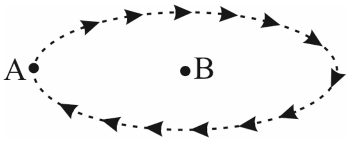
هندسه ـ پایهٔ دوازدهم

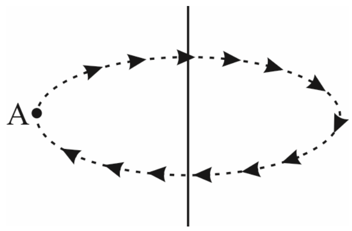
تفکر تجسمی و آشنایی با مقاطع مخروطی

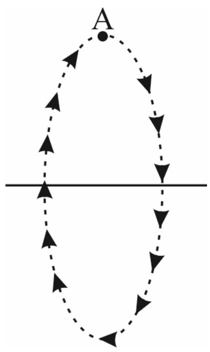
تفکر تجسمی یعنی فکرکردن با شکل‌ها و تصاویر. ما به طور معمول با کلمات فکر می‌کنیم اما اگر به جای کلمه‌ها از شکل‌ها استفاده کنیم، می‌گوییم به جای تفکر کلامی از تفکر تجسمی استفاده کرده‌ایم. در تفکر تجسمی سعی می‌کنیم تصاویر را در ذهنمان تجسم کنیم و یا اگر لازم باشد آن‌ها را روی کاغذ رسم کنیم. برای آن‌که ببینیم تفکر تجسمی و این حرف‌هایی که زدیم در عمل یعنی چه، بیایید با هم در مورد دوران و برش اجسام حرف بزنیم.

دوران:

منظور از دوران، چرخیدن یک شیء به دور یک شیء، یا یک خط یا یک نقطه است. مسیر دوران یک حلقه دایره‌ای‌شکل است. در زیر، شکل و مسیر دوران نقطهٔ A را حول (دور) یک نقطه و خط‌های عمودی و افقی رسم کرده‌ایم.



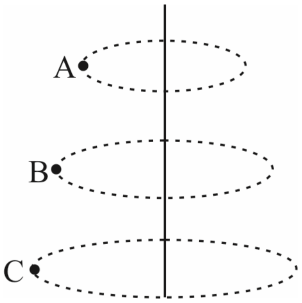




در این‌جا بحث ما بیشتر در مورد دوران حول (دور) یک خط خواهد بود.

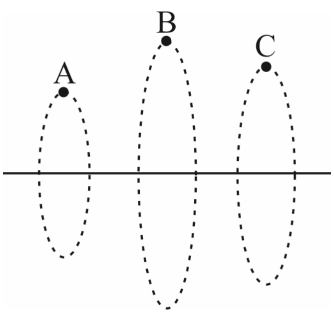
دوران حول یک خط:

همان‌طور که در شکل‌های قبل نشان دادیم، دوران (چرخیدن) به دور یک خط (حول یک خط)، یعنی نقطه یک مسیر دایره‌ای را طی می‌کند و دوباره به سر جای خودش بازمی‌گردد. شعاع این دایره، با فاصلهٔ نقطه از خط برابر است. در شکل زیر، سه نقطهٔ A، B و C را حول خط‌های عمودی و افقی دوران داده‌ایم.

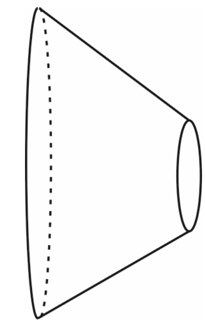


دوران یک پاره‌خط حول یک خط:

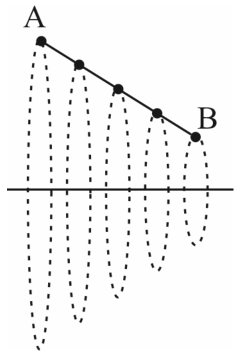
وقتی یک پاره‌خط حول یک خط دوران پیدا می‌کند، در واقع کلّ نقاط روی آن، حول آن خط دوران پیدا می‌کنند. در شکل زیر، نحوهٔ دوران پاره‌خط AB را حول دو خط عمودی و افقی نمایش داده‌ایم.



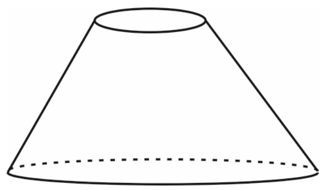
حال اگر این چرخش با سرعت زیاد انجام شود، دیگر چشم ما قادر به دنبال‌کردن مسیر حرکت نیست، بلکه یک حجم سه‌بعدی می‌بینید.



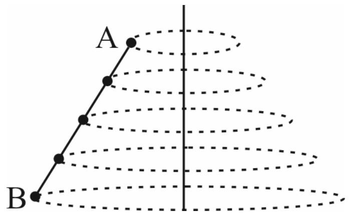
آن‌چه که در دوران با سرعت زیاد می‌بینیم



مسیر دوران

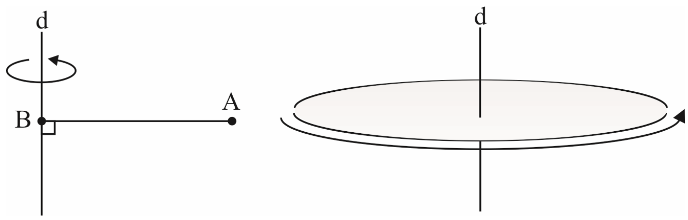


آن‌چه در سرعت زیاد می‌بینیم

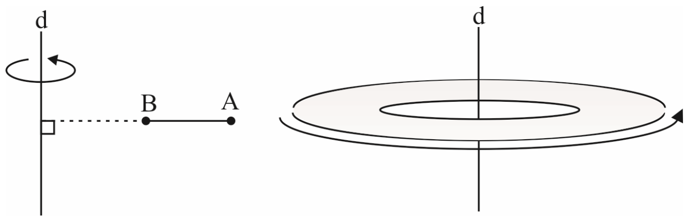


مسیر حرکت (مسیر دوران)

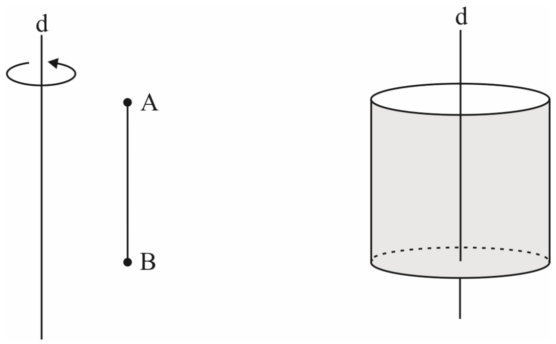
۱) از دوران یک پاره‌خط حول محور عمود و متقاطع با آن سطح یک دایره ایجاد می‌شود.



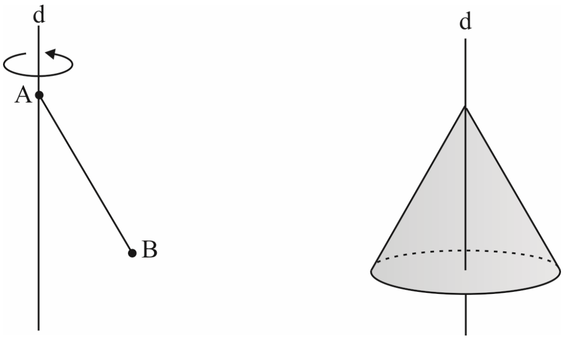
توجه: اگر پاره‌خط، با محور تقارن متقاطع نباشد، پس از دوران سحط محدود به دو دایرهٔ هم‌مرکز ایجاد می‌شود.



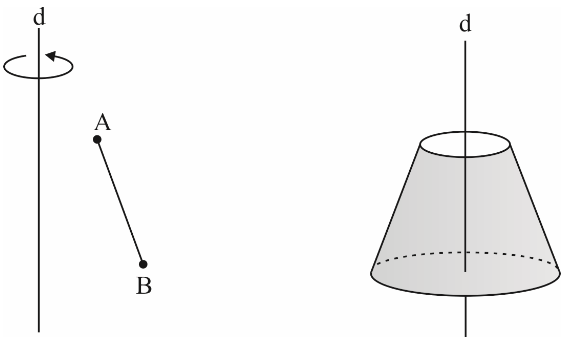
۲) از دوران یک پاره‌خط حول محوری که با آن موازی است، یک استوانهٔ توخالی ایجاد می‌شود.



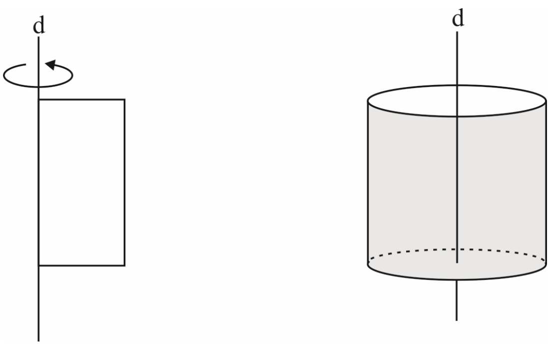
۳) از دوران پاره‌خط حول محور غیرعمود و متقاطع با آن، یک سطح مخروطی (مخروط توخالی) ایجاد می‌شود.



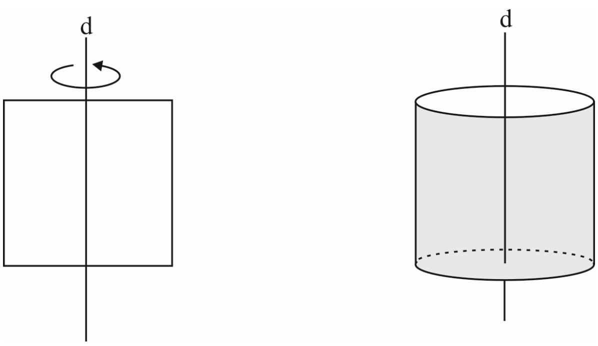
توجه: اگر پاره‌خط، با محور تقارن متقاطع باشد، پس از دوران یک سحط مخروطی ناقص ایجاد می‌شود.



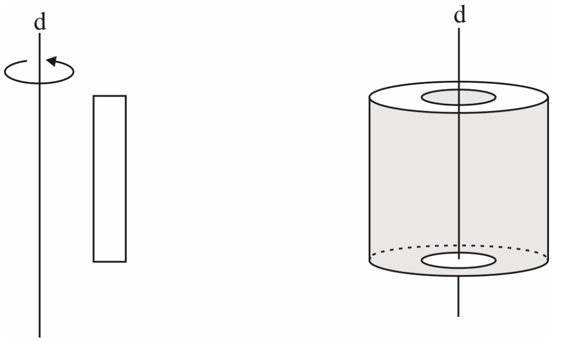
۴) از دوران مربع یا مستطیل حول یک ضلعشان یک استوانهٔ توپر ایجاد می‌شود.



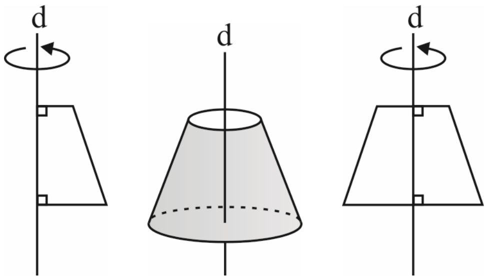
توجه: از دوران مربع یا مستطیل حول خطی که از وسط دو ضلع مقابل آن‌ها می‌گذرد یک استوانهٔ توپر ایجاد می‌شود.



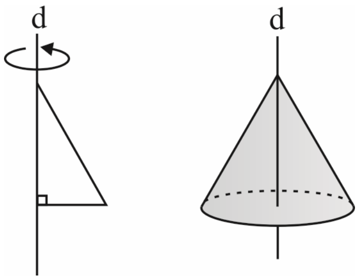
توجه: از دوران مربع یا مستطیل حول خطی که موازی یک ضلع آن‌ها است دو استوانه با محور یکسان تشکیل می‌شود که فضای بین آن‌ها توپر است.



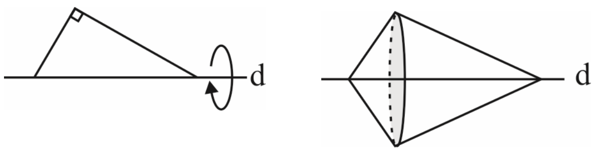
۵) از دوران یک ذوزنقهٔ قائم‌الزاویه حول ساق قائم آن با یک ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین حول خطی که وسط‌های دو قاعده را به هم وصل می‌کند، یک مخروط ناقص ایجاد می‌شود.



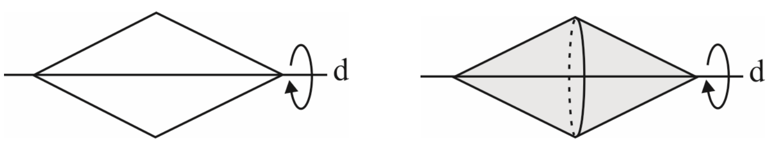
۶) از دوران یک مثلث قائم‌الزاویه حول ضلع قائم‌اش یک مخروط ایجاد می‌شود.



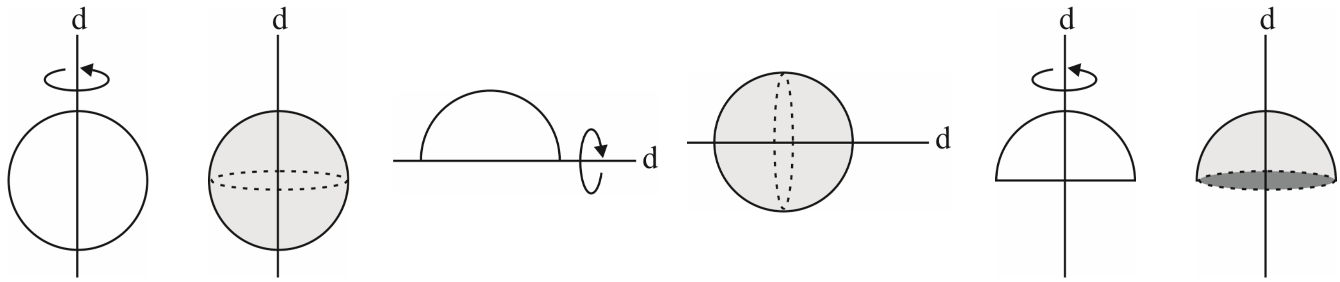
۷) از دوران یک مثلث قائم‌الزاویه حول وترش دو مخروط که در قاعده به هم چسبیده‌اند ایجاد می‌شود.



توجه: از دوران مربع یا مستطیل حول یکی از قطرهایشان نیز دو مخروط که در قاعده به هم چسبیده‌اند ایجاد می‌شود.



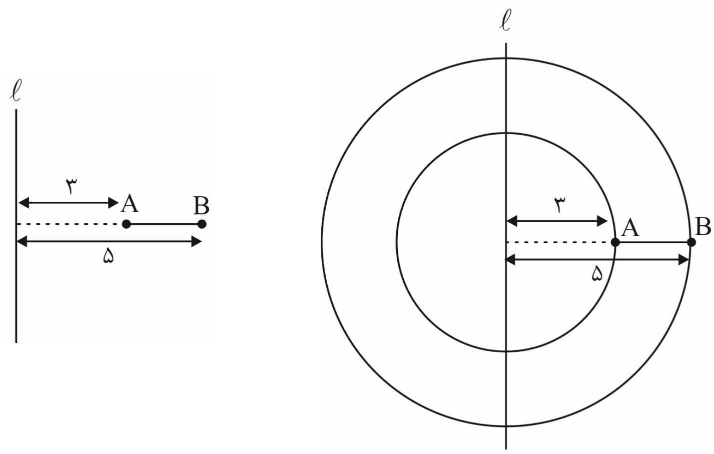
۸) از دوران دایره حول یکی از قطرهایش کره ایجاد می‌شود. هم‌چنین از دوران نیم‌دایره حول قطرش یک کره و حول شعاع عمود بر قطرش یک نیم‌کره ایجاد می‌شود.



تست ۱: امتداد پاره‌خط **AB** بر خط ℓ عمود است. اگر دو نقطهٔ **A** و **B** از ℓ به فاصلهٔ ۳ و ۵ باشند، از دوران **AB** حول ℓ چه مساحتی ایجاد می‌شود؟

۱) ۱۶π ۲) ۴π ۳) ۱۲π ۴) ۸π

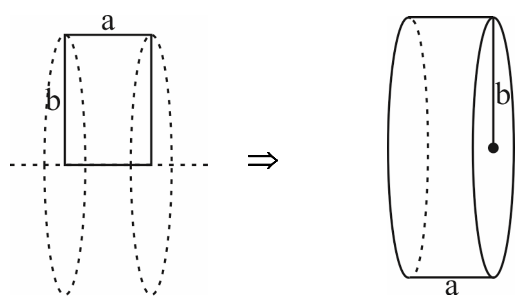
پاسخ: گزینهٔ «۱» ـ شکل را ببینید.



سطح موردنظر بین دو دایره به شعاع‌های ۵ و ۳ قرار دارد. $S = \pi(r_۱^۲ - r_۲^۲) = \pi(۵^۲ - ۳^۲) = ۱۶\pi$

تحلیل دوران مستطیل:

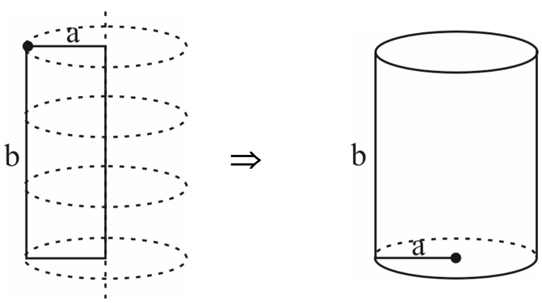
در پایهٔ هفتم دیدیم که از دوران یک مستطیل حول یک ضلع خودش (یا حول یک خط موازی ضلع‌هایش) یک استوانه ایجاد می‌شود.



حجمی که می‌بینیم (استوانه‌ای به شعاع **b** و ارتفاع **a**)

$V = \pi b^2 a$

مسیر دوران حول ضلع **a**



حجمی که می‌بینیم (استوانه‌ای به شعاع **a** و ارتفاع **b**)

$V = \pi a^2 b$

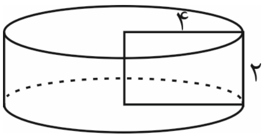
مسیر دوران حول ضلع **b**

مشاهده می‌کنید که وقتی یک مستطیل را حول یکی از ضلع‌های آن دوران می‌دهیم، آن ضلع ارتفاع استوانه خواهد بود و ضلع دیگر، شعاع قاعدهٔ استوانه است.

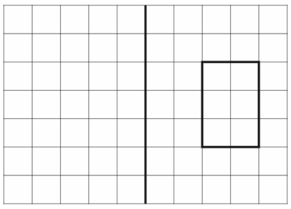
تست ۲: اگر مستطیلی به طول ۴ و عرض ۲ را حول عرضش دوران دهیم، حجم جسم حاصل چه‌قدر است؟

۱) ۱۶π ۲) ۲۰π ۳) ۳۲π ۴) ۸π

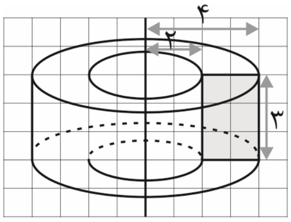
پاسخ: طبق شکل روبه‌رو استوانه‌ای ایجاد می‌شود که شعاع قاعده‌اش برابر ۴ و ارتفاعش برابر ۲ است و چون حجم استوانه از رابطهٔ $V = \pi r^۲$ به دست می‌آید، پس: $V = \pi(۴)^۲(۲) = ۳۲\pi$



تست ۳: در شکل مقابل اگر مستطیل حول خط دوران کند، حجم جسم ایجادشده کدام است؟



۱) ۴۸π
۲) ۳۶π
۳) ۱۲π
۴) ۲۴π



پاسخ: طبق شکل روبه‌رو اگر مستطیل حول خط دوران کند، جسمی که پدید می‌آید استوانه‌ای است به شعاع قاعدهٔ ۴ و ارتفاع ۳ که یک استوانه به شعاع قاعدهٔ ۲ و ارتفاع ۳ از آن خارج شده است. پس حجم جسم ایجادشده برابر تفاضل حجم این دو استوانه است، یعنی:

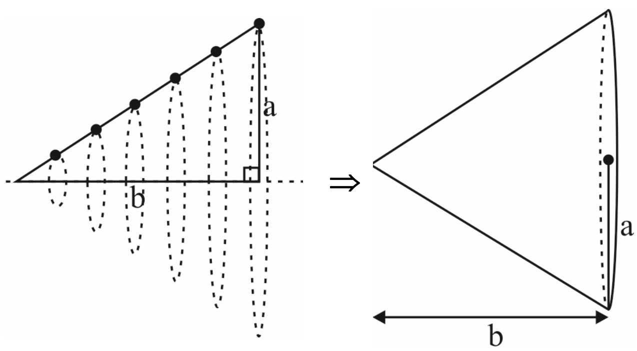
$$V = \pi r_۱^۲ h - \pi r_۲^۲ h \Rightarrow V = \pi(۴)^۲(۳) - \pi(۲)^۲(۳) = ۴۸\pi - ۱۲\pi = ۳۶\pi$$

تحلیل دوران مثلث قائم‌الزاویه:

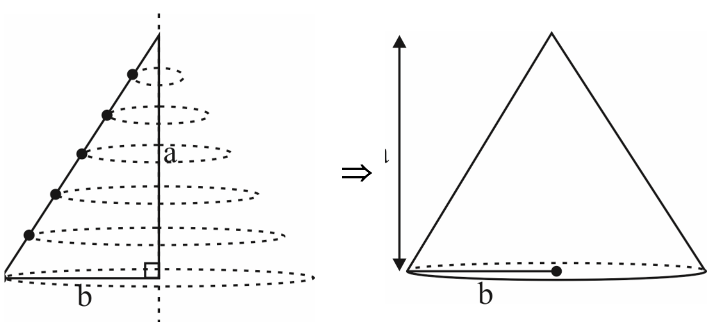
در شکل‌های زیر، مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ای را حول ضلع‌های قائمهٔ آن‌ها دوران داده‌ایم. مشاهده می‌کنید که وقتی یک مثلث قائم‌الزاویه را حول یک ضلع قائمهٔ آن دوران می‌دهیم، یک مخروط ایجاد می‌شود.

ضلعی که حول آن دوران داده‌ایم، ارتفاع مخروط و ضلع دیگر شعاع قاعدهٔ مخروط خواهد بود.

حجم مخروط: $\frac{\text{مساحت قاعده ضربدر ارتفاع}}{۳}$



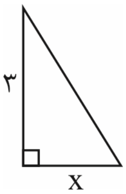
آن‌چه می‌بینیم (مخروطی به شعاع قاعدهٔ a و ارتفاع b)

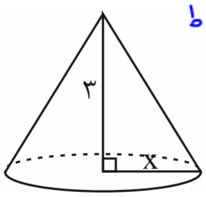


آن‌چه می‌بینیم (مخروطی به شعاع قاعدهٔ b و ارتفاع a)

تست ۴: مثلث قائم‌الزاویه‌ای را حول یکی از اضلاع قائمه‌اش به طول ۳ دوران می‌دهیم. حجم شکل حاصل از دوران ۲۴π است. مساحت مثلث قائم‌الزاویه کدام است؟

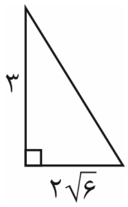
۱) $۲\sqrt{۶}$ ۲) $۳\sqrt{۶}$ ۳) $۲\sqrt{۲}$ ۴) $۳\sqrt{۲}$

پاسخ: گزینهٔ «۲» ـ مثلث قائم‌الزاویه به شکل  را حول ضلع به طول ۳ دوران می‌دهیم، شکل حاصل، مخروطی به شعاع قاعدهٔ x و ارتفاع ۳ است. پس طبق فرض مسئله که حجم شکل به وجود آمده ۲۴π است، می‌توان نوشت:



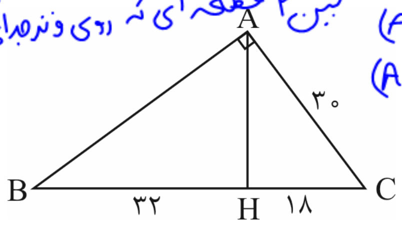
حجم مخروط
$V = \frac{۱}{۳}\pi(x^۲)h$

$$۲۴\pi = \frac{۱}{۳}\pi(x^۲)\times ۳ \Rightarrow \pi x^۲ = ۲۴\pi \Rightarrow x^۲ = ۲۴ \Rightarrow x = \sqrt{۲۴} = ۲\sqrt{۶}$$

حالا باید مساحت مثلث قائم‌الزاویه  را پیدا کنیم که برابر $S = \frac{۱}{۲}\times ۳\times ۲\sqrt{۶} = ۳\sqrt{۶}$ است.

قضیه: در هر مثلث قائم‌الزاویه ارتفاع وارد بر وتر واسطهٔ هندسی است بین ۲ قطعه‌ای که روی وتر جدا می‌کند.

تست ۵: مثلث قائم‌الزاویهٔ زیر را حول ضلع BC دوران می‌دهیم. حجم حاصل چند برابر $\pi(۲۴)^۲$ است؟



$(AH)^۲ = BH.CH$

$(AH)^۲ = ۳۲(۱۸) = ۲^۵ \times ۲ \times ۳^۲ = ۲^۶ ۳^۲ \xrightarrow{\text{جذر}} AH = ۲^۳(۳) = ۲۴$

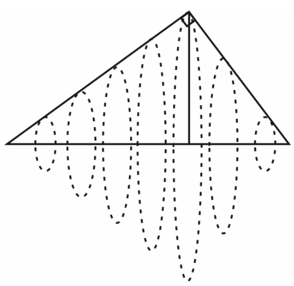
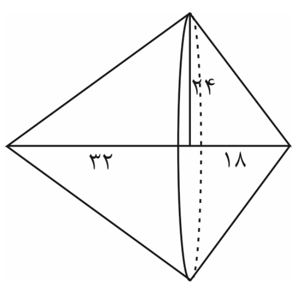
۱) $\frac{۲۵}{۳}$ ۲) ۲۵ ۳) $\frac{۵۰}{۳}$ ۴) ۵۰

پاسخ: ابتدا از رابطهٔ فیثاغورس، طول AH را به دست می‌آوریم:

$$AH^۲ + ۱۸^۲ = ۳۰^۲ \Rightarrow AH^۲ + ۳۲۴ = ۹۰۰ \Rightarrow AH^۲ = ۵۷۶ \Rightarrow AH = ۲۴$$

یا $(AH^۲) = BH \times CH = ۳۲ \times ۱۸ \Rightarrow AH = ۲۴$

حالا شکل دوران را کامل می‌کنیم. مشاهده می‌کنید که دو مخروط ایجاد می‌شود، یکی به شعاع ۲۴ و ارتفاع ۱۸ (مخروط سمت راست) و دیگری به شعاع ۲۴ و ارتفاع ۳۲ (مخروط سمت چپ). پس قاعدهٔ هر دو مخروط یکسان است:

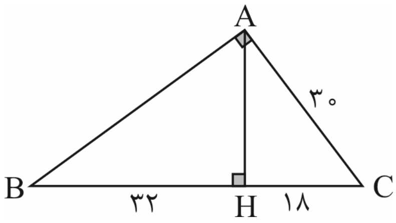
 $\Rightarrow$ 

مساحت قاعده $= \pi(۲۴)^۲ \Rightarrow$ حجم مخروط سمت راست $= \frac{\pi(۲۴)^۲ \times ۱۸}{۳} = ۶\pi(۲۴)^۲$

حجم مخروط سمت چپ $= \frac{\pi(۲۴)^۲ \times ۳۲}{۳} \Rightarrow$ حجم کل $= \pi(۲۴)^۲(۶ + \frac{۳۲}{۳}) = \frac{۵۰}{۳}\pi(۲۴)^۲$

نکته: حجم حاصل از دوران مثلث قائم‌الزاویه با اضلاع قائم b و c و وتر a می‌شود: فرمول تستی : $V=\frac{۱}{۳}\pi\frac{b^۲c^۲}{a}$

مثلاً در سؤالی که دیدید:



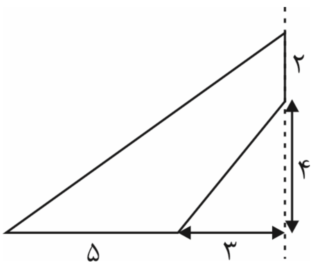
$a=۳۲+۱۸=۵۰$

$b=۳۰$

$c^۲=۳۲\times۵۰$

$$V=\frac{۱}{۳}\pi(\frac{(۳۰)^۲\times۳۲\times۵۰}{۵۰})=\frac{۱}{۳}\pi(۹۰۰)(۳۲)=۹۶۰۰\pi$$

تست ۶: حجم حاصل از دوران شکل زیر حول خط‌چین، چند برابر π است؟



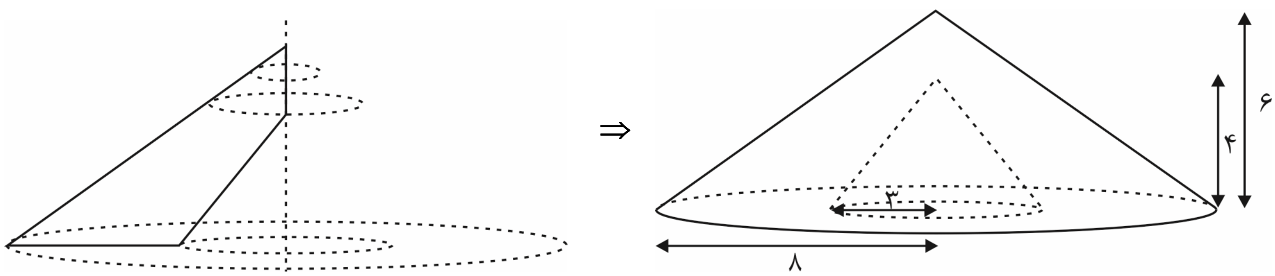
۱) ۱۲۸

۲) ۶۴

۳) ۱۲

۴) ۱۱۶

پاسخ: حجم حاصل مخروطی به شعاع و ارتفاع ۶ است که مخروطی به شعاع ۳ و ارتفاع ۴ از آن خارج شده است:

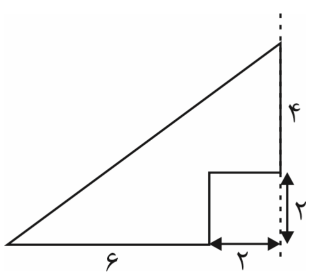


$\pi(۸)^۲=$ مساحت قاعدهٔ مخروط بزرگ $\Rightarrow$ حجم مخروط بزرگ $=\frac{\pi(۶۴)\times۶}{۳}=۱۲۸\pi$

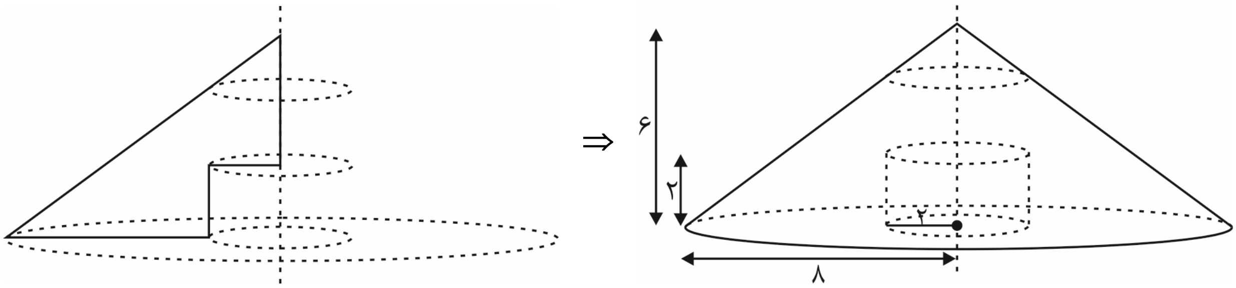
$\pi(۳)^۲=$ مساحت قاعدهٔ مخروط خالی‌شده

حجم مخروط خالی‌شده $=\frac{۹\pi\times۴}{۳}=۱۲\pi$ $\Rightarrow$ حجم باقی‌مانده $=۱۲۸\pi-۱۲\pi=۱۱۶\pi$

مثال باحال: حجم حاصل از دوران شکل زیر حول خط‌چین را به دست آورید.



پاسخ: حجم حاصل مخروطی به شعاع ۸ و ارتفاع ۶ است که یک استوانه به شعاع ۲ و ارتفاع ۲ از آن خالی شده است:



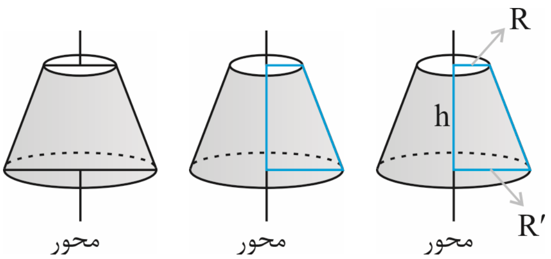
$$\text{مساحت قاعدهٔ مخروط} = \pi(۸)^۲ \Rightarrow \text{حجم مخروط} = \frac{۶۴\pi \times ۶}{۳} = ۱۲۸\pi$$

$$\text{مساحت قاعدهٔ استوانهٔ خالی‌شده} = \pi(۲)^۲ = ۴\pi \Rightarrow \text{حجم استوانهٔ خالی‌شده} = ۴\pi \times ۲ = ۸\pi$$

$$\Rightarrow \text{حجم باقی‌مانده} = ۱۲۸\pi - ۸\pi = ۱۲۰\pi$$

تحلیل دوران ذوزنقه قائم‌الزاویه:

۳ از دوران ذوزنقهٔ قائم‌الزاویه حول ساق قائم یا دوران ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین حول محور تقارن آن، مخروط ناقص ساخته می‌شود.

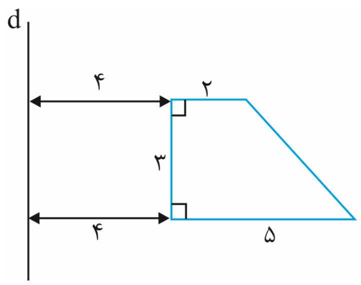


حجم مخروط ناقص دوار را بلد باشید: نکته ۳

$$V = \frac{۱}{۳}\pi(R^۲ + R'^۲ + RR')h$$

حجم مخروط ناقص

تست ۷: از دوران شکل مقابل حول محور **d** چه حجمی ایجاد می‌شود؟



۱) ۱۱۳π

۲) ۱۱۷π

۳) ۱۲۱π

۴) ۱۲۳π

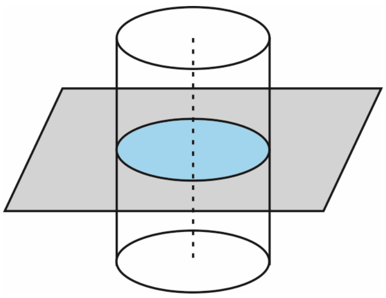
پاسخ: گزینهٔ «۴» ـ یک مخروط ناقص $(V_۱)$ با شعاع‌های ۶ و ۹ و ارتفاع ۳ داریم که یک سوراخ استوانه‌ای $(V_۲)$ به شعاع قاعدهٔ ۴ و ارتفاع ۳ دارد:

$$V = V_۱ - V_۲ = \frac{\pi}{۳}(۶^۲ + ۹^۲ + ۶ \times ۹) \times ۳ - \pi(۴^۲) \times ۳ = ۱۷۱\pi - ۴۸\pi = ۱۲۳\pi$$

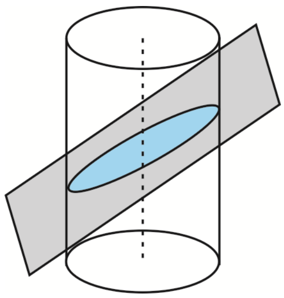
برش و سطح مقطع

اگر صفحه‌ای یک جسم سه‌بعدی را قطع کند، شکلی ایجاد می‌شود که به آن می‌گوییم «سطح مقطع». مثلاً اگر یک استوانه را با یک صفحه برش بزنیم، حالت‌های زیر ایجاد می‌شود:

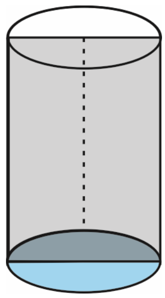
اگر صفحه بر ارتفاع استوانه عمود باشد، مقطع یک دایره است (شکل الف). اگر صفحه نسبت به ارتفاع استوانه مایل باشد، مقطع یک بیضی است (شکل ب). اگر صفحه عمود بر قاعده و شامل ارتفاع استوانه باشد، سطح مقطع یک مستطیل است (شکل پ).



(الف)



(ب)

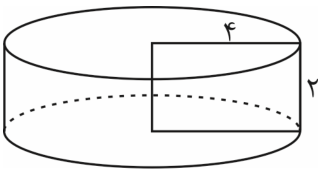


(پ)

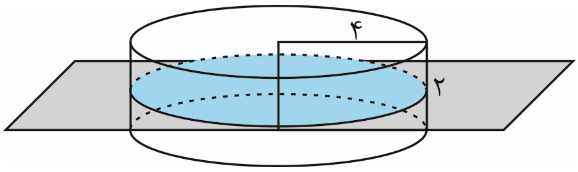
مثال ۸: مستطیلی با ابعاد ۴ و ۲ را حول عرضش دوران می‌دهیم. مساحت سطح مقطع حاصل از برخورد هر کدام از صفحات زیر را با جسم حاصل پیدا کنید.

الف) یک صفحهٔ افقی که بر عرض مستطیل عمود است.

ب) یک صفحهٔ قائم که شامل عرض مستطیل است و بیشترین مساحت سطح مقطع را ایجاد می‌کند.

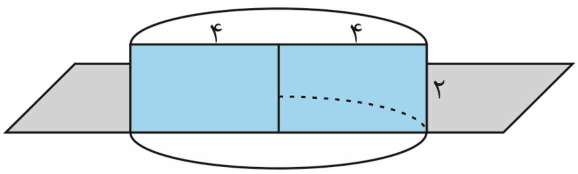


پاسخ: همان‌طور که در شکل روبه‌رو می‌بینیم، از دوران یک مستطیل حول عرضش یک استوانه با شعاع قاعدهٔ ۴ و ارتفاع ۲ ایجاد می‌شود. حالا اگر صفحه‌ای این استوانه را قطع کند:



الف) اگر صفحه به عرض مستطیل که همان ارتفاع استوانه است عمود باشد، سطح مقطع دایره‌ای به شعاع ۴ است؛ پس مساحت سطح مقطع برابر است با:

$$S = \pi r^{۲} \Rightarrow S = \pi(۴^{۲}) = ۱۶\pi$$

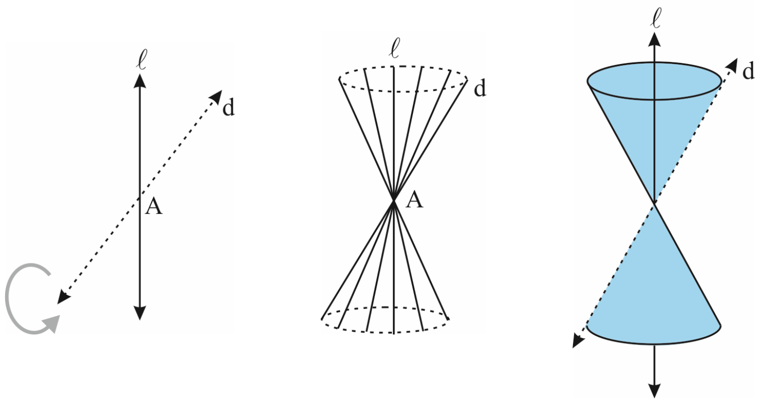


ب) اگر صفحه شامل عرض مستطیل یا همان ارتفاع استوانه باشد، بیشترین مساحتی که ایجاد می‌کند مستطیلی است با طول ۸ و عرض ۲؛ در نتیجه مساحتش برابر است با $۱۶ = ۸ \times ۲$.

آشنایی با مقاطع مخروطی

سطح مخروطی

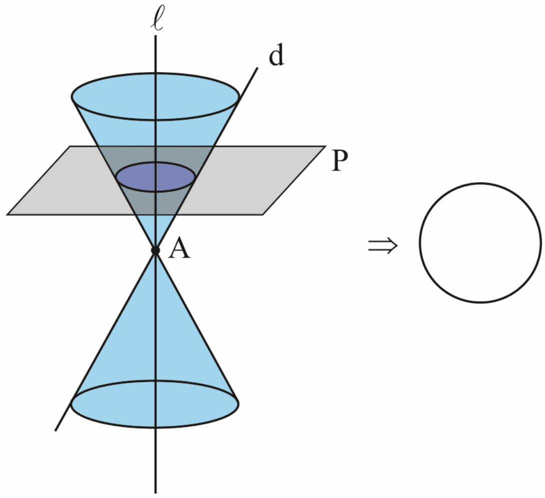
اگر دو خط متقاطع $\mathbf{d}$ و ℓ را داشته باشیم و خط $\mathbf{d}$ را حول خط ℓ دوران دهیم، به سطحی که ایجاد می‌شود می‌گوییم سطح مخروطی (در شکل بالا به ℓ می‌گوییم محور سطح مخروطی (همان محور تقارن) و به هر کدام از وضعیت‌های خط $\mathbf{d}$ می‌گوییم مولد. حالا اگر این سطح را با یک صفحه قطع دهیم، شکلی به وجود می‌آید که به آن می‌گوییم مقاطع مخروطی. تعداد مقاطع مخروطی چهارتا است. دایره، بیضی، هذلولی و سهمی.



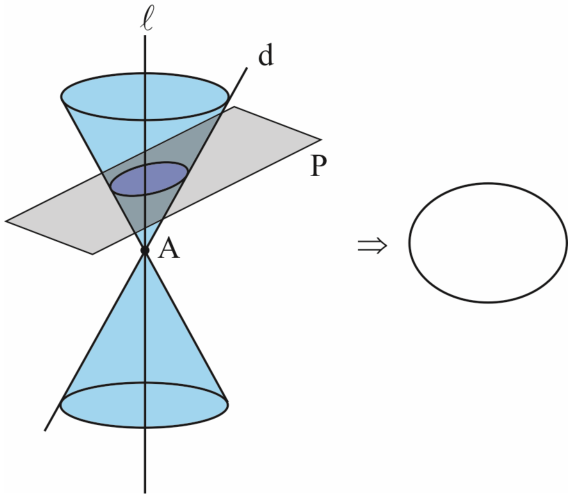
حالا بیایید ببینیم هر کدام از این مقطع‌ها چگونه ایجاد می‌شوند:

مقاطع مخروطی

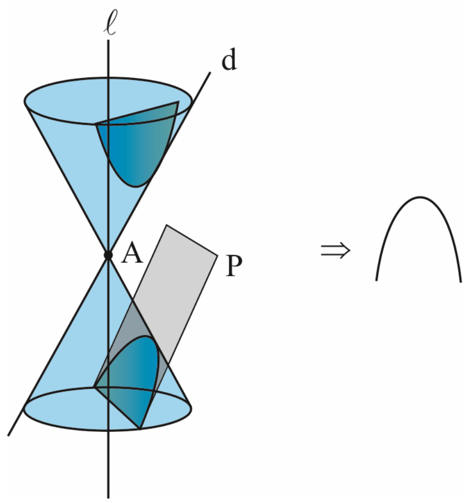
۱) اگر صفحه بر محور سطح مخروطی عمود باشد و از رأس آن عبور نکند، مقطع دایره است.



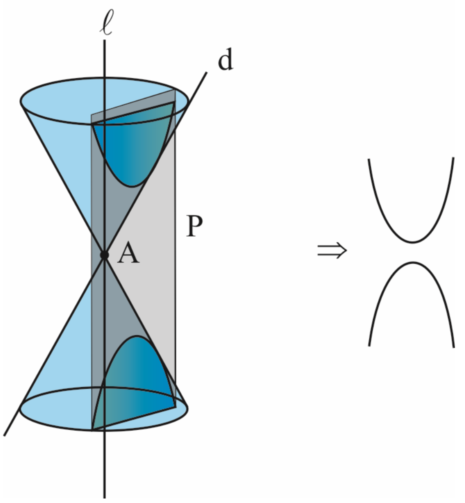
۲) اگر صفحه بر محور سطح مخروطی عمود یا با مولد سطح مخروطی موازی نباشد، مقطع بیضی است.



۳) اگر صفحه با مولد سطح مخروطی موازی باشد و از رأس آن عبور نکند، مقطع سهمی است.



۴) اگر صفحهٔ $\mathbf{P}$ موازی محور سطح مخروطی باشد و سطح مخروطی را در بالا و پایین آن قطع کند و از رأس سطح مخروطی عبور نکند، مقطع هذلولی است.



مثال ۹: شکل حاصل از برخورد یک صفحه با سطح مخروطی را در حالت‌های زیر مشخص کنید.

الف) صفحه، عمود بر محور سطح مخروطی باشد و از رأس آن عبور کند.

ب) صفحه، موازی مولد سطح مخروطی باشد و از رأس آ« عبور کند.

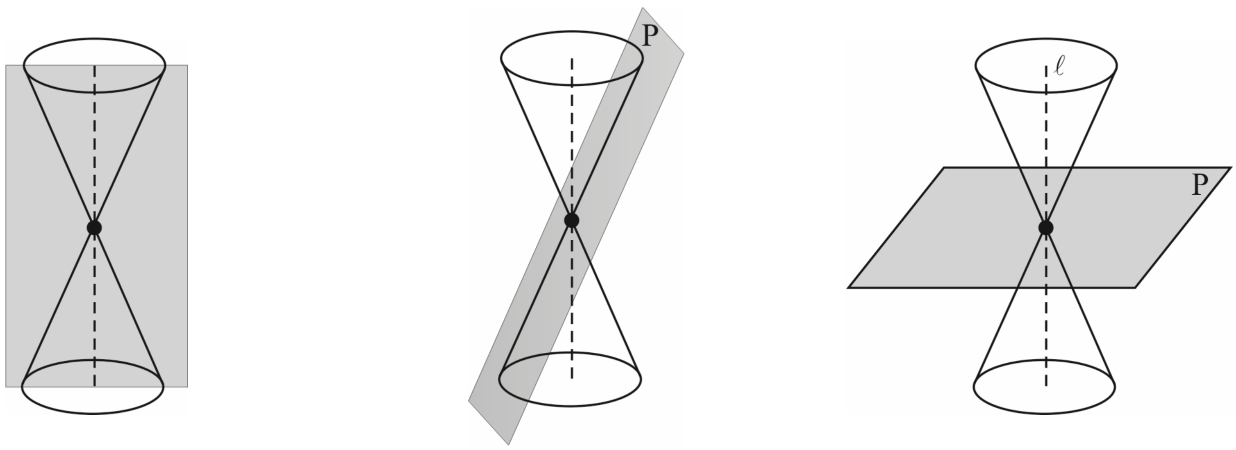
پ) صفحه، موازی محور سطح مخروطی باشد و از رأس آن عبور کند.

پاسخ:

الف) طبق شکل زیر وقتی صفحهٔ $\mathbf{P}$ بر محور ℓ عمود است و از رأس می‌گذرد، مقطع، یک نقطه (همان رأس) است.

ب) وقتی صفحهٔ $\mathbf{P}$ با مولد سطح مخروطی موازی است و از رأس آن می‌گذرد، مقطع یک خط (یکی از مولدهای سطح مخروطی) است.

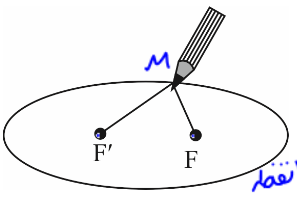
پ) وقتی صفحهٔ $\mathbf{P}$ موازی محور سطح مخروطی است و از رأس آن می‌گذرد، مقطع دو خط متقاطع است.



بیضی

همان‌طور که دیدیم بیضی یکی از مقاطع مخروطی است. در ادامه با ویژگی‌های بیضی آشنا می‌شویم:

۱) رسم بیضی: اگر در دو نقطه از کاغذ دو سوزن فرو کنیم و نخی را که طولش بیشتر از فاصلهٔ این دو نقطه است به آن دو سوزن وصل کنیم و طبق شکل مداد را در حالتی که نخ کاملاً کشیده است روی صفحه حرکت دهیم، یک بیضی رسم می‌شود.



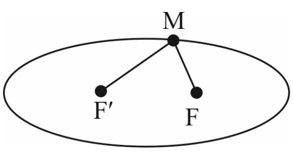
MF + MF′ = ۲a = ثابت = طول نخ

بیضی: مکان هندسی نقاطی از صفحه که مجموع فواصل آنها از ۲ نقطه مشخص به نام کانون ها برابر مقدار ثابت است.

۲) طبق شیوهٔ رسم بالا می‌توانیم بگوییم:

بیضی مجموعهٔ نقاطی از صفحه است که مجموع فواصل آن‌ها از دو نقطهٔ ثابت، مقداری ثابت است.

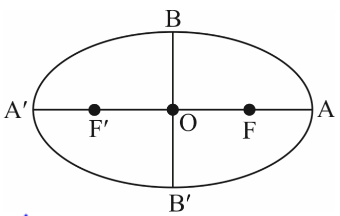
به آن دو نقطهٔ ثابت (همان نقاطی که در بالا در آن‌ها سوزن فرو کرده بودیم) می‌گوییم کانون‌های بیضی و معمولاً آن‌ها را با $\mathbf{F}$ و $\mathbf{F'}$ نشان می‌دهیم. مقدار ثابت را در تعریف بیضی با $\mathbf{۲a}$ نشان می‌دهیم.



۳) طبق مطالبی که گفتیم داریم:

بیضی مجموعهٔ نقاطی از صفحه است که مجموع فاصله‌هایشان از دو نقطهٔ ثابت به نام کانون برابر مقدار ثابت $\mathbf{۲a}$ باشد. یعنی اگر نقطه‌ای مانند $\mathbf{M}$ روی بیضی با کانون‌های $\mathbf{F}$ و $\mathbf{F'}$ باشد، داریم:

$\mathbf{MF + MF' = ۲a}$.



۴) بیضی دو محور تقارن دارد که بزرگ‌ترین قطر $\mathbf{(AA')}$ و کوچک‌ترین قطر $\mathbf{(BB')}$ بیضی‌اند.

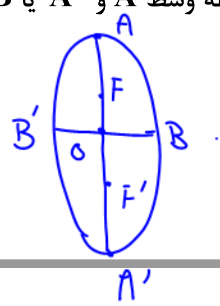
$\mathbf{AA' = ۲a}$ است و $\mathbf{BB' = ۲b}$، نقطهٔ وسط $\mathbf{A}$ و $\mathbf{A'}$ یا $\mathbf{B}$ و $\mathbf{B'}$ یا $\mathbf{F}$ و $\mathbf{F'}$ مرکز تقارن یا مرکز بیضی است.

بیضی افقی که نقاط A, A′ و F, F′ و O هم خط‌اند

AA′ = ۲a = فاصله ۲ رأس کانونی

BB′ = ۲b = فاصله ۲ رأس غیرکانونی

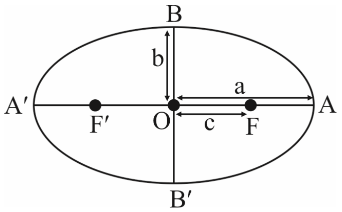
FF′ = ۲c = فاصله کانونی



$MF + MF' = ۲a$ $\qquad BF = MF = a$

$MF = MF' = a$

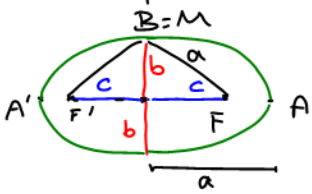
۵) در هر بیضی نصف قطر بزرگ برابر $\mathbf{a}$ و نصف قطر کوچک برابر $\mathbf{b}$ و نصف فاصلهٔ کـانونی (یعنـی $\frac{FF'}{۲}$) برابر $\mathbf{c}$ است.

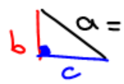


$OA = OA' = a$

$OB = OB' = b$

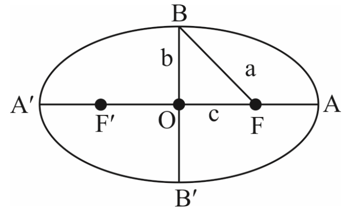
$OF = OF' = c$



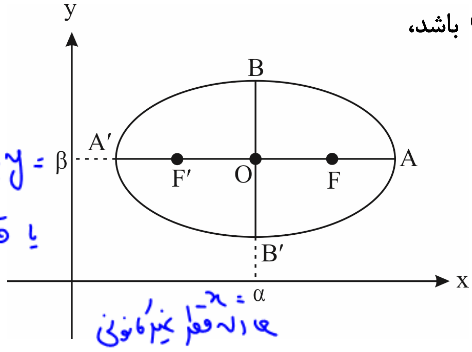


فاصله رأس غیرکانونی از کانون

$a^۲ = b^۲ + c^۲$



۶) بین $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ و $\mathbf{c}$ رابطهٔ $c^۲ = a^۲ - b^۲$ برقرار است.



$y = \beta$ معادله قطر کانونی یا قطر بزرگ

$x = \alpha$ معادله قطر غیرکانونی

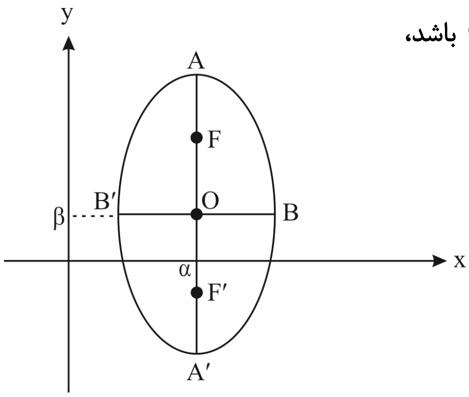
۷) در یک بیضی افقی (یعنی قطر بزرگ بیضی موازی محور xها است) اگر مرکز بیضی $O\left|\begin{matrix}\alpha\\ \beta\end{matrix}\right.$ باشد،

داریم:

$A\left|\begin{matrix}\alpha+a\\ \beta\end{matrix}\right.$ $\qquad A'\left|\begin{matrix}\alpha-a\\ \beta\end{matrix}\right.$

$B\left|\begin{matrix}\alpha\\ \beta+b\end{matrix}\right.$ $\qquad B'\left|\begin{matrix}\alpha\\ \beta-b\end{matrix}\right.$

$F\left|\begin{matrix}\alpha+c\\ \beta\end{matrix}\right.$ $\qquad F'\left|\begin{matrix}\alpha-c\\ \beta\end{matrix}\right.$



۸) در یک بیضی قائم (یعنی قطر بزرگ بیضی موازی محور yها است) اگر مرکز بیضی $O\left|\begin{matrix}\alpha\\ \beta\end{matrix}\right.$ باشد،

داریم:

$A\left|\begin{matrix}\alpha\\ \beta+a\end{matrix}\right.$ $\qquad A'\left|\begin{matrix}\alpha\\ \beta-a\end{matrix}\right.$

$B\left|\begin{matrix}\alpha+b\\ \beta\end{matrix}\right.$ $\qquad B'\left|\begin{matrix}\alpha-b\\ \beta\end{matrix}\right.$

$F\left|\begin{matrix}\alpha\\ \beta+c\end{matrix}\right.$ $\qquad F'\left|\begin{matrix}\alpha\\ \beta-c\end{matrix}\right.$

۹) برای این که مختصات رأس‌ها و کانون‌های بیضی را راحت‌تر بنویسیم یا همیشه یک شکل فرضی رسم می‌کنیم یا می‌گوییم:

در $\mathbf{B}$ و $\mathbf{B'}$ عرض مرکز با $\mathbf{b}$ جمع و تفریق می‌شود ـ در $\mathbf{A}$ و $\mathbf{A'}$ (یا $\mathbf{F}$ و $\mathbf{F'}$) طول مرکز با $\mathbf{a}$ (یا $\mathbf{c}$) جمع و تفریق می‌شود $\Leftarrow$ بیضی افقی

در $\mathbf{B}$ و $\mathbf{B'}$ طول مرکز با $\mathbf{b}$ جمع و تفریق می‌شود ـ در $\mathbf{A}$ و $\mathbf{A'}$ (یا $\mathbf{F}$ و $\mathbf{F'}$) عرض مرکز با $\mathbf{a}$ (یا $\mathbf{c}$) جمع و تفریق می‌شود $\Leftarrow$ بیضی قائم

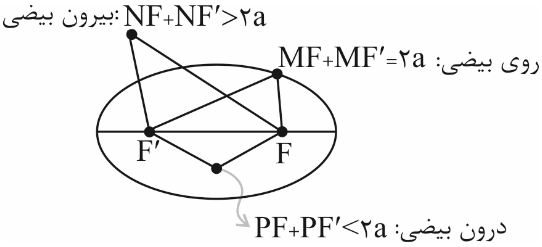
دو سر قطر بزرگ $\Leftarrow \pm a$ $\qquad$ دو سر قطر کوچک $\Leftarrow \pm b$ $\qquad$ کانون‌ها $\Leftarrow \pm c$

تست ۱۰: نقطه‌های $\mathbf{N}$ و $\mathbf{M}$ روی یک بیضی است که برای رسم آن باید نخ را در نقاط $\mathbf{F}$ و $\mathbf{F'}$ ببندیم. اگر $MF = ۶$، $MF' = ۴$ و فاصلهٔ نقطهٔ $\mathbf{N}$ از $\mathbf{F'}$ برابر ۳ باشد، $\mathbf{NF}$ چه‌قدر است؟

۱) ۴ $\qquad$ ۲) ۵ $\qquad$ ۳) ۶ $\qquad$ ۴) ۷

پاسخ: گزینهٔ «۴» ـ قرار شد $MF + MF'$ و $NF + NF'$ و ... همگی ثابت و بـا هـم برابـر باشـند. پـس $NF + ۳ = ۴ + ۶$ و در نتیجـه $NF = ۷$.

توجه: در بیضی سؤال قبل اگر جمع فاصله‌های نقطه‌ای از F و F' بیشتر از ۱۰ باشد، این نقطه بیرون بیضی است و اگر کم‌تر از ۱۰ باشـد، درون بیضی است.



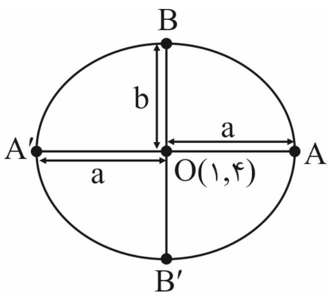
$۲a = ۱۰ \longrightarrow a = ۵$

$۲b = ۸ \longrightarrow b = ۴$

تست ۱۱: در بیضی افقی با مرکز $(۱,۴)$ و طول قطرهای ۸ و ۱۰، بیشترین مقدار طول و کم‌ترین مقدار عرض نقاط، چه‌قدر اختلاف دارند؟

۱) ۸   ۲) ۶   ۳) ۱۰   ۴) ۱۲

پاسخ: گزینهٔ «۲» ـ سؤال گفته $۲a = ۱۰$ و $۲b = ۸$، پس $a = ۵$ و $b = ۴$ و داریم:



$$y_{max} = y_B = y_O + b = ۴ + ۴ = ۸$$

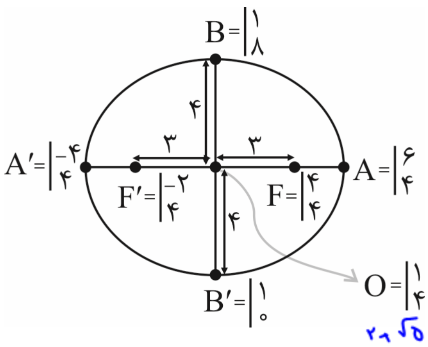
$$y_{min} = y_{B'} = y_O - b = ۴ - ۴ = ۰$$

نکته: موافقید که این بیضی بر محور xها مماس است (چون $y_{B'} = ۰$)

$$x_{min} = x_{A'} = x_O - a = ۱ - ۵ = -۴ \qquad x_{max} = x_A = x_O + a = ۱ + ۵ = ۶$$

پس $x_{max} - y_{min} = ۶$.

حالا مختصات نقاط این بیضی را ببینید:



راستی با توجه به فیثاغورس، c می‌شود ۳.

با این گزاره‌ها موافقید؟

الف) $-۴ \le x \le ۶$

ب) $۰ \le y \le ۸$

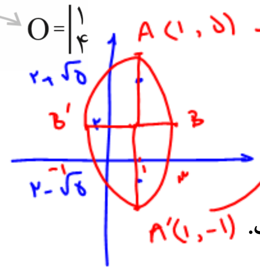
پ) $BF = a = ۵$

A(۱,۵)   یا . جمع طول و عرض = ۶

$y = x$

ت) یک کانون (F) روی نیمساز ربع اول است.

ث) یک رأس کانونی روی نیمساز ربع دوم (A') است. $y = -x$



ج) خطوط $x = ۶$، $x = -۴$، $y = ۸$ و $y = ۰$ بر بیضی مماس‌اند.

چ) معادلهٔ محور تقارن افقی، $y = ۴$ و معادلهٔ محور تقارن عمودی، $x = ۱$ است. A′(۱,-۱)

A, A′

تست ۱۲: در یک بیضی کانون‌ها $F(۱,۲+\sqrt{۵})$ و $F'(۱,۲-\sqrt{۵})$ هستند. اگر قطر کوچک به طول ۴ باشد، مجموع طـول و عـرض رأس کانونی بیضی کدام می‌تواند باشد؟

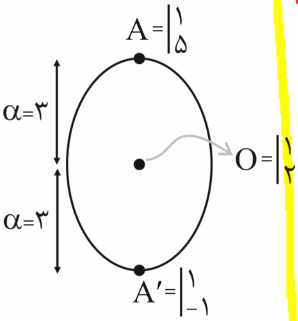
$۲b = ۴ \longrightarrow \boxed{b = ۲}$ $FF' = ۲\sqrt{۵} = ۲c$ $\boxed{c = \sqrt{۵}}$

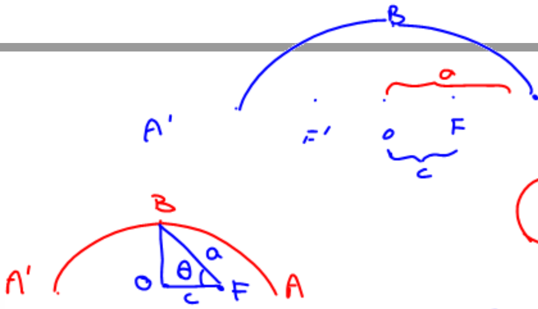
۱) ۵   ۲) ۶   ۳) ۷   ۴) ۸

$a^۲ = b^۲ + c^۲$, $a = ۳$

پاسخ: گزینهٔ «۲» ـ F و F' طول مساوی و عرض متفاوت دارند پس بیضی قائم است. مرکز بیضی در وسط F و F' یعنی $O(۱,۲)$ است و فاصلهٔ OF برابر $c = \sqrt{۵}$ است. سؤال گفته قطر کوچک $۲b = ۴$ است. پس $b = ۲$:

$$a^۲ = b^۲ + c^۲ = ۲^۲ + \sqrt{۵}^۲ = ۴ + ۵ = ۹ \Rightarrow a = ۳$$





خروج از مرکز: $e = \frac{c}{a}$

$c<a$ کمتر ز واحد زیرا

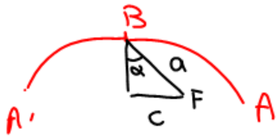
دایره $0 < e = \frac{c}{a} < 1$ پاره خط

$e = \cos\theta = \frac{c}{a}$

حالا مختصات رأس‌های کانونی:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} = \sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}} = \sqrt{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2}$$

نسبت قطر کوچک به بزرگ



$\sin\alpha = \frac{c}{a} = e$

دایره $\rightarrow a=b \rightarrow \frac{b}{a}=1 \rightarrow e=0$

و مجموع طول و عرض آن ۶ یا صفر است.

تست ۱۳: دو سر قطر بزرگ یک بیضی $(۱,۶)$ و $(۱,-۲)$ و خروج از مرکز آن $\frac{\sqrt{۷}}{۴}$ است. طول قطر کوچک این بیضی کدام است؟

۱) ۶   ۲) ۸   ۳) ۷   ۴) ۱۰

پاسخ: گزینهٔ «۱» ـ این بیضی قائم است (yها متفاوت‌اند) و داریم:

$$AA' = ۲a = ۶-(-۲) = ۸ \Rightarrow a = ۴$$

حالا e را داریم:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{۷}}{۴} \xrightarrow{a=۴} c = \sqrt{۷}$$

پس:

$$b^۲ = a^۲ - c^۲ = ۴^۲ - \sqrt{۷}^۲ = ۱۶ - ۷ = ۹ \Rightarrow b = ۳$$

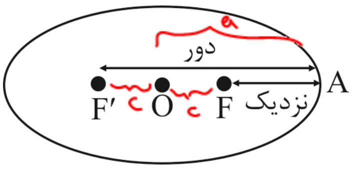
و طول قطر کوچک می‌شود:

$$BB' = ۲b = ۶$$

تست ۱۴: در یک بیضی فاصلهٔ رأس A از کانون دورتر ۳ برابر فاصلهٔ آن از کانون نزدیک‌تر است. خروج از مرکز کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۶}$

پاسخ: گزینهٔ «۳» ـ فاصله‌ها را ببینید:



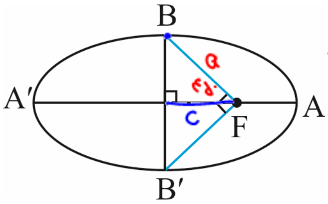
$$AF = a - c$$
$$AF' = a + c$$

سؤال گفته:

$$a + c = ۳(a-c) \longrightarrow a + c = ۳a - ۳c$$
$$۴c = ۲a$$
$$e = \frac{c}{a} = \frac{۲}{۴} = \frac{۱}{۲} = e$$

پس $۴c = ۲a$ و در نتیجه: $e = \frac{c}{a} = \frac{۱}{۲}$.

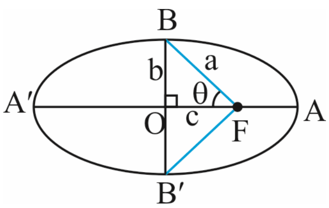
تست ۱۵: در یک بیضی زاویهٔ BFB' قائمه است. خروج از مرکز کدام است؟



$\cos 45^\circ = \frac{مجاور}{وتر} = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

پاسخ: گزینهٔ «۲» ـ شکل را ببینید:



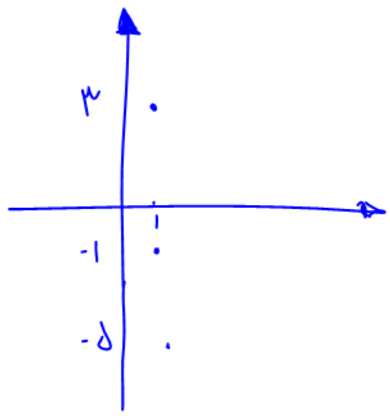
$$B\hat{F}B' = ۹۰^\circ \Rightarrow B\hat{F}O = ۴۵^\circ$$

$$e = \cos\theta = \frac{OF}{BF} = \frac{c}{a} = \cos ۴۵^\circ = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$y=-1 \quad x=1$

تست ۱۶: اگر نقاط $(۱,۳)$ و $(۱,-۵)$ کانون‌های یک بیضی باشند، معادلهٔ قطر بزرگ و کوچک بیضی به ترتیب کدام است؟

۱) $y=-۱$ و $x=۱$ ✓ ۲) $y=۱$ و $x=-۱$ ۳) $y=۱$ و $x=۱$ ۴) $y=-۱$ و $x=-۱$



تست ۱۷: مرکز یک بیضی افقی نقطهٔ $O(-۴,-۱)$ و خروج از مرکزش $\frac{۴}{۵}$ و طول قطر کوچکش ۶ واحد است. مختصات کانون‌های بیـضی کدام است؟

$2b=6$
$b=3$

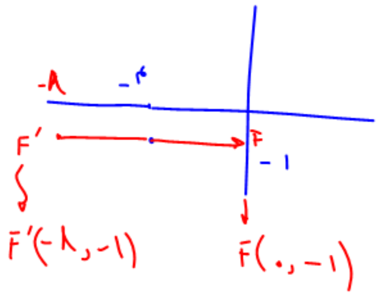
۱) $(-۷,-۱),(-۱,-۱)$ ۲) $(-۸,-۱),(۰,-۱)$ ✓

۳) $(-۴,-۵),(-۴,۳)$ ۴) $(-۴,-۴),(-۴,۲)$

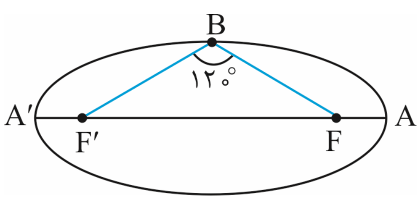
$e=\frac{c}{a}=\frac{4}{5}$

$a=5, \boxed{c=4}, b=3$

مرکز $O(-4,-1)$

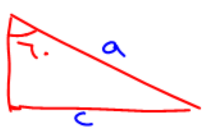


تست ۱۸: در شکل مقابل A و A' دو رأس قطر بزرگ و B یک رأس قطر کوچک بیضی است. خروج از مرکز بیضی کدام است؟



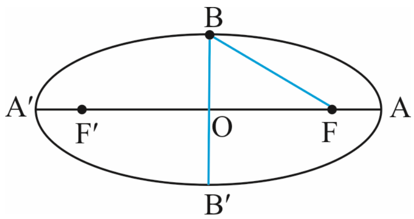
۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$

۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۴}$



$e=\frac{c}{a}=\frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}}=\sin 60=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۳ ✓

تست ۱۹: در بیضی زیر، $AA' = ۱۰$ و $BB' = ۶$ است. نسبت $\frac{AF}{BF}$ برابر کدام است؟



۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$

۳) $\frac{۱}{۵}$ ✓ ۴) $\frac{۱}{۶}$

$2a = 10 \quad 2b = 6$

$a = 5 \quad b = 3$

$c = 4$

$\frac{AF = a - c = 5 - 4}{BF = a = 5} = \frac{1}{5}$

$M(x, y)$ R $O(\alpha, \beta)$ مرکز

$OM = R = \sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2}$ ۲ طرف به توان ۲

$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2$

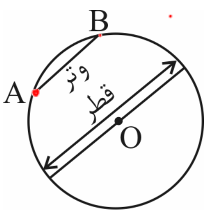
معادله استاندارد دایره

وتر

قطر: بزرگترین وتر دایره

دایره، مفاهیم ابتدایی

☑ دایره، مکان هندسی نقاطی از صفحه است که همگی از نقطه‌ی ثابتِ O، به فاصله‌ی معلومِ r، قرار گرفته‌اند. به O مرکز دایره و به r شعاع آن می‌گوییم.



☑ خطی که دو نقطه‌ی روی دایره را به هم وصل می‌کند، وتر نام دارد و وتری که از O بگذرد، قطر دایره است.

یه جور دیگه: همه‌ی قطرها در یک نقطه مشترک‌اند: همان مرکزِ دایره!

شگرد دسته خطوط قطر برای دایره

اگه دسته خطوط بهت داد: که در اصل یه معادله‌ی خط هستش که پارامتر هم داره و گفت این معادله‌ی همه‌ی قطرهای دایره است، تو این کار رو بکن: دو تا m دلخواه بهش بده تا دو تا معادله‌ی خطِ بدون پارامتر دربیاد، با حل اون دو تا توی یک دستگاه، مرکز درمیاد. اصلاً بهتره اون دو تا m رو طوری بدی که یه بار ضریب x و یه بار هم ضریب y رو صفر کنه، این‌جوری یه راست مرکز درمیاد...

تست ۲۰: دسته‌ی خطوط به معادلات $(m+۲)y + (m+۱)x + ۱ = ۰$ قطرهای یک دایره‌اند. اگر این دایره از نقطه‌ی $M \ (۵, ۲)$ بگذرد، شعاع آن چقدر است؟ *(سراسری ریاضی)*

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) $۲\sqrt{۳}$ ۴) $۳\sqrt{۲}$

پاسخ: گزینه‌ی «۲»

$$(m+۲)y + (m+۱)x + ۱ = ۰ \begin{cases} \xrightarrow{m=-۲} -x + ۱ = ۰ \Rightarrow x = ۱ \\ \xrightarrow{m=-۱} y + ۱ = ۰ \Rightarrow y = -۱ \end{cases} \xrightarrow{\text{مرکز}} O(۱, -۱) \xrightarrow{M=(۵,۲)} r = OM$$

$$= \sqrt{(۵-۱)^۲ + (۲+۱)^۲} = \sqrt{۱۶+۹} = ۵$$

جواب

معادله دایره: $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 5^2 = 25$

نوشتن معادله‌ی دایره در حالتِ استاندارد

☑ فرم کلی معادله‌ی دایره: $(x - \bigcirc)^۲ + (y - \bigcirc)^۲ = \bigcirc^۲$

☑ برای نوشتن معادله‌ی دایره، پس از نوشتن معادله‌ی خامِ بالا (!)، پرانتزها رو با مختصات مرکز پُر کن و سمت راست رو با شعاعِ دایره. ببین:

$$(x - \bigcirc)^۲ + (y - \bigcirc)^۲ = \bigcirc^۲ \xrightarrow[r = \text{شعاع}]{O(\alpha, \beta) = \text{مرکز}} (x - \alpha)^۲ + (y - \beta)^۲ = r^۲$$

تست ۲۱: معادله‌ی دایره‌ای که مرکزش $O=(-۱,۱)$ بوده و از نقطه‌ی $A=(۲,۰)$ می‌گذرد، برابر است با:

۱) $x^۲+y^۲-۴x=۴$ ۲) $x^۲+y^۲+۲y=۸$

۳) $x^۲+y^۲+۲x-۲y=۸$ ۴) $x^۲+y^۲-۲x+۲y=۰$

پاسخ: گزینه‌ی «۳»

$$O=(-۱,۱)\xrightarrow{A=(۲,۰)}OA=r=\sqrt{(-۱-۲)^۲+(۱-۰)^۲}=\sqrt{۹+۱}=\sqrt{۱۰}$$

$$\xrightarrow{\text{معادله‌ی دایره}}(x-(-۱))^۲+(y-۱)^۲=(\sqrt{۱۰})^۲\xrightarrow{\text{باز کردن اتحادها}}x^۲+۲x+۱+y^۲-۲y+۱=۱۰$$

$$\xrightarrow{\text{ساده}}x^۲+y^۲+۲x-۲y=۸$$

جواب شد.

دریافت اطلاعات از معادله‌ی استاندارد دایره

۱) توجه کن معادله‌ی داده‌شده، استاندارد باشد. یعنی ضریب x و yِ درون پرانتز و هم‌چنین ضریبِ خودِ پرانتزها، یک باشه. اگر در معادله‌ی استاندارد، اتحادها باز نشده باشد ولی x و y یا پرانتزها، ضریبی غیر از ۱ داشته باشند؛ مثل $۴(x-۲)^۲+(۲y-۳)^۲=۸$ باید اول ضریب x و y رو فاکتور بگیری تا بیان بیرون پرانتز! بعدش دو طرف رو تقسیم کنی تا استاندارد بشه...

$۴(x-۲)^۲+(۲(y-\frac{۳}{۲}))^۲=۸$

$۴(x-۲)^۲+۴(y-\frac{۳}{۲})^۲=۸$

$(x-۲)^۲+(y-\frac{۳}{۲})^۲=۲=R^۲\longrightarrow R=\sqrt{۲}$

مرکز $O(۲,\frac{۳}{۲})$

خب حالا می‌تونی بگی:

۲) مرکز دایره: هر کدوم از پرانتزها رو صفر کن و ریشه‌ی حاصل رو اعلام کن...

۳) شعاع دایره: از عددِ سمت راست، جذر بگیرا!

تست ۲۲: مساحت دایره‌ی $(۲x+۱)^۲+(۱-۲y)^۲=۲$ چه‌قدر است؟

۱) ۴π ۲) $\frac{\pi}{۲}$ ۳) ۲π ۴) π

پاسخ: گزینه‌ی «۲»

$$(۲x+۱)^۲+(۱-۲y)^۲=۲\xrightarrow{\text{فاکتور از توی پرانتزها بگیر}}(۲(x+\frac{۱}{۲}))^۲+(-۲(y-\frac{۱}{۲}))^۲=۲$$

$$\xrightarrow{\text{توان رو بده به هر کدام!}}۴(x+\frac{۱}{۲})^۲+۴(y-\frac{۱}{۲})^۲=۲\xrightarrow{\div ۴}(x+\frac{۱}{۲})^۲+(y-\frac{۱}{۲})^۲=\frac{۱}{۲}\xrightarrow{\text{مرکز}}O=(-\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲})$$

$$\xrightarrow{\text{شعاع}}r=\sqrt{\frac{۱}{۲}}\xrightarrow{\text{مساحت}}\pi r^۲=\pi\times\frac{۱}{۲}=\frac{\pi}{۲}$$

معادله‌ی گسترده‌ی دایره

شگرد دایره‌ی گسترده:

☑ گاهی در معادله‌ی گسترده، پرانتز اتحادها رو به توان دو رسانده و تمام جملات را به یک طرف منتقل کرده و ساده می‌کنند! به این فرمِ دایره، معادله‌ی گسترده می‌گوییم.

اگر معادله‌ی گسترده، به صورتِ $x^۲+y^۲+ax+by+c=۰$ داده شده بود، ضریبِ x و y را به -۲ تقسیم کنید. این‌جوری مرکز به‌دست میاد: $O(\frac{a}{-۲},\frac{b}{-۲})$. برای به دست آوردن شعاع، این کار رو انجام بده: مرکز رو که درآوردی، اسمش رو به ترتیب بذار (α,β)، بعدش هم اینا رو بذار تو فرمول $r=\sqrt{\alpha^۲+\beta^۲-c}$ و تمام! راستی c، عدد ثابتِ آخرِ معادله‌ی دایره است که بعدش دیگه معادله‌ی دایره، مساویِ صفر می‌شه!

$\alpha\ ,\ \beta$

حواستون باشه ضریبِ $x^۲$ و $y^۲$ حتماً ۱ باشه تا از این فرمول‌ها استفاده کنی! اگه نبود با تقسیم دو طرف، درستش کن! تازه عدد c هم باید سمت چپ تساوی باشه! یعنی معادله‌ی دایره‌ی گسترده، سمتِ راستش صفر باشه؛ اگه نبود همه رو بیار یه طرف! ببین:

$$۲x^۲+۲y^۲-۴x+۶y-۶=۰ \xrightarrow{÷۲} x^۲+y^۲-۲x+۳y-۳=۰ \xrightarrow{\text{مرکز}} O(\frac{-۲}{-۲},\frac{۳}{-۲})=(۱,-\frac{۳}{۲})$$

$$\xrightarrow{\text{شعاع}} r=\sqrt{۱^۲+(-\frac{۳}{۲})^۲-(-۳)}=\frac{۵}{۲}$$

$O(\frac{a}{۲},-b)$

تست ۲۳: اگر $O(۱,۲)$ مرکز دایره‌ی $x^۲+y^۲-ax+۲by=۰$ باشد، $a+b$ کدام است؟

۱) ۲ ‏ ‏ ‏ ۲) -۲ ‏ ‏ ‏ ۳) ۴ ‏ ‏ ‏ ۴) صفر

پاسخ: گزینه‌ی «۴»

$$x^۲+y^۲-ax+۲by=۰ \xrightarrow{\text{مرکز}} O=(\frac{-a}{-۲},\frac{۲b}{-۲})=(\frac{a}{۲},-b)=\underbrace{\boxed{(۱,۲)}}_{\text{فرض}} \Rightarrow \frac{a}{۲}=۱\ ,\ -b=۲$$

$$\Rightarrow a=۲\,,b=-۲ \Rightarrow a+b=۰$$

شرط دایره بودنِ یه رابطه

☑ اگر معادله‌ی $Ax^۲+By^۲+Cx+Dy+E=۰$ دایره باشد، آن‌گاه $A=B$ خواهد بود. البته عکسِ این جمله درست نیست. چرا که شعاعِ دایره هم باید عددی مثبت باشد.

یه جور دیگه: شرط لازم و کافی برای دایره بودن معادلـه‌ی $x^۲+y^۲+ax+by+c=۰$، کـه ضـریبِ $x^۲$ و $y^۲$ اون رو ۱ کـردی(!) اینـه که $a^۲+b^۲>۴c$.

تست ۲۴: شعاع دایره‌ی $ax^۲+y^۲-۲x-۶y=k$ برابر ۳ است. $a+k$ کدام است؟

۱) صفر ‏ ‏ ‏ ۲) ۱ ‏ ‏ ‏ ۳) -۱ ‏ ‏ ‏ ۴) ۲

پاسخ: گزینه‌ی «۱»

$$ax^۲+y^۲-۲x-۶y=k \xrightarrow{\text{ضریب } x^۲ = \text{ضریب } y^۲} a=۱ \xrightarrow{\text{همه یک طرف}} x^۲+y^۲-۲x-۶y-k=۰$$

$$\xrightarrow{\text{مرکز}} O=(\frac{-۲}{-۲},\frac{-۶}{-۲})=\boxed{(۱,۳)} \xrightarrow{\text{شعاع}} r=\sqrt{۱^۲+۳^۲-(-k)}=\underbrace{\boxed{۳}}_{\text{فرض}} \longrightarrow k=-۱ \Rightarrow a+k=(۱)+(-۱)=۰$$

تست ۲۵: به ازای چند مقدار a، نمودار $۲x^۲+(a^۲-۷)y^۲+۴y+a=۰$ دایره می‌باشد؟ *(تجربی خارج)*

۱) دو مقدار ‏ ‏ ‏ ۲) حداقل دو مقدار ‏ ‏ ‏ ۳) یک مقدار ‏ ‏ ‏ ۴) هیچ مقدار

پاسخ: گزینه‌ی «۳»

$$۲x^۲+(a^۲-۷)y^۲+۴y+a=۰ \xrightarrow{\text{ضریب } x^۲ = \text{ضریب } y^۲} ۲=a^۲-۷ \xrightarrow{\text{حل}} a^۲=۹ \Rightarrow a=\pm ۳$$

$$\text{جایگذاری کن}\begin{cases} \xrightarrow{a=۳} ۲x^۲+۲y^۲+۴y+۳=۰ \\ \xrightarrow{a=-۳} ۲x^۲+۲y^۲+۴y-۳=۰ \end{cases}$$

$O(۰,-۱)$ $R=\sqrt{۰^۲+(-۱)^۲-\frac{۳}{۲}}<$ ✗

$$\Rightarrow \begin{cases} \xrightarrow{÷۲} x^۲+y^۲+۲y+\frac{۳}{۲}=۰ \xrightarrow{\text{بررسی } a^۲+b^۲>۴c} ۰^۲+۲^۲>?۴(\frac{۳}{۲}) ☒ \\ \xrightarrow{÷۲} x^۲+y^۲+۲y-\frac{۳}{۲}=۰ \xrightarrow{\text{بررسی } a^۲+b^۲>۴c} ۰^۲+۲^۲>?۴(-\frac{۳}{۲}) ☑ \end{cases}$$

$O(۰,-۱) \longrightarrow R=\sqrt{(۰)^۲+(-۱)^۲-(-\frac{۳}{۲})}>۰$ ✓

نوشتن معادله‌ی دایره با اطلاعاتی به جز مرکز و شعاع، به شش‌تاییِ کنکوری

۱) مرکز دایره و نقطه‌ای از دایره داده شده‌اند: خُب، فاصله‌ی مرکز تا هر نقطه‌ی روی دایره، مساوی شعاع است...

تست ۲۶: نقطه‌ی $O=(a,2a)$ مرکز دایره‌ای است که از نقاط $A=(2,1)$ و $B=(-1,4)$ می‌گذرد. شعاع دایره کدام است؟

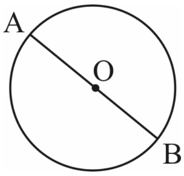
۱) ۳　　　۲) ۴　　　۳) $2\sqrt{2}$　　　۴) $3\sqrt{2}$

پاسخ: گزینه‌ی «۱»

$$OA=OB=r \xrightarrow[O=(a,2a)]{A(2,1),B(-1,4)} \sqrt{(a-2)^2+(2a-1)^2}=\sqrt{(a+1)^2+(2a-4)^2}$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲ و اتحاد}} \cancel{a^2}-4a+4+\cancel{4a^2}-4a+1=\cancel{a^2}+2a+1+\cancel{4a^2}-16a+16 \xrightarrow{\text{ساده}} 6a=12 \Rightarrow a=2$$

$$\xrightarrow{OA=r} r=\sqrt{(2-2)^2+(4-1)^2}=3$$



۲) مختصات دو سرِ یک قطر از دایره داده شده‌اند: وسط این دو نقطه، می‌شه مرکز دایره. فاصله‌ی این دو نقطه رو هم حساب کن و بعد نصف کن تا بشه شعاع! $r=\frac{|AB|}{2}, O=\frac{A+B}{2}$

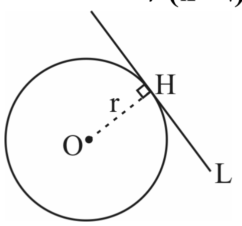
تست ۲۷: دایره‌ای که مختصات دو سر قطر آن $A=(4,1)$ و $B=(-2,3)$ باشند، از کدام نقطه‌ی زیر نمی‌گذرند؟

۱) $(2,5)$　　　۲) $(4,1)$　　　۳) $(0,1)$　　　۴) $(0,-1)$

پاسخ: گزینه‌ی «۳»

$$A=(4,1),B=(-2,3)\begin{cases} \xrightarrow{\frac{|AB|}{2}} r=\frac{1}{2}\sqrt{(-2-4)^2+(3-1)^2}=\sqrt{10} \\ \xrightarrow{\frac{A+B}{2}} O=\frac{(2,4)}{2}=(1,2) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{معادله‌ی دایره}} (x-1)^2+(y-2)^2=10 \xrightarrow[\text{گزینه‌ی ۳}]{\text{امتحان گزینه‌ها}} (0-1)^2+(1-2)^2=10 \boxed{\times}$$



۳) مرکز دایره داده‌شده و معادله‌ی خطی که دایره بر آن مماس است، هم معلومه: فاصله‌ی مرکز رو از اون خطِ مماس حساب کن، می‌شه شعاع دایره...

فاصله $A(x_0,y_0)$ از خط: $ax+by+c=0$:

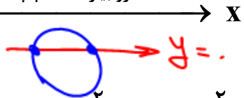
$d=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

تست ۲۸: دایره‌ای به مرکز $(2,-1)$ و مماس بر خط به معادله‌ی $x-y=1$، محور xها را در نقطه‌ای با کدام طول قطع می‌کند؟

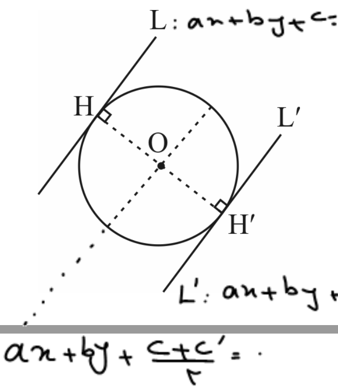
۱) ۳ و ۱　　　۲) ۴ و ۱　　　۳) ۳ و ۲　　　۴) ۴ و ۱/۵　　　(تجربی ۹۵)

پاسخ: گزینه‌ی «۱»

$$x-y=1 \xrightarrow{\text{همه رو بیار سمت چپ}} x-y-1=0 \xrightarrow{O=(2,-1)} r=OH=\frac{|2-(-1)-1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$



$$\xrightarrow{\text{معادله‌ی دایره}} (x-2)^2+(y+1)^2=2 \xrightarrow[y=0]{\text{تلاقی با محور }x\text{ها}} (x-2)^2+1=2 \Rightarrow x-2=\pm1 \Rightarrow x=3,1$$



۴) دایره‌ای که بر دو خط موازی، مماس باشد: فاصله‌ی این دو خط موازی رو حساب کن، نصفش می‌شه شعاع دایره، هر نقطه‌ای که وسطِ این دو تا خط باشه هم، می‌تونه مرکز دایره باشه. (ببین تست اطلاعات بیشتری داده یا نه؟) بد نیست یادآوری کنیم اگر $L: ax+by+c$ و $L': ax+by+c'$ باشند، آن‌وقت خطِ وسطی می‌شه $ax+by+\frac{c+c'}{2}=0$.

$d=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

فاصله دو خط $ax+by+c=0$ ، $ax+by+c'=0$

$O \in$ خط وسط

$y-x=۰$

$y-x-۴=۰$

خط وسط: $\ast\ y-x+\frac{-۴+۰}{۲}=۰$

فاصله $=\frac{|۰-(-۴)|}{\sqrt{(۱)^۲+(-۱)^۲}}=\frac{۴}{\sqrt{۲}}\xrightarrow{\text{نصف}}R=\frac{۲}{\sqrt{۲}}=\sqrt{۲}$

$O(-۱,\overset{\ast}{۱})$ مرکز روی خط * زندگی می‌کند.

تست ۲۹: معادله‌ی دایره‌ای که مرکزش به طول ۱- و بر دو خط به معادلات $y=x$ و $y=x+۴$ مماس باشد، کدام است؟ *(سراسری ریاضی)*

$(x+۱)^۲+(y-۱)^۲=(\sqrt{۲})^۲$

$x^۲+y^۲+۲x-۲y=۰$

۱) $x^۲+y^۲+۲x-۲y=۰$ ۲) $x^۲+y^۲+۲x-۲y=۱$

۳) $x^۲+y^۲-۲x+y=۱$ ۴) $x^۲+y^۲+۲x-y=۲$

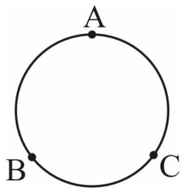
پاسخ: گزینه‌ی «۱»

$$\begin{matrix} y=x \Rightarrow x-y=۰ \\ y=x+۴ \Rightarrow x-y+۴=۰ \end{matrix} \xrightarrow{\text{فاصله‌ی دو خط موازی}} \frac{|۰-۴|}{\sqrt{۱^۲+(-۱)^۲}}=\frac{۴}{\sqrt{۲}}=۲\sqrt{۲} \xrightarrow{\div ۲} r=\sqrt{۲}$$

$$\xrightarrow{\text{وسط دو خط}} x-y+\frac{۰+۴}{۲}=۰ \xrightarrow{\text{ساده}} x-y+۲=۰ \xrightarrow[x=-۱]{\text{طول مرکز ۱- است}} -۱-y+۲=۰ \Rightarrow y=۱ \Rightarrow O(-۱,۱)$$

$$\xrightarrow{\text{معادله‌ی دایره}} (x+۱)^۲+(y-۱)^۲=۲ \xrightarrow{\text{اتحاد ساده}} x^۲+y^۲+۲x-۲y=۰$$

اگه تست بهتون گفت که دایره‌ای از نقطه‌ی (a,b) می‌گذره، معادله‌ی دایره رو تا هر جا که می‌تونی بنویس و آخرش نقطه‌ی (a,b) رو بذار توی معادله‌ی دایره: در واقع به جای xاش بذار a و به جای y هم بذار b ...



۵) معادله‌ی دایره‌ای که از سه نقطه‌ی غیرهم‌خط می‌گذرد: معادله‌ی دایره را به صورت $x^۲+y^۲+ax+by+c=۰$ در نظر بگیرید، بعدش اون سه تا نقطه رو تو این معادله قرار بدید، حالا سه معادله داری و سه مجهول...!

یه روش دیگه هم هست: عمودمنصف AB و AC رو بنویسی و قطع بدی، اون وقت مرکز به دست میاد. شعاع هم که دیگه کاری نداره!

تست ۳۰: شعاع دایره‌ی گذرا بر سه نقطه‌ی $(۰,۰)$، $(۲,۱)$ و $(۱,-۲)$ برابر کدام است؟ *(تجربی ۹۳)*

۱) $\frac{\sqrt{۱۰}}{۲}$ ۲) $\sqrt{۳}$ ۳) $\sqrt{۵}$ ۴) $\frac{\sqrt{۱۳}}{۲}$

پاسخ: گزینه‌ی «۱»

$$x^۲+y^۲+ax+by+c=۰ \xrightarrow{\text{صدق دادن نقطه‌ها}} \begin{cases} (۰,۰) \Rightarrow c=۰ \\ (۲,۱) \Rightarrow ۴+۱+۲a+b+c=۰ \xrightarrow{c=۰} ۲a+b=-۵ \\ (۱,-۲) \Rightarrow ۱+۴+a-۲b+c=۰ \xrightarrow{c=۰} a-۲b=-۵ \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{حل دستگاه}} a=-۳\,,\,b=۱ \xrightarrow[\text{جایگزین کن!}]{\text{معادله‌ی دایره}} x^۲+y^۲-۳x+y=۰ \xrightarrow{\text{مرکز}} O=(\frac{۳}{۲},-\frac{۱}{۲}) \xrightarrow{\text{شعاع}} r=\sqrt{\frac{۹}{۴}+\frac{۱}{۴}-۰}=\frac{\sqrt{۱۰}}{۲}$$

۶) تست بهت می‌گه که مرکز دایره روی فلان خط هستش! خب شما مرکز رو $O(\alpha,\beta)$ می‌گیری و به جای x و yِ اون خط به ترتیب α و β رو جایگذاری می‌کنی، بعدش α رو برحسب β به دست میاری (اگرم خواستی می‌تونی β رو برحسب α به‌دست بیاری!!) حالا مرکز فقط برحسب یه مجهول خواهد بود...

تست ۳۱: دایره‌ای از دو نقطهٔ $\overset{A}{(۰,۱)}$ و $\overset{B}{(۳,۰)}$ گذشته و معادلهٔ یک قطر آن به صورت $x-y=۲$ است. شعاع این دایره کدام است؟ *(تجربی خارج ۹۰)*

مرکز $O(\alpha,\beta)$ — مرکز روی معادله قطر است

قطر: $x-y-۲=۰$

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) ۲   ۳) $\sqrt{۵}$ ۴) ۳

$O(\alpha,\beta) \in x-y-۲=۰$

$\alpha-\beta-۲=۰$

$\alpha=\beta+۲$

$\alpha-\beta=۲ \longrightarrow \beta=\alpha-۲$

معادله استاندارد دایره: $(x-\alpha)^۲+(y-\beta)^۲=R^۲$

مختصات A و B را در دایره بذار

$(x-\alpha)^۲+(y-\alpha+۲)^۲=R^۲ \xrightarrow{\text{A و B روی دایره‌اند}}$

$(۰-\alpha)^۲+(۱-\alpha+۲)^۲=R^۲ \longrightarrow \alpha^۲+(۳-\alpha)^۲=R^۲$

$(۳-\alpha)^۲+(۰-\alpha+۲)^۲=R^۲ \longrightarrow (۳-\alpha)^۲+(۲-\alpha)^۲=R^۲$

$\longrightarrow \alpha^۲+\cancel{(۳-\alpha)^۲}=\cancel{(۳-\alpha)^۲}+(۲-\alpha)^۲$

$\cancel{\alpha^۲}=۴+\cancel{\alpha^۲}-۴\alpha \longrightarrow \alpha=۱$

$\alpha=۱ \longrightarrow ۱+(۳-۱)^۲=۱+۴=۵=R^۲ \longrightarrow R=\sqrt{۵}$

معادله‌ی دایره در قالب مکان هندسی!

☑ مکان هندسی نقاطی که فاصله‌شان از نقطه‌ی معلوم $\mathbf{A}$، $\mathbf{k}$ برابرِ فاصله‌اش از نقطه‌ی معلومِ $\mathbf{B}$ باشد $(\mathbf{k} \neq ۰,۱)$ دایره است. در این حالت $\mathbf{M = (x,y)}$ را در نظر بگیرید، حالا شرطِ $|\mathbf{MA}| = \mathbf{k}\,|\mathbf{MB}|$ رو اجرا کنید... معادله‌اش درمیاد!

تست ۳۲: مکان هندسی نقاطی از صفحه که فاصله‌ی آن‌ها از نقطه‌ی $\mathbf{A = (۳,۵)}$، $\sqrt{۲}$ برابرِ فاصله‌ی آن‌ها از نقطه‌ی $\mathbf{B = (۲,۳)}$ باشد، کدام است؟ *(مشابه تجربی ۹۷)*

۱) $x^۲ + y^۲ = ۸$ ‏ ۲) $(x-۱)^۲ + (y-۱)^۲ = ۶$

۳) $(x-۱)^۲ + (y-۱)^۲ = ۱۰$ ‏ ۴) $(x-۱)^۲ + (y+۱)^۲ = ۱۰$

پاسخ: گزینه‌ی «۳»

$$\sqrt{(x-۳)^۲ + (y-۵)^۲} = \sqrt{۲} \times \sqrt{(x-۲)^۲ + (y-۳)^۲}$$

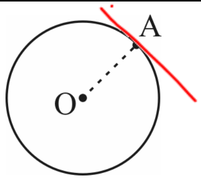
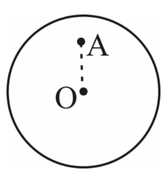
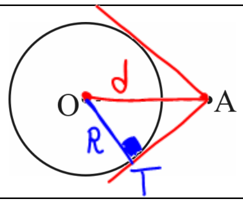
$$\xrightarrow{\text{توان ۲ و اتحاد}} x^۲ - ۶x + ۹ + y^۲ - ۱۰y + ۲۵ = ۲(x^۲ - ۴x + ۴ + y^۲ - ۶y + ۹) \xrightarrow{\text{ساده}} x^۲ + y^۲ - ۲x - ۲y - ۸ = ۰$$

$$\xrightarrow{\text{مرکز}} O = (۱,۱) \xrightarrow{\text{شعاع}} r = \sqrt{۱+۱+۸} = \sqrt{۱۰} \xrightarrow{\text{معادله‌ی استاندارد}} (x-۱)^۲ + (y-۱)^۲ = ۱۰$$

وضعیت یک نقطه و دایره نسبت به هم

شگرد نقطه و دایره در یک جدول

☑ اگه $\mathbf{A = (x_۰, y_۰)}$ یه نقطه و $\mathbf{f(x,y) = x^۲ + y^۲ + ax + by + c = ۰}$، معادله‌ی دایره باشند، اون‌وقت اگه نقطه رو تو معادله‌ی دایره جایگذاری کنی، یعنی $\mathbf{f(A) = x_۰^۲ + y_۰^۲ + ax_۰ + by_۰ + c}$، می‌شه باهاش وضع نقطه و دایره رو فهمید:

	مفهوم هندسی	شرط مختصاتی	تعداد مماس‌های قابل رسم از A بر دایره	شکل
A روی دایره	$OA = r$	$f(A) = ۰$	۱ مماس	
A داخل دایره	$OA < r$	$f(A) < ۰$	هیچ مماس	
A خارج دایره	$OA > r$	$f(A) > ۰$	۲ مماسِ مساوی	

$OA = d = \sqrt{(x_۰ - x_A)^۲ + (y_۰ - y_A)^۲}$ ‏ طول مماس AT $\rightarrow (OA)^۲ = R^۲ + AT^۲$

تست ۳۳: از نقطه‌ی $A=(۱,۲)$ چند مماس بر دایره‌ی $x^۲+y^۲-۲x-۶y=۲۶$ می‌توان رسم کرد؟

۱) هیچ　　　۲) ۱　　　۳) ۲　　　۴) بی‌شمار

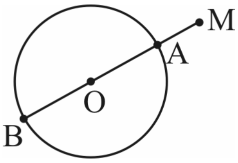
پاسخ: گزینه‌ی «۱»

$$x^۲+y^۲-۲x-۶y-۲۶=۰ \xrightarrow[x=۱,\,y=۲]{\text{جایگذاری کن (۱,۲) را!!}} (۱)^۲+(۲)^۲-۲(۱)-۶(۲)-۲۶=-۳۵<۰$$

$\Rightarrow$ نقطه داخل دایره است $\xrightarrow{\text{تعداد مماس}}$ هیچ

دورترین و نزدیک‌ترین نقطه‌های دایره تا یک نقطه‌ی داده‌شده

☑ کم‌ترین و بیشترین فاصله‌ی نقطه‌ی M تا دایره، زمانی اتفاق می‌افتد که از M به مرکز دایره وصل کنید تا دایره را در دو نقطه‌ی A و B قطع کند. اون‌وقت:



۱) بیشترین فاصله‌ی نقطه‌ی M تا (نقاطِ) دایره $= MB = \boxed{OM+r}$

۲) کم‌ترین فاصله‌ی نقطه‌ی M تا (نقاطِ) دایره $= MA = \boxed{|OM-r|}$

این فرمول‌ها، هیچ ربطی به جای M ندارن! یعنی M می‌تونه بیرون یا درون، یا حتی روی دایره باشد.

تست ۳۴: بیشترین و کم‌ترین فاصله‌ی نقاط دایره‌ی $x^۲+y^۲-۶x+۵=۰$ از نقطه‌ی $(۶,۴)$ کدام است؟

۱) ۶ و ۲　　　۲) ۷ و ۳　　　۳) ۵ و ۱　　　۴) ۸ و ۴

پاسخ: گزینه‌ی «۲»

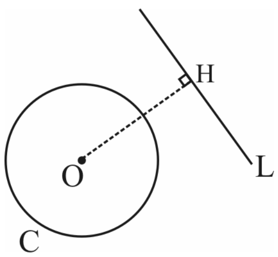
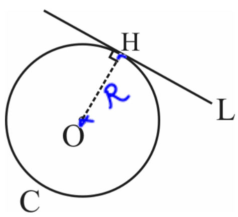
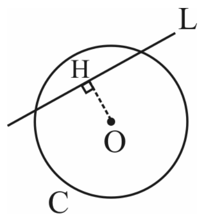
$$x^۲+y^۲-۶x+۵=۰ \xrightarrow{\text{مرکز}} O=(۳,۰)\begin{cases} \xrightarrow{\text{شعاع}} r=\sqrt{۹+۰-۵}=۲ \\ \xrightarrow[M=(۶,۴)]{\text{فاصله‌ی مرکز تا نقطه}} OM=\sqrt{(۳-۶)^۲+(۰-۴)^۲}=۵ \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{بیشترین و کم‌ترین فاصله}} |OM\pm r|=|۵\pm ۲|=۷,۳$$

خط و دایره در یک جدول

۱) فاصله‌ی مرکز دایره تا اون خط رو پیدا کن، اسمش رو می‌ذاریم OH.

۲) خب حالا برو سراغ جدول:

خط و دایره متقاطع‌اند.	خط بر دایره مماس است.	خط، دایره را قطع نمی‌کند.
 $OH<r$	 $OH=r$	 $OH>r$

$x^۲+y^۲-۲x-۳=۰$　　　$y-mx-۲=۰$

تست ۳۵: به ازای کدام مقادیر m خط به معادله‌ی $y=mx+۲$ بر دایره به معادله‌ی $x^۲+y^۲-۲x=۳$ مماس است؟ *(تجربی خارج ۹۱)*

۱) $-\frac{۴}{۳}$ و صفر　　　۲) $\frac{۴}{۳}$ و صفر　　　۳) $-\frac{۲}{۳}$ و ۱　　　۴) $\frac{۲}{۳}$ و ۱

فاصله مرکز، مماس برابر شعاع　　مرکز $O(۱,۰)$　　$R=\sqrt{(۱)^۲+(۰)^۲-(-۳)}=۲$

$$d=\frac{|y-mx-۲|}{\sqrt{(۱)^۲+(-m)^۲}}=\frac{|۰-m-۲|}{\sqrt{m^۲+۱}}=\frac{|m+۲|}{\sqrt{m^۲+۱}}=R=۲$$

$-(m+۲)$

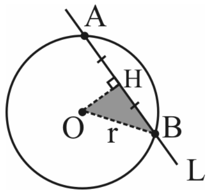
کنترل گزینه‌ها: صفر، ۳ که درسته حالا $\frac{۳}{۴}$ یا $-\frac{۳}{۴}$ را چک کن.

پاسخ: گزینه‌ی «۲»

$$y = mx + ۲ \xrightarrow{\text{همه، یک طرف باشن!}} mx - y + ۲ = ۰ \xrightarrow[r=\sqrt{۱+۰+۳}=۲]{O(۱,۰)} \underbrace{OH = \frac{|m - ۰ + ۲|}{\sqrt{m^۲ + ۱}} = \boxed{۲}}_{\text{شعاع = فاصله‌ی مرکز تا مماس}}$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} \frac{m^۲ + ۴m + ۴}{m^۲ + ۱} = ۴ \xrightarrow{\text{ساده}} ۳m^۲ - ۴m = ۰ \Rightarrow m = ۰ \text{ یا } \frac{۴}{۳}$$

طول وتر



☑ اگر خطی مثل L، دایره‌ای را قطع کند، روی دایره وتری جدا می‌کند، به نام AB. برای پیدا کردنِ طول AB، فاصله‌ی مرکز را تا خط حساب کن (یعنی OH). شعاع دایره هم که معلوم شد، حالا طبق فیثاغورس خواهی داشت: $AB = ۲\sqrt{r^۲ - OH^۲}$

تست ۳۶: طول پاره‌خطی که دایره‌ی $x^۲ + y^۲ - ۲x - ۸y = ۸$، از خطِ $۵x + ۱۲y = ۱۴$ جدا می‌کند، کدام است؟ *(مشابه خارج تجربی ۹۸)*

۱) ۱۰   ۲) ۹   ۳) ۸   ۴) ۷

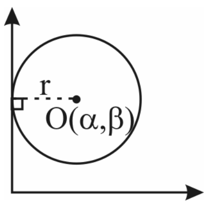
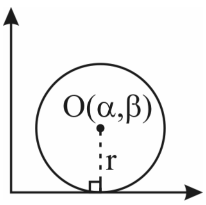
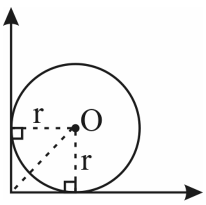
پاسخ: گزینه‌ی «۳»

$$x^۲ + y^۲ - ۲x - ۸y - ۸ = ۰ \xrightarrow{\text{مرکز}} O = (۱,۴) \xrightarrow{\text{شعاع}} r = \sqrt{۱ + ۱۶ + ۸} = ۵$$

$$\xrightarrow[\text{فاصله‌ی مرکز تا خط}]{۵x+۱۲y-۱۴=۰} OH = \frac{|۵(۱) + ۱۲(۴) - ۱۴|}{\sqrt{۲۵ + ۱۴۴}} = \frac{۳۹}{۱۳} = ۳ \xrightarrow{\text{فرمول وتر}} ۲\sqrt{r^۲ - OH^۲} = ۲\sqrt{۵^۲ - ۳^۲} = ۲ \times ۴ = ۸$$

دایره‌ی مماس بر محورهای مختصات

☑ اگر $O(\alpha,\beta)$ مرکز دایره و r شعاع آن باشد، در این صورت داریم:

مماس بر محور yها	مماس بر محور xها	مماس بر هر دو محور xها و yها
$\lvert\alpha\rvert = r$ 	$\lvert\beta\rvert = r$ 	$\lvert\alpha\rvert = \lvert\beta\rvert = r$ 

شگرد برداشتن قدرمطلق

اگر دایره‌ای بر محورها مماس بود، از روی مختصات نقطه‌ای که دایره از آن می‌گذرد، علامت α و β رو بفهمید. اصلاً علامت x و y اون نقطه، هر طور که بود به ترتیب علامت α و β خواهد بود. مثلاً وقتی نقطه‌ی تست $(-۲,۴)$ است، می‌فهمی $\alpha < ۰$ و $\beta > ۰$ بوده پس قدرمطلق‌ها رو به طور مناسب این‌جوری برمی‌داری: $-\alpha = \beta = r$.

تست ۳۷: دو دایره‌ی گذرا بر نقطه‌ی $(۲,-۹)$ بر هر دو محورهای مختصات مماس است. شعاع دایره‌ی بزرگ‌تر کدام است؟

(ریاضی ۹۵ و مشابه خارج تجربی ۹۷)

۱) ۱۴   ۲) ۱۵   ۳) ۱۷   ۴) ۱۹

پاسخ: گزینه‌ی «۳»

$$\text{دایره بر هر دو محور مماس است} \Rightarrow |\alpha|=|\beta|=r \xrightarrow[\text{در ناحیه‌ی چهارم x مثبت و y منفی است}]{\text{از نقطه‌ی } (۲,-۹) \text{ در ناحیه‌ی چهارم می‌گذرد}} \alpha=-\beta=r$$

$$\xrightarrow{\text{معادله‌ی دایره}} (x-\alpha)^۲+(y-\beta)^۲=r^۲ \xrightarrow{\alpha=r\,,\,\beta=-r} (x-r)^۲+(y+r)^۲=r^۲$$

$$\xrightarrow[(۲,-۹)]{\text{صدق دادن}} (۲-r)^۲+(-۹+r)^۲=r^۲ \xrightarrow{\text{اتحاد و ساده}} r^۲-۲۲r+۸۵=۰ \Rightarrow (r-۱۷)(r-۵)=۰$$

$$\Rightarrow r=۵ \text{ یا } ۱۷ \xrightarrow{\text{شعاع بزرگ‌تر}} ۱۷$$

تست ۳۸: دایره‌ای از نقطه‌ی $(-۱,۲)$ گذشته و بر هر دو محور مختصات مماس است. قطر دایره‌ی بزرگ‌تر کدام است؟ (*تجربی ۹۰*)

۱) ۸ ۲) ۱۰ ۳) ۱۲ ۴) ۱۵

پاسخ: گزینه‌ی «۲»

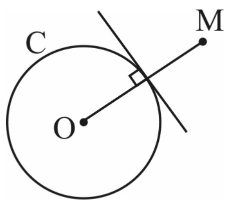
$$\text{دایره بر دو محور مماس است.} \Rightarrow |\alpha|=|\beta|=r \xrightarrow[\alpha<۰\,,\,\beta>۰]{\text{نقطه‌ی } (-۱,۲) \text{ در ناحیه‌ی دوم است.}} -\alpha=\beta=r \Rightarrow \begin{cases}\alpha=-r\\ \beta=r\end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{معادله‌ی کلی دایره}} (x-\alpha)^۲+(y-\beta)^۲=r^۲ \xrightarrow{\alpha=-r\,,\,\beta=r} (x+r)^۲+(y-r)^۲=r^۲$$

$$\xrightarrow{\text{صدق دادن } (-۱,۲)} (-۱+r)^۲+(۲-r)^۲=r^۲ \xrightarrow{\text{ساده و حل}} r=۱,۵ \xrightarrow{\text{قطر بزرگ‌تر}} ۲\times۵=۱۰$$

خط قائم بر دایره

☑ اگر نقطه‌ی M و دایره‌ی $C(O,R)$ مفروض باشند، مطابق شکل مشخص است که هر خط گذرنده از M و مرکز دایره بر خط مماس بر دایره در نقطه‌ی تقاطع با دایره عمود است، پس:



۱) برای نوشتن معادله‌ی خط قائم بر دایره از نقطه‌ی M، کافیست معادله‌ی خط OM را بنویسید.

۲) یک خط بر یک دایره قائم است اگر و تنها اگر از مرکز دایره عبور کند.

۳) تمام خطوط قائم بر یک دایره در مرکز دایره همرسند.

یه جور دیگه: اگر از نقطه‌ای، بشه بی‌شمار قائم بر دایره کشید، حتماً اون نقطه مرکز دایره است.

تست ۳۹: از نقطه‌ی $A=(a-۱,b+۲)$، بی‌شمار قائم بر دایره‌ی $x^۲+y^۲-۶x-۴y=۰$ رسم شده است. $a+b$ کدام است؟

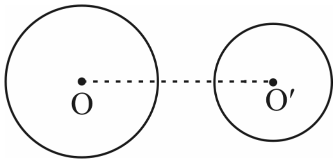
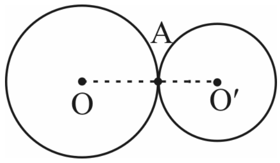
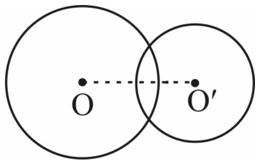
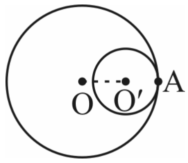
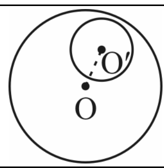
۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

پاسخ: گزینه‌ی «۱»

$$x^۲+y^۲-۶x-۴y=۰ \xrightarrow{\text{مرکز}} O=(۳,۲) \xrightarrow[A(a-۱,b+۲)]{A \text{ مرکز است.}} \begin{cases}a-۱=۳\\ b+۲=۲\end{cases} \Rightarrow a=۴\,,\,b=۰ \xrightarrow{+} ۴$$

وضعیت دو دایره، نسبت به همدیگر

☑ دو تا دایره، نسبت به هم دارای ۵ وضعیتِ مختلف هستند. باری تشخیص وضعیت اونا، باید سریع مرکز و شعاعِ دو دایره را به دست بیاری: O، O'، r و r'. بعد اینا رو تبدیل کنی به ۳ عدد کلیدی: ۱) $r+r'$، ۲) $|r-r'|$، ۳) d، که فاصله‌ی دو تا مرکزها از همدیگه هستش. همون خط‌المرکزین! خب حالا ببین:

	شکل	شرط	تعداد مماس مشترک‌های داخلی	تعداد مماس مشترک‌های خارجی
متخارج		$d > r+r'$	۲	۲
مماس خارج		$d = r+r'$	۱	۲
متقاطع		$\|r-r'\| < d < r+r'$	صفر	۲
مماس داخل		$d = \|r-r'\|$	صفر	۱
متداخل		$d < \|r-r'\|$	صفر	صفر

تست ۴۰: دو دایره به معادلات $x^{۲}+y^{۲}-۴x+۴y=۱$ و $x^{۲}+y^{۲}-۴x+۸y+۱۹=۰$ نسبت به یکدیگر چگونه‌اند؟

۱) مماس خارج ۲) مماس داخل

۳) متقاطع در دو نقطه ۴) یکی خارج دیگری

پاسخ: گزینه‌ی «۲»

$$\left.\begin{array}{l} x^{۲}+y^{۲}-۴x+۴y-۱=۰ \xrightarrow{\text{مرکز}} O=(۲,-۲) \\ x^{۲}+y^{۲}-۴x+۸y+۱۹=۰ \xrightarrow{\text{مرکز}} O'=(۲,-۴) \end{array}\right\} \begin{array}{l} \xrightarrow{\text{شعاع}} r=\sqrt{۴+۴+۱}=۳ \\ \xrightarrow{\text{شعاع}} r'=\sqrt{۴+۱۶-۱۹}=۱ \end{array}$$

$$\begin{cases} d=OO'=\sqrt{۰+۴}=۲ \\ r+r'=۴\,,\,|r-r'|=۲ \end{cases}$$

پس $d=|r-r'|$ درست است و این هم یعنی دایره‌ها مماس داخلی‌اند.

تست ۴۱: به ازای کدام مقدار $\mathbf{b}$، دو دایره به معادلات $x^۲+y^۲+۲x-۲y=۰$ و $x^۲+y^۲-۴y+b=۰$ مماس داخل‌اند؟ *(سراسری ریاضی)*

۱) ۵-　　۲) ۴-　　۳) ۳-　　۴) ۲-

پاسخ: گزینه‌ی «۲»

$$\begin{cases} x^۲+y^۲+۲x-۲y=۰ \xrightarrow{\text{مرکز}} O=(-۱,۱) \\ x^۲+y^۲-۴y+b=۰ \xrightarrow{\text{مرکز}} O'=(۰,۲) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \xrightarrow{\text{شعاع}} r=\sqrt{۱+۱-۰}=\sqrt{۲} \\ \xrightarrow{\text{شعاع}} r'=\sqrt{۰+۴-b}=\sqrt{۴-b} \\ \xrightarrow{OO'} d=\sqrt{۱+۱}=\sqrt{۲} \end{cases}$$

$$\xrightarrow[d=|r-r'|]{\text{مماس داخلی‌اند}} \sqrt{۲}=|\sqrt{۲}-\sqrt{۴-b}| \Rightarrow \sqrt{۲}=\sqrt{۴-b}-\sqrt{۲} \Rightarrow \sqrt{۴-b}=۲\sqrt{۲}$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} ۴-b=۸ \Rightarrow b=-۴$$

تست ۴۲: دایرهٔ C بر دایره به معادلهٔ $x^۲+y^۲-۴x+۲y=۴$ مماس خارج است. هر خط قائم بر دایرهٔ C از نقطهٔ $(۸,۷)$ می‌گذرد، شعاع دایرهٔ C کدام است؟ *(تجربی خارج ۹۶)*

۱) ۶　　۲) ۷　　۳) ۸　　۴) ۹

توفیق و رستگاری را از خدا بخواهید