کاربرد مشتق

توابع صعودی و نزولی

بررسی جهت تغییرات تابع

۱) تابع $f(x)$ صعودی است، اگر به ازای $x_1 < x_2$ داشته باشیم $f(x_1) \le f(x_2)$.

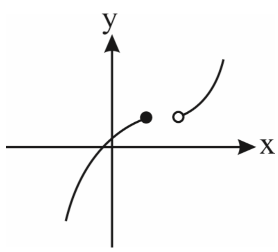
۲) تابع $f(x)$ نزولی است، اگر به ازای $x_1 < x_2$ داشته باشیم $f(x_1) \ge f(x_2)$.

۳) تابع $f(x)$ صعودی اکید است، اگر به ازای $x_1 < x_2$ داشته باشیم $f(x_1) < f(x_2)$.

۴) تابع $f(x)$ نزولی اکید است، اگر به ازای $x_1 < x_2$ داشته باشیم $f(x_1) > f(x_2)$.

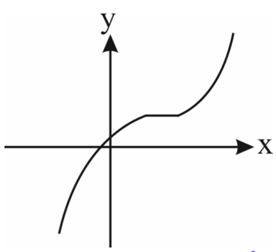
به بیان ساده‌تر تابع وقتی صعودی اکید است که با زیادشدن x، مقدار y هم زیاد شود و وقتی نزولی اکید است که با زیادشدن x، مقدار y کم شود.

فرق تابع صعودی و صعودی اکید در این است که در هر دو با زیادشدن مقدار x، مقدار y زیاد می‌شود، ولی در تابع صعودی ممکن است مقدار y به ازای دو مقدار x با هم برابر باشند. به تابعی که صعودی یا نزولی باشد، می‌گوییم یکنوا و اگر تابع نه صعودی باشد و نه نزولی، غیریکنوا یا نایکنوا است. برای توضیح بهتر به شکل‌های زیر نگاه کنید:

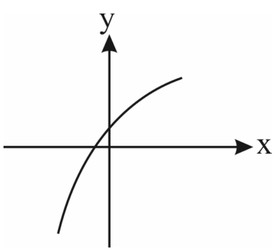


صعودی اکید

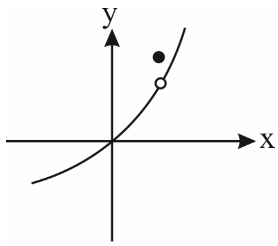
هیچ ۲ نقطه‌ای هم عرض نیستند



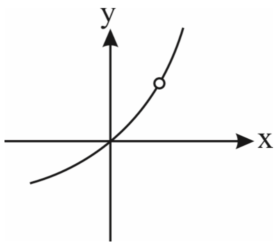
صعودی



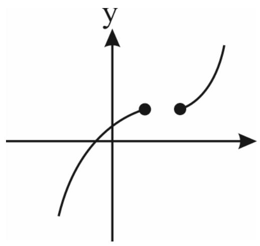
صعودی اکید



غیریکنوا

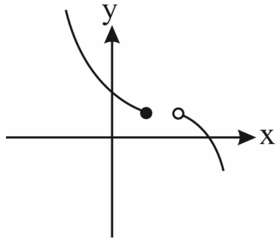


صعودی اکید

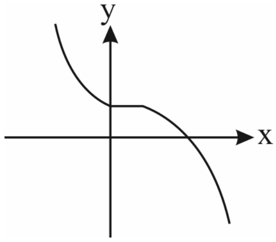


صعودی

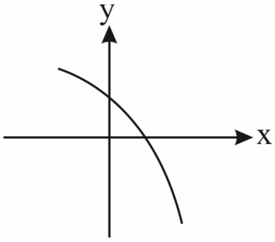
و به همین ترتیب فرق تابع نزولی و نزولی اکید در این است که در حالت اکید مقدار y همواره کم می‌شود، ولی در تابع نزولی ممکن است دو یا چند نقطه با xهای مختلف، yهای یکسان داشته باشند. به شکل‌های زیر نگاه کنید:



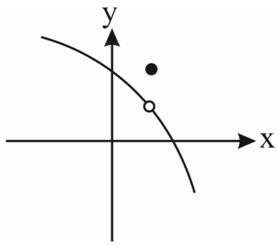
نزولی اکید



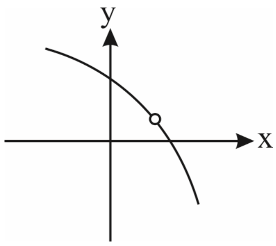
نزولی



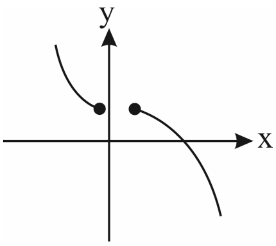
نزولی اکید



غیریکنوا



نزولی اکید

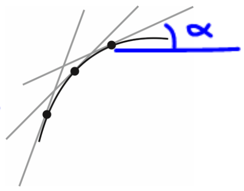


نزولی

۱) اگر تابعی در بازه $\mathbf{I}$ مشتق‌پذیر باشد و مقدار $\mathbf{f'}$ مثبت باشد، آن‌گاه، $\mathbf{f}$ در آن بازه اکیداً صعودی است.

به تابع اکیداً صعودی زیر دقت کنید که شیب خط مماس در تمام نقاط آن بازهٔ مثبت است.

همه مماس‌هایی که بر تابع رسم می‌شوند با جهت + محور xها زاویه حاده می‌سازند.

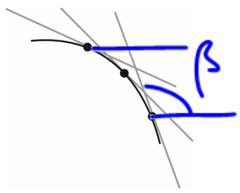


حاده $\tan\alpha > 0$
صعودی

۲) اگر تابعی در بازهٔ $\mathbf{I}$ مشتق‌پذیر باشد و مقدار $\mathbf{f'}$ منفی باشد، آن‌گاه، $\mathbf{f}$ در آن بازه اکیداً نزولی است.

به تابع اکیداً نزولی زیر دقت کنید که شیب خط مماس در تمام نقاط آن بازه منفی است.

همه مماس‌های رسم بر تابع با جهت مثبت محور xها زاویه منفرجه می‌سازند.



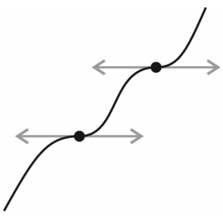
$\tan\beta < 0$
نزولی

بنابراین با کمک تعیین علامت تابع مشتق تابع $\mathbf{y = f(x)}$ می‌توانیم وضعیت یکنوایی تابع $\mathbf{f}$ را در بازه‌های مختلف مشخص کنیم.

۳) اگر تابعی در بازهٔ $\mathbf{I}$ مشتق‌پذیر باشد و مقدار $\mathbf{f'}$ برابر صفر باشد، آن‌گاه در آن بازه تابعی ثابت خواهیم داشت.

دقت کنید که در تمام نقاط یک تابع ثابت مشتق‌پذیر شیب خط مماس صفر است.

۴) اگر تابعی در بازهٔ $\mathbf{I}$ مشتق‌پذیر باشد و مقدار $\mathbf{f'}$، بزرگ‌تر مساوی صفر باشد اما صفرکننده‌ها تشکیل یک بازه ندهند هم‌چنان تابع یک تابع اکیداً صعودی خواهد بود. بنابراین صفرشدن مشتق لزوماً قید اکید را از تابع یکنوا کنار نمی‌گذارد.



به تابع فوق خوب دقت کنید. مشتق این تابع در تمام نقاط به‌جز دو نقطه مثبت و در آن دو نقطه صفر است اما این موضوع ضربه‌ای به اکیداً صعودی‌بودن تابع نمی‌زند.

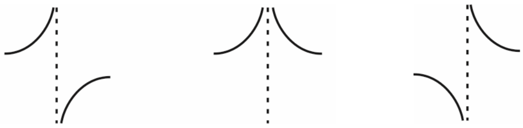
۵) اگر تابعی در بازهٔ $\mathbf{I}$ مشتق‌پذیر باشد و مقدار $\mathbf{f'}$ کوچک‌تر مساوی صفر باشد اما صفرکننده‌ها تشکیل یک بازه ندهند هم‌چنان تابع، یک تابع اکیداً نزولی خواهد بود.

۶) اگر تابعی در بازهٔ $\mathbf{I}$ پیوسته باشد اما در این بازه نقطهٔ مشتق‌ناپذیری داشته باشد چنان‌چه در همسایگی راست و چپ آن مشتق تابع (هر دو) مثبت یا (هر دو) منفی باشد این نقطهٔ مشتق‌ناپذیر به یکنوایی تابع در آن بازه ضربه‌ای نمی‌زند.

به عنوان مثال تابع فوق در تمام حوزهٔ تعریفش به‌جز نقطهٔ $\mathbf{A}$ مشتق‌پذیر و مشتقی مثبت دارد. بنابراین خود نقطهٔ $\mathbf{A}$ که تابع در آن نقطه مشتق‌ناپذیر است ضربه‌ای به اکیداً صعودی بودن تابع نمی‌زند. (چون در همسایگی راست و چپ نقطهٔ $\mathbf{x = A}$ تابع مشتق مثبت است.)

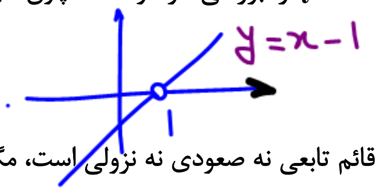
۷) در توابعی که در بازهٔ $\mathbf{I}$ ناپیوسته هستند، پیشنهاد ما رسم تابع و تحلیل یکنوایی تابع بر اساس نمودار آن است.

۸) اگر تابع گویایی در بازهٔ $\mathbf{I}$، ریشهٔ مخرج ماندگار داشته باشد (مجانب قائم) امکان آن که تابع در آن بازه یکنوا باشد نیست.

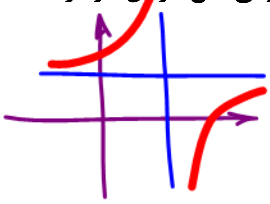


۹) اگر تابع گویایی در بازهٔ $\mathbf{I}$، ریشهٔ مخرجی داشته باشد که در ساده‌سازی با صورت از بین برود (حفره)، تابع پس از ساده‌سازی را تحلیل می‌کنیم و وجود آن نقطه تأثیری بر یکنوایی تابع ندارد.

به عنوان مثال برای تحلیل تابع $y = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - 2}$ می‌توان یکنوایی تابع $y = \dfrac{(x-1)(x-2)}{x-2} = x - 1$ را بررسی کرد و گفت چون تابع $y = x - 1$ یک تابع اکیداً صعودی است تابع $y = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - 2}$ نیز اکیداً صعودی است.



۱۰) تابع هموگرافیک $y = \dfrac{ax + b}{cx + d}$ دارای شاخه‌های اکیداً یکنوا می‌باشد اما به علت وجود مجانب قائم تابعی نه صعودی نه نزولی است، مگر این تابع در بازه‌ای تحلیل شود که مجانب قائم داخل آن بازه نباشد که در آن صورت علامت مشتق تابع در آن بازه یکنوایی تابع در آن بازه را نشان خواهد داد. (مجانب قائم در توابع کسری یعنی ریشهٔ مخرجی که حد تابع اطراف آن $+\infty$ یا $-\infty$ شود.)



هموگرافیک

تست ۱: تابع $f(x) = -x^5 + 5x$ روی کدام بازه صعودی است؟

۱) $[0,1]$ ۲) $[0,2]$ ۳) $[1,+\infty)$ ۴) $(-\infty,-1]$

پاسخ: گزینهٔ «۱» ـ مشتق تابع $f'(x) = -5x^4 + 5$ و ریشه‌های مشتق برابر $x = 1$ و $x = -1$ هستند. جدول تعیین علامت مشتق را رسم می‌کنیم:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
f′		−		+		−	
f		↘		↗		↘	

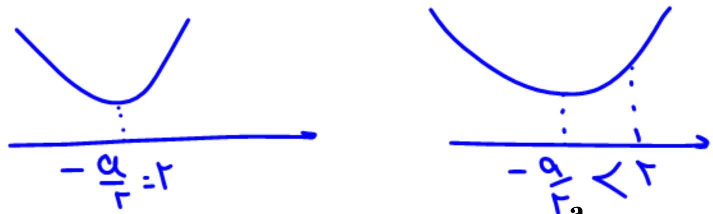
همان‌طور که در جدول می‌بینیم، مشتق تابع در بازهٔ $[-1,1]$ بزرگ‌تر یا مساوی صفر است، پس تابع در این بازه صعودی است. از بین گزینه‌ها فقط بازهٔ $[0,1]$ زیرمجموعهٔ این بازه است، پس تابع در بازهٔ $[0,1]$ هم صعودی است.

تست ۲: اگر تابع $y = x^2 + ax - 4$ در بازهٔ $[2,+\infty)$ صعودی باشد، مجموعهٔ مقادیر a کدام است؟

۱) $a = -4$　　۲) $a \ge -4$　　۳) $a \le -4$　　۴) $a \in \mathbb{R}$

پاسخ: گزینهٔ «۲» ـ مشتق تابع $y' = 2x + a$ و ریشهٔ مشتق برابر $x = -\frac{a}{2}$ است پس جدول تعیین علامت مشتق به صورت زیر است:

x	$-\infty$		$-\frac{a}{2} \le 2$		$+\infty$
y'		−	0	+	
y		↘		↗	



می‌بینیم که تابع در بازهٔ $[-\frac{a}{2},+\infty)$ صعودی است، پس برای آن که تابع در بازهٔ $[2,+\infty)$ صعودی باشد، باید $[2,+\infty)$ زیرمجموعه‌ای از بازهٔ $[-\frac{a}{2},+\infty)$ باشد؛ یعنی $-\frac{a}{2} \le 2$ و در نتیجه $a \ge -4$.

مشتق تغییر علامت نمی‌دهد:

تست ۳: به ازای چه مقادیر از m، تابع $y = 2x^3 + 3mx^2 + 24x + 9$ اکیداً یکنوا است؟

۱) $-4\sqrt{2} \le m \le 4\sqrt{2}$　　۲) $-8 \le m \le 8$　　۳) $0 < m \le 8$　　۴) $-4 \le m \le 4$

$$y' = 6x^2 + 6mx + 24 = 6(x^2 + mx + 4)$$

می‌خوام تغییر علامت نده می‌بینم y' درجه ۲ هست و ضریب x^2 آن مثبت. زمانی یک درجه ۲ تغییر علامت نمی‌دهد

$$\Delta = b^2 - 4ac = m^2 - 4(1)(4) \le 0$$

$$m^2 \le 16 \longrightarrow |m| \le 4 \longrightarrow -4 \le m \le 4$$

تست ۴: تابع f با ضابطهٔ $f(x) = \frac{2x^2 - 3x}{x^2 + x + 3}$ در بازهٔ $(a,+\infty)$ صعودی اکید است. حداقل مقدار a کدام است؟

$y' > 0$　　$\Delta < 0$

۱) $-\frac{3}{5}$　　۲) $\frac{3}{5}$　　۳) -3　　۴) 3

$\cancel{4x^3} + \cancel{4x^2} + 12x - \cancel{3x^2} - \cancel{3x} - 9 - \cancel{4x^3} + \cancel{2x^2} - \cancel{6x^2} + \cancel{3x}$ ریشه ندارد، مخرج

$$y' = \frac{(4x-3)(x^2+x+3) - (2x+1)(2x^2-3x)}{(\text{مخرج})^2} = \frac{5x^2 + 12x - 9}{(\quad)^2} > 0$$

ضرب

$$5x^2 + 12x - 9 = 0 \longrightarrow x^2 + 12x - 45 = (x-3)(x+15) = 0 \quad \begin{cases} x = 3 \\ x = -15 \end{cases}$$

$x_1 = \frac{3}{5}$　　$x_2 = -\frac{15}{5} = -3$

x		-3		$\frac{3}{5} = a$		$+\infty$
y'	+	0	−	0	+	
y	↗		↘		↗	

تست ۵: اگر تابع $y = mx^3 + mx^2 - x + 1$ به ازای $x \in \mathbb{R}$ نزولی اکید باشد، حدود m کدام است؟

۱) $m \le -3$ ۲) $m < -3$ ۳) $m \le -3$ یا $m = 0$ ۴) $-3 \le m \le 0$

پاسخ: گزینهٔ «۴» ـ برای آن که تابع چندجمله‌ای نزولی اکید باشد، باید مشتقش همواره کوچک‌تر یا مساوی صفر باشد، پس باید داشته باشیم:

$$y' = 3mx^2 + 2mx - 1 \le 0$$

می‌دانیم اگر بخواهیم عبارت درجه دوم همواره $ax^2 + bx + c \le 0$ باشد، باید الف) $a < 0$ و ب) $\Delta \le 0$ باشد، پس:

$$\begin{cases} 3m < 0 \Rightarrow m < 0 \quad (1) \\ \Delta \le 0 \Rightarrow 4m^2 + 12m \le 0 \Rightarrow 4m(m+3) \le 0 \Rightarrow -3 \le m \le 0 \quad (2) \end{cases}$$

اشتراک (۱) و (۲) می‌شود $-3 \le m < 0$.

حالا اگر خوب به تابع نگاه کنید، تمام توضیحات بالا به شرطی صادق‌اند که $m \ne 0$ باشد؛ ولی وقتی که با یک تابع درجه سوم سروکار داشته باشیم اگر $m = 0$ باشد، تابع به صورت $y = -x + 1$ درمی‌آید که باز هم نزولی اکید است. پس تمام حدود m برابر است با $-3 \le m \le 0$.

تست ۶: تابع با ضابطهٔ $f(x) = \dfrac{ax - 2}{x + a - 3}$, $x > 1$ اکیداً صعودی است. بازهٔ مقادیر a کدام است؟ هموگرافیک

۱) $(-\infty, 1)$ ۲) $(2, +\infty)$ ✓ ۳) $[2, +\infty)$ ۴) $(-\infty, 1]$

$$y' : \frac{\overset{a^2 - 3a + 2}{a(a-3) + 2}}{(\text{مخرج})^2} > 0$$

a		1		2	
y'	+	0	−	0	+
y	↗		↘		↗

$a < 1$ یا $a > 2$ شرط (الف)

باید دقت کنیم در ۱ حد چپ تابع تعریف نشده : ۱ > جواب‌ها یا ریشه مخرج

$x = 3 - a < 1$

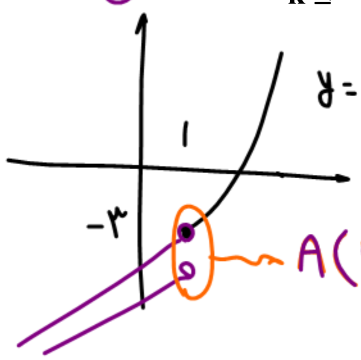
$2 < a$ شرط (ب)

(الف) $\cap$ (ب) : $2 < a$

تست ۷: به ازای کدام مقدار k، تابع با ضابطهٔ $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & x \ge 1 \\ x + k & x < 1 \end{cases}$ بر $\mathbb{R}$ صعودی است؟ (سنجش)

دو ضابطه‌ای ها را بکش

۱) $k \le -1$ ۲) $k \le -2$ ۳) $k \le -3$ ۴) $k \le -4$



$A(1, 1+k)$ $1 + k \le -3$ → $\boxed{k \le -4}$

نقاط بحرانی

تعریـف: تابع f با دامنه‌ی $[a,b]$ مفروض است. نقطه‌ی $c \in [a,b]$ را نقطه‌ی بحرانی تـابع f مـی‌گـوییم، هرگـاه: $f'(c) = 0$ یـا $f'(c)$ موجود نباشد.

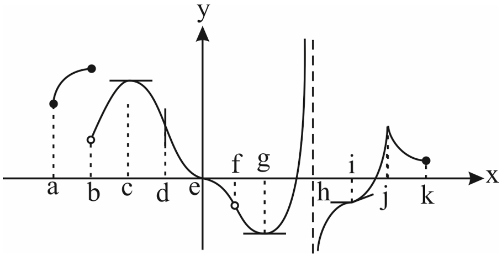
بنابراین بنا بر تعریف کتاب درسی نقاط بحرانی تابع به دو دستهٔ کلی زیر تقسیم می‌شوند:

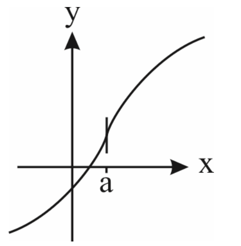
الف) نقاط مشتق‌ناپذیری
- ۱) ناپیوستگی‌ها 
- ۲) نقاط پیوسته‌ای که نیم‌خط مماس راست و چپ در آن نقاط یکسان نیستند و یا نقاطی که در آن نقاط تابع دارای خط مماس قائم است.

ب) صفرکننده‌های مشتق که در این نقاط خط مماس بر منحنی به صورت افقی می‌باشد. 

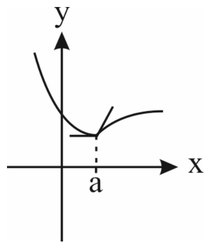
در شکل روبه‌رو انواع نقاط بحرانی را می‌بینید:

می‌خواهیم نقاط بحرانی تابع روبه‌رو را در بازه‌ی $[a,k]$ مشخص کنیم: اولاً نقاط به طول a و k نقطه‌ی بحرانی هستند، چون نقاط ابتدا و انتهای بازه‌اند. ثانیاً نقاط f و h نقاط بحرانی نیستند، چون متعلق به دامنه‌ی تابع نیستند. نقاط c، e و g بحرانی‌اند، چون مشتق‌شان برابر صفر است (خط مماس افقی داریم). نقاط d و j بحرانی‌اند، چون مشتق ندارند (خط مماس قائم داریم). نقطه‌ی i بحرانی است، چون نقطه‌ی گوشه‌ای (زاویه‌دار) است. نقطه‌ی b بحرانی است، چون ناپیوسته است. پس نقاط بحرانی تابع در بازه‌ی $[a,k]$ عبارت‌اند از a، b، c، d، e، g، i، j و k.

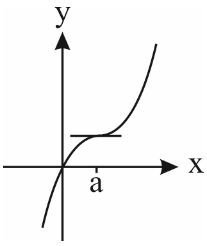




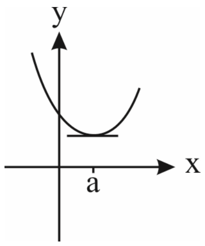
$f'(a) = +\infty$ وجود ندارد



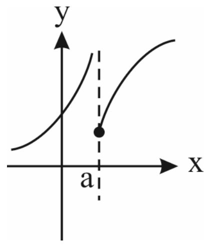
$f'(a) =$ وجود ندارد



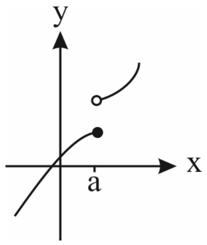
$f'(a) = ۰$



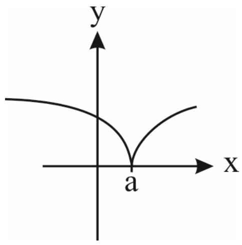
$f'(a) = ۰$



$f'(a) =$ وجود ندارد



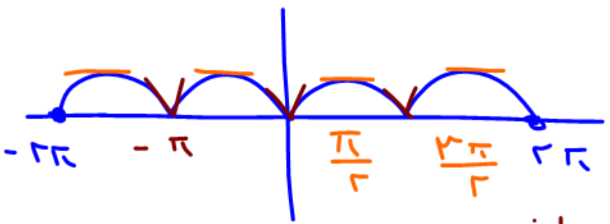
$f'(a) =$ وجود ندارد



$f'(a) = \pm\infty$ وجود ندارد

مثال ۸: گاهی نقاط بحرانی را رسم می‌کنیم.

الف) $y = |\sin x| \; ; \; x \in [-۲\pi, ۲\pi]$



سر دوتا لبه بازه: $x = \pm ۲\pi$

مماس افقی: $x = \pm \frac{\pi}{۲} , \pm \frac{۳\pi}{۲}$

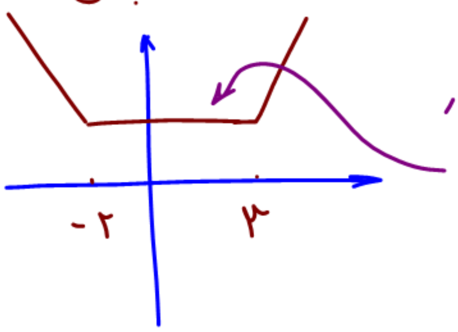
گوشه (زاویه‌دار): $x = \pm \pi$ و ۰

۹ بحرانی

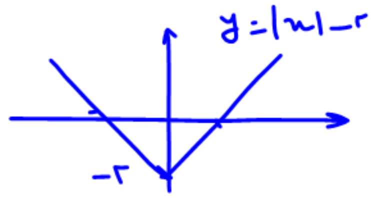
ب) $y = |x - ۳| + |x + ۲|$

عددار گلدونی $\boxed{\text{بی‌شمار}}$

بحرانی دارد در قسمت تابع ثابت کف گلدان



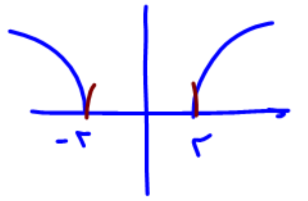
تابلوترین بحرانی روزگار، تابع ثابت است.



پ) $y=\sqrt{|x|-2}\geq 0$ $\quad |x|\geq 2 \longrightarrow x\leq -2$ یا $x\geq 2$

2 بحرانی

$D_f:(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$



سر و ته بسته بازه بحرانی است . $x=\pm 2$

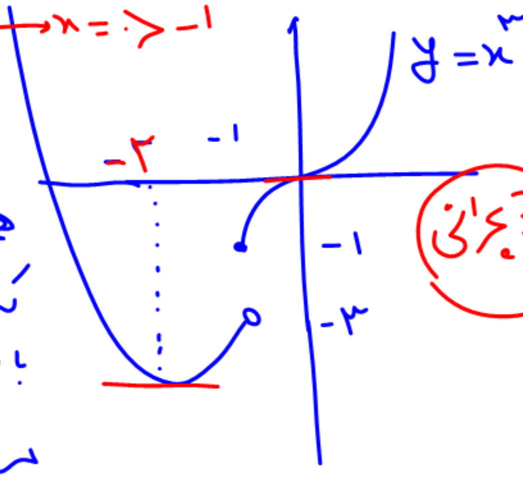
$x=0$ بحرانی نیست زیرا در دامنه نیست . $x=0\notin D_f$

$y'=2x+4=0$
$x=-2$
$y'=3x^2=0 \longrightarrow x=0>-1$

ت) $y=\begin{cases} x^3 & x\geq -1 \\ x^2+4x & x<-1 \end{cases}$

$x(x+4)$

هم بحرانی های تک تک ضابطه‌ها که قبلشان در شرط ضابطه باشد و نیز کنترل پیوستگی و مشتق‌پذیری در محل تغییر ضابطه



3 بحرانی

$\begin{cases} x=-2 & \text{مماس افقی} \\ x=-1 & \text{ناپیوسته} \\ x=0 & \text{مماس افقی} \end{cases}$

تعیین نقاط بحرانی از روی ضابطه:

حالا که توانستیم بر اساس درک هندسی از نقاط بحرانی و با کمک گرفتن از نمودار تابع نقاط بحرانی تابع را مشخص کنیم، باید به این مطلب نیز توجه داشته باشیم که همواره رسم نمودار یک تابع برای ما امکان‌پذیر نخواهد بود، بنابراین نیاز است که با تحلیل ریاضی ضابطهٔ تابع نیز بتوانیم در حد امکان نقاط بحرانی توابع را مشخص کنیم که برای رسیدن به این نقاط ابتدا نقاط ناپیوستگی متعلق به دامنهٔ تابع را به‌دست می‌آوریم و سپس با محاسبهٔ تابع مشتق نقاط مشتق‌ناپذیری و صفرکننده‌های مشتق را مشخص می‌کنیم.

تذکر: می‌توانیم نقاط ناپیوستگی و یا مشتق‌ناپذیری توابع را به کمک مطالب و تذکراتی که در فصل پیوستگی و مشتق آموختیم، به‌دست آوریم.

تست ۹: نقاط بحرانی تابع $f(x)=x^5-5x^2-1$ کدام است؟

۱) $\{0,\sqrt[3]{2}\}$ ۲) $\{0,\sqrt[3]{2},1\}$ ۳) $\{\sqrt[3]{2},-\sqrt[3]{2}\}$ ۴) $\{0,-\sqrt[3]{2}\}$

پاسخ: گزینهٔ «۱» ـ از آن‌جایی که تابع $y=x^5-5x^2-1$ یک تابع چندجمله‌ای پیوسته با دامنهٔ $\mathbb{R}$ می‌باشد و توابع چندجمله‌ای فاقد نقاط مشتق‌ناپذیری عضو دامنه هستند، فقط به دنبال صفرکننده‌های تابع مشتق می‌رویم.

$$y'(x)=5x^4-10x=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\sqrt[3]{2} \end{cases}$$

$5x(x^3-2)=0$

کسری

در توابع چندجمله‌ای و توابع گویا نقاط بحرانی لزوماً ریشه‌های تابع مشتق می‌باشند که اگر دامنهٔ تابع توسط صورت سؤال محدود شده باشد، ابتدا و انتهای بازهٔ تعریف (به شرط وجود در دامنه) نیز به علت ناپیوستگی به تعداد نقاط بحرانی تابع اضافه می‌شوند.

نکته: ریشه مخرج هرگز بحرانی نیست زیرا در دامنه نیست.

تست ۱۰: نقاط بحرانی تابع با ضابطهٔ $f(x)=x^{2}(x-2)^{2}$ سه رأس یک مثلث‌اند. نوع این مثلث کدام است؟ *(سراسری تجربی)*

۱) متساوی‌الاضلاع
۲) فقط متساوی‌الساقین
۳) فقط قائم‌الزاویه
۴) قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین

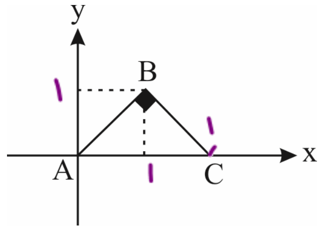
پاسخ: گزینهٔ «۴» ـ ابتدا ضابطهٔ تابع را کمی ساده‌تر می‌کنیم، تا مشتق‌گیری راحت‌تر شود:

$$f(x)=(x(x-2))^{2}=(x^{2}-2x)^{2}$$

$$f'=2(2x-2)(x^{2}-2x)=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=0 \ \rightarrow \ A(0,0)\\ x=1 \ \rightarrow \ B(1,1)\\ x=2 \ \rightarrow \ C(2,0)\end{cases}\Rightarrow AB=BC$$

$y=u^{n} \longrightarrow y'=nu'u^{n-1}$



هرگاه ضرب شیب ۲ خط -1 باشد ۲ بر هم عمودند.

$\begin{cases}mm'=-1\\ m'=-\dfrac{1}{m}\end{cases}$

بنابراین با توجه به شکل، مثلث قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین است.

تست ۱۱: تابع $f(x)=\dfrac{x}{x^{2}-1}$ چند نقطهٔ بحرانی دارد؟ *(سراسری)*

$x=\pm 1 \notin D_f$ بحرانی نیست با این‌که f در آن‌ها ناپیوسته است.

۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۳

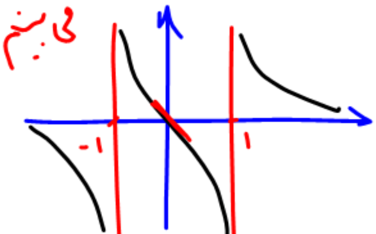
$y'=\dfrac{1(x^{2}-1)-2x(x)}{(\ \ )^{2}}=-x^{2}-1=0 \longrightarrow x^{2}=-1$ ریشه ندارد. بحرانی ندارد. y' ریشه ندارد.

مطالب اضافه

$y=\dfrac{x}{x^{2}-1}\begin{cases}x\rightarrow 0 & \text{کم توان}\\ x\rightarrow\pm\infty & \text{بزرگ توان}\end{cases}$

$y=\dfrac{x}{-1}=-x$ شیب x: بی‌نهایت حالی

$y=\dfrac{x}{x^{2}}=\dfrac{1}{x}\begin{cases}x\rightarrow+\infty & 0^{+}\\ x\rightarrow-\infty & 0^{-}\end{cases}$



بی‌نهایت در ∞ شیب
$y=\dfrac{1}{x}$

$y=\dfrac{x}{x^{2}+1}$

شکل: پیچ نیوتن

تست ۱۲: تابع $y=\dfrac{x}{x^{2}+1}$ در بازهٔ $[-2,4]$ تعریف شده است. مجموع طول نقاط بحرانی تابع کدام است؟

۱) صفر
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۲-

پاسخ: گزینهٔ «۲» ـ از آن‌جا که این تابع گویا در بازهٔ $[-2,4]$ تعریف نشده است $\{-2,4\}$ به عنوان نقاط ابتدایی و انتهایی بازه، ناپیوستگی و بحرانی است.

حالا به دنبال صفرکننده‌های تابع مشتق که متعلق به بازهٔ $[-2,4]$ است، می‌گردیم:

$$f'(x)=\frac{(1)(x^{2}+1)-(2x)(x)}{(x^{2}+1)^{2}}=\frac{1-x^{2}}{(x^{2}+1)^{2}}=0\Rightarrow\begin{cases}x=1\\ x=-1\end{cases}$$

بنابراین صفرکننده‌های مشتق $\{\pm 1\}$ و کلیهٔ نقاط بحرانی تابع $\{\pm 1,4,-2\}$ می‌باشند که مجموع این نقاط عدد ۲ می‌باشد.

$y=x^{2}x^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{1}{3}}=x^{\frac{7}{3}}-x^{\frac{1}{3}}$

تست ۱۳: تابع $f(x)=x^{2}\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x}$ چند نقطهٔ بحرانی دارد؟

$y'=\frac{7}{3}x^{\frac{4}{3}}-\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}=\frac{7}{3}\sqrt[3]{x^{4}}-\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^{2}}}=0 \longrightarrow \frac{7}{\cancel{3}}\sqrt[3]{x^{4}}=\dfrac{1}{\cancel{3}\sqrt[3]{x^{2}}} \longrightarrow \sqrt[3]{x^{6}}=\frac{1}{7} \longrightarrow x^{2}=\frac{1}{7} \longrightarrow x=\pm\frac{1}{\sqrt{7}}$

۱) یک
۲) دو
۳) سه
۴) هیچ

$x\in\left\{0,\pm\frac{1}{\sqrt{7}}\right\}$

پاسخ: گزینهٔ «۳» ـ تابع را به صورت $f(x)=x^{\frac{7}{3}}-x^{\frac{1}{3}}$ می‌نویسیم و مشتقش را پیدا می‌کنیم:

$$f'(x)=\frac{7}{3}x^{\frac{4}{3}}-\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}(7x^2-1)=\frac{7x^2-1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

ریشه‌های صورت مشتق برابر $x=\frac{\sqrt{7}}{7}$ و $x=-\frac{\sqrt{7}}{7}$ و ریشهٔ مخرجش برابر $x=0$ است و هر سه نقطه متعلق به دامنهٔ تابع‌اند، پس تابع سه نقطهٔ بحرانی دارد.

تست ۱۴: مجموعهٔ طول‌های نقاط بحرانی تابع با ضابطهٔ $f(x)=(x^2-28)\sqrt[3]{x}$ کدام است؟ *(سراسری تجربی)*

۱) $\{-2,2\}$ ۲) $\{-\sqrt{7},\sqrt{7}\}$ ۳) $\{-2,0,2\}$ ۴) $\{-7,0,1\}$

$y=(x^2-28)x^{\frac{1}{3}}=x^{\frac{7}{3}}-28x^{\frac{1}{3}}$ $y'=\frac{7}{3}x^{\frac{4}{3}}-\frac{28}{3}x^{-\frac{2}{3}}=\frac{7}{3}\sqrt[3]{x^4}-\frac{28}{3\sqrt[3]{x^2}}=0$

$3\sqrt[3]{x^2}=0 \to x=0$

$\cancel{\frac{7}{3}}\sqrt[3]{x^4}=\frac{\cancel{28}^{4}}{\cancel{3}\sqrt[3]{x^2}} \to \sqrt[3]{x^6}=x^2=4 \longrightarrow x=\pm 2$

ریشه های داخل قدرمطلق ⟵ $u=0$ و $u'=0$
یا تو شاخه با مارانتی

$y=|u|=\begin{cases} u & u\geq 0 \\ -u & u<0 \end{cases}$ ، $u=$

برای یافتن نقاط بحرانی تابع $y=|f(x)|$ (f تابعی پیوسته) کافی است معادلات $f(x)=0$ و $f'(x)=0$ را حل کنید.

تست ۱۵: تعداد نقاط بحرانی تابع با ضابطهٔ $f(x)=|x^3-x|$ روی بازهٔ $[-1,2]$ کدام است؟ *(سراسری ریاضی)*

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ شرونه ۴) ۶

$x^3-x=0 \longrightarrow x(x^2-1)=0 \longrightarrow x=0,\pm 1$

$3x^2-1=0 \longrightarrow x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$

$x=-1$ تکراریه
هم سر بازه هم جواب $x^3-x=0$

$x\in\left\{0,\pm 1,\pm\frac{\sqrt{3}}{3},2\right\}$

در تابع $y=g(x)|f(x)|$ (f تابعی پیوسته):

۱) جواب‌های معادلهٔ $f(x)=0$ نقاط بحرانی تابع هستند.

۲) با حذف قدرمطلق از تابع $y=g(x)f(x)$ مشتق گرفته و نقاطی (عضو دامنه) که مشتق صفر است یا موجود نیست بحرانی‌اند.

تست ۱۶: تابع با ضابطهٔ $f(x)=x|x^2-1|$ و دامنهٔ $[-2,2]$ چند نقطهٔ بحرانی دارد؟ *(ریاضی خارج از کشور)*

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶ ✓

سر و ته بازه بحرانیه

$\boxed{x=\pm 1}$ ریشه داخل قدرمطلق

$y=x(x^2-1)=x^3-x \longrightarrow y'=3x^2-1=0 \longrightarrow \boxed{x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}}$

تست ۱۷: نقاط بحرانی بر روی نمودار تابع $f(x)=(x-1)|x^2+x-2|$ سه رأس مثلثی هستند. مساحت این مثلث کدام است؟

(سراسری ریاضی خارج از کشور)

۱) ۴ ۲) ۴/۵ ۳) ۶ ✓ ۴) ۸

جمع ضرایب صفر

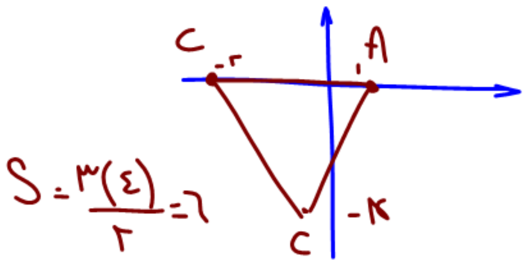
$\boxed{x=1,-2}$ ۲ بحرانی

قدر روی جمله، بقیه به مشتق بصفر

$y=(x-1)(x^2+x-2)=x^3+x^2-2x-x^2-x+2=x^3-3x+2=0$

$y'=3x^2-3=0$

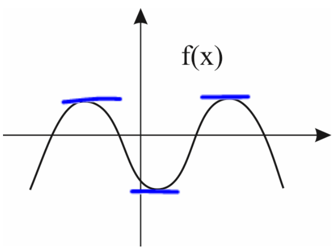
$x=\pm 1$



$A(1,0)$
$B(-1,-4)$
$C(-2,0)$

$S=\frac{3(4)}{2}=6$

تست ۱۸: اگر نمودار تابع $y=f(x)$ به صورت زیر باشد، تابع $y=\frac{1}{f(x)}$ چه تعداد نقطهٔ بحرانی دارد؟



۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۵

$y'=\frac{0-f'(x)}{f^2(x)}=0 \longrightarrow f'(x)=0$

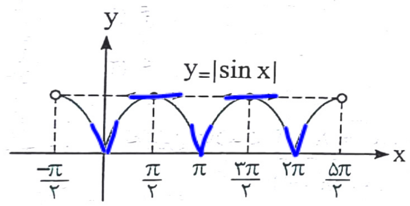
جاهایی که مشتق تابع صفره

که مماس بر تابع افقیه ۳ تا گزینه ۲

تست ۱۹: تعداد نقاط بحرانی تابع f با ضابطهٔ $f(x)=|\sin x|$ بر بازهٔ $(-\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{2})$ کدام است؟

۱) ۲　　۲) ۳　　۳) ۴　　۴) ۵

پاسخ: با توجه به تعریف نقاط بحرانی منحنی یک تابع (مشتق ناموجود یا برابر با صفر)، نقاط به طول‌های $x=\{0,\frac{\pi}{2},\pi,\frac{3\pi}{2},2\pi\}$ نقاط بحرانی تابع f در بازهٔ $(-\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{2})$ به شمار می‌روند.



x=2 گوشه
x=0 مماس قائم

تست ۲۰: مجموعه طول‌های نقاط بحرانی تابع با ضابطهٔ $f(x)=|x-2|\sqrt[3]{x^2}$ کدام است؟ (سراسری ریاضی)

۱) $\{0,\frac{4}{5},2\}$　　۲) $\{0,\frac{2}{3},2\}$　　۳) $\{0,1\}$　　۴) $\{\frac{2}{3},2\}$

$y=(x-2)x^{\frac{2}{3}}=x^{\frac{5}{3}}-2x^{\frac{2}{3}}\to y'=\frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}-\frac{4}{3}x^{-\frac{1}{3}}$

$y'=\frac{5}{3}\sqrt[3]{x^2}-\frac{4}{3\sqrt[3]{x}}=0 \quad \frac{5}{3}\sqrt[3]{x^2}=\frac{4}{3\sqrt[3]{x}}\to\sqrt[3]{x^3}=\frac{4}{5}\to x=\frac{4}{5}$

$y'=0$

۱) x=0 مشتق ∞ و x=0 مماس قائم و بحرانی

ریشه مخرج زیر رادیکال فرجه فرد باشد

$\frac{4}{5}$　2

تست ۲۱: اگر تابع $f(x)=|x^2-mx+m+3|$ فقط یک نقطهٔ بحرانی داشته باشد، تمام مقادیر m کدام است؟

۱) $m=-2\,,\,m=6$　　۲) $-2<m<6$　　۳) $-2\le m\le 6$　　۴) $m\in\varnothing$

سهمی دهانه به بالا

$\Delta<0$　$\Delta=0$　$\Delta>0$

فقط سهمی بالا

۱ بحرانی　۳ بحرانی

$\Delta=(-m)^2-4(m+3)\le 0$

$m^2-4m-12\le 0$

m		-2		6	
	+	0	-	0	+

جواب ۳

تعیین نقاط بحرانی در توابع چندضابطه‌ای

در توابع چندضابطه‌ای ابتدا از هر یک از ضابطه‌ها مشتق گرفته و نقاط بحرانی هر ضابطه را با توجه به دامنهٔ تعریفشان تعیین کرده سپس وجود مشتق را در نقاط مرزی بررسی می‌کنیم. در نقاط مرزی ممکن است تابع ناپیوسته باشد و یا در صورت پیوستگی دارای مشتق‌های راست و چپ نابرابر باشد. در هر دو حالت در نقطهٔ مرزی مشتق وجود ندارد و این نقطه، بحرانی محسوب می‌شود.

$x^2-2x \xrightarrow{x\to 0} -2x$

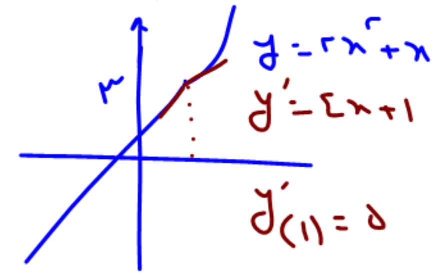
مثال ۲۲: نقاط بحرانی تابع‌های زیر را پیدا کنید.

$x(x-2)$

الف) $f(x)=\begin{cases} 2x^2+x & x\ge 1 \\ x+2 & x<1 \end{cases}$

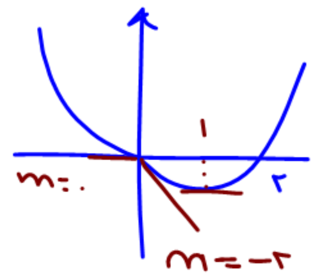
ب) $f(x)=\begin{cases} x^2-2x & x\ge 0 \\ x^2 & x<0 \end{cases}$

پ) $f(x)=\begin{cases} x^2+2x & x\ge 1 \\ 4x-2 & x<1 \end{cases}$



$x=1$ گوشه مشتق ناپذیر

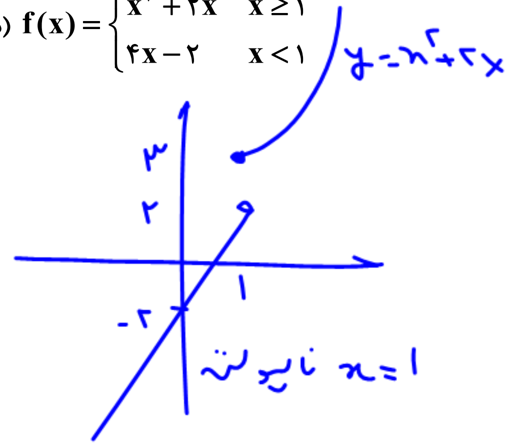
① بحرانی



در $x=1$ مماس افقی

در $x=0$ گوشه

② بحرانی



$x=1$ ناپیوسته

① بحرانی

اکسترمم مطلق

قضیه: فرض کنیم تابع f در بازهٔ بستهٔ $[a,b]$ پیوسته باشد، در این صورت f در این بازه هم ماکزیمم مطلق و هم مینیمم مطلق دارد.

خُب بیان این قضیه در کتاب درسی به وجود اکسترمم مطلق (ماکزیمم مطلق یا مینیمم مطلق) در توابعی اشاره می‌کند که در بازهٔ $[a,b]$ پیوسته باشد، اما بهتر است قبل از تحلیل و بررسی صورت قضیه تعریفی از ماکزیمم و مینیمم مطلق داشته باشیم تا بهتر بدانیم که چرا پیوسته بودن تابع در بازهٔ بستهٔ $[a,b]$ شرط کافی وجود اکسترمم مطلق تابع است.

ماکزیمم مطلق

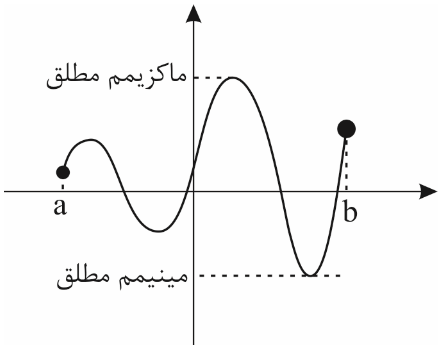
با فرض $c\in D_f$ نقطهٔ $(c,f(c))$ یک نقطهٔ ماکزیمم مطلق برای تابع f نامیده می‌شود، هرگاه به ازای هر x از D_f داشته باشیم $f(c)\ge f(x)$، در این حالت عدد $f(c)$ را مقدار ماکزیمم مطلق f روی D_f می‌نامیم.

مینیمم مطلق

با فرض $c\in D_f$ نقطهٔ $(c,f(c))$ یک نقطهٔ مینیمم برای تابع f نامیده می‌شود، هرگاه به ازای هر x از D_f داشته باشیم $f(c)\le f(x)$، در این حالت عدد $f(c)$ را مقدار مینیمم مطلق f روی D_f می‌نامیم.

تعریف (کوچه بازاری): ماکزیمم مطلق بیشترین و مینیمم مطلق کم‌ترین مقدار تابع در D_f است.

بنابراین هنگامی که تابع در بازهٔ بستهٔ $[a,b]$ پیوسته باشد، باید بتوانیم بدون برداشتن دست از روی کاغذ از ابتدا تا انتهای تابع را در این بازه رسم کنیم و به ناچار در حداقل یک نقطه باید بیشترین و در حداقل یک نقطه باید کم‌ترین مقدار تابع را مشخص نماییم، زیرا دست ما تا بی‌نهایت نمی‌تواند در رسم تابع پیش رود.



دقت کنید که پیوسته بودن تابع در بازهٔ بستهٔ $[a,b]$ شرط کافی وجود ماکزیمم و مینیمم مطلق است اما شرط لازم نیست، یعنی:

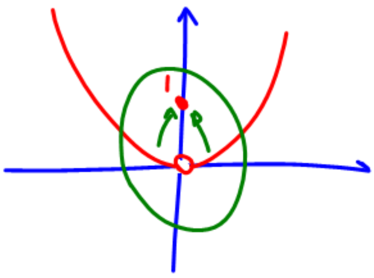
۱) می‌تواند تابع اکسترمم مطلق داشته باشد اما در بازهٔ $[a,b]$ ناپیوسته باشد.

۲) می‌تواند تابع در بازهٔ (a,b) پیوسته باشد اما فاقد اکسترمم مطلق باشد.

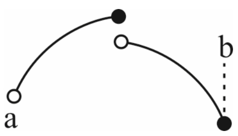
۳) می‌تواند تابع در بازهٔ (a,b) ناپیوسته باشد اما دارای اکسترمم مطلق باشد.

مثلاً $f(x)=\begin{cases} x^2 & x\neq 0 \\ 1 & x=0 \end{cases}$ چه

اکسترمم دارد؟ Max نسبی



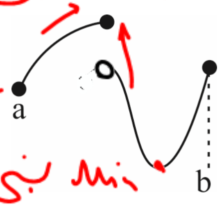
به شکل‌های زیر خوب دقت کنید:



تابع در بازهٔ (a,b) ناپیوسته است اما ماکزیمم و مینیمم مطلق دارد.

تابع در بازهٔ (a,b) پیوسته است اما ماکزیمم مطلق ندارد. Max نسبی

هیچ اکسترممی نیست



هیچ اکسترممی نیست

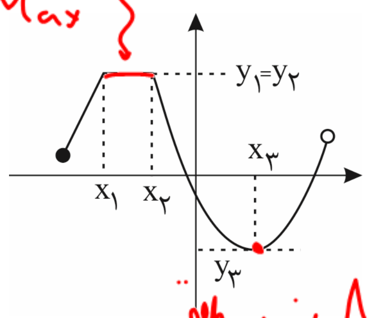
Min نسبی و مطلق

تابع در بازهٔ $[a,b]$ ناپیوسته است اما ماکزیمم و مینیمم مطلق دارد.

بنابراین می‌توان گفت پیوستگی شرط لازم وجود اکسترمم مطلق نیست و تابع چه پیوسته و چه ناپیوسته باشد می‌تواند اکسترمم مطلق داشته باشد، اما خوب اگر تابعی در بازهٔ $[a,b]$ پیوسته باشد خیال ما را از وجود اکسترمم مطلق راحت می‌کند.

خوب حالا به چند شکل زیر دقت کنید:

Max و Min نسبی و نقاط Max مطلق



Min نسبی و مطلق

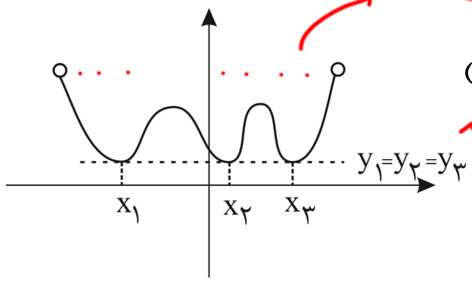
(۱)

x_3: طول مینیمم مطلق

$x \in [x_1, x_2]$: طول‌های نقاط ماکزیمم مطلق

y_1: ماکزیمم مطلق

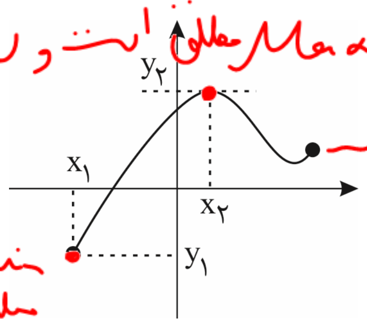
y_3: مینیمم مطلق



Max مطلق ندارد

Min , Max باید عضو برد باشند

x_1 , x_2 , x_3: طول مینیمم مطلق
$y_1 = y_2 = y_3$: مینیمم مطلق
تابع دارای ماکزیمم مطلق نیست.



Max مطلق است و نسبی

نه اکسترمم نسبی

نه اکسترمم مطلق

Min مطلق است نسبی نیست

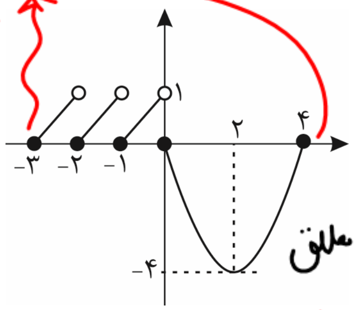
x_2: طول ماکزیمم مطلق
x_1: طول مینیمم مطلق
y_1: مینیمم مطلق
y_2: ماکزیمم مطلق

همان‌طور که از شکل‌های رسم‌شده نیز مشخص است، نقاطی که ماکزیمم و مینیمم مطلق را تولید می‌کنند منحصربه‌فرد نیستند. به عنوان مثال، در شکل (۱) در بی‌شمار نقطه ماکزیمم مطلق و در شکل (۲) در سه نقطه مینیمم مطلق داریم. اما مقدار ماکزیمم و مینیمم مطلق در صورت وجود منحصربه‌فرد است.

خُب با این مقدمه و تعریفی که از اکسترمم‌های مطلق ارائه دادیم، می‌توانیم در تعدادی از توابع با رسم تابع اکسترمم‌های مطلق تابع را تشخیص دهیم.

به عنوان مثال:

$$f(x)=\begin{cases} x^2-4x & 0 \le x \le 4 \\ x-[x] & x<0 \end{cases}$$



هیچ اکسترممی نیستند.

سر و ته بسته بازه نسبی نیستند

Min مطلق

می‌توانند مطلق باشند.

مینیمم مطلق تابع $y=-4$ است. آیا تابع ماکزیمم مطلق دارد؟

خیر Max باید عضو برد تابع باشد.

محاسبه‌ی max و min مطلق تابع پیوسته‌ی f در $[a,b]$

x	a	c_1	c_2	...	b
$f(x)$	$f(a)$	$f(c_1)$	$f(c_2)$		$f(b)$

نقاط بحرانی

بسازیم

برای یافتن اکسترمم مطلق تابع پیوستهٔ f در بازهٔ بستهٔ $[a,b]$ به شرح زیر عمل می‌کنیم:

۱- مشتق تابع را به‌دست آورده و کلیهٔ نقاط بحرانی f را می‌یابیم.

۲- مقدار تابع را در هر یک از نقاط بحرانی درونی بازه و هم‌چنین در نقاط انتهایی بازه محاسبه می‌کنیم.

۳- بزرگ‌ترین عدد به‌دست‌آمده در مرحلهٔ ۲، مقدار ماکزیمم مطلق تابع و کوچک‌ترین آن‌ها مینیمم مطلق تابع در بازهٔ $[a,b]$ است.

تست ۲۳: حاصل جمع بیشترین و کم‌ترین مقدار تابع $y = x^3 - 3x + 3$ در بازهٔ $[-2,1]$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ✓ ۳) ۷ ۴) ۴

$f'(x) = 3x^2 - 3 = 0$

$x = \pm 1$

x	-2	-1	1
$f(x)$	1	5	1

تابع در این بازه ۲ Min مطلق داره

$5 = Max$

$1 = Min$

$Max + 1 = 6$

تست ۲۴: مقادیر مینیمم و ماکسیمم تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 15x$ در بازه‌ی $[-4,3]$ کدام است؟ (سراسری ۹۵)

۱) ۱۸− و ۲۴ ۲) ۴۵− و ۲۷ ۳) ۳۶− و ۲۷ ۴) ۲۷− و ۳۶

$f'(x) = x^2 - 2x - 15 = (x+3)(x-5) = 0 \longrightarrow x = -3 \quad x = 5 \notin [-4,3]$

x	-4	-3	3
$f(x)$			

گزینه ۲

تست ۲۵: هرگاه در تابع $y = x^3 - 3x + k$ مقدار ماکسیمم مطلق تابع در $[0,2]$ دو برابر مینیمم مطلق تابع باشد، مقدار k کدام است؟

۱) ۲ ۲) −۲ ۳) −۶ ۴) ۶

x	0	1	2
$f(x)$	k	$\underbrace{k-2}_{Min}$	$\underbrace{k+2}_{Max}$

$y' = 3x^2 - 3 = 0$

$x = \pm 1$

$x = 1 \in [0,2]$

$k + 2 = 2(k-2)$

$k + 2 = 2k - 4 \longrightarrow k = 6$

تست ۲۶: مجموع مقادیر مینیمم و ماکسیمم مطلق تابع $f(x)=x^{۲}-\frac{۱}{۲}\sqrt{x}$ در بازه‌ی $[۰,۱]$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۱۶}$ ۲) $-\frac{۳}{۱۶}$ ۳) $\frac{۵}{۱۶}$ ۴) $-\frac{۵}{۱۶}$

$f'(x)=2x-\frac{1}{4\sqrt{x}}=0 \longrightarrow 2x=\frac{1}{4\sqrt{x}}$

$4\sqrt{x}=0 \longrightarrow x=0$

$y'=\infty$ جزو

$x\sqrt{x}=\frac{1}{8} \longrightarrow x x^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{8}$

$x^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{8}$

$\boxed{x=\sqrt[3]{\left(\frac{1}{8}\right)^2}=\frac{1}{4}}$

x	0	$\frac{1}{4}$	1
$f(x)$	0	$\frac{1}{16}-\frac{1}{4}=\frac{1-4}{16}=\frac{-3}{16}$	$\frac{1}{2}$

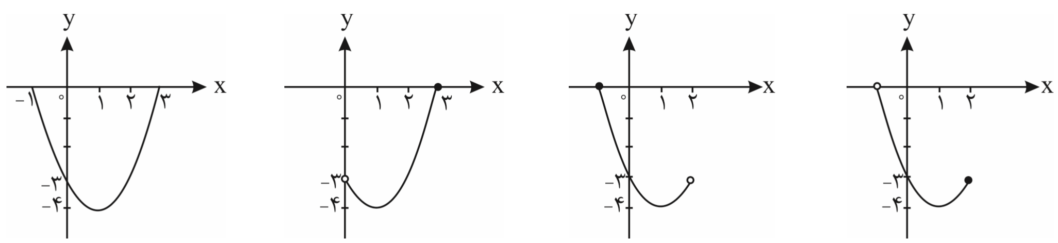
$Min+Max=\frac{-3+8}{16}=\frac{5}{16}$

تست ۲۷: تابع $f(x)=x^{۲}-۲x-۳$ در کدام‌یک از بازه‌های زیر مینیمم و ماکسیمم مطلق ندارد؟

۱) $[۰,۳]$ ۲) $(۰,۳]$ ۳) $[-۱,۲)$ ۴) $(-۱,۲]$

پاسخ: گزینه‌ی «۴» ـ یک راه این است که تابع را در تک‌تک گزینه‌ها بررسی کنیم، یعنی عرض نقاط بحرانی و نقطه‌ی اول و آخر بازه را پیدا و با هم مقایسه کنیم. اما چون این کار وقت می‌گیرد بهتر است نمودار تابع را در بازه‌ی $[-۱,۳]$ یعنی طولانی‌ترین بازه‌ای که از اجتماع گزینه‌ها به دست می‌آید رسم و سپس نمودار هر گزینه را با استفاده از این نمودار اصلی بررسی کنیم. دقت کنید که لازم نیست گزینه‌ی (۱) را بررسی کنیم. (چرا؟)

$y=x^{۲}-۲x-۳$



$[-۱,۳]$ $(۰,۳]$ $[-۱,۲)$ $(-۱,۲]$

حالا به نمودارها دقت کنید. تابع در بازه‌ی $(۰,۳]$ هم مینیمم مطلق دارد و هم ماکسیمم مطلق. مینیمم مطلقش برابر -۴ و ماکسیمم مطلقش برابر صفر است. در بازه‌ی $[-۱,۲)$ نیز هم مینیمم مطلق برابر -۴ دارد و هم ماکسیمم مطلق برابر صفر دارد، ولی در بازه‌ی $(-۱,۲]$ مینیمم مطلقی برابر -۴ دارد، ولی ماکسیمم مطلق ندارد، چون مقدار تابع هرگز برابر صفر نمی‌شود (چون نقطه‌ی $x=-۱$ توخالی است).

دیدید که برای پیداکردن مینیمم یا ماکسیمم مطلق در توابع ناپیوسته یا بازه‌هایی که ابتدا یا انتهایشان باز است، بهتر است از رسم نمودار استفاده کنیم.

نکته: در تابع پیوسته بازه به صورت [Min مطلق, Max مطلق] است.

تست ۲۸: اختلاف ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع $y=2x\sqrt{1-x^2}$ کدام است؟ چون بازه نداده دامنه را پیدا کن:

۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۲) ۱ ۳) $\sqrt{2}$ ۴) ۲ ✓

$1-x^2\ge 0$
$1\ge x^2$
$1\ge |x| \to D_f\,[-1,1]$

x	-1	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1
$f(x)$	0	-1	1	0
		Min	Max	

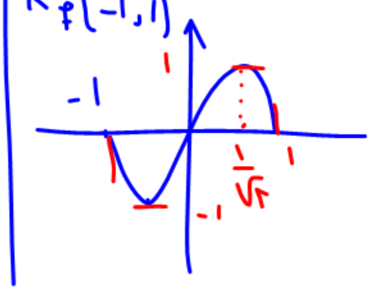
اختلاف=۲

$f'(x)=\cancel{2}\sqrt{1-x^2}+\frac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{1-x^2}}(\cancel{2}x)=0$

$\sqrt{1-x^2}=\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} \longrightarrow 1-x^2=x^2$
$1=2x^2$
$\frac{1}{2}=x^2 \longrightarrow x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

بررسی بیشتر: جزء حل نیست:

$R_f\,[-1,1]$



تست ۲۹: ماکزیمم مقدار تابع $y=\sqrt[3]{x^3-3x^2}$ در بازهٔ $[-2,4]$ کدام است؟

۱) $3\sqrt[3]{2}$ ۲) $\sqrt[3]{2}$ ۳) $4\sqrt[3]{2}$ ۴) $2\sqrt[3]{2}$ ✓

$f'(x)=\frac{3x^2-6x}{3\sqrt[3]{(x^3-3x^2)^2}}$

$y'=0$: $x(3x-6)=0$ → $x=2$, $x=0$

$y'=$ تعریف نشده: $x^3-3x^2=0$, $x^2(x-3)=0$ → $x=0$, $x=3$

x	-2	0	2	3	4
$f(x)$	$-\sqrt[3]{20}$	0	$-\sqrt[3]{4}$	0	$\sqrt[3]{16}$

$\sqrt[3]{16}$: Max $=\sqrt[3]{2^4}=\sqrt[3]{2^3(2)}=2\sqrt[3]{2}$

دشوار :(

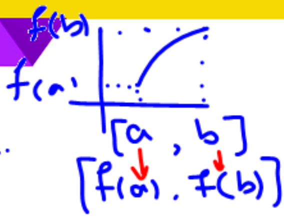
تست ۳۰: مینیمم مطلق تابع با ضابطهٔ $f(x)=x-\sqrt[3]{x^3-3x^2}$ روی $\mathbb{R}$ کدام است؟ (سراسری ریاضی) با این سؤال خیلی طولانی و سخت میشه!

۱) -1 ۲) $-\frac{1}{3}$ ۳) صفر ۴) $\frac{1}{3}$

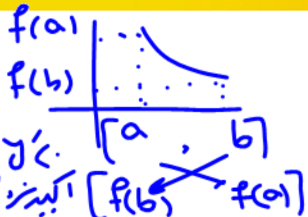
راه حل: گاهی برای یافتن Max و Min مطلق لازم است با ساختن تابع ابزار را بیابیم.

می‌دانیم: $x^2\ge 0$ ضرب در (-3) → $-3x^2\le 0 \xrightarrow{+x^3} x^3-3x^2\le x^3 \xrightarrow{\text{فرجه } 3} \sqrt[3]{x^3-3x^2}\le\sqrt[3]{x^3}=x$

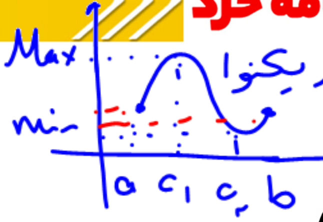
$0\le x-\sqrt[3]{x^3-3x^2} \longrightarrow 0\le f(x) \longrightarrow y_{Min}=0$



$y'>0$ اکیداً صعودی



$y'<0$ اکیداً نزولی



در توابع غیریکنوا ممکن است سر بازه Max و Min را ندارند.

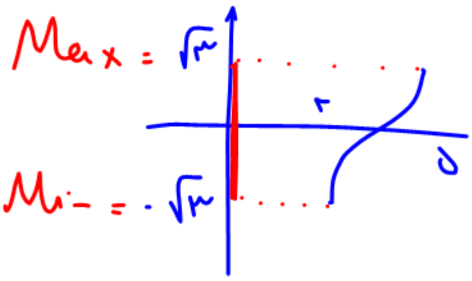
در توابع اکیداً یکنوای پیوسته، اکسترمم‌های مطلق تابع در ابتدا و انتهای بازهٔ تعریف اتفاق می‌افتند.

تست ۳۱: حاصل‌ضرب بیشترین و کم‌ترین مقدار تابع $y=\sqrt{x-۲}-\sqrt{۵-x}$ کدام است؟

۱) -۳ ✓ ۲) -۲ ۳) $۲\sqrt{۳}$ ۴) -۵

$$\begin{cases} x-2\geq 0 \\ 5-x\geq 0\end{cases}\quad \begin{matrix} x\geq 2 \\ 5\geq x\end{matrix} \xrightarrow{\cap} D_f[2,5]$$

$$y'=\frac{1}{2\sqrt{x-2}}-\frac{-1}{2\sqrt{5-x}}>0 \quad \text{اکیداً صعودی}$$



$$R_f=[-\sqrt{3},\sqrt{3}]$$

$$y_{min}\cdot y_{max}=(-\sqrt{3})(\sqrt{3})=-3$$

اگر برد تابع $y=f(x)$ را بتوانیم محاسبه کنیم، محدودهٔ تغییرات y را خواهیم داشت و در صورت داشتن محدودهٔ تغییرات برای y می‌توان بیشترین و کم‌ترین مقدار تابع را در صورت وجود یافت. برای چگونگی محاسبهٔ برد از درس‌نامهٔ فصل تابع و روش‌های محاسبهٔ برد کمک بگیرید.

نکته مهم: اگر تابع f در $[a,b]$ پیوسته باشد و مینیمم مطلق آن m و ماکزیمم مطلق آن M باشد، بُرد تابع f بازهٔ $[m,M]$ خواهد بود.

تست ۳۲: برد تابع با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt{-x^۲-۳x-۲}$ کدام است؟

۱) $[۰,\frac{۱}{۴}]$ ۲) $[۰,+\infty)$ ۳) $[۱,۲]$ ۴) $[۰,\frac{۱}{۲}]$

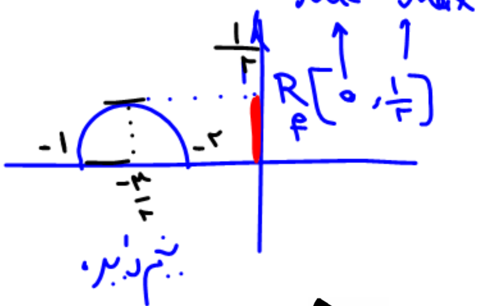
x		-2		-1	
$-x^2-3x-2\geq 0$	$-$	0	$+$	0	$-$

$D_f[-2,-1]$

ابتدا دامنه را می‌یابیم:

$$y'=\frac{-2x-3}{2\sqrt{-x^2-3x-2}}=0\rightarrow x=-\frac{3}{2}$$

x	-2	$-\frac{3}{2}$	-1
$f(x)$	0	$\frac{1}{2}$	0



$R_f[0,\frac{1}{2}]$ (Min ↑ ، Max ↑)

گاهی اوقات از ترکیب تابع‌ها برای پیداکردن برد استفاده می‌کنیم. در حالت کلی وقتی می‌خواهیم برد تابع $f(g(x))$ را در بازهٔ $[a,b]$ پیدا کنیم، اول برد تابع $g(x)$ را (یعنی تابع درونی) به دست می‌آوریم. اگر برد $g(x)$ بازهٔ $[c,d]$ باشد، آن‌گاه برد تابع $f(x)$ را در بازهٔ $[c,d]$ پیدا می‌کنیم. در حالتی که $f(x)$ پیوسته و یکنوا باشد (صعودی یا نزولی) وقتی برد g را پیدا کردیم، کافی است $f(c)$ و $f(d)$ را پیدا کنیم تا برد $f(g(x))$ به دست آید.

تعیین برد ترکیب توابع :

$-x(x-4)=0$

تست ۳۳: اگر $f(x)=2x-[2x]$ و $g(x)=-x^2+4x$ باشند، برد تابع gof، کدام است؟ (سراسری تجربی ۹۹)

۱) $[0,2)$ ۲) $[0,3)$ ۳) $[0,4)$ ۴) $[1,4)$

می دانیم: $0\le u-[u]<1$

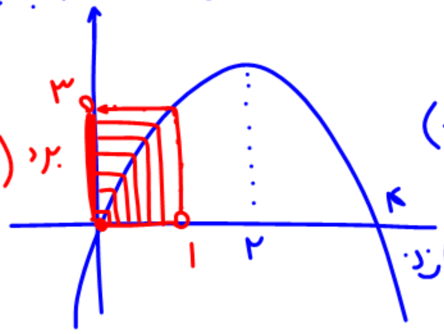
سهمی دهانه به پایین

$0\le y=g(0\le f(x)<1)<3$

برد f برای g دامنه است.

خروجی f ورودی g است.

خروجی تابع داخلی، ورودی تابع خارجی است.



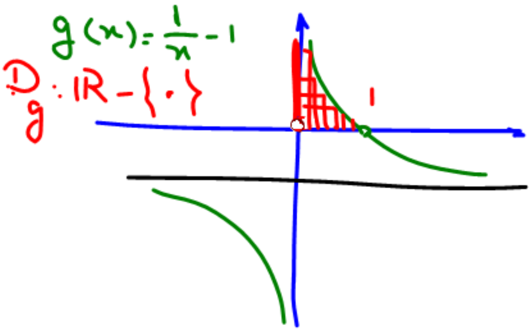
تابع g در بازه $(-\infty,2]$ اکیداً صعودیه در عرض سه و نه دامنه، برد را می‌سازد.

تست ۳۴: اگر $f(x)=x-[x]$ و $g(x)=\frac{1-x}{x}$، برد تابع gof کدام بازه است؟ (ریاضی خارج، تجربی خارج ۹۹)

۱) $(0,+\infty)$ ۲) $[0,+\infty)$ ۳) $(1,+\infty)$ ۴) $[1,+\infty)$

می دانیم: $0\le u-[u]<1$

$g(x)=\frac{1}{x}-1$ همون $y=\frac{1}{x}$ که یه واحد پایین رفته



$0<y=g(0\le f(x)<1)<+\infty$

g نمی‌تونه ورودی صفر داشته باشه و $x=0$ ریشه مخرجه

$D:(0,1)$

$0<x<1$ و در g نزولی اکیده است:

f عدد یک را تولید نمی‌کند

g هم خروجی صفر نداره

$R_{gof}:(g(1)=0 \quad g(0^+)=+\infty)$

اکسترمم نسبی

تعریف ۱ : گوییم تابع f در نقطه‌ای به طول c ماکزیمم نسبی دارد، هرگاه یک همسایگی از c مانند $I\subseteq D_f$ باشد که برای هر $x\in I$ داشته باشیم $f(c)\ge f(x)$. در این حالت $f(c)$ مقدار ماکزیمم نسبی تابع f نامیده می‌شود.

تعریف ۲: گوییم تابع f در نقطه‌ای به طول c مینیمم نسبی دارد، هرگاه یک همسایگی از c مانند $I\subseteq D_f$ باشد که برای هر $x\in I$ داشته باشیم $f(c)\le f(x)$ در این حالت $f(c)$ مقدار مینیمم نسبی تابع f نامیده می‌شود.

خوب حالا بریم سراغ این دو تعریف که در کتاب درسی برای ماکزیمم و مینیمم نسبی ارائه شده است. به زبان ساده ماکزیمم و مینیمم نسبی را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

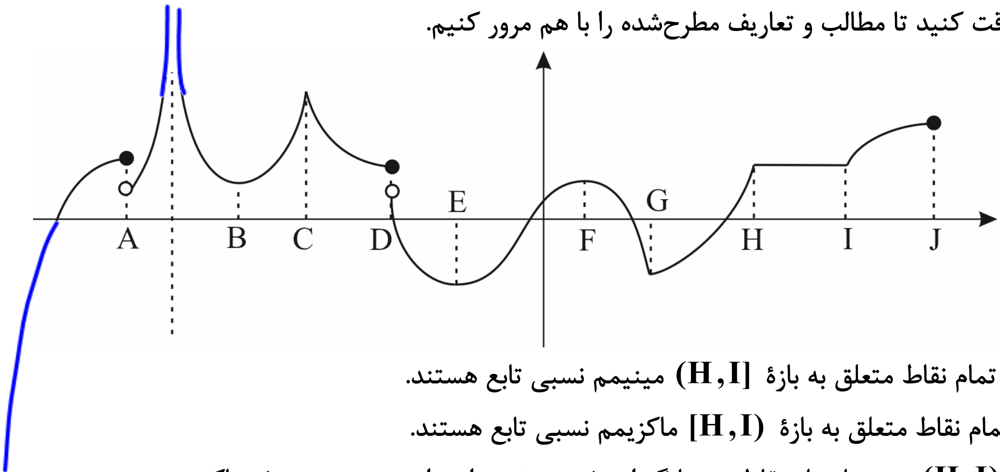
تعریف ۱: نقطه به طول $x=a$ را ماکزیمم نسبی تابع $y=f(x)$ گوییم، هرگاه مقدار تابع در این نقطه از تمام مقادیر تابع در یکی از همسایگی‌های آن بیشتر یا مساوی باشد.

تعریف ۲: نقطه به طول $x=a$ را مینیمم نسبی تابع $y=f(x)$ گوییم، هرگاه مقدار تابع در این نقطه از تمام مقادیر تابع در یکی از همسایگی‌های آن کم‌تر یا مساوی باشد.

تذکر: به مجموعهٔ نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی یک تابع، اکسترمم‌های تابع می‌گوییم.

تذکر: بنا بر تعاریف ارائه‌شده اگر نقطه‌ای به طول $x=c$ بخواهد اکسترمم نسبی تابع باشد، باید تابع در یک همسایگی آن تعریف شود. بنابراین نقاطی که برای آن‌ها نتوان یک همسایگی متعلق به دامنهٔ تابع مشخص کرد نمی‌توانند اکسترمم نسبی تابع باشند. مانند ابتدا و انتهای بازهٔ تعریف.

به شکل زیر خوب دقت کنید تا مطالب و تعاریف مطرح‌شده را با هم مرور کنیم.



نقاط B و E و G و تمام نقاط متعلق به بازهٔ $[H,I]$ مینیمم نسبی تابع هستند.

نقاط A ،C و F و تمام نقاط متعلق به بازهٔ $[H,I)$ ماکزیمم نسبی تابع هستند.

نقاط مربوط به بازهٔ (H,I) چون با تمام نقاط همسایگی‌ای خود عرض برابر دارند، هم در تعریف ماکزیمم نسبی و هم در تعریف مینیمم نسبی گنجانده می‌شوند و می‌توان گفت هم ماکزیمم نسبی‌اند و هم مینیمم نسبی.

از آن‌جایی که J نقطهٔ انتهایی بازهٔ تعریف است و نمی‌توان همسایگی‌ای اطراف آن متعلق به دامنهٔ تابع مشخص کرد نمی‌تواند یک اکسترمم نسبی باشد.

نقطهٔ H با آن که با نقاط همسایگی راست خود هم‌عرض است اما چون مقدار تابع در این نقطه از مقادیر همسایگی چپش بیشتر است، این نقطه، یک نقطهٔ ماکزیمم نسبی است.

نقطهٔ I با آن که با نقاط همسایگی چپ خود هم‌عرض است اما چون مقدار تابع در این نقطه از مقادیر همسایگی راستش کم‌تر است، این نقطه، یک نقطهٔ مینیمم نسبی است.

در نقطهٔ D چون مقدار تابع در این نقطه از نقاط همسایگی چپش کم‌تر و از نقاط همسایگی راستش بیشتر است نه ماکزیمم نسبی و نه مینیمم نسبی است.

نقاط مشتق‌ناپذیر و ناپیوسته نیز می‌توانند اکسترمم نسبی تابع باشند، مانند A,C,G,H,I.

در اطراف نقاط اکسترمم نسبی پیوسته (توابع غیرثابت) یکنوایی تابع تغییر می‌کند، به نقاط B,C,E,F,G دقت کنید. در اطراف این نقاط تابع از صعودی به نزولی یا بالعکس تغییر یکنوایی داشته است، حتی در نقطه‌ای مانند H نیز می‌توان گفت قبل از این نقطه، تابع صعودی و بعد از آن تابع نزولی است. (دقت کنید توابع ثابت هم صعودی و هم نزولی هستند.)

در سمت چپ نقاط ماکزیمم نسبی پیوسته، تابع صعودی و در سمت راست آن نزولی است و در نقاط مینیمم نسبی بالعکس می‌باشد.

الزامی نیست یکنوایی تابع در اطراف نقاط اکسترمم نسبی ناپیوسته تغییر کند، مانند نقطهٔ ماکزیمم نسبی A که قبل و بعد از آن تابع صعودی است.

می‌توان گفت در یک تابع پیوسته هرکجا تابع از صعودی به نزولی تغییر کند آن نقطه یک ماکزیمم نسبی و هرکجا از نزولی به صعودی تغییر داشته باشد یک نقطهٔ مینیمم نسبی است.

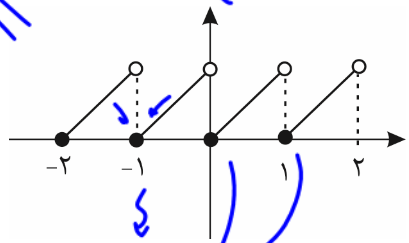
اگر در نقاط اکسترمم نسبی، تابع مشتق‌پذیر باشد، مشتق تابع در آن نقاط الزاماً صفر است، مانند نقاط E ،F و B و تمام نقاط عضو بازهٔ (H,I).

هر نقطهٔ اکسترمم نسبی یک تابع، یک نقطهٔ بحرانی است، زیرا یا آن نقطه یک نقطهٔ مشتق‌ناپذیر است و یا در صورت مشتق‌پذیر بودن مشتقی برابر صفر دارد. (به نقاط اکسترمم نسبی در شکل خوب دقت کنید.)

حالا که یک تحلیل و بررسی جامع و کامل بر روی نقاط اکسترمم نسبی تابع داشتیم و درک هندسی درستی از این نقاط پیدا کردیم، قدم اول با توابعی روبه‌رو هستیم که در تشخیص نقاط اکسترمم نسبی آن می‌توانیم از نمودارهای آن‌ها کمک بگیریم. دقت کنید که در توابع ناپیوسته بهترین راه برای تشخیص اکسترمم‌های نسبی کمک گرفتن از نمودار تابع است.

مثال ۳۵: در هر کدام از توابع زیر، نقاط اکسترمم نسبی تابع را مشخص کنید.

۱) $y = x - [x]$ <1 ⟵ $0 \leq$



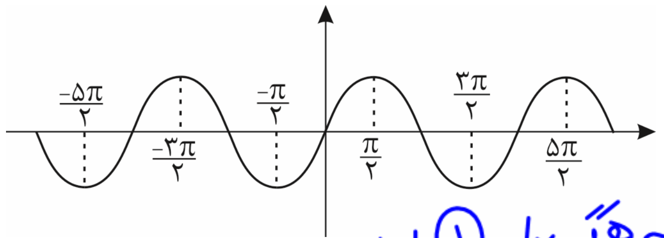
y=۱ عضو برد نیست
Max مطلق نیست

Min نسبی و مطلق

$x \in \mathbb{Z}$ ← مینیمم نسبی

تابع فاقد ماکزیمم نسبی است.

۲) $y = \sin x$



نکته: تعداد اکسترمم‌های مطلق محدودیت ندارد.
مثلاً sin x بی‌شمار Max مطلق دارد که همگی برابر ① اند.

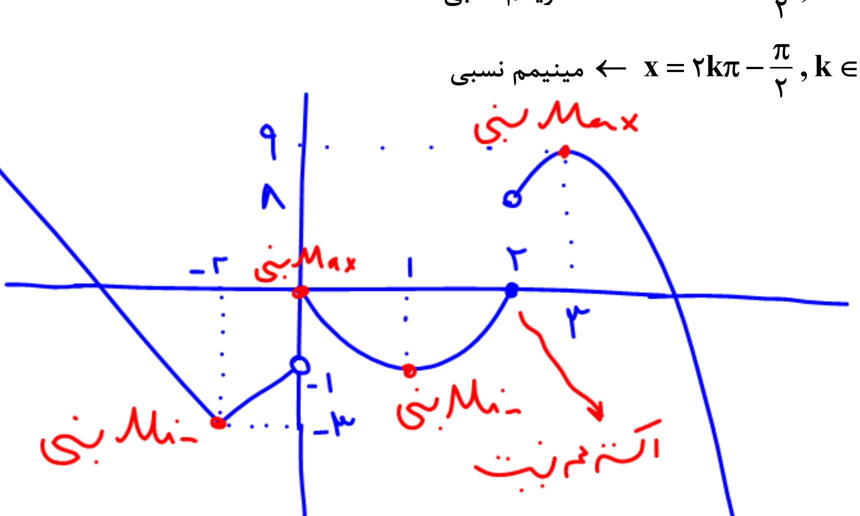
$x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ ← ماکزیمم نسبی

$x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ ← مینیمم نسبی

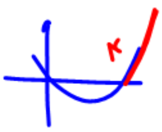
چندضابطه‌ای‌ها را بکش

$$۳)\ y = \begin{cases} x^2 - 2x & 0 \leq x \leq 2 \\ 6x - x^2 & x > 2 \\ |x+2| - 3 & x < 0 \end{cases}$$

Max، Min مطلق ندارد.

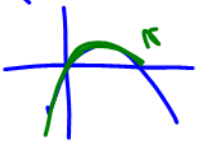


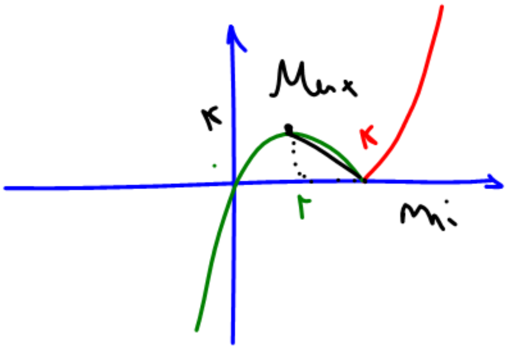
تست ۳۶: در تابع با ضابطهٔ $f(x) = x|x-4|$، فاصلهٔ دو نقطهٔ ماکزیمم نسبی و مینیمم نسبی آن، کدام است؟ (تجربی ۹۸)



۱) $\sqrt{5}$ ۲) $2\sqrt{2}$ ۳) $3\sqrt{2}$ ۴) $2\sqrt{5}$

$$f(x) = \begin{cases} x(x-4) & x \geq 4 \\ -x(x-4) & x < 4 \end{cases}$$





وتر $= \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}$

خوب حالا که با کمک گرفتن از نمودار تابع توانستیم اکسترمم‌های نسبی را تشخیص دهیم، می‌خواهیم به سراغ بررسی ضابطهٔ توابع و تشخیص اکسترمم‌های نسبی آن از روی ضابطه برویم. دقت کنید در این‌جا بررسی ضابطه‌های پیوسته مدنظر است و هم‌چنان در ضابطه‌های ناپیوسته توصیه به رسم است.

آزمون مشتق اول: حاصل y' برای تعیین صعودی نزولی بودن و نقاط اکسترمم تابع است.

فرض کنید c طول نقطهٔ بحرانی تابع f باشد که f در c پیوسته است و هم‌چنین f در یک همسایگی محذوف c مشتق‌پذیر باشد.

الف) اگر علامت f' در $x=c$ از مثبت به منفی تغییر کند، آن‌گاه $x=c$ طول نقطهٔ ماکزیمم تابع f است.

ب) اگر علامت f' در $x=c$ از منفی به مثبت تغییر کند، آن‌گاه $x=c$ طول نقطهٔ مینیمم نسبی تابع f است.

ج) اگر f' در $x=c$ تغییر علامت ندهد، به طوری که f' در یک همسایگی محذوف c همواره مثبت یا همواره منفی باشد، آن‌گاه f در $x=c$ ماکزیمم یا مینیمم نسبی ندارد.

$y'=0$ مماس افقی
- اکسترمم دارد ← ریشه ساده (فرد)
- اکسترمم ندارد ← ریشه مضاعف (زوج) حالت: عطف افقی دارد

برای یافتن اکسترمم‌های یک تابع باید مراحل زیر را انجام دهیم:

۱) محاسبه‌ی مشتق تابع

۲) محاسبه‌ی طول نقاط بحرانی

۳) تعیین علامت مشتق در نقاط بحرانی

۴) اگر x_0 طول نقطه‌ی بحرانی و تغییر علامت مشتق در x_0 از مثبت به منفی باشد، آن‌گاه تابع در x_0 دارای ماکسیمم نسبی است و اگر تغییر علامت مشتق در x_0 از منفی به مثبت باشد، آن‌گاه تابع در x_0 دارای مینیمم نسبی است.

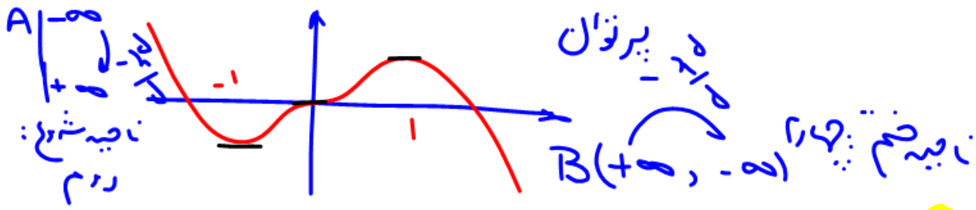
تست ۳۷: تابع $y=\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}$ در کدام‌یک از نقاط زیر دارای ماکسیمم نسبی است؟

۱) -1 ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ۲

پاسخ: گزینه‌ی «۳» ـ طبق آزمون مشتق اول داریم:
$$y'=x^2-x^4=0 \Rightarrow x^2(1-x^2)=0 \Rightarrow x=0,\pm 1$$

مشتق در $x=0$ ریشه‌ی مضاعف دارد و تغییر علامت نمی‌دهد، لذا $x=0$ اکسترمم نمی‌باشد.

	ساده	مضاعف	ساده	
x		-1	0	1
y'	$-$	+	+	$-$
y	↘	↗	↗	↘
		min		max



تذکر: هر ریشهٔ غیرمضاعف مشتق اول یک اکسترمم نسبی است.

تذکر: در توابع مشتق‌پذیر اکسترمم‌های نسبی لزوماً ریشهٔ غیرمضاعف مشتق اول هستند.

تست ۳۸: تعداد اکسترمم‌های نسبی تابع $y=x^5-5x^3-2$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۱

$y'=5x^4-15x^2=5x^2(x^2-3)=0$

$y'=5x^2(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})=0$

مضاعف $x=0$

ساده $x=\pm\sqrt{3}$ ← ۲ اکسترمم

تست ۳۹: به ازای کدام مقدار a تابع با ضابطهٔ $y=\frac{1}{3}x^3+ax^2+4x-1$ اکسترمم نسبی ندارد؟

۱) $a<0$ ۲) $-2\le a\le 2$ ۳) $0\le a\le 3$ ۴) $-4\le a\le 0$

y' ریشه ساده ندارد.
یا ریشه ندارد.

اگر درجه ۲ بخواهد ریشه نه با ریشه ساده نده
یا به ریشه مضاعف بده:

$y'=x^2+2ax+4$

$\Delta_{y'}\le 0 \to (2a)^2-4(4)\le 0$

$4a^2\le 16$

$a^2\le 4 \to |a|\le 2 \to a\in[-2,2]$ ۲ت

تست ۴۰: در تابع $f(x)=\frac{x^2+1}{x-a}$ اگر بین طول‌های نقاط اکسترمم تابع رابطهٔ $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=4$ برقرار باشد، مقدار a کدام است؟

۱) ۱ ۲) -1 ۳) ۲ ۴) -2

$\frac{x_2+x_1=S}{x_1x_2=P}=4$

$f'(x)=\frac{2x(x-a)-(1)(x^2+1)}{(\text{مخرج})^2}=0$

$y'=\frac{2x^2-2ax-x^2-1}{(\ )^2}=0$

$y'=0 \to x^2-2ax-1=0 \begin{cases} x_1 \\ x_2 \end{cases}$

$x_1+x_2=S=\frac{-b}{a}=2a$

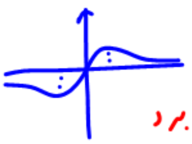
$x_1x_2=P=\frac{c}{a}=-1$

$\frac{S}{P}=4 \to \frac{2a}{-1}=4$

$2a=-4$

$\boxed{a=-2}$

curve



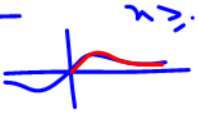
$y=\frac{ax}{x^2+1}$ پیچ نیوتن

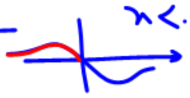
برد $[-\frac{a}{2},\frac{a}{2}]$

تست ۴۱: تابع $y=\frac{|x|}{x^2+1}$ چه تعداد اکسترمم نسبی دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

$y=\begin{cases} \frac{x}{x^2+1} & x>0 \\ \frac{-x}{x^2+1} & x<0 \end{cases}$



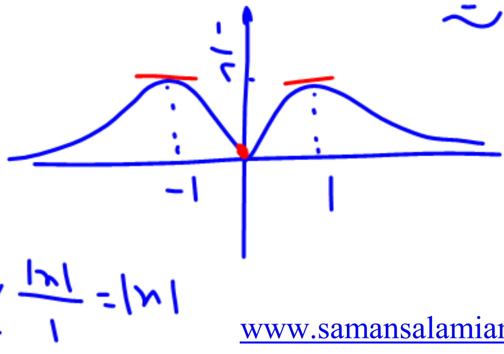


$y'=0 \begin{cases} \to x=\pm 1 \xrightarrow{x>0} x=1 \\ \to x=\pm 1 \xrightarrow{x<0} x=-1 \end{cases}$

$f'_+(0)=1\ne f'_-(0)=-1$

بحرانی $x=0$
مشتق ناپذیر
تیز

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	۰	$-$	ت ن	$+$	۰	$-$	
y		↗		↘		↗		↘	



$y=\frac{|x|}{x^2+1} \underset{x\to 0}{\overset{\text{کم توان}}{\sim}} \frac{|x|}{1}=|x|$

تست ۴۲: تابع $y=\sqrt[3]{x^3-3x^2}$ چه تعداد اکسترمم نسبی دارد؟ به تعداد ریشه‌های غیرمضاعف (زوج) مشتق

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۳

$$y'=\frac{3x^2-6x}{3\sqrt[3]{(x^3-3x^2)^2}}$$

$y'=0: \quad 3x(x-2)=0 \longrightarrow x=2$ ساده ، $x=0$ ساده

$y'=$ تعریف نشده یا ∞ : $(x^3-3x^2)^2=(x^2(x-3))^2=0$

$x^4(x-3)^2=0$: $x=0$ مرتبه ۴ ، $x=3$ مرتبه ۲ مضاعف

جمع مرتبه پنج

فقط $x=0,2$ ریشه مرتبه فرد $y'=0$ بوده‌اند اکسترمم هستند. جواب ② اکسترمم

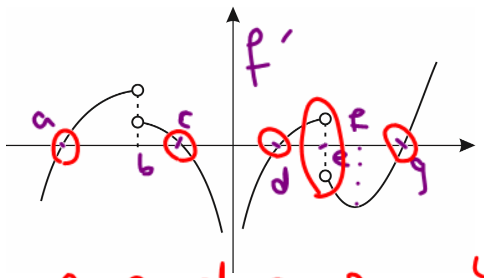
برای بیشتر: $y=\sqrt[3]{x^3-3x^2}$ ، $y=\sqrt[3]{x^2(x-3)}$

$D_f:\mathbb{R}$ $\quad \lim_{x\to\pm\infty} y=\sqrt[3]{x^3}=\pm\infty$ چون y به $\pm\infty$ می‌رود اکسترمم مطلق ندارد.

ریشه مضاعف زیر رادیکال فرجه فرد بازگشت
ساده " " " " عطف قائم

تست ۴۳: تابع $y=f(x)$ تابعی پیوسته در $\mathbb{R}$ است. اگر نمودار $f'(x)$ به صورت زیر باشد، تابع $y=f(x)$ چند اکسترمم نسبی دارد؟

۱) ۳
۲) ۴
۳) ۵
۴) ۶

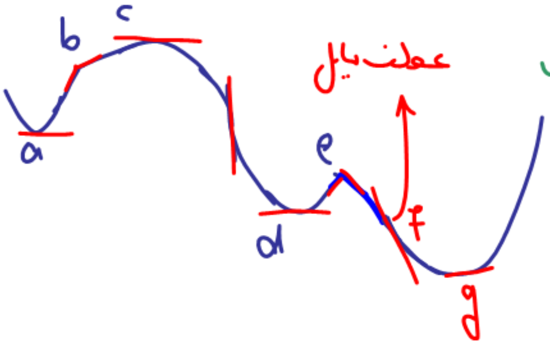


نکته: در تابع پیوسته و غیرثابت هرجا علامت y' عوض شود اکسترمم داریم. صفر شدن y' لازم نیست که

$x=a,c,d,e,g$

نکته در نکته: اگر f پیوسته باشد نقاطی که f' ناپیوستگی جهشی دارد برای f نقطه گوشه است.

برای بیشتر: وقتی f' را می‌دهند برای f یک شکل تابع بدست می‌آید که در کل ثابت مشابه شده



f یک نمونه در راستای بالا پایین بر

اگر (a,b) نقطه‌ی اکسترمم نسبی تابع مشتق‌پذیر f باشد، آن‌گاه:

۱) مختصات اکسترمم در تابع f صدق می‌کند: $f(a)=b$

۲) طول اکسترمم، مشتق تابع را صفر می‌کند: $f'(a)=0$

تست ۴۴: نقاط $A(0,0)$ و $B(1,1)$ نقاط اکسترمم نسبی تابع $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ هستند. حاصل ab کدام است؟

(ریاضی خارج ۱۴۰۱)

$y' = 3ax^2 + 2bx + c$

۱) ‎-۳‎ ۲) ‎-۶‎ ۳) ۳ ۴) ۶

$f(0) = 0 + 0 + 0 + d = 0 \longrightarrow d = 0$

$f'(0) = 0 + 0 + c = 0 \longrightarrow c = 0$

$f(1) = a + b + c + d = 1 \longrightarrow a + b = 1 \longrightarrow a = 1 - b$

$f'(1) = 3a + 2b + c = 0 \longrightarrow 3a + 2b = 0 \longrightarrow 3(1-b) + 2b = 0$

$3 - 3b + 2b = 0$

$\boxed{3 = b} \longrightarrow a = 1 - b = -2$

تست ۴۵: دو نقطه به طول‌های ۳ و ‎-۵‎ نقاط بحرانی تابع با ضابطه‌ی $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ هستند. مقدار مینیمم نسبی این تابع، کدام است؟

(خارج ۸۹)

$y' = 3x^2 + 2ax + b \qquad y' = 0$

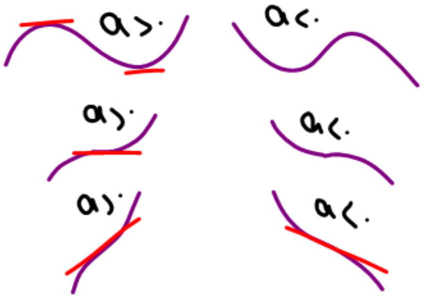
۱) ‎-۸۴‎ ۲) ‎-۸۱‎ ۳) ‎-۵۷‎ ۴) ‎-۷۵‎

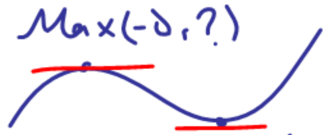
انواع درجه ۳

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$y' = 3ax^2 + 2bx + c = 0$

$\Delta_{y'} > 0 \qquad \Delta_{y'} = 0 \qquad \Delta_{y'} < 0$





$f'(3) = 27 + 6a + b = 0$

$f'(-5) = 75 - 10a + b = 0$

$\longrightarrow a = 3 \,,\, b = -45$

$f(x) = x^3 + 3x^2 - 45x$

$Min: f(3) = 27 + 27 - 45(3) = -81$

تست ۴۶: فاصلهٔ نقطهٔ ماکزیمم نسبی تابع با ضابطهٔ $f(x) = x + \sqrt{4x - x^2}$، از نیمساز ناحیهٔ اول کدام است؟

(سراسری تجربی ۹۹)

۱) ۱ ۲) $\sqrt{2}$ ۳) ۲ ۴) $2\sqrt{2}$

پاسخ: گزینهٔ «۱»

$$f'(x) = 1 + \frac{4 - 2x}{2\sqrt{4x - x^2}} = 0 \Rightarrow -\frac{2 - x}{\sqrt{4x - x^2}} = 1 \Rightarrow \sqrt{4x - x^2} = x - 2 \ (*)$$

با توجه به معادله باید $x - 2 \geq 0$ باشد، یعنی: $x \geq 2$

حال معادلهٔ $(*)$ را حل می‌کنیم. ابتدا به توان ۲ می‌رسانیم:

$$4x - x^2 = x^2 - 4x + 4 \Rightarrow 2x^2 - 8x + 4 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 2 = 0 \Rightarrow \Delta = 16 - 8 = 8$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{4 + 2\sqrt{2}}{2} = 2 + \sqrt{2} & \text{قابل قبول} \\ x = \dfrac{4 - 2\sqrt{2}}{2} = 2 - \sqrt{2} & (\text{غیرقابل قبول زیرا } x \geq 2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow\ f(2+\sqrt{2}) = 2+\sqrt{2}+\sqrt{4(2+\sqrt{2})-(2+\sqrt{2})^2} = 2+\sqrt{2}+\sqrt{2} = 2+2\sqrt{2}$$

$\Rightarrow\ A(2+\sqrt{2}\,,2+2\sqrt{2})$ ماکزیمم نسبی

حال فاصلهٔ نقطهٔ A را از نیمساز ناحیهٔ اول یعنی $y=x$ به دست می‌آوریم:

$$x-y=0 \Rightarrow d=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|2+\sqrt{2}-2-2\sqrt{2}|}{\sqrt{1+1}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=1$$

تست ۴۷: مقدار ماکزیمم نسبی تابع با ضابطهٔ $f(x)=\dfrac{x^2+2x-3}{x^2+1}$، کدام است؟ *(سراسری تجربی خارج از کشور ۹۹)*

۱) $-1+\sqrt{5}$ ۲) $1+\sqrt{5}$ ۳) $-1+\sqrt{3}$ ۴) $1+\sqrt{3}$

پاسخ: گزینهٔ «۱»

$$f'(x)=\frac{(2x+2)(x^2+1)-2x(x^2+2x-3)}{(x^2+1)^2}=0 \Rightarrow (2x+2)(x^2+1)-2x(x^2+2x-3)=0$$

$$\Rightarrow \cancel{2x^3}+2x+2x^2+2-\cancel{2x^3}-4x^2+6x=0 \Rightarrow -2x^2+8x+2=0 \Rightarrow x^2-4x-1=0 \Rightarrow \Delta=20$$

$$\Rightarrow x=\frac{4\pm 2\sqrt{5}}{2}=2\pm\sqrt{5}$$

x	$-\infty$	$2-\sqrt{5}$		$2+\sqrt{5}$	$+\infty$
f′	−		+		−
f	↘	min	↗	$-1+\sqrt{5}$ max	↘

$$f(2+\sqrt{5})=\frac{(2+\sqrt{5})^2+4+2\sqrt{5}-3}{(2+\sqrt{5})^2+1}=\frac{9+4\sqrt{5}+2\sqrt{5}+1}{9+4\sqrt{5}+1}=\frac{10+6\sqrt{5}}{10+4\sqrt{5}}=\frac{5+3\sqrt{5}}{5+2\sqrt{5}}\times\frac{5-2\sqrt{5}}{5-2\sqrt{5}}=-1+\sqrt{5}$$

نکته

$$y_{Hop}=\frac{2x+2}{2x}=1+\frac{1}{x}\xrightarrow{x_0=2+\sqrt{5}}-1+\sqrt{5}$$

در توابع کسری $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ که بدانیم اکسترمم‌های نسبی تابع از نوع نقاط مشتق‌پذیر می‌باشد مختصات اکسترمم نسبی در ضـابطه‌ی تابع و در ضابطه‌ی هوپیتال تابع صدق می‌کند. (به شرط آن که $g'(a)\neq 0$)

$y=\dfrac{\text{درجه ۲}}{\text{درجه ۲}}$ یا $y=\dfrac{\text{درجه ۲}}{\text{درجه ۱}}$ مثل

تست ۴۸: اگر نقطه‌ی $(1,2)$ اکسترمم نسبی تابع $y=\dfrac{x^2+2ax+b}{2x-1}$ باشد، حاصل $a-3b$ کدام است؟

۱) -2 ۲) 2 ۳) -4 ۴) 4

$$y_{Hop}=\frac{2x+2a}{2}$$

$$f(1)=\frac{1+2a+b}{2-1=1}=2 \longrightarrow 1+2+b=2 \longrightarrow b=-1$$

$$y_{Hop}=\frac{2(1)+2a}{2}=2 \longrightarrow 2+2a=4 \longrightarrow 2a=2 \longrightarrow a=1$$

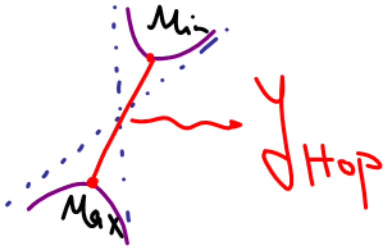
$$a-3b=1-3(-1)=4$$

$y=x+m$

تست ۴۹: خط $y-x=m$ اکسترمم‌های نسبی $y=\dfrac{x^۲-۴x+۶}{۲x-۱}$ را به هم وصل می‌کند، m کدام است؟

۱) ۲ ۲) −۲ ۳) ۱ ۴) −۱

نکته: در تابع $y:\dfrac{\text{درجه ۲}}{\text{درجه ۱}}$ خط واصل Max به Min همان هوپیتال تابع است.



$y_{Hop}=\dfrac{۲x-۴}{۲}=x-۲$ تقاطع $\left\{\begin{matrix} \\ y=x+m\end{matrix}\right. \longrightarrow m=-۲$

در توابعی که در نقاط اکسترمم نسبی مشتق‌پذیرند (و مشتقشان حتماً برابر صفر است)، اگر عرض اکسترمم نسبی برابر k باشد و تابع را با خط $y=k$ قطع دهیم (ضابطه‌هایشان را برابر قرار دهیم) معادله‌ی حاصل از تقاطع آن دو باید ریشه‌ی مکرر (و در صورتی که از درجه‌ی ۲ باشد، مضاعف) داشته باشد.

منظور از اکسترمم عرض این نقاط است. عرض اکسترمم ۳ است.

تست ۵۰: اگر تابع $y=\dfrac{x^۲+ax+۱}{x-۱}$ اکسترممی برابر ۳ داشته باشد، مقدار a کدام است؟

۱) ۷ و −۱ ۲) −۷ و ۱ ۳) −۷ و −۱ ۴) ۷ و ۱

$۳=\dfrac{x^۲+ax+۱}{x-۱} \longrightarrow x^۲+ax+۱=۳x-۳ \longrightarrow x^۲+(a-۳)x+۴=۰$

$\Delta=(a-۳)^۲-۴(۴)=۰ \longrightarrow (a-۳)^۲=۱۶ \longrightarrow a-۳=۴$ یا $a-۳=-۴$

$a=۷$ $a=-۱$

نکته: اگر ☺ تستی طراح ایکس (طول) اکسترمم را داد یا خواست: عمل $y'=۰$

اگر ☹ عرض اکسترمم (y) را داد یا خواست. خط $y=k=y_{ext}$ را با تابع قطع داده و $\Delta=۰$ یا

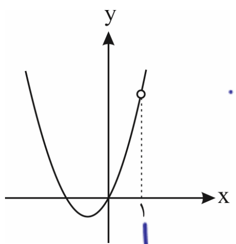
مورد اکسترمم (مثل این تابع عدد ۳) را برابر تابع بذار و $\Delta=۰$ کن.

بررسی نمودارها

۱۰۰٪ کنکور

تست ۵۱: شکل مقابل نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\dfrac{۴x^۳+ax+b}{x-۱}$ است. دوتایی مرتب (a,b) کدام است؟

۱) $(۰,-۴)$
۲) $(-۴,۰)$
۳) $(-۲,۱)$
۴) $(۴,۰)$



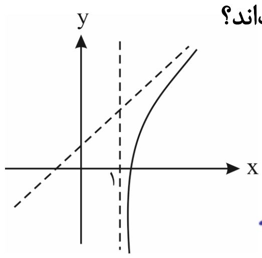
نکته: $\left\{\begin{matrix}\text{طول حفره: هم صورت هم مخرج را صفر می‌کند.}\\ \text{عرض حفره: حد کسر در ریشه صورت و مخرج است.}\end{matrix}\right.$

$\xrightarrow[\text{ریشه صورت}]{x=۱}$ $۴+a+b=۰ \longrightarrow a+b=-۴$

می‌بینیم از $O(۰,۰)$ عبور کرده است:

$f(۰)=\dfrac{۰+۰+b}{-۱}=۰$ $b=۰ \longrightarrow a+b=-۴ \longrightarrow \boxed{a=-۴}$

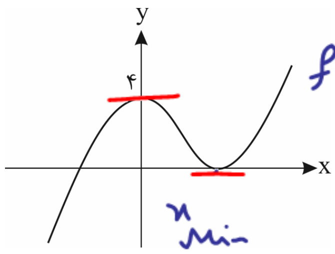
تست ۵۲: شکل مقابل قسمتی از نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{x^2+a}{x+b}$ است. مقادیر a و b به کدام صورت‌اند؟



۱) $a>b=-1$
۲) $a<b=-1$ ✓
۳) $b>a=-1$
۴) $b<a=-1$

می‌بینم نمودار در $x=1$ تعریف نشده پس
$x=1$ ریشه مخرج و مخرج را صفر می‌کند
$x+b=0$
$1+b=0$
$b=-1$
از طرفی می‌بینم شکل در راست $x=1$ به $-\infty$ رفته لذا $\lim y=\frac{1+a}{x-1}=-\infty$ ، $1+a<0$
$x\to 1^+$ ، $1^+-1=0^+$ ، $a<-1 \rightarrow a<-1=b \rightarrow$ گ۲

تست ۵۳: نمودار $y=x^3+ax^2+bx+c$ به صورت زیر است. طول نقطه‌ی مینیمم نسبی تابع کدام است؟ (سراسری ۱۴۰۱)

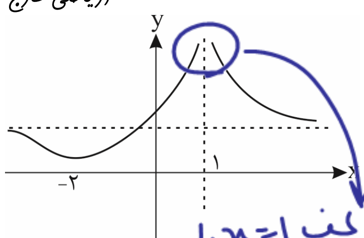


x_{Min}

۱) $\frac{1}{2}$
۲) ۲
۳) $\frac{3}{2}$
۴) ۳

می‌بینم $A(0,4)$ روی تابع و مماس دارای افقیه و $f'(0)=0$
$f(0)=0+0+0+c=4 \longrightarrow c=4$
$f'(x)=3x^2+2ax+b \quad f'(0)=\boxed{b=0}$
$f(x)=x^3+ax^2+4 \quad f'(x)=3x^2+2ax=x(3x+2a)=0$
$x=0\ ,\ x=-\frac{2a}{3}$
می‌بینم در $x=-\frac{2a}{3}$ عرض تابع صفره $f(-\frac{2a}{3})=0$
$a=-3 \longrightarrow x_{Min}=-\frac{2a}{3}=2$: جواب

تست ۵۴: شکل زیر، نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{x^2+a}{x^2+bx+c}$ است، a کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۵)



۱) -2
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۳

می‌بینم شکل در $x=1$ تعریف نشده پس
مخرج کسر که درجه ۲ هست فقط ① ریشه مضاعف $x=1$ دارد، و به صورت $(x-1)^2$ است.
می‌بینم در $x=-2$ مماس افقیه، مشتق در $x=-2$ صفره
x^2-2x+1
$b=-2 \quad c=1$
$y'=\frac{2x(x^2-2x+1)-(2x-2)(x^2+a)}{(\ )^2} \quad \underline{x=-2} \quad -4(9)-(-6)(4+a)=0$
$6(4+a)=36$
$4+a=6$
$a=2$

بهینه‌سازی

در بخش قبل یاد گرفتیم که چگونه مقادیر مینیمم و ماکسیمم مطلق یک تابع را پیدا کنیم. وقتی از این روش در مسائل کاربردی استفاده می‌کنیم تا مینیمم یا ماکسیمم یک مقدار را پیدا کنیم، اسمش می‌شود بهینه‌سازی. در مسائل بهینه‌سازی معمولاً با یک کمیت مثل طول، فاصله، سطح، حجم و ... سروکار داریم که قرار است ماکسیمم یا مینیمم (یعنی بهینه) شود.

برای حل مسائل بهینه‌سازی این کارها را می‌کنیم:

۱) اول یک رابطه (یعنی ضابطه‌ی یک تابع) پیدا می‌کنیم که نشان‌دهنده‌ی کمیتی باشد که قرار است بهینه (ماکسیمم یا مینیمم) شود.

۲) با استفاده از داده‌های سؤال، اطلاعات قبلی ضابطه‌ی نوشته‌شده را به یک ضابطه‌ی یک‌متغیری تبدیل می‌کنیم. گاهی اوقات در این قسمت لازم است از روابط جبری و مثلثاتی یا شکل‌های هندسی هم استفاده کنیم.

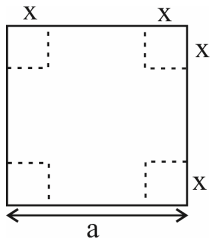
۳) از ضابطه‌ی تابعی که نوشته‌ایم، مشتق می‌گیریم و برابر صفر قرار می‌دهیم (یعنی نقاط بحرانی تابع را پیدا می‌کنیم).

۴) با استفاده از نقاط بحرانی مقدار ماکسیمم یا مینیمم را به دست می‌آوریم.

۵) گاهی اوقات لازم است بعد از نوشتن ضابطه‌ای تابع (یعنی مرحله‌ی اول) دامنه‌ی تابع را هم مشخص کنیم، ولی در اکثر وقت‌ها می‌توانیم این کار را با بررسی ریشه‌های مشتق انجام دهیم.

حالا بیایید با هم چند مثال حل کنیم:

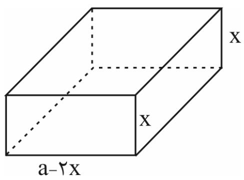
تست ۵۵: می‌خواهیم طبق شکل روبه‌رو، از کناره‌های یک صفحه‌ی مربع‌شکل به ضلع a مربع‌هایی به ضلع x ببریم و با خم‌کردن کناره‌های صفحه یک جعبه‌ی درباز به شکل مکعب‌مستطیل بسازیم. ماکسیمم حجم جعبه‌ای که می‌توانیم بسازیم، چه‌قدر است؟



۱) $\frac{a^۳}{۲}$ ۲) $\frac{a^۳}{۴}$

۳) $\frac{۲a^۳}{۲۷}$ ۴) $\frac{۴a^۳}{۲۷}$

پاسخ: گزینه‌ی «۳» ـ طبق شکل روبه‌رو وقتی از کناره‌های صفحه مربع‌هایی به ضلع x می‌بریم، ابعاد مکعب‌مستطیل می‌شود $a-۲x$، $a-۲x$ و x. پس حجم مکعب مستطیل برابر است با:



$$V = \text{طول} \times \text{عرض} \times \text{ارتفاع} = x(a-۲x)^۲$$

از V مشتق می‌گیریم و برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$V' = (a-۲x)^۲ - ۴(a-۲x)x = (a-۲x)(a-۲x-۴x)$$

$$V' = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{a}{۲} \\ x = \frac{a}{۶} \end{cases}$$

مقدار $x = \frac{a}{۲}$ قابل قبول نیست، چون اگر $x = \frac{a}{۲}$ باشد دیگر چیزی از صفحه باقی نمی‌ماند. پس $x = \frac{a}{۶}$ قابل قبول است و حجم ماکسیمم جعبه برابر است با:

$$\max(V) = \frac{a}{۶}(a-\frac{a}{۳})^۲ = \frac{a}{۶} \times \frac{۴a^۲}{۹} = \frac{۲a^۳}{۲۷}$$

تست ۵۶: S سطح جانبی یک استوانه و s سطح قاعده‌ی آن است. اگر $S+s=۱۲$ فرض شود، شعاع قاعده‌ی استوانه چه‌قدر باشد تا حجم آن ماکسیمم گردد؟

۱) $\frac{۲}{\pi}$ ۲) $\frac{۳}{\pi}$ ۳) $\frac{۲}{\sqrt{\pi}}$ ۴) $\frac{۳}{\sqrt{\pi}}$

پاسخ: گزینه‌ی «۳» ـ می‌دانیم در یک استوانه به شعاع r و ارتفاع h مساحت جانبی برابر $S=۲\pi rh$ و مساحت قاعده برابر $\pi r^۲$ است. پس داریم $۲\pi rh+\pi r^۲=۱۲$. حجم استوانه باید ماکسیمم شود، بنابراین باید ضابطه‌ی $V=\pi r^۲h$ با استفاده از رابطه‌ی بالا به یک ضابطه‌ی یک متغیری تبدیل شود:

$$۲\pi rh+\pi r^۲=۱۲ \Rightarrow h=\frac{۱۲-\pi r^۲}{۲\pi r}$$

$$V=\pi r^۲h \Rightarrow V=\pi r^۲(\frac{۱۲-\pi r^۲}{۲\pi r})=\frac{r}{۲}(۱۲-\pi r^۲)$$

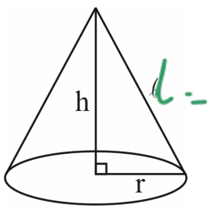
حالا که رابطه‌ی حجم به یک رابطه‌ی یک‌متغیری تبدیل شد، از آن مشتق می‌گیریم:

$$V'=۰ \Rightarrow \frac{۱}{۲}(۱۲r-\pi r^۳)'=۰ \Rightarrow ۱۲-۳\pi r^۲=۰ \Rightarrow r^۲=\frac{۴}{\pi} \Rightarrow r=\frac{۲}{\sqrt{\pi}}$$

تست ۵۷: بیشترین حجم از بین مخروط‌هایی که طول مولد آن‌ها $۳\sqrt{۳}$ سانتی‌متر است، کدام است؟ *(سراسری ۱۴۰۱)*

۱) ۱۲π ۲) ۱۵π ۳) ۱۸π ۴) ۲۷π

پاسخ: گزینه‌ی «۳» ـ شکل روبه‌رو یک مخروط به شعاع قاعده‌ی r و ارتفاع h و مولد ℓ را نشان می‌دهد. حجم مخروط از رابطه‌ی $V=\frac{۱}{۳}\pi r^۲h$ به دست می‌آید. برای آن که V را به یک ضابطه‌ی یک متغیری تبدیل کنیم، رابطه‌ی فیثاغورس را در مثلث قائم‌الزاویه می‌نویسیم:



$\ell =$ مولد $= ۳\sqrt{۳}$

$r^۲+h^۲=(۳\sqrt{۳})^۲$

$r^۲=۲۷-h^۲$

حجم مخروط $V=\frac{\pi}{۳}r^۲h=\frac{\pi}{۳}(۲۷-h^۲)h$

$V=\frac{\pi}{۳}(۲۷h-h^۳)$

$V'=\frac{\pi}{۳}(۲۷-۳h^۲)=۰ \rightarrow h^۲=۹$

$\boxed{h=۳}$

$$r^۲+h^۲=\ell^۲ \Rightarrow r^۲+h^۲=۲۷ \Rightarrow r^۲=۲۷-h^۲$$

$$V=\frac{۱}{۳}\pi r^۲h=\frac{۱}{۳}\pi(۲۷-h^۲)h=\frac{\pi}{۳}(۲۷h-h^۳)$$

$$V'=۰ \Rightarrow ۲۷-۳h^۲=۰ \Rightarrow h^۲=۹ \Rightarrow h=۳ \Rightarrow$$

h		۳	
V'	+	۰	−
V	↗	max	↘

$$\max(V)=\frac{\pi}{۳}(۲۷(۳)-۳^۳)=۱۸\pi$$

قضایای مینیمم و ماکسیمم

برای پیدا کردن مینیمم و ماکسیمم در مسائل بهینه‌سازی (یا در هر جای دیگر) گاهی اوقات از قضایای دیگری هم استفاده می‌کنیم. این قضایا معمولاً با استفاده از مشتق ثابت می‌شوند. استفاده از این قضایا باعث می‌شود در بعضی از سؤال‌ها بتوانیم سریع‌تر به جواب برسیم.

۱) اگر مجموع دو عامل مثبت مقدار ثابتی باشد، ماکسیمم حاصل‌ضرب آن دو وقتی به دست می‌آید که هر دو با هم برابر باشند.

۲) اگر حاصل‌ضرب دو عامل مثبت مقدار ثابتی باشد، مینیمم مجموع آن دو وقتی به دست می‌آید که هر دو با هم برابر باشند.

۳) اگر x و y اعداد حقیقی مثبت باشند که جمعشان ثابت است، حاصل $x^m y^n$ زمانی ماکسیمم می‌شود که: $\frac{x}{m}=\frac{y}{n}$

تست ۵۸: مجموع شعاع قاعده و ارتفاع یک استوانه برابر ۱۰ است. ماکسیمم مساحت جانبی استوانه چه‌قدر است؟

۱) 10π ۲) 20π ۳) 25π ۴) 50π

پاسخ: گزینه‌ی «۴» ـ راه‌حل تشریحی: $r+h=10$ است. برای تک‌متغیره کردن به جای h می‌گذاریم $h=10-r\ (*)$ و داریم:

$$S_{\text{جانبی}}=2\pi rh\overset{*}{=}2\pi r(10-r)=2\pi(10r-r^2)$$

از تابع مشتق گرفته و مساوی صفر می‌گذاریم تا مقادیر اکسترمم مطلق پیدا شود: $S'=2\pi(10-2r)=0\Rightarrow r=5$

r		5	
S'	$+$	0	$-$
S	$\nearrow$	max	$\searrow$

$$\max(S)=2\pi(10(5)-(5)^2)=50\pi$$

راه تستی: برای ماکسیمم‌شدنِ $2\pi rh$ باید rh یعنی ضرب ماکسیمم شود و وقتی جمع ثابت است $(r+h=10)$ طبق نکته‌ی (۱)، ضرب وقتی ماکسیمم می‌شود که $r=h$ باشد، یعنی: $r=h=5\Rightarrow \max(S)=2\pi(5)(5)=50\pi$

اگر در این سؤال بیشترین حجم استوانه را می‌خواست به صورت زیر عمل می‌کردیم:

راه تشریحی:

$$V=\pi r^2h\overset{*}{=}\pi r^2(10-r)=\pi(10r^2-r^3)\Rightarrow V'=\pi(20r-3r^2)=0\Rightarrow r=0\,,\,r=\frac{20}{3}$$

r		$\frac{20}{3}$	
V'	$+$	0	$-$
V	$\nearrow$	max	$\searrow$

$$\Rightarrow \max(V)=\pi r^2(10-r)\overset{r=\frac{20}{3}}{=\!=\!=}\pi(\frac{400}{9})(10-\frac{20}{3})=\frac{4000}{27}\pi$$

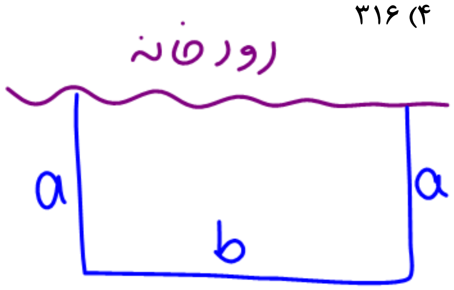
راه تستی: برای ماکسیمم‌شدن حجم که $V=\pi r^2h$ است لازم است تا r^2h ماکسیمم شود از طرفی چون $r+h=10$ مقدار ثابتی است طبق نکته‌ی (۳) داریم:

$$\frac{r}{2}=\frac{h}{1}\Rightarrow r=2h\Rightarrow 3h=10\Rightarrow h=\frac{10}{3}\,,\,r=\frac{20}{3}$$

$$\Rightarrow V=\pi r^2h=\pi(\frac{400}{9})(\frac{10}{3})=\frac{4000}{27}\pi$$

تست ۵۹: بیشترین مساحت مستطیلی که به وسیله‌ی یک طناب به طول ۴۸ متر در حاشیه‌ی یک رودخانه می‌توان محصور نمود، چند مترمربع است؟ (به ضلع چهارم مستطیل دسترسی نیست.)

۱) ۲۴۴   ۲) ۲۸۸   ۳) ۲۹۶   ۴) ۳۱۶



$2a+b=48$

$S=ab=a(48-2a)$

$S=48a-2a^2$

$S'=48-4a=0 \longrightarrow a=12$

$b=24 \;\}\; 2a+b=48$

$S_{Max}=ab=288$

تست ۶۰: کوتاه‌ترین فاصلهٔ نقطهٔ $A(۵,۰)$ از نقاط منحنی به معادلهٔ $y=\sqrt{۲x+۷}$، کدام است؟ *(سراسری تجربی خارج از کشور ۹۹)*

۱) ۴   ۲) ۴/۵   ۳) ۵   ۴) $۳\sqrt{۲}$

پاسخ: گزینهٔ «۱» ـ نقطهٔ $B(x,\sqrt{۲x+۷})$ را روی منحنی در نظر می‌گیریم. فاصلهٔ نقطهٔ $A(۵,۰)$ را از نقطهٔ B محاسبه می‌کنیم:

$$AB=\sqrt{(x-۵)^۲+(\sqrt{۲x+۷}-۰)^۲}=\sqrt{x^۲-۱۰x+۲۵+۲x+۷}=\sqrt{x^۲-۹x+۳۲}$$

برای به دست آوردن کم‌ترین فاصله، از AB مشتق می‌گیریم:

$$(AB)'=\frac{۲x-۸}{۲\sqrt{x^۲-۸x+۳۲}}=\frac{x-۴}{\sqrt{x^۲-۸x+۳۲}}$$

$$(AB)'=۰ \Rightarrow x=۴ \Rightarrow B(۴,\sqrt{۱۵})$$

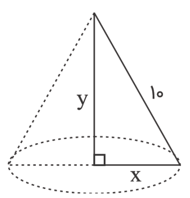
کم‌ترین فاصلهٔ نقطهٔ A از منحنی، برابر است با فاصلهٔ دو نقطهٔ A و B. در نتیجه داریم:

$$A(۵,۰),B(۴,\sqrt{۱۵}) \Rightarrow AB=\sqrt{(۵-۴)^۲+(۰-\sqrt{۱۵})^۲}=۴$$

تست ۶۱: از بین مثلث‌های قائم‌الزاویه با اندازهٔ وتر ۱۰ واحد، دو ضلع قائم با کدام نسبت انتخاب شود تا حجم حاصل از دوران این مثلث حول ضلع قائم، بیشترین باشد؟ *(سراسری تجربی ۹۹)*

۱) $\frac{۲}{۱}$ ۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۱}$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $\frac{\sqrt{۲}}{۱}$

پاسخ: گزینهٔ «۳» ـ در مثلث قائم‌الزاویه به طول اضلاع قائم x و y داریم:



$$x^۲+y^۲=۱۰۰ \Rightarrow x^۲=۱۰۰-y^۲ \quad (*)$$

از دوران مثلث حول ضلع قائمهٔ آن، مخروط تشکیل می‌شود، بنابراین داریم:

$$V=\frac{۱}{۳}\pi x^۲y \xrightarrow{(*)} V=\frac{۱}{۳}\pi(۱۰۰-y^۲)y=\frac{\pi}{۳}(۱۰۰y-y^۳)$$

حال برای به دست آوردن طول اضلاع قائم، از V مشتق می‌گیریم:

$$V'=\frac{\pi}{3}(100-3y^2)\ \Rightarrow\ \frac{\pi}{3}(100-3y^2)=0\Rightarrow 100-3y^2=0\ \Rightarrow\ y^2=\frac{100}{3}$$

$$\Rightarrow\ x^2=100-y^2\ \Rightarrow\ x^2=100-\frac{100}{3}=\frac{300-100}{3}=\frac{200}{3}\ \Rightarrow\ \frac{x^2}{y^2}=\frac{\frac{200}{3}}{\frac{100}{3}}=2\ \Rightarrow\ \frac{x}{y}=\sqrt{2}$$

تست ۶۲: اگر x و y دو ضلع قائم از مثلثی به طول وتر $5\sqrt{2}$ باشند، بیشترین مقدار $3x+4y$ کدام است؟ *(سراسری ریاضی ۹۰)*

۱) $25\sqrt{2}$ ۲) ۳۶ ۳) $28\sqrt{2}$ ۴) ۴۰

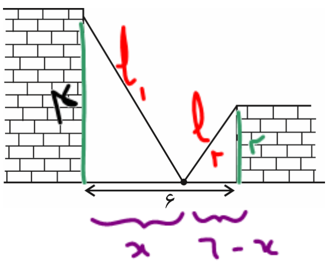
پاسخ: گزینه‌ی «۱» ـ x و y دو ضلع قائم مثلث قائم‌الزاویه با وتر $5\sqrt{2}$ هستند، پس $x^2+y^2=50$ و می‌خواهیم $3x+4y$ ماکسیمم شود. ضابطه‌ی $A=3x+4y$ را به یک ضابطه‌ی یک متغیری تبدیل می‌کنیم:

$$x^2+y^2=50\ \Rightarrow\ y^2=50-x^2\ \Rightarrow\ y=\sqrt{50-x^2}\ \Rightarrow\ A=3x+4\sqrt{50-x^2}$$

$$A'=0\ \Rightarrow\ 3-\frac{4x}{\sqrt{50-x^2}}=0\ \Rightarrow\ 3\sqrt{50-x^2}=4x\ \Rightarrow\ 9(50-x^2)=16x^2\ \Rightarrow\ 50-x^2=\frac{16}{9}x^2$$

$$\Rightarrow\ \frac{25}{9}x^2=50\ \Rightarrow\ x^2=18\ \Rightarrow\ x=3\sqrt{2}\ \Rightarrow\ \max(A)=3(3\sqrt{2})+4\sqrt{50-18}=3(3\sqrt{2})+4(4\sqrt{2})=25\sqrt{2}$$

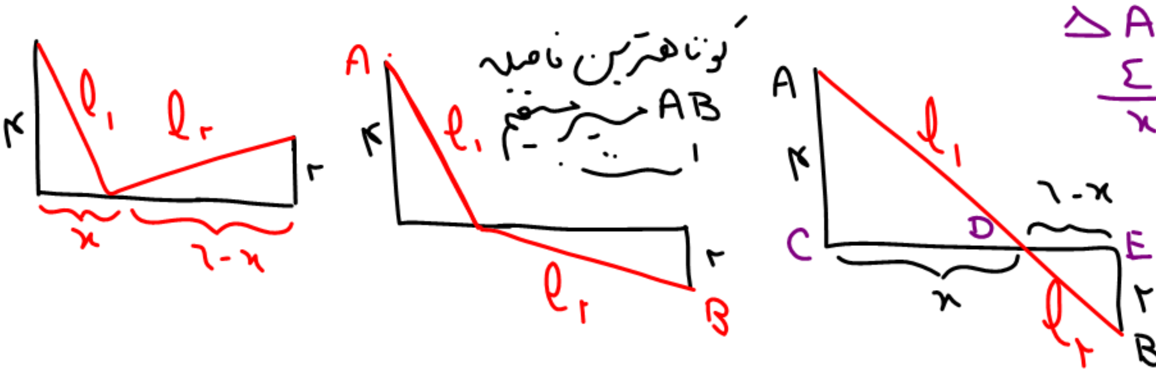
تست ۶۳: در شکل روبه‌رو می‌خواهیم از نقطه‌ی بین دو دیوار ۲ و ۴ متری که به فاصله‌ی ۶ متری هم قرار دارند، دو پله تا بالای دیوارها بسازیم. کوتاه‌ترین مجموع طول پله‌ها برابر کدام است؟



۱) ۸ ۲) $8\sqrt{2}$

۳) $6\sqrt{2}$ ۴) ۱۲

$$L=l_1+l_2=\sqrt{16+x^2}+\sqrt{4+(6-x)^2}$$



$$\triangle ACD\sim\triangle DEB$$

$$\frac{4}{x}=\frac{2}{6-x}$$

$$24-4x=2x$$

$$24=6x$$

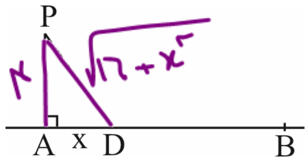
$$\boxed{4=x}$$

$$L=l_1+l_2=6\sqrt{2}$$

تست ۶۴: در شکل مقابل قایقی در نقطهٔ **P** قرار دارد که نزدیک‌ترین فاصلهٔ آن از ساحل ۴ کیلومتر است. اگر سرعت حرکت قایق **3 km / h** و سرعت پیاده‌روی در ساحل **5 km / h** باشد، برای این که فردی که درون قایق است در کم‌ترین زمان ممکن بـه نقطـهٔ **B** بـه فاصلـهٔ ۱۰ کیلومتری از نقطهٔ **A** برسد، باید در نقطه‌ای با چه فاصله **(x)** از نقطهٔ **A** پیاده شود؟ *(کتاب درسی)*

امتحان نهایی

۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۵



$10-x$

$\text{سرعت} = \dfrac{\text{مسافت}}{\text{زمان}}$

$\text{زمان} = \dfrac{\text{مسافت}}{\text{سرعت}}$

$$t_{min} = t_{PD} + t_{DB}$$

$$t = \frac{\sqrt{x^2+16}}{3} + \left(\frac{10-x}{5}\right)$$

مشتق

$$t' = \frac{1}{3}\left(\frac{2x}{2\sqrt{x^2+16}}\right) + \frac{1}{5}\left(0-1\right) = 0$$

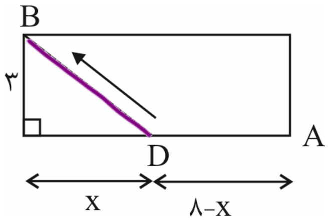
$$\frac{x}{3\sqrt{x^2+16}} = \frac{1}{5} \xrightarrow{\text{به توان دو}} \frac{x^2}{9(x^2+16)} = \frac{1}{25}$$

$$25x^2 = 9x^2 + 9(16) \longrightarrow 16x^2 = 9(16) \longrightarrow x^2 = 9 \longrightarrow \boxed{x=3}$$

تست ۶۵: در شکل زیر مورچه‌ای در یکی از رأس‌های یک صفحهٔ روغنی لغزنده ایستاده است. او می‌خواهد از نقطهٔ **A** به نقطهٔ **B** بـرود. اگـر سرعت حرکت مورچه روی صفحهٔ لغزنده **4 cm / s** و روی سطح کنار صفحه **5 cm / s** باشد، کم‌ترین زمانی که مورچه می‌تواند به نقطهٔ **B** برسد، کدام است؟ *(کتاب درسی)*

امتحان نهایی

۱) ۲ ثانیه
۲) ۲/۰۵ ثانیه
۳) ۲/۲ ثانیه
۴) ۲/۱۵ ثانیه



$$AB: t_{min} = t_{AD} + t_{DB}$$

$$t_{AB} = \frac{8-x}{5} + \frac{\sqrt{9+x^2}}{4}$$

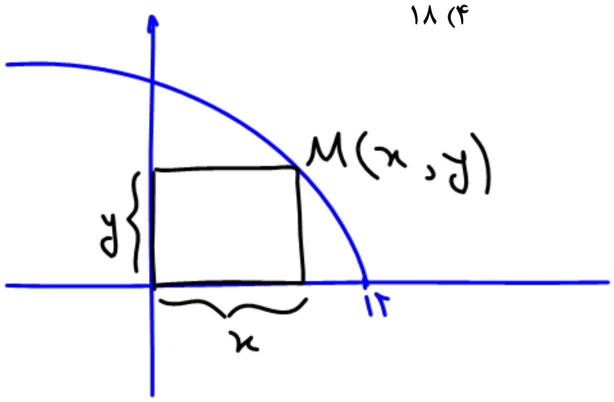
$$t' = -\frac{1}{5} + \frac{1}{4}\left(\frac{2x}{2\sqrt{9+x^2}}\right) = 0 \longrightarrow \frac{x}{4\sqrt{9+x^2}} = \frac{1}{5} \xrightarrow[\text{۲ طرف}]{\text{به توان دو}} \frac{x^2}{16(9+x^2)} = \frac{1}{25}$$

$$25x^2 = 16(9) + 16x^2 \qquad 9x^2 = 16(9) \longrightarrow \boxed{x=4}$$

$$t_{AB} = \frac{8-4}{5} + \frac{\sqrt{9+(4)^2}}{4} = \frac{4}{5} + \frac{5}{4} = 0.8 + 1.25 = 2.05\ s$$

تست ۶۶: بیشترین مساحت مستطیلی که دو ضلع آن بر روی محورهای مختصات و رأس چهارم آن بر روی منحنی به معادلهٔ $y = \sqrt{12 - x}$، در ناحیهٔ اول واقع شود، کدام است؟ *(تجربی ۹۸)*

۱) $8\sqrt{2}$ ۲) $8\sqrt{3}$ ۳) ۱۶ ۴) ۱۸



$S = xy = x\sqrt{12 - x}$

$S = \sqrt{12x^2 - x^3}$

$S' = \dfrac{24x - 3x^2}{2\sqrt{}} = 0 \to 24x = 3x^2$

$\boxed{8 = x}$

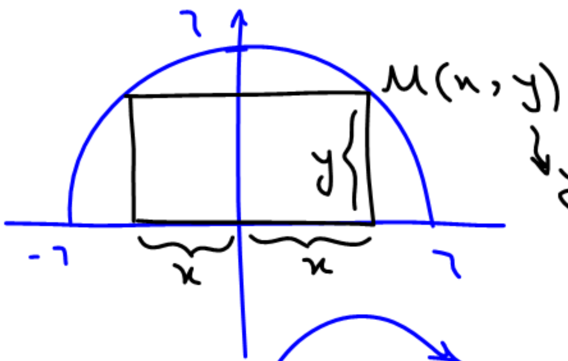
$S = xy = x\sqrt{12 - x} = 8\sqrt{12 - 8 = 4} = 16$

تست ۶۷: بیشترین مساحت مستطیلی که یک ضلع آن بر قطر نیم‌دایره به شعاع ۶ واحد و دو رأس دیگر آن روی این نیم‌دایره باشد، کدام است؟ *(تجربی خارج ۹۸)*

۱) ۱۸ ۲) ۲۴ ۳) ۲۷ ۴) ۳۶

$y = \sqrt{36 - x^2}$

نیم دایره به شعاع a
$y = \sqrt{a^2 - x^2}$



$y = \sqrt{36 - x^2}$

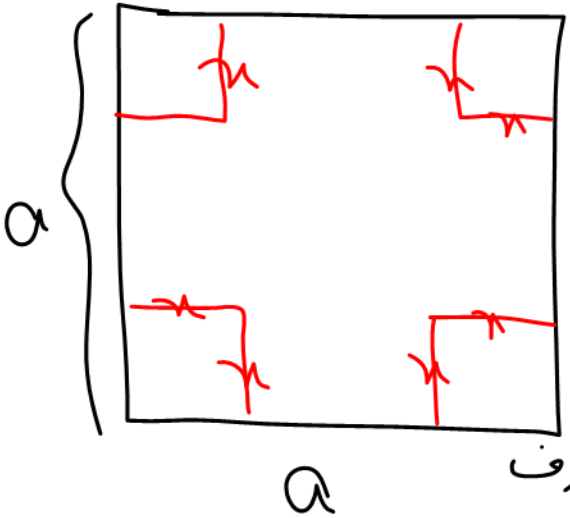
$S = 2xy = 2x\sqrt{36 - x^2} = 2\sqrt{36x^2 - x^4}$

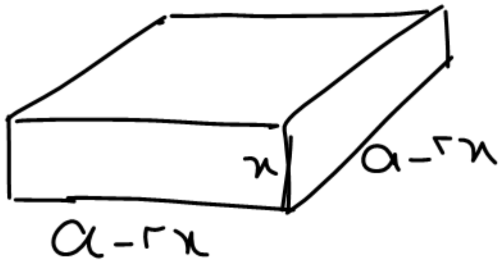
$S'_x = 2\left(\dfrac{72x - 4x^3}{2\sqrt{}}\right) = 0 \to 72x = 4x^3$

$18 = x^2 \longrightarrow \boxed{x = \sqrt{18}}$

$S = 2x\sqrt{36 - x^2} \xrightarrow{x = \sqrt{18}} 2\sqrt{18}\sqrt{18} = 2(18) = 36$

توفیق و رستگاری را از خدا بخواهید.



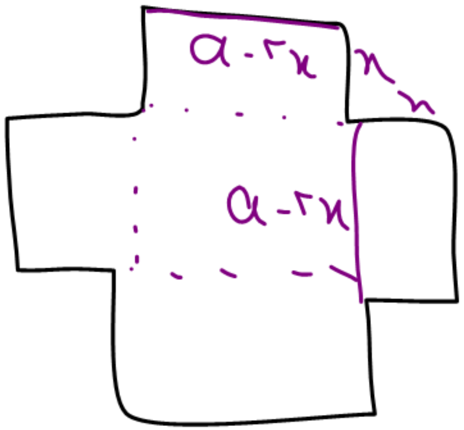


تابع هدف

$$V_{\text{حجم}} = (\text{مساحت قاعده})(\text{ارتفاع}) = (a-۲x)^{۲}\, x$$

$$V' = ۲(-۲)(a-۲x)x + (a-۲x)^{۲} = ۰$$

$$(a-۲x)(-۴x + a - ۲x) = ۰ \quad \begin{cases} x = \dfrac{a}{۲} \rightarrow V = ۰ \\ \boxed{x = \dfrac{a}{۶} \rightarrow V_{Max}} \end{cases}$$



قضیه: در جمع ثابت ضرب زمانی Max که جمله‌ها برابر باشند.

$a>0 , b>0$

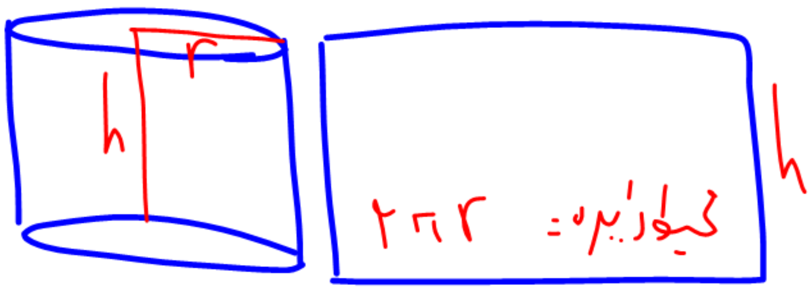
if $\quad a+b=k \longrightarrow \text{Max}(ab): a=b=\frac{k}{2}$

اثبات:

$$P=ab=a(k-a)=ka-a^2$$

$$P'=k-2a=0 \longrightarrow a=\frac{k}{2} \qquad a+b=k \longrightarrow b=\frac{k}{2}$$

مثال) هرگاه مجموع شعاع قاعده و ارتفاع یک استوانه برابر ۱۵ باشد حداکثر سطح جانبی آن کدام است؟



$$S_{\text{Max}}=2\pi r.h \xrightarrow{r+h=15} 2\pi(7.5)(7.5)$$

$$S=2\pi(56.25)$$

$$\underbrace{r \quad h}_{}^{r+h=١٥}$$

r	h	|r-h|	r.h
٧,٥	٧,٥	صفر	٥٦,٢٥
٧	٨	١	٥٦
٦	٩	٣	٥٤
٥	١٠	٥	٥٠
⋮	⋮	⋮	⋮
١	١٤	١٣	١٤

نکته : در ضرب ثابت جمع زمانی Min است که عوامل برابر باشند.

$$\text{if } ab=k \longrightarrow \text{Min}(a+b):\ a=b=\sqrt{k}$$

$$y=a+b=a+\frac{k}{a} \longrightarrow y'=1-\frac{k}{a^2}=0 \longrightarrow 1=\frac{k}{a^2} \longrightarrow a^2=k$$

$$a=\sqrt{k}$$
$$b=\sqrt{k}$$

نکته : اگر جمع دو متغیر مثبت ثابت باشد ضرب توان های مختلف آن

یعنی $a^n b^m$ زمانی Max است که : $\dfrac{a}{n} = \dfrac{b}{m}$