!=\!=}(x+۱)(۱-۱)^۲+(۱)^۲-۱-۱=-۱\ \Rightarrow\ R=-۱$$

تست ۲۲۲: عبارت $a^{۲۸}+b^{۲۸}$ بر کدام‌یک از عبارات زیر بخش‌پذیر است؟

۱) $a+b$ ۲) $a^۲+b^۲$ ۳) $a^۴+b^۴$ ۴) $a^۷+b^۷$

پاسخ: گزینه‌ی «۳»

یادته گفتم که x^n+y^n وقتی به $x+y$ بخش‌پذیره که n فرد باشد. حالا a^n+b^n وقتی به a^m+b^m بخش‌پذیره که n مضرب فرد و طبیعی از m باشد. ۲۸ مضرب فرد و طبیعی از ۴ است (مضرب ۷) پس $a^{۲۸}+b^{۲۸}$ بر $a^۴+b^۴$ بخش‌پذیر است.

روش دوم: در گزینه‌ی «۳» داریم:

$$a^۴+b^۴=۰\ \Rightarrow\ a^۴=-b^۴\ \Rightarrow\ a^{۲۸}+b^{۲۸}=(a^۴)^۷+b^{۲۸}=(-b^۴)^۷+b^{۲۸}=-(b^{۲۸})+b^{۲۸}=۰$$

چون توان $(-b^۴)^۷$ فرد است، پس منفی رو پس می‌ده: $(-b^۴)^۷=-b^{۲۸}$

تست ۲۲۳: عبارت $x^{۲۴}+۱$ بر کدام عبارت زیر همواره بخش‌پذیر است؟

۱) $x^{۱۲}+۱$ ۲) $x^۳+۱$ ۳) $x^۶+۱$ ۴) $x^۸+۱$

پاسخ: گزینه‌ی «۴» ـ $x^{24}+1$ همان $x^{24}+1^{24}$ است و مثل سؤال قبلی وقتی به x^m+1^m بخش‌پذیره که ۲۴ مضرب طبیعی و فرد از m باشد. درگزینه‌ی «۴»، ۲۴ بر ۸ می‌شه ۳ و مضرب فرد از اون هست.

روش دوم: $\boxed{\text{دست تو جیب}}$ در گزینه‌ی «۴» داریم:

$$x^8+1=0 \Rightarrow x^8=-1$$

$$x^{24}+1=(x^8)^3+1=(-1)^3+1=-1+1=0$$

پس $x^{24}=1$ بر x^8+1 بخش‌پذیره چون باقی‌مانده‌اش صفر شد.

تست ۲۲۴: خارج‌قسمت x^9+4x^6+2x-1 بر $x+1$ را بر $x-1$ تقسیم کرده‌ایم. باقی‌مانده کدام است؟

۱) -1 ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینه‌ی «۳» ـ ابتدا باقی‌مانده $P(x)$ رو بر $x+1$ پیدا می‌کنیم:

$$x+1=0 \Rightarrow x=-1 \Rightarrow R=P(-1)=-1+4-2-1=0 \Rightarrow R=0$$

حالا رابطه‌ی تقسیم رو می‌نویسیم:

$$x^9+4x^6+2x-1=(x+1)Q(x) \quad (I)$$

حالا باید $Q(x)$ رو بر $x-1$ تقسیم کنیم:

$$Q(x)=(x-1)Q'(x)+R'$$

از ما R' رو می‌خواد پس $Q'(x)$ رو حذف می‌کنیم:

$$\xrightarrow{x=1} Q(1)=\overbrace{(1-1)Q'(1)}^{0\times Q'(1)=0}+R' \Rightarrow Q(1)=R'$$

از قسمت (I)، $Q(1)$ رو حساب می‌کنیم:

$$\xrightarrow{x=1} 1+4+2-1=(1+1)Q(1) \Rightarrow 6=2Q(1) \Rightarrow Q(1)=3 \Rightarrow R'=3$$

تست ۲۲۵: اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر $x-1$ و $x-2$ به ترتیب ۳ و ۱- باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم $g(x)=x^2f(x)-2x+1$ بر x^2-3x+2 کدام است؟

۱) $11-9x$ ۲) $7-4x$ ۳) $7+4x$ ۴) $11+9x$

تست ۲۲۶: در تقسیم $x^{15}+x^3+2x-11$ بر $x+1$، مجموع ضرایب خارج‌قسمت تقسیم کدام است؟

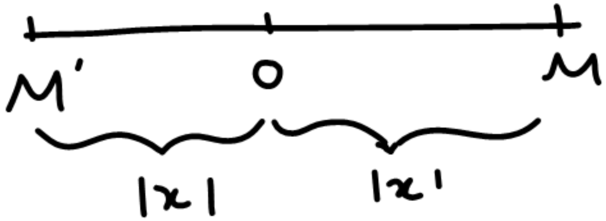
۱) ۴ ۲) ۱۸ ۳) ۱۶ ۴) ۱۴

تست ۲۲۷: حاصل خارج‌قسمت تقسیم x^9+1 بر $x+1$ به ازای $x=-1$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) -1 ۴) ۹

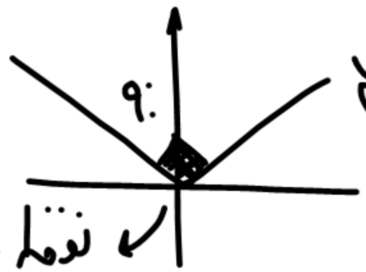
قدرمطلق ۱۴۰۱,۷,۲۳

فاصله نقطه M و قرینه آن نسبت به مبدأ O را نماد $|x|$ نمایش می‌دهیم:



فاصله مقداری است مثبت که حداقل صفر می‌شود.

$|x| \geq 0$ $\quad$ $|x|$ نامنفی (مثبت یا صفر) $\quad$ $y=|x|=\begin{cases} x & x\geq 0 \\ -x & x<0 \end{cases}$



نوک زاویه‌دار (گوشه)

$|U| = \begin{cases} \text{خودش} & \text{توش مثبته} \\ \text{قرینش} & \text{توش منفیه} \end{cases}$

$|-5| = -(-5) = 5$

خروجی قدرمطلق یک عبارت مثبته

$$\left|\underbrace{\sqrt{3}-\sqrt{5}}_{-}\right| = -\sqrt{3}+\sqrt{5} = \sqrt{5}-\sqrt{3}$$

$$\left|\overset{-}{1-\sqrt{2}}\right| = -(1-\sqrt{2}) = -1+\sqrt{2} = \sqrt{2}-1$$

$$1-1{,}4 = -0{,}4$$

$$\left|\underbrace{\sqrt{3}-\sqrt{2}}_{+}\right| = \sqrt{3}-\sqrt{2}$$

$$\left|\underbrace{\sin x-1}_{-}\right| = -\sin x+1$$

$$-1 \leq \sin x \leq 1 \xrightarrow[\text{طرفین}]{-1} -2 \leq \underbrace{\sin x-1} \leq 0$$

$$\left|\underbrace{1-\cos x}_{+}\right| = 1-\cos x$$

می دانیم

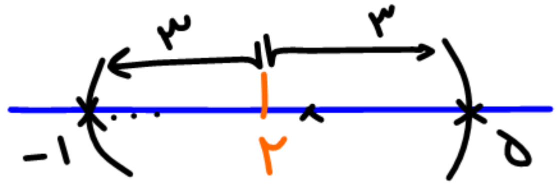
$$-1 \leq \cos x \leq 1 \xrightarrow{\text{طرفین ضربدر } (-1)} 1 \geq -\cos x \geq -1 \quad +1$$

$$2 \geq 1-\cos x \geq 0$$

یه چیز مهم: $|x - a|$ را بخوانید فاصله x از a

(از ، فاصله)

a : ریشه داخل قدر، مرکز همسایگی



$-3 < x-2 < 3$

$-1 < x < 5$

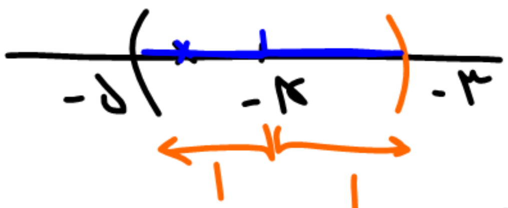
$|x-2| < 3$: فاصله ایکس از ۲ کمتر از ۳ است.

$|x| = |x-0|$: فاصله ایکس از صفر

$|x+3| = |x-(-3)|$: فاصله ایکس از منهای ۳

$|x+4| < 1$: فاصله ایکس از منهای ۴ کمتر از یک است.

$|x+4| < 1$

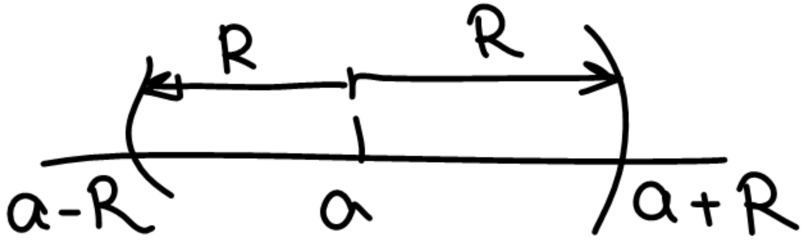


می‌دانیم $|u| < a \xrightarrow{a>0} -a < u < a$

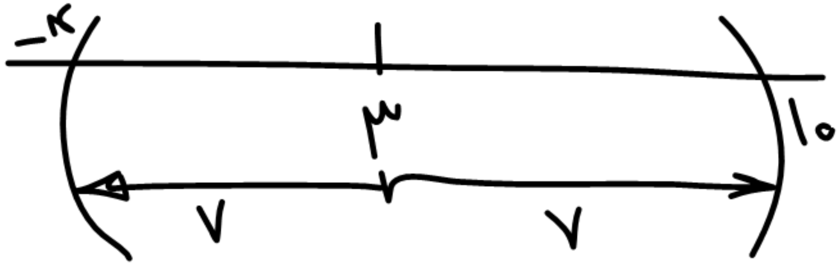
$-1 < x+4 < 1 \longrightarrow -1-4 < x < 1-4$

$-5 < x < -3$

$|x-a|<R$



$|x-3|<7$

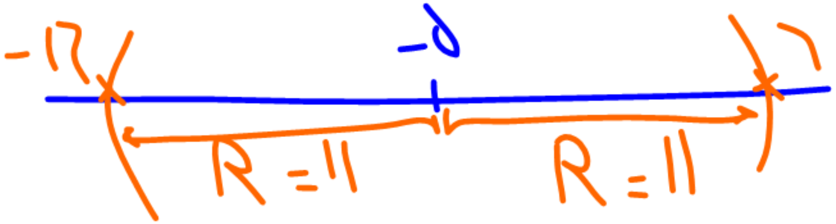


$-7<x-3<7$

$-4<x<10$

$|x+5|<11$ ⇝ شعاع $\quad -11<x+5<11 \longrightarrow -16<x<6$

ریشه داخل قدرمطلق
مرکزه پس



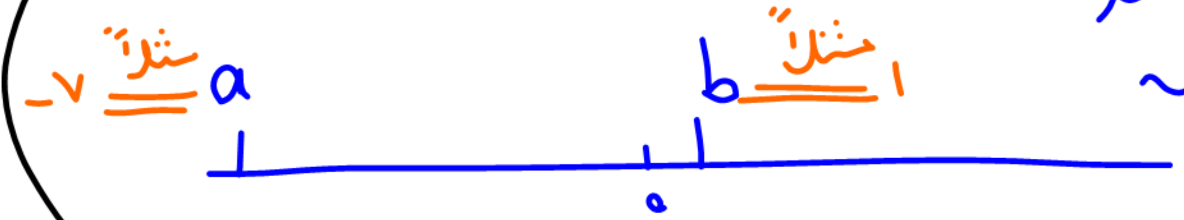
تست ۱۱۱ اگر $a<0<b$ و $|a|>|b|$ باشد حاصل

$|a+b|+|a-b|+|a|+|b|$ کدام است؟

$|b-0|<|a-0|$

ترجمه صورت سوال

فاصله a از صفر بیشتر از فاصله b از صفر



$$= -\cancel{a} - b - \cancel{a} + b - \cancel{a} + b = -3a + b$$

۱۱۲ هرگاه $|x|+|y|=x-y$ باشد حاصل

$x>0$ ، $y<0$

$$\sqrt{x|x|+x|y|-y|x|-y|y|}$$

$+$ ، $-$ ، $+$ ، $-$

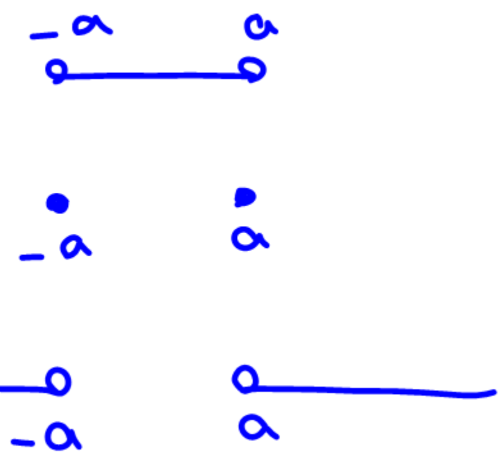
= داخل قدرمطلق ها را تعیین علامت کنید و از داخل قدرمطلق در بیاورید:

$$=\sqrt{x^2-xy-yx+y^2}$$

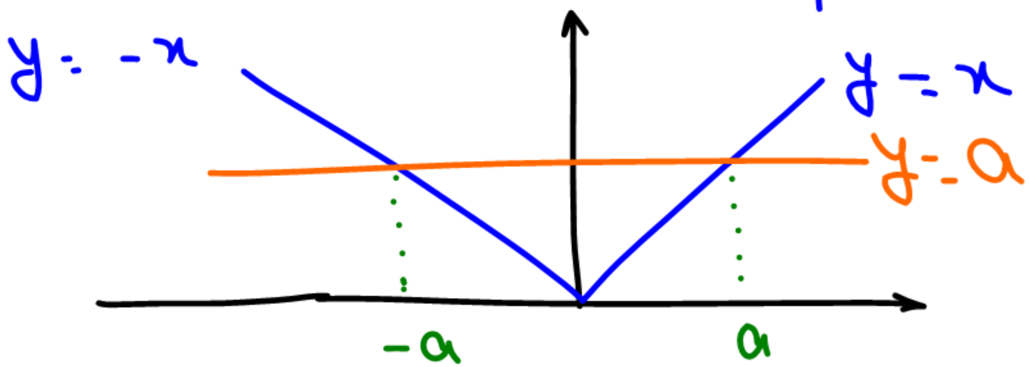
$$=\sqrt{x^2-2xy+y^2}=\sqrt{(x-y)^2}=|x-y|=x-y$$

$+$

$$
\begin{cases}
|u| < a \xrightarrow{a>0} -a < u < a \\
|u| = a \xrightarrow{a>0} u = \pm a \\
|u| > a \xrightarrow{a>0} u < -a \text{ یا } u > a
\end{cases}
$$



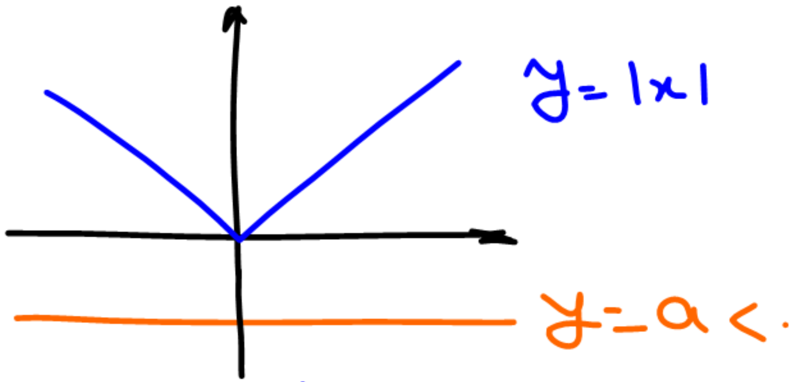
با رسم شکل $y=a$ با $y=|x|$ تحقیق کنید



$$
\begin{cases}
|x| < a \rightsquigarrow -a < x < a \\
|x| = a \rightsquigarrow x = \pm a \\
|x| > a \rightsquigarrow x < -a
\end{cases}
$$

یا

$x > a$



$|x| > -۲ \longrightarrow x \in R$

$|x| = -۲ \longrightarrow x \in \phi$

$|x| < -۲ \longrightarrow x \in \phi$

$|x| > a \xrightarrow{\text{منفی}\ a} x \in \mathbb{R}$ همه

$|x| = a \xrightarrow{\text{منفی}\ a}$ هرگز $x \in \phi$

$|x| < a \xrightarrow{\text{منفی}\ a}$ هرگز $x \in \phi$

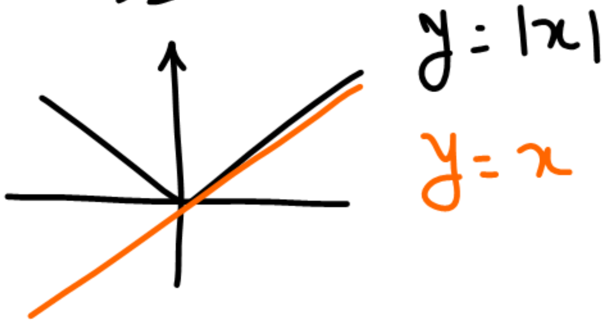
دامنه $y = \sqrt{|x| - x}$ را بیابید.

$|x| - x \geq 0$

$|x| \geq x \rightsquigarrow x \in \mathbb{R}$

$D_f = \mathbb{R}$

همواره $|x| \geq x$



$|x| \geq x$

همواره $y = |x|$ بالاتر یا مساوی $y = x$ است.

$$|x+y| \leq |x|+|y|$$

نامساوی مثلثی.

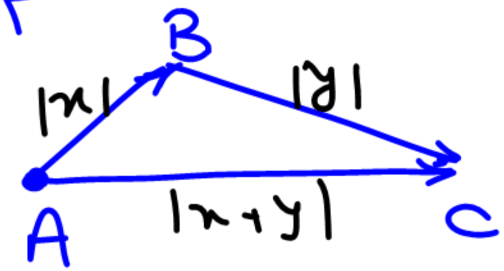
علامت مساوی برای x,y هم‌علامت $xy>0$.

$$|\underbrace{(-10)}_{x}+\underbrace{(2)}_{y}| = |-8| = 8 < |-10|+|2| = 12$$

$$|\underbrace{(-10)}_{x}+\underbrace{(-2)}_{y}| = |-12| = 12 = |-10|+|-2| = 12$$

$$|7+8| = |7|+|8|$$

تفنیه چسار (خر)



$$|x+y| = AC < AB+BC = |x|+|y|$$

در هر مثلث یک ضلع، کوچکتر از
جمع ۲ ضلع دیگر است.

نکته :

می دانیم : $|a+b| \le |a|+|b|$

دو طرف را بر مقدار مثبت $|a|+|b|$ تقسیم می کنیم :

$$\frac{|a+b|}{|a|+|b|} \le 1$$

از طرفی که طرف چپ نیز مثبت است زیرا صورت و مخرج مثبتی دارد :

$$a+b=0 \leftarrow \quad \le \frac{|a+b|}{|a|+|b|} \le 1$$

* $\frac{|a+b|}{|a|+|b|} \le 1$

۱۱۳ اگر به ازای هر $x \in \mathbb{R}$ داشته باشیم

$$A = \frac{x^2-x+1}{|x^2-1|+|\underbrace{x-2}|}$$

دقیق‌ترین محدوده A ؟

$|a-b|=|b-a|$

$$\underbrace{|x^2-1|+|2-x|}$$

$$|\underbrace{x^2-1}_{a}|+|\underbrace{2-x}_{b}|$$

$0 < A \le 1$

صورت و مخرج مثبتند

$a+b = x^2-x+1$

$\Delta = (-1)^2 - 4 = 1-4 < 0$

علامتش همواره موافق ضریب x^2 و مثبت است

$$0 < A = \frac{x^2-1+2-x = \boxed{x^2-x+1} = |x^2-x+1|}{|x^2-1|+|2-x|} = \frac{|a+b|}{|a|+|b|} \le 1$$

طبق *

صفر نیست ⟶ کسری صفره که صورتش صفره ⟶ صورت $\Delta<0$ ⟶ صورت مثبته

$y=ax^2+bx+c$

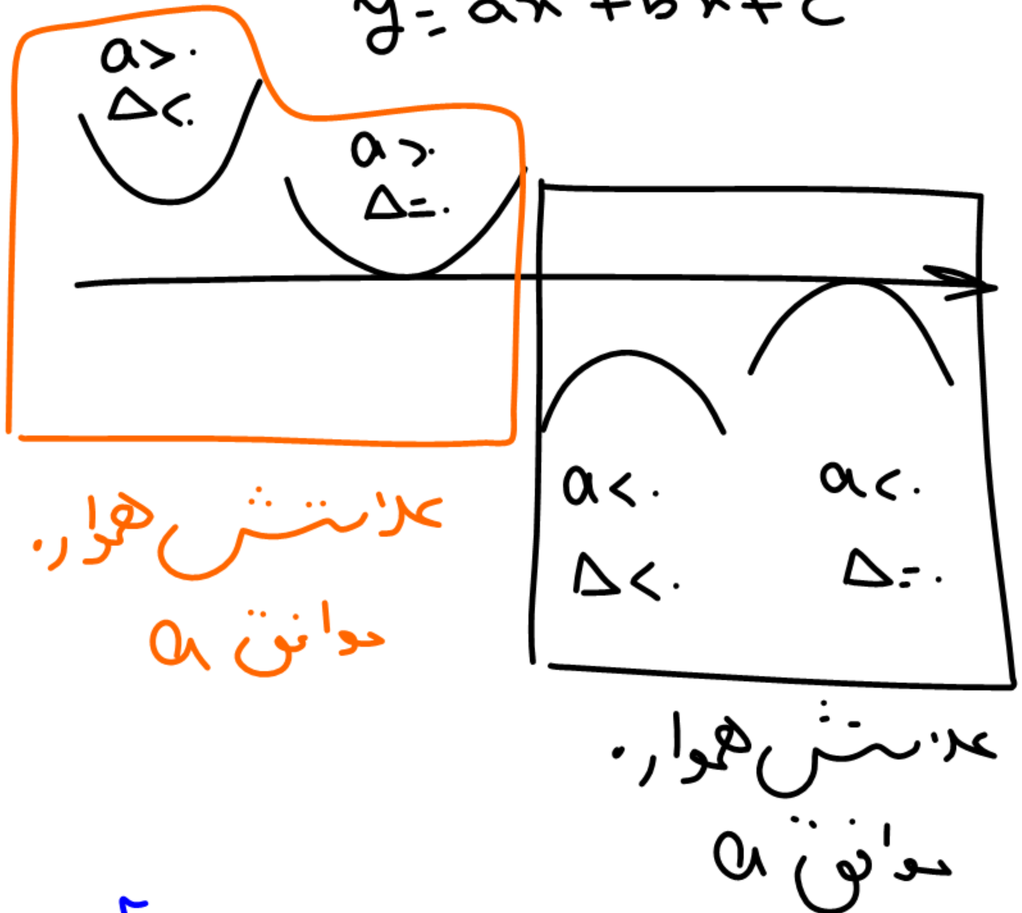
بیاریم :

عبارت درجه ۲

وقتی $\Delta<0$ داره علامتش

همواره موافق ضریب x^2

است



x^2-x+1

$\Delta=(-1)^2-4(1)(1)=-3<0$ → علامت عبارت درجه ۲ همواره موافق ضریب x^2 و مثبته

x	ریشه ندارد
x^2-x+1	+

توضیح مجدد: صورت تعیین

۴ $\quad A=\dfrac{\overbrace{x^2-x+1}^{a+b}>0}{\underbrace{|x^2-1|}_{a}+\underbrace{|x-2|}_{|\underbrace{2-x}_{b}|}}$

$x^2-x+1>0 \quad \Delta<0 \implies |\underbrace{x^2-x+1}_{+}|=x^2-x+1$

همچنین می‌دانیم:

$|a+b|\leq|a|+|b|$

$\dfrac{|a+b|}{|a|+|b|}\leq 1$

$0<A=\dfrac{|x^2-x+1|=|a+b|}{|a|+|b|}\leq 1$

مساوی صفر نیست زیرا صورت صفر نمی‌شه $\Delta<0$

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$$

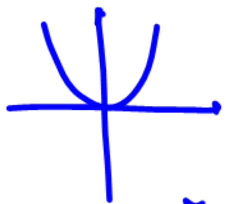
$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$$

$$|a+b| \leq |a| + |b|$$

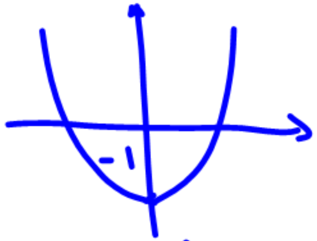
مثال : تابع $y=|x-1||x+1|$ در کدام بازه نزولیه ؟

می دانیم : $|a||b| = |a \cdot b|$

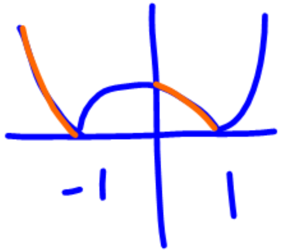
$$y = |x-1||x+1| = |(x-1)(x+1)| = |x^2-1|$$



$y = x^2$



$y = x^2-1$



$$x \in (-\infty, -1] \cup [0, 1]$$

مثال : $\left|\frac{x-1}{x+2}\right| < 1$

می دانیم $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$

$$\frac{|x-1|}{|x+2|} < 1 \xrightarrow[\text{ضرب می کنیم}]{\text{دو طرف را در عبارت مثبت } |x+2|} |x-1| < |x+2|$$

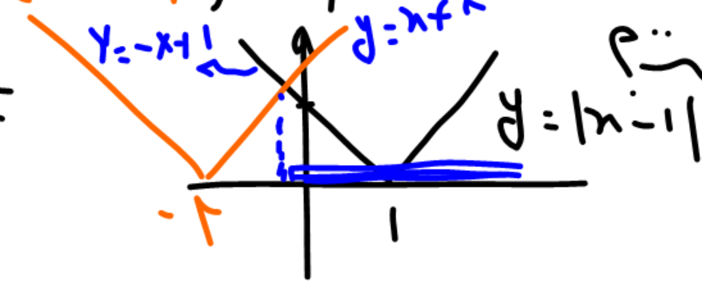
چون دو طرف مثبت است ، دو طرف را به توان ۲ می رسانیم و جهت نامساوی عوض نمی شود :

$$\cancel{x^2} - 2x + 1 < \cancel{x^2} + 4x + 4$$

$$-3 < 6x$$

$$-\frac{3}{6} < x \longrightarrow x > -\frac{1}{2}$$

راه رسم : کجاها $y=|x+2|$ بالاتر از $y=|x-1|$ است



می بینیم از $x=-\frac{1}{2}$ به بعد تابع قرمز بالاتر از مشکی است

حل انواع معادله قدر مطلقی:

① $|x-2|=3 \longrightarrow \begin{cases} x-2=3 \longrightarrow x=5 \\ x-2=-3 \longrightarrow x=-1 \end{cases}$

② $|x-1|=-2x \longrightarrow \begin{cases} x-1=-2x \longrightarrow 3x=1 \longrightarrow x=\frac{1}{3} \\ x-1=2x \longrightarrow x=-1 \longrightarrow x=-1 \end{cases}$

③ $|u|=u \quad u\geq 0$ $\qquad |x-2|=x-2 \longrightarrow x-2\geq 0 \longrightarrow x\geq 2$

④ $|u|=-u \quad u\leq 0$ $\qquad |x-2|=2-x \longrightarrow x-2\leq 0 \longrightarrow x\leq 2$

⑤ $|x-x^2|+|x^3-2x^2+4x-3|=0$ نکته: جمع دو تا مثبت صفر، لذا تک تک صفرند

$x-x^2=0 \longrightarrow x(1-x)=0 \longrightarrow x=0\ ,\ 1$

از این دو جواب اونی درسته که عبارت ۲ ام را نیز صفر کند. $\boxed{x=1}$

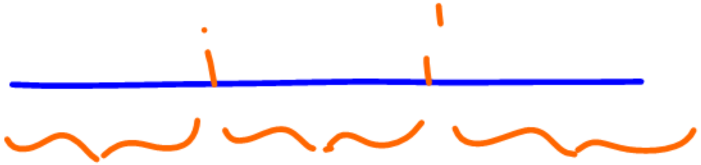
تست ۱۱۴

تمرین ۲

مثال: معادله مقابل را حل و مقدار جواب های آن را بیابید.

$$|x| + |2x-2| = x-3$$

$x=0$ ، $2x-2=0 \longrightarrow x=1$



فرض:

$$\begin{cases} x<0 \longrightarrow -x-2x+2 = x-3 \longrightarrow -4x=-5 \longrightarrow x=\frac{5}{4} \not< 0 \\ 0 \le x \le 1 \longrightarrow x-2x+2 = x-3 \longrightarrow x=\frac{5}{2} \notin [0,1] \\ x>1 \longrightarrow x+2x-2 = x-3 \longrightarrow x=-\frac{1}{2} \not> 1 \end{cases}$$

این معادله هیچ جوابی ندارد.

$\boxed{\text{تکلیف: قدر مطلق}}$

تکلیف: فایل قدر مطلق که در گروه بله گذاشته ام.

آزمون: قدر مطلق