
ریاضیات تجربی
دکتر سامان سلامیان
تست های تابع
جمعبندی و
نکته و تست
$a^2 + b^2 = c^2$
$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}$
$y = mx + b$
ویژه کلاس های جمعبندی و نکته و تست

۱. دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{|x|+۲-x^۲}$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۶ ۲) ۵ ✓ ۳) ۴ ۴) ۳

$y=\sqrt{u}$ باید $u\geq ۰$ $\quad |x|+۲-x^۲\geq ۰ \quad x^۲=|x|^۲$

$۰\geq x^۲-|x|-۲$

$۰\geq |x|^۲-|x|-۲$

$۰\geq \underbrace{(|x|+۱)}_{\text{همواره} +}(|x|-۲)$

$۰\geq |x|-۲$

$۲\geq |x|$

$-۲\leq x\leq ۲$

$D_f\ [-۲,۲] \quad \underbrace{x=\pm۲,\pm۱,۰}_{\text{۵تا}}$

۲. دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{\sqrt{\frac{12}{x^2-2x}}-2}$ شامل چند عدد صحیح است؟

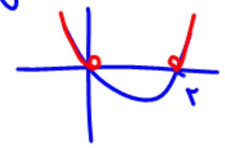
۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

الف

$\frac{12}{x^2-2x} \geq 0$ (۱۲ مثبت است)

$\underbrace{x^2-2x}_{\text{باید } + \text{ باشد}}$

$y=x(x-2)$



$x<0$ یا $x>2$

ب

$\sqrt{\sqrt{\frac{12}{x^2-2x}}-2} \geq 0$

طبق الف مثبت است

$\sqrt{\frac{12}{x^2-2x}} \geq 2$

مربع

$\frac{12}{x^2-2x} \geq 4$

حذف ÷۴

$\underbrace{\frac{3}{x^2-2x}}\geq 1$

چون می‌دانیم (از الف) که مخرج مثبته لذا می‌توان ۲ طرف را در مخرج ضرب کرد.

$3 \geq x^2-2x$

$0 \geq x^2-2x-3$

	-1		3	
$+$	0	$-$	0	$+$

$-1 \leq x \leq 3$

$D_f: [-1,0)\cup(2,3] \longrightarrow x=-1, 3$

اعداد صحیح بازه‌اند.

۳. دامنهٔ تابع $f(x)=\dfrac{۲}{\sqrt{ax^{۲}+bx+c>۰}}$ برابر بازهٔ $(-\infty,۲)$ است. حاصل $|b|۳-۳a+c$ کدام است؟

$\underbrace{\cancel{۳a}}_{\text{صفر}}+c+۳b=\underbrace{\boxed{c+۲b}}_{\text{صفر}}+b=b$

۱) b ۲) $-b$ ۳) $۲b$ ۴) $-۲b$

x	$-\infty$	۲	$+\infty$
$\cancel{a}x^{۲}+bx+c>۰$	$+$	۰	$-$

باید $a=۰$ باشه

چون جدول تعیین علامت ریشه رو نمی‌ده به این شکل نیست و به صورت $y=\dfrac{۲}{\sqrt{bx+c>۰}}$ است

قبل از ریشه مخالف ضریب x است پس $\boxed{b<۰}$

۲ ریشه زیر رادیکاله

$bx+c=۰$

$۲b+c=۰$

$c=-۲b>۰$

۴. دامنهٔ تابع $f(x)=\log_4\left(\frac{(x-a)^2(x-b)}{x+1}\right)$ به صورت $(-\infty,-1)\cup(4,+\infty)$ است. a چند مقدار صحیح می‌تواند داشته باشد؟

۱) ۶ ✓ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

می دانیم داریم $y=\log_b^u$

$4>0 \leftarrow b>0$, $u>0$

$4\neq 1 \leftarrow b\neq 1$

$\frac{(x-a)^2(x-b)}{x+1}>0$

x	$-\infty$		-1		$4=b$		$+\infty$
		$+$		$-$		$+$	

همواره مثبته و ریشه‌اش بین ۱- و ۴ هست چون در تعیین علامت ظاهر نشد و ریشه مضاعف دارد

$x-b=0 \rightarrow x=b$

$4=b$

۶ تا مقدار صحیح

$\boxed{a=-1,0,1,2,3,4}$

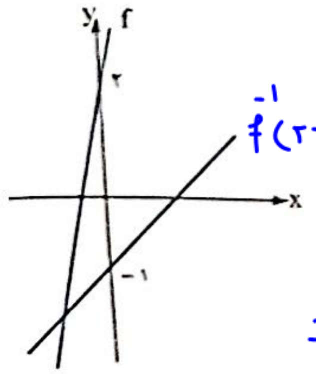
$f(x) = ax + b$

$f(0) = 0 + b = 2$

$y = f(x) = ax + 2$ وارون می‌کنیم: $x = \frac{y-2}{a}$

$f^{-1}(x) = y = \frac{x-2}{a}$

۵. تابع خطی $f(x)$ و $f^{-1}(2x)$ رسم شده است.



$f^{-1}(2x)$

دامنهٔ تابع $y = \sqrt{\sqrt{f(x)} - f(x)}$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۱ ✓

۲) ۲

۳) ۳

۴) ۴

$f^{-1}(2x) = \frac{2x-2}{a}$

$x=0 \longrightarrow f^{-1}(0) = \frac{-2}{a} = -1 \longrightarrow \boxed{a=2}$

$f(x) = 2x + 2$

الف

$\begin{cases} f(x) \geq 0 \longrightarrow 2x+2 \geq 0 \longrightarrow \boxed{x \geq -1} \\ \sqrt{f(x)} - f(x) \geq 0 \longrightarrow \sqrt{f} \geq f \\ f \geq f^2 \longrightarrow 0 \geq f^2 - f = f(f-1) \end{cases}$

	0		1	
+		−		+

$0 \leq f(x) \leq 1$

$0 \leq 2x+2 \leq 1$

$-2 \leq 2x \leq -1$

ب) $\boxed{-1 \leq x \leq -\frac{1}{2}}$

(ب)

(الف)

-1 $\quad -\frac{1}{2}$

$-1 \leq x \leq -\frac{1}{2}$

بازه جواب فقط یک جواب $x=-1$ دارد.

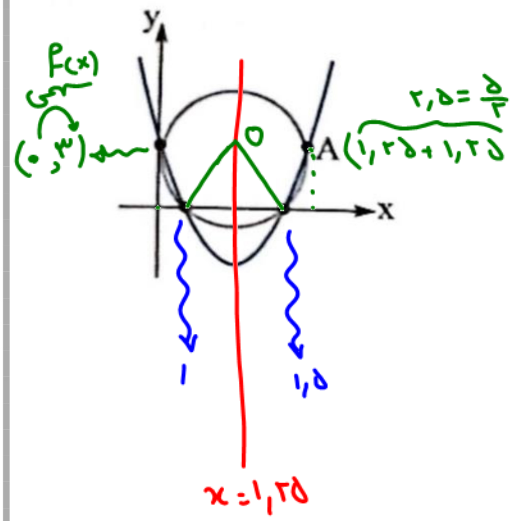
۶. تابع چندجمله‌ای درجه دو $f(x)=2x^2-5x+3$ رسم شده است. اگر نقطهٔ $A(a,b)$ محل برخورد دایره و سهمی باشد، مقدار $2a-b$ کدام است؟

جمع ضرایب صفر

$x=1\ ,\ \frac{3}{2}$

۱) ۳   ۲) ۲ ✓

۳) ۱   ۴) صفر



$A(1,25+1,25 = 2,5=\frac{5}{2}=a\ ,\ 3=b$

عمود منصف هر وتر از دایره از مرکز دایره می‌گذرد.

$2a-b=2\left(\frac{5}{2}\right)-3=2$

نکته: در هر سهمی نقاط متقارن نسبت به محور تقارن $x_S=-\frac{b}{2a}$ دارای عرض‌های یکسان هستند.

هر تابع درجه سوم $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ دارای مرکز تقارنی به طول $x_\omega=\frac{-b}{3a}$ است.

۷. نمودار تابع چندجمله‌ای $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ و نیمساز ناحیهٔ اول رسم شده است. m کدام است؟

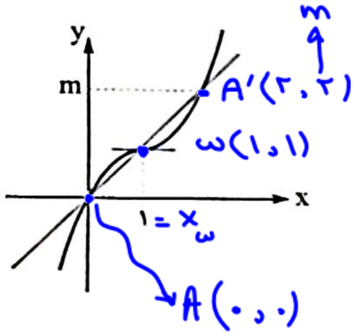
می‌بینیم: $x_\omega=\frac{-a}{3}=1$ و $a=-3$

۱) ۲ ✓

۲) ۲/۵

۳) ۳

۴) ۳/۵



$\omega(1,1)$ مرکز تقارن درجه ۳ است
چون A و A' نسبت به ω قرینه‌اند
و مختصات $A(0,0)$ است، پس
$A'(2,2)$

هر معادله درجه ۳ را می‌توان به صورت

$$y=k(x-x_\omega)^3+y_\omega$$

نوشت که

$$\omega\begin{cases}x_\omega=\frac{-b}{3a}\\ y_\omega\end{cases} \qquad \omega\left(-\frac{b}{3a},y_\omega\right)$$

و k با دادن یک نقطه به تابع بدست می‌آید.

راه دیگر: $O(0,0)$ و $\omega(1,1)$ روی تابع است
پارامترها را میابید و با جایگذاری $x=2$
عرض A که $m=2$ است حاصل می‌شود.

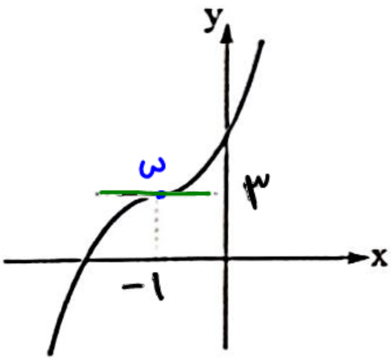
۸. تابع چندجمله‌ای درجه‌سوم $f(x)=(x-۲)^۳+ax^۲+bx+c$ را مطابق شکل روبه‌رو رسم کرده‌ایم. $a+b+c$ کدام است؟

۱) ۱۲

۲) ۹

۳) ۶

۴) ۳



معادله درجه سوم در حالت کلی به صورت

ω مرکز تقارن است

$y=k(x-x_\omega)^3+y_\omega$ است.

$$y=k(x+1)^3+3$$

مقایسه کن

$$\begin{cases} y=m(x^3+3x^2+3x+1)+3=mx^3+3mx^2+3mx+m+3 \\ y=(x-2)^3+ax^2+bx+c=x^3-6x^2+12x-8+ax^2+bx+c \end{cases}$$

ضریب جملات هم درجه را برابر می‌گذاریم

$$\to y=x^3+(a-6)x^2+(12+b)x+(c-8)$$

$m=1$

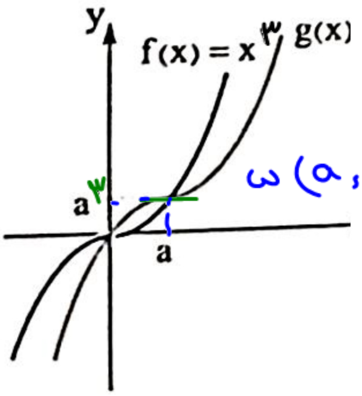
$3m=a-6 \to \boxed{a=9}$

$12+b=3m \to 12+b=3 \to \boxed{b=-9}$

$c-8=m+3 \to c-8=4 \to \boxed{c=12}$

$a+b+c=12$

۹. نمودار $y = f(x)$ را با انتقال به $g(x)$ تبدیل می‌کنیم. حداکثر مقدار $g(-1)$ کدام است؟



۱) -1

۲) $-\frac{1}{2}$

۳) $-\frac{1}{3}$

۴) $-\frac{1}{4}$

می‌بینیم $f(x)=x^3$ منتقل شده

$\omega(a, a^3)$

$$y = m(x - x_\omega)^3 + y_\omega$$

چون همان x^3 منتقل شده، پس $m=1$

$$g(x) = (x-a)^3 + a^3$$

$$g(-1) = (-1-a)^3 + a^3$$

$$g(-1) = -(1+a)^3 + a^3$$

$$g(-1) = -(1 + a^3 + 3a + 3a^2) + a^3$$

$$g(-1) = -3a^2 - 3a - 1$$

حداکثر درجه ۲ از دستور $y_{max} = \frac{-\Delta}{4a}$ بدست می‌آید.

$$\Delta = (-3)^2 - 4(-3)(-1) = 9 - 12 = -3 \qquad y_{max} = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{3}{4(-3)} = -\frac{1}{4}$$

۱۰. تابع چندجمله‌ای درجه‌سوم $f(x)=x^3$ را در نظر بگیرید. تعداد ریشه‌های معادلهٔ $f(-x+1)=f^{-1}(-x+1)$ کدام است؟

۱) ~~۳~~ ۲) ۲

۳) ۱ ۴) صفر

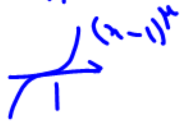
$f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x}$

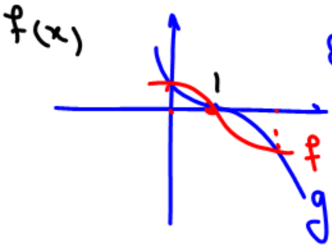
$(-x+1)^3=\sqrt[3]{-x+1}$

یکی از راه های حل معادله رسم ۲ طرف معادله در یک دستگاه است. هر دو را در یک دستگاه می‌کشیم تعداد نقاط برخورد تعداد ریشه هاست.

$f(x)=\sqrt[3]{-x+1}$

$g(x)=(-x+1)^3=(-(x-1))^3=-(x-1)^3$





۳ برخورد
۳ ریشه

$x=0,1,2$

مراحل رسم : $y = a\,f(bx+c)+d$

① c ، ② دامنه $\frac{1}{|b|}$ ، ③ عرض ها ضربدر a ، ④ d

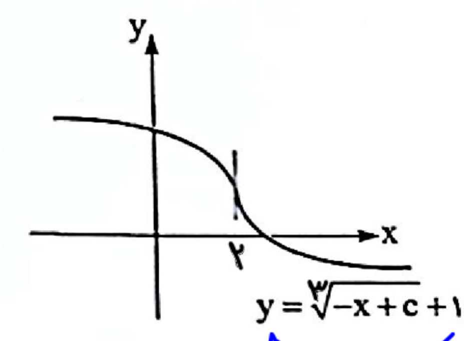
۱۱. معکوس تابع چندجمله‌ای $f(x) = -x^{۳} + ax^{۲} + bx + ۳$ به صورت زیر رسم شده است. حاصل $a + b + c$ کدام است؟

۱) ۱

۲) ۲ ✓

۳) ۳

۴) ۴



نکته: اگر f^{-1} وارون f باشد f هم وارون f^{-1} است.

$y - 1 = \sqrt[۳]{-x+c}$ (x را برحسب y می‌نویسیم

تعویض جای x و y ($(y-1)^{۳} = -x + c$

$x = -(y-1)^{۳} + c$

$f(x) = y = -(x-1)^{۳} + c = -(x^{۳} - ۳x^{۲} + ۳x - 1) + c$

$f(x) = -x^{۳} + ۳x^{۲} - ۳x + (1 + c)$

$f(x) = -x^{۳} + ax^{۲} + bx + ۳$

تساوی: $a = ۳$ ، $b = -۳$ ، $c + 1 = ۳$ ، $c = ۲$ ⟹ $a + b + c = ۲$

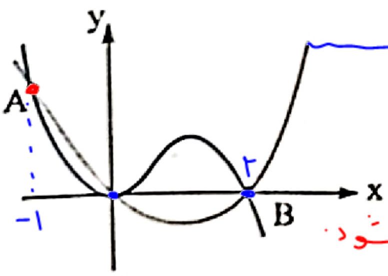
۱۲. نمودارهای $f(x)=x^{۲}-۲x+a$ و $g(x)=-x^{۳}+۲x^{۲}+bx+c$ رسم شده‌اند. طول پاره‌خط AB برابر کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۲}$

۲) $۳\sqrt{۲}$ ✓

۳) $۴\sqrt{۲}$

۴) $۵\sqrt{۲}$



g یعنی ریشه مضاعف صفر و ریشه ساده $x=۲$ دارد.

$g(x)=-x^{۲}(x-۲)$

$f(x)=x^{۲}-۲x+a$

$f(۰)=۰-۰+a=۰ \quad a=۰$

$f(x)=x^{۲}-۲x=x(x-۲)$

f و g را تقاطع دهید تا نقطه A پیدا شود.

$-x^{۲}\cancel{(x-۲)}=x\cancel{(x-۲)}$

$۰=x^{۲}+x$

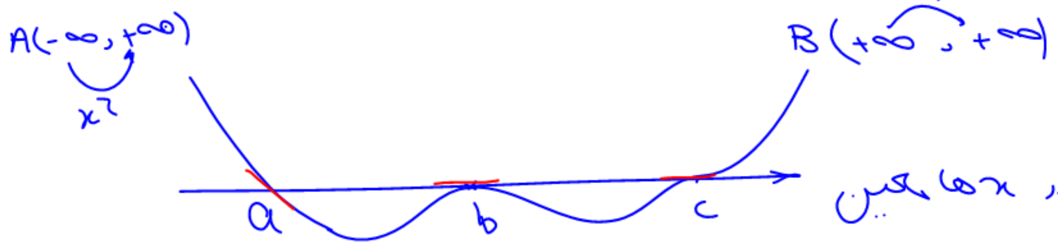
$۰=x(x+۱)\begin{cases}x=۰\\x=-۱\end{cases}$

$A(-۱,۳) \quad B(۲,۰)$

فاصله ۲ نقطه A و B $=AB=\sqrt{(x_A-x_B)^{۲}+(y_A-y_B)^{۲}}=۳^{۲}+۳^{۲}=۲(۹)=۳\sqrt{۲}$

نکته: نام ریشه، نوع برخورد تابع را با محور xها معین می‌کند.

$f(x)=(x-a)(x-b)^{۲}(x-c)^{۳}=x^{۶}+\dots$



$f'(b)=f'(c)=۰$

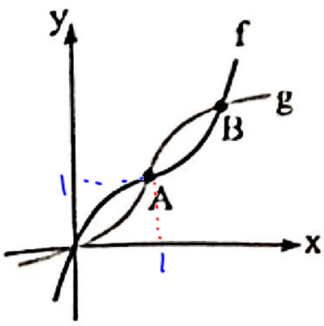
۱۳. تابع چندجمله‌ای $f(x)=(a-1)x^{6}+x^{3}-(a+2)x^{2}+3x$ و $g(x)=a^{2}+\sqrt[3]{x-a^{3}}$ رسم شده است. طول پاره‌خط AB کدام است؟

۱) ۱

۲) $\sqrt{2}$

۳) $\sqrt{3}$

۴) ۲



می‌بینیم f ابتدا صعودیه و یک به یک است، نوشته که f درجه x^6 دارد،
اگر x^6 داشته باشه نمی‌تونه اکیداً صعودی باشه زیرا

f نمی‌تواند بزرگترین درجه‌اش زوج باشه چون
در این صورت یک به یک نخواهد بود. پس ضریب x^6 صفر.

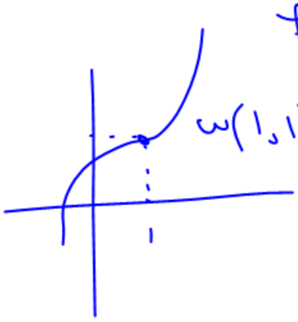
$a-1=0$

$\boxed{a=1}$

$f(x)=x^{3}-(a+2)x^{2}+3x=(x^{3}-3x^{2}+3x-1)+1$

$f(x)=(x-1)^{3}+1$

تابع g تابع f را در $A(1,1)$ قطع کرده و هر دو نسبت به $y=x$ قرینه‌اند لذا وارون یکدیگرند.



مرکز تقارن $(1,1)$

چون A مرکز تقارن f است g نیز f را به گونه‌ای قطع کرده که باید $OA=AB$

$\left.\begin{array}{l}A(1,1)\\O(0,0)\end{array}\right\}OA=\sqrt{2}$

۱۴. اگر $f(x)=\frac{۲x+۱}{x-۱}$ و $g(x)=\frac{۳x+a}{x-۲}$، مقدار a کدام باشد تا برای $x\neq ۰,۱,-۱$ رابطهٔ $g(f(x))=۳x$ برقرار باشد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

$$g(f(x))=\frac{۳f+a}{f-۲}=\frac{۳\left(\frac{۲x+۱}{x-۱}\right)+a}{\frac{۲x+۱}{x-۱}-۲}=۳x$$

رابطه مقابل برای هر x غیر از ۰و±۱ باید برقرار باشد لذا یک x دلخواه به ۲ طرف می‌دهیم

دلخواه

$$x=۲ \longrightarrow \frac{۱۵+a}{۳}=۶ \rightarrow ۱۵+a=۱۸$$

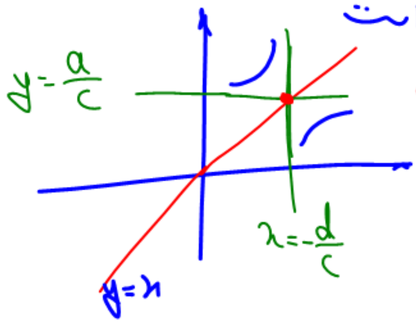
$\boxed{a=۳}$ گزینه ۴

نکته: $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ هموگرافیک و وارونش $f^{-1}(x)=\frac{-dx+b}{cx-a}$ است.

اگر در $f(x)$ داشتیم:

$a+d=۰$ یا $a=-d$

آنگاه $f=f^{-1}$ و مرکز تقارن f روی $y=x$ است



مثلاً اگر $f(x)=\frac{۳x+۲}{۵x-۳}$ باشد چون $a+d=۰$ است f و f^{-1} بر هم منطبقند یا بی‌شمار نقاط تقاطع دارند یا یکسان هستند.

۱۵. اگر $f(x)=x^{3}+2x-1$ و $g(x)=2x^2-11x+5$ باشد، حاصل‌ضرب ریشه‌های معادلهٔ $f(g(x))=2$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

$g(x)=2x^2-11x+5=1$

$2x^2-11x+4=0$

ضرب ریشه‌ها $x_1x_2=\frac{c}{a}=2$

$f(x)=2 \rightsquigarrow x=1$

$f\left(g(x)\right)=2 \xrightarrow{\text{یعنی}} f=2 \rightsquigarrow x^3+2x-1=2$

$x^3+2x-3=0$

جمع ضرایب صفر

یک ریشه $x=1$

است و عبارت بر $x-1$

بخش‌پذیر است:

$(2x^2-11x+5)^3+2(2x^2-11x+5)-1=2$

$x^3+2x-3=(x-1)\underbrace{(x^2+x+3)}=0$

$x=1$

$\Delta=1-12<0$

ریشه ندارد

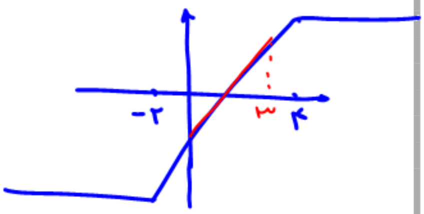
$$\begin{array}{r|l} x^3+2x-3 & x-1 \\ \hline \text{صفر} & x^2+x+3 \end{array}$$

وقتی گفته $f(g(x))=2$ یعنی کدام ورودی $f(x)$ را ۲ می‌کند. می‌بینم $x=1$

لذا باید $g(x)=1$ باشد

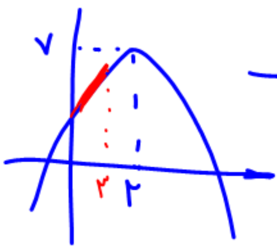
۱۶. کدام تابع در بازهٔ $(0,3)$ نزولی است؟

۱) $y = |x+2| - |x-4|$ ۲) $y = -x^2 + 4x + 3$ ۳) $y = \frac{2x-4}{3x-6}$ ۴) $y = \sqrt{6-x} - \sqrt{x+2}$ *



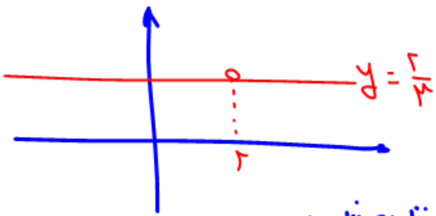
سهمی دهانه به پایین

$y' = -2x + 4 = 0$



$y = \frac{2(x-2)}{3(x-2)}$

$y = \frac{2}{3}$

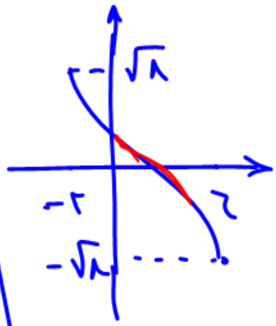


تابع ثابت

هم صعودی هم نزولی

$6 - x \geq 0 \quad x + 2 \geq 0$

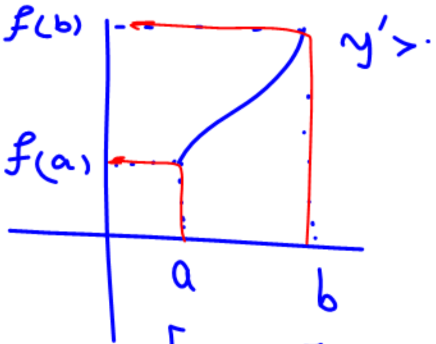
$6 \geq x \quad x \geq -2$



$y' = \frac{-1}{2\sqrt{\ }} - \frac{1}{2\sqrt{\ }} < 0$

نکته:

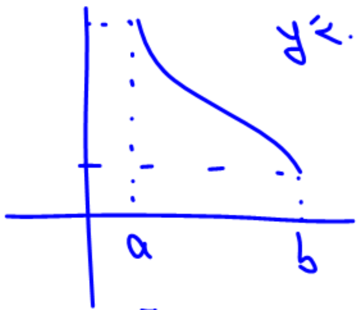
روش تعیین برد در تابع اکیداً یکنوا:



$y' > 0$

دامنه $D \ [a \ , \ b]$

برد $R \ [f(a) \quad f(b)]$



$y' < 0$

دامنه $D \ [a \ , \ b]$

برد $R \ [f(b) \quad f(a)]$

شبیه تست سراسری

به شدت احتمالی دوم

۱۷. اگر تابع $f(x)=\frac{ax+3}{2x+(a-1)}$ در بازهٔ $(1,+\infty)$ اکیداً نزولی باشد، حدود a کدام است؟

۱) $(-2,3)$ ۲) $[-2,3)$ ۳) $[-1,3)$ ۴) $(0,3)$

$x=\frac{1-a}{2}\le 1$

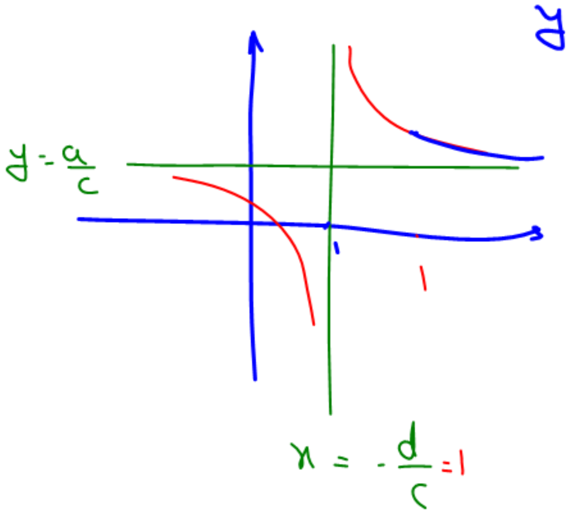
$1-a\le 2$

$-1\le a$

$y=\frac{ax+b}{cx+d}$ هموگرافیک $y'=\frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$

$x=-\frac{d}{c}$ مجانب قائم

$y=\frac{a}{c}$ مجانب افقی

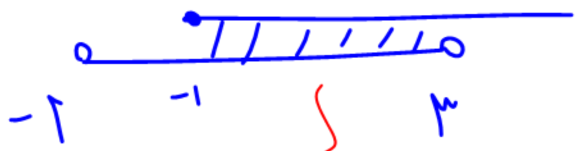


$f'(x)=\frac{a(a-1)-3(2)}{(2x+a-1)^2}<0$

$a^2-a-6<0$

	-2		3	
$+$	0	$-$	0	$+$

$\boxed{-2<a<3}$



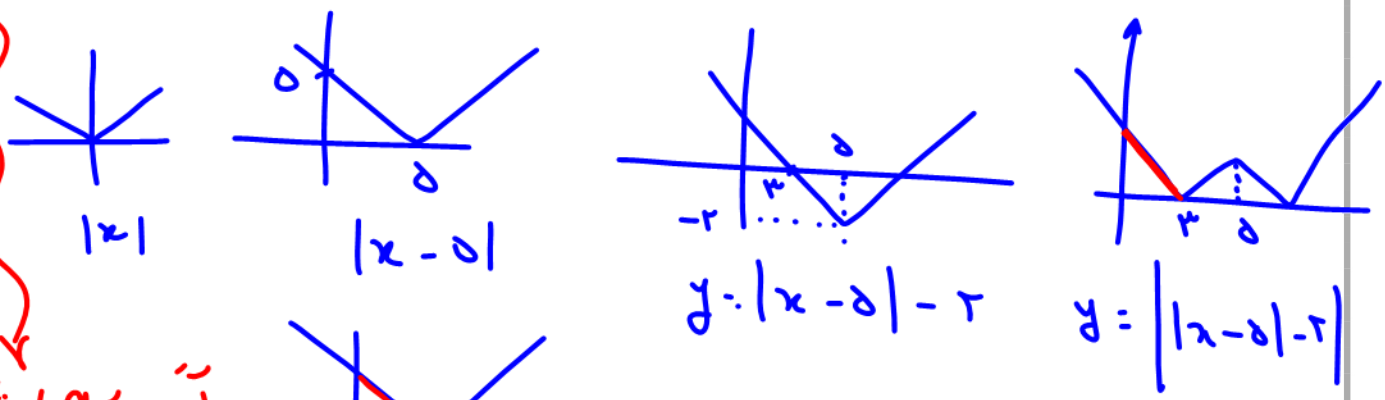
جواب $a\in[-1,3)$

در تست‌های صعودی نزولی حواسمان به ۲ چیز باشد: الف) مجانب قائم

ب) عدد تغییر ضابطه در چند ضابطه‌ای‌ها در واقع عرض یا طول ۲ طرف نقطهٔ تغییر ضابطه

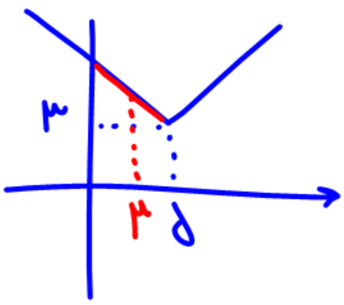
۱۸. به ازای کدام مجموعه مقادیر a، تابع $f(x)=||x-5|-a|$ در بازهٔ $(0,3)$ نزولی است؟

۱) $(-1,5)$ ۲) $(-1,2)$ ۳) $[5,+\infty)$ ۴) $(-\infty,2]$



اگر $a<2$ باشد:

مثلا $a=-3$

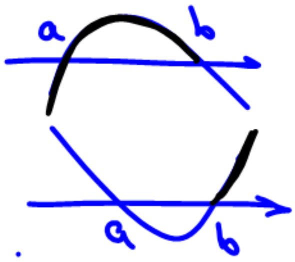


۱۹ـ اگر بازهٔ (۲,۳) بزرگ‌ترین فاصله‌ای باشد که تابع $f(x)=(x-a)|x-b|$ نزولی و مقدار آن منفی باشد، مقدار $|a-b|$ کدام است؟

۱) صفر　　۲) ۱　　۳) ۲　　۴) ۳

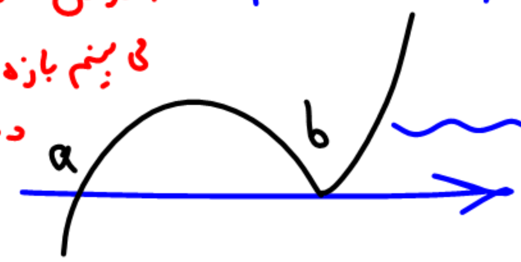
توی سراسری دو تا باره کلاً طراح از $y=(x-a)|x-b|$ خوشش میاد

$$y=(x-a)|x-b|=\begin{cases}-(x-a)(x-b) & x\le b\\ (x-a)(x-b) & x>b\end{cases}$$



با فرض $a<b$:

می بینیم بازه (۲,۳) که نزولی در مقدارش منفی است ندارد پس هیچ

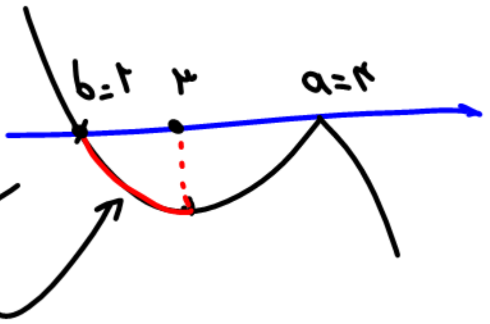


قسمت نزولی با مقدار منفی که اصلاً ندارد.

$a>b$ بوده

که بازه $x\in(۲,۳)$

که نزولی مقدار ⊖ است دارد



$|a-b|=|۴-۲|=۲$

۲۰. اگر $f(x) = x^3 + 2x - 30$ باشد، دامنهٔ تابع $y = \sqrt{f^{-1}(x) - x}$ شامل چند عدد طبیعی است؟

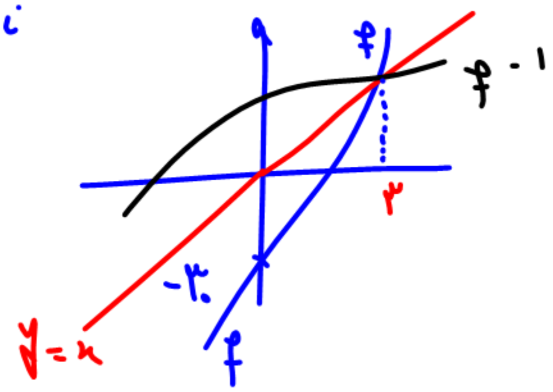
۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) صفر

$f^{-1}(x) - x \geq 0$

$f^{-1}(x) \geq x$

$f'(x) = 3x^2 + 2 > 0$

f اکیداً صعودیه



جاهایی (x هایی) را می‌خواهیم که f^{-1} بالاتر از $y=x$ باشد یعنی: ناحیه اول است.

محل برخورد f با $y=x$ را می‌یابیم:

$x^3 + 2x - 30 = x$

$x^3 + x - 30 = 0$

$x = 3$ حدس

یعنی در $x \leq 3$ تابع f^{-1} بالای $y=x$ است.

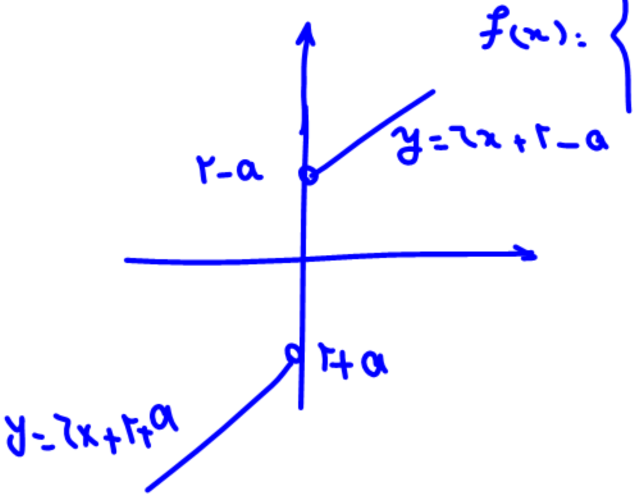
دامنه تابع داده شده $x \leq 3$ هست که شامل ۳ عدد طبیعی ۱، ۲، ۳ هست.

۲۱- تابع $f(x)=\frac{6x^2+2x-a|x|}{x}$ یک‌به‌یک است. حدود a کدام است؟

۱) $[0,+\infty)$ ۲) $[-1,+\infty)$ ۳) $(-\infty,0]$ ۴) $(-\infty,-1]$

تابع را ساده کنید:
$$f(x)=6x+2-a\frac{|x|}{x}$$

$$f(x)=\begin{cases}6x+2+a & x<0\\ 6x+2-a & x>0\end{cases}$$



$$2-a\geq 2+a$$
$$0\geq 2a$$
$$0\geq a$$

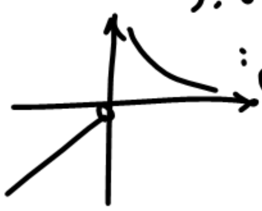
تابع دوضابطه‌ای وقتی یک به یک است که تک تک ضابطه‌ها یک به یک باشند و برد تک تک ضابطه‌ها اشتراک نداشته باشند و تابع کلاً "اکیداً یکنوا" باشد (اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی).

نکته: تابعی که اکیداً "یکنوا است" یک به یک است.

هر خط افقی تابع یک به یک را حداکثر یک بار قطع می‌کند.

هر تابع اکیداً یکنوا یک به یک و وارون پذیر است.

ممکن است تابع یک به یک باشد ولی اکیداً یکنوا نباشد مثل:



$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x} & x>0\\ x & x<0\end{cases}$$

یک تست معروف با رسم پا نوی کن کور

۲۲. به ازای کدام مقادیر a تابع $f(x) = ax + 1 + |3x - 3|$ یک‌به‌یک است؟

۱) $|a| > 2$ ۲) $|a| < 2$ ۳) $|a| > 3$ ۴) $|a| < 3$

$$f(x) = ax + 1 + |3x - 3|$$

$$f(x) = \begin{cases} ax + 1 - 3x + 3 = \underbrace{(a-3)}_{m_1}x + 4 & x < 1 \\ ax + 1 + 3x - 3 = \underbrace{(a+3)}_{m_2}x - 2 & x \geq 1 \end{cases}$$

$m_1 m_2 > 0$

تابع اکیداً یکنوا و یک به یک

$m_1 m_2 < 0$

تابع غیر یکنوا و غیر یک به یک

باید $m_1 m_2 > 0$

a		-3		3	
$(a-3)(a+3) > 0$	$+$	0	$-$	0	$+$

$a < -3$ یا $a > 3$

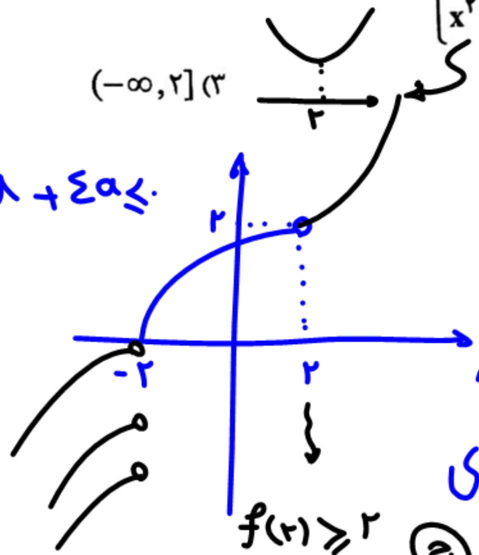
قشنگ

$x^2(x+a)$

چندضابطه‌ای‌ها را بکش

۲۳. حدود a برای آن‌که تابع $f(x)=\begin{cases} x^3+ax^2 & x<-2 \\ \sqrt{x+2} & -2\le x<2 \\ x^2-ax-2 & x\ge 2 \end{cases}$ یک‌به‌یک باشد، کدام است؟

۱) $(-\infty,0]$ ۲) $(-\infty,1]$ ۳) $(-\infty,2]$ ۴) $(-\infty,3]$



$\lim_{x\to -2} x^3+ax^2=-8+4a\le 0$

$4a\le 8$

(الف) $a\le 2$

چون ضابطه وسطی $\sqrt{x+2}$ اکیداً صعودیه کاری می‌کنیم که دو ضابطه دیگر نیز در بازه داده شده اکیداً صعودی باشند که کل تابع از اکید بودن نیفتد.

$f(2)\ge 2$ (ج)

$4-2a-2\ge 2$

$0\ge 2a$

$0\ge a$

کاری کن که راس سهمی $x=2$ یا راس سهمی قبل از $x=2$ رخ دهد که در $x\ge 2$ فقط صعودی باشد.

$x_s=-\frac{b}{2a}=\frac{a}{2}\le 2$

(ب) $a\le 4$

$\underbrace{(ج)\cap(الف)\cap(ب)}$

جواب نهایی

$\boxed{a\le 0}$

۲۴. اگر $f(x)=\dfrac{4^x-4^{-x}}{4^x+4^{-x}}$ باشد، مقدار $f^{-1}(-0/6)$ کدام است؟

۱) $-0/25$ ۲) $-0/5$ ۳) $-0/75$ ۴) -1

$f^{-1}(-0/6)=\alpha$

$-0/6=f(\alpha)$

$f(x)=\dfrac{4^x-4^{-x}}{4^x+4^{-x}}$, $t=4^x$

$-\dfrac{6}{10}=-\dfrac{3}{5}=\dfrac{t-\frac{1}{t}=\frac{t^2-1}{\cancel{t}}}{t+\frac{1}{t}=\frac{t^2+1}{\cancel{t}}}=\dfrac{t^2-1}{t^2+1}\longrightarrow 5t^2-5=-3t^2-3$

$8t^2=2$

$t^2=\dfrac{1}{4}$

$t=\pm\dfrac{1}{2}$

$\begin{cases}4^x=\dfrac{1}{2}\longrightarrow 2^{2x}=2^{-1}\longrightarrow 2x=-1\longrightarrow x=-\dfrac{1}{2}=-0/5\\ 4^x=-\dfrac{1}{2}\ \text{غ ق ق}\end{cases}$

$f^{-1}(-0/6)=-0/5$

a^x هرگز منفی نمی‌شود.

۲۵. با فرض $f(x) = x^۲ - ۴x + ۹ \; ; \; x \geq ۲$ و $g(x) = \frac{۳-x}{۲}$، حاصل $(gof)^{-۱}(-۹)$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

$-۹ = \frac{۳-x}{۲}$

$-۱۸ = ۳ - x$

$x = ۲۱$

$۲۱ = x^۲ - ٤x + ۹$

$۰ = x^۲ - ٤x - ۱۲$

$x = -۲ \; , \; ٦ \quad x \geq ۲$

$x = ٦$

نکته $(g \circ f)^{-۱} = f^{-۱} \circ g^{-۱}$

$(g \circ f)^{-۱}(-۹) = f^{-۱}\left(g^{-۱}(-۹) = ۲۱\right) = f^{-۱}(۲۱) = ٦$

۲۶. اگر f تابعی یک‌به‌یک و $f^{-1}(\frac{2}{3x-7}) = 4x - 9$ باشد، حاصل $f(-1)$ کدام است؟

۱) ۱   ۲) ۱−   ۳) ۲   ۴) ۲−

نکته:
ترکیب هر تابع با وارونش تابع همانی است.

$$f(f^{-1}(u)) = u$$

$$f^{-1}(f(u)) = u$$

$$f^{-1}\left(\frac{2}{3x-7}\right) = 4x - 9$$

از ۲ طرف f می‌گیریم:

$$f\left(f^{-1}\left(\frac{2}{3x-7}\right)\right) = f(4x-9)$$

$$\frac{2}{3x-7} = f(4x-9=-1)$$

$x=2$

$$\frac{2}{6-7=-1} = f(-1) \rightarrow f(-1) = -2$$

کنترل گزینه

گزینه ۴

$f^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{10}}\right)=1$ $\qquad$ $f(1)=\frac{2}{\sqrt{10}}$

۲۷ـ ضابطهٔ وارون تابع $f(x)=\frac{2x}{\sqrt{9x^2+1}}$ کدام است؟

۱) $f^{-1}(x)=\frac{2x}{\sqrt{9-4x^2}};|x|<\frac{3}{2}$

۲) $f^{-1}(x)=\frac{x}{\sqrt{9-4x^2}};|x|<\frac{3}{2}$

۳) $f^{-1}(x)=\frac{2x}{\sqrt{4-9x^2}};|x|<\frac{2}{3}$

۴) $f^{-1}(x)=\frac{x}{\sqrt{4-9x^2}};|x|<\frac{2}{3}$ ✓

$$f^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{10}}\right)=\frac{\frac{2}{\sqrt{10}}}{\sqrt{4-9\left(\frac{4}{10}\right)}}=\frac{\cancel{2}\cancel{\sqrt{5}}}{\sqrt{2}\sqrt{10}}=\frac{}{\cancel{\sqrt{2}}\sqrt{2}\cancel{\sqrt{5}}}$$

$$4-9\left(\frac{4}{10}\right)=4-9\left(\frac{2}{5}\right)=\frac{20-18}{5}=\frac{2}{5}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$$

بررسی بیشتر f

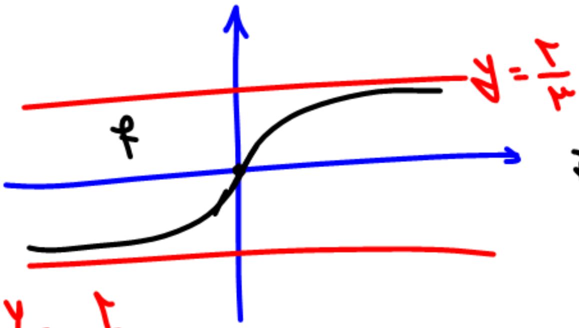
$$y=\frac{2x}{\sqrt{9x^2+1}}$$

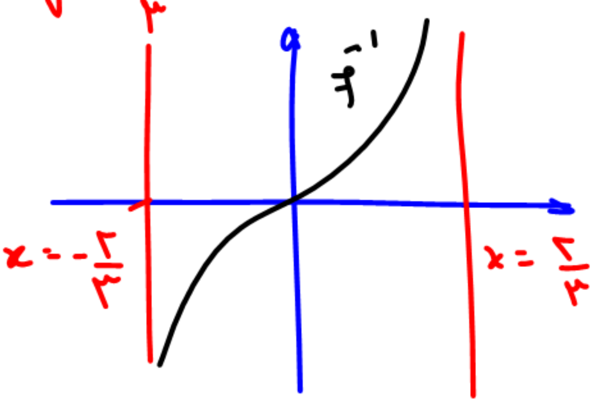
$$\lim_{x\to\pm\infty} y=\frac{2x}{\sqrt{9x^2}=3|x|}\begin{cases}x\to+\infty & y=\frac{2}{3}\\ x\to-\infty & y=-\frac{2}{3}\end{cases}$$

$$y \underset{x\to 0}{\overset{\text{هم‌ارزی}}{\sim}} \frac{2x}{1}=2x$$

$R_f\left(-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)=D_{f^{-1}}$

$D_f:\mathbb{R}=R_{f^{-1}}$





۲۸. ضابطهٔ وارون تابع $f(x)=\frac{۳x}{۲+|x|}$ کدام است؟

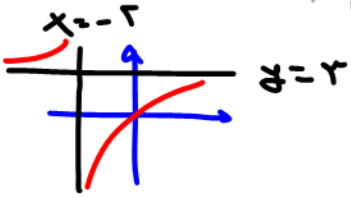
۱) $f^{-1}(x)=\frac{۲x}{۳-|x|}\,;\,|x|<۲$ ~~۱)~~

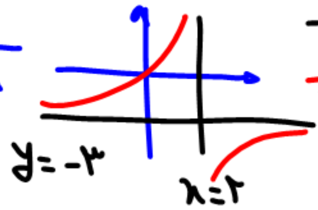
۲) $f^{-1}(x)=\frac{۲x}{۳-|x|}\,;\,|x|<۳$ ✓

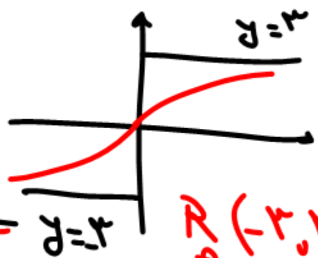
۳) $f^{-1}(x)=\frac{۳x}{۲-|x|}\,;\,|x|<۲$

۴) $f^{-1}(x)=\frac{۳x}{۲-|x|}\,;\,|x|<۳$

$$f(x)=\frac{۳x}{۲+|x|}\begin{cases} x\geq ۰ & y=\frac{۳x}{۲+x} \\ x<۰ & y=\frac{۳x}{۲-x}\end{cases}$$

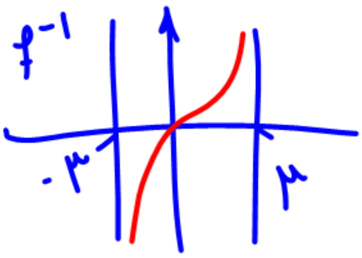






$R_f\,(-۳,۳)$

$D_{f^{-1}}\,(-۳,۳)$



$$f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}\rightarrow f^{-1}(x)=\frac{-dx+b}{cx-a}$$

$$f(x)=\frac{۳x}{x+۲}\rightarrow f^{-1}(x)=\frac{-۲x}{x-۳}$$

$$f(x)=\frac{۳x}{-x+۲}\rightarrow f^{-1}(x)=\frac{-۲x}{-x-۳}$$

$$f^{-1}(x)=\frac{۲x}{۳-|x|}$$

۲۹- اگر $f(x) = -x + \sqrt{-۲x}$ باشد، ضابطهٔ معکوس f کدام است؟

۱) $f^{-1}(x) = \sqrt{۲x+۱} + x - ۱ ; x \ge ۰$

۲) $f^{-1}(x) = \sqrt{۲x+۱} + x - ۱ ; x \ge -\frac{۱}{۲}$

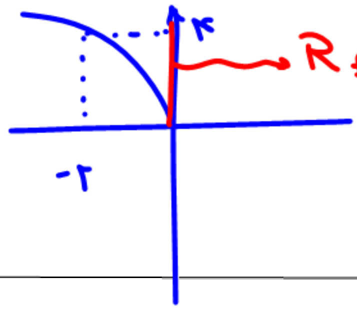
۳) $f^{-1}(x) = \sqrt{۲x+۱} - x - ۱ ; x \ge ۰$ ✓

۴) $f^{-1}(x) = \sqrt{۲x+۱} - x - ۱ ; x \ge -\frac{۱}{۲}$

$f(-۲) = ۲ + \sqrt{۴} = ۴$

$A(-۲ , ۴) \in f$

$A'(۴ , -۲) \in f^{-1}$



$R_f = D_{f^{-1}} : [۰ , +\infty)$

۳۰. اگر وارون تابع $f(x)=\dfrac{۴^{x}+۱}{۲^{۲x+۱}+۳}$ به صورت $f^{-۱}(x)=\log_{۲}\sqrt{\dfrac{۳x-a}{b-cx}}$ باشد، حاصل $a+b+c$ کدام است؟

۱) ۴   ۲) ۳   ۳) ۲   ۴) ۱

۳۱. قرینهٔ نمودار تابع $y = ۲ + \sqrt{x - ۱}$ را نسبت به خط $y = x$ رسم کرده و سپس نمودار حاصل را ۲ واحد در جهت مثبت محور xها و ۳ واحد در جهت منفی محور yها انتقال می‌دهیم و ان را $y = g(x)$ می‌نامیم. مقدار $g(۴)$ کدام است؟

۱) ۳
۲) ۳−
۳) ۲−
۴) ۴−

۳۲. نمودار منحنی $y = \sqrt{۴ - x}$ را k واحد به بالا و $k - ۲$ واحد به راست انتقال می‌دهیم.

منحنی جدید وارون تابع خود را در نقطه‌ای با عرض ۱ قطع می‌کند.

اگر منحنی جدید را ۱ واحد به پایین انتقال دهیم، طول نقطهٔ برخورد منحنی به دست آمده با محور xها، کدام است؟

۱) -۴ ۲) -۳ ۳) ۱ ۴) ۲

۳۳. تابع $y = ۲^{x+|x|}$ را ۳ واحد در امتداد محور xها در جهت منفی و سپس ۲ واحد در امتداد منفی محور yها انتقال می‌دهیم.

نمودار جدید محور xها را با کدام طول قطع می‌کند؟

۱) $-\frac{۵}{۲}$

۲) $-\frac{۳}{۲}$

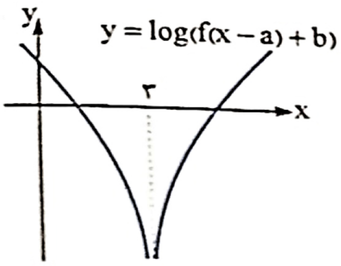
۳) $\frac{۵}{۲}$

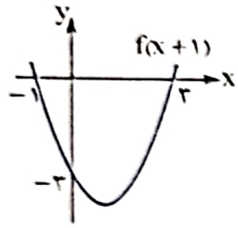
۴) $\frac{۷}{۲}$

۳۴. نمودار تابع $y = 2^{|\sin x|}$ را ابتدا به اندازهٔ $\frac{\pi}{2}$ در امتداد محور xها در جهت مثبت و سپس $\frac{3}{2}$ در امتداد محور yها در جهت منفی انتقال می‌دهیم. تعداد محل تقاطع نمودار حاصل با محور xها در فاصلهٔ $[0,\pi]$ کدام است؟

۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۳

۳۶- اگر نمودار $y = f(x+1)$ و $y = \log(f(x-a)+b)$ به صورت زیر باشند، $a+b$ کدام است؟





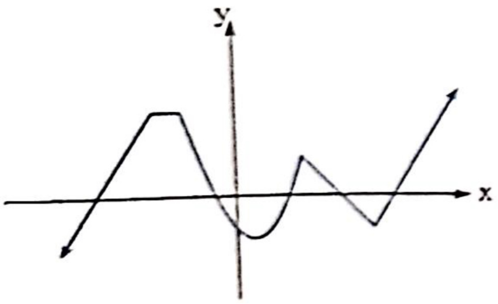
۱) ۳

۲) ۴

۳) ۵

۴) ۶

۳۷. نمودار تابع f به صورت مقابل رسم شده است. معادلات $f(|x|)=0$ ، $|f(x)|=0$ و $f(-|x|)=0$ به ترتیب چند ریشه دارند؟



۱) ۶ ـ ۵ ـ ۴

۲) ۷ ـ ۵ ـ ۲

۳) ۳ ـ ۵ ـ ۷

۴) ۵ ـ ۵ ـ ۵

۳۸. فرض کنید $[a,b]$ برد تابع $f(x)=۲^{-\sqrt{۵\sin^۲ x-۱}}$ باشد. مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{۵}{۴}$

۳۹ـ فرض کنید برد تابع $f(x)=2^{\sqrt[3]{9\cos^2 x-1}}-2^{\sqrt[3]{1-9\cos^2 x}}$ به صورت $[a,b]$ باشد، مقدار $b-a$ کدام است؟

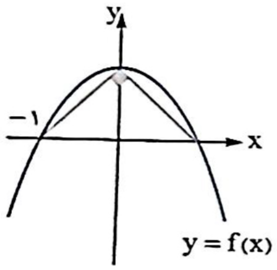
۱) $\frac{9}{4}$

۲) $\frac{15}{4}$

۳) $\frac{9}{2}$

۴) $\frac{21}{4}$

۴۰. نمودار سهمی f رسم شده است. برد تابع $y=\sqrt{\log_{۲} f(x-۱)}$ کدام است؟



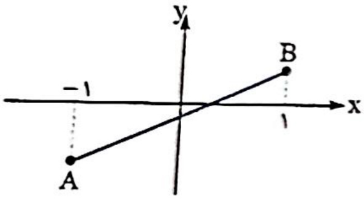
۱) $(۰,۱]$

۲) $[۰,۱]$

۳) $\{۰,۱\}$

۴) $\{۰\}$

۴۱. نمودار تابع f به صورت زیر است. اگر برد تابع $y=\frac{-۲}{f(۲x+۱)}$ به صورت $(-\infty,-\frac{۱}{۲}]\cup[۲,+\infty)$ باشد. طول خط AB کدام است؟



۱) $\sqrt{۲۷}$

۲) $\sqrt{۲۹}$

۳) $\sqrt{۳۱}$

۴) $\sqrt{۳۳}$

۴۲. اگر $f(x)=\frac{x^{۲}+۳x-۴+|x^{۲}-۴-۳x|}{۲}$ باشد، کم‌ترین مقدار تابع f کدام است؟

۱) -۱ ۲) -۲ ۳) -۳ ۴) -۴

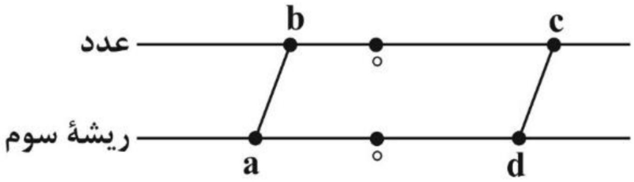
۱۰۱. با توجه به شکل زیر کدام گزینه الزاماً صحیح است؟

۱) $\sqrt{c} < \sqrt[5]{c}$

۲) $\sqrt{-b} > \sqrt[5]{-b}$

۳) $\sqrt[5]{b-d} > \sqrt[3]{b-d}$

۴) $\sqrt[3]{dc} < \sqrt[5]{dc}$



پاسخ : گزینه ۳

با توجه به اینکه $a = \sqrt[3]{b}$ و $a < b < \cdot$ داریم $b < \sqrt[3]{b}$ پس $-1 < b < \cdot$ و چون $d = \sqrt[3]{c}$ و $c > d > \cdot$ لذا $c < \sqrt[3]{c}$ پس $c > 1$ است.

باتوجه به اطلاعات زیر، به تشریح گزینه ها می پردازیم :

$$\begin{cases} -1 < b < \cdot \\ -1 < a < \cdot \\ c > 1 \\ d > 1 \end{cases}$$

تشریح گزینه ها :

گزینهٔ «۱» : $c > 1 \Rightarrow \sqrt{c} > \sqrt[5]{c}$

گزینهٔ «۲» : $-1 < b < \cdot \Rightarrow \cdot < -b < 1 \Rightarrow \sqrt{-b} < \sqrt[5]{-b}$

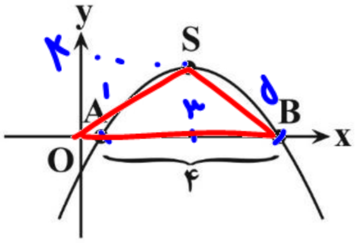
گزینهٔ «۳» : $\left.\begin{matrix} -1 < b < \cdot \\ d > 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow b - d < -1 \Rightarrow \sqrt[5]{b-d} > \sqrt[3]{b-d}$

گزینهٔ «۴» : $\left.\begin{matrix} c > 1 \\ d > 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow dc > 1 \Rightarrow \sqrt[3]{dc} > \sqrt[5]{dc}$

۱۰۲. نمودارتابع $y = ax^{۲} + bx - ۵$ به صورت زیر است.

اگر طول رأس برابر $x = ۳$ باشد، مساحت مثلث OSB چقدر است؟ (O مبدأ مختصات و S رأس است.)

۱) ۱۲ ۲) ۱۶ ۳) ۲۰ ۴) ۱۰



$y = a(x-1)(x-5)$

$f(0) = a(-1)(-5) = 5a = -5$

$a = -1$

$f(x) = -(x-1)(x-5)$

پاسخ : گزینه ۴

چون $x = ۳$ طول رأس است و با توجه به اینکه فاصلهٔ ریشه ها از یکدیگر ۴ است و ریشه ها نسبت به رأس متقارنند لذا ریشه ها $x = ۱$ و $x = ۵$ است و لذا به فرم $y = a(x-۱)(x-۵)$ می باشد، پس :

$$y = a(x-۱)(x-۵) = ax^۲ + bx - ۵$$
$$\Rightarrow a(x^۲ - ۶x + ۵) = ax^۲ - ۶ax + ۵a = ax^۲ + bx - ۵$$

پس $a = -۱$ و $b = +۶$ و معادله به فرم زیر است :

$$y = -x^۲ + ۶x - ۵ \xrightarrow{x_S = ۳} y_S = ۴$$

مختصات رأس به فرم (۴و۳) است حال داریم :

$$OSB \text{ مساحت مثلث } = \frac{x_B \times y_S}{۲} = \frac{۵ \times ۴}{۲} = ۱۰$$

۱۰۳. اگر S مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ $\dfrac{x^{۴}-۲۷x}{x+\dfrac{۱}{x}-۲} \leq ۰$ باشد، مجموع اعضای طبیعی مجموعه S چقدر است؟

۱) ۹ ۲) ۶ ۳) ۵ ۴) ۳

$$\frac{x^{۴}-۲۷x}{\left(\sqrt{x}-\frac{۱}{\sqrt{x}}\right)^{۲}} \leq ۰$$

$\left(\sqrt{x}-\frac{۱}{\sqrt{x}}\right)^{۲} > ۰ \to x \neq ۱$

$\left(\sqrt{x}-\frac{۱}{\sqrt{x}}\right)^{۲}$ $x \neq ۰$ $x > ۰$

$x^{۴}-۲۷x < ۰$

$x^{۴}-۲۷x \leq ۰$

$+\,x(x^{۳}-۲۷) \leq ۰$

$x^{۳}-۲۷ \leq ۰$ $x^{۳} \leq ۲۷$

$۰ < x \leq ۳$

$x = \cancel{۱}, ۲, ۳ \to ۲+۳=۵$

غ ق ق ریشه مضاعف

پاسخ : گزینه ۳

$$P=\frac{x^{۴}-۲۷x}{x+\frac{۱}{x}-۲}$$

با توجه به مخرج عبارت P ، داریم :

$x\neq •,۱$

$$P\leq • \Rightarrow \frac{x^{۴}-۲۷x}{x+\frac{۱}{x}-۲}\leq • \Rightarrow \frac{x(x^{۳}-۲۷)}{\frac{x^{۲}-۲x+۱}{x}}\leq • \Rightarrow \frac{x^{۲}(x^{۳}-۲۷)}{(x-۱)^{۲}}\leq •$$

x		•		۱		۳	
$x^{۲}$	+	∘	+		+		+
$x^{۳}-۲۷$	−		−		−	∘	+
$(x-۱)^{۲}$	+		+	∘	+		+
P	−	ت.ن	−	ت.ن	−	∘	+

پاسخ های طبیعی $:\{۲,۳\}\Rightarrow$ **مجموع** $:۲+۳=۵$

۱۰۴. نقطهٔ $A(x, y)$ روی منحنی $y = \sqrt{2x + 4}$ قرار دارد. اگر فاصلهٔ A از نقطهٔ $B\begin{vmatrix} -1 \\ 0 \end{vmatrix}$ برابر $x^2 + 4x + 3$ باشد، عرض نقطهٔ A کدام است؟

۱) $2\sqrt{3}$ ۲) $\sqrt[4]{12}$ ۳) ۹ ۴) ۳

پاسخ : گزینه ۲

نقطهٔ A **روی** $y=\sqrt{۲x+۴}$ **قرار دارد، بنابراین مختصات آن به صورت** $A(x,\sqrt{۲x+۴})$ **است.**

$$AB = x^۲ + ۴x + ۳ \Rightarrow \sqrt{(x+۱)^۲ + ۲x + ۴} = x^۲ + ۴x + ۳$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^۲ + ۲x + ۱ + ۲x + ۴} = x^۲ + ۴x + ۳$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^۲ + ۴x + ۵} = x^۲ + ۴x + ۳ \xrightarrow{x^۲+۴x+۵=A}$$

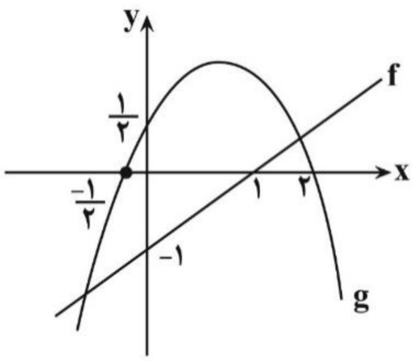
$$\sqrt{A} = A - ۲ \Rightarrow A = A^۲ - ۴A + ۴ \Rightarrow A^۲ - ۵A + ۴ = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = ۱ \quad \text{غ ق ق (باتوجه به } \sqrt{A} = A - ۲ \text{ باید } A \geq ۲ \text{ باشد.)} \\ A = ۴ = x^۲ + ۴x + ۵ \\ x^۲ + ۴x + ۱ = ۰ \Rightarrow x = -۲ \pm \sqrt{۳} \end{cases}$$

اما چون $x=-۲-\sqrt{۳}$ **در** $y=\sqrt{۲x+۴}$ **تعریف نشده است، فقط** $x=-۲+\sqrt{۳}$ **قابل قبول است :**

$$\Rightarrow y = \sqrt{۲x+۴} = \sqrt{۲(-۲+\sqrt{۳})+۴} = \sqrt{۲\sqrt{۳}} = \sqrt[۴]{۱۲}$$

۱۰۵. نمودار تابع خطی f و تابع درجهٔ دوم g به صورت مقابل است. حاصل $\lim_{x\to ۲}\frac{f(x)-۱}{g(x)}$ کدام است؟



۱) $\frac{-۱}{۲}$

۲) -۲

۳) $\frac{-۲}{۳}$

۴) $\frac{-۴}{۵}$

پاسخ : گزینه ۴

ابتدا ضابطهٔ توابع f و g را به دست آورده و سپس حاصل حد مدنظر را می یابیم :

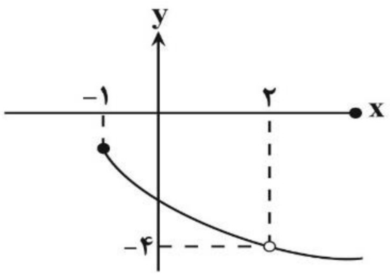
$$f(x) = x - ۱$$

$$g(x) = a(x + \frac{۱}{۲})(x - ۲) \xrightarrow{(\cdot, \frac{۱}{۲}) \in g} \frac{۱}{۲} = a(\frac{۱}{۲})(-۲) \Rightarrow a = -\frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow g(x) = \frac{-۱}{۲}(x + \frac{۱}{۲})(x - ۲)$$

$$\lim_{x \to ۲} \frac{f(x) - ۱}{g(x)} = \lim_{x \to ۲} \frac{x - ۲}{\frac{-۱}{۲}(x + \frac{۱}{۲})(x - ۲)} = \lim_{x \to ۲} \frac{۱}{\frac{-۱}{۲}(x + \frac{۱}{۲})} = \frac{-۴}{۵}$$

۱۰۶. شکل مقابل نمودار تابع $f(x)=\dfrac{ax+b}{\sqrt{cx+۳}+d}$ است. حاصل $ab-cd$ کدام است ؟



۱) صفر　　　　۲) ۱

۳) ۲　　　　۴) ۳

پاسخ : گزینه ۲

۱. دامنهٔ تابع در نمودار : $x \geq -۱ \Rightarrow cx + ۳ = ۰ \xrightarrow{x=-۱} c = ۳$

۲. صورت و مخرج را صفر می کند : $(x = ۲): \begin{cases} ax + b = ۰ \Rightarrow ۲a + b = ۰ \\ \Rightarrow b = -۲a \\ \sqrt{۳x + ۳} + d = ۰ \\ d = -۳ \end{cases}$

۳. حد تابع در $x = ۲$ برابر ۴- است : $\lim\limits_{x \to ۲} \dfrac{ax - ۲a}{\sqrt{۳x + ۳} - ۳} = -۴ \Rightarrow \lim\limits_{x \to ۲} \dfrac{a(x - ۲)}{\sqrt{۳x + ۳} - ۳} = -۴$

برای رفع ابهام کسر، در مزدوج مخرج ضرب و تقسیم می کنیم :

$$\lim_{x \to ۲} \frac{a(x - ۲) \times (\sqrt{۳x + ۳} + ۳)}{\underbrace{۳x + ۳ - ۹}_{۳x-۶}} = -۴$$

$$\lim_{x \to ۲} \frac{a(\sqrt{۳x + ۳} + ۳)}{۳} = -۴$$

$$\Rightarrow \frac{a(\sqrt{۹} + ۳)}{۳} = -۴ \Rightarrow a = -۲ \ , \ b = ۴$$

$$ab - cd = (-۲)(۴) - (۳)(-۳) = -۸ + ۹ = ۱$$

۱۰۷. برای دو پیشامد A و B داریم : $P(A'|B)+P(A)=۱$, $P(B'|A)=\frac{۱}{۳}$ و $P(A'\cup B)=\frac{۱۱}{۱۲}$ مقدار $P(A)$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

پاسخ : گزینه ۱

$$P(A'|B)+P(A)=۱ \Rightarrow P(A'|B)=P(A')$$

پس پیشامد A' و B مستقل هستند.

نکته : اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند متمم های آن ها هم نسبت به هم مستقل هستند.

$$\Rightarrow P(B'|A)=P(B') \Rightarrow P(B')=\frac{۱}{۳} \Rightarrow P(B)=\frac{۲}{۳}$$

$$P(A' \cup B)=\frac{۱۱}{۱۲} \Rightarrow P(A')+P(B)-P(A')P(B)=\frac{۱۱}{۱۲}$$

$$P(A')-\frac{۲}{۳}P(A')=\frac{۱۱}{۱۲}-\frac{۲}{۳} \Rightarrow \frac{۱}{۳}P(A')=\frac{۳}{۱۲} \Rightarrow P(A')=\frac{۳}{۴}$$

$$P(A)=\frac{۱}{۴}$$

۱۰۸. واریانس ۱۰ دادهٔ آماری صفر است. اگر داده های ۹و۹و۹و۹ به آن ها اضافه شود، میانگین ٪۲۰ کاهش می یابد. واریانس داده های جدید چقدر است؟

۱) ۹۰ ۲) ۸۸ ۳) ۹۲ ۴) ۸۰

پاسخ : گزینه ۱

از اینکه واریانس صفر است پس همهٔ داده ها مساوی هستند.

$$\bar{x}_{\text{جدید}} = \frac{۱۰x + ۹ + ۹ + ۹ + ۹}{۱۴} = \frac{۴}{۵}\bar{x} \Rightarrow ۱۰\bar{x} + ۳۶ = ۱۱/۲\bar{x}$$

$$\Rightarrow ۱/۲\bar{x} = ۳۶ \Rightarrow \bar{x} = ۳۰$$

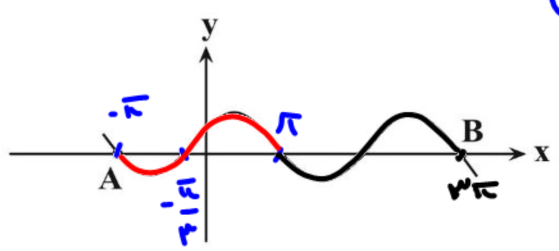
$$\underbrace{۳۰, ۳۰, ۳۰, \ldots, ۳۰, ۹, ۹, ۹, ۹}, \quad \bar{x}_{\text{جدید}} = \frac{۴}{۵} \times ۳۰ = ۲۴$$

$$\sigma^۲ = \frac{۱۰ \times (۶)^۲ + ۴ \times (۱۵)^۲}{۱۴} = \frac{۳۶۰ + ۹۰۰}{۱۴} = ۹۰$$

۱۰۹. شکل زیر قسمتی از نمودار $f(x)=۱+۲\cos(\frac{\pi}{۳}-x)$ است. مقدار x_A+x_B کدام است ؟

$T = ۲\pi$

$-\pi + ۳\pi$



$\cos(\frac{\pi}{۳}-x) = -\frac{۱}{۲}$

۱) $\frac{۱}{۲}\pi$ ۲) $\frac{۳}{۲}\pi$

۳) ۲π ۴) π

$\frac{\pi}{۳} - x = ۲k\pi \pm \frac{۲\pi}{۳}$

$\frac{\pi}{۳} - x = \frac{۲\pi}{۳} \rightsquigarrow x = -\frac{\pi}{۳}$

$\frac{\pi}{۳} - x = \frac{۴\pi}{۳} \rightsquigarrow x = -\pi$

$k = 0 \to \frac{\pi}{۳} - x = -\frac{۲\pi}{۳}$

$\pi = x$

$k = 1 \to \frac{\pi}{۳} - x = ۲\pi - \frac{۲\pi}{۳} = \frac{۴\pi}{۳} \to -\pi = x$

$\frac{\pi}{۳} - x = ۲\pi + \frac{۲\pi}{۳} \longrightarrow \frac{\pi}{۳} - \frac{۸\pi}{۳} = x$

پاسخ : گزینه ۳

$$y = ۱ + ۲\cos(\frac{\pi}{۳} - x) = • \Rightarrow \cos(\frac{\pi}{۳} - x) = \frac{-۱}{۲}$$

اولین ریشهٔ منفی $: \cos(\frac{\pi}{۳} - x) = \cos\frac{۲\pi}{۳} \Rightarrow \frac{\pi}{۳} - x = \frac{۲\pi}{۳} \Rightarrow x = -\frac{\pi}{۳}$

دومین ریشهٔ منفی $: \cos(\frac{\pi}{۳} - x) = \cos\frac{۴\pi}{۳} \Rightarrow \frac{\pi}{۳} - x = \frac{۴\pi}{۳} \Rightarrow x_A = -\pi$

$$\Rightarrow x_B = ۲(۲\pi) - \pi = ۳\pi$$

$$\Rightarrow x_A + x_B = ۲\pi$$

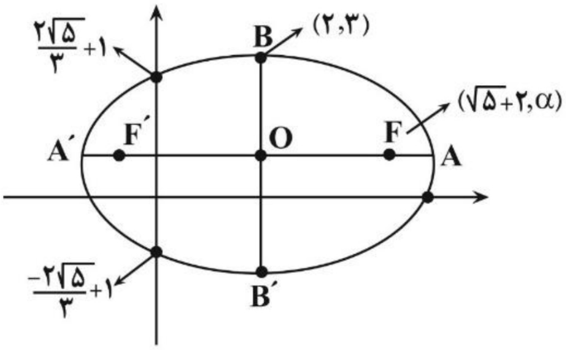
۱۱۰. در بیضی افقی زیر، Oمرکز بیضی و مختصات یکی ازکانون ها، یکی از رئوس غیرکانونی و محل برخورد بیضی با محور yها داده شده است. بیضی از هریک از خطوط $۲x - ۳y = ۷$ و $۳y + ۲x = ۱$ ، یک وتر جدا می کنند. مجموع اندازهٔ این دو وتر کدام است؟

۱) ۸

۲) $۲\sqrt{۱۰}$

۳) $۲\sqrt{۱۳}$

۴) $۴\sqrt{۵}$



$c = \sqrt{۵}$

$b = ۲$

$a^۲ = b^۲ + c^۲$

$a^۲ = ۴ + ۵$

$a = ۳$

پاسخ : گزینه ۳

$$y_O=\frac{(\frac{۲\sqrt{۵}}{۳}+۱)+(\frac{-۲\sqrt{۵}}{۳}+۱)}{۲}=۱\Rightarrow O(۲,۱)$$

$$b=OB=۲$$

$$c=OF=\sqrt{۵}+۲-۲=\sqrt{۵}$$

$$\Rightarrow a^۲=b^۲+c^۲\Rightarrow a^۲=۲^۲+(\sqrt{۵})^۲=۹\Rightarrow a=۳$$

$$\Rightarrow\begin{cases}A(۲+۳,۱)\Rightarrow A(۵,۱)\\ A'(۲-۳,۱)\Rightarrow A'(-۱,۱)\\ B'(۲,۱-۲)\Rightarrow B'(۲,-۱)\end{cases}$$

معادلهٔ خط گذرنده از A و B' را حساب می کنیم.

$$m_{AB'}=\frac{۱+۱}{۵-۲}=\frac{۲}{۳}\Rightarrow y-۱=\frac{۲}{۳}(x-۵)$$

$$\Rightarrow ۳y-۳=۲x-۱۰\Rightarrow ۲x-۳y=۷$$

حال معادلهٔ خط گذرنده از A' و B' را حساب می کنیم.

$$m_{A'B'}=\frac{۱+۱}{-۱-۲}=\frac{-۲}{۳}\Rightarrow y-۱=\frac{-۲}{۳}(x+۱)$$

$$\Rightarrow ۳y-۳=-۲x-۲\Rightarrow ۳y+۲x=۱$$

مشاهده می کنیم خطوط بدست آمده همان خطوط مورد نظر سوال هستند. پس پاره خط های موردنظرشان AB' و $A'B'$ هستند. طول این دو پاره خط را محاسبه می کنیم.

$$AB'=\sqrt{(۵-۲)^۲+(۱+۱)^۲}=\sqrt{۱۳}$$

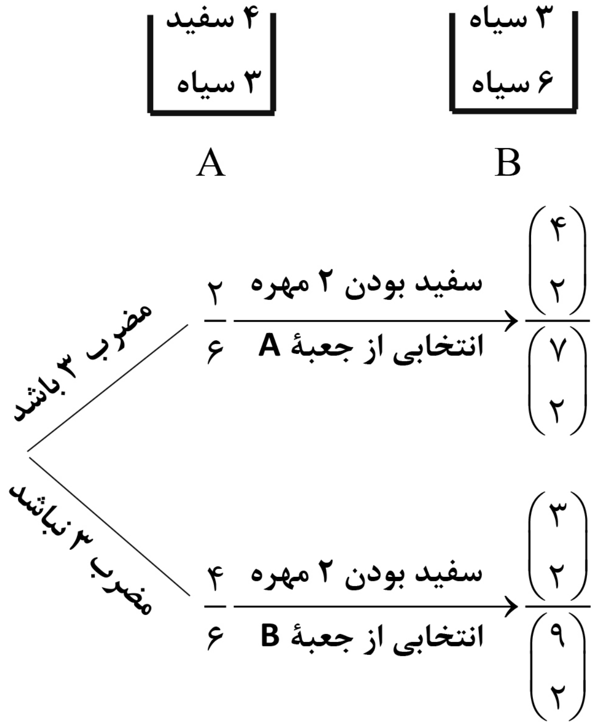
$$A'B'=\sqrt{(۲+۱)^۲+(-۱-۱)^۲}=\sqrt{۱۳}$$

$$AB'+A'B'=۲\sqrt{۱۳}$$

۱۱۱. در جعبهٔ A ، ۴ مهرهٔ سفید و ۳ مهرهٔ سیاه و در جعبهٔ B، ۳ مهرهٔ سفید و ۶ مهرهٔ سیاه موجود است. تاسی را پرتاب می کنیم. اگرعدد رو شده مضرب ۳ باشد، دو مهره از جعبهٔ A در غیراین صورت دو مهره از جعبهٔ B خارج می کنیم. احتمال اینکه هر دو مهره سفید باشد، چقدر است؟

۱) $\frac{۱۹}{۱۲۶}$ ۲) $\frac{۱۹}{۱۱۲}$ ۳) $\frac{۱۷}{۱۲۶}$ ۴) $\frac{۱۷}{۱۱۲}$

پاسخ : گزینه ۱

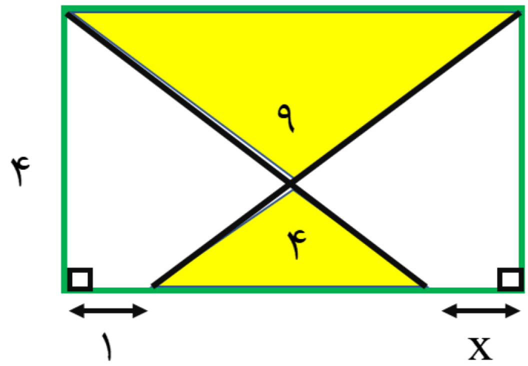


$$\Rightarrow P=\frac{۲}{۶}\times\frac{\binom{۴}{۲}}{\binom{۷}{۲}}+\frac{۴}{۶}\times\frac{\binom{۳}{۲}}{\binom{۹}{۲}}=\frac{۱}{۳}\times\frac{۶}{۲۱}+\frac{۲}{۳}\times\frac{۳}{۳۶}=\frac{۲}{۲۱}+\frac{۱}{۱۸}\Rightarrow\frac{۱۲+۷}{۱۲۶}=\frac{۱۹}{۱۲۶}$$

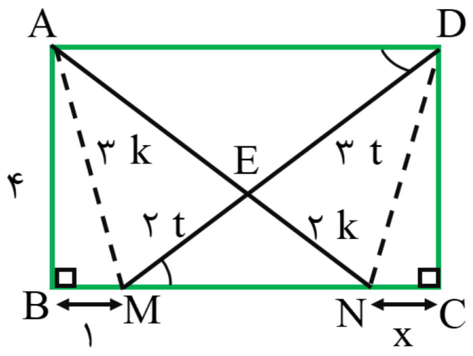
۱۱۲. در مستطیل زیر، مساحت ناحیه های رنگی مشخص شده است. اگر مساحت مستطیل ۴۱ واحد باشد، مقدار x کدام است؟

۱) ۳　　۲) ۶

۳) ۷　　۴) ۵



پاسخ : گزینه ۳



$$\overset{\Delta}{ADE} \sim \overset{\Delta}{MEN} \xrightarrow{\text{نسبت تشابه}} \left(\frac{AE}{EN}\right)^{۲} = \frac{S_{\overset{\Delta}{ADE}}}{S_{\overset{\Delta}{MEN}}} = \frac{۹}{۴}$$

(پاپیونی با ضلع موازی)

پس $\frac{AE}{EN} = \frac{۳}{۲}$ و لذا $AE = ۳k$ و $EN = ۲k$ و به دلیل تشابه :

$$DE = ۳t \quad , \; ME = ۲t$$

حالا :

$$\frac{S_{\overset{\Delta}{ADE}}}{S_{\overset{\Delta}{DEN}}} = \frac{۳k}{۲k}$$ (آخه ارتفاع های یکسان دارند.)

$$\Rightarrow \frac{۳}{۲} = \frac{۹}{S_{\overset{\Delta}{DEN}}} \Rightarrow S_{\overset{\Delta}{DEN}} = ۶$$

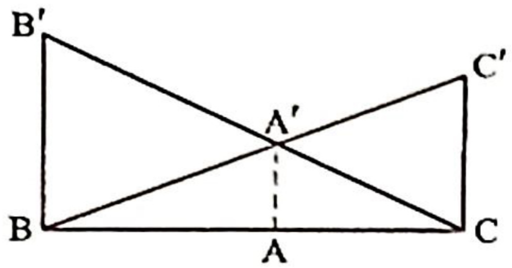
به همین طریق :

$$S_{\overset{\Delta}{AEM}} = ۶ \xrightarrow{\text{فرض}} S_{ABCD} = ۴۱$$

$$\Rightarrow S_{\overset{\Delta}{ABN}} + S_{\overset{\Delta}{DNC}} + ۹ + ۴ + ۶ + ۶ = ۴۱$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۲}(۱)(۴) + \frac{۱}{۲}(x)(۴) = ۱۶ \Rightarrow ۲x = ۱۴ \Rightarrow x = ۷$$

۱۱۳. پاره خط های AA' , BB' , CC' موازی اند. حاصل $\frac{۱}{CC'}+\frac{۱}{BB'}$ برابر کدام گزینه است ؟



۱) AA' ۲) $\frac{۱}{AA'}$

۳) $B'C'$ ۴) BC

پاسخ : گزینه ۲

$$AA' \| BB' \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{AA'}{BB'} = \frac{AC}{BC} \xrightarrow{\div AA'}$$

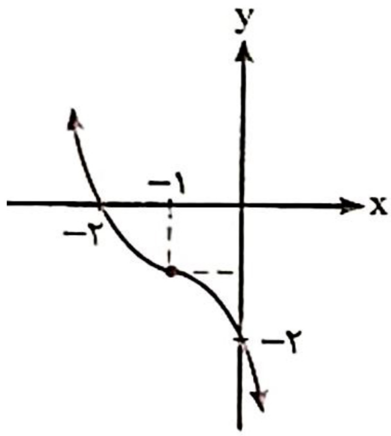
$$\frac{۱}{BB'} = \frac{AC}{AA' \times BC} \qquad (۱)$$

$$AA' \| CC' \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{AA'}{CC'} = \frac{AB}{BC} \xrightarrow{\div AA'}$$

$$\frac{۱}{CC'} = \frac{AB}{AA' \times BC} \qquad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۱)+(۲)} \frac{۱}{BB'} + \frac{۱}{CC'} = \frac{AC + AB}{AA' \times BC} = \frac{BC}{AA' \times BC} = \frac{۱}{AA'}$$

۱۱۴. شکل مقابل تبدیل یافتهٔ $y = x^{۳}$ است. که آن را f می نامیم.



مقدار $fof(-\frac{۱}{۲})$ کدام است؟

۱) $-\frac{۵۱۱}{۵۱۲}$ **۲)** $-\frac{۲۵۵}{۲۵۶}$

۳) $\frac{۲۵۵}{۲۵۶}$ **۴)** $\frac{۵۱۱}{۵۱۲}$

پاسخ : گزینه ۱

$\begin{array}{l} x_s \\ y_s \end{array}$ مرکز تقارن

$$y = x^{۳} \ ((\circ,\circ) = \text{مرکز تقارن}) \xrightarrow{\text{تبدیل}}$$

$$y = f(x)((-۱,\beta) = \text{مرکز تقارن})$$

$$\Rightarrow f(x) = a(x+۱)^{۳} + b$$

$y = a(x - x_s)^{۳} + y_s$

$y = a(x+1)^{۳} + b$

$$\left.\begin{array}{l} (۱) \quad f(-۲) = \circ \Rightarrow a(-۱)^{۳} + b = \circ \Rightarrow -a + b = \circ \\ (۲) \quad f(\circ) = -۲ \Rightarrow a(۱)^{۳} + b = -۲ \Rightarrow a + b = -۲ \end{array}\right\}$$

$$\xrightarrow{\text{حل دستگاه}} a = b = -۱$$

$$\xrightarrow{\text{جایگذاری}} f(x) = -(x+۱)^{۳} - ۱$$

$$(fof)(-\frac{۱}{۲}) = f(f(-\frac{۱}{۲}))$$

$$f(-\frac{۱}{۲}) = -(\frac{۱}{۲})^{۳} - ۱ = -\frac{۹}{۸} \Rightarrow f(-\frac{۹}{۸}) = -(-\frac{۱}{۸})^{۳} - ۱ = \frac{۱}{۵۱۲} - ۱ = -\frac{۵۱۱}{۵۱۲}$$

۱۱۵. در معادلهٔ $۲\log_{۳}(x-۱)+\log_{۳}\frac{۴}{x}=\log_{۳}(۲x-\frac{۷}{۳})$ **حاصل ضرب جواب ها کدام است؟**

۱) ۱ **۲)** ۲ **۳)** $\frac{۱}{۲}$ **۴)** ۳

پاسخ : گزینه ۲

$$۲\log_۳(x-۱)+\log_۳\frac{۴}{x}=\log_۳(۲x-\frac{۷}{۳})$$

$$\xrightarrow{\text{ضریب رو بده توان}}\log_۳(x-۱)^۲+\log_۳\frac{۴}{x}=\log_۳(۲x-\frac{۷}{۳})\xrightarrow{\text{جمع رو تبدیل به لگاریتمِ ضرب کن}}$$

$$\log_۳(x-۱)^۲\times\frac{۴}{x}=\log_۳(۲x-\frac{۷}{۳})$$

$$\xrightarrow[\text{دو طرف خط بزن}]{\text{log ها رو از}}\frac{۴(x-۱)^۲}{x}=۲x-\frac{۷}{۳}$$

$$\xrightarrow{\times x}۴(x-۱)^۲=۲x^۲-\frac{۷}{۳}x$$

$$\xrightarrow[\text{رو باز کن}]{\text{اتحاد}}۴x^۲-۸x+۴=۲x^۲-\frac{۷}{۳}x\xrightarrow{\times ۳}$$

$$۱۲x^۲-۲۴x+۱۲=۶x^۲-۷x\xrightarrow[\text{ساده کن}]{\text{مرتب و}}۶x^۲-۱۷x+۱۲=۰$$

$$\xrightarrow[\Delta=۱]{\text{حل معادله}}x=\frac{۱۷\pm۱}{۱۲}=\xrightarrow{\text{ساده کن}}x=\frac{۳}{۲},\frac{۴}{۳}$$

$$\xrightarrow{\text{بررسی دامنه}}\text{هر دو قابل قبول اند}\xrightarrow{\text{ضرب}}\frac{۳}{۲}\times\frac{۴}{۳}=۲$$

۱۱۶. حاصل $\lim_{x \to ۴} \frac{۲x^{۲} - ۷x - ۴}{\sqrt[۳]{۲\sqrt{x} - ۳} - ۱}$ **کدام است؟**

۱) ۲۷ **۲)** ۵۴ **۳)** ۶۴ **۴)** ۳۶

پاسخ : گزینه۲

اگر به جای x در صورت و مخرج ، عدد ۴ را بگذارید، شاهد ابهام $\frac{0}{0}$ هستید! از قاعدهٔ هوپیتال داریم :

$$\lim_{x\to ۴}\frac{۲x^{۲}-۷x-۴}{\sqrt[۳]{۲\sqrt{x}-۳}-۱}\xrightarrow{\text{HOP}}\lim_{x\to ۴}\frac{۴x-۷}{\frac{\frac{۱}{\sqrt{x}}}{۳\sqrt[۳]{(۲\sqrt{x}-۳)^{۲}}}-0}=\frac{۹}{\frac{\frac{۱}{۲}}{۳\times ۱}}=۵۴$$

۱۱۷. تابع f با ضابطهٔ $f(x)=[-\frac{x}{۲}]a+۲x+[x]$ در بازهٔ $(-۴,-۳]$ پیوسته است. مقدار a کدام است؟

۱) صفر　　　۲) ۱　　　۳) ۱−　　　۴) ۲−

پاسخ : گزینه ۱

باید تابع در نقطهٔ $x=-۴$ پیوستگی راست داشته باشد و در کل بازهٔ (۳- و ۴-) هم پیوسته باشد.

شرط دوم حتماً برقرار هست، چون در این بازه هیچ x ای نداریم که داخل براکت را تبدیل به عددی صحیح کند.

حالا شرط اولی :

حد راست :
$$\lim_{x\to -۴^+}[-\frac{x}{۲}]a+۲x+[x]\xrightarrow[\text{جایگذاری کن}]{x\simeq -۳/۹۹۹}[-\frac{-۳/۹۹۹}{۲}]a+۲(-۴)+[-۳/۹۹۹]$$
$$=[۱/۹۹۹]a-۸-۴=a-۱۲\quad (۱)$$

مقدار : (۲)
$$f(-۴)=[-\frac{(-۴)}{۲}]a+۲(-۴)+[-۴]=[۲]a-۸-۴=۲a-۱۲\quad (۲)$$

از تساوی (۱) و (۲) داریم : $۲a-۱۲=a-۱۲\Rightarrow a=۰$

توجه کنید جاهایی که براکت نداریم، همان عددگذاری معمولی می کنیم.

۱۱۸. در داده های آماری ۱۵، ۱۷، ۱۶، ۱۴، ۹، ۱۱، ۱۲، ۱۵، ۱۸، ۱۴ و ۱۱ انحراف معیار داده های بین چارک اول و سوم تقریباً کدام است؟

۱) ۱/۱ ۲) ۱/۲ ۳) ۱/۲۵ ۴) ۱/۳

پاسخ : گزینه ۱

داده ها را از کوچک به بزرگ مرتب می کنیم :

$$\underset{}{۹}\ ,\ ۱۱\ ,\ \underset{\underset{Q_۱}{\downarrow}}{۱۱}\ ,\ ۱۲\ ,\ ۱۴\ ,\ \underset{\underset{Q_۲}{\downarrow}}{۱۴}\ ,\ ۱۵\ ,\ ۱۵\ ,\ \underset{\underset{Q_۳}{\downarrow}}{۱۶}\ ,\ ۱۷\ ,\ ۱۸$$

پس باید انحراف معیار داده های زیر را محاسبه کنیم.

می دانیم که اگرعددی را از همهٔ داده های آماری کم کنیم، انحراف معیار تغییری نمی کند، پس :

$$۱۲\ ,\ ۱۴\ ,\ ۱۴\ ,\ ۱۵\ ,\ ۱۵ \xrightarrow{-۱۴} -۲\ ,\ ۰\ ,\ ۰\ ,\ ۱\ ,۱$$

$$\bar{x} = \frac{-۲+۰+۰+۱+۱}{۵} = ۰$$

$$\sigma^۲ = \frac{(x_۱-\bar{x})^۲ + \ldots + (x_n-\bar{x})^۲}{n}$$

$$= \frac{(-۲)^۲ + ۰^۲ + ۰^۲ + ۱^۲ + ۱^۲}{۵} = \frac{۶}{۵} = ۱/۲$$

$$\Rightarrow \sigma = \sqrt{۱/۲} \simeq \sqrt{۱/۲۱} = ۱/۱$$

۱۱۹. اعداد ۱ تا ۷ را روی کارت هایی نوشته و سه کارت تصادفی خارج می کنیم. اگر مجموع اعداد روی کارت ها فرد باشد، با کدام احتمال هر سه عدد فرد بوده اند؟

۱) $\frac{۲}{۱۵}$ **۲)** $\frac{۱}{۴}$ **۳)** $\frac{۱}{۸}$ **۴)** $\frac{۳}{۴}$

پاسخ : گزینه ۲

اگر هر سه فرد باشند، خود به خود مجموع فرد می شود.

$$P(\text{مجموع فرد} \mid \text{هر سه فرد})$$

$$= \frac{n(\text{مجموع فرد و هر سه فرد})}{n(\text{مجموع فرد})} = \frac{n(\text{هر سه فرد})}{n(\text{مجموع فرد})}$$

$$= \frac{\binom{۴ \to \{۱,۳,۵,۷\}}{۳}}{n(\text{هر سه فرد}) + n(\text{دو تا زوج و یکی فرد})}$$

یا

$$= \frac{\binom{۴}{۳}}{\binom{۴}{۳} + \binom{۴}{۱}\binom{۳ \to \{۲,۴,۶\}}{۲}} \xrightarrow{\text{ساده کن}} \frac{۴}{۴+۱۲} = \frac{۱}{۴}$$

۱۲۰. حاصل $\tan^{۲}\frac{\pi}{۱۶}+\tan^{۲}\frac{۲\pi}{۱۶}+\ldots+\tan^{۲}\frac{۷\pi}{۱۶}$ کدام است؟

۱) ۳۳ ۲) ۳۴ ۳) ۳۵ ۴) ۳۶

پاسخ : گزینه ۳

راهبرد :

$\tan\alpha + \cot\alpha = \dfrac{1}{\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{2}\sin 2\alpha} = \dfrac{2}{\sin 2\alpha}$

به توان دو

$\tan^2\alpha + \cot^2\alpha + 2\cancel{\tan\alpha\cot\alpha} = \dfrac{4}{\sin^2 2\alpha}$

$$\tan^{۲}\alpha + \tan^{۲}(\frac{\pi}{۲} - \alpha) = \frac{۴}{\sin^{۲} ۲\alpha} - ۲$$

$$(\tan^{۲}\frac{\pi}{۱۶} + \tan^{۲}\frac{۷\pi}{۱۶}) + (\tan^{۲}\frac{۲\pi}{۱۶} + \tan^{۲}\frac{۶\pi}{۱۶}) + (\tan^{۲}\frac{۳\pi}{۱۶} + \tan^{۲}\frac{۵\pi}{۱۶}) + \tan^{۲}\frac{۴\pi}{۱۶}$$

$$= (\frac{۴}{\sin^{۲}\frac{\pi}{۸}} - ۲) + (\frac{۴}{\sin^{۲}\frac{\pi}{۴}} - ۲) + (\frac{۴}{\sin^{۲}\frac{۳\pi}{۸}} - ۲) + ۱ = ۴(\frac{۱}{\sin^{۲}\frac{\pi}{۸}} + \frac{۱}{\sin^{۲}\frac{۳\pi}{۸}})$$

$$+ \frac{۴}{(\frac{\sqrt{۲}}{۲})^{۲}} - ۲ - ۲ - ۲ + ۱$$

$\left.\begin{matrix}\frac{3\pi}{8}\\ \frac{\pi}{8}\end{matrix}\right\}$ مجموع $= \frac{4\pi}{8} = \frac{\pi}{2}$

$\sin\frac{3\pi}{8} = \cos\frac{\pi}{8}$

$\sin^2\frac{3\pi}{8} = \cos^2\frac{\pi}{8}$

$$= ۴(\frac{۱}{\sin^{۲}\frac{\pi}{۸}} + \frac{۱}{\cos^{۲}\frac{\pi}{۸}}) + ۳$$

$$= ۴(\frac{۱}{\sin^{۲}\frac{\pi}{۸}\cos^{۲}\frac{\pi}{۸}}) + ۳ \xrightarrow{\text{فرمول } ۲\alpha}$$

$\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{2}\sin 2\theta$

$\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}\sin(\frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4})$

$\sin^2\frac{\pi}{8}\cos^2\frac{\pi}{8} = \frac{1}{4}\sin^2(\frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4})$

$$\frac{۴}{(\frac{۱}{۲}\sin\frac{۲\pi}{۸})^{۲}} + ۳ = \frac{۴}{(\frac{\sqrt{۲}}{۴})^{۲} = \frac{1}{8}} + ۳ = ۳۵$$

۱۲۱. هرگاه $f(x)=\dfrac{x^{۳}}{\underbrace{۳x-۳x^{۲}}\underbrace{-۱}}$ ، آن گاه معادلهٔ $f(\alpha)+f(۱-\alpha)=x^{۲}$ چند جواب حقیقی دارد؟

۱) هیچ　　۲) ۱　　۳) ۲　　۴) بی شمار

می‌دانیم: $(x-۱)^{۳}=x^{۳}-۳x^{۲}+۳x-۱$

$(x-۱)^{۳}-x^{۳}=-۳x^{۲}+۳x-۱$

$$f(x)=\frac{x^{۳}}{(x-۱)^{۳}-x^{۳}}$$

پاسخ : گزینه ۱

$$(x-۱)^۳ = x^۳ - ۳x^۲ + ۳x - ۱$$

$$\Rightarrow (x-۱)^۳ - x^۳ = ۳x - ۳x^۲ - ۱$$

$$f(x) = \frac{x^۳}{(x-۱)^۳ - x^۳}$$

$$\Rightarrow f(۱-\alpha) = \frac{(۱-\alpha)^۳}{(۱-\alpha-۱)^۳ + (۱-\alpha)^۳}$$

$$= \frac{(۱-\alpha)^۳}{-\alpha^۳ - (۱-\alpha)^۳} \Rightarrow f(\alpha) + f(۱-\alpha) = \frac{\alpha^۳}{(\alpha-۱)^۳ - \alpha^۳} + \frac{-(\alpha-۱)^۳}{(\alpha-۱)^۳ - \alpha^۳}$$

$$= \frac{\alpha^۳ - (\alpha-۱)^۳}{(\alpha-۱)^۳ - \alpha^۳} = -۱$$

$$\xrightarrow{\text{جایگذاری}} -۱ = x^۲ \xrightarrow[\text{امکان ندارد}]{\text{تعداد ریشه}} \text{هیچ}$$

۱۲۲. هرگاه $(۱+\sin\alpha)(۱+\cos\alpha)=\frac{۵}{۴}$ **باشد در** $x=(۱-\sin\alpha)(۱-\cos\alpha)$ **حاصل ضرب جواب ها کدام است ؟**

۱) $\frac{۹}{۱۶}$ **۲)** $-\frac{۱۰۴}{۱۶}$ **۳)** $\frac{۱۰۴}{۱۶}$ **۴)** $-\frac{۹}{۱۶}$

پاسخ : گزینه ۱

$$(1+\sin\alpha)(1+\cos\alpha)=\frac{5}{4}\xrightarrow{\text{ضرب}}$$

$$1+\cos\alpha+\sin\alpha+\sin\alpha\cos\alpha=\frac{5}{4}\quad (1)$$

$$(1-\sin\alpha)(1-\cos\alpha)=x\xrightarrow{\text{ضرب}}1-\cos\alpha-\sin\alpha+\sin\alpha\cos\alpha=x$$

$$\xrightarrow[\text{با (1)}]{\text{جمع کن}}2+\underbrace{2\sin\alpha\cos\alpha}_{\sin 2\alpha}=\frac{5}{4}+x$$

$$\sin 2\alpha=\frac{5}{4}+x-2=x-\frac{3}{4}\quad (*)$$

$$\xrightarrow[\text{از (1)}]{\text{کم کن}}2\cos\alpha+2\sin\alpha=\frac{5}{4}-x$$

$$\xrightarrow{\div 2}\cos\alpha+\sin\alpha=\frac{5}{8}-\frac{x}{2}\xrightarrow{\text{به توان ۲}}$$

$$1+\sin 2\alpha=\left(\frac{5}{8}-\frac{x}{2}\right)^2\Rightarrow\sin 2\alpha=\left(\frac{5}{8}-\frac{x}{2}\right)^2-1$$

$$\xrightarrow{(*)}\left(\frac{5}{8}-\frac{x}{2}\right)^2-1=x-\frac{3}{4}\Rightarrow\frac{25}{64}+\frac{x^2}{4}-\frac{5}{8}x-1=x-\frac{3}{4}$$

$$\xrightarrow{\times 64}25+16x^2-40x-64=64x-48$$

$$\Rightarrow 16x^2-104x+9=0\xrightarrow{\text{ضرب ریشه ها}}\frac{c}{a}=\frac{9}{16}$$

$f=4$

$\frac{2x+24}{5x-3}=4$ $\quad x=2$

$2x+24=20x-12$

۱۲۳. هرگاه $f(x)=\frac{۲x+۲۴}{۵x-۳}$ بوده و $f(۳-f^{-۱}(a))=f^{-۱}(-۱)+۷$ باشد، مقدار a کدام است ؟

۱) ۹ ۲) ۱۳ ۳) ۱۱ ۴) ۱۵

$f^{-1}(x)=\frac{3x+24}{5x-2}$

$f^{-1}(-1)=\frac{21}{-7}=-3$

$f\left(3-\frac{3a+24}{5a-2}\right)=4$

$f\left(\frac{15a-6-3a-24}{5a-2}\right)=4$ $\quad \frac{12a-30}{5a-2}$

باید ۲ باشد

$\frac{12a-30}{5a-2}=2$

$12a-30=10a-4$

$2a=26$

پاسخ : گزینه ۲

$$f(x)=\frac{۲x+۲۴}{۵x-۳}=-۱\Rightarrow ۲x+۲۴=-۵x+۳$$
$$\Rightarrow ۷x=-۲۱\Rightarrow x=-۳$$
$$\Rightarrow f(-۳)=-۱\Rightarrow f^{-۱}(-۱)=-۳\xrightarrow{\text{جایگذاری}}$$
$$f(۳-f^{-۱}(a))=-۳+۷=۴\Rightarrow\frac{۲x+۲۴}{۵x-۳}=۴$$
$$\Rightarrow ۲x+۲۴=۲۰x-۱۲\Rightarrow -۱۸x=-۳۶\Rightarrow x=۲$$

یعنی $۳-f^{-۱}(a)=۲$ **بوده !**

$$۳-f^{-۱}(a)=۲\Rightarrow f^{-۱}(a)=۱$$
$$\Rightarrow f(۱)=a\xrightarrow{\text{محاسبه}}f(۱)=\frac{۲+۲۴}{۵-۳}=\frac{۲۶}{۲}=۱۳$$

۱۲۴. کمترین مقدار عبارت $\sqrt{x^۲ - ۶x + ۱۰} + \sqrt{x^۲ + ۴x + ۸}$ $(x \in \mathbb{R})$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۵} + ۲$ ۲) $۴\sqrt{۲}$ ۳) $\sqrt{۳۴}$ ۴) $\sqrt{۸} + \sqrt{۱۰}$

پاسخ : گزینه ۳

$$y = \sqrt{x^۲ + ۴x + ۸} + \sqrt{x^۲ - ۶x + ۱۰} \xrightarrow{\text{مشتق}}$$

$$y' = \frac{۲x + ۴}{۲\sqrt{x^۲ + ۴x + ۸}} + \frac{۲x - ۶}{۲\sqrt{x^۲ - ۶x + ۱۰}} \xrightarrow{y' = ۰}$$

$$(x + ۲)(\sqrt{x^۲ - ۶x + ۱۰}) + (x - ۳)(\sqrt{x^۲ + ۴x + ۸}) = ۰$$

$$\Rightarrow (x + ۲)\sqrt{(x - ۳)^۲ + ۱} = -(x - ۳)\sqrt{(x + ۲)^۲ + ۴}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{(x + ۲)^۲ + ۴}}{x + ۲} = \frac{\sqrt{(x - ۳)^۲ + ۱}}{-(x - ۳)}$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} \frac{(x + ۲)^۲ + ۴}{(x + ۲)^۲} = \frac{(x - ۳)^۲ + ۱}{(x - ۳)^۲}$$

$$\xrightarrow{\text{تفکیک کسر}} ۱ + \frac{۴}{(x + ۲)^۲} = ۱ + \frac{۱}{(x - ۳)^۲}$$

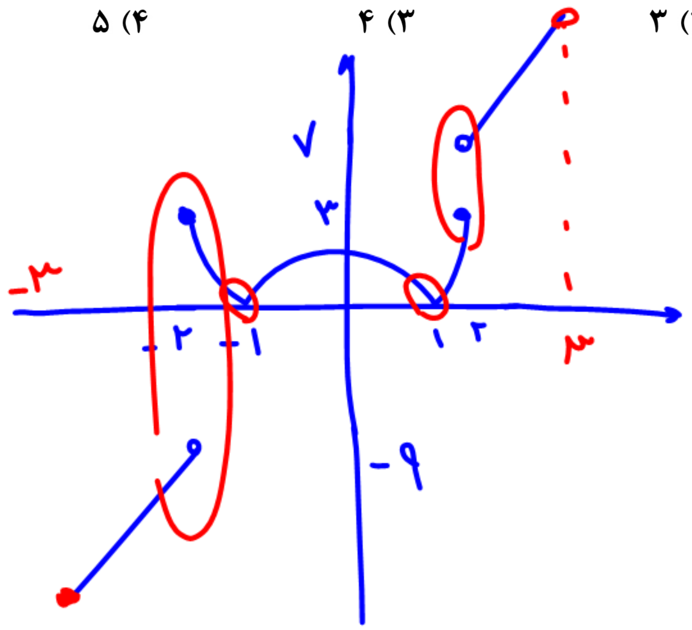
$$\xrightarrow{\text{جذر}} \frac{۲}{x + ۲} = \pm\frac{۱}{x - ۳}$$

$$\Rightarrow ۲x - ۶ = \pm(x + ۲) \Rightarrow x = \frac{۴}{۳} \text{ یا } ۸ \times \xrightarrow{\text{در عبارت}}$$

$$y = \sqrt{\frac{۱۶}{۹} + \frac{۱۶}{۳} + ۸} + \sqrt{\frac{۱۶}{۹} - \frac{۲۴}{۳} + ۱۰} = \frac{۲}{۳}\sqrt{۳۴} + \frac{۱}{۳}\sqrt{۳۴} = \sqrt{۳۴}$$

۱۲۵. تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}|x^۲-۱| & |x|\le ۲\\ ۴x-۱ & |x|>۲\end{cases}$ در بازهٔ $[-۳,۳)$ در چند نقطه مشتق ناپذیر است؟

۱) ۲   ۲) ۳   ۳) ۴   ۴) ۵



پاسخ : گزینه ۳

$$f(x)=\begin{cases}\left|x^{۲}-۱\right| & -۲\le x\le ۲\\ ۴x-۱ & x>۲ \quad \text{یا} \quad x<-۲\end{cases}$$

$$\xrightarrow[\text{لیست کن}]{\text{کاندیدها را}} \underbrace{x=۲,-۲}_{\text{نقطه های شکست دامنه}} \quad , \quad \underbrace{x=۱,-۱}_{\text{ریشه های سادهٔ قدرمطلق}}$$

اگر ضابطهٔ اول را به صورت $\left|(x-۱)(x+۱)\right|$ بنویسیم ، متوجه می شوید که در هر دو نقطهٔ $x=۱$ و $x=-۱$ مشتق نداریم.

حواستان باشد که تابع خطی درون قدرمطلق ، به ازای ریشهٔ خود مشتق ناپذیر بوده و نقطهٔ گوشه ای است.

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to ۲^+} f(x)\xrightarrow[\text{ضابطهٔ پایین}]{x>۲}\lim\limits_{x\to ۲^+} f(۴x-۱)\\ =۴(۲)-۱=۸-۱=۷\\ \lim\limits_{x\to ۲^-} f(x)=f(۲)\xrightarrow[\text{ضابطهٔ بالا}]{x<۲}\lim\limits_{x\to ۲^+}\left|x^{۲}-۱\right|\\ =\left|۲^{۲}-۱\right|=\left|۳\right|=۳\end{cases}$$

f در $x=۲$ ناپیوسته است، پس مشتق هم ندارد. $\xrightarrow{y\neq ۳}$

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to -۲^+} f(x)\xrightarrow[\text{ضابطهٔ بالا}]{x>-۲} f(-۲)\\ \lim\limits_{x\to -۲^+}\left|x^{۲}-۱\right|=\left|(-۲)^{۲}-۱\right|=\left|۴-۱\right|=\left|۳\right|=۳\\ \lim\limits_{x\to -۲^-} f(x)=f(۲)\xrightarrow[\text{ضابطهٔ پایین}]{x<-۲}\lim\limits_{x\to -۲^-}(۴x-۱)\\ =۴(-۴)-۱=-۸-۱=-۹\end{cases}$$

f در $x=-۲$ ناپیوسته است، پس مشتق هم ندارد. $\xrightarrow{-۹\neq ۳}$

در $x=-۳$ باید هم پیوستگی راست و هم مشتق راست داشته باشیم که برای همسایگی -۳ ،
ضابطهٔ تابع به صورت $f(x)=۴x-۱$ است و این تابع همواره مشتق پذیر است.

۱۲۶. اگر $\lim\limits_{x\to ۲} \dfrac{f(x)-f(۲)}{x-۲} = -\dfrac{۱}{۳}$ **باشد، مشتقِ** $f(\sqrt{x+۳})$ **در نقطهٔ** $x = ۱$ **کدام است؟**

۱) $\dfrac{۱}{۶}$ ۲) $\dfrac{۱}{۱۲}$ ۳) $-\dfrac{۱}{۶}$ ۴) $-\dfrac{۱}{۱۲}$

$$y' = \frac{1}{۲\sqrt{x+۳}}\, f'(\sqrt{x+۳}) \overset{x=1}{=} \frac{1}{4}\, f'(۲)$$

$$\left(-\frac{1}{۳}\right)$$

پاسخ : گزینه ۴

$$\lim_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}=-\frac{۱}{۳}\xrightarrow[\text{تعریف مشتق}]{\text{مطابقت با}} f'(۲)=-\frac{۱}{۳}\ (*)$$

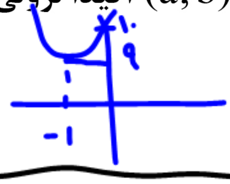
$$y=f(\sqrt{x+۳})\xrightarrow{\text{مشتق بگیر}}$$

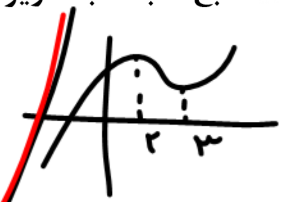
$$y'=\frac{۱}{۲\sqrt{x+۳}}f'(\sqrt{x+۳})\xrightarrow{x=۱}$$

$$y'(۱)=\frac{۱}{۲\sqrt{۴}}f'(\sqrt{۴})=\frac{۱}{۴}f'(۲)\xrightarrow{(*)}\frac{۱}{۴}\times-\frac{۱}{۳}=-\frac{۱}{۱۲}$$

۱۲۷. تابع f با ضابطهٔ زیردر بازهٔ (a,b) اکیداً نزولی است. بیشترین مقدار $b-a$ کدام است؟

$$f(x)=\begin{cases} x^2+2x+10 & -1\le x<1 \\ 2x^3-15x^2+36x-10 & x\ge 1 \end{cases}$$





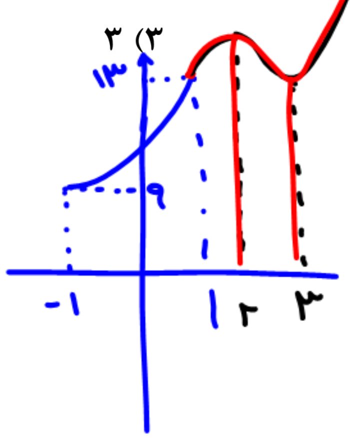
۱) ۱   ۲) ۲   ۳) ۳   ۴) ۰/۵

$y' = 6x^2 - 30x + 36$

$y' = 6(x^2 - 5x + 6)$

$y' = 6(x-2)(x-3) = 0$

	2		3	
+	0	−	0	+



پاسخ : گزینه ۱

تابع داده شده در $x=۱$ پیوسته است، بنابراین در بازهٔ $[-۱,+\infty)$ هم پیوسته است، پس داریم :

$$f(x)=\begin{cases} x^{۲}+۲x+۱۰ & -۱\le x<۱ \\ ۲x^{۳}-۱۵x^{۲}+۳۶x-۱۰ & x\ge ۱ \end{cases}$$

$$\xrightarrow[\text{پیوسته و بدون قدرمطلق است.}]{\text{مشتق بگیر}} f'(x)=\begin{cases} ۲x+۲ & -۱<x<۱ \\ ۶x^{۲}-۳۰x+۳۶ & x>۱ \end{cases}$$

$$f'(x)=۰$$

$$\xrightarrow[\text{پیدا کن}]{\text{ریشه ها را}} \begin{cases} ۲x+۲=۰ \Rightarrow x=-۱ \\ ۶x^{۲}-۳۰x+۳۶=۰ \xrightarrow{\div ۶} x^{۲}-۵x+۶=۰ \\ \xrightarrow{\text{تجزیه}} (x-۲)(x-۳)=۰ \\ \Rightarrow x=۲,۳ \end{cases}$$

نقطــه ی مــرزی

x	$-\infty$	-۱		۱		۲		۳		$+\infty$
$f'(x)$			$+$		$+$		$-$		$+$	
$f(x)$			↗		↗		↘		↗	

اینجا باید $۲x+۲$ را تعیین علامت کنید.

اینجا باید $۶x^{۲}-۳۰x+۳۶$ را تعیین علامت کنید.

$$\xrightarrow{\text{محدودهٔ اکیداً نزولی}} (۲,۳) \xrightarrow{b-a} ۳-۲=۱$$

۱۲۸. ماکزیمم مطلقِ تابع با ضابطهٔ $f(x)=x^{\frac{۸}{۳}}-x^{\frac{۲}{۳}}$ در بازهٔ $[-۸,۲۷]$ کدام است؟

۱) ۶۴۴۲   ۲) ۴۶۶۲   ۳) ۶۵۵۲   ۴) ۵۳۳۲

پاسخ : گزینه ۳

$$f(x)=x^{\frac{۸}{۳}}-x^{\frac{۲}{۳}}\xrightarrow{\text{مشتق بگیر}}f'(x)$$

$$\frac{۸}{۳}x^{\frac{۵}{۳}}-\frac{۲}{۳}x^{-\frac{۱}{۲}}\xrightarrow[\text{بنویس}]{\text{به شکل رادیکالی}}f'(x)$$

$$\frac{۸\sqrt[۳]{x^{۵}}}{۳}-\frac{۲}{۳\sqrt[۳]{x}}\xrightarrow{\text{مخرج مشترک بگیر}}f'(x)$$

$$\frac{۸\sqrt[۳]{x^{۶}}-۲}{۳\sqrt[۳]{x}}=\frac{۸x^{۲}-۲}{۳\sqrt[۳]{x}}=\frac{۲(۴x^{۲}-۱)}{۳\sqrt[۳]{x}}$$

صورت $=۰\quad ۴x^{۲}-۱=۰\Rightarrow x^{۲}=\frac{۱}{۴}\Rightarrow x=\pm\frac{۱}{۲}$

$\xrightarrow[D=[-۸,۲۷]]{\text{بررسی دامنه}}x=\pm\frac{۱}{۲}$ **بحرانی**

مخرج $=۰\quad \sqrt[۳]{x}=۰\Rightarrow x=۰\xrightarrow[D=[-۸,۲۷]]{\text{بررسی دامنه}}x=۰$ **بحرانی**

$\xrightarrow{\text{صید هدف}}$

x	$\frac{۱}{۲}$	$-\frac{۱}{۲}$	۰	-۸	۲۷
y	$-\frac{۳}{۴\sqrt[۳]{۴}}$	$-\frac{۳}{۴\sqrt[۳]{۴}}$	۰	۲۵۲	۶۵۵۲ $\downarrow$

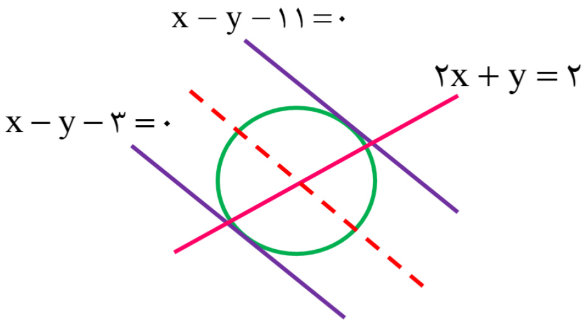
max **مطلق**

۱۲۹. دایره ای که بر خط های $x-y-11=0$ و $x-y-3=0$ مماس است و مرکزش روی خط $2x+y=2$ قرار دارد، از کدام نقطه می گذرد؟

۱) $(-7,5)$ ۲) $(1,-2)$ ۳) $(7,-8)$ ۴) $(-2,1)$

پاسخ : گزینه ۲

راهبرد : برای دو خط موازی d و d' به معادله های $ax+by+c=0$ و $ax+by+c'=0$ ، معادله ی خطی که در وسط این دو خط رسم می شود به صورت زیر است :



$$ax+by+\frac{c+c'}{۲}=0$$

$$\left.\begin{array}{l} x-y=۱۱ \\ x-y=۳ \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{معادلهٔ خط وسط}}$$

$$x-y=\frac{۱۱+۳}{۲}\xrightarrow{\text{ساده کن}}x-y=۷$$

مرکز دایره روی خط $x-y=۷$ قرار دارد و طبق فرض روی خط $۲x+y=۲$ هم هست.

پس نقطهٔ برخورد این دو خط مرکز دایره است. بنابراین :

$$\begin{cases} x-y=۷ \\ ۲x+y=۲ \end{cases}\xrightarrow[\text{جمع کن}]{\text{حل دستگاه}}۳x=۹\Rightarrow x=۳$$

$$\xrightarrow{x-y=۷}۳-y=۷\Rightarrow y=-۴\xrightarrow{\text{مرکز}}O(۳,-۴)\quad (۱)$$

$$\begin{cases} x-y=۱۱ \\ x-y=۳ \end{cases}\xrightarrow[\text{همان قطر است.}]{\text{فاصلهٔ دو خط موازی}}\frac{|۱۱-۳|}{\sqrt{۱^۲+(-۱)^۲}}=\frac{۸}{\sqrt{۲}}$$

$$\xrightarrow{\text{گویا کن}}\frac{۸\sqrt{۲}}{۲}=۴\sqrt{۲}=\text{قطر}\xrightarrow{\div ۲}r=۲\sqrt{۲}\qquad (۲)$$

$$\xrightarrow[\text{(۱) و (۲)}]{\text{معادلهٔ دایره رو بنویس}}(x-۳)^۲+(y+۴)^۲=۸$$

$$\xrightarrow[\text{گزینهٔ «۲»}]{\text{بررسی گزینه ها : صدق بده}}\underbrace{(۱-۳)^۲}_{۴}+\underbrace{(-۲+۴)^۲}_{۴}=۸\ ✓$$

۱۳۰. در ظرف اول، ۴ کارت با شمارهٔ زوج و ۲ کارت با شمارهٔ فرد وجود دارد و در ظرف دوم ۳ کارت با شمارهٔ زوج و ۳ کارت با شمارهٔ فرد. از ظرف اول ۴ کارت و از ظرف دوم ۲ کارت درآورده و درون یک کیسه می ریزیم. اگر کارتی به تصادف از کیسهٔ جدید خارج کنیم، چقدر احتمال دارد کارتی با شمارهٔ زوج باشد؟

۱) $\frac{۵}{۹}$ ۲) $\frac{۱۱}{۱۸}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۱۳}{۱۸}$

پاسخ : گزینه ۲

کیسه ی جدید

از ظرف اول باشد: $\frac{۴}{۶} \xrightarrow[\text{۴ تا زوج و ۲ تا فرد}]{\text{کارت زوج دربیاید}} \frac{۴}{۶}$

از ظرف دوم باشد: $\frac{۲}{۶} \xrightarrow[\text{۳ تا زوج و ۳ تا فرد}]{\text{کارت زوج دربیاید}} \frac{۳}{۶}$

$$\xrightarrow[\text{زوج دربیاید}]{\text{محاسبهٔ احتمال کل}} (\frac{۴}{۶}\times\frac{۴}{۶})+(\frac{۲}{۶}\times\frac{۳}{۶})$$

$$=(\frac{۲}{۳}\times\frac{۲}{۳})+(\frac{۱}{۳}\times\frac{۱}{۲})=\frac{۴}{۹}+\frac{۱}{۶}=\frac{۸+۳}{۱۸}=\frac{۱۱}{۱۸}$$