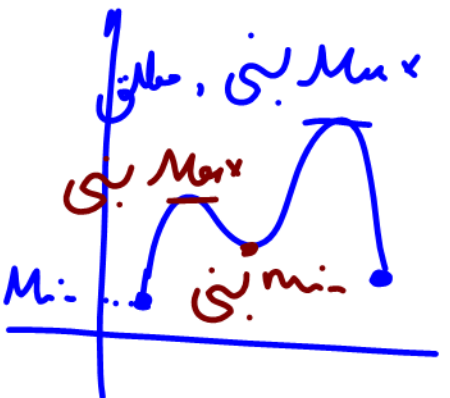
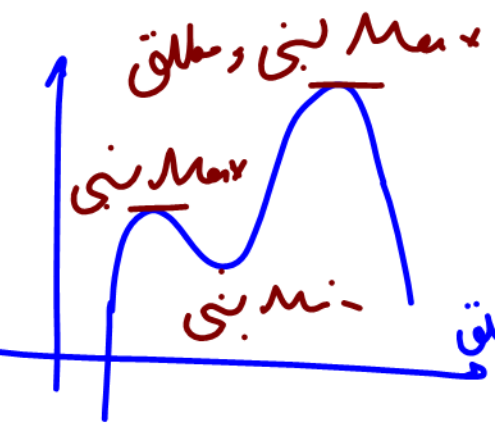


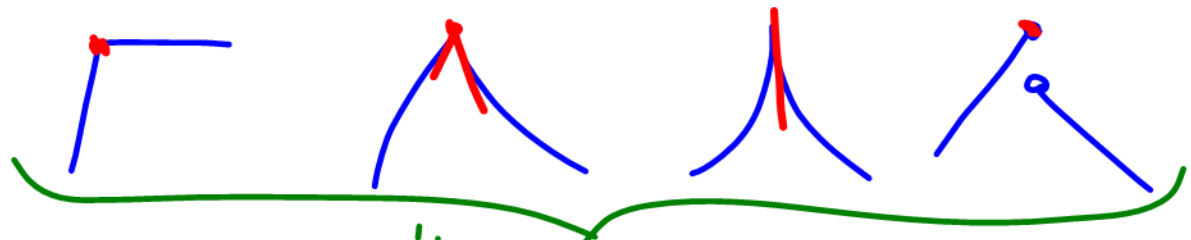
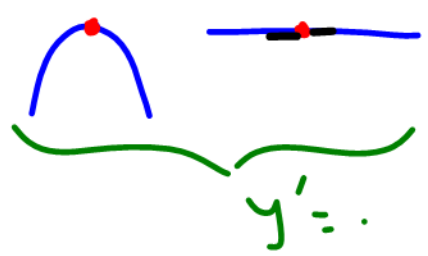
اکثریم حلق و لینی:

مانیت به طرف خود نقطه  
 لیت به سر آمدانه



Min مطلق ندارد.

نکته:  $+\infty$  یا  $-\infty$  مطلق محسوب نمی شوند.



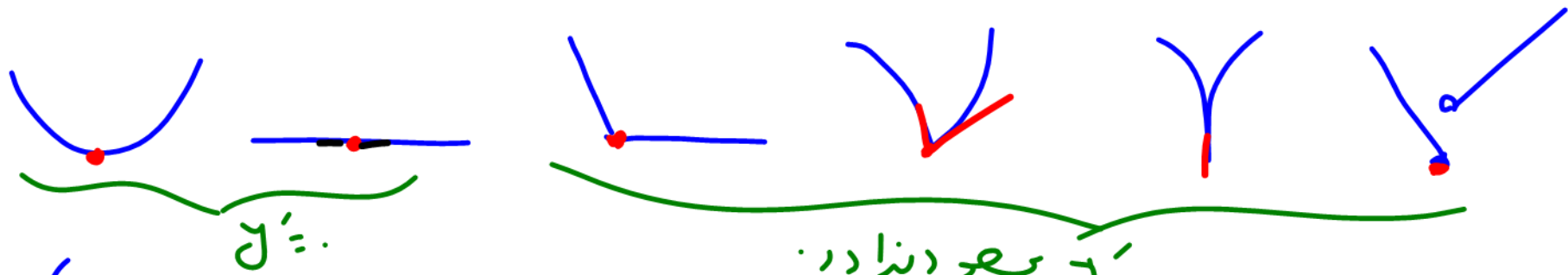
وجود ندارد  
 ندارد

$\text{Max } f(c)$  لینی

مطلق  $\text{Max } f(c)$

هر  $\forall x \in (a, b) : f(c) \geq f(x)$

$\forall x \in D_f : f(c) \geq f(x)$



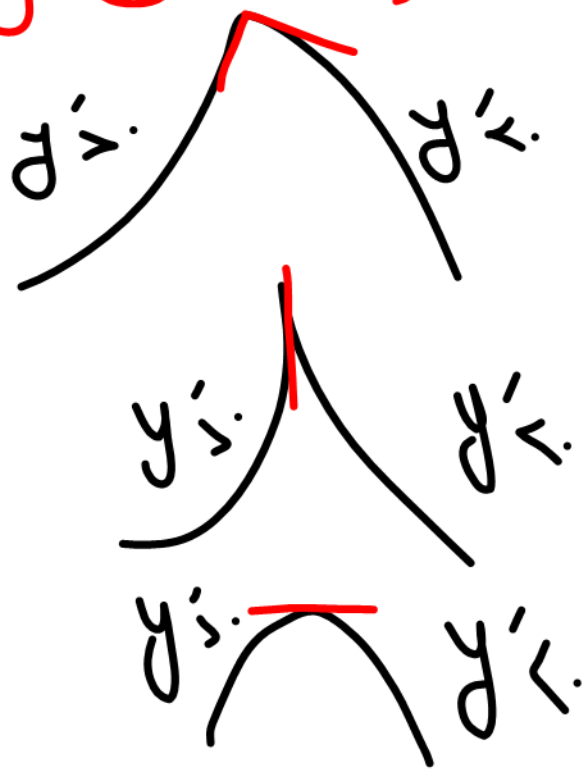
$\forall x \in (a, b) : f(c) < f(x)$  نقطه محلی Min  $f(c)$  محلی  
 هر

$\forall x \in D_f : f(c) \leq f(x)$  نقطه محلی Min  $f(c)$  مطلق

- نکات:
- ① منظور از اکثر هم عرض این نقاط است.
  - ② هر نقطه روی تابع ثابت هم، تعریف Max، تعریف Min محلی و مطلق صافانه
  - ③ اصلاً لازم نیست در نقطه اکثر هم تابع پیوسته و مشتق پذیر باشد.
  - ④ اصلاً لازم نیست در اکثر هم مشتق صفر باشد و ...

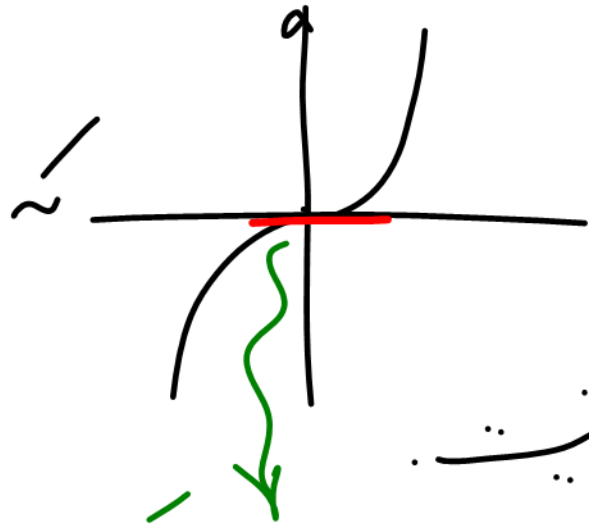
⑤ اگر تابع پیوسته و ارهاستگی آن غیر ثابت باشد، علامت  $f'$

در ۲ طرف اکثر هم‌زمان عوض می‌شود. **صفر شدن  $f'$  لازم نیست**



$x$	$x_0$	
$f'$	-	+
$f$	Max	

⑥ همه اکستریم‌های لینی کبری هستند ولی همه بحرانی‌ها اکستریم



نیستند. مثل  $y = x^3$  در  $x = 0$ .

مماس انحراف داشتن صفره ولی اکستریم نیست.

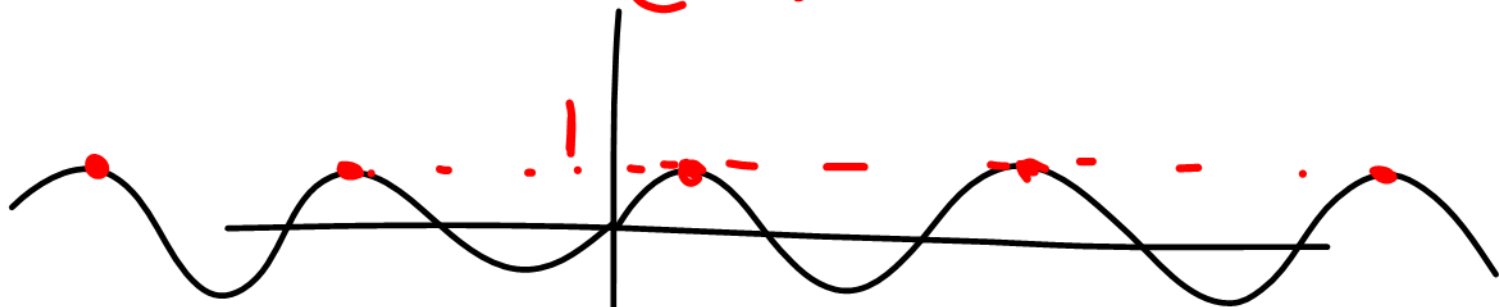
$x = 0$  هیچ اکستریم می

اصولاً نیستی شود.

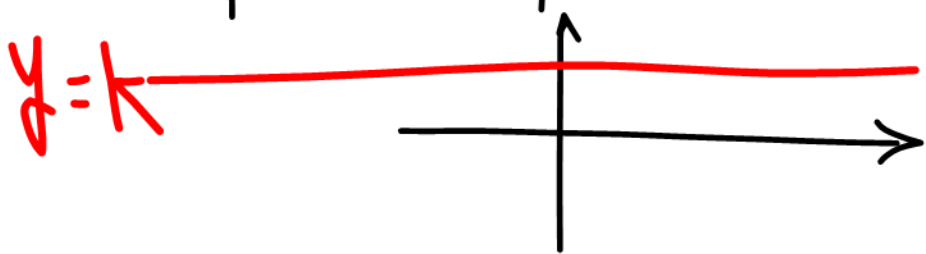
⑦ مقدار استرهای لینی در مطلق محدودیت ندارد مثلاً

$\sin y = y$  یعنی شماره  $\times$  مطلق در لینی داریم که حد

همه شان  $= 1$  است. یا در تابع ثابت



⑧ تابع ثابت هر جایش که پیوسته یعنی هم نقاط استرم مطلق و لینی و جبرانی است.



## کاربرد مشتق

### توابع صعودی و نزولی

#### بررسی جهت تغییرات تابع

(۱) تابع  $f(x)$  صعودی است، اگر به ازای  $x_1 < x_2$  داشته باشیم  $f(x_1) \leq f(x_2)$ .

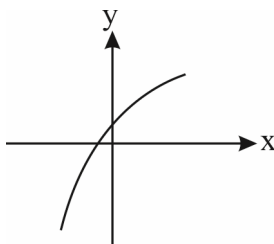
(۲) تابع  $f(x)$  نزولی است، اگر به ازای  $x_1 < x_2$  داشته باشیم  $f(x_1) \geq f(x_2)$ .

(۳) تابع  $f(x)$  صعودی اکید است، اگر به ازای  $x_1 < x_2$  داشته باشیم  $f(x_1) < f(x_2)$ .

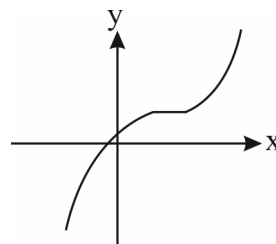
(۴) تابع  $f(x)$  نزولی اکید است، اگر به ازای  $x_1 < x_2$  داشته باشیم  $f(x_1) > f(x_2)$ .

به بیان ساده‌تر تابع وقتی صعودی اکید است که با زیاد شدن  $x$ ، مقدار  $y$  هم زیاد شود و وقتی نزولی اکید است که با زیاد شدن  $x$ ، مقدار  $y$  کم شود.

فرق تابع صعودی و صعودی اکید در این است که در هر دو با زیاد شدن مقدار  $x$ ، مقدار  $y$  زیاد می‌شود، ولی در تابع صعودی ممکن است مقدار  $y$  به ازای دو مقدار  $x$  با هم برابر باشند. به تابعی که صعودی یا نزولی باشد، می‌گوییم یکنوا و اگر تابع نه صعودی باشد و نه نزولی، غیر یکنوا یا نایکنوا است. برای توضیح بهتر به شکل‌های زیر نگاه کنید:

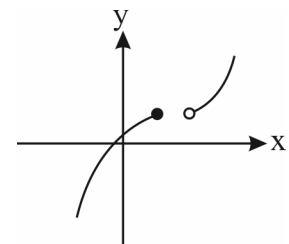


صعودی اکید

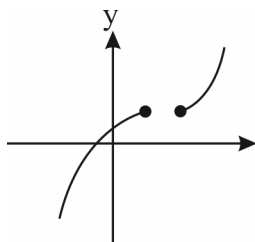


صعودی

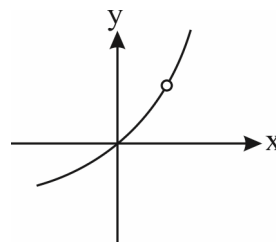
لیج انته‌ای هم فرض نیسته



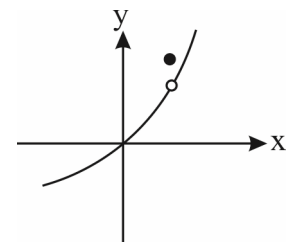
صعودی اکید



صعودی

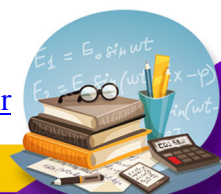


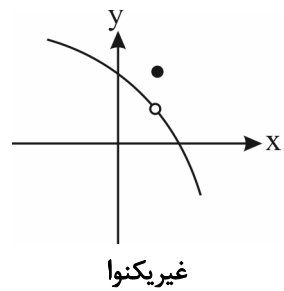
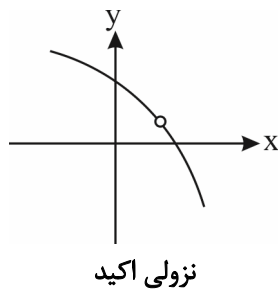
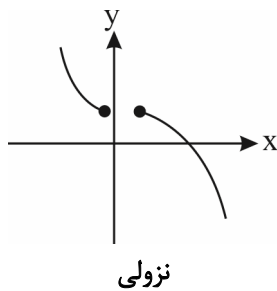
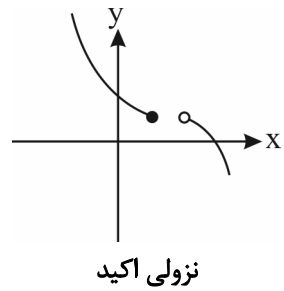
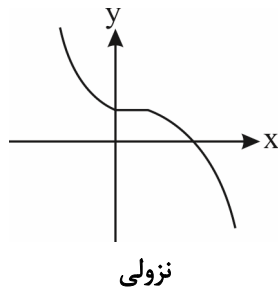
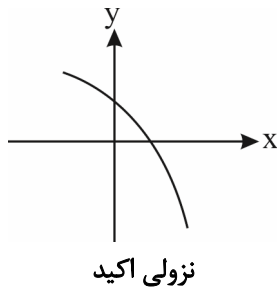
صعودی اکید



غیر یکنوا

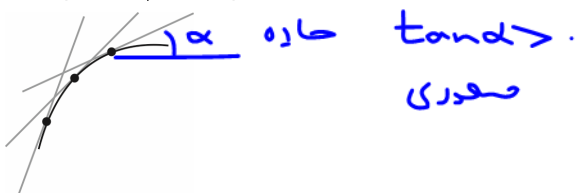
و به همین ترتیب فرق تابع نزولی و نزولی اکید در این است که در حالت اکید مقدار  $y$  همواره کم می‌شود، ولی در تابع نزولی ممکن است دو یا چند نقطه با  $x$ های مختلف،  $y$ های یکسان داشته باشند. به شکل‌های زیر نگاه کنید:





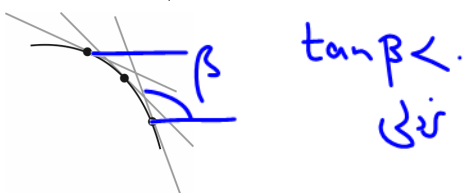
(۱) اگر تابعی در بازه I مشتق پذیر باشد و مقدار  $f'$  مثبت باشد، آن گاه،  $f$  در آن بازه اکیداً صعودی است. به تابع اکیداً صعودی زیر دقت کنید که شیب خط مماس در تمام نقاط آن بازه مثبت است.

همه مسطحهایی که برتبع رسم می شوند با جهت + محور xها زاویه حاد ساخته اند.



(۲) اگر تابعی در بازه I مشتق پذیر باشد و مقدار  $f'$  منفی باشد، آن گاه،  $f$  در آن بازه اکیداً نزولی است. به تابع اکیداً نزولی زیر دقت کنید که شیب خط مماس در تمام نقاط آن بازه منفی است.

همه مسطحهایی که برتبع با جهت مثبت محور xها زاویه منفرجه ساخته اند.

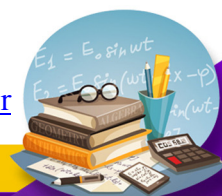
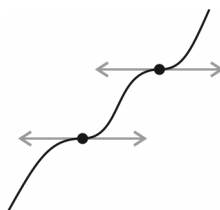


بنابراین با کمک تعیین علامت تابع مشتق تابع  $y = f(x)$  می توانیم وضعیت یکنوایی تابع  $f$  را در بازه های مختلف مشخص کنیم.

(۳) اگر تابعی در بازه I مشتق پذیر باشد و مقدار  $f'$  برابر صفر باشد، آن گاه در آن بازه تابعی ثابت خواهیم داشت.

دقت کنید که در تمام نقاط یک تابع ثابت مشتق پذیر شیب خط مماس صفر است.

(۴) اگر تابعی در بازه I مشتق پذیر باشد و مقدار  $f'$  بزرگتر مساوی صفر باشد اما صفرکننده ها تشکیل یک بازه ندهند همچنان تابع یک تابع اکیداً صعودی خواهد بود. بنابراین صفرشدن مشتق لزوماً قید اکید را از تابع یکنوا کنار نمی گذارد.



به تابع فوق خوب دقت کنید. مشتق این تابع در تمام نقاط به جز دو نقطه مثبت و در آن دو نقطه صفر است اما این موضوع ضربه‌ای به اکیداً صعودی بودن تابع نمی‌زند.

(۵) اگر تابعی در بازه I مشتق‌پذیر باشد و مقدار  $f'$  کوچک‌تر مساوی صفر باشد اما صفرکننده‌ها تشکیل یک بازه ندهند همچنان تابع، یک تابع اکیداً نزولی خواهد بود.

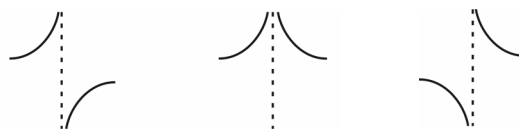
(۶) اگر تابعی در بازه I پیوسته باشد اما در این بازه نقطه مشتق‌ناپذیری داشته باشد چنانچه در همسایگی راست و چپ آن مشتق تابع (هر دو) مثبت یا (هر دو) منفی باشد این نقطه مشتق‌ناپذیر به یکنوایی تابع در آن بازه ضربه‌ای نمی‌زند.



به عنوان مثال تابع فوق در تمام حوزه تعریفش به جز نقطه A مشتق‌پذیر و مشتقی مثبت دارد. بنابراین خود نقطه A که تابع در آن نقطه مشتق‌ناپذیر است ضربه‌ای به اکیداً صعودی بودن تابع نمی‌زند. (چون در همسایگی راست و چپ نقطه  $x = A$  تابع مشتق مثبت است).

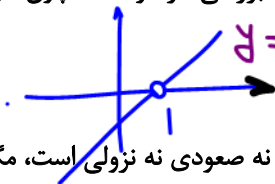
(۷) در توابعی که در بازه I ناپیوسته هستند، پیشنهاد ما رسم تابع و تحلیل یکنوایی تابع بر اساس نمودار آن است.

(۸) اگر تابع گویایی در بازه I، ریشهٔ مخرج ماندگار داشته باشد (مجانِب قائم) امکان آن که تابع در آن بازه یکنوا باشد نیست.



(۹) اگر تابع گویایی در بازه I، ریشهٔ مخرجی داشته باشد که در ساده‌سازی با صورت از بین برود (حفره)، تابع پس از ساده‌سازی را تحلیل می‌کنیم و وجود آن نقطه تأثیری بر یکنوایی تابع ندارد.

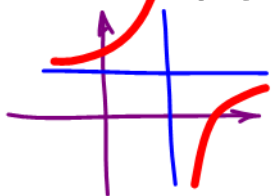
به عنوان مثال برای تحلیل تابع  $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2}$  می‌توان یکنوایی تابع  $y = \frac{(x-1)(x-2)}{x-2} = x-1$  را بررسی کرد و گفت چون تابع



$y = x - 1$  یک تابع اکیداً صعودی است تابع  $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2}$  نیز اکیداً صعودی است.

(۱۰) تابع هموگرافیک  $y = \frac{ax + b}{cx + d}$  دارای شاخه‌های اکیداً یکنوا می‌باشد اما به علت وجود مجانب قائم تابعی نه صعودی نه نزولی است، مگر

این تابع در بازه‌ای تحلیل شود که مجانب قائم داخل آن بازه نباشد که در آن صورت علامت مشتق تابع در آن بازه یکنوایی تابع در آن بازه را نشان خواهد داد. (مجانِب قائم در توابع کسری یعنی ریشهٔ مخرجی که حد تابع اطراف آن  $+\infty$  یا  $-\infty$  شود).



هموگرافیک

تست ۱: تابع  $f(x) = -x^5 + 5x$  روی کدام بازه صعودی است؟

- (۱)  $[0, 1]$  (۲)  $[0, 2]$  (۳)  $[1, +\infty)$  (۴)  $(-\infty, -1]$

پاسخ: گزینه «۱» - مشتق تابع  $f'(x) = -5x^4 + 5$  و ریشه‌های مشتق برابر  $x = 1$  و  $x = -1$  هستند. جدول تعیین علامت مشتق را رسم می‌کنیم:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'$		-	+	-
f		↘	↗	↘

همان‌طور که در جدول می‌بینیم، مشتق تابع در بازه  $[-1, 1]$  بزرگ‌تر یا مساوی صفر است، پس تابع در این بازه صعودی است. از بین گزینه‌ها فقط بازه  $[0, 1]$  زیرمجموعهٔ این بازه است، پس تابع در بازه  $[0, 1]$  هم صعودی است.

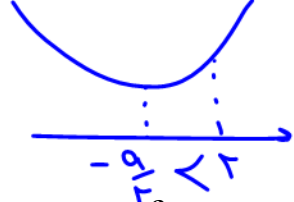
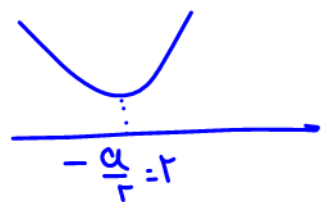




تست ۲: اگر تابع  $y = x^2 + ax - 4$  در بازه  $[2, +\infty)$  صعودی باشد، مجموعه مقادیر  $a$  کدام است؟  
 (۱)  $a = -4$       (۲)  $a \geq -4$       (۳)  $a \leq -4$       (۴)  $a \in \mathbb{R}$

پاسخ: گزینه «۲» - مشتق تابع  $y' = 2x + a$  و ریشه مشتق برابر  $x = -\frac{a}{2}$  است پس جدول تعیین علامت مشتق به صورت زیر است:

x	$-\infty$	$-\frac{a}{2}$	$+\infty$
y'		-	+
y		↘	↗



می بینیم که تابع در بازه  $[-\frac{a}{2}, +\infty)$  صعودی است، پس برای آن که تابع در بازه  $[2, +\infty)$  صعودی باشد، باید  $2 \geq -\frac{a}{2}$  یا  $a \geq -4$ .

مشتق تغییر علامت می دهد:

تست ۳: به ازای چه مقادیر از  $m$ ، تابع  $y = 2x^3 + 3mx^2 + 24x + 9$  اکیداً یکنوا است؟

- (۱)  $-4\sqrt{2} \leq m \leq 4\sqrt{2}$       (۲)  $-8 \leq m \leq 8$       (۳)  $0 < m \leq 8$       (۴)  $-4 \leq m \leq 4$

$$y' = 6x^2 + 6mx + 24 = 6(x^2 + mx + 4)$$

می خوام تغییر علامت ندهم پس یکنواست و فریب نخورم. زمانی یک درجه تغییر علامت نمی دهد.

$$\Delta = b^2 - 4ac = m^2 - 4(1)(4) \leq 0$$

$$m^2 \leq 16 \rightarrow |m| \leq 4 \rightarrow -4 \leq m \leq 4$$

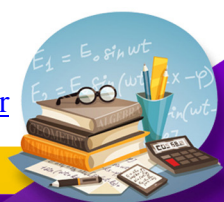
تست ۴: تابع  $f$  با ضابطه  $f(x) = \frac{2x^2 - 3x}{x^2 + x + 3}$  در بازه  $(a, +\infty)$  صعودی اکید است. حداقل مقدار  $a$  کدام است؟

حداقل مقدار  $a$  کدام است؟  
 (۱)  $-\frac{3}{5}$       (۲)  $\frac{3}{5}$       (۳)  $-3$       (۴)  $3$

$$y' = \frac{(4x-3)(x^2+x+3) - (2x^2-3x)(2x+1)}{(x^2+x+3)^2} = \frac{5x^2 + 12x - 9}{(x^2+x+3)^2}$$

$$5x^2 + 12x - 9 = 0 \rightarrow x^2 + 12x - 45 = (x-3)(x+15) = 0 \rightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=-15 \end{cases}$$

x	$-\infty$	$3$	$-\frac{12}{5} = a$	$+\infty$
y'		+	-	+
y		↗	↘	↗



تست ۵: اگر تابع  $y = mx^3 + mx^2 - x + 1$  به ازای  $x \in \mathbb{R}$  نزولی اکید باشد، حدود  $m$  کدام است؟  
 (۱)  $m \leq -3$  (۲)  $m < -3$  (۳)  $m \leq -3$  یا  $m = 0$  (۴)  $-3 \leq m \leq 0$

پاسخ: گزینه «۴» - برای آن که تابع چندجمله‌ای نزولی اکید باشد، باید مشتقش همواره کوچک‌تر یا مساوی صفر باشد، پس باید داشته باشیم:  
 $y' = 3mx^2 + 2mx - 1 \leq 0$

می‌دانیم اگر بخواهیم عبارت درجه دوم همواره  $ax^2 + bx + c \leq 0$  باشد، باید الف)  $a < 0$  و ب)  $\Delta \leq 0$  باشد، پس:

$$\begin{cases} 3m < 0 \Rightarrow m < 0 & (1) \\ \Delta \leq 0 \Rightarrow 4m^2 + 12m \leq 0 \Rightarrow 4m(m+3) \leq 0 \Rightarrow -3 \leq m \leq 0 & (2) \end{cases}$$

اشتراک (۱) و (۲) می‌شود  $-3 \leq m < 0$ .

حالا اگر خوب به تابع نگاه کنید، تمام توضیحات بالا به شرطی صادق‌اند که  $m \neq 0$  باشد؛ ولی وقتی که با یک تابع درجه سوم سروکار داشته باشیم اگر  $m = 0$  باشد، تابع به صورت  $y = -x + 1$  درمی‌آید که باز هم نزولی اکید است. پس تمام حدود  $m$  برابر است با  $-3 \leq m \leq 0$ .

د:  $\frac{a-3a+r}{a(a-3)+r} >$  (مخرج)

هورر ایند

تست ۶: تابع با ضابطه  $f(x) = \frac{ax-2}{x+a-3}, x > 1$  اکیداً صعودی است. بازه مقادیر  $a$  کدام است؟

- (۱)  $(-\infty, 1)$  (۲)  $(2, +\infty)$  (۳)  $(2, +\infty)$  (۴)  $(-\infty, 1)$

باید دت کنیم در  $1 < x < 3-a$  یا  $2 < a < 3$

a	1	2
y'	+	-
y	↘	↗

شرط الف)  $a < 1$  یا  $a > 2$

شرط ب)  $2 < a < 3$

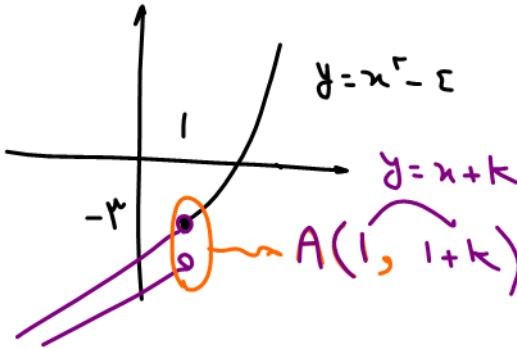
الف)  $\cap$  ب)  $2 < a < 3$

(سبزش)

دو ضابطه‌ای هارابتن

تست ۷: به ازای کدام مقدار  $k$ ، تابع با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & x \geq 1 \\ x + k & x < 1 \end{cases}$  بر  $\mathbb{R}$  صعودی است؟

- (۱)  $k \leq -1$  (۲)  $k \leq -2$  (۳)  $k \leq -3$  (۴)  $k \leq -4$

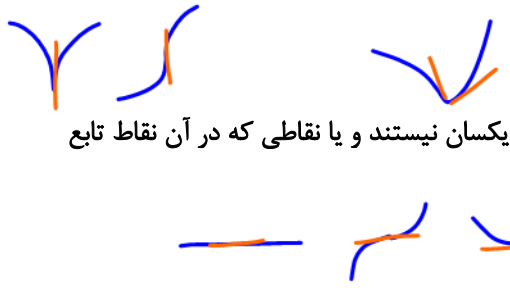


$1+k \leq -3 \Rightarrow k \leq -4$

نقاط بحرانی

تعریف: تابع  $f$  با دامنه‌ی  $[a, b]$  مفروض است. نقطه‌ی  $c \in [a, b]$  را نقطه‌ی بحرانی تابع  $f$  می‌گوییم، هرگاه:  $f'(c) = 0$  یا  $f'(c)$  موجود نباشد.

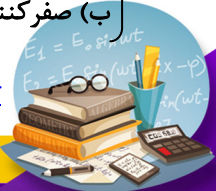
بنابراین بنا بر تعریف کتاب درسی نقاط بحرانی تابع به دو دسته کلی زیر تقسیم می‌شوند:



(۱) ناپیوستگی‌ها

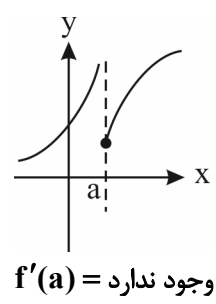
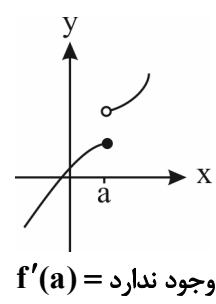
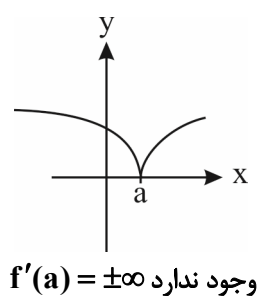
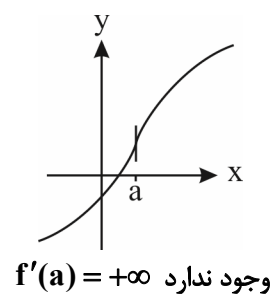
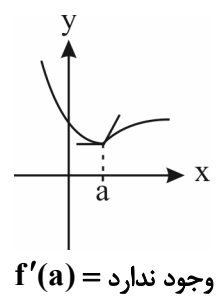
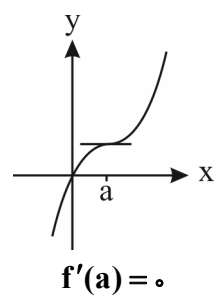
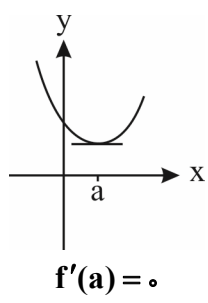
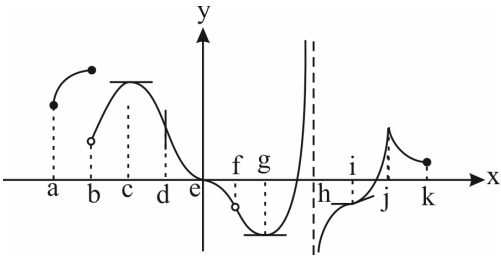
(الف) نقاط مشتق‌ناپذیری (۲) نقاط پیوسته‌ای که نیم‌خط مماس راست و چپ در آن نقاط یکسان نیستند و یا نقطه‌ای که در آن نقاط تابع دارای خط مماس قائم است.

(ب) صفرکننده‌های مشتق که در این نقاط خط مماس بر منحنی به صورت افقی می‌باشد.



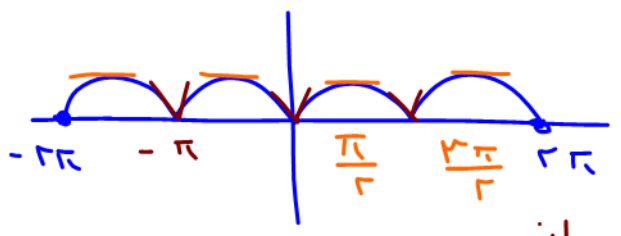
در شکل روبه‌رو انواع نقاط بحرانی را می‌بینید:

می‌خواهیم نقاط بحرانی تابع روبه‌رو را در بازه  $[a, k]$  مشخص کنیم: اولاً نقاط به طول  $a$  و  $k$  نقطه‌ی بحرانی هستند، چون نقاط ابتدا و انتهای بازه‌اند. ثانیاً نقاط  $f$  و  $g$  و  $e, c$ ، نقاط بحرانی نیستند، چون متعلق به دامنه‌ی تابع نیستند. نقاط  $h$  و  $j$  و  $d$  بحرانی‌اند، چون مشتق‌شان برابر صفر است (خط مماس افقی داریم). نقاط  $i$  و  $z$  بحرانی‌اند، چون مشتق ندارند (خط مماس قائم داریم). نقطه‌ی  $i$  بحرانی است، چون نقطه‌ی گوشه‌ای (زاویه‌دار) است. نقطه‌ی  $b$  بحرانی است، چون ناپیوسته است. پس نقاط بحرانی تابع در بازه  $[a, k]$  عبارت‌اند از  $a, b, c, d, e, g, i, j, k$ .



مثال ۸: گاهی نقاط بحرانی را از رسم می‌نویسیم

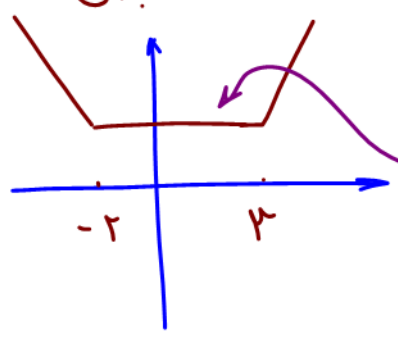
الف)  $y = |\sin x| ; x \in [-2\pi, 2\pi]$



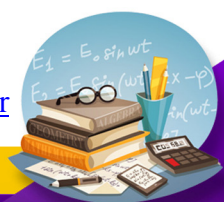
سرته لبته بز  $x = \pm 2\pi$   
 مماس افقی  $x = \pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{3\pi}{2}$   
 گوشه (زاویه‌دار)  $x = \pm \pi, 0$

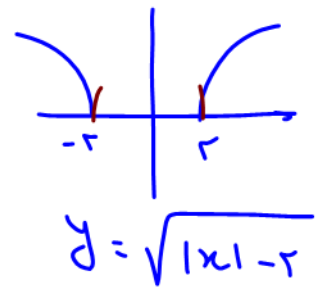
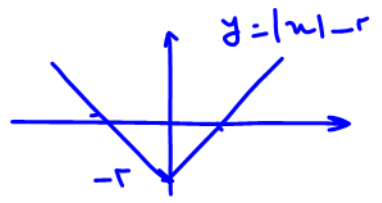
ب)  $y = |x-3| + |x+2|$

معدله داره گله‌دنی بی شمار  
 بحرانی داره در قسمت  
 تابع ثابت گله‌دون



تابلوتربین بحرانی روزگار  
 تابع ثابت است.





پ)  $y = \sqrt{|x| - 2} \geq 0$       $|x| \geq 2 \rightarrow x \leq -2$  یا  $x \geq 2$

2 بحرانی

$D_f: (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$

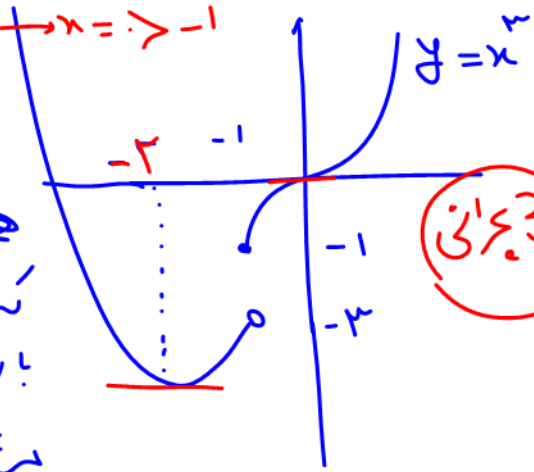
سه دتة لبته بازه بحرانی است.  $x = \pm 2$

$x = 0 \notin D_f$  بحرانی نیست زیرا در دامنه نیست.

$y = 2x + 4 = 0$   
 $x = -2$

ت)  $y = \begin{cases} x^3 & x \geq -1 \\ x^2 + 4x & x < -1 \end{cases}$

هم بحرانی های تک تک ضابطه ها که در نشان در شش طولی ضابطه باشد و نیز کنترل پیوستگی در مشتق پذیری در عبارات تقسیم ضابطه



3 بحرانی

در سرانقی  $x = -2$   
ناپیوستگی  $x = -1$   
در سرانقی  $x = 0$

تعیین نقاط بحرانی از روی ضابطه:

حالا که توانستیم بر اساس درک هندسی از نقاط بحرانی و با کمک گرفتن از نمودار تابع نقاط بحرانی تابع را مشخص کنیم، باید به این مطلب نیز توجه داشته باشیم که همواره رسم نمودار یک تابع برای ما امکان پذیر نخواهد بود، بنابراین نیاز است که با تحلیل ریاضی ضابطه تابع نیز بتوانیم در حد امکان نقاط بحرانی توابع را مشخص کنیم که برای رسیدن به این نقاط ابتدا نقاط ناپیوستگی متعلق به دامنه تابع را به دست می آوریم و سپس با محاسبه تابع مشتق نقاط مشتق ناپذیری و صفرکننده های مشتق را مشخص می کنیم. تذکر: می توانیم نقاط ناپیوستگی و یا مشتق ناپذیری توابع را به کمک مطالب و تذکراتی که در فصل پیوستگی و مشتق آموختیم، به دست آوریم.

تست 9: نقاط بحرانی تابع  $f(x) = x^5 - 5x^2 - 1$  کدام است؟

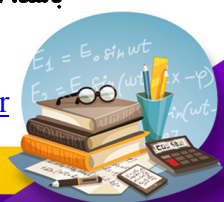
- 1)  $\{0, \sqrt[3]{2}\}$
- 2)  $\{0, \sqrt[3]{2}, 1\}$
- 3)  $\{\sqrt[3]{2}, -\sqrt[3]{2}\}$
- 4)  $\{0, -\sqrt[3]{2}\}$

پاسخ: گزینه «1» - از آن جایی که تابع  $y = x^5 - 5x^2 - 1$  یک تابع چندجمله ای پیوسته با دامنه  $\mathbb{R}$  می باشد و توابع چندجمله ای فاقد نقاط مشتق ناپذیری عضو دامنه هستند، فقط به دنبال صفرکننده های تابع مشتق می رویم.

$y'(x) = 5x^4 - 10x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \sqrt[3]{2} \end{cases}$   
 $5x(x^3 - 2) = 0$

کری

در توابع چندجمله ای و توابع گویا نقاط بحرانی لزوماً ریشه های تابع مشتق می باشند که اگر دامنه تابع توسط صورت سؤال محدود شده باشد، ابتدا و انتهای بازه تعریف (به شرط وجود در دامنه) نیز به علت ناپیوستگی به تعداد نقاط بحرانی تابع اضافه می شوند.



نکته: در این مخرج هدرگز کجایی نیست زیرا در دامنه نیست.

(سراسری تهرانی)

تست ۱۰: نقاط بحرانی تابع با ضابطه  $f(x) = x^2(x-2)^2$  سه رأس یک مثلث اند. نوع این مثلث کدام است؟

- (۱) متساوی الاضلاع
- (۲) فقط متساوی الساقین
- (۳) فقط قائم الزاویه
- (۴) قائم الزاویه و متساوی الساقین

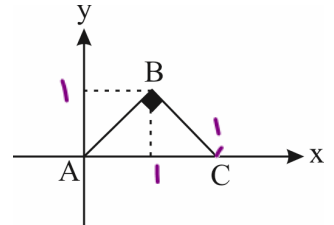
پاسخ: گزینه «۴» - ابتدا ضابطه تابع را کمی ساده تر می کنیم، تا مشتق گیری راحت تر شود:

$$f(x) = (x(x-2))^2 = (x^2 - 2x)^2$$

$$f'(x) = 2(x^2 - 2x)(2x - 2) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=0 \rightarrow A(0,0) \\ x=1 \rightarrow B(1,1) \\ x=2 \rightarrow C(2,0) \end{cases} \Rightarrow AB=BC$$

$y = u^n \rightarrow y' = nu'u^{n-1}$   
 هرگاه ضرب ثابت حفظ (-) باشد  
 هم عمودند.  $\begin{cases} m \cdot m' = -1 \\ m' = -\frac{1}{m} \end{cases}$



بنابراین با توجه به شکل، مثلث قائم الزاویه و متساوی الساقین است.

(سراسری)

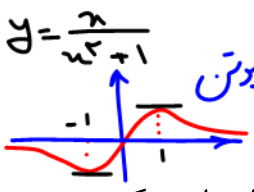
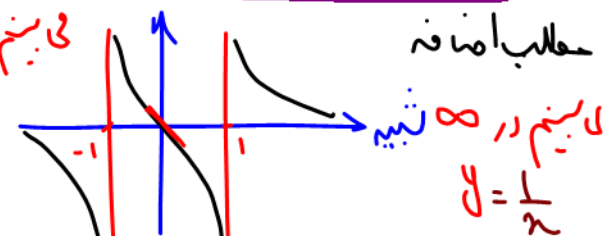
تست ۱۱: تابع  $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$  چند نقطه بحرانی دارد؟

۱ (۲)      ۲ (۳)      ۳ (۴)      ۴ (۱)

$y' = \frac{1(x^2-1) - 2x(x)}{(x^2-1)^2} = \frac{-x^2-1}{(x^2-1)^2} = 0 \rightarrow x^2 = -1$  بحرانی ندارد.

$$y = \frac{x}{x^2-1}$$

می بینیم صوابی:  $y = \frac{x}{-1} = -x$  شبیه  $y = \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}$



تست ۱۲: تابع  $y = \frac{x}{x^2+1}$  در بازه  $[-2, 4]$  تعریف شده است. مجموع طول نقاط بحرانی تابع کدام است؟

- (۱) صفر
- (۲) ۲
- (۳) ۳
- (۴) -۲

پاسخ: گزینه «۲» - از آن جا که این تابع گویا در بازه  $[-2, 4]$  تعریف نشده است  $\{4, -2\}$  به عنوان نقاط ابتدایی و انتهایی بازه، ناپیوستگی و بحرانی است.

حالا به دنبال صفرکننده های تابع مشتق که متعلق به بازه  $[-2, 4]$  است، می گردیم:

$$f'(x) = \frac{(1)(x^2+1) - (2x)(x)}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-1 \end{cases}$$

بنابراین صفرکننده های مشتق  $\{1, -1\}$  و کلیه نقاط بحرانی تابع  $\{1, -1, 4, -2\}$  می باشند که مجموع این نقاط عدد ۲ می باشد.

تست ۱۳: تابع  $f(x) = x^2\sqrt{x} - \sqrt{x}$  چند نقطه بحرانی دارد؟

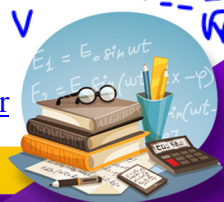
$$y = x^2 \cdot \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

$$y' = \frac{3}{4}x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} = \frac{3}{4}\sqrt{x} - \frac{1}{4\sqrt{x}}$$

$$= \frac{3\sqrt{x}^2 - 1}{4\sqrt{x}} = \frac{3x-1}{4\sqrt{x}} = 0 \Rightarrow 3x-1=0 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$$

سه (۳)      دو (۲)      یک (۱)

$$\frac{3}{4}\sqrt{x} = \frac{1}{4\sqrt{x}} \rightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \rightarrow x = \frac{1}{x} \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow x = \pm 1$$





پاسخ: گزینه «۳» - تابع را به صورت  $f(x) = x^{\frac{7}{3}} - x^{\frac{1}{3}}$  می نویسیم و مشتقش را پیدا می کنیم:

$$f'(x) = \frac{7}{3}x^{\frac{4}{3}} - \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}(7x^2 - 1) = \frac{7x^2 - 1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

ریشه های صورت مشتق برابر  $x = \frac{\sqrt{7}}{7}$  و  $x = -\frac{\sqrt{7}}{7}$  و ریشه مخرجش برابر  $x = 0$  است و هر سه نقطه متعلق به دامنه تابع اند، پس تابع سه نقطه بحرانی دارد.

تست ۱۴: مجموعه طول های نقاط بحرانی تابع با ضابطه  $f(x) = (x^2 - 28)\sqrt[3]{x}$  کدام است؟

- (۱)  $\{-2, 2\}$  (۲)  $\{-\sqrt{7}, \sqrt{7}\}$  (۳)  $\{-2, 0, 2\}$  (۴)  $\{-7, 0, 1\}$

$$y = (x^2 - 28)x^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{7}{3}} - 28x^{\frac{1}{3}} \quad y' = \frac{7}{3}x^{\frac{4}{3}} - \frac{28}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{7}{3}\sqrt[3]{x^4} - \frac{28}{3\sqrt[3]{x^2}} = 0$$

$$\frac{7}{3}\sqrt[3]{x^4} = \frac{28}{3\sqrt[3]{x^2}} \quad \sqrt[3]{x^6} = x^2 = 4 \rightarrow x = \pm 2$$

$$x = 0$$

ریشه های داخل تدریس حلقه یا نوشته شده با ما را بنویس  
 برای یافتن نقاط بحرانی تابع  $y = |f(x)|$  تابعی پیوسته کافی است معادلات  $f(x) = 0$  و  $f'(x) = 0$  را حل کنید.

تست ۱۵: تعداد نقاط بحرانی تابع با ضابطه  $f(x) = |x^3 - x|$  روی بازه  $[-1, 2]$  کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

$$x^3 - x = 0 \rightarrow x(x^2 - 1) = 0 \rightarrow x = 0, \pm 1$$

$$3x^2 - 1 = 0 \rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$

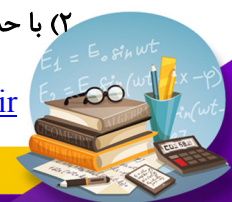
تکرار  $x = -1$   
 هم به باز هم  
 جواب:  $x^3 - x = 0$

$$x \in \left\{ 0, \pm 1, \pm \frac{\sqrt{3}}{3}, 2 \right\}$$

در تابع  $y = g(x)|f(x)|$  تابعی پیوسته):

(۱) جواب های معادله  $f(x) = 0$  نقاط بحرانی تابع هستند.

(۲) با حذف قدر مطلق از تابع  $y = g(x)f(x)$  مشتق گرفته و نقاطی (عضو دامنه) که مشتق صفر است یا موجود نیست بحرانی اند.



(ریاضی خارج از کشور)

تست ۱۶: تابع با ضابطه  $f(x) = x|x^2 - 1|$  و دامنه  $[-2, 2]$  چند نقطه بحرانی دارد؟

- ۳ (۱)
- ۴ (۲)
- ۵ (۳)
- ۶ (۴) ✓

سه دانه بسته بازه بحرانیه

ریشه دقل قدر مطلق  $x = \pm 1$

$$y = x(x^2 - 1) = x^3 - x \rightarrow y' = 3x^2 - 1 = 0 \rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

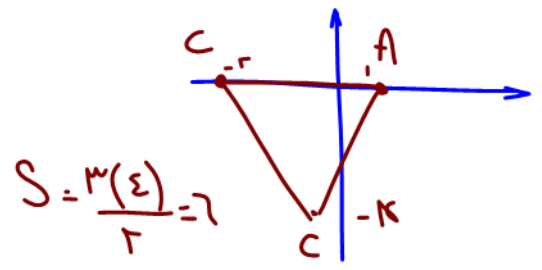
تست ۱۷: نقاط بحرانی بر روی نمودار تابع  $f(x) = (x-1)|x^2 + x - 2|$  سه رأس مثلثی هستند. مساحت این مثلث کدام است؟

(سراسری ریاضی خارج از کشور)

- ۴ (۱)
- ۴/۵ (۲)
- ۶ (۳) ✓
- ۸ (۴)

قدر رومی ضیال، بفرجون بعشق بهمرد

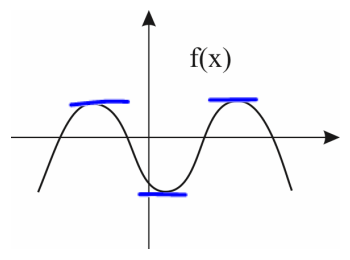
صغریه  $x = 1, -2$

$$y = (x-1)(x^2 + x - 2) = x^3 + x^2 - 2x - x^2 - x + 2 = x^3 - x + 2 = 0$$


$A(1, 0)$   
 $B(-1, -4)$   
 $C(-2, 0)$

$$y' = 3x^2 - 1 = 0 \rightarrow x = \pm 1$$

تست ۱۸: اگر نمودار تابع  $y = f(x)$  به صورت زیر باشد، تابع  $y = \frac{1}{f(x)}$  چه تعداد نقطه بحرانی دارد؟



$y' = \frac{0 - f'(x)}{f^2(x)} = 0 \rightarrow f'(x) = 0$

جایی مشتق نیت تابع صفره  
 که مماس بر تابع افقیه

- ۲ (۱)
- ۳ (۲)
- ۴ (۳)
- ۵ (۴)



تست ۱۹: تعداد نقاط بحرانی تابع  $f$  با ضابطه  $f(x) = |\sin x|$  بر بازه  $(-\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4})$  کدام است؟

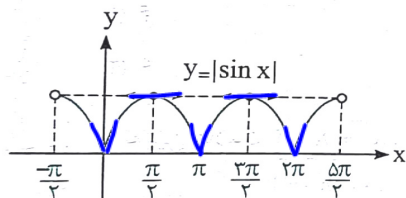
۵ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

پاسخ: با توجه به تعریف نقاط بحرانی منحنی یک تابع (مشتق ناموجود یا برابر با صفر)، نقاط به طول های  $x = \{0, \frac{\pi}{4}, \pi, \frac{3\pi}{4}, 2\pi\}$



بحرانی تابع  $f$  در بازه  $(-\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4})$  به شمار می‌روند.

(سراسری ریاضی)

تست ۲۰: مجموعه طول‌های نقاط بحرانی تابع با ضابطه  $f(x) = |x-2|\sqrt{x^2}$  کدام است؟

~~$\{\frac{2}{3}, 2\}$  (۴)~~

~~$\{0, 1\}$  (۳)~~

~~$\{0, \frac{2}{3}, 2\}$  (۲)~~

$\{0, \frac{4}{5}, 2\}$  (۱) ✓

*Handwritten notes: x=2 is a sharp point, x=0 is a sharp point.*

$$y = (x-2)x^{\frac{3}{2}} = x^{\frac{3}{2}} - 2x^{\frac{3}{2}} \rightarrow y' = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} - \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$$

$$y' = \frac{3}{2}\sqrt{x} - \frac{3}{2}\sqrt{x} = 0 \rightarrow \frac{3}{2}\sqrt{x} = \frac{3}{2}\sqrt{x} \rightarrow \sqrt{x} = \frac{4}{5} \rightarrow x = \frac{16}{25}$$

*Handwritten notes: x=0 is a sharp point, x=2 is a sharp point. The function has a local maximum at x=2 and a local minimum at x=0.*

تست ۲۱: اگر تابع  $f(x) = |x^2 - mx + m + 3|$  فقط یک نقطه بحرانی داشته باشد، تمام مقادیر  $m$  کدام است؟

$m \in \emptyset$  (۴)

$-2 \leq m \leq 6$  (۳) ✓

$-2 < m < 6$  (۲)

$m = -2, m = 6$  (۱)



سهی دهانه به بالا  
فقط مطلق سهی بالا  
۳ بحرانی  
۱ بحرانی

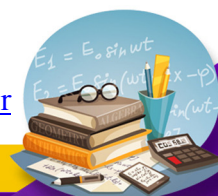
$$\Delta = (-m)^2 - 4(m+3) \leq 0$$

$$m^2 - 4m - 12 \leq 0$$

*Handwritten notes: m = -2, 6*

تعیین نقاط بحرانی در توابع چندضابطه‌ای

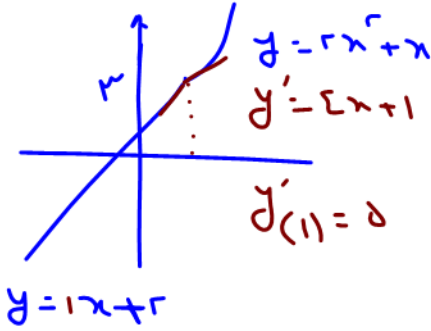
در توابع چندضابطه‌ای ابتدا از هر یک از ضابطه‌ها مشتق گرفته و نقاط بحرانی هر ضابطه را با توجه به دامنه تعریفشان تعیین کرده سپس وجود مشتق را در نقاط مرزی بررسی می‌کنیم. در نقاط مرزی ممکن است تابع ناپیوسته باشد و یا در صورت پیوستگی دارای مشتق‌های راست و چپ نابرابر باشد. در هر دو حالت در نقطه مرزی مشتق وجود ندارد و این نقطه، بحرانی محسوب می‌شود.





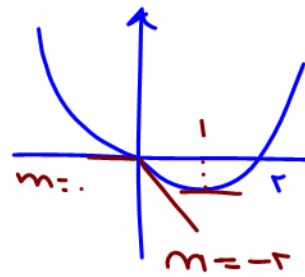
مثال ۲۲: نقاط بحرانی تابع‌های زیر را پیدا کنید.

الف)  $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + x & x \geq 1 \\ x + 2 & x < 1 \end{cases}$



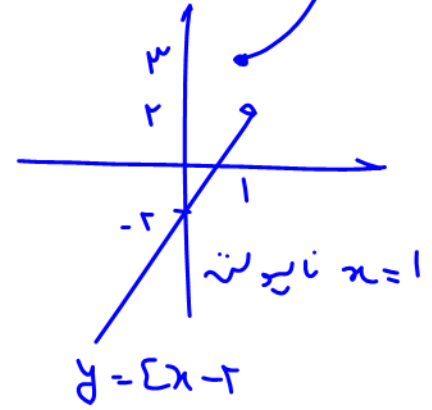
$y = 1x + 2$   
 مشتق ناپذیر  
 $x = 1$  گوشه  
 ① بحرانی

ب)  $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & x \geq 0 \\ x^2 & x < 0 \end{cases}$



در  $x = 1$  مماس است  
 در  $x = 0$  گوشه  
 ② بحرانی

پ)  $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & x \geq 1 \\ 4x - 2 & x < 1 \end{cases}$



① بحرانی

### اکسترمم مطلق

قضیه: فرض کنیم تابع  $f$  در بازه بسته  $[a, b]$  پیوسته باشد، در این صورت  $f$  در این بازه هم ماکزیمم مطلق و هم مینیمم مطلق دارد. خُب بیان این قضیه در کتاب درسی به وجود اکسترمم مطلق (ماکزیمم مطلق یا مینیمم مطلق) در توابعی اشاره می‌کند که در بازه  $[a, b]$  پیوسته باشد، اما بهتر است قبل از تحلیل و بررسی صورت قضیه تعریفی از ماکزیمم و مینیمم مطلق داشته باشیم تا بهتر بدانیم که چرا پیوسته بودن تابع در بازه بسته  $[a, b]$  شرط کافی وجود اکسترمم مطلق تابع است.

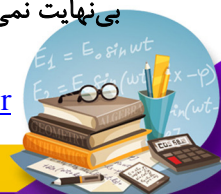
### ماکزیمم مطلق

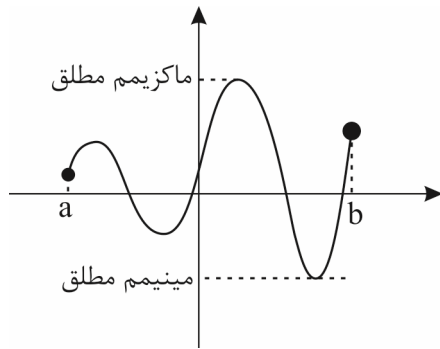
با فرض  $c \in D_f$  نقطه  $(c, f(c))$  یک نقطه ماکزیمم مطلق برای تابع  $f$  نامیده می‌شود، هرگاه به ازای هر  $x$  از  $D_f$  داشته باشیم  $f(c) \geq f(x)$ ، در این حالت عدد  $f(c)$  را مقدار ماکزیمم مطلق  $f$  روی  $D_f$  می‌نامیم.

### مینیمم مطلق

با فرض  $c \in D_f$  نقطه  $(c, f(c))$  یک نقطه مینیمم برای تابع  $f$  نامیده می‌شود، هرگاه به ازای هر  $x$  از  $D_f$  داشته باشیم  $f(c) \leq f(x)$ ، در این حالت عدد  $f(c)$  را مقدار مینیمم مطلق  $f$  روی  $D_f$  می‌نامیم.

تعریف (کوچه بازاری): ماکزیمم مطلق بیشترین و مینیمم مطلق کمترین مقدار تابع در  $D_f$  است. بنابراین هنگامی که تابع در بازه بسته  $[a, b]$  پیوسته باشد، باید بتوانیم بدون برداشتن دست از روی کاغذ از ابتدا تا انتهای تابع را در این بازه رسم کنیم و به ناچار در حداقل یک نقطه باید بیشترین و در حداقل یک نقطه باید کمترین مقدار تابع را مشخص نماییم، زیرا دست ما تا بی‌نهایت نمی‌تواند در رسم تابع پیش رود.





دقت کنید که پیوسته بودن تابع در بازه بسته  $[a, b]$  شرط کافی وجود ماکزیمم و مینیمم مطلق است اما شرط لازم نیست، یعنی:

- (۱) می تواند تابع اکستریمم مطلق داشته باشد اما در بازه  $[a, b]$  ناپیوسته باشد.
  - (۲) می تواند تابع در بازه  $(a, b)$  پیوسته باشد اما فاقد اکستریمم مطلق باشد.
  - (۳) می تواند تابع در بازه  $(a, b)$  ناپیوسته باشد اما دارای اکستریمم مطلق باشد.
- به شکل های زیر خوب دقت کنید:



تابع در بازه  $(a, b)$  ناپیوسته است اما ماکزیمم و مینیمم مطلق دارد.



تابع در بازه  $(a, b)$  پیوسته است اما ماکزیمم مطلق ندارد.

Max بنی

همه نکته های نسبت به  $\rightarrow$  همه نکته های نسبت به  $\leftarrow$   
 Min بنی در مطلق

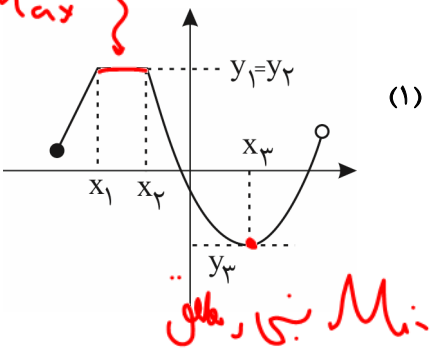
تابع در بازه  $[a, b]$  ناپیوسته است اما ماکزیمم و مینیمم مطلق دارد.

بنابراین می توان گفت پیوستگی شرط لازم وجود اکستریمم مطلق نیست و تابع چه پیوسته و چه ناپیوسته باشد می تواند اکستریمم مطلق داشته باشد، اما خوب اگر تابعی در بازه  $[a, b]$  پیوسته باشد خیال ما را از وجود اکستریمم مطلق راحت می کند.

خوب حالا به چند شکل زیر دقت کنید:

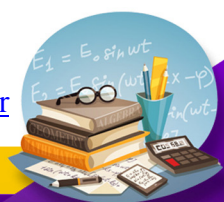
Max و Min بنی و نقاط

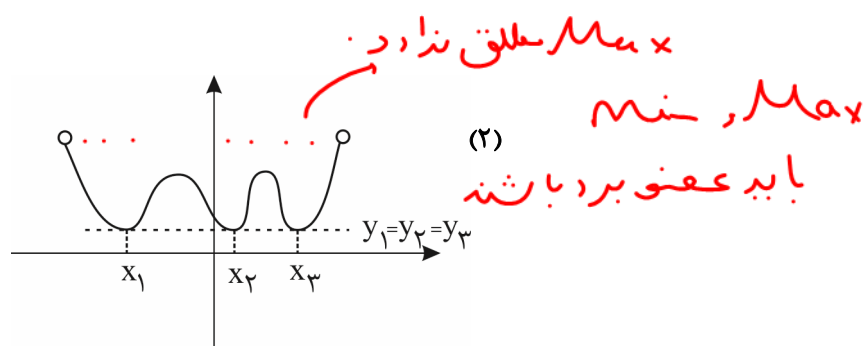
Max مطلق



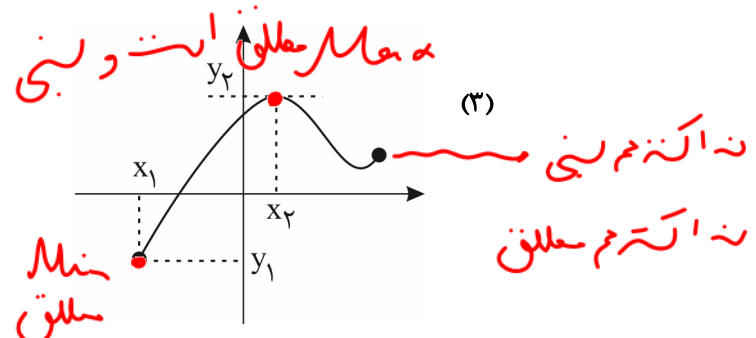
- $x_3$ : طول مینیمم مطلق
- $x \in [x_1, x_2]$ : طول های نقاط ماکزیمم مطلق
- $y_1$ : ماکزیمم مطلق
- $y_3$ : مینیمم مطلق

Min بنی در مطلق





$x_1, x_2, x_3$ : طول مینیمم مطلق  
 $y_1 = y_2 = y_3$ : مینیمم مطلق  
 تابع دارای ماکزیمم مطلق نیست.

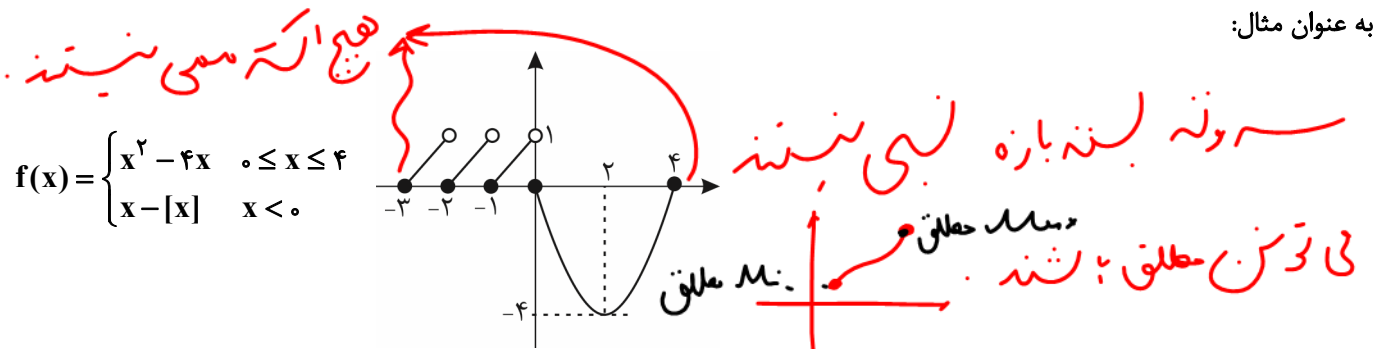


$x_2$ : طول ماکزیمم مطلق  
 $x_1$ : طول مینیمم مطلق  
 $y_1$ : مینیمم مطلق  
 $y_2$ : ماکزیمم مطلق

همان طور که از شکل های رسم شده نیز مشخص است، نقاطی که ماکزیمم و مینیمم مطلق را تولید می کنند منحصر به فرد نیستند. به عنوان مثال، در شکل (1) در بی شمار نقطه ماکزیمم مطلق و در شکل (2) در سه نقطه مینیمم مطلق داریم. اما مقدار ماکزیمم و مینیمم مطلق در صورت وجود منحصر به فرد است.

خب با این مقدمه و تعریفی که از اکسترمم های مطلق ارائه دادیم، می توانیم در تعدادی از توابع با رسم تابع اکسترمم های مطلق تابع را تشخیص دهیم.

به عنوان مثال:



$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x & 0 \leq x \leq 4 \\ x - [x] & x < 0 \end{cases}$$

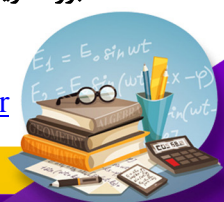
مینیمم مطلق تابع  $y = -4$  است. آیا تابع ماکزیمم مطلق دارد؟

محاسبه  $\min$  و  $\max$  مطلق تابع پیوسته  $f$  در  $[a, b]$  بسیار مهم

$x$	$a$	$c_1$	$c_2$	$\dots$	$b$
$f(x)$	$f(a)$	$f(c_1)$	$f(c_2)$	$\dots$	$f(b)$

برای یافتن اکسترمم مطلق تابع پیوسته  $f$  در بازه بسته  $[a, b]$  به شرح زیر عمل می کنیم:

- 1- مشتق تابع را به دست آورده و کلیه نقاط بحرانی  $f$  را می یابیم.
- 2- مقدار تابع را در هر یک از نقاط بحرانی درونی بازه و هم چنین در نقاط انتهایی بازه محاسبه می کنیم.
- 3- بزرگ ترین عدد به دست آمده در مرحله 2، مقدار ماکزیمم مطلق تابع و کوچک ترین آن ها مینیمم مطلق تابع در بازه  $[a, b]$  است.





تست ۲۶: مجموع مقادیر مینیمم و ماکسیمم مطلق تابع  $f(x) = x^2 - \frac{1}{\sqrt{x}}$  در بازه  $[0, 1]$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{3}{16}$       (۲)  $-\frac{3}{16}$       (۳)  $\frac{5}{16}$       (۴)  $-\frac{5}{16}$

$$f'(x) = 2x - \frac{1}{2\sqrt{x}} = 0 \implies 2x = \frac{1}{2\sqrt{x}} \implies 4x\sqrt{x} = 1 \implies 4x^{\frac{3}{2}} = 1 \implies x^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{4} \implies x = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{8}$$

$$f\left(\frac{1}{8}\right) = \left(\frac{1}{8}\right)^2 - \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{8}}} = \frac{1}{64} - \frac{1}{\frac{1}{2\sqrt{2}}} = \frac{1}{64} - \frac{2\sqrt{2}}{1} = \frac{1}{64} - \frac{2\sqrt{2}}{64} = \frac{1 - 2\sqrt{2}}{64}$$

$$f(0) = 0 - \frac{1}{\sqrt{0}} \rightarrow \text{undefined}$$

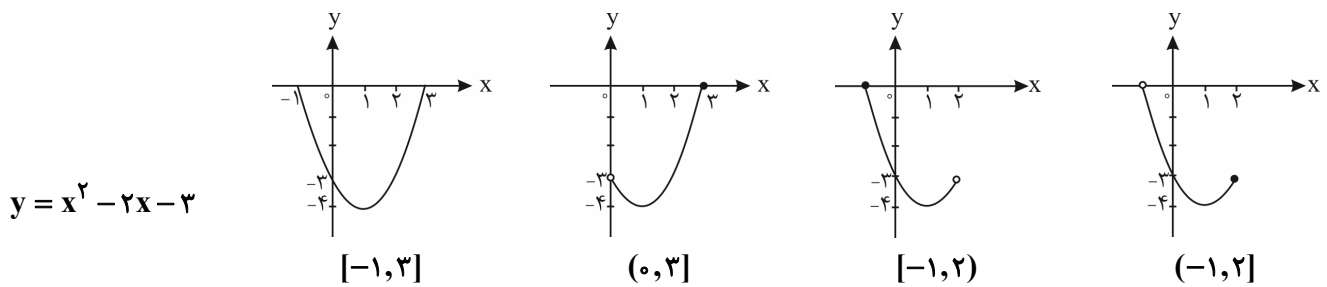
$$f(1) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1}} = 1 - 1 = 0$$

$$M_{\min} + M_{\max} = \frac{1 - 2\sqrt{2}}{64} + 0 = \frac{1 - 2\sqrt{2}}{64}$$

تست ۲۷: تابع  $f(x) = x^2 - 2x - 3$  در کدام یک از بازه‌های زیر مینیمم و ماکسیمم مطلق ندارد؟

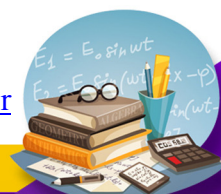
- (۱)  $[0, 3]$       (۲)  $(0, 3]$       (۳)  $[-1, 2]$       (۴)  $(-1, 2]$

پاسخ: گزینه ۴ - یک راه این است که تابع را در تک تک گزینه‌ها بررسی کنیم، یعنی عرض نقاط بحرانی و نقطه‌ی اول و آخر بازه را پیدا و با هم مقایسه کنیم. اما چون این کار وقت می‌گیرد بهتر است نمودار تابع را در بازه  $[-1, 3]$  یعنی طولانی‌ترین بازه‌ای که از اجتماع گزینه‌ها به دست می‌آید رسم و سپس نمودار هر گزینه را با استفاده از این نمودار اصلی بررسی کنیم. دقت کنید که لازم نیست گزینه‌ی (۱) را بررسی کنیم. (چرا؟)



حالا به نمودارها دقت کنید. تابع در بازه  $(0, 3]$  هم مینیمم مطلق دارد و هم ماکسیمم مطلق. مینیمم مطلقش برابر  $-4$  و ماکسیمم مطلقش برابر صفر است. در بازه  $[-1, 2]$  نیز هم مینیمم مطلق برابر  $-4$  دارد و هم ماکسیمم مطلق برابر صفر دارد، ولی در بازه  $[-1, 2]$  مینیمم مطلق برابر  $-4$  دارد، ولی ماکسیمم مطلق ندارد، چون مقدار تابع هرگز برابر صفر نمی‌شود (چون نقطه‌ی  $x = -1$  توخالی است).

دیدید که برای پیدا کردن مینیمم یا ماکسیمم مطلق در توابع ناپیوسته یا بازه‌هایی که ابتدا یا انتهایشان باز است، بهتر است از رسم نمودار استفاده کنیم.



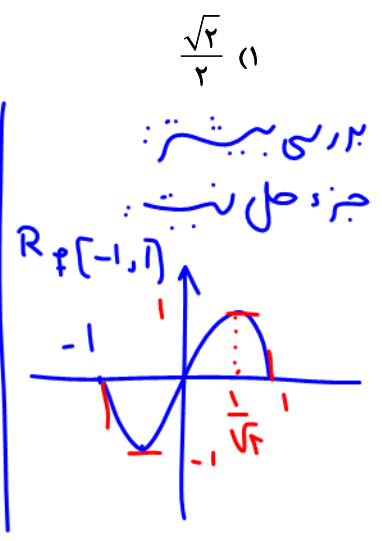
نکته: در تابع یکره بر روی صورت  $[M_{\text{حلقه}}, M_{\text{حلقه}}]$  است.

تست ۲۸: اختلاف ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع  $y = 2x\sqrt{1-x^2}$  کدام است؟ چون بازه نهاده دامنه را پیدا کن:

$1-x^2 \geq 0$   
 $1 \geq x^2$   
 $1 \geq |x| \rightarrow D_f = [-1, 1]$

$x$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1
$f(x)$	0	Min	Max	0

اختلاف = ۲



$$f'(x) = 2\sqrt{1-x^2} + \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}} \cdot (x) = 0$$

$$\sqrt{1-x^2} = \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} \rightarrow 1-x^2 = x^2$$

$$1 = 2x^2 \rightarrow \frac{1}{2} = x^2 \rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

تست ۲۹: ماکزیمم مقدار تابع  $y = \sqrt[3]{x^3 - 3x^2}$  در بازه  $[-2, 4]$  کدام است؟

$x$	-2	0	2	3	4
$f(x)$	$-\sqrt[3]{2}$	0	$-\sqrt[3]{4}$	$\sqrt[3]{16} = \text{Max}$	$\sqrt[3]{2^3} = 2$

$$f'(x) = \frac{3x^2 - 6x}{3\sqrt[3]{(x^3 - 3x^2)^2}} \begin{cases} y' = 0 \rightarrow x(3x-6) = 0 \rightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=0 \end{cases} \\ y = \infty \rightarrow \begin{cases} x^3 - 3x^2 = 0 \\ x^2(x-3) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=3 \end{cases} \end{cases}$$

$x$	-2	0	2	3	4
$f(x)$	$-\sqrt[3]{2}$	0	$-\sqrt[3]{4}$	$\sqrt[3]{16} = \text{Max}$	$\sqrt[3]{2^3} = 2$

تست ۳۰: مینیمم مطلق تابع با ضابطه  $f(x) = x - \sqrt[3]{x^3 - 3x^2}$  روی  $\mathbb{R}$  کدام است؟ (سراسری ریاضی)

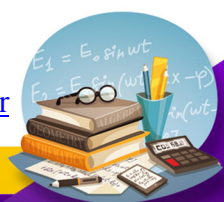
$x$	$\frac{1}{3}$	صفر	$-\frac{1}{3}$	-1
-----	---------------	-----	----------------	----

راه بهتر: گاهی برای یافتن Max و Min مطلق بهتر است با مشتق تابع، بردار ببینیم.

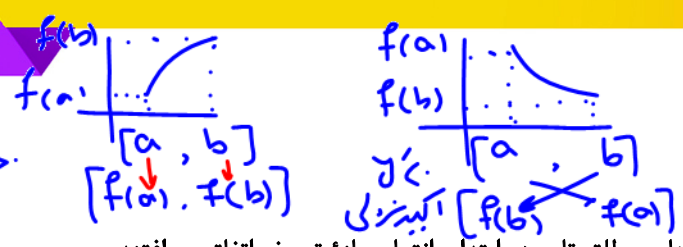
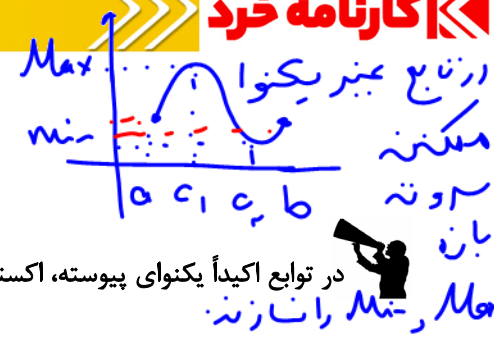
فرض کنیم  $x^2 \geq 0$  (فرض کنیم)

$$x^3 - 3x^2 \leq x^3 \xrightarrow{\text{فرض کنیم}} \sqrt[3]{x^3 - 3x^2} \leq \sqrt[3]{x^3} = x$$

$$0 \leq x - \sqrt[3]{x^3 - 3x^2} \rightarrow y = 0 \rightarrow \text{Min}$$





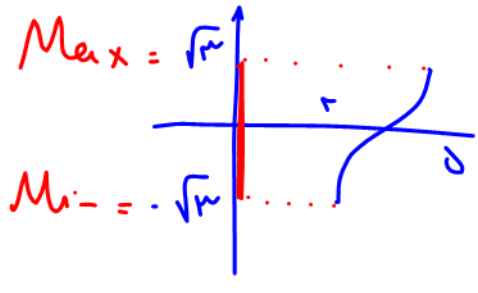


در توابع اکیدا یکنوای پیوسته، اکسترم‌های مطلق تابع در ابتدا و انتهای بازه تعریف اتفاق می‌افتند.

تست ۳۱: حاصل ضرب بیشترین و کمترین مقدار تابع  $y = \sqrt{x-2} - \sqrt{5-x}$  کدام است؟

$y' = \frac{1}{2\sqrt{x-2}} - \frac{-1}{2\sqrt{5-x}} > 0$  آبید معدودی

$\begin{cases} x-2 \geq 0 \\ 5-x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x \leq 5 \end{cases} \Rightarrow D_f [2, 5]$



$R = [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$

$y_{min} y_{max} = (-\sqrt{3})(\sqrt{3}) = -3$

اگر برد تابع  $y = f(x)$  را بتوانیم محاسبه کنیم، محدوده تغییرات  $y$  را خواهیم داشت و در صورت داشتن محدوده تغییرات برای  $y$  می‌توان بیشترین و کمترین مقدار تابع را در صورت وجود یافت. برای چگونگی محاسبه برد از درس‌نامه فصل تابع و روش‌های محاسبه برد کمک بگیرید.

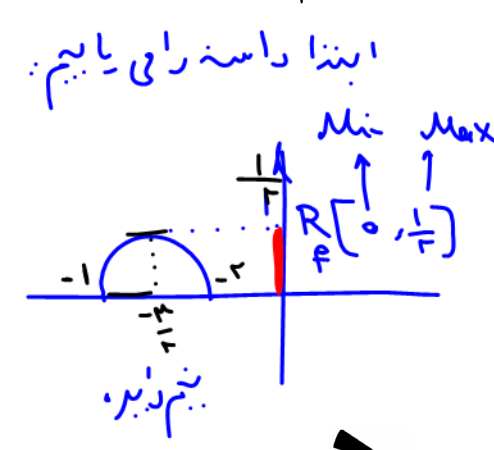
نکته مهم: اگر تابع  $f$  در  $[a, b]$  پیوسته باشد و مینیمم مطلق آن  $m$  و ماکزیمم مطلق آن  $M$  باشد، برد تابع  $f$  بازه  $[m, M]$  خواهد بود.

تست ۳۲: برد تابع با ضابطه  $f(x) = \sqrt{-x^2 - 3x - 2}$  کدام است؟

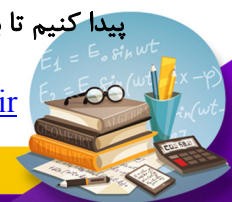
$-x^2 - 3x - 2 \geq 0$

$y' = \frac{-2x - 3}{2\sqrt{-x^2 - 3x - 2}} \rightarrow x = -\frac{3}{2}$

$x$	$-2$	$-\frac{3}{2}$	$-1$
$f(x)$	$0$	$\frac{1}{2}$	$0$



گاهی اوقات از ترکیب تابع‌ها برای پیدا کردن برد استفاده می‌کنیم. در حالت کلی وقتی می‌خواهیم برد تابع  $f(g(x))$  را در بازه  $[a, b]$  پیدا کنیم، اول برد تابع  $g(x)$  را (یعنی تابع درونی) به دست می‌آوریم. اگر برد  $g(x)$  بازه  $[c, d]$  باشد، آن‌گاه برد تابع  $f(x)$  را در بازه  $[c, d]$  پیدا می‌کنیم. در حالتی که  $f(x)$  پیوسته و یکنوا باشد (صعودی یا نزولی) وقتی برد  $g$  را پیدا کردیم، کافی است  $f(c)$  و  $f(d)$  را پیدا کنیم تا برد  $f(g(x))$  به دست آید.



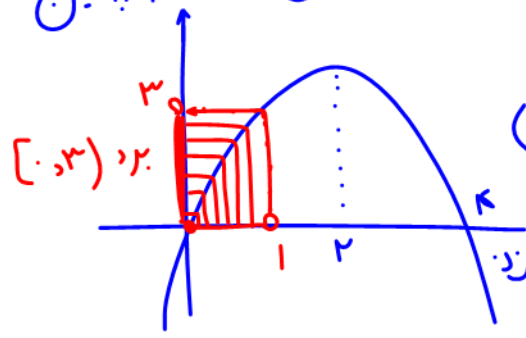
نکسین برد ترکیب توابع:

$-x(x-4) = 0$

تست ۳۳: اگر  $f(x) = 2x - [2x]$  و  $g(x) = -x^2 + 4x$  باشند، برد تابع  $g \circ f$  کدام است؟

- (۱)  $[0, 2]$
- (۲)  $[0, 3]$
- (۳)  $[0, 4]$
- (۴)  $[1, 4]$

همی دهانه به پایین



بی دایم:  $1 < [u] - u \leq 0$

تابع و ریز:  $(-\infty, 2]$   
 آکس محوریه عرض  
 محدوده دامنه برد را می سازد

$0 < y = g(0 \leq f(x) < 1) < 3$

برد  $f$  برای  $g$  دامنه است.  
 خربی  $f$  در دای  $g$  است.  
 خربی تابع داخلی، و دای تابع خارجی است

(سراسری تهرپی ۹۹)

تست ۳۴: اگر  $f(x) = x - [x]$  و  $g(x) = \frac{1-x}{x}$  برد تابع  $g \circ f$  کدام بازه است؟

- (۱)  $(0, +\infty)$
- (۲)  $[0, +\infty)$
- (۳)  $(1, +\infty)$
- (۴)  $[1, +\infty)$

$y = \frac{1}{x} - 1$  همون  $g(x) = \frac{1-x}{x}$  و آکس به واسه پایین رفته

بی دایم:  $1 < [u] - u \leq 0$

$0 < y = g(0 \leq f(x) < 1) < +\infty$

می تواند ورودی صفر داشته باشه و  $x=0$  ریشه نمی خورده

$D: (0, 1)$   
 $R: (0, +\infty)$   
 $g \circ f: (0, +\infty)$

در  $x < 1$  نزدیک آکس است  
 $f$  عدد یک را تولید می کند  
 و هم خربی صفر ندارد

اکسترمم نسبی

تعریف ۱: گوئیم تابع  $f$  در نقطه ای به طول  $c$  ماکزیمم نسبی دارد، هرگاه یک همسایگی از  $c$  مانند  $I \subseteq D_f$  باشد که برای هر  $x \in I$  داشته باشیم  $f(c) \geq f(x)$ . در این حالت  $f(c)$  مقدار ماکزیمم نسبی تابع  $f$  نامیده می شود.

تعریف ۲: گوئیم تابع  $f$  در نقطه ای به طول  $c$  مینیمم نسبی دارد، هرگاه یک همسایگی از  $c$  مانند  $I \subseteq D_f$  باشد که برای هر  $x \in I$  داشته باشیم  $f(c) \leq f(x)$  در این حالت  $f(c)$  مقدار مینیمم نسبی تابع  $f$  نامیده می شود.

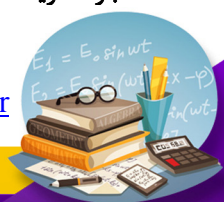
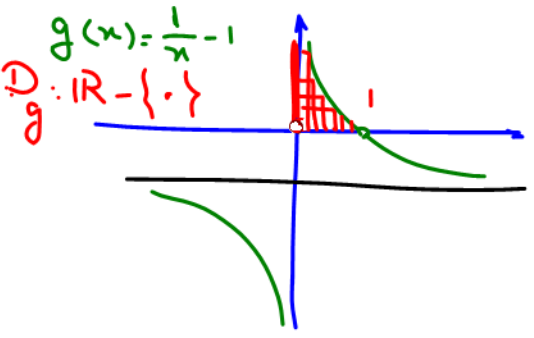
خوب حالا بریم سراغ این دو تعریف که در کتاب درسی برای ماکزیمم و مینیمم نسبی ارائه شده است. به زبان ساده ماکزیمم و مینیمم نسبی را به صورت زیر تعریف می کنیم:

تعریف ۱: نقطه به طول  $x = a$  را ماکزیمم نسبی تابع  $y = f(x)$  گوئیم، هرگاه مقدار تابع در این نقطه از تمام مقادیر تابع در یکی از همسایگی های آن بیشتر یا مساوی باشد.

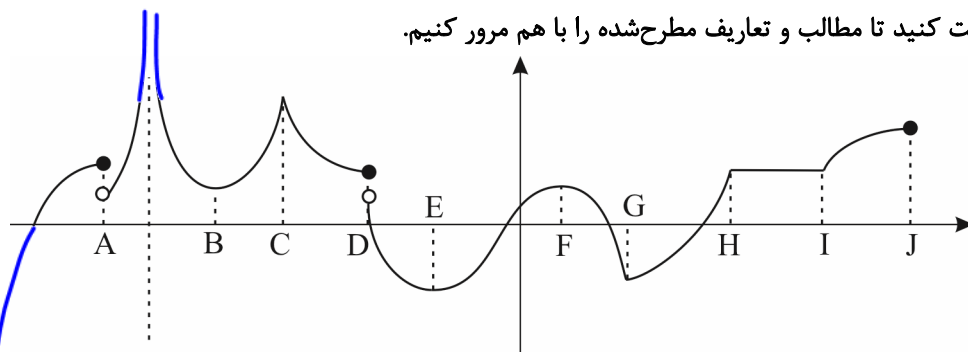
تعریف ۲: نقطه به طول  $x = a$  را مینیمم نسبی تابع  $y = f(x)$  گوئیم، هرگاه مقدار تابع در این نقطه از تمام مقادیر تابع در یکی از همسایگی های آن کمتر یا مساوی باشد.

تذکر: به مجموعه نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی یک تابع، اکسترمم های تابع می گوئیم.

تذکر: بنا بر تعریف ارائه شده اگر نقطه ای به طول  $x = c$  بخواهد اکسترمم نسبی تابع باشد، باید تابع در یک همسایگی آن تعریف شود. بنابراین نقاطی که برای آن ها نتوان یک همسایگی متعلق به دامنه تابع مشخص کرد نمی توانند اکسترمم نسبی تابع باشند. مانند ابتدا و انتهای بازه تعریف.







به شکل زیر خوب دقت کنید تا مطالب و تعاریف مطرح شده را با هم مرور کنیم.

نقاط  $B$  و  $E$  و  $G$  و تمام نقاط متعلق به بازه  $(H, I)$  مینیمم نسبی تابع هستند. نقاط  $A$ ،  $C$  و  $F$  و تمام نقاط متعلق به بازه  $[H, I]$  ماکزیمم نسبی تابع هستند. نقاط مربوط به بازه  $(H, I)$  چون با تمام نقاط همسایگی‌ای خود عرض برابر دارند، هم در تعریف ماکزیمم نسبی و هم در تعریف مینیمم نسبی گنجانده می‌شوند و می‌توان گفت هم ماکزیمم نسبی‌اند و هم مینیمم نسبی. از آن جایی که  $J$  نقطه انتهایی بازه تعریف است و نمی‌توان همسایگی‌ای اطراف آن متعلق به دامنه تابع مشخص کرد نمی‌تواند یک اکسترمم نسبی باشد.

نقطه  $H$  با آن که با نقاط همسایگی راست خود هم‌عرض است اما چون مقدار تابع در این نقطه از مقادیر همسایگی چپش بیشتر است، این نقطه، یک نقطه ماکزیمم نسبی است.

نقطه  $I$  با آن که با نقاط همسایگی چپ خود هم‌عرض است اما چون مقدار تابع در این نقطه از مقادیر همسایگی راستش کم‌تر است، این نقطه، یک نقطه مینیمم نسبی است.

در نقطه  $D$  چون مقدار تابع در این نقطه از نقاط همسایگی چپش کم‌تر و از نقاط همسایگی راستش بیشتر است نه ماکزیمم نسبی و نه مینیمم نسبی است.

نقاط مشتق‌ناپذیر و ناپیوسته نیز می‌توانند اکسترمم نسبی تابع باشند، مانند  $A, C, G, H, I$ .

در اطراف نقاط اکسترمم نسبی پیوسته (توابع غیر ثابت) یکنوایی تابع تغییر می‌کند، به نقاط  $B, C, E, F, G$  دقت کنید. در اطراف این نقاط تابع از صعودی به نزولی یا بالعکس تغییر یکنوایی داشته است، حتی در نقطه‌ای مانند  $H$  نیز می‌توان گفت قبل از این نقطه، تابع صعودی و بعد از آن تابع نزولی است. (دقت کنید توابع ثابت هم صعودی و هم نزولی هستند.)

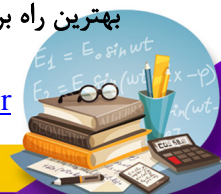
در سمت چپ نقاط ماکزیمم نسبی پیوسته، تابع صعودی و در سمت راست آن نزولی است و در نقاط مینیمم نسبی بالعکس می‌باشد. الزامی نیست یکنوایی تابع در اطراف نقاط اکسترمم نسبی ناپیوسته تغییر کند، مانند نقطه ماکزیمم نسبی  $A$  که قبل و بعد از آن تابع صعودی است.

می‌توان گفت در یک تابع پیوسته هرکجا تابع از صعودی به نزولی تغییر کند آن نقطه یک ماکزیمم نسبی و هرکجا از نزولی به صعودی تغییر داشته باشد یک نقطه مینیمم نسبی است.

اگر در نقاط اکسترمم نسبی، تابع مشتق‌پذیر باشد، مشتق تابع در آن نقاط الزاماً صفر است، مانند نقاط  $E, F$  و  $B$  و تمام نقاط عضو بازه  $(H, I)$ .

هر نقطه اکسترمم نسبی یک تابع، یک نقطه بحرانی است، زیرا یا آن نقطه یک نقطه مشتق‌ناپذیر است و یا در صورت مشتق‌پذیر بودن مشتقی برابر صفر دارد. (به نقاط اکسترمم نسبی در شکل خوب دقت کنید.)

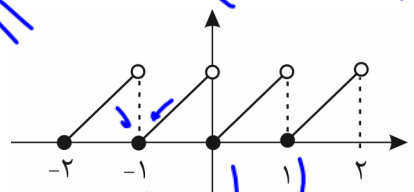
حالا که یک تحلیل و بررسی جامع و کامل بر روی نقاط اکسترمم نسبی تابع داشتیم و درک هندسی درستی از این نقاط پیدا کردیم، قدم اول با توابعی روبه‌رو هستیم که در تشخیص نقاط اکسترمم نسبی آن می‌توانیم از نمودارهای آن‌ها کمک بگیریم. دقت کنید که در توابع ناپیوسته بهترین راه برای تشخیص اکسترمم‌های نسبی کمک گرفتن از نمودار تابع است.



مثال ۳۵: در هر کدام از توابع زیر، نقاط اکسترمم نسبی تابع را مشخص کنید.

۱)  $y = x - [x]$

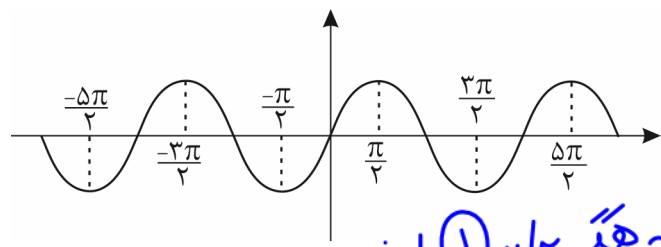
۱- عضو برد نیست  
Max و حلقه نیست



Min نسبی و حلقه

$x \in \mathbb{Z} \rightarrow$  مینیمم نسبی  
تابع فاقد ماکزیمم نسبی است.

۲)  $y = \sin x$



نکته: تعداد اکتزیمهای حلقه محدودیت ندارد.  
مثلاً  $\sin x$  بی شمار Max و حلقه دارد که همگی برابر ۱ اند.

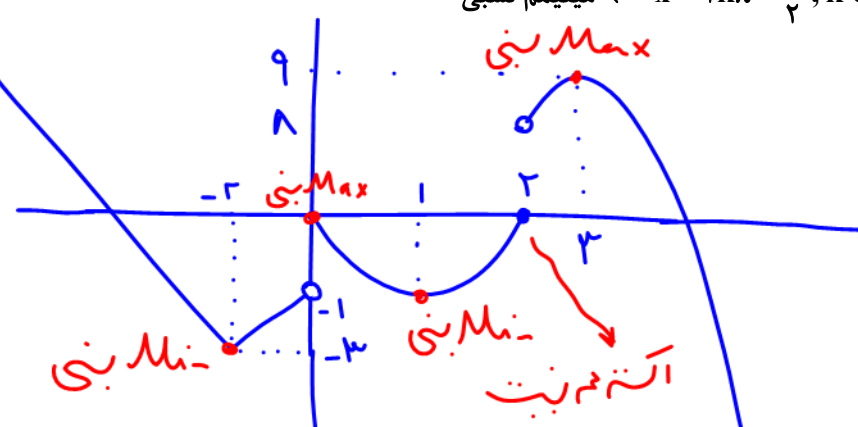
$x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \rightarrow$  ماکزیمم نسبی

$x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \rightarrow$  مینیمم نسبی

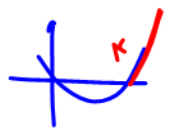
چندضایعهای  
۵-۱-۳

$$y = \begin{cases} x^2 - 2x & 0 \leq x \leq 2 \\ 6x - x^2 & x > 2 \\ |x+2| - 3 & x < 0 \end{cases}$$

Max, Min حلقه ندارد.

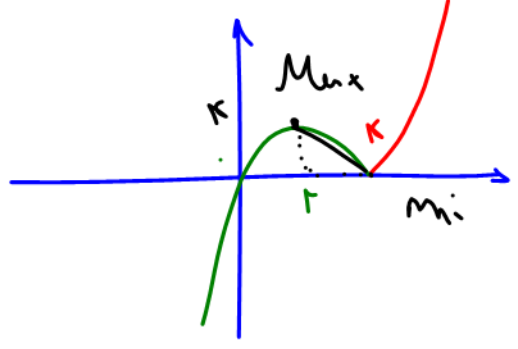


تست ۳۶: در تابع با ضابطه  $f(x) = x|x-4|$ ، فاصله دو نقطه ماکزیمم نسبی و مینیمم نسبی آن، کدام است؟



- ۱)  $\sqrt{5}$
- ۲)  $2\sqrt{2}$
- ۳)  $3\sqrt{2}$
- ۴)  $2\sqrt{5}$

$$f(x) = \begin{cases} x(x-4) & x \geq 4 \\ -x(x-4) & x < 4 \end{cases}$$



$$\sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$



خوب حالا که با کمک گرفتن از نمودار تابع توانستیم اکسترم‌های نسبی را تشخیص دهیم، می‌خواهیم به سراغ بررسی ضابطه توابع و تشخیص اکسترم‌های نسبی آن از روی ضابطه برویم. دقت کنید در این‌جا بررسی ضابطه‌های پیوسته مدنظر است و هم‌چنان در ضابطه‌های ناپیوسته توصیه به رسم است.

### آزمون مشتق اول: محاسبه $x = c$ برای تعیین صعودی نزولی بودن و نقاط اکسترم تابع است.

فرض کنید  $c$  طول نقطه بحرانی تابع  $f$  باشد که  $f$  در  $c$  پیوسته است و هم‌چنین  $f$  در یک همسایگی محذوف  $c$  مشتق‌پذیر باشد.  
 الف) اگر علامت  $f'$  در  $x = c$  از مثبت به منفی تغییر کند، آن‌گاه  $x = c$  طول نقطه ماکزیمم تابع  $f$  است.  
 ب) اگر علامت  $f'$  در  $x = c$  از منفی به مثبت تغییر کند، آن‌گاه  $x = c$  طول نقطه مینیمم نسبی تابع  $f$  است.  
 ج) اگر  $f'$  در  $x = c$  تغییر علامت ندهد، به طوری که  $f'$  در یک همسایگی محذوف  $c$  همواره مثبت یا همواره منفی باشد، آن‌گاه  $f$  در  $x = c$  ماکزیمم یا مینیمم نسبی ندارد.

۴ نکته مهم دارد → ریشه ساده (ن) ۴ نکته مهم دارد → ریشه مضاعف (زوج)  
 حسابان: محذوفی دارد

- برای یافتن اکسترم‌های یک تابع باید مراحل زیر را انجام دهیم:
- محاسبه مشتق تابع
  - محاسبه طول نقاط بحرانی
  - تعیین علامت مشتق در نقاط بحرانی

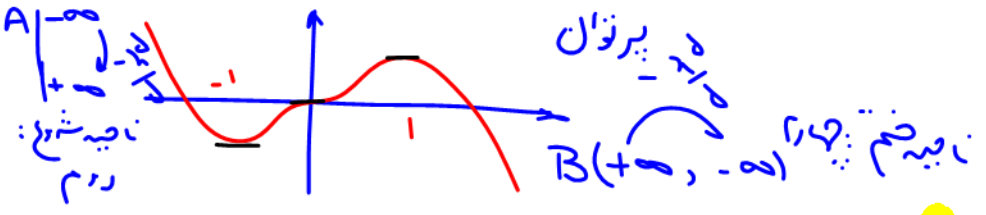
۴) اگر  $x_0$  طول نقطه بحرانی و تغییر علامت مشتق در  $x_0$  از مثبت به منفی باشد، آن‌گاه تابع در  $x_0$  دارای ماکسیمم نسبی است و اگر تغییر علامت مشتق در  $x_0$  از منفی به مثبت باشد، آن‌گاه تابع در  $x_0$  دارای مینیمم نسبی است.

تست ۳۷: تابع  $y = \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}$  در کدام‌یک از نقاط زیر دارای ماکسیمم نسبی است؟

- ۱) -۱      ۲) صفر      ۳) ۱      ۴) ۲

پاسخ: گزینه‌ی «۳» - طبق آزمون مشتق اول داریم: مشتق در  $x = 0$  ریشه‌ی مضاعف دارد و تغییر علامت نمی‌دهد، لذا  $x = 0$  اکسترم نمی‌باشد.

$x$	-۱	۰	۱
$y'$	-	+	-
$y$	↘	↗	↘
	min		max



تذکر: هر ریشه غیرمضاعف مشتق اول یک اکسترم نسبی است.

تذکر: در توابع مشتق‌پذیر اکسترم‌های نسبی لزوماً ریشه غیرمضاعف مشتق اول هستند.

تست ۳۸: تعداد اکسترم‌های نسبی تابع  $y = x^5 - 5x^3 - 2$  کدام است؟

- ۱) ۲      ۲) ۳      ۳) ۴

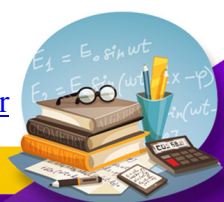
$$y' = 5x^4 - 15x^2 = 5x^2(x^2 - 3) = 0$$

$$y = 5x^2(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) = 0$$

$x = 0$  حذف

$$x = \pm\sqrt{3} \leftarrow ۲ \text{ تا اکسترم}$$

Handwritten calculations for test 38:  
 $y = \frac{x^5}{5} - 5 \frac{x^3}{3} - 2$   
 $y' = x^4 - 5x^2 = x^2(x^2 - 5)$   
 $x = 0, \pm\sqrt{5}$



تست ۳۹: به ازای کدام مقدار  $a$  تابع با ضابطه  $y = \frac{1}{3}x^3 + ax^2 + 4x - 1$  اکسترمم نسبی ندارد؟  
 (۱)  $a < 0$       (۲)  $-2 \leq a \leq 2$       (۳)  $0 \leq a \leq 3$       (۴)  $-4 \leq a \leq 0$

اگر درجه ۲ بخواهیم ندهیم بارش ساده شده  $y' = x^2 + 2ax + 4$  بارش حتما منفی است.

$\Delta \leq 0 \rightarrow (2a)^2 - 4(4) \leq 0$   
 $4a^2 \leq 16 \rightarrow a^2 \leq 4 \rightarrow |a| \leq 2 \rightarrow a \in [-2, 2]$

تست ۴۰: در تابع  $f(x) = \frac{x^2+1}{x-a}$  اگر بین طول های نقاط اکسترمم تابع رابطه  $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 4$  برقرار باشد، مقدار  $a$  کدام است؟  
 (۱) ۱      (۲) -۱      (۳) ۲      (۴) -۲

$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 4 \rightarrow \frac{x_1+x_2}{x_1x_2} = 4$   
 $x_1+x_2 = 4P$   
 $x_1x_2 = P$

$f'(x) = \frac{2x(x-a) - (x^2+1)}{(x-a)^2}$

$y' = 2x - 2ax - 1 = 0$   
 $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 2a$   
 $x_1x_2 = \frac{c}{a} = -1$

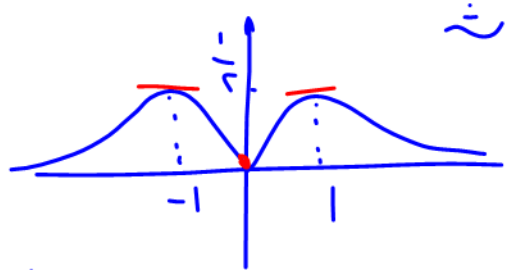
$\frac{2a}{-1} = 4 \rightarrow 2a = -4 \rightarrow a = -2$

تست ۴۱: تابع  $y = \frac{|x|}{x^2+1}$  چه تعداد اکسترمم نسبی دارد؟  
 (۱) ۱      (۲) ۲      (۳) ۳      (۴) ۴

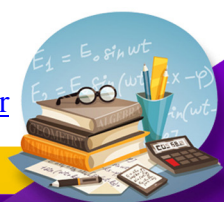
بیچ نوشتن  
 $y = \frac{x}{x^2+1}$        $y = \frac{-x}{x^2+1}$

$f'_+(0) = 1 \neq f'_-(0) = -1$   
 $x = 0$  بحرانی استن نابینا ترش

$x$	$-\infty$	$-1$	$0$	$1$	$+\infty$
$y'$		+	۰	-	
$y$		↗	↘	↗	↘



$y = \frac{|x|}{x^2+1}$        $\frac{|x|}{1} = |x|$



تست ۴۲: تابع  $y = \sqrt[3]{x^3 - 3x^2}$  چه تعداد اکسترمم نسبی دارد؟

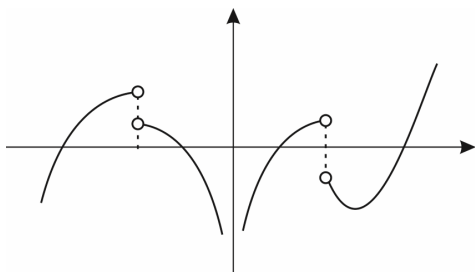
۳ (۴)

۴ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

تست ۴۳: تابع  $y = f(x)$  تابعی پیوسته در  $\mathbb{R}$  است. اگر نمودار  $f'(x)$  به صورت زیر باشد، تابع  $y = f(x)$  چند اکسترمم نسبی دارد؟



۳ (۱)

۴ (۲)

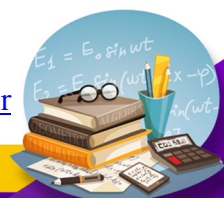
۵ (۳)

۶ (۴)

اگر  $(a, b)$  نقطه‌ی اکسترمم نسبی تابع مشتق‌پذیر  $f$  باشد، آن‌گاه:

(۱) مختصات اکسترمم در تابع  $f$  صدق می‌کند:  $f(a) = b$

(۲) طول اکسترمم، مشتق تابع را صفر می‌کند:  $f'(a) = 0$



تست ۴۴: نقاط  $A(0,0)$  و  $B(1,1)$  نقاط اکسترمم نسبی تابع  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$  هستند. حاصل  $ab$  کدام است؟

(ریاضی فارج ۱۴۰۱)

- (۱) -۳      (۲) -۶      (۳) ۳      (۴) ۶

تست ۴۵: دو نقطه به طول‌های ۳ و -۵ نقاط بحرانی تابع با ضابطه‌ی  $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$  هستند. مقدار مینیمم نسبی این تابع، کدام است؟

(فارج ۱۸۹)

- (۱) -۸۴      (۲) -۸۱      (۳) -۵۷      (۴) -۷۵

تست ۴۶: فاصله نقطه ماکزیمم نسبی تابع با ضابطه  $f(x) = x + \sqrt{4x - x^2}$  از نیمساز ناحیه اول کدام است؟

(سراسری تهرپی ۹۹)

- (۱) ۱      (۲)  $\sqrt{2}$       (۳) ۲      (۴)  $2\sqrt{2}$

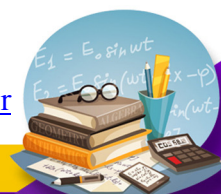
پاسخ: گزینه «۱»

$$f'(x) = 1 + \frac{4-2x}{2\sqrt{4x-x^2}} = 0 \Rightarrow -\frac{2-x}{\sqrt{4x-x^2}} = 1 \Rightarrow \sqrt{4x-x^2} = x-2 \quad (*)$$

با توجه به معادله باید  $x-2 \geq 0$  باشد، یعنی:  $x \geq 2$   
حال معادله (\*) را حل می‌کنیم. ابتدا به توان ۲ می‌رسانیم:

$$4x - x^2 = x^2 - 4x + 4 \Rightarrow 2x^2 - 8x + 4 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 2 = 0 \Rightarrow \Delta = 16 - 8 = 8$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{4+2\sqrt{2}}{2} = 2 + \sqrt{2} \text{ قابل قبول} \\ x = \frac{4-2\sqrt{2}}{2} = 2 - \sqrt{2} \text{ (غیرقابل قبول زیرا } x \geq 2 \text{)} \end{cases}$$





$$\Rightarrow f(2+\sqrt{2}) = 2 + \sqrt{2} + \sqrt{4(2+\sqrt{2}) - (2+\sqrt{2})^2} = 2 + \sqrt{2} + \sqrt{2} = 2 + 2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow A(2+\sqrt{2}, 2+2\sqrt{2}) \text{ ماکزیمم نسبی}$$

حال فاصله نقطه A را از نیمساز ناحیه اول یعنی  $y = x$  به دست می آوریم:

$$x - y = 0 \Rightarrow d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|2 + \sqrt{2} - 2 - 2\sqrt{2}|}{\sqrt{1+1}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$$

تست ۴۷: مقدار ماکزیمم نسبی تابع با ضابطه  $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + 1}$ ، کدام است؟ (سراسری تهرانی خارج از کشور ۹۹)

- (۱)  $-1 + \sqrt{5}$       (۲)  $1 + \sqrt{5}$       (۳)  $-1 + \sqrt{3}$       (۴)  $1 + \sqrt{3}$

پاسخ: گزینه «۱»

$$f'(x) = \frac{(2x+2)(x^2+1) - 2x(x^2+2x-3)}{(x^2+1)^2} = 0 \Rightarrow (2x+2)(x^2+1) - 2x(x^2+2x-3) = 0$$

$$\Rightarrow 2x^3 + 2x + 2x^2 + 2 - 2x^3 - 4x^2 + 6x = 0 \Rightarrow -2x^2 + 8x + 2 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x - 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 20$$

$$\Rightarrow x = \frac{4 \pm 2\sqrt{5}}{2} = 2 \pm \sqrt{5}$$

x	$-\infty$	$2 - \sqrt{5}$	$2 + \sqrt{5}$	$+\infty$
f'	-	+	-	
f		↘ min	↗ max	

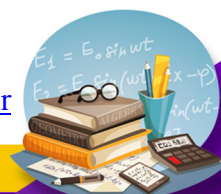
$$f(2 + \sqrt{5}) = \frac{(2 + \sqrt{5})^2 + 4 + 2\sqrt{5} - 3}{(2 + \sqrt{5})^2 + 1} = \frac{9 + 4\sqrt{5} + 2\sqrt{5} + 1}{9 + 4\sqrt{5} + 1} = \frac{10 + 6\sqrt{5}}{10 + 4\sqrt{5}} = \frac{5 + 3\sqrt{5}}{5 + 2\sqrt{5}} \times \frac{5 - 2\sqrt{5}}{5 - 2\sqrt{5}} = -1 + \sqrt{5}$$

در توابع کسری  $y = \frac{f(x)}{g(x)}$  که بدانیم اکستریم‌های نسبی تابع از نوع نقاط مشتق پذیر می باشد مختصات اکستریم نسبی در ضابطه‌ی

تابع و در ضابطه‌ی هوییتال تابع صدق می کند. (به شرط آن که  $g'(a) \neq 0$ )

تست ۴۸: اگر نقطه‌ی (۱, ۲) اکستریم نسبی تابع  $y = \frac{x^2 + 2ax + b}{2x - 1}$  باشد، حاصل  $a - 3b$  کدام است؟

- (۱)  $-2$       (۲)  $2$       (۳)  $-4$       (۴)  $4$



تست ۴۹: خط  $y - x = m$  اکستریم‌های نسبی  $y = \frac{x^2 - 4x + 6}{2x - 1}$  را به هم وصل می‌کند،  $m$  کدام است؟

(۱) ۲      (۲) -۲      (۳) ۱      (۴) -۱



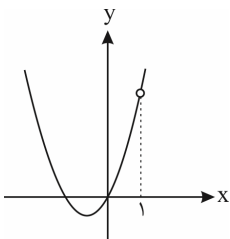
در توابعی که در نقاط اکستریم نسبی مشتق‌پذیرند (و مشتقشان حتماً برابر صفر است)، اگر عرض اکستریم نسبی برابر  $k$  باشد و تابع را با خط  $y = k$  قطع دهیم (ضابطه‌هایشان را برابر قرار دهیم) معادله‌ی حاصل از تقاطع آن دو باید ریشه‌ی مکرر (و در صورتی که از درجه‌ی ۲ باشد، مضاعف) داشته باشد.

تست ۵۰: اگر تابع  $y = \frac{x^2 + ax + 1}{x - 1}$  اکستریمی برابر ۳ داشته باشد، مقدار  $a$  کدام است؟

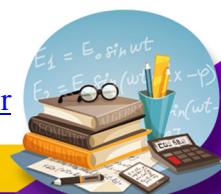
(۱) ۷ و -۱      (۲) -۷ و ۱      (۳) -۷ و -۱      (۴) ۷ و ۱

### بررسی نمودارها

تست ۵۱: شکل مقابل نمودار تابع با ضابطه‌ی  $f(x) = \frac{4x^2 + ax + b}{x - 1}$  است. دوتایی مرتب  $(a, b)$  کدام است؟

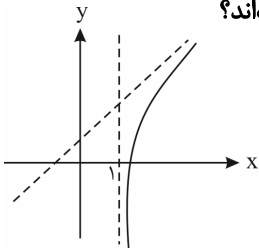


- (۱)  $(0, -4)$
- (۲)  $(-4, 0)$
- (۳)  $(-2, 1)$
- (۴)  $(4, 0)$





تست ۵۲: شکل مقابل قسمتی از نمودار تابع با ضابطه‌ی  $f(x) = \frac{x^2 + a}{x + b}$  است. مقادیر  $a$  و  $b$  به کدام صورت‌اند؟



(۱)  $a > b = -1$

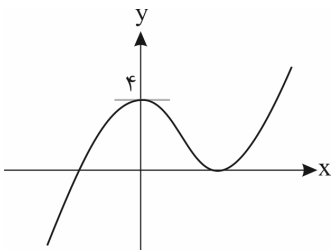
(۲)  $a < b = -1$

(۳)  $b > a = -1$

(۴)  $b < a = -1$

(سراسری ۱۴۰۱)

تست ۵۳: نمودار  $y = x^3 + ax^2 + bx + c$  به صورت زیر است. طول نقطه‌ی مینیمم نسبی تابع کدام است؟



(۱)  $\frac{1}{2}$

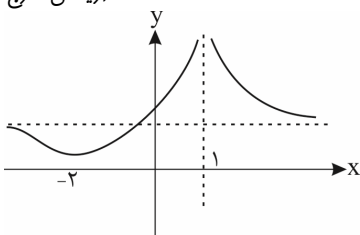
(۲) ۲

(۳)  $\frac{3}{2}$

(۴) ۳

(ریاضی خارج ۹۵)

تست ۵۴: شکل زیر، نمودار تابع با ضابطه‌ی  $f(x) = \frac{x^2 + a}{x^2 + bx + c}$  است.  $a$  کدام است؟

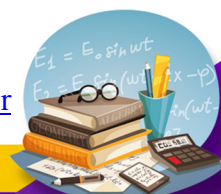


(۱) -۲

(۲) ۱

(۳) ۲

(۴) ۳



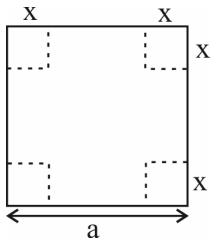
**بهینه‌سازی**

در بخش قبل یاد گرفتیم که چگونه مقادیر مینیمم و ماکسیمم مطلق یک تابع را پیدا کنیم. وقتی از این روش در مسائل کاربردی استفاده می‌کنیم تا مینیمم یا ماکسیمم یک مقدار را پیدا کنیم، اسمش می‌شود بهینه‌سازی. در مسائل بهینه‌سازی معمولاً با یک کمیت مثل طول، فاصله، سطح، حجم و ... سروکار داریم که قرار است ماکسیمم یا مینیمم (یعنی بهینه) شود.

برای حل مسائل بهینه‌سازی این کارها را می‌کنیم:

- (۱) اول یک رابطه (یعنی ضابطه‌ی یک تابع) پیدا می‌کنیم که نشان‌دهنده‌ی کمیتی باشد که قرار است بهینه (ماکسیمم یا مینیمم) شود.
  - (۲) با استفاده از داده‌های سؤال، اطلاعات قبلی ضابطه‌ی نوشته‌شده را به یک ضابطه‌ی یک‌متغیری تبدیل می‌کنیم. گاهی اوقات در این قسمت لازم است از روابط جبری و مثلثاتی یا شکل‌های هندسی هم استفاده کنیم.
  - (۳) از ضابطه‌ی تابعی که نوشته‌ایم، مشتق می‌گیریم و برابر صفر قرار می‌دهیم (یعنی نقاط بحرانی تابع را پیدا می‌کنیم).
  - (۴) با استفاده از نقاط بحرانی مقدار ماکسیمم یا مینیمم را به دست می‌آوریم.
  - (۵) گاهی اوقات لازم است بعد از نوشتن ضابطه‌ی تابع (یعنی مرحله‌ی اول) دامنه‌ی تابع را هم مشخص کنیم، ولی در اکثر وقت‌ها می‌توانیم این کار را با بررسی ریشه‌های مشتق انجام دهیم.
- حالا بیایید با هم چند مثال حل کنیم:

تست ۵۵: می‌خواهیم طبق شکل روبه‌رو، از کناره‌های یک صفحه‌ی مربع‌شکل به ضلع  $a$  مربع‌هایی به ضلع  $x$  ببریم و با خم کردن کناره‌های صفحه یک جعبه‌ی در باز به شکل مکعب‌مستطیل بسازیم. ماکسیمم حجم جعبه‌ای که می‌توانیم بسازیم، چه قدر است؟



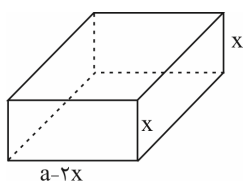
$$\frac{a^3}{4} \quad (۲)$$

$$\frac{۴a^3}{۲۷} \quad (۴)$$

$$\frac{a^3}{۲} \quad (۱)$$

$$\frac{۲a^3}{۲۷} \quad (۳)$$

پاسخ: گزینه‌ی «۳» - طبق شکل روبه‌رو وقتی از کناره‌های صفحه مربع‌هایی به ضلع  $x$  می‌بریم، ابعاد مکعب‌مستطیل می‌شود  $a - 2x$ ،  $a - 2x$  و  $x$ . پس حجم مکعب مستطیل برابر است با:



$$V = \text{طول} \times \text{عرض} \times \text{ارتفاع} = x(a - 2x)^2$$

$$V' = (a - 2x)^2 - 4(a - 2x)x = (a - 2x)(a - 2x - 4x)$$

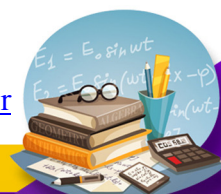
از  $V$  مشتق می‌گیریم و برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$V' = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{a}{۲} \\ x = \frac{a}{۶} \end{cases}$$

مقدار  $x = \frac{a}{۲}$  قابل قبول نیست، چون اگر  $x = \frac{a}{۲}$  باشد دیگر چیزی از صفحه باقی نمی‌ماند. پس  $x = \frac{a}{۶}$  قابل قبول است و حجم ماکسیمم

$$\max(V) = \frac{a}{۶} \left(a - \frac{a}{۳}\right)^2 = \frac{a}{۶} \times \frac{۴a^2}{۹} = \frac{۲a^3}{۲۷}$$

جعبه برابر است با:



تست ۵۶:  $S$  سطح جانبی یک استوانه و  $s$  سطح قاعده‌ی آن است. اگر  $S + s = 12$  فرض شود، شعاع قاعده‌ی استوانه چه قدر باشد تا حجم آن ماکسیمم گردد؟

(۱)  $\frac{2}{\pi}$       (۲)  $\frac{3}{\pi}$       (۳)  $\frac{2}{\sqrt{\pi}}$       (۴)  $\frac{3}{\sqrt{\pi}}$

پاسخ: گزینه‌ی «۳» - می‌دانیم در یک استوانه به شعاع  $r$  و ارتفاع  $h$  مساحت جانبی برابر  $S = 2\pi rh$  و مساحت قاعده برابر  $\pi r^2$  است. پس داریم  $2\pi rh + \pi r^2 = 12$ . حجم استوانه باید ماکسیمم شود، بنابراین باید ضابطه‌ی  $V = \pi r^2 h$  با استفاده از رابطه‌ی بالا به یک ضابطه‌ی یک متغیری تبدیل شود:

$$2\pi rh + \pi r^2 = 12 \Rightarrow h = \frac{12 - \pi r^2}{2\pi r}$$

$$V = \pi r^2 h \Rightarrow V = \pi r^2 \left( \frac{12 - \pi r^2}{2\pi r} \right) = \frac{r}{2} (12 - \pi r^2)$$

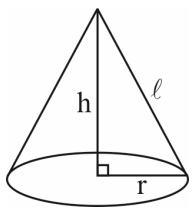
حالا که رابطه‌ی حجم به یک رابطه‌ی یک متغیری تبدیل شد، از آن مشتق می‌گیریم:

$$V' = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} (12r - \pi r^3)' = 0 \Rightarrow 12 - 3\pi r^2 = 0 \Rightarrow r^2 = \frac{4}{\pi} \Rightarrow r = \frac{2}{\sqrt{\pi}}$$

تست ۵۷: بیشترین حجم از بین مخروط‌هایی که طول مولد آن‌ها  $3\sqrt{3}$  سانتی متر است، کدام است؟ (سراسری ۱۴۰۱)

(۱)  $12\pi$       (۲)  $15\pi$       (۳)  $18\pi$       (۴)  $27\pi$

پاسخ: گزینه‌ی «۳» - شکل روبه‌رو یک مخروط به شعاع قاعده‌های  $r$  و ارتفاع  $h$  و مولد  $l$  را نشان می‌دهد. حجم مخروط از رابطه‌ی  $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$  به دست می‌آید. برای آن که  $V$  را به یک ضابطه‌ی یک متغیری تبدیل کنیم، رابطه‌ی فیثاغورس را در مثلث قائم‌الزاویه می‌نویسیم:



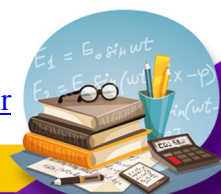
$$r^2 + h^2 = l^2 \Rightarrow r^2 + h^2 = 27 \Rightarrow r^2 = 27 - h^2$$

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \pi (27 - h^2) h = \frac{\pi}{3} (27h - h^3)$$

$$V' = 0 \Rightarrow 27 - 3h^2 = 0 \Rightarrow h^2 = 9 \Rightarrow h = 3 \Rightarrow$$

$h$		$3$
$V'$	+	-
$V$	↗	↘
max		

$$\max(V) = \frac{\pi}{3} (27(3) - 3^3) = 18\pi$$



قضایای مینیمم و ماکسیمم

برای پیدا کردن مینیمم و ماکسیمم در مسائل بهینه‌سازی (یا در هر جای دیگر) گاهی اوقات از قضایای دیگری هم استفاده می‌کنیم. این قضایا معمولاً با استفاده از مشتق ثابت می‌شوند. استفاده از این قضایا باعث می‌شود در بعضی از سؤال‌ها بتوانیم سریع‌تر به جواب برسیم.  
 (۱) اگر مجموع دو عامل مثبت مقدار ثابتی باشد، ماکسیمم حاصل ضرب آن دو وقتی به دست می‌آید که هر دو با هم برابر باشند.  
 (۲) اگر حاصل ضرب دو عامل مثبت مقدار ثابتی باشد، مینیمم مجموع آن دو وقتی به دست می‌آید که هر دو با هم برابر باشند.

(۳) اگر  $x$  و  $y$  اعداد حقیقی مثبت باشند که جمعشان ثابت است، حاصل  $x^m y^n$  زمانی ماکسیمم می‌شود که:  $\frac{x}{m} = \frac{y}{n}$

تست ۵۸: مجموع شعاع قاعده و ارتفاع یک استوانه برابر ۱۰ است. ماکسیمم مساحت جانبی استوانه چه قدر است؟

- (۱)  $10\pi$       (۲)  $20\pi$       (۳)  $25\pi$       (۴)  $50\pi$

پاسخ: گزینه‌ی «۴» - راه‌حل تشریحی:  $r + h = 10$  است. برای تک‌متغیره کردن به جای  $h$  می‌گذاریم  $(*) h = 10 - r$  و داریم:

$$S_{\text{جانبی}} = 2\pi r h = 2\pi r(10 - r) = 2\pi(10r - r^2)$$

از تابع مشتق گرفته و مساوی صفر می‌گذاریم تا مقادیر اکسترمم مطلق پیدا شود:  $S' = 2\pi(10 - 2r) = 0 \Rightarrow r = 5$

$r$	$5$	
$S'$	$+$	$-$
$S$	$\nearrow$	$\searrow$
	$\max$	

$\max(S) = 2\pi(10 \cdot (5) - (5)^2) = 50\pi$

راه تستی: برای ماکسیمم شدن  $2\pi r h$  باید  $r h$  یعنی ضرب ماکسیمم شود و وقتی جمع ثابت است  $(r + h = 10)$  طبق نکته‌ی (۱)، ضرب وقتی ماکسیمم می‌شود که  $r = h$  باشد، یعنی:

$$r = h = 5 \Rightarrow \max(S) = 2\pi(5)(5) = 50\pi$$

اگر در این سؤال بیشترین حجم استوانه را می‌خواست به صورت زیر عمل می‌کردیم:



راه تشریحی:  $V = \pi r^2 h = \pi r^2(10 - r) = \pi(10r^2 - r^3) \Rightarrow V' = \pi(20r - 3r^2) = 0 \Rightarrow r = 0, r = \frac{20}{3}$

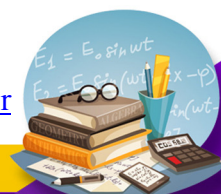
$r$	$\frac{20}{3}$	
$V'$	$+$	$-$
$V$	$\nearrow$	$\searrow$
	$\max$	

$$\Rightarrow \max(V) = \pi r^2(10 - r) \Big|_{r=\frac{20}{3}} = \pi \left(\frac{400}{9}\right) \left(10 - \frac{20}{3}\right) = \frac{4000}{27} \pi$$

راه تستی: برای ماکسیمم شدن حجم که  $V = \pi r^2 h$  است لازم است تا  $r^2 h$  ماکسیمم شود از طرفی چون  $r + h = 10$  مقدار ثابتی است

طبق نکته‌ی (۳) داریم:  $\frac{r}{2} = \frac{h}{1} \Rightarrow r = 2h \Rightarrow 3h = 10 \Rightarrow h = \frac{10}{3}, r = \frac{20}{3}$

$$\Rightarrow V = \pi r^2 h = \pi \left(\frac{400}{9}\right) \left(\frac{10}{3}\right) = \frac{4000}{27} \pi$$



تست ۵۹: بیشترین مساحت مستطیلی که به وسیله‌ی یک طناب به طول ۴۸ متر در حاشیه‌ی یک رودخانه می‌توان محصور نمود، چند مترمربع است؟ (به ضلع چهارم مستطیل دسترسی نیست.)

۳۱۶ (۴)

۲۹۶ (۳)

۲۸۸ (۲)

۲۴۴ (۱)

تست ۶۰: کوتاه‌ترین فاصله نقطه  $A(5, 0)$  از نقاط منحنی به معادله  $y = \sqrt{2x+7}$ ، کدام است؟ (سراسری تهرانی خارج از کشور ۹۹)

$3\sqrt{2}$  (۴)

۵ (۳)

$4/5$  (۲)

۴ (۱)

پاسخ: گزینه «۱» - نقطه  $B(x, \sqrt{2x+7})$  را روی منحنی در نظر می‌گیریم. فاصله نقطه  $A(5, 0)$  را از نقطه  $B$  محاسبه می‌کنیم:

$$AB = \sqrt{(x-5)^2 + (\sqrt{2x+7}-0)^2} = \sqrt{x^2 - 10x + 25 + 2x + 7} = \sqrt{x^2 - 8x + 32}$$

برای به دست آوردن کم‌ترین فاصله، از  $AB$  مشتق می‌گیریم:

$$(AB)' = \frac{2x-8}{2\sqrt{x^2-8x+32}} = \frac{x-4}{\sqrt{x^2-8x+32}}$$

$$(AB)' = 0 \Rightarrow x=4 \Rightarrow B(4, \sqrt{15})$$

کم‌ترین فاصله نقطه  $A$  از منحنی، برابر است با فاصله دو نقطه  $A$  و  $B$ . در نتیجه داریم:

$$A(5, 0), B(4, \sqrt{15}) \Rightarrow AB = \sqrt{(5-4)^2 + (0-\sqrt{15})^2} = 4$$

تست ۶۱: از بین مثلث‌های قائم‌الزاویه با اندازه وتر ۱۰ واحد، دو ضلع قائم با کدام نسبت انتخاب شود تا حجم حاصل از دوران این مثلث حول ضلع قائم، بیشترین باشد؟ (سراسری تهرانی ۹۹)

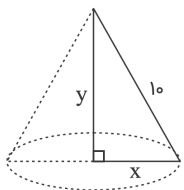
$\frac{\sqrt{2}}{1}$  (۴)

$\frac{3}{2}$  (۳)

$\frac{\sqrt{3}}{1}$  (۲)

$\frac{2}{1}$  (۱)

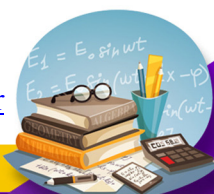
پاسخ: گزینه «۳» - در مثلث قائم‌الزاویه به طول اضلاع قائم  $x$  و  $y$  داریم:



$$x^2 + y^2 = 100 \Rightarrow x^2 = 100 - y^2 \quad (*)$$

از دوران مثلث حول ضلع قائمه آن، مخروط تشکیل می‌شود، بنابراین داریم:

$$V = \frac{1}{3} \pi x^2 y \xrightarrow{(*)} V = \frac{1}{3} \pi (100 - y^2) y = \frac{\pi}{3} (100y - y^3)$$



حال برای به دست آوردن طول اضلاع قائم، از  $V$  مشتق می‌گیریم:

$$V' = \frac{\pi}{3}(100 - 3y^2) \Rightarrow \frac{\pi}{3}(100 - 3y^2) = 0 \Rightarrow 100 - 3y^2 = 0 \Rightarrow y^2 = \frac{100}{3}$$

$$\Rightarrow x^2 = 100 - y^2 \Rightarrow x^2 = 100 - \frac{100}{3} = \frac{300 - 100}{3} = \frac{200}{3} \Rightarrow \frac{x^2}{y^2} = \frac{\frac{200}{3}}{\frac{100}{3}} = 2 \Rightarrow \frac{x}{y} = \sqrt{2}$$

تست ۶۲: اگر  $x$  و  $y$  دو ضلع قائم از مثلثی به طول وتر  $5\sqrt{2}$  باشند، بیشترین مقدار  $3x + 4y$  کدام است؟

- ۴۰ (۴)                      ۲۸√۲ (۳)                      ۳۶ (۲)                      ۲۵√۲ (۱)

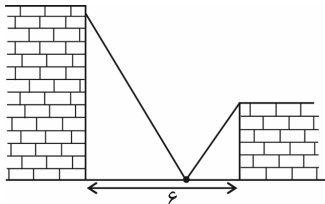
پاسخ: گزینه‌ی «۱» -  $x$  و  $y$  دو ضلع قائم مثلث قائم‌الزاویه با وتر  $5\sqrt{2}$  هستند، پس  $x^2 + y^2 = 50$  و می‌خواهیم  $3x + 4y$  ماکسیمم شود. ضابطه‌ی  $A = 3x + 4y$  را به یک ضابطه‌ی یک متغیری تبدیل می‌کنیم:

$$x^2 + y^2 = 50 \Rightarrow y^2 = 50 - x^2 \Rightarrow y = \sqrt{50 - x^2} \Rightarrow A = 3x + 4\sqrt{50 - x^2}$$

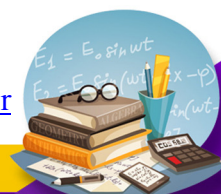
$$A' = 0 \Rightarrow 3 - \frac{4x}{\sqrt{50 - x^2}} = 0 \Rightarrow 3\sqrt{50 - x^2} = 4x \Rightarrow 9(50 - x^2) = 16x^2 \Rightarrow 50 - x^2 = \frac{16}{9}x^2$$

$$\Rightarrow \frac{25}{9}x^2 = 50 \Rightarrow x^2 = 18 \Rightarrow x = 3\sqrt{2} \Rightarrow \max(A) = 3(3\sqrt{2}) + 4\sqrt{50 - 18} = 3(3\sqrt{2}) + 4(4\sqrt{2}) = 25\sqrt{2}$$

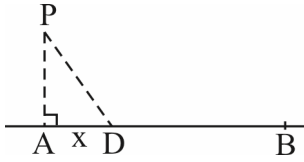
تست ۶۳: در شکل روبه‌رو می‌خواهیم از نقطه‌ی بین دو دیوار ۲ و ۴ متری که به فاصله‌ی ۶ متری هم قرار دارند، دو پله تا بالای دیوارها بسازیم. کوتاه‌ترین مجموع طول پله‌ها برابر کدام است؟



- ۸ (۱)                      ۸√۲ (۲)  
۱۲ (۴)                      ۶√۲ (۳)

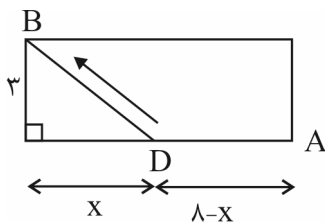


تست ۶۴: در شکل مقابل قایقی در نقطه P قرار دارد که نزدیکترین فاصله آن از ساحل ۴ کیلومتر است. اگر سرعت حرکت قایق  $3 \text{ km/h}$  و سرعت پیاده روی در ساحل  $5 \text{ km/h}$  باشد، برای این که فردی که درون قایق است در کمترین زمان ممکن به نقطه B به فاصله ۱۰ کیلومتری از نقطه A برسد، باید در نقطه‌ای با چه فاصله (x) از نقطه A پیاده شود؟ (کتاب درسی)

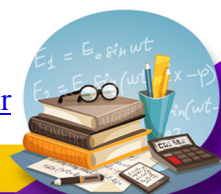


- ۲ (۱)
- ۳ (۲)
- ۴ (۳)
- ۵ (۴)

تست ۶۵: در شکل زیر مورچه‌ای در یکی از رأس‌های یک صفحه روغنی لغزنده ایستاده است. او می‌خواهد از نقطه A به نقطه B برود. اگر سرعت حرکت مورچه روی صفحه لغزنده  $4 \text{ cm/s}$  و روی سطح کنار صفحه  $5 \text{ cm/s}$  باشد، کمترین زمانی که مورچه می‌تواند به نقطه B برسد، کدام است؟ (کتاب درسی)



- ۲ ثانیه (۱)
- $2/0.5$  ثانیه (۲)
- $2/2$  ثانیه (۳)
- $2/1.5$  ثانیه (۴)



تست ۶۶: بیشترین مساحت مستطیلی که دو ضلع آن بر روی محورهای مختصات و رأس چهارم آن بر روی منحنی به معادله  $y = \sqrt{12-x}$  در ناحیه اول واقع شود، کدام است؟

(تجربی ۹۸)

۱۸ (۴)

۱۶ (۳)

$8\sqrt{3}$  (۲)

$8\sqrt{2}$  (۱)

تست ۶۷: بیشترین مساحت مستطیلی که یک ضلع آن بر قطر نیم‌دایره به شعاع ۶ واحد و دو رأس دیگر آن روی این نیم‌دایره باشد، کدام است؟

(تجربی خارج ۹۸)

۳۶ (۴)

۲۷ (۳)

۲۴ (۲)

۱۸ (۱)

توفیق و رستگاری را از خدا بخواهید.





