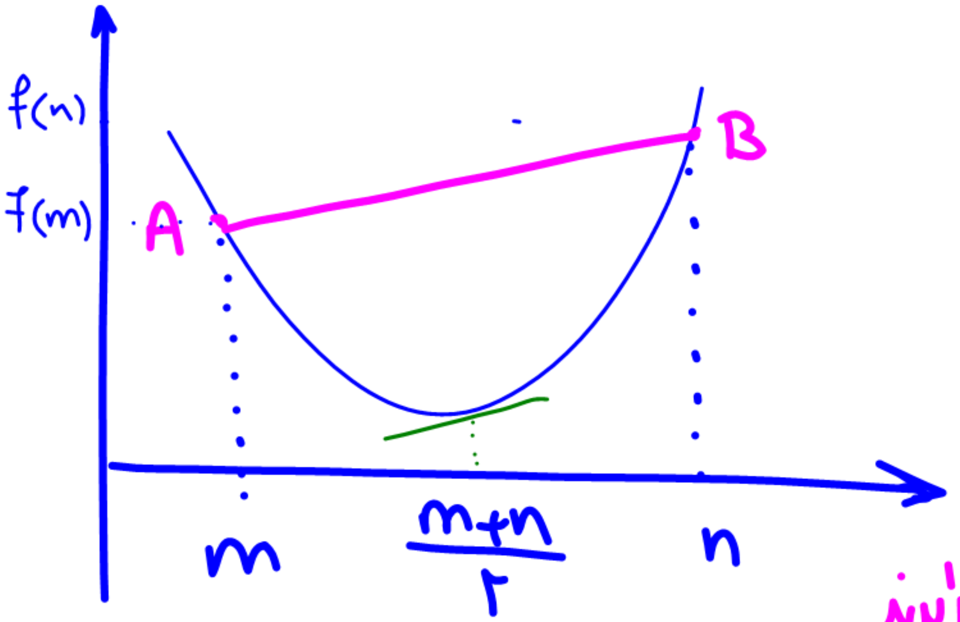
نکته: در هر سهمی $f(x)=ax^2+bx+c$ در بازه $[m,n]$ خط مماس بر تابع در وسط بازه یعنی در $x=\frac{m+n}{2}$ موازی پاره خطی است که سر و ته بازه را به هم وصل می‌کند.

تعبیر فیزیکی:



$$f'(x)=2ax+b$$

برابرند

$$f'\left(\frac{m+n}{2}\right)=a(m+n)+b$$

$$m_{AB}=\frac{f(n)-f(m)}{n-m}=\frac{(an^2+bn+c)-(am^2+bm+c)}{n-m}$$

$$=\frac{a(n^2-m^2)+b(n-m)}{n-m}$$

$$m_{AB}=a(n+m)+b$$

کاربرد مشتق و آزمون مشتق اول یا y' :

مشتق y' برای تعیین صعودی یا نزولی بودن تابع، تعیین نقاط اکسترمم به کار می‌رود..
Max یا Min

جدول جهت تغییرات تابع که در آن y' را تعیین علامت می‌کنیم.

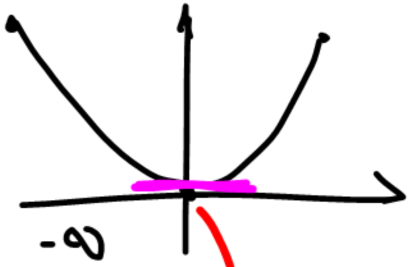
۳ ردیف داره:

سطر اول ریشه و ریشه‌های مشتق

سطر دوم تعیین علامت مشتق

سطر سوم: فلش‌های صعودی - نزولی بودن تابع

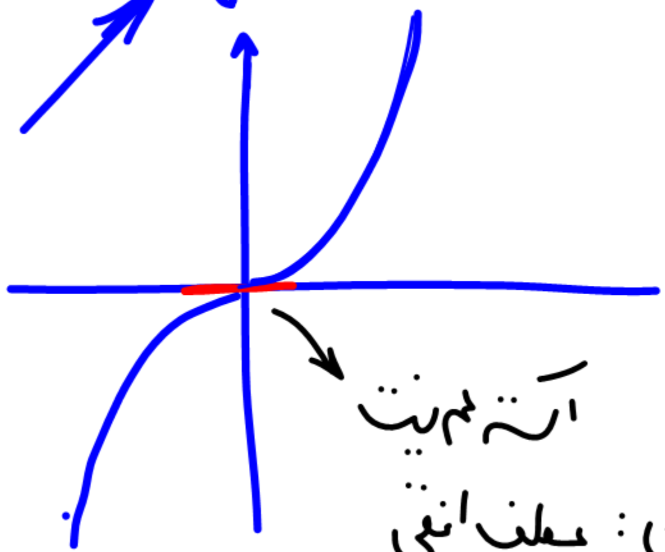
x	$-\infty$		ریشه ساده 0		$+\infty$
$y'=2x$		$-$	0	$+$	
$y=x^2$	$+\infty$	↘	Min	↗	$+\infty$



در هر بازه که مشتق $+$ است تابع اکیداً صعودی و هر بازه که مشتق منفی است اکیداً نزولی است. هرجا مشتق صفر بشه مماس افقی میشه. هرجا مشتق ∞ باشه مماس قائم هست.

$f'(0)=0 \longrightarrow$ در $x=0$ مماس افقی

x	$-\infty$		0 (ریشه مضاعف)		$+\infty$
$y'=3x^2$		$+$	0	$+$	
$y=x^3$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$



اکسترمم نیست

در حالت: عطف افقی

نکته

$y'=0$ مماس افقی

$$\begin{cases} \text{ریشه ساده (فرد)} & y \text{ اکسترمم دارد} \\ \text{ریشه مضاعف (زوج)} & y \text{ اکسترمم ندارد} \end{cases}$$

نکته ۳: هر ریشه‌ای از y' مربوط به اکسترمم نیست

در تابع پیوسته هرجا y' تغییر علامت دهد، برای f اکسترمم است.

ریشه های ساده (فرد) y' برای y طول اکسترمم هستند.

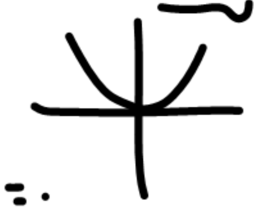
$y' = 0$

مماس افقی

- ریشه ساده (فرد)

  $y = x^2$

  $y' = 2x = 0$

  $x = 0$ اکسترمم است

- ریشه مضاعف (زوج)

  $y = x^3$

  $y' = 3x^2 = 0$

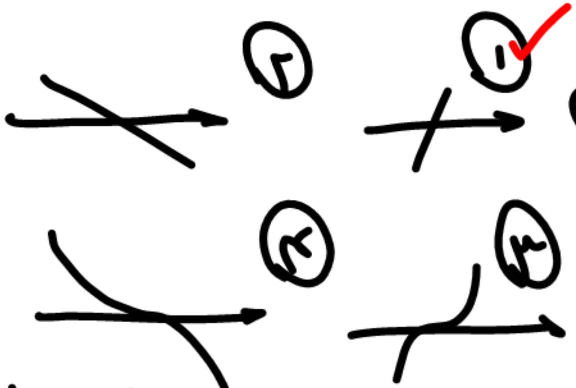
  $x = 0$ اکسترمم نیست.

تابع $y=-x^5+5x$ در کدام بازه صعودیه؟ $x\in(-1,1)$

x	$-\infty$		ساده -1		ساده 1		$+\infty$
$y'=-5x^4+5=-5(x^4-1)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$y=-x^5+5x$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

$$y'=-5(x^4-1)=-5(x^2+1)(x^2-1)=-5(x^2+1)(x+1)(x-1)=0$$

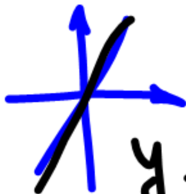
نکته: تابع فوق در همسایگی $x=0$ شبیه کدام گزینه است؟ $y=-x^5+5x$



چند جمله‌ای ها حوالی $x=0$ هم ارز با جمله کم توان هستند

$y=-x^5+5x$ حوالی $x=0$ شبیه خط $y=5x$ است

$y=-x^5+5x \xrightarrow{x\to 0} 5x$

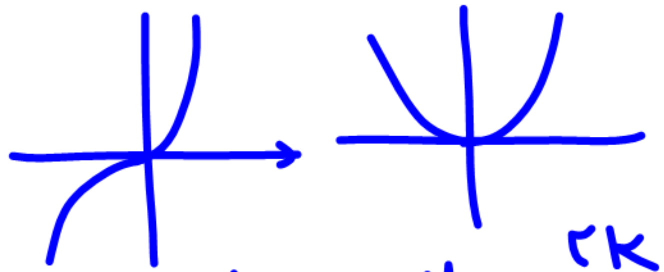


$y=5x$

①

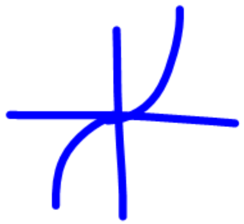
نکته: توابع چند جمله‌ای در $\pm\infty$ هم‌ارز جمله پرتوان هستند.

$$y=-x^5+5x \xrightarrow{x\to\pm\infty} -x^5$$

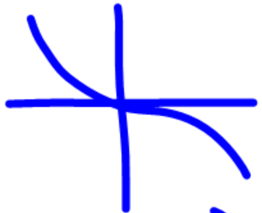


$y=x^{2k+1}$ $\quad$ $y=x^{2k}$

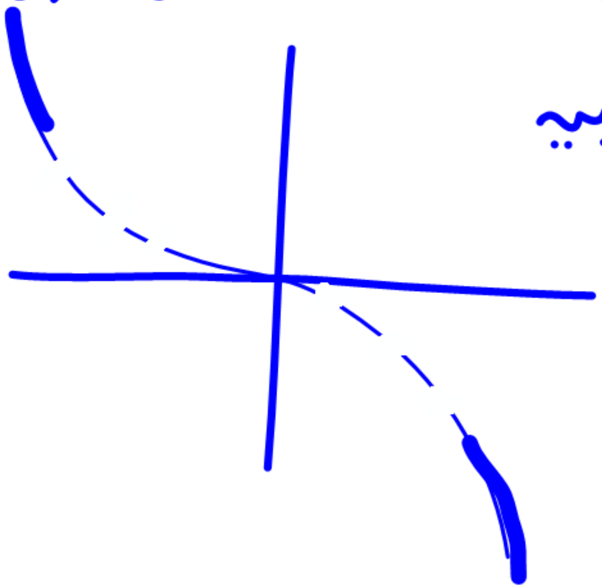
x^5



تابع $y=-x^5+5x$ در ∞ شبیه



$-x^5$



$$y = -x^5 + 5x = -x(x^4 - 5)$$

هرجا سخن از $x=0$ است

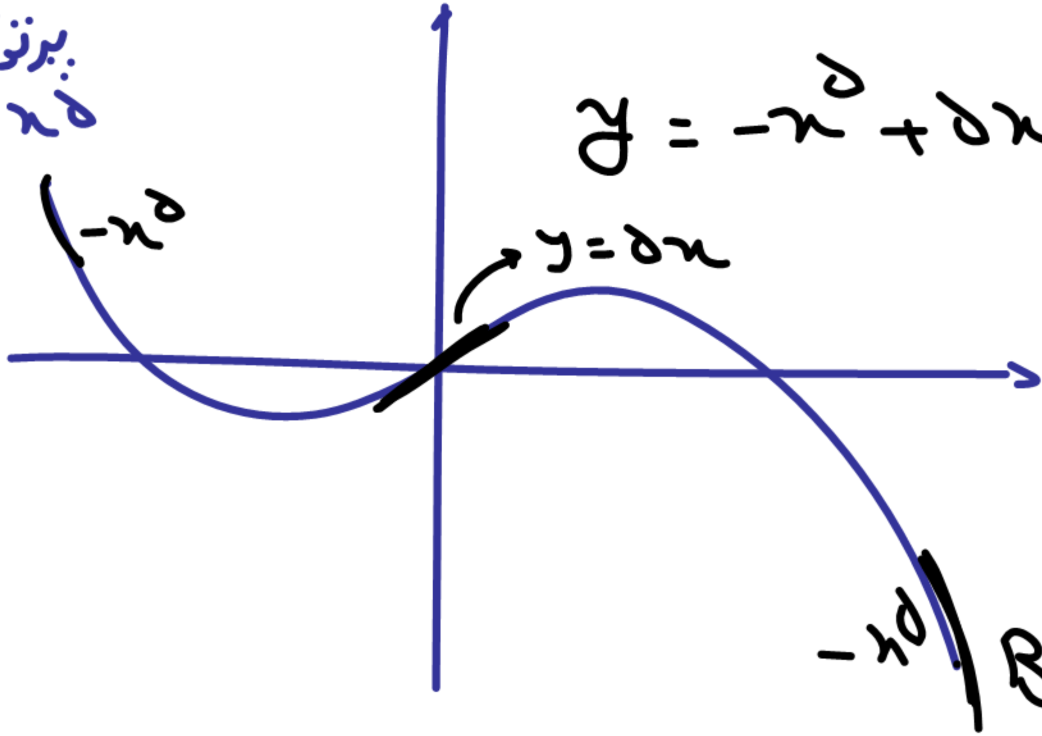
نام

هم ارزی در $x=0$ می درخشد

$$y = -x^5 + 5x \underset{x \to 0}{\sim} 5x$$

$A \left| \begin{array}{l} -\infty \\ +\infty \end{array} \right.$ برنده $-x^5$

ناحیه شروع: دوم



$B \left| \begin{array}{l} +\infty \\ -\infty \end{array} \right.$ $-x^5$

ناحیه ختم: چهارم

Critical Point نقطه بحرانی

$c \in D_f$ بحرانیه اگر $f'(c)=0$ یا $f'(c)$ موجود نباشد.

مماس افقی

نابلوترین نقطه بحرانی تابع ثابت است.

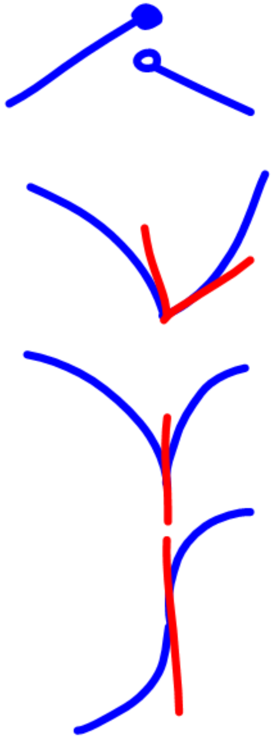
ناپیوسته

گوشه

بازگشت

عطف قائم

مماس قائم حتی ∞

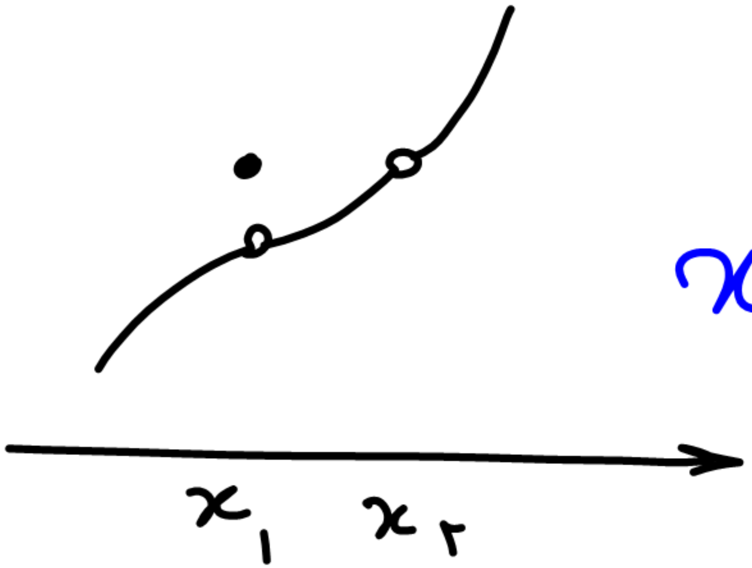


سر و ته بسته بازه $[a,b]$ بحرانیه.

در مورد نقاطی که بازه باز هستند اصلاً نظر نمی‌دهیم چون نیستند.

نقطه بحرانی را با ایکس آدرس می‌دن. یعنی فقط x :

سوال: در شکل مقابل کدام نقطه بحرانیه؟ x_1



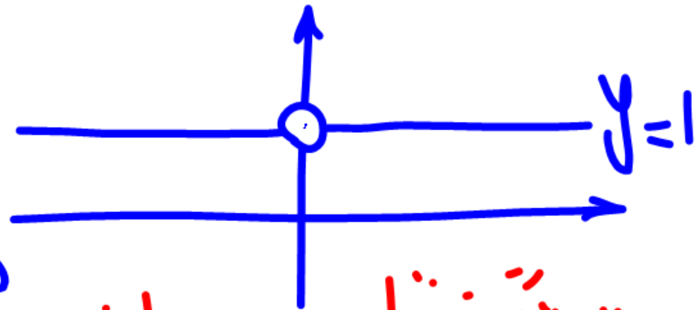
x_2 با این که ناپیوسته هست چون در دامنه نیست بحرانی نیست.

سوال: نقاط بحرانی $y=\frac{x}{x}$ ؟

$x=0$ بحرانی نی!

ریشه مخرج بحرانی نی!

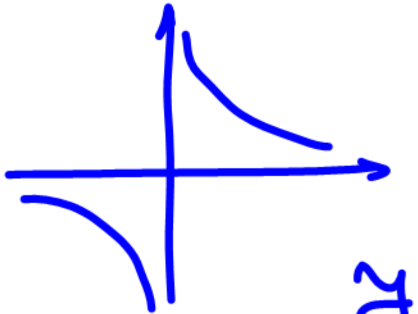
$y=\frac{x}{x} \overset{x\neq 0}{=} 1$



$x=0 \notin D$ لذا بحرانی هم نیست.

همه‌اش بحرانی است زیرا ثابت است، مشتق همه جا صفره.

اتفاقاً فقط $x=0$ بحرانی نیست.



سوال: تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ چند بحرانی داره؟ نداره

$y' = -\frac{1}{x^2} \neq 0 \qquad x = 0 \notin D_f$

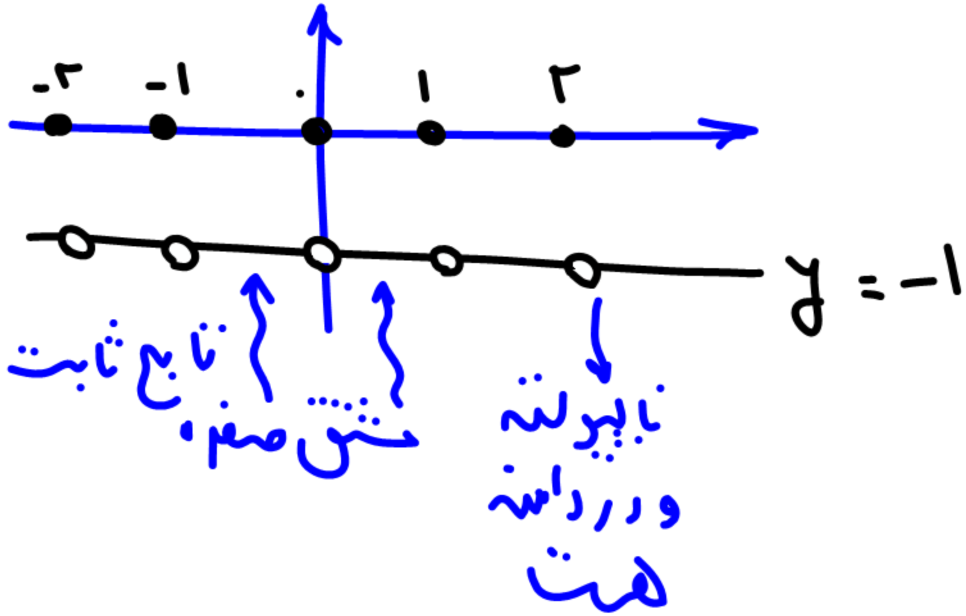
$x=0$ که در دامنه نیست بحرانی نیست

سوال: نقاط بحرانی $f(x) = [x] + [-x]$ کدامند؟

$x \in \mathbb{R}$

همه اش بحرانیه

$$y = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Z} \\ -1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$



سوال: نقاط مجانبی $y = \tan x \cdot \cot x$ ؟

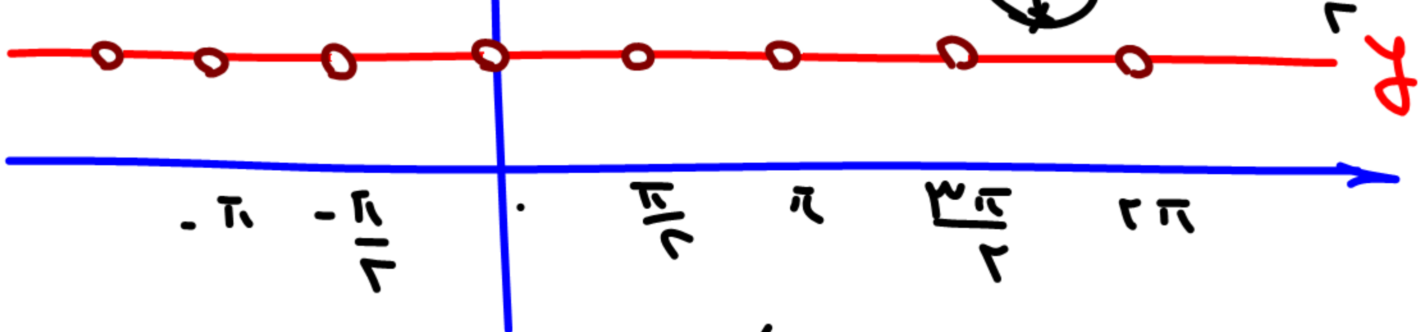
دقت کنید که یک تابع ثابت است

$$y = \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{\cos x}{\sin x} = 1$$

همه نقاط راستاش به خاطر .. = لا مجانبیه

مگر  $x = k\frac{\pi}{2}$



$x = \frac{k\pi}{2} \notin D_f$ با این که f در این‌ها نبوده ثابت ولی چون در راستاش مجانبی نیستند.

$y=\sqrt[3]{x^3-3x}$ نقاط بحرانی تابع روبه‌رو؟

بحرانی

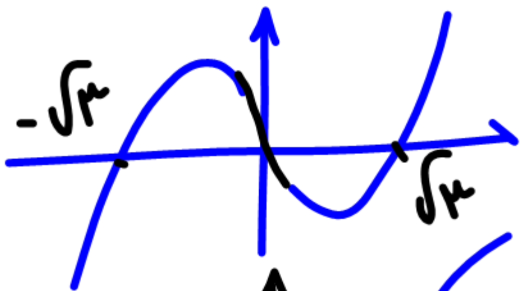
$$\begin{cases} y'=0 \quad 3x^2-3=0 \longrightarrow x=\pm 1 \in D_f \\ y'=\infty \text{ باشد یا وجود ندارد} \end{cases}$$

$$y'=\frac{3x^2-3=0}{3\sqrt[3]{(x^3-3x)^2}=0}$$

$x^3-3x=x(x^2-3)=0$

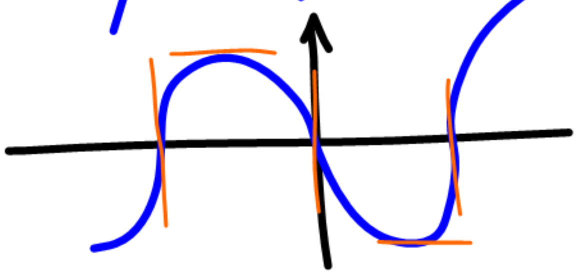
$x=0, \pm\sqrt{3} \in D_f$ بحرانی

$x \in \{\pm 1, 0, \pm\sqrt{3}\}$ ۵ بحرانی



$y=x^3-3x \underset{x\to 0}{\sim} -3x$

$x(x^2-3)=0$



$y=\sqrt[3]{x^3-3x}$

کاربرد مشتق

توابع صعودی و نزولی

بررسی جهت تغییرات تابع

۱) تابع $f(x)$ صعودی است، اگر به ازای $x_1 < x_2$ داشته باشیم $f(x_1) \leq f(x_2)$.

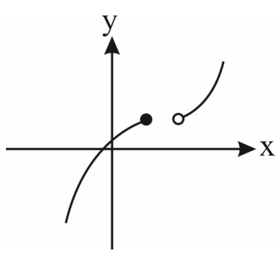
۲) تابع $f(x)$ نزولی است، اگر به ازای $x_1 < x_2$ داشته باشیم $f(x_1) \geq f(x_2)$.

۳) تابع $f(x)$ صعودی اکید است، اگر به ازای $x_1 < x_2$ داشته باشیم $f(x_1) < f(x_2)$.

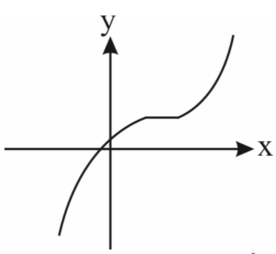
۴) تابع $f(x)$ نزولی اکید است، اگر به ازای $x_1 < x_2$ داشته باشیم $f(x_1) > f(x_2)$.

به بیان ساده‌تر تابع وقتی صعودی اکید است که با زیادشدن x، مقدار y هم زیاد شود و وقتی نزولی اکید است که با زیادشدن x، مقدار y کم شود.

فرق تابع صعودی و صعودی اکید در این است که در هر دو با زیادشدن مقدار x، مقدار y زیاد می‌شود، ولی در تابع صعودی ممکن است مقدار y به ازای دو مقدار x با هم برابر باشند. به تابعی که صعودی یا نزولی باشد، می‌گوییم یکنوا و اگر تابع نه صعودی باشد و نه نزولی، غیریکنوا یا نایکنوا است. برای توضیح بهتر به شکل‌های زیر نگاه کنید:

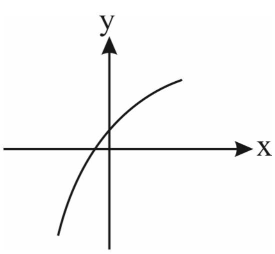


صعودی اکید

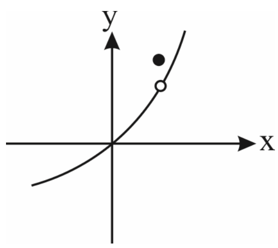


صعودی

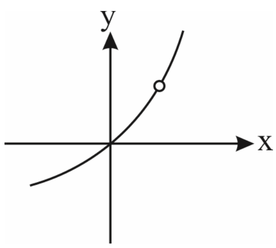
هیچ ۲ نقطه‌ای هم عرض نیستند



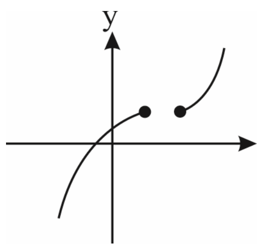
صعودی اکید



غیریکنوا

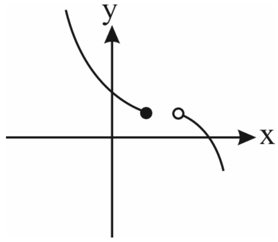


صعودی اکید

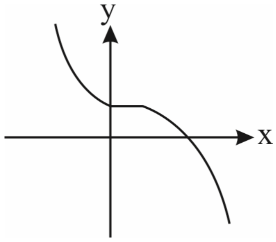


صعودی

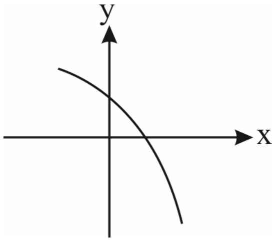
و به همین ترتیب فرق تابع نزولی و نزولی اکید در این است که در حالت اکید مقدار y همواره کم می‌شود، ولی در تابع نزولی ممکن است دو یا چند نقطه با xهای مختلف، yهای یکسان داشته باشند. به شکل‌های زیر نگاه کنید:



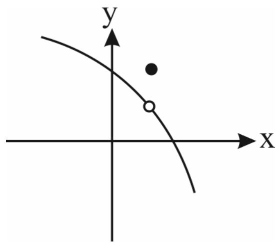
نزولی اکید



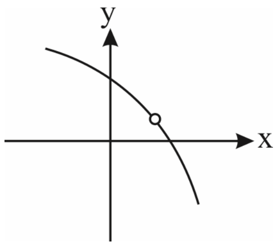
نزولی



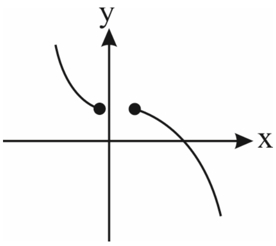
نزولی اکید



غیریکنوا



نزولی اکید

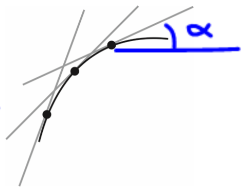


نزولی

۱) اگر تابعی در بازه $\mathbf{I}$ مشتق‌پذیر باشد و مقدار $\mathbf{f'}$ مثبت باشد، آن‌گاه، $\mathbf{f}$ در آن بازه اکیداً صعودی است.

به تابع اکیداً صعودی زیر دقت کنید که شیب خط مماس در تمام نقاط آن بازهٔ مثبت است.

همه مماس‌هایی که بر تابع رسم می‌شوند با جهت + محور xها زاویه حاده می‌سازند.



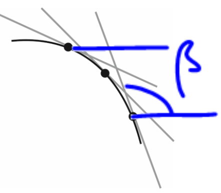
حاده $\tan\alpha > 0$

صعودی

۲) اگر تابعی در بازهٔ $\mathbf{I}$ مشتق‌پذیر باشد و مقدار $\mathbf{f'}$ منفی باشد، آن‌گاه، $\mathbf{f}$ در آن بازه اکیداً نزولی است.

به تابع اکیداً نزولی زیر دقت کنید که شیب خط مماس در تمام نقاط آن بازه منفی است.

همه مماس‌های رسم بر تابع با جهت مثبت محور xها زاویه منفرجه می‌سازند.



$\tan\beta < 0$

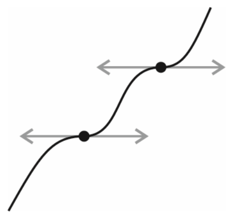
نزولی

بنابراین با کمک تعیین علامت تابع مشتق تابع $\mathbf{y = f(x)}$ می‌توانیم وضعیت یکنوایی تابع $\mathbf{f}$ را در بازه‌های مختلف مشخص کنیم.

۳) اگر تابعی در بازهٔ $\mathbf{I}$ مشتق‌پذیر باشد و مقدار $\mathbf{f'}$ برابر صفر باشد، آن‌گاه در آن بازه تابعی ثابت خواهیم داشت.

دقت کنید که در تمام نقاط یک تابع ثابت مشتق‌پذیر شیب خط مماس صفر است.

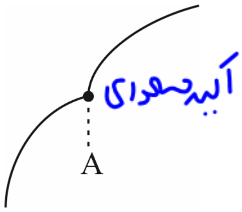
۴) اگر تابعی در بازهٔ $\mathbf{I}$ مشتق‌پذیر باشد و مقدار $\mathbf{f'}$، بزرگ‌تر مساوی صفر باشد اما صفرکننده‌ها تشکیل یک بازه ندهند هم‌چنان تابع یک تابع اکیداً صعودی خواهد بود. بنابراین صفرشدن مشتق لزوماً قید اکید را از تابع یکنوا کنار نمی‌گذارد.



به تابع فوق خوب دقت کنید. مشتق این تابع در تمام نقاط به‌جز دو نقطه مثبت و در آن دو نقطه صفر است اما این موضوع ضربه‌ای به اکیداً صعودی‌بودن تابع نمی‌زند.

۵) اگر تابعی در بازهٔ I مشتق‌پذیر باشد و مقدار f' کوچک‌تر مساوی صفر باشد اما صفرکننده‌ها تشکیل یک بازه ندهند هم‌چنان تـابع، یـک تابع اکیداً نزولی خواهد بود.

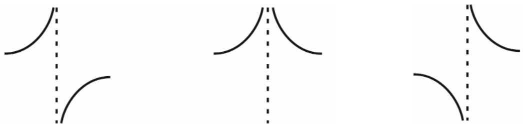
۶) اگر تابعی در بازهٔ I پیوسته باشد اما در این بازه نقطهٔ مشتق‌ناپذیری داشته باشد چنان‌چه در همسایگی راست و چپ آن مشتق تابع (هـر دو) مثبت یا (هر دو) منفی باشد این نقطهٔ مشتق‌ناپذیر به یکنوایی تابع در آن بازه ضربه‌ای نمی‌زند.



به عنوان مثال تابع فوق در تمام حوزهٔ تعریفش به‌جز نقطهٔ A مشتق‌پذیر و مشتقی مثبت دارد. بنابراین خود نقطهٔ A کـه تـابع در آن نقطـه مشتق‌ناپذیر است ضربه‌ای به اکیداً صعودی بودن تابع نمی‌زند. (چون در همسایگی راست و چپ نقطهٔ $x = A$ تابع مشتق مثبت است.)

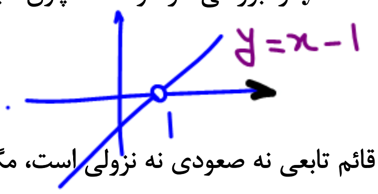
۷) در توابعی که در بازهٔ I ناپیوسته هستند، پیشنهاد ما رسم تابع و تحلیل یکنوایی تابع بر اساس نمودار آن است.

۸) اگر تابع گویایی در بازهٔ I، ریشهٔ مخرج ماندگار داشته باشد (مجانب قائم) امکان آن که تابع در آن بازه یکنوا باشد نیست.

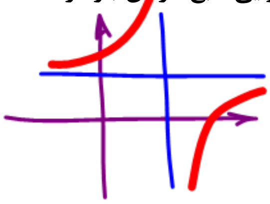


۹) اگر تابع گویایی در بازهٔ I، ریشهٔ مخرجی داشته باشد که در ساده‌سازی با صورت از بین برود (حفره)، تابع پـس از سـاده‌سازی را تحلیـل می‌کنیم و وجود آن نقطه تأثیری بر یکنوایی تابع ندارد.

به عنوان مثال برای تحلیل تابع $y = \dfrac{x^{۲} - ۳x + ۲}{x - ۲}$ می‌توان یکنوایی تابع $y = \dfrac{(x-۱)(x-۲)}{x-۲} = x - ۱$ را بررسی کرد و گفت چون تابع $y = x - ۱$ یک تابع اکیداً صعودی است تابع $y = \dfrac{x^{۲} - ۳x + ۲}{x - ۲}$ نیز اکیداً صعودی است.



۱۰) تابع هموگرافیک $y = \dfrac{ax + b}{cx + d}$ دارای شاخه‌های اکیداً یکنوا می‌باشد اما به علت وجود مجانب قائم تابعی نه صعودی نه نزولی است، مگر این تابع در بازه‌ای تحلیل شود که مجانب قائم داخل آن بازه نباشد که در آن صورت علامت مشتق تابع در آن بازه یکنوایی تابع در آن بازه را نشان خواهد داد. (مجانب قائم در توابع کسری یعنی ریشهٔ مخرجی که حد تابع اطراف آن $+\infty$ یا $-\infty$ شود.)



تست ۱: تابع $f(x) = -x^{۵} + ۵x$ روی کدام بازه صعودی است؟

۱) $[۰,۱]$ ۲) $[۰,۲]$ ۳) $[۱,+\infty)$ ۴) $(-\infty,-۱]$

پاسخ: گزینهٔ «۱» ـ مشتق تابع $f'(x) = -۵x^{۴} + ۵$ و ریشه‌های مشتق برابر $x = ۱$ و $x = -۱$ هستند. جدول تعیین علامت مشتق را رسم می‌کنیم:

x	$-\infty$		-۱		۱		$+\infty$
f'		$-$	۰	$+$	۰	$-$	
f		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

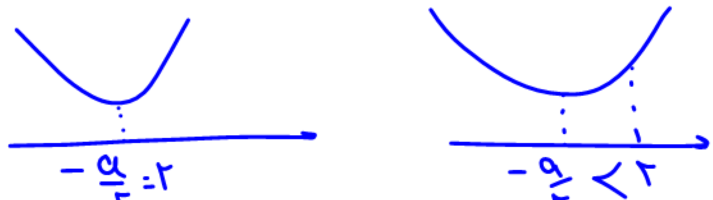
همان‌طور که در جدول می‌بینیم، مشتق تابع در بازهٔ $[-۱,۱]$ بزرگ‌تر یا مساوی صفر است، پس تابع در این بازه صعودی است. از بین گزینه‌ها فقط بازهٔ $[۰,۱]$ زیرمجموعهٔ این بازه است، پس تابع در بازهٔ $[۰,۱]$ هم صعودی است.

تست ۲: اگر تابع $y = x^2 + ax - 4$ در بازهٔ $[2,+\infty)$ صعودی باشد، مجموعهٔ مقادیر a کدام است؟

۱) $a=-4$ ۲) $a\ge -4$ ۳) $a\le -4$ ۴) $a\in\mathbb{R}$

پاسخ: گزینهٔ «۲» ـ مشتق تابع $y' = 2x + a$ و ریشهٔ مشتق برابر $x=-\frac{a}{2}$ است پس جدول تعیین علامت مشتق به صورت زیر است:

x	$-\infty$	$-\frac{a}{2} \le 2$	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$
y	$\searrow$		$\nearrow$



می‌بینیم که تابع در بازهٔ $[-\frac{a}{2},+\infty)$ صعودی است، پس برای آن که تابع در بازهٔ $[2,+\infty)$ صعودی باشد، باید $[2,+\infty)$ زیرمجموعه‌ای از بازهٔ $[-\frac{a}{2},+\infty)$ باشد؛ یعنی $-\frac{a}{2}\le 2$ و در نتیجه $a\ge -4$.

مشتق تغییر علامت نمی‌دهد:

تست ۳: به ازای چه مقادیر از m، تابع $y = 2x^3 + 3mx^2 + 24x + 9$ اکیداً یکنوا است؟

۱) $-4\sqrt{2}\le m\le 4\sqrt{2}$ ۲) $-8\le m\le 8$ ۳) $0<m\le 8$ ۴) $-4\le m\le 4$

$y' = 6x^2 + 6mx + 24 = 6(x^2 + mx + 4)$

می‌خواهیم تغییر علامت نده می‌بینیم y' درجه ۲ هست و ضریب x^2 آن مثبت. زمانی یک درجه ۲ تغییر علامت نمی‌دهد

$\Delta = b^2 - 4ac = m^2 - 4(1)(4) \le 0$

$m^2 \le 16 \longrightarrow |m| \le 4 \longrightarrow -4 \le m \le 4$

تست ۴: تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\frac{2x^2-3x}{x^2+x+3}$ در بازهٔ $(a,+\infty)$ صعودی اکید است. حداقل مقدار a کدام است؟

$y'>0$ $\Delta<0$

۱) $-\frac{3}{5}$ ۲) $\frac{3}{5}$ ۳) -3 ۴) 3

مخرج، همیشه مثبت

$\cancel{4x^3}+\cancel{4x^2}+12x-\cancel{3x^2}-\cancel{3x}-9-\cancel{4x^3}+\cancel{6x^2}-\cancel{2x^2}+\cancel{3x}$

$y' = \frac{(4x-3)(x^2+x+3)-(2x+1)(2x^2-3x)}{(\text{مخرج})^2} = \frac{5x^2+12x-9}{(\ )^2} > 0$

$5x^2+12x-9=0 \xrightarrow{\text{ضرب}} x^2+12x-45=(x-3)(x+15)=0 \begin{cases} x=3 \\ x=-15 \end{cases}$

$x_1=\frac{3}{5}$ $x_2=-\frac{15}{5}=-3$

x		-3		$\frac{3}{5}=a$	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

تست ۵: اگر تابع $y = mx^۳ + mx^۲ - x + ۱$ به ازای $x \in \mathbb{R}$ نزولی اکید باشد، حدود m کدام است؟

۱) $m \leq -۳$ ۲) $m < -۳$ ۳) $m \leq -۳$ یا $m = ۰$ ۴) $-۳ \leq m \leq ۰$

پاسخ: گزینهٔ «۴» ـ برای آن که تابع چندجمله‌ای نزولی اکید باشد، باید مشتقش همواره کوچک‌تر یا مساوی صفر باشد، پس باید داشته باشیم:

$$y' = ۳mx^۲ + ۲mx - ۱ \leq ۰$$

می‌دانیم اگر بخواهیم عبارت درجه دوم همواره $ax^۲ + bx + c \leq ۰$ باشد، باید الف) $a < ۰$ و ب) $\Delta \leq ۰$ باشد، پس:

$$\begin{cases} ۳m < ۰ \Rightarrow m < ۰ \quad (۱) \\ \Delta \leq ۰ \Rightarrow ۴m^۲ + ۱۲m \leq ۰ \Rightarrow ۴m(m+۳) \leq ۰ \Rightarrow -۳ \leq m \leq ۰ \quad (۲) \end{cases}$$

اشتراک (۱) و (۲) می‌شود $-۳ \leq m < ۰$.

حالا اگر خوب به تابع نگاه کنید، تمام توضیحات بالا به شرطی صادق‌اند که $m \neq ۰$ باشد؛ ولی وقتی که با یک تابع درجه سوم سروکار داشته باشیم اگر $m = ۰$ باشد، تابع به صورت $y = -x + ۱$ درمی‌آید که باز هم نزولی اکید است. پس تمام حدود m برابر است با $-۳ \leq m \leq ۰$.

تست ۶: تابع با ضابطهٔ $f(x) = \frac{ax - ۲}{x + a - ۳}$ ، $x > ۱$ اکیداً صعودی است. بازهٔ مقادیر a کدام است؟

۱) $(-\infty, ۱)$ ۲) $(۲, +\infty)$ ۳) $[۲, +\infty)$ ۴) $(-\infty, ۱]$

هموگرافیک

$y' = \frac{a^۲ - ۳a + ۲}{(\text{مخرج})^۲}$ ، $a(a-۳) + ۲ > ۰$

باید دقت کنیم در $x > ۱$ جایی تابع تعریف نشده: $۱ >$ مجانب قائم یا ریشه مخرج

$x = ۳ - a < ۱$

$۲ < a$ شرط (ب)

a		۱		۲	
y'	+	۰	−	۰	+
y	↗		↘		↗

$a < ۱$ یا $a > ۲$ شرط (الف)

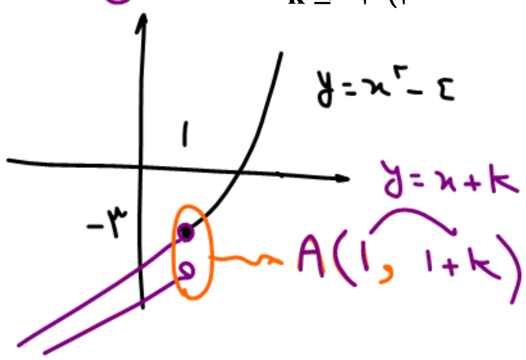
(الف) $\cap$ (ب): $۲ < a$

(سنجش)

تست ۷: به ازای کدام مقدار k، تابع با ضابطهٔ $f(x) = \begin{cases} x^۲ - ۴ & x \geq ۱ \\ x + k & x < ۱ \end{cases}$ بر $\mathbb{R}$ صعودی است؟

دو ضابطه‌ای ها را بکش

۱) $k \leq -۱$ ۲) $k \leq -۲$ ۳) $k \leq -۳$ ۴) $k \leq -۴$



$A(۱, ۱+k)$ ، $۱ + k \leq -۳ \longrightarrow \boxed{k \leq -۴}$

نقاط بحرانی

تعریـف: تابع f با دامنه‌ی $[a,b]$ مفروض است. نقطه‌ی $c \in [a,b]$ را نقطه‌ی بحرانی تـابع f مـی‌گـوییم، هرگـاه: $f'(c) = ۰$ یـا $f'(c)$ موجود نباشد.

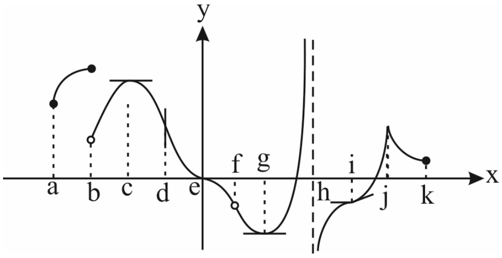
بنابراین بنا بر تعریف کتاب درسی نقاط بحرانی تابع به دو دستهٔ کلی زیر تقسیم می‌شوند:

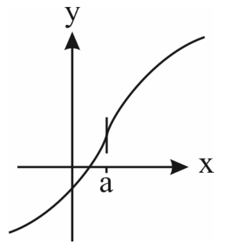
الف) نقاط مشتق‌ناپذیری
- ۱) ناپیوستگی‌ها
- ۲) نقاط پیوسته‌ای که نیم‌خط مماس راست و چپ در آن نقاط یکسان نیستند و یا نقاطی که در آن نقاط تابع دارای خط مماس قائم است.

ب) صفرکننده‌های مشتق که در این نقاط خط مماس بر منحنی به صورت افقی می‌باشد.

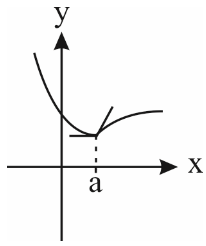
در شکل روبه‌رو انواع نقاط بحرانی را می‌بینید:

می‌خواهیم نقاط بحرانی تابع روبه‌رو را در بازه‌ی $[a,k]$ مشخص کنیم: اولاً نقاط به طول a و k نقطه‌ی بحرانی هستند، چون نقاط ابتدا و انتهای بازه‌اند. ثانیاً نقاط f و h نقاط بحرانی نیستند، چون متعلق به دامنه‌ی تابع نیستند. نقاط c، e و g بحرانی‌اند، چون مشتق‌شان برابر صفر است (خط مماس افقی داریم). نقاط d و j بحرانی‌اند، چون مشتق ندارند (خط مماس قائم داریم). نقطه‌ی i بحرانی است، چون نقطه‌ی گوشه‌ای (زاویه‌دار) است. نقطه‌ی b بحرانی است، چون ناپیوسته است. پس نقاط بحرانی تابع در بازه‌ی $[a,k]$ عبارت‌اند از a، b، c، d، e، g، i، j و k.

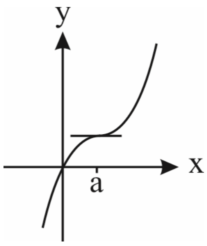




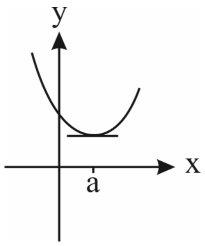
$f'(a) = +\infty$ وجود ندارد



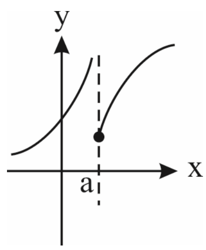
$f'(a) =$ وجود ندارد



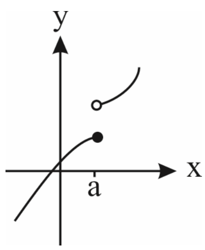
$f'(a) = 0$



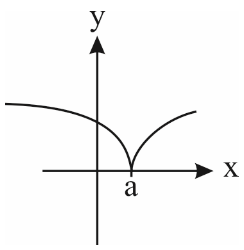
$f'(a) = 0$



$f'(a) =$ وجود ندارد



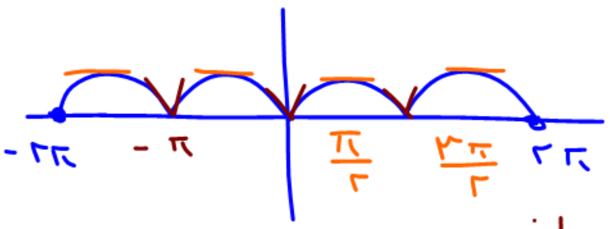
$f'(a) =$ وجود ندارد



$f'(a) = \pm\infty$ وجود ندارد

مثال ۸: گاهی نقاط بحرانی را رسم می‌کنیم.

الف) $y = |\sin x| \; ; \; x \in [-2\pi, 2\pi]$



$x = \pm 2\pi$ سر نقطه بازه

$x = \pm \frac{\pi}{2} , \pm \frac{3\pi}{2}$ مماس افقی

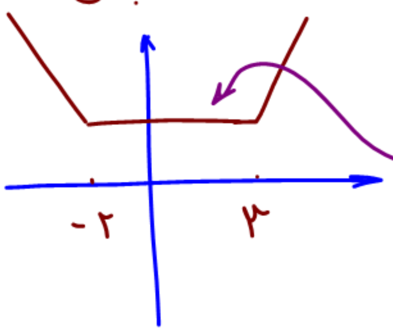
$x = \pm \pi$ و 0 گوشه (زاویه‌دار)

۹ بحرانی

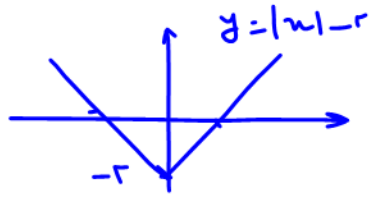
ب) $y = |x-3| + |x+2|$

عدد ار گطولی بی‌شمار

بحرانی دارد در قسمت تابع ثابت گشته



تابلوترین بحرانی روزگار، تابع ثابت است.

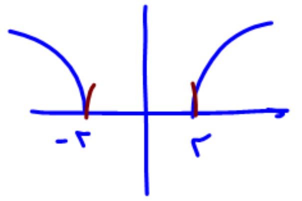


پ) $y=\sqrt{|x|-2} \geq 0$

$|x| \geq 2 \longrightarrow x \leq -2$ یا $x \geq 2$

2 بحرانی

$D_f : (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$



مرز و نقطه بسته بازه بحرانی است. $x=\pm 2$

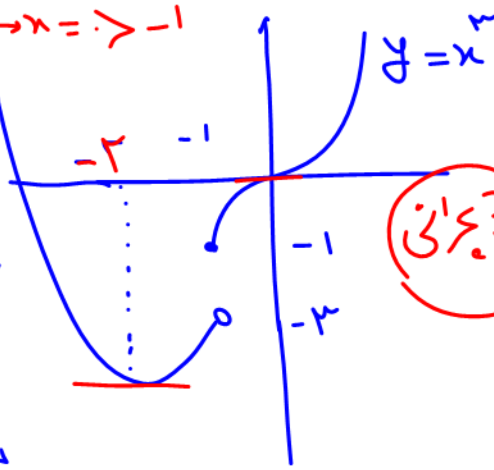
. زیرا در دامنه نیست $x=0 \notin D_f$ بحرانی نیست $x=0$

$y'=2x+4=0$
$x=-2$
$y'=3x^2=0 \longrightarrow x=0>-1$

ت) $y=\begin{cases} x^3 & x \geq -1 \\ x^2+4x & x<-1 \end{cases}$

$x(x+4)$

هم بحرانی های تک تک ضابطه‌ها که قلمروشان درست داخل ضابطه باشد و نیز کنترل پیوستگی و مشتق‌پذیری در محل تغییر ضابطه



3 بحرانی

$x=-2$ مینیمم
$x=-1$ ناپیوسته
$x=0$ مینیمم

تعیین نقاط بحرانی از روی ضابطه:

حالا که توانستیم بر اساس درک هندسی از نقاط بحرانی و با کمک گرفتن از نمودار تابع نقاط بحرانی تابع را مشخص کنیم، باید به این مطلب نیز توجه داشته باشیم که همواره رسم نمودار یک تابع برای ما امکان‌پذیر نخواهد بود، بنابراین نیاز است که با تحلیل ریاضی ضابطهٔ تابع نیز بتوانیم در حد امکان نقاط بحرانی توابع را مشخص کنیم که برای رسیدن به این نقاط ابتدا نقاط ناپیوستگی متعلق به دامنهٔ تابع را به‌دست می‌آوریم و سپس با محاسبهٔ تابع مشتق نقاط مشتق‌ناپذیری و صفرکننده‌های مشتق را مشخص می‌کنیم.

تذکر: می‌توانیم نقاط ناپیوستگی و یا مشتق‌ناپذیری توابع را به کمک مطالب و تذکراتی که در فصل پیوستگی و مشتق آموختیم، به‌دست آوریم.

تست ۹: نقاط بحرانی تابع $f(x)=x^5-5x^2-1$ کدام است؟

۱) $\{0, \sqrt[3]{2}\}$ ۲) $\{0, \sqrt[3]{2}, 1\}$ ۳) $\{\sqrt[3]{2}, -\sqrt[3]{2}\}$ ۴) $\{0, -\sqrt[3]{2}\}$

پاسخ: گزینهٔ «۱» ـ از آن‌جایی که تابع $y=x^5-5x^2-1$ یک تابع چندجمله‌ای پیوسته با دامنهٔ $\mathbb{R}$ می‌باشد و توابع چندجمله‌ای فاقد نقاط مشتق‌ناپذیری عضو دامنه هستند، فقط به دنبال صفرکننده‌های تابع مشتق می‌رویم.

$$y'(x)=5x^4-10x=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\sqrt[3]{2} \end{cases}$$

$5x(x^3-2)=0$

کسری

در توابع چندجمله‌ای و توابع گویا نقاط بحرانی لزوماً ریشه‌های تابع مشتق می‌باشند که اگر دامنهٔ تابع توسط صورت سؤال محدود شده باشد، ابتدا و انتهای بازهٔ تعریف (به شرط وجود در دامنه) نیز به علت ناپیوستگی به تعداد نقاط بحرانی تابع اضافه می‌شوند.

نکته: ریشه مخرج هرگز بحرانی نیست زیرا در دامنه نیست.

تست ۱۰: نقاط بحرانی تابع با ضابطهٔ $f(x) = x^{۲}(x-۲)^{۲}$ سه رأس یک مثلث‌اند. نوع این مثلث کدام است؟ (سراسری تجربی)

۱) متساوی‌الاضلاع ۲) فقط متساوی‌الساقین

۳) فقط قائم‌الزاویه ۴) قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین

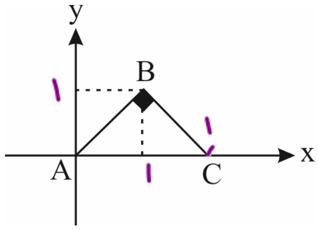
پاسخ: گزینهٔ «۴» ـ ابتدا ضابطهٔ تابع را کمی ساده‌تر می‌کنیم، تا مشتق‌گیری راحت‌تر شود:

$$f(x) = (x(x-۲))^{۲} = (x^{۲} - ۲x)^{۲}$$

$$f' = ۲(۲x-۲)(x^{۲}-۲x) = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \to A(۰,۰) \\ x = ۱ \to B(۱,۱) \\ x = ۲ \to C(۲,۰) \end{cases} \Rightarrow AB = BC$$

$y = u^n \to y' = nu'u^{n-1}$



هرگاه ضرب شیب ۲ خط (۱-) باشد ۲ بر هم عمودند.

$\begin{cases} mm' = -1 \\ m' = -\frac{1}{m} \end{cases}$

بنابراین با توجه به شکل، مثلث قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین است.

تست ۱۱: تابع $f(x) = \dfrac{x}{x^{۲}-۱}$ چند نقطهٔ بحرانی دارد؟ (سراسری)

$x = \pm 1 \notin D_f$ بحرانی نیست با این‌که f' در آن‌ها ناپیوسته است.

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

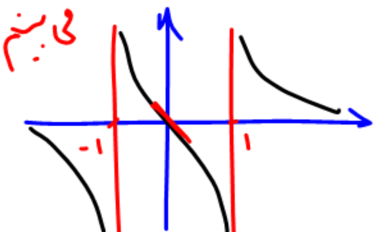
$y' = \dfrac{1(x^2-1) - 2x(x)}{(\ \ )^2} = \dfrac{-x^2-1}{\ } = 0 \longrightarrow x^2 = -1$ ریشه ندارد. بحرانی ندارد. y' ریشه ندارد.

مطلب اضافه

$y = \dfrac{x}{x^2-1} \begin{cases} x \to 0 \text{ کم‌توان} \\ x \to \pm\infty \text{ پرتوان} \end{cases}$

$y = \dfrac{x}{-1} = -x$ ببینم حوالی ۰: شیب

$y = \dfrac{x}{x^2} = \dfrac{1}{x} \begin{cases} x \to +\infty: 0^+ \\ x \to -\infty: 0^- \end{cases}$



ببینم در ∞ شیب $y = \frac{1}{x}$

$y = \dfrac{x}{x^2+1}$

شکل: پیچ نیوتن

تست ۱۲: تابع $y = \dfrac{x}{x^{۲}+۱}$ در بازهٔ $[-۲,۴]$ تعریف شده است. مجموع طول نقاط بحرانی تابع کدام است؟

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۲-

پاسخ: گزینهٔ «۲» ـ از آن‌جا که این تابع گویا در بازهٔ $[-۲,۴]$ تعریف نشده است $\{-۲,۴\}$ به عنوان نقاط ابتدایی و انتهایی بازه، ناپیوستگی و بحرانی است.

حالا به دنبال صفرکننده‌های تابع مشتق که متعلق به بازهٔ $[-۲,۴]$ است، می‌گردیم:

$$f'(x) = \frac{(۱)(x^{۲}+۱) - (۲x)(x)}{(x^{۲}+۱)^{۲}} = \frac{۱ - x^{۲}}{(x^{۲}+۱)^{۲}} = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۱ \\ x = -۱ \end{cases}$$

بنابراین صفرکننده‌های مشتق $\{\pm۱\}$ و کلیهٔ نقاط بحرانی تابع $\{\pm۱,۴,-۲\}$ می‌باشند که مجموع این نقاط عدد ۲ می‌باشد.

$y = x^2 x^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{7}{3}} - x^{\frac{1}{3}}$

تست ۱۳: تابع $f(x) = x^{۲}\sqrt[۳]{x} - \sqrt[۳]{x}$ چند نقطهٔ بحرانی دارد؟

$y' = \frac{7}{3}x^{\frac{4}{3}} - \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$

۱) یک ۲) دو ۳) سه ۴) هیچ

$= \frac{7}{3}\sqrt[3]{x^4} - \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} = 0 \longrightarrow \frac{7}{\cancel{3}}\sqrt[3]{x^4} = \frac{1}{\cancel{3}\sqrt[3]{x^2}} \longrightarrow \sqrt[3]{x^6} = \frac{1}{7} \longrightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{7}}$, $x^2 = \frac{1}{7}$

$x \in \{0, \pm\frac{1}{\sqrt{7}}\}$

پاسخ: گزینهٔ «۳» ـ تابع را به صورت $f(x)=x^{\frac{7}{3}}-x^{\frac{1}{3}}$ می‌نویسیم و مشتقش را پیدا می‌کنیم:

$$f'(x)=\frac{7}{3}x^{\frac{4}{3}}-\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}(7x^2-1)=\frac{7x^2-1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

ریشه‌های صورت مشتق برابر $x=\frac{\sqrt{7}}{7}$ و $x=-\frac{\sqrt{7}}{7}$ و ریشهٔ مخرجش برابر $x=0$ است و هر سه نقطه متعلق به دامنهٔ تابع‌اند، پس تابع سه نقطهٔ بحرانی دارد.

تست ۱۴: مجموعهٔ طول‌های نقاط بحرانی تابع با ضابطهٔ $f(x)=(x^2-28)\sqrt[3]{x}$ کدام است؟ *(سراسری تجربی)*

۱) $\{-2,2\}$ ۲) $\{-\sqrt{7},\sqrt{7}\}$ ۳) $\{-2,0,2\}$ ۴) $\{-7,0,1\}$

$y=(x^2-28)x^{\frac{1}{3}}=x^{\frac{7}{3}}-28x^{\frac{1}{3}}$ $y'=\frac{7}{3}x^{\frac{4}{3}}-\frac{28}{3}x^{-\frac{2}{3}}=\frac{7}{3}\sqrt[3]{x^4}-\frac{28}{3\sqrt[3]{x^2}}=0$

$3\sqrt[3]{x^2}=0 \to x=0$

$\frac{\cancel{7}}{\cancel{3}}\sqrt[3]{x^4}=\frac{\cancel{28}}{\cancel{3}\sqrt[3]{x^2}} \longrightarrow \sqrt[3]{x^6}=x^2=4 \longrightarrow x=\pm 2$

ریشه‌های داخل قدرمطلق ⟵ $v=0$ و $v'=0$
یا تو شاخه با مساوی

$y=|v|=\begin{cases} v & v\geq 0 \\ -v & v<0 \end{cases}$ ، $v=$

برای یافتن نقاط بحرانی تابع $y=|f(x)|$ (f تابعی پیوسته) کافی است معادلات $f(x)=0$ و $f'(x)=0$ را حل کنید.

تست ۱۵: تعداد نقاط بحرانی تابع با ضابطهٔ $f(x)=|x^3-x|$ روی بازهٔ $[-1,2]$ کدام است؟ *(سراسری ریاضی)*

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

سرونه

$x^3-x=0 \longrightarrow x(x^2-1)=0 \longrightarrow x=0,\pm 1$

$3x^2-1=0 \longrightarrow x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$

$x=-1$ تکراریه
هم سر بازه هم جواب $x^3-x=0$

$x\in\left\{0,\pm 1,\pm\frac{\sqrt{3}}{3},2\right\}$

در تابع $y=g(x)|f(x)|$ (f تابعی پیوسته):

۱) جواب‌های معادلهٔ $f(x)=0$ نقاط بحرانی تابع هستند.

۲) با حذف قدرمطلق از تابع $y=g(x)f(x)$ مشتق گرفته و نقاطی (عضو دامنه) که مشتق صفر است یا موجود نیست بحرانی‌اند.

تست ۱۶: تابع با ضابطهٔ $f(x)=x|x^{۲}-۱|$ و دامنهٔ $[-۲,۲]$ چند نقطهٔ بحرانی دارد؟ *(ریاضی خارج از کشور)*

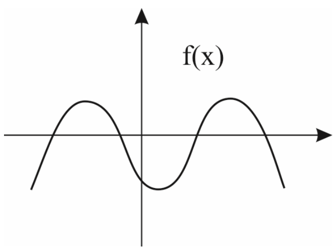
۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

تست ۱۷: نقاط بحرانی بر روی نمودار تابع $f(x)=(x-۱)|x^{۲}+x-۲|$ سه رأس مثلثی هستند. مساحت این مثلث کدام است؟

(سراسری ریاضی خارج از کشور)

۱) ۴ ۲) ۴/۵ ۳) ۶ ۴) ۸

تست ۱۸: اگر نمودار تابع $y=f(x)$ به صورت زیر باشد، تابع $y=\frac{۱}{f(x)}$ چه تعداد نقطهٔ بحرانی دارد؟

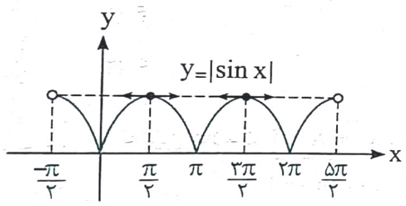


۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۵

تست ۱۹: تعداد نقاط بحرانی تابع f با ضابطهٔ $f(x)=|\sin x|$ بر بازهٔ $(-\frac{\pi}{۲},\frac{۵\pi}{۲})$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

پاسخ: با توجه به تعریف نقاط بحرانی منحنی یک تابع (مشتق ناموجود یا برابر با صفر)، نقاط به طول‌های $x=\{۰,\frac{\pi}{۲},\pi,\frac{۳\pi}{۲},۲\pi\}$ نقاط بحرانی تابع f در بازهٔ $(-\frac{\pi}{۲},\frac{۵\pi}{۲})$ به شمار می‌روند.



تست ۲۰: مجموعه طول‌های نقاط بحرانی تابع با ضابطهٔ $f(x)=|x-۲|\sqrt[۳]{x^۲}$ کدام است؟ *(سراسری ریاضی)*

۱) $\{۰,\frac{۴}{۵},۲\}$ ۲) $\{۰,\frac{۲}{۳},۲\}$ ۳) $\{۰,۱\}$ ۴) $\{\frac{۲}{۳},۲\}$

تست ۲۱: اگر تابع $f(x)=|x^۲-mx+m+۳|$ فقط یک نقطهٔ بحرانی داشته باشد، تمام مقادیر m کدام است؟

۱) $m=-۲\,,m=۶$ ۲) $-۲<m<۶$ ۳) $-۲\le m\le ۶$ ۴) $m\in\varnothing$

تعیین نقاط بحرانی در توابع چندضابطه‌ای

در توابع چندضابطه‌ای ابتدا از هر یک از ضابطه‌ها مشتق گرفته و نقاط بحرانی هر ضابطه را با توجه به دامنهٔ تعریفشان تعیین کرده سپس وجود مشتق را در نقاط مرزی بررسی می‌کنیم. در نقاط مرزی ممکن است تابع ناپیوسته باشد و یا در صورت پیوستگی دارای مشتق‌های راست و چپ نابرابر باشد. در هر دو حالت در نقطهٔ مرزی مشتق وجود ندارد و این نقطه، بحرانی محسوب می‌شود.

مثال ۲۲: نقاط بحرانی تابع‌های زیر را پیدا کنید.

الف) $f(x)=\begin{cases}2x^2+x & x\ge 1\\ x+2 & x<1\end{cases}$

ب) $f(x)=\begin{cases}x^2-2x & x\ge 0\\ x^2 & x<0\end{cases}$

پ) $f(x)=\begin{cases}x^2+2x & x\ge 1\\ 4x-2 & x<1\end{cases}$

اکسترمم مطلق

قضیه: فرض کنیم تابع f در بازهٔ بستهٔ $[a,b]$ پیوسته باشد، در این صورت f در این بازه هم ماکزیمم مطلق و هم مینیمم مطلق دارد.
خُب بیان این قضیه در کتاب درسی به وجود اکسترمم مطلق (ماکزیمم مطلق یا مینیمم مطلق) در توابعی اشاره می‌کند که در بازهٔ $[a,b]$ پیوسته باشد، اما بهتر است قبل از تحلیل و بررسی صورت قضیه تعریفی از ماکزیمم و مینیمم مطلق داشته باشیم تا بهتر بدانیم که چرا پیوسته بودن تابع در بازهٔ بستهٔ $[a,b]$ شرط کافی وجود اکسترمم مطلق تابع است.

ماکزیمم مطلق

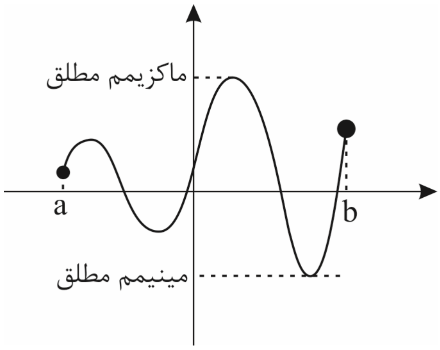
با فرض $c\in D_f$ نقطهٔ $(c,f(c))$ یک نقطهٔ ماکزیمم مطلق برای تابع f نامیده می‌شود، هرگاه به ازای هر x از D_f داشته باشیم $f(c)\ge f(x)$، در این حالت عدد $f(c)$ را مقدار ماکزیمم مطلق f روی D_f می‌نامیم.

مینیمم مطلق

با فرض $c\in D_f$ نقطهٔ $(c,f(c))$ یک نقطهٔ مینیمم برای تابع f نامیده می‌شود، هرگاه به ازای هر x از D_f داشته باشیم $f(c)\le f(x)$، در این حالت عدد $f(c)$ را مقدار مینیمم مطلق f روی D_f می‌نامیم.

تعریف (کوچه بازاری): ماکزیمم مطلق بیشترین و مینیمم مطلق کم‌ترین مقدار تابع در D_f است.

بنابراین هنگامی که تابع در بازهٔ بستهٔ $[a,b]$ پیوسته باشد، باید بتوانیم بدون برداشتن دست از روی کاغذ از ابتدا تا انتهای تابع را در این بازه رسم کنیم و به ناچار در حداقل یک نقطه باید بیشترین و در حداقل یک نقطه باید کم‌ترین مقدار تابع را مشخص نماییم، زیرا دست ما تا بی‌نهایت نمی‌تواند در رسم تابع پیش رود.



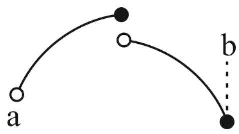
دقت کنید که پیوسته بودن تابع در بازهٔ بستهٔ $[a,b]$ شرط کافی وجود ماکزیمم و مینیمم مطلق است اما شرط لازم نیست، یعنی:

۱) می‌تواند تابع اکسترمم مطلق داشته باشد اما در بازهٔ $[a,b]$ ناپیوسته باشد.

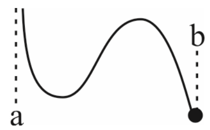
۲) می‌تواند تابع در بازهٔ (a,b) پیوسته باشد اما فاقد اکسترمم مطلق باشد.

۳) می‌تواند تابع در بازهٔ (a,b) ناپیوسته باشد اما دارای اکسترمم مطلق باشد.

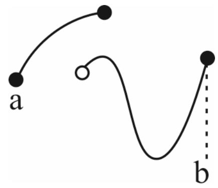
به شکل‌های زیر خوب دقت کنید:



تابع در بازهٔ (a,b) ناپیوسته است اما ماکزیمم و مینیمم مطلق دارد.



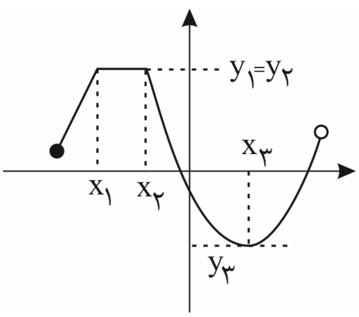
تابع در بازهٔ (a,b) پیوسته است اما ماکزیمم مطلق ندارد.



تابع در بازهٔ $[a,b]$ ناپیوسته است اما ماکزیمم و مینیمم مطلق دارد.

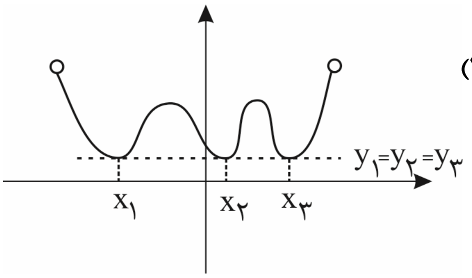
بنابراین می‌توان گفت پیوستگی شرط لازم وجود اکسترمم مطلق نیست و تابع چه پیوسته و چه ناپیوسته باشد می‌تواند اکسترمم مطلق داشته باشد، اما خوب اگر تابعی در بازهٔ $[a,b]$ پیوسته باشد خیال ما را از وجود اکسترمم مطلق راحت می‌کند.

خوب حالا به چند شکل زیر دقت کنید:



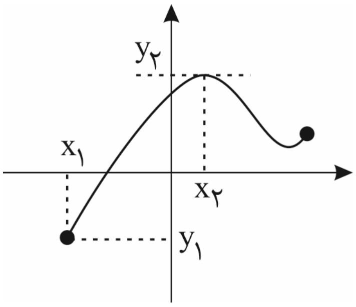
(۱)

$\begin{cases} x_3 : \text{طول مینیمم مطلق} \\ x \in [x_1, x_2] : \text{طول‌های نقاط ماکزیمم مطلق} \\ y_1 : \text{ماکزیمم مطلق} \\ y_3 : \text{مینیمم مطلق} \end{cases}$



(۲)

$\left.\begin{array}{l} x_1, x_2, x_3 \text{: طول مینیمم مطلق} \\ y_1 = y_2 = y_3 \text{: مینیمم مطلق} \\ \text{تابع دارای ماکزیمم مطلق نیست.} \end{array}\right\}$



(۳)

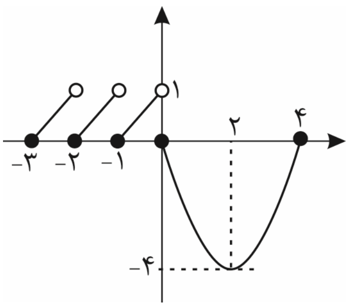
$\left.\begin{array}{l} x_2 \text{: طول ماکزیمم مطلق} \\ x_1 \text{: طول مینیمم مطلق} \\ y_1 \text{: مینیمم مطلق} \\ y_2 \text{: ماکزیمم مطلق} \end{array}\right\}$

همان‌طور که از شکل‌های رسم‌شده نیز مشخص است، نقاطی که ماکزیمم و مینیمم مطلق را تولید می‌کنند منحصربه‌فرد نیستند. به عنوان مثال، در شکل (۱) در بی‌شمار نقطه ماکزیمم مطلق و در شکل (۲) در سه نقطه مینیمم مطلق داریم. اما مقدار ماکزیمم و مینیمم مطلق در صورت وجود منحصربه‌فرد است.

خُب با این مقدمه و تعریفی که از اکسترمم‌های مطلق ارائه دادیم، می‌توانیم در تعدادی از توابع با رسم تابع اکسترمم‌های مطلق تابع را تشخیص دهیم.

به عنوان مثال:

$$f(x)=\begin{cases} x^2-4x & 0\le x\le 4 \\ x-[x] & x<0 \end{cases}$$



مینیمم مطلق تابع $y=-4$ است. آیا تابع ماکزیمم مطلق دارد؟

محاسبه‌ی max و min مطلق تابع پیوسته‌ی f در $[a,b]$

برای یافتن اکسترمم مطلق تابع پیوستهٔ f در بازهٔ بستهٔ $[a,b]$ به شرح زیر عمل می‌کنیم:

۱- مشتق تابع را به‌دست آورده و کلیهٔ نقاط بحرانی f را می‌یابیم.

۲- مقدار تابع را در هر یک از نقاط بحرانی درونی بازه و هم‌چنین در نقاط انتهایی بازه محاسبه می‌کنیم.

۳- بزرگ‌ترین عدد به‌دست‌آمده در مرحلهٔ ۲، مقدار ماکزیمم مطلق تابع و کوچک‌ترین آن‌ها مینیمم مطلق تابع در بازهٔ $[a,b]$ است.

تست ۲۳: حاصل جمع بیشترین و کم‌ترین مقدار تابع $y = x^۳ - ۳x + ۳$ در بازهٔ $[-۲,۱]$ کدام است؟

۱) ۵ ‏ ‏ ‏ ۲) ۶ ‏ ‏ ‏ ۳) ۷ ‏ ‏ ‏ ۴) ۴

تست ۲۴: مقادیر مینیمم و ماکسیمم تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{۱}{۳}x^۳ - x^۲ - ۱۵x$ در بازه‌ی $[-۴,۳]$ کدام است؟ (سراسری ۹۵)

۱) -۱۸ و ۲۴ ‏ ‏ ‏ ۲) -۴۵ و ۲۷ ‏ ‏ ‏ ۳) -۳۶ و ۲۷ ‏ ‏ ‏ ۴) -۲۷ و ۳۶

تست ۲۵: هرگاه در تابع $y = x^۳ - ۳x + k$ مقدار ماکسیمم مطلق تابع در $[۰,۲]$ دو برابر مینیمم مطلق تابع باشد، مقدار k کدام است؟

۱) ۲ ‏ ‏ ‏ ۲) -۲ ‏ ‏ ‏ ۳) -۶ ‏ ‏ ‏ ۴) ۶

تست ۲۶: مجموع مقادیر مینیمم و ماکسیمم مطلق تابع $f(x)=x^2-\frac{1}{2}\sqrt{x}$ در بازه‌ی $[0,1]$ کدام است؟

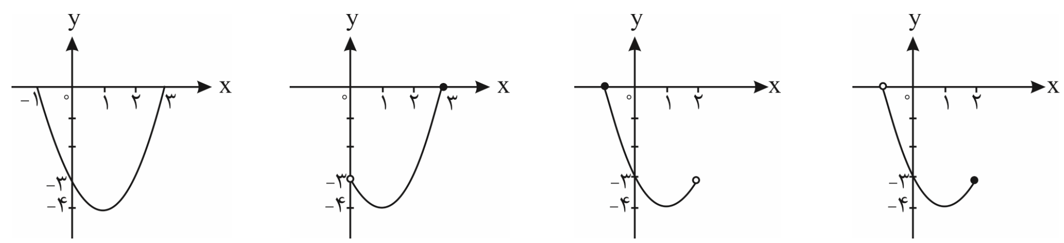
۱) $\frac{3}{16}$ ۲) $-\frac{3}{16}$ ۳) $\frac{5}{16}$ ۴) $-\frac{5}{16}$

تست ۲۷: تابع $f(x)=x^2-2x-3$ در کدام‌یک از بازه‌های زیر مینیمم و ماکسیمم مطلق ندارد؟

۱) $[0,3]$ ۲) $(0,3]$ ۳) $[-1,2)$ ۴) $(-1,2]$

پاسخ: گزینه‌ی «۴» ـ یک راه این است که تابع را در تک‌تک گزینه‌ها بررسی کنیم، یعنی عرض نقاط بحرانی و نقطه‌ی اول و آخر بازه را پیدا و با هم مقایسه کنیم. اما چون این کار وقت می‌گیرد بهتر است نمودار تابع را در بازه‌ی $[-1,3]$ یعنی طولانی‌ترین بازه‌ای که از اجتماع گزینه‌ها به دست می‌آید رسم و سپس نمودار هر گزینه را با استفاده از این نمودار اصلی بررسی کنیم. دقت کنید که لازم نیست گزینه‌ی (۱) را بررسی کنیم. (چرا؟)

$y=x^2-2x-3$



$[-1,3]$ $(0,3]$ $[-1,2)$ $(-1,2]$

حالا به نمودارها دقت کنید. تابع در بازه‌ی $(0,3]$ هم مینیمم مطلق دارد و هم ماکسیمم مطلق. مینیمم مطلقش برابر -4 و ماکسیمم مطلقش برابر صفر است. در بازه‌ی $[-1,2)$ نیز هم مینیمم مطلق برابر -4 دارد و هم ماکسیمم مطلق برابر صفر دارد، ولی در بازه‌ی $(-1,2]$ مینیمم مطلقی برابر -4 دارد، ولی ماکسیمم مطلق ندارد، چون مقدار تابع هرگز برابر صفر نمی‌شود (چون نقطه‌ی $x=-1$ توخالی است).

دیدید که برای پیداکردن مینیمم یا ماکسیمم مطلق در توابع ناپیوسته یا بازه‌هایی که ابتدا یا انتهایشان باز است، بهتر است از رسم نمودار استفاده کنیم.

تست ۲۸: اختلاف ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع $y = 2x\sqrt{1-x^2}$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۲) ۱   ۳) $\sqrt{2}$ ۴) ۲

تست ۲۹: ماکزیمم مقدار تابع $y = \sqrt[3]{x^3 - 3x^2}$ در بازهٔ $[-2,4]$ کدام است؟

۱) $3\sqrt[3]{2}$ ۲) $\sqrt[3]{2}$ ۳) $4\sqrt[3]{2}$ ۴) $2\sqrt[3]{2}$

تست ۳۰: مینیمم مطلق تابع با ضابطه‌ی $f(x) = x - \sqrt[3]{x^3 - 3x^2}$ روی $\mathbb{R}$ کدام است؟ *(سراسری ریاضی)*

۱) -1 ۲) $-\frac{1}{3}$ ۳) صفر   ۴) $\frac{1}{3}$

در توابع اکیداً یکنوای پیوسته، اکسترمم‌های مطلق تابع در ابتدا و انتهای بازهٔ تعریف اتفاق می‌افتند.

تست ۳۱: حاصل‌ضرب بیشترین و کم‌ترین مقدار تابع $y=\sqrt{x-۲}-\sqrt{۵-x}$ کدام است؟

۱) -۳ ۲) -۲ ۳) $۲\sqrt{۳}$ ۴) -۵

اگر برد تابع $y=f(x)$ را بتوانیم محاسبه کنیم، محدودهٔ تغییرات y را خواهیم داشت و در صورت داشتن محدودهٔ تغییرات برای y می‌توان بیشترین و کم‌ترین مقدار تابع را در صورت وجود یافت. برای چگونگی محاسبهٔ برد از درس‌نامهٔ فصل تابع و روش‌های محاسبهٔ برد کمک بگیرید.

نکته مهم: اگر تابع f در $[a,b]$ پیوسته باشد و مینیمم مطلق آن m و ماکزیمم مطلق آن M باشد، بُرد تابع f بازهٔ $[m,M]$ خواهد بود.

تست ۳۲: برد تابع با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt{-x^۲-۳x-۲}$ کدام است؟

۱) $[۰,\frac{۱}{۴}]$ ۲) $[۰,+\infty)$ ۳) $[۱,۲]$ ۴) $[۰,\frac{۱}{۲}]$

گاهی اوقات از ترکیب تابع‌ها برای پیداکردن برد استفاده می‌کنیم. در حالت کلی وقتی می‌خواهیم برد تابع $f(g(x))$ را در بازهٔ $[a,b]$ پیدا کنیم، اول برد تابع $g(x)$ را (یعنی تابع درونی) به دست می‌آوریم. اگر برد $g(x)$ بازهٔ $[c,d]$ باشد، آن‌گاه برد تابع $f(x)$ را در بازهٔ $[c,d]$ پیدا می‌کنیم. در حالتی که $f(x)$ پیوسته و یکنوا باشد (صعودی یا نزولی) وقتی برد g را پیدا کردیم، کافی است $f(c)$ و $f(d)$ را پیدا کنیم تا برد $f(g(x))$ به دست آید.

تست ۳۳: اگر $f(x)=۲x-[۲x]$ و $g(x)=-x^۲+۴x$ باشند، برد تابع gof، کدام است؟ (سراسری تجربی ۹۹)

۱) $[۰,۲)$ ۲) $[۰,۳)$ ۳) $[۰,۴)$ ۴) $[۱,۴)$

تست ۳۴: اگر $f(x)=x-[x]$ و $g(x)=\frac{۱-x}{x}$، برد تابع gof کدام بازه است؟ (ریاضی خارج، تجربی خارج ۹۹)

۱) $(۰,+\infty)$ ۲) $[۰,+\infty)$ ۳) $(۱,+\infty)$ ۴) $[۱,+\infty)$

اکسترمم نسبی

تعریف ۱: گوییم تابع f در نقطه‌ای به طول c ماکزیمم نسبی دارد، هرگاه یک همسایگی از c مانند $I\subseteq D_f$ باشد که برای هر $x\in I$ داشته باشیم $f(c)\geq f(x)$. در این حالت $f(c)$ مقدار ماکزیمم نسبی تابع f نامیده می‌شود.

تعریف ۲: گوییم تابع f در نقطه‌ای به طول c مینیمم نسبی دارد، هرگاه یک همسایگی از c مانند $I\subseteq D_f$ باشد که برای هر $x\in I$ داشته باشیم $f(c)\leq f(x)$ در این حالت $f(c)$ مقدار مینیمم نسبی تابع f نامیده می‌شود.

خوب حالا بریم سراغ این دو تعریف که در کتاب درسی برای ماکزیمم و مینیمم نسبی ارائه شده است. به زبان ساده ماکزیمم و مینیمم نسبی را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

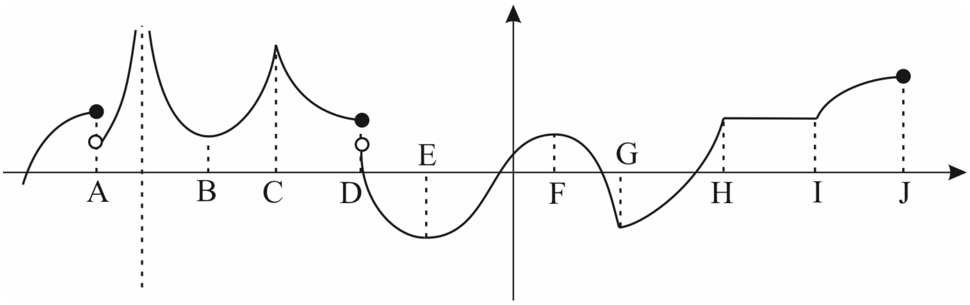
تعریف ۱: نقطه به طول $x=a$ را ماکزیمم نسبی تابع $y=f(x)$ گوییم، هرگاه مقدار تابع در این نقطه از تمام مقادیر تابع در یکی از همسایگی‌های آن بیشتر یا مساوی باشد.

تعریف ۲: نقطه به طول $x=a$ را مینیمم نسبی تابع $y=f(x)$ گوییم، هرگاه مقدار تابع در این نقطه از تمام مقادیر تابع در یکی از همسایگی‌های آن کم‌تر یا مساوی باشد.

تذکر: به مجموعهٔ نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی یک تابع، اکسترمم‌های تابع می‌گوییم.

تذکر: بنا بر تعاریف ارائه‌شده اگر نقطه‌ای به طول $x=c$ بخواهد اکسترمم نسبی تابع باشد، باید تابع در یک همسایگی آن تعریف شود. بنابراین نقاطی که برای آن‌ها نتوان یک همسایگی متعلق به دامنهٔ تابع مشخص کرد نمی‌توانند اکسترمم نسبی تابع باشند. مانند ابتدا و انتهای بازهٔ تعریف.

به شکل زیر خوب دقت کنید تا مطالب و تعاریف مطرح‌شده را با هم مرور کنیم.



نقاط $\mathbf{B}$ و $\mathbf{E}$ و $\mathbf{G}$ و تمام نقاط متعلق به بازهٔ $[\mathbf{H},\mathbf{I}]$ مینیمم نسبی تابع هستند.

نقاط $\mathbf{A}$، $\mathbf{C}$ و $\mathbf{F}$ و تمام نقاط متعلق به بازهٔ $[\mathbf{H},\mathbf{I})$ ماکزیمم نسبی تابع هستند.

نقاط مربوط به بازهٔ $(\mathbf{H},\mathbf{I})$ چون با تمام نقاط همسایگی‌ای خود عرض برابر دارند، هم در تعریف ماکزیمم نسبی و هم در تعریف مینیمم نسبی گنجانده می‌شوند و می‌توان گفت هم ماکزیمم نسبی‌اند و هم مینیمم نسبی.

از آن‌جایی که $\mathbf{J}$ نقطهٔ انتهایی بازهٔ تعریف است و نمی‌توان همسایگی‌ای اطراف آن متعلق به دامنهٔ تابع مشخص کرد نمی‌تواند یک اکسترمم نسبی باشد.

نقطهٔ $\mathbf{H}$ با آن که با نقاط همسایگی راست خود هم‌عرض است اما چون مقدار تابع در این نقطه از مقادیر همسایگی چپش بیشتر است، این نقطه، یک نقطهٔ ماکزیمم نسبی است.

نقطهٔ $\mathbf{I}$ با آن که با نقاط همسایگی چپ خود هم‌عرض است اما چون مقدار تابع در این نقطه از مقادیر همسایگی راستش کم‌تر است، این نقطه، یک نقطهٔ مینیمم نسبی است.

در نقطهٔ $\mathbf{D}$ چون مقدار تابع در این نقطه از نقاط همسایگی چپش کم‌تر و از نقاط همسایگی راستش بیشتر است نه ماکزیمم نسبی و نه مینیمم نسبی است.

نقاط مشتق‌ناپذیر و ناپیوسته نیز می‌توانند اکسترمم نسبی تابع باشند، مانند $\mathbf{A},\mathbf{C},\mathbf{G},\mathbf{H},\mathbf{I}$.

در اطراف نقاط اکسترمم نسبی پیوسته (توابع غیرثابت) یکنوایی تابع تغییر می‌کند، به نقاط $\mathbf{B},\mathbf{C},\mathbf{E},\mathbf{F},\mathbf{G}$ دقت کنید. در اطراف این نقاط تابع از صعودی به نزولی یا بالعکس تغییر یکنوایی داشته است، حتی در نقطه‌ای مانند $\mathbf{H}$ نیز می‌توان گفت قبل از این نقطه، تابع صعودی و بعد از آن تابع نزولی است. (دقت کنید توابع ثابت هم صعودی و هم نزولی هستند.)

در سمت چپ نقاط ماکزیمم نسبی پیوسته، تابع صعودی و در سمت راست آن نزولی است و در نقاط مینیمم نسبی بالعکس می‌باشد.

الزامی نیست یکنوایی تابع در اطراف نقاط اکسترمم نسبی ناپیوسته تغییر کند، مانند نقطهٔ ماکزیمم نسبی $\mathbf{A}$ که قبل و بعد از آن تابع صعودی است.

می‌توان گفت در یک تابع پیوسته هرکجا تابع از صعودی به نزولی تغییر کند آن نقطه یک ماکزیمم نسبی و هرکجا از نزولی به صعودی تغییر داشته باشد یک نقطهٔ مینیمم نسبی است.

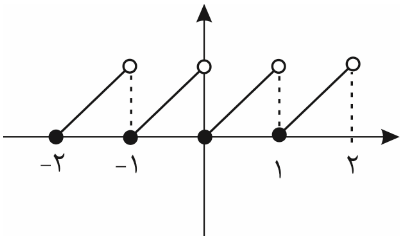
اگر در نقاط اکسترمم نسبی، تابع مشتق‌پذیر باشد، مشتق تابع در آن نقاط الزاماً صفر است، مانند نقاط $\mathbf{E}$، $\mathbf{F}$ و $\mathbf{B}$ و تمام نقاط عضو بازهٔ $(\mathbf{H},\mathbf{I})$.

هر نقطهٔ اکسترمم نسبی یک تابع، یک نقطهٔ بحرانی است، زیرا یا آن نقطه یک نقطهٔ مشتق‌ناپذیر است و یا در صورت مشتق‌پذیر بودن مشتقی برابر صفر دارد. (به نقاط اکسترمم نسبی در شکل خوب دقت کنید.)

حالا که یک تحلیل و بررسی جامع و کامل بر روی نقاط اکسترمم نسبی تابع داشتیم و درک هندسی درستی از این نقاط پیدا کردیم، قدم اول با توابعی روبه‌رو هستیم که در تشخیص نقاط اکسترمم نسبی آن می‌توانیم از نمودارهای آن‌ها کمک بگیریم. دقت کنید که در توابع ناپیوسته بهترین راه برای تشخیص اکسترمم‌های نسبی کمک گرفتن از نمودار تابع است.

مثال ۳۵: در هر کدام از توابع زیر، نقاط اکسترمم نسبی تابع را مشخص کنید.

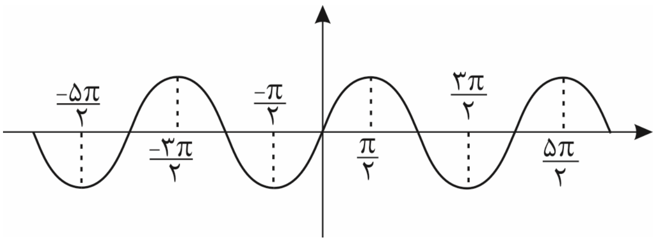
۱) $y = x - [x]$



$x \in \mathbb{Z} \leftarrow$ مینیمم نسبی

تابع فاقد ماکزیمم نسبی است.

۲) $y = \sin x$



$x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲}, k \in \mathbb{Z} \leftarrow$ ماکزیمم نسبی

$x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۲}, k \in \mathbb{Z} \leftarrow$ مینیمم نسبی

۳) $y = \begin{cases} x^۲ - ۲x & ۰ \le x \le ۲ \\ ۶x - x^۲ & x > ۲ \\ |x+۲| - ۳ & x < ۰ \end{cases}$

تست ۳۶: در تابع با ضابطهٔ $f(x) = x|x-۴|$، فاصلهٔ دو نقطهٔ ماکزیمم نسبی و مینیمم نسبی آن، کدام است؟ (تجربی ۹۸)

۱) $\sqrt{۵}$　　۲) $۲\sqrt{۲}$　　۳) $۳\sqrt{۲}$　　۴) $۲\sqrt{۵}$

خوب حالا که با کمک گرفتن از نمودار تابع توانستیم اکسترمم‌های نسبی را تشخیص دهیم، می‌خواهیم به سراغ بررسی ضابطهٔ توابع و تشخیص اکسترمم‌های نسبی آن از روی ضابطه برویم. دقت کنید در این‌جا بررسی ضابطه‌های پیوسته مدنظر است و هم‌چنان در ضابطه‌های ناپیوسته توصیه به رسم است.

آزمون مشتق اول:

فرض کنید c طول نقطهٔ بحرانی تابع f باشد که f در c پیوسته است و هم‌چنین f در یک همسایگی محذوف c مشتق‌پذیر باشد.

الف) اگر علامت f' در $x=c$ از مثبت به منفی تغییر کند، آن‌گاه $x=c$ طول نقطهٔ ماکزیمم تابع f است.

ب) اگر علامت f' در $x=c$ از منفی به مثبت تغییر کند، آن‌گاه $x=c$ طول نقطهٔ مینیمم نسبی تابع f است.

ج) اگر f' در $x=c$ تغییر علامت ندهد، به طوری که f' در یک همسایگی محذوف c همواره مثبت یا همواره منفی باشد، آن‌گاه f در $x=c$ ماکزیمم یا مینیمم نسبی ندارد.

برای یافتن اکسترمم‌های یک تابع باید مراحل زیر را انجام دهیم:

۱) محاسبه‌ی مشتق تابع

۲) محاسبه‌ی طول نقاط بحرانی

۳) تعیین علامت مشتق در نقاط بحرانی

۴) اگر x_0 طول نقطه‌ی بحرانی و تغییر علامت مشتق در x_0 از مثبت به منفی باشد، آن‌گاه تابع در x_0 دارای ماکسیمم نسبی است و اگر تغییر علامت مشتق در x_0 از منفی به مثبت باشد، آن‌گاه تابع در x_0 دارای مینیمم نسبی است.

تست ۳۷: تابع $y=\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}$ در کدام‌یک از نقاط زیر دارای ماکسیمم نسبی است؟

۱) -1 ۲) صفر   ۳) ۱   ۴) ۲

پاسخ: گزینه‌ی «۳» ـ طبق آزمون مشتق اول داریم:

$$y'=x^2-x^4=0 \Rightarrow x^2(1-x^2)=0 \Rightarrow x=0,\pm 1$$

مشتق در $x=0$ ریشه‌ی مضاعف دارد و تغییر علامت نمی‌دهد، لذا $x=0$ اکسترمم نمی‌باشد.

x		-1		0		1	
y'	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$
y	↘		↗		↗		↘
		min				max	

تذکر: هر ریشهٔ غیرمضاعف مشتق اول یک اکسترمم نسبی است.

تذکر: در توابع مشتق‌پذیر اکسترمم‌های نسبی لزوماً ریشهٔ غیرمضاعف مشتق اول هستند.

تست ۳۸: تعداد اکسترمم‌های نسبی تابع $y=x^5-5x^3-2$ کدام است؟

۱) ۲   ۲) ۳   ۳) ۴   ۴) ۱

تست ۳۹: به ازای کدام مقدار a تابع با ضابطهٔ $y=\frac{۱}{۳}x^۳+ax^۲+۴x-۱$ اکسترمم نسبی ندارد؟

۱) $a<۰$ ۲) $-۲\le a\le ۲$ ۳) $۰\le a\le ۳$ ۴) $-۴\le a\le ۰$

تست ۴۰: در تابع $f(x)=\frac{x^۲+۱}{x-a}$ اگر بین طول‌های نقاط اکسترمم تابع رابطهٔ $\frac{۱}{x_۱}+\frac{۱}{x_۲}=۴$ برقرار باشد، مقدار a کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۱- ۳) ۲ ۴) ۲-

تست ۴۱: تابع $y=\frac{|x|}{x^۲+۱}$ چه تعداد اکسترمم نسبی دارد؟

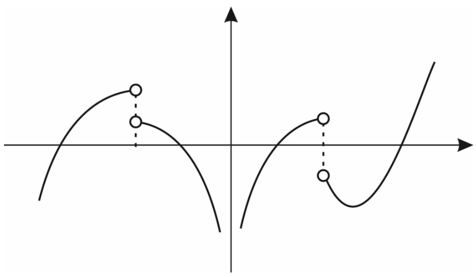
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

تست ۴۲: تابع $y=\sqrt[3]{x^3-3x^2}$ چه تعداد اکسترمم نسبی دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۳

تست ۴۳: تابع $y=f(x)$ تابعی پیوسته در $\mathbb{R}$ است. اگر نمودار $f'(x)$ به صورت زیر باشد، تابع $y=f(x)$ چند اکسترمم نسبی دارد؟

۱) ۳
۲) ۴
۳) ۵
۴) ۶



اگر (a,b) نقطه‌ی اکسترمم نسبی تابع مشتق‌پذیر f باشد، آن‌گاه:

۱) مختصات اکسترمم در تابع f صدق می‌کند: $f(a)=b$

۲) طول اکسترمم، مشتق تابع را صفر می‌کند: $f'(a)=0$

تست ۴۴: نقاط $A(0,0)$ و $B(1,1)$ نقاط اکسترمم نسبی تابع $y=ax^3+bx^2+cx+d$ هستند. حاصل ab کدام است؟

(ریاضی خارج ۱۴۰۱)

۱) -3 ۲) -6 ۳) 3 ۴) 6

تست ۴۵: دو نقطه به طول‌های ۳ و -5 نقاط بحرانی تابع با ضابطه‌ی $f(x)=x^3+ax^2+bx$ هستند. مقدار مینیمم نسبی این تابع، کدام است؟

(خارج ۸۹)

۱) -84 ۲) -81 ۳) -57 ۴) -75

تست ۴۶: فاصلهٔ نقطهٔ ماکزیمم نسبی تابع با ضابطهٔ $f(x)=x+\sqrt{4x-x^2}$، از نیمساز ناحیهٔ اول کدام است؟ (سراسری تجربی ۹۹)

۱) 1 ۲) $\sqrt{2}$ ۳) 2 ۴) $2\sqrt{2}$

پاسخ: گزینهٔ «۱»

$$f'(x)=1+\frac{4-2x}{2\sqrt{4x-x^2}}=0 \Rightarrow -\frac{2-x}{\sqrt{4x-x^2}}=1 \Rightarrow \sqrt{4x-x^2}=x-2 \ (*)$$

با توجه به معادله باید $x-2\ge 0$ باشد، یعنی: $x\ge 2$

حال معادلهٔ $(*)$ را حل می‌کنیم. ابتدا به توان ۲ می‌رسانیم:

$$4x-x^2=x^2-4x+4 \Rightarrow 2x^2-8x+4=0 \Rightarrow x^2-4x+2=0 \Rightarrow \Delta=16-8=8$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{4+2\sqrt{2}}{2}=2+\sqrt{2} & \text{قابل قبول} \\ x=\dfrac{4-2\sqrt{2}}{2}=2-\sqrt{2} & (\text{غیرقابل قبول زیرا } x\ge 2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow\ f(۲+\sqrt{۲})=۲+\sqrt{۲}+\sqrt{۴(۲+\sqrt{۲})-(۲+\sqrt{۲})^۲}=۲+\sqrt{۲}+\sqrt{۲}=۲+۲\sqrt{۲}$$

$\Rightarrow\ A(۲+\sqrt{۲}\,,۲+۲\sqrt{۲})$ ماکزیمم نسبی

حال فاصلهٔ نقطهٔ A را از نیمساز ناحیهٔ اول یعنی $y=x$ به دست می‌آوریم:

$$x-y=۰\ \Rightarrow\ d=\frac{|ax_۰+by_۰+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}=\frac{|۲+\sqrt{۲}-۲-۲\sqrt{۲}|}{\sqrt{۱+۱}}=\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}}=۱$$

تست ۴۷: مقدار ماکزیمم نسبی تابع با ضابطهٔ $f(x)=\dfrac{x^۲+۲x-۳}{x^۲+۱}$، کدام است؟ *(سراسری تجربی خارج از کشور ۹۹)*

۱) $-۱+\sqrt{۵}$ ۲) $۱+\sqrt{۵}$ ۳) $-۱+\sqrt{۳}$ ۴) $۱+\sqrt{۳}$

پاسخ: گزینهٔ «۱»

$$f'(x)=\frac{(۲x+۲)(x^۲+۱)-۲x(x^۲+۲x-۳)}{(x^۲+۱)^۲}=۰\ \Rightarrow\ (۲x+۲)(x^۲+۱)-۲x(x^۲+۲x-۳)=۰$$

$$\Rightarrow\ \cancel{۲x^۳}+۲x+۲x^۲+۲-\cancel{۲x^۳}-۴x^۲+۶x=۰\ \Rightarrow\ -۲x^۲+۸x+۲=۰\ \Rightarrow\ x^۲-۴x-۱=۰\ \Rightarrow\ \Delta=۲۰$$

$$\Rightarrow\ x=\frac{۴\pm۲\sqrt{۵}}{۲}=۲\pm\sqrt{۵}$$

x	$-\infty$		$۲-\sqrt{۵}$		$۲+\sqrt{۵}$		$+\infty$
f'		−		+		−	
f		↘	min	↗	$-۱+\sqrt{۵}$ max	↘	

$$f(۲+\sqrt{۵})=\frac{(۲+\sqrt{۵})^۲+۴+۲\sqrt{۵}-۳}{(۲+\sqrt{۵})^۲+۱}=\frac{۹+۴\sqrt{۵}+۲\sqrt{۵}+۱}{۹+۴\sqrt{۵}+۱}=\frac{۱۰+۶\sqrt{۵}}{۱۰+۴\sqrt{۵}}=\frac{۵+۳\sqrt{۵}}{۵+۲\sqrt{۵}}\times\frac{۵-۲\sqrt{۵}}{۵-۲\sqrt{۵}}=-۱+\sqrt{۵}$$

در توابع کسری $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ که بدانیم اکسترمم‌های نسبی تابع از نوع نقاط مشتق‌پذیر می‌باشد مختصات اکسترمم نسبی در ضـابطه‌ی تابع و در ضابطه‌ی هوپیتال تابع صدق می‌کند. (به شرط آن که $g'(a)\neq ۰$)

تست ۴۸: اگر نقطه‌ی $(۱,۲)$ اکسترمم نسبی تابع $y=\dfrac{x^۲+۲ax+b}{۲x-۱}$ باشد، حاصل $a-۳b$ کدام است؟

۱) -۲ ۲) ۲ ۳) -۴ ۴) ۴

تست ۴۹: خط $y-x=m$ اکسترمم‌های نسبی $y=\frac{x^{۲}-۴x+۶}{۲x-۱}$ را به هم وصل می‌کند، m کدام است؟

۱) ۲ ۲) -۲ ۳) ۱ ۴) -۱

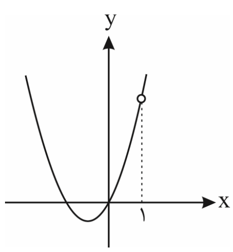
در توابعی که در نقاط اکسترمم نسبی مشتق‌پذیرند (و مشتقشان حتماً برابر صفر است)، اگر عرض اکسترمم نسبی برابر k باشد و تابع را با خط $y=k$ قطع دهیم (ضابطه‌هایشان را برابر قرار دهیم) معادله‌ی حاصل از تقاطع آن دو باید ریشه‌ی مکرر (و در صورتی که از درجه‌ی ۲ باشد، مضاعف) داشته باشد.

تست ۵۰: اگر تابع $y=\frac{x^{۲}+ax+۱}{x-۱}$ اکسترممی برابر ۳ داشته باشد، مقدار a کدام است؟

۱) ۷ و -۱ ۲) -۷ و ۱ ۳) -۷ و -۱ ۴) ۷ و ۱

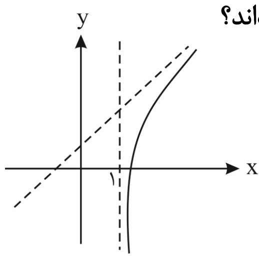
بررسی نمودارها

تست ۵۱: شکل مقابل نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{۴x^{۳}+ax+b}{x-۱}$ است. دوتایی مرتب (a,b) کدام است؟



۱) $(۰,-۴)$
۲) $(-۴,۰)$
۳) $(-۲,۱)$
۴) $(۴,۰)$

تست ۵۲: شکل مقابل قسمتی از نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{x^{۲}+a}{x+b}$ است. مقادیر a و b به کدام صورت‌اند؟



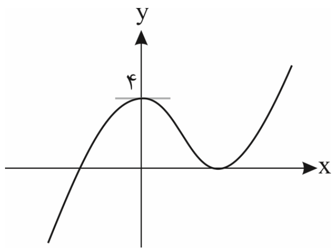
۱) $a > b = -۱$

۲) $a < b = -۱$

۳) $b > a = -۱$

۴) $b < a = -۱$

تست ۵۳: نمودار $y = x^{۳} + ax^{۲} + bx + c$ به صورت زیر است. طول نقطه‌ی مینیمم نسبی تابع کدام است؟ (سراسری ۱۴۰۱)



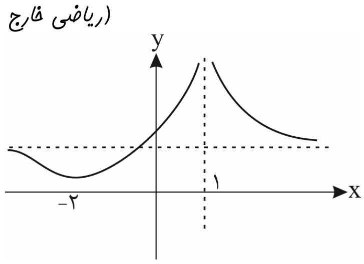
۱) $\frac{۱}{۲}$

۲) ۲

۳) $\frac{۳}{۲}$

۴) ۳

تست ۵۴: شکل زیر، نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{x^{۲}+a}{x^{۲}+bx+c}$ است، a کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۵)



۱) -۲

۲) ۱

۳) ۲

۴) ۳

بهینه‌سازی

در بخش قبل یاد گرفتیم که چگونه مقادیر مینیمم و ماکسیمم مطلق یک تابع را پیدا کنیم. وقتی از این روش در مسائل کاربردی استفاده می‌کنیم تا مینیمم یا ماکسیمم یک مقدار را پیدا کنیم، اسمش می‌شود بهینه‌سازی. در مسائل بهینه‌سازی معمولاً با یک کمیت مثل طول، فاصله، سطح، حجم و ... سروکار داریم که قرار است ماکسیمم یا مینیمم (یعنی بهینه) شود.

برای حل مسائل بهینه‌سازی این کارها را می‌کنیم:

۱) اول یک رابطه (یعنی ضابطه‌ی یک تابع) پیدا می‌کنیم که نشان‌دهنده‌ی کمیتی باشد که قرار است بهینه (ماکسیمم یا مینیمم) شود.

۲) با استفاده از داده‌های سؤال، اطلاعات قبلی ضابطه‌ی نوشته‌شده را به یک ضابطه‌ی یک‌متغیری تبدیل می‌کنیم. گاهی اوقات در این قسمت لازم است از روابط جبری و مثلثاتی یا شکل‌های هندسی هم استفاده کنیم.

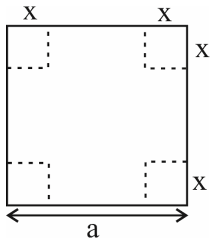
۳) از ضابطه‌ی تابعی که نوشته‌ایم، مشتق می‌گیریم و برابر صفر قرار می‌دهیم (یعنی نقاط بحرانی تابع را پیدا می‌کنیم).

۴) با استفاده از نقاط بحرانی مقدار ماکسیمم یا مینیمم را به دست می‌آوریم.

۵) گاهی اوقات لازم است بعد از نوشتن ضابطه‌ای تابع (یعنی مرحله‌ی اول) دامنه‌ی تابع را هم مشخص کنیم، ولی در اکثر وقت‌ها می‌توانیم این کار را با بررسی ریشه‌های مشتق انجام دهیم.

حالا بیایید با هم چند مثال حل کنیم:

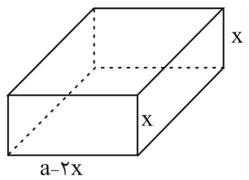
تست ۵۵: می‌خواهیم طبق شکل روبه‌رو، از کناره‌های یک صفحه‌ی مربع‌شکل به ضلع a مربع‌هایی به ضلع x ببریم و با خم‌کردن کناره‌های صفحه یک جعبه‌ی درباز به شکل مکعب‌مستطیل بسازیم. ماکسیمم حجم جعبه‌ای که می‌توانیم بسازیم، چه‌قدر است؟



۱) $\frac{a^3}{2}$ ۲) $\frac{a^3}{4}$

۳) $\frac{2a^3}{27}$ ۴) $\frac{4a^3}{27}$

پاسخ: گزینه‌ی «۳» ـ طبق شکل روبه‌رو وقتی از کناره‌های صفحه مربع‌هایی به ضلع x می‌بریم، ابعاد مکعب‌مستطیل می‌شود $a-2x$، $a-2x$ و x. پس حجم مکعب مستطیل برابر است با:



$V =$ طول × عرض × ارتفاع $= x(a-2x)^2$

از V مشتق می‌گیریم و برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$V' = (a-2x)^2 - 4(a-2x)x = (a-2x)(a-2x-4x)$$

$$V' = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{a}{2} \\ x = \frac{a}{6} \end{cases}$$

مقدار $x = \frac{a}{2}$ قابل قبول نیست، چون اگر $x = \frac{a}{2}$ باشد دیگر چیزی از صفحه باقی نمی‌ماند. پس $x = \frac{a}{6}$ قابل قبول است و حجم ماکسیمم جعبه برابر است با:

$$\max(V) = \frac{a}{6}(a - \frac{a}{3})^2 = \frac{a}{6} \times \frac{4a^2}{9} = \frac{2a^3}{27}$$

تست ۵۶: S سطح جانبی یک استوانه و s سطح قاعده‌ی آن است. اگر $S+s=12$ فرض شود، شعاع قاعده‌ی استوانه چه‌قدر باشد تا حجم آن ماکسیمم گردد؟

۱) $\frac{2}{\pi}$ ۲) $\frac{3}{\pi}$ ۳) $\frac{2}{\sqrt{\pi}}$ ۴) $\frac{3}{\sqrt{\pi}}$

پاسخ: گزینه‌ی «۳» ـ می‌دانیم در یک استوانه به شعاع r و ارتفاع h مساحت جانبی برابر $S=2\pi rh$ و مساحت قاعده برابر πr^2 است. پس داریم $2\pi rh+\pi r^2=12$. حجم استوانه باید ماکسیمم شود، بنابراین باید ضابطه‌ی $V=\pi r^2h$ با استفاده از رابطه‌ی بالا به یک ضابطه‌ی یک متغیری تبدیل شود:

$$2\pi rh+\pi r^2=12 \Rightarrow h=\frac{12-\pi r^2}{2\pi r}$$

$$V=\pi r^2h \Rightarrow V=\pi r^2\left(\frac{12-\pi r^2}{2\pi r}\right)=\frac{r}{2}(12-\pi r^2)$$

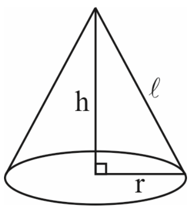
حالا که رابطه‌ی حجم به یک رابطه‌ی یک‌متغیری تبدیل شد، از آن مشتق می‌گیریم:

$$V'=0 \Rightarrow \frac{1}{2}(12r-\pi r^3)'=0 \Rightarrow 12-3\pi r^2=0 \Rightarrow r^2=\frac{4}{\pi} \Rightarrow r=\frac{2}{\sqrt{\pi}}$$

تست ۵۷: بیشترین حجم از بین مخروط‌هایی که طول مولد آن‌ها $3\sqrt{3}$ سانتی‌متر است، کدام است؟ *(سراسری ۱۴۰۱)*

۱) 12π ۲) 15π ۳) 18π ۴) 27π

پاسخ: گزینه‌ی «۳» ـ شکل روبه‌رو یک مخروط به شعاع قاعده‌ای r و ارتفاع h و مولد ℓ را نشان می‌دهد. حجم مخروط از رابطه‌ی $V=\frac{1}{3}\pi r^2h$ به دست می‌آید. برای آن که V را به یک ضابطه‌ی یک متغیری تبدیل کنیم، رابطه‌ی فیثاغورس را در مثلث قائم‌الزاویه می‌نویسیم:



$$r^2+h^2=\ell^2 \Rightarrow r^2+h^2=27 \Rightarrow r^2=27-h^2$$

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi(27-h^2)h=\frac{\pi}{3}(27h-h^3)$$

$$V'=0 \Rightarrow 27-3h^2=0 \Rightarrow h^2=9 \Rightarrow h=3 \Rightarrow$$

h		3	
V'	+	0	−
V	↗	max	↘

$$\max(V)=\frac{\pi}{3}(27(3)-3^3)=18\pi$$

قضایای مینیمم و ماکسیمم

برای پیدا کردن مینیمم و ماکسیمم در مسائل بهینه‌سازی (یا در هر جای دیگر) گاهی اوقات از قضایای دیگری هم استفاده می‌کنیم. این قضایا معمولاً با استفاده از مشتق ثابت می‌شوند. استفاده از این قضایا باعث می‌شود در بعضی از سؤال‌ها بتوانیم سریع‌تر به جواب برسیم.

۱) اگر مجموع دو عامل مثبت مقدار ثابتی باشد، ماکسیمم حاصل‌ضرب آن دو وقتی به دست می‌آید که هر دو با هم برابر باشند.

۲) اگر حاصل‌ضرب دو عامل مثبت مقدار ثابتی باشد، مینیمم مجموع آن دو وقتی به دست می‌آید که هر دو با هم برابر باشند.

۳) اگر x و y اعداد حقیقی مثبت باشند که جمعشان ثابت است، حاصل $x^m y^n$ زمانی ماکسیمم می‌شود که: $\frac{x}{m}=\frac{y}{n}$

تست ۵۸: مجموع شعاع قاعده و ارتفاع یک استوانه برابر ۱۰ است. ماکسیمم مساحت جانبی استوانه چه‌قدر است؟

۱) ۱۰π ۲) ۲۰π ۳) ۲۵π ۴) ۵۰π

پاسخ: گزینه‌ی «۴» ـ راه‌حل تشریحی: $r+h=۱۰$ است. برای تک‌متغیره کردن به جای h می‌گذاریم $h=۱۰-r \ (*)$ و داریم:

$$S_{\text{جانبی}}=۲\pi rh\overset{*}{=}۲\pi r(۱۰-r)=۲\pi(۱۰r-r^۲)$$

از تابع مشتق گرفته و مساوی صفر می‌گذاریم تا مقادیر اکسترمم مطلق پیدا شود: $S'=۲\pi(۱۰-۲r)=۰ \Rightarrow r=۵$

r		۵	
S'	+	۰	−
S	↗	max	↘

$$\max(S)=۲\pi(۱۰(۵)-(۵)^۲)=۵۰\pi$$

راه تستی: برای ماکسیمم‌شدنِ $۲\pi rh$ باید rh یعنی ضرب ماکسیمم شود و وقتی جمع ثابت است $(r+h=۱۰)$ طبق نکته‌ی (۱)، ضرب وقتی ماکسیمم می‌شود که $r=h$ باشد، یعنی: $r=h=۵ \Rightarrow \max(S)=۲\pi(۵)(۵)=۵۰\pi$

اگر در این سؤال بیشترین حجم استوانه را می‌خواست به صورت زیر عمل می‌کردیم:

راه تشریحی: $V=\pi r^۲h\overset{*}{=}\pi r^۲(۱۰-r)=\pi(۱۰r^۲-r^۳) \Rightarrow V'=\pi(۲۰r-۳r^۲)=۰ \Rightarrow r=۰\,,r=\frac{۲۰}{۳}$

r		$\frac{۲۰}{۳}$	
V'	+	۰	−
V	↗	max	↘

$$\Rightarrow \max(V)=\pi r^۲(۱۰-r)\overset{r=\frac{۲۰}{۳}}{=\!=\!=}\pi(\frac{۴۰۰}{۹})(۱۰-\frac{۲۰}{۳})=\frac{۴۰۰۰}{۲۷}\pi$$

راه تستی: برای ماکسیمم‌شدن حجم که $V=\pi r^۲h$ است لازم است تا $r^۲h$ ماکسیمم شود از طرفی چون $r+h=۱۰$ مقدار ثابتی است طبق نکته‌ی (۳) داریم:

$$\frac{r}{۲}=\frac{h}{۱} \Rightarrow r=۲h \Rightarrow ۳h=۱۰ \Rightarrow h=\frac{۱۰}{۳}\,,r=\frac{۲۰}{۳}$$

$$\Rightarrow V=\pi r^۲h=\pi(\frac{۴۰۰}{۹})(\frac{۱۰}{۳})=\frac{۴۰۰۰}{۲۷}\pi$$

تست ۵۹: بیشترین مساحت مستطیلی که به وسیله‌ی یک طناب به طول ۴۸ متر در حاشیه‌ی یک رودخانه می‌توان محصور نمود، چند مترمربع است؟ (به ضلع چهارم مستطیل دسترسی نیست.)

۱) ۲۴۴ ۲) ۲۸۸ ۳) ۲۹۶ ۴) ۳۱۶

تست ۶۰: کوتاه‌ترین فاصلهٔ نقطهٔ $A(5,0)$ از نقاط منحنی به معادلهٔ $y=\sqrt{2x+7}$، کدام است؟ *(سراسری تجربی خارج از کشور ۹۹)*

۱) ۴ ۲) ۴/۵ ۳) ۵ ۴) $3\sqrt{2}$

پاسخ: گزینهٔ «۱» ـ نقطهٔ $B(x,\sqrt{2x+7})$ را روی منحنی در نظر می‌گیریم. فاصلهٔ نقطهٔ $A(5,0)$ را از نقطهٔ B محاسبه می‌کنیم:

$$AB=\sqrt{(x-5)^2+(\sqrt{2x+7}-0)^2}=\sqrt{x^2-10x+25+2x+7}=\sqrt{x^2-9x+32}$$

برای به دست آوردن کم‌ترین فاصله، از AB مشتق می‌گیریم:

$$(AB)'=\frac{2x-8}{2\sqrt{x^2-8x+32}}=\frac{x-4}{\sqrt{x^2-8x+32}}$$

$$(AB)'=0 \Rightarrow x=4 \Rightarrow B(4,\sqrt{15})$$

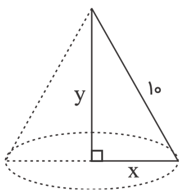
کم‌ترین فاصلهٔ نقطهٔ A از منحنی، برابر است با فاصلهٔ دو نقطهٔ A و B. در نتیجه داریم:

$$A(5,0),B(4,\sqrt{15}) \Rightarrow AB=\sqrt{(5-4)^2+(0-\sqrt{15})^2}=4$$

تست ۶۱: از بین مثلث‌های قائم‌الزاویه با اندازهٔ وتر ۱۰ واحد، دو ضلع قائم با کدام نسبت انتخاب شود تا حجم حاصل از دوران این مثلث حول ضلع قائم، بیشترین باشد؟ *(سراسری تجربی ۹۹)*

۱) $\frac{2}{1}$ ۲) $\frac{\sqrt{3}}{1}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $\frac{\sqrt{2}}{1}$

پاسخ: گزینهٔ «۳» ـ در مثلث قائم‌الزاویه به طول اضلاع قائم x و y داریم:



$$x^2+y^2=100 \Rightarrow x^2=100-y^2 \quad (*)$$

از دوران مثلث حول ضلع قائمهٔ آن، مخروط تشکیل می‌شود، بنابراین داریم:

$$V=\frac{1}{3}\pi x^2y \xrightarrow{(*)} V=\frac{1}{3}\pi(100-y^2)y=\frac{\pi}{3}(100y-y^3)$$

حال برای به دست آوردن طول اضلاع قائم، از V مشتق می‌گیریم:

$$V' = \frac{\pi}{3}(100 - 3y^2) \Rightarrow \frac{\pi}{3}(100 - 3y^2) = 0 \Rightarrow 100 - 3y^2 = 0 \Rightarrow y^2 = \frac{100}{3}$$

$$\Rightarrow x^2 = 100 - y^2 \Rightarrow x^2 = 100 - \frac{100}{3} = \frac{300 - 100}{3} = \frac{200}{3} \Rightarrow \frac{x^2}{y^2} = \frac{\frac{200}{3}}{\frac{100}{3}} = 2 \Rightarrow \frac{x}{y} = \sqrt{2}$$

تست ۶۲: اگر x و y دو ضلع قائم از مثلثی به طول وتر $5\sqrt{2}$ باشند، بیشترین مقدار $3x + 4y$ کدام است؟ (سراسری ریاضی ۹۰)

۱) $25\sqrt{2}$ ۲) ۳۶ ۳) $28\sqrt{2}$ ۴) ۴۰

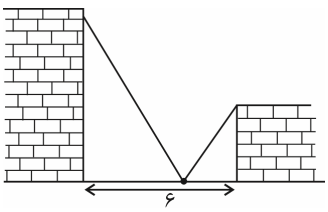
پاسخ: گزینه‌ی «۱» ـ x و y دو ضلع قائم مثلث قائم‌الزاویه با وتر $5\sqrt{2}$ هستند، پس $x^2 + y^2 = 50$ و می‌خواهیم $3x + 4y$ ماکسیمم شود. ضابطه‌ی $A = 3x + 4y$ را به یک ضابطه‌ی یک متغیری تبدیل می‌کنیم:

$$x^2 + y^2 = 50 \Rightarrow y^2 = 50 - x^2 \Rightarrow y = \sqrt{50 - x^2} \Rightarrow A = 3x + 4\sqrt{50 - x^2}$$

$$A' = 0 \Rightarrow 3 - \frac{4x}{\sqrt{50 - x^2}} = 0 \Rightarrow 3\sqrt{50 - x^2} = 4x \Rightarrow 9(50 - x^2) = 16x^2 \Rightarrow 50 - x^2 = \frac{16}{9}x^2$$

$$\Rightarrow \frac{25}{9}x^2 = 50 \Rightarrow x^2 = 18 \Rightarrow x = 3\sqrt{2} \Rightarrow \max(A) = 3(3\sqrt{2}) + 4\sqrt{50 - 18} = 3(3\sqrt{2}) + 4(4\sqrt{2}) = 25\sqrt{2}$$

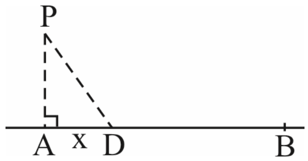
تست ۶۳: در شکل روبه‌رو می‌خواهیم از نقطه‌ی بین دو دیوار ۲ و ۴ متری که به فاصله‌ی ۶ متری هم قرار دارند، دو پله تا بالای دیوارها بسازیم. کوتاه‌ترین مجموع طول پله‌ها برابر کدام است؟



۱) ۸ ۲) $8\sqrt{2}$

۳) $6\sqrt{2}$ ۴) ۱۲

تست ۶۴: در شکل مقابل قایقی در نقطهٔ **P** قرار دارد که نزدیک‌ترین فاصلهٔ آن از ساحل ۴ کیلومتر است. اگر سرعت حرکت قایق **۳ km / h** و سرعت پیاده‌روی در ساحل **۵ km / h** باشد، برای این که فردی که درون قایق است در کم‌ترین زمان ممکن بـه نقطـهٔ **B** بـه فاصـلهٔ ۱۰ کیلومتری از نقطهٔ **A** برسد، باید در نقطه‌ای با چه فاصله **(x)** از نقطهٔ **A** پیاده شود؟ *(کتاب درسی)*



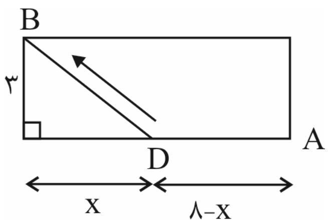
۱) ۲

۲) ۳

۳) ۴

۴) ۵

تست ۶۵: در شکل زیر مورچه‌ای در یکی از رأس‌های یک صفحهٔ روغنی لغزنده ایستاده است. او می‌خواهد از نقطهٔ **A** به نقطهٔ **B** بـرود. اگـر سرعت حرکت مورچه روی صفحهٔ لغزنده **۴ cm / s** و روی سطح کنار صفحه **۵ cm / s** باشد، کم‌ترین زمانی که مورچه می‌تواند به نقطهٔ **B** برسد، کدام است؟ *(کتاب درسی)*



۱) ۲ ثانیه

۲) ۲/۰۵ ثانیه

۳) ۲/۲ ثانیه

۴) ۲/۱۵ ثانیه

تست ۶۶: بیشترین مساحت مستطیلی که دو ضلع آن بر روی محورهای مختصات و رأس چهارم آن بر روی منحنی به معادلهٔ $y = \sqrt{۱۲ - x}$، در ناحیهٔ اول واقع شود، کدام است؟ *(تجربی ۹۸)*

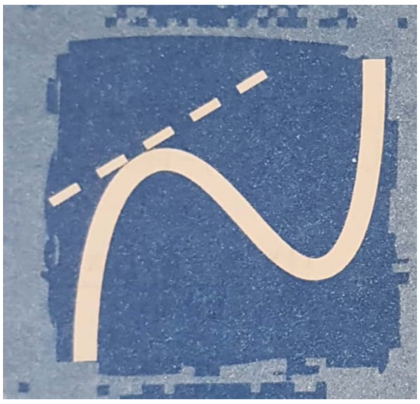
۱) $۸\sqrt{۲}$ ۲) $۸\sqrt{۳}$ ۳) ۱۶ ۴) ۱۸

تست ۶۷: بیشترین مساحت مستطیلی که یک ضلع آن بر قطر نیم‌دایره به شعاع ۶ واحد و دو رأس دیگر آن روی این نیم‌دایره باشد، کدام است؟ *(تجربی خارج ۹۸)*

۱) ۱۸ ۲) ۲۴ ۳) ۲۷ ۴) ۳۶

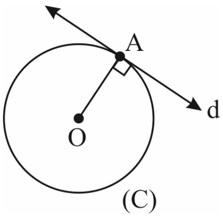
توفیق و رستگاری را از خدا بخواهید.

مشتق ـ رشتهٔ تجربی



درس ۱: آشنایی با مفهوم مشتق

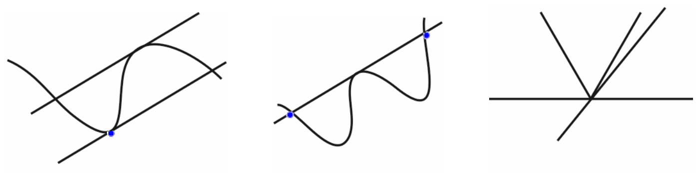
خط مماس بر منحنی



فرض کنیم دایره‌ی C و خط d در یک صفحه باشند، اگر خط و دایره فقط یک نقطه‌ی مشترک داشته باشند، آن‌گاه خط را بر دایره «مماس» می‌گوییم و آن نقطه را، نقطه‌ی تماس خط و دایره می‌نامند.

اگر این نقطه را A بنامیم می‌گوییم، خط در نقطه‌ی A بر دایره مماس است.

دقت کنید که این تعریف فقط مخصوص دایره است و نمی‌تواند برای هر منحنی دلخواه درست باشد. به شکل‌های زیر دقت کنید.



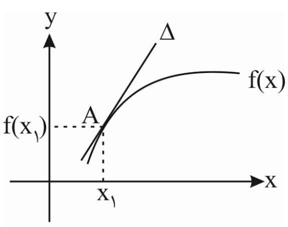
(۱) (۲) (۳)

در شکل‌های (۱) و (۲) خط مماس، منحنی را در بیش از یک نقطه قطع کرده است. در شکل (۳) خط، نمودار را در یک نقطه قطع کرده است ولی در هیچ نقطه‌ای بر آن مماس نیست.

تعریف مشتق

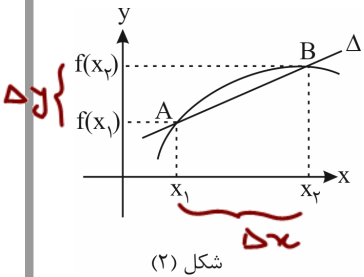
در شکل (۱) خط Δ در نقطه‌ی A بر منحنی $y = f(x)$ مماس است و می‌خواهیم شیب خط Δ را پیدا کنیم. اول ببینیم که خط مماس را چه‌طور تعریف می‌کنیم.

خط : شیب



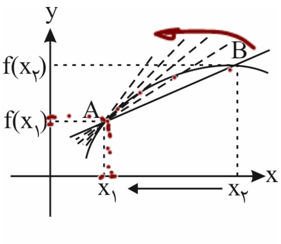
شکل (۱)

به شکل (۲) نگاه کنید. در این شکل خط Δ منحنی $f(x)$ را در دو نقطه‌ی A و B قطع کرده است.



شکل (۲)

حالا اگر مانند شکل (۳) نقطه‌ی B به سمت نقطه‌ی A حرکت کند خط Δ کم‌کم به خط مماس بر منحنی تبدیل می‌شود یعنی خط مماس حالت حدی خط قاطعی است که منحنی تابع را در دو نقطه قطع کند و نقطه‌ی دوم به سمت نقطه‌ی اول حرکت کند. برای پیداکردن شیب خط مماس هم از همین موضوع استفاده می‌کنیم.



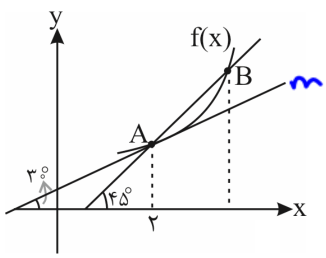
شکل (۳)

می‌دانیم شیب خط قاطع که منحنی را در دو نقطه‌ی A و B قطع می‌کند برابر $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ یا $m = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ است. حالا وقتی نقطه‌ی B به سمت نقطه‌ی A حرکت می‌کند مثل آن است که بگوییم $x_2 \to x_1$، پس شیب خط مماس برابر حد $\lim\limits_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ است. نقطه‌ی B یک نقطه‌ی متحرک است و در نتیجه به جای x_2 می‌توانیم بنویسیم x (چون x_2 در حال حرکت است) پس شیب خط مماس برابر $m_{\text{مماس}} = \lim\limits_{x \to x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}$ است. حالا می‌توانیم مشتق را تعریف کنیم.

اگر در تابع $f(x)$ حاصل حد $\lim\limits_{x \to x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}$ وجود داشته باشد (یعنی برابر عدد مشخصی شود) آن را مشتق تابع $f(x)$ در نقطه‌ی x_1 می‌نامیم و با $f'(x_1)$ نشان می‌دهیم. یعنی $f'(x_1) = \lim\limits_{x \to x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}$ و مقدارش برابر شیب خط مماس بر منحنی تابع $f(x)$ در نقطه‌ی x_1 است.

مشتق تابع به ازای طول نقطه‌ی تماس برابر شیب خط مماس بر منحنی در نقطه‌ی تماس می‌باشد، یعنی: $m = \lim\limits_{B \to A} m_{AB} = f'(x_1)$

تست ۱: با توجه به شکل مقابل $f'(2)$ کدام است؟



$m = \tan 30 = \frac{\sqrt{3}}{3}$

شیب خط مماس بر f در $x=2$ که همان تانژانت زاویه‌ای است که مماس با جهت مثبت محور xها می‌سازد.

۱) $\sqrt{3}$

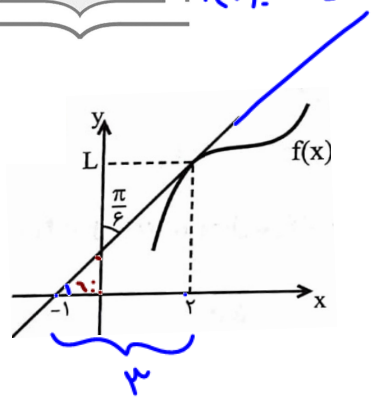
۲) ۱

۳) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ✓

۴) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

$f'(2): m=\tan 60^\circ=\sqrt{3}$ شیب خط مماس ۶۰° در $x=2$

تست ۲: با توجه به شکل مقابل، حاصل $f(۲)+f'(۲)$ کدام است؟



۱) $\frac{۱۰\sqrt{۳}}{۳}$

۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}+۳$

۳) $۳\sqrt{۳}$

۴) $۴\sqrt{۳}$ ✓

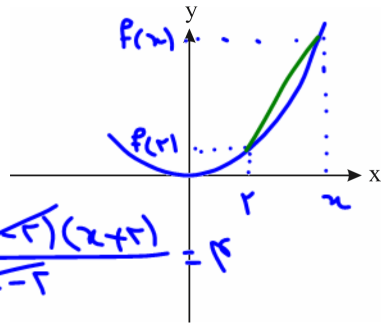
$f(2)=L$

$\tan 60^\circ=\sqrt{3}=\frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}}=\frac{L}{2-(-1)=3}$

$L=3\sqrt{3}$ $\quad \big(f(2)=L=3\sqrt{3}\big)+\big(f'(2)=\sqrt{3}\big) \to 4\sqrt{3}$

سوال ۳: شیب خط مماس بر منحنی توابع زیر را در نقاط خواسته‌شده به کمک تعریف مشتق پیدا کنید.

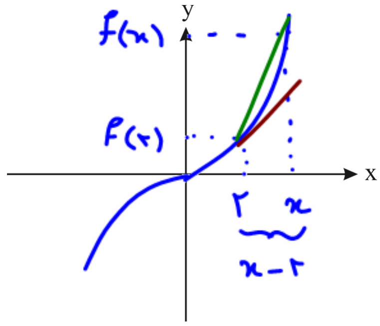
$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$



$f(x)=x^۲\;;\;x=۲$

$$f'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\frac{0}{0}\text{ مبهم}=\lim_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{x-2}}=4$$

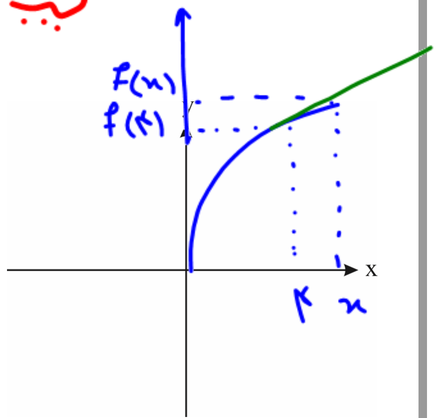
$f'(2)=4$ مشتق در یک نقطه را با تعریف مشتق یافتیم.



$f(x)=x^۳\;;\;x=۲$

$$f'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}(x^2+2x+4)}{\cancel{x-2}}=12$$: شیب مماس در $x=2$



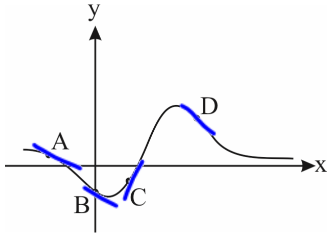
$f(x)=\sqrt{x}\;;\;x=۴$

$$f'(4)=\lim_{x\to 4}\frac{f(x)-f(4)}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{4}}{x-4}$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{(\sqrt{x}-2)}{(x-4)}\cdot\frac{(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}+2)}=\lim_{x\to 4}\frac{\cancel{x-4}}{\cancel{(x-4)}(\sqrt{x}+2)}=\frac{1}{2+2}=\frac{1}{4}$$

هرجا تابع نزولی باشد مشتق منفی و هرجا صعودی باشد مشتق مثبت است
اگر تابع مماس افقی داشته باشد مشتق صفر است .

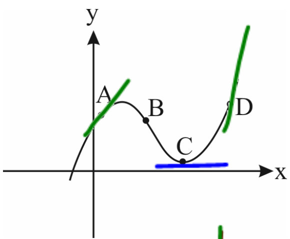
تست ۴: با توجه به نمودار روبه‌رو، در کدام‌یک از نقاط زیر مقدار تابع و مقدار مشتق، هم‌علامت هستند؟



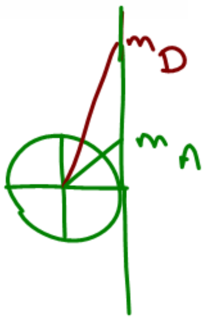
۱) A
۲) B ✓
۳) C
۴) D

x	A	B	C	D
f	+	−	−	+
f′	−	−	+	−

تست ۵: نمودار تابع مشتق‌پذیر **f** به صورت روبه‌رو است. اگر **m** شیب خط مماس در هر نقطه باشد، کدام گزینه درست است؟

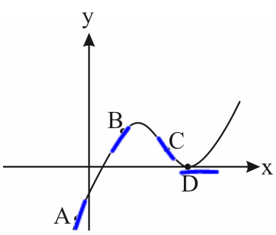


۱) $m_D > m_A > m_B > m_C$
۲) $m_A > m_D > m_B > m_C$
۳) $m_D > m_A > m_C > m_B$ ✓
۴) $m_A > m_D > m_C > m_B$



مشتق : شیب خط مماس است .

تست ۶: نمودار تابع مشتق‌پذیر **f** به صورت زیر است. در کدام نقطه از نقاط مشخص‌شده روی شکل، مشتق کم‌ترین مقدار خود را دارد؟



کمترین شیب

$m_A > 0$

$m_B > 0$

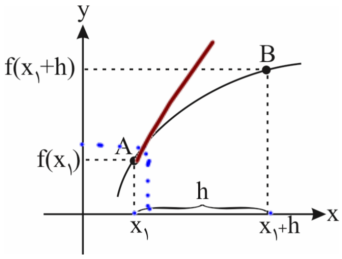
۱) A
۲) B
۳) C ✓ مقدار منفی است
۴) D

$m_D = 0$

تعریف مشتق و محاسبه‌ی حد

گفتیم مشتق تابع f در نقطه‌ی x_1 از رابطه‌ی $f'(x_1)=\lim\limits_{x\to x_1}\dfrac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}$ به دست می‌آید. این تعریف را می‌شود به شکل دیگری هم بنویسیم. اگر فرض کنیم $x-x_1=h$ داریم $x=x_1+h$ و وقتی $x\to x_1$ یعنی $h\to 0$، پس:

$$f'(x_1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h}$$



$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h}$$

با استفاده از تعریف $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ می‌توانیم <u>تابع مشتق</u> بعضی از تابع‌ها را حساب کنیم. مثلاً اگر از ما بپرسند مشتق $f(x)=x^2$ را بیابید (و نگویند در چه نقطه‌ای، یعنی به صورت کلی) باید تعریف را بنویسیم:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{x^2}+2xh+h^2-\cancel{x^2}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2xh+h^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}(2x+h)}{\cancel{h}}=\lim_{h\to 0}2x+h=2x$$

اگر می‌گفت مشتق $f(x)=x^2$ رو توی مثلاً نقطه‌ی $x=2$ حساب کنید بهتر بود از تعریف مشتق در نقطه، یعنی $\lim\limits_{x\to x_1}\dfrac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}$ استفاده می‌کردیم.

پس مشتق $f(x)=x^2$ همیشه به صورت $f'(x)=2x$ است یعنی شما هر عددی دوست داری جاگذاری کن و مشتق رو توی اون نقطه به دست بیار. مثلاً مشتق $f(x)=x^2$ در نقاط $x=1,2,3$ به ترتیب $f'(1)=2(1)=2$، $f'(2)=2(2)=4$ و $f'(3)=2(3)=6$ است.

معمولاً از تعریف دوم زمانی استفاده می‌کنیم که ضابطهٔ مشتق را بخواهیم. ولی با کمک تعریف اول، مقدار شیب خط مماس یا همان مقدار مشتق را در نقطهٔ $x=x_1$ محاسبه می‌کنیم.

تست ۷: اگر $f'(1)=2$ باشد، حاصل $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1)-f(1+h)}{3h}$ کدام است؟

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) $-\frac{2}{3}$ ۴) $-\frac{3}{2}$

$f'(1)=2$

$$\lim_{h\to 0}\frac{-1}{3}\boxed{\frac{f(1+h)-f(1)}{h}}=-\frac{1}{3}(2)=-\frac{2}{3}$$

Salamian — Specialized School of Mathematics

مغز.ی از $f'(a)$:

اگر مشتق تابع f در $x=a$ موجود باشد، آن‌گاه: $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+mh)-f(a+nh)}{kh}=\frac{m-n}{k}f'(a)$

تست ۸: حاصل کدام‌یک با بقیه فرق می‌کند؟

۱) $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(2+3h)-f(2-h)}{2h}$ $= 2f'(2)$

۲) $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{\frac{1}{2}h}$ $= 2f'(2)$

۳) $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(2-h)-f(2-5h)}{2h}$ $= 2f'(2)$

۴) $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2+5h)}{2h}$ $= -2f'(2)$ ✓

1) $a=2 \quad m=3 \quad n=-1 \quad k=2 : \frac{m-n}{k}f'(a)=\frac{3-(-1)}{2}f'(2)=2f'(2)$

2) $a=2 \quad m=1 \quad n=0 \quad k=\frac{1}{2} : \frac{m-n}{k}f'(a)=\frac{1-0}{\frac{1}{2}}f'(2)=2f'(2)$

4) $a=2 \quad m=1 \quad n=5 \quad k=2 : \frac{m-n}{k}f'(a)=\frac{1-5}{2}f'(2)=-2f'(2)$

تست ۹: اگر $f'(2)=4$، آن‌گاه حاصل $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(2)-f(2-3h)}{2h}$ کدام است؟

۱) ۶ ✓ ۲) -6 ۳) ۳ ۴) -3

$m=0 \quad n=-3 \quad k=2$

$\frac{m-n}{k}f'(2)=\frac{0-(-3)}{2}f'(2)=\frac{3}{2}f'(2)=\frac{3}{2}(4)=6$

تست ۱۰: اگر تابع f مشتق‌پذیر باشد و $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x-h)}{h}=2\sqrt{x}$، آن‌گاه $f'(4)$ کدام است؟ *(سراسری ریاضی)*

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{4}{3}$ ۳) ۴ ۴) ۲

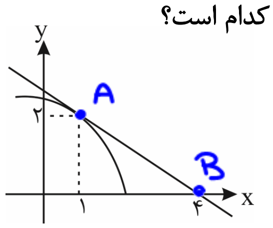
$m=1,\ n=-1,\ k=1$

$\frac{m-n}{k}f'(x)=\frac{1-(-1)}{1}f'(x)=2f'(x)=2\sqrt{x}$

$f'(x)=\sqrt{x}$

$f'(4)=\sqrt{4}=2$

تست ۱۱: در شکل مقابل، خط مماس بر منحنی f در $x=۱$ رسم شده است. حاصل $\lim_{h\to ۰}\frac{f(۱+h)-f(۱)}{h}$ کدام است؟



۱) $-\frac{۳}{۲}$ ۲) -۲

۳) $-\frac{۲}{۳}$ ✓ ۴) $-\frac{۱}{۲}$

$f'(1) = m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{0-2}{4-1} = \frac{-2}{3}$

تابع در $x=1$ نزولی‌ست و باید
شیب (مشتق) آن منفی باشد

توجه: $f(u) \xrightarrow{\text{مشتق}} u'f'(u)$

تست ۱۲: اگر $\lim_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x^۲-۴}$ برابر ۵ باشد، حاصل $\lim_{h\to ۰}\frac{f(۲+\frac{h}{۲})-f(۲-h)}{۱۰h-h^۳}$ کدام است؟

مزدوج

۱) ۲ ۲) -۱ ۳) ۳ ۴) ۴

$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x^2-4} = 5 \to \lim_{x\to 2}\boxed{\frac{1}{(x+2)}}\boxed{\frac{f(x)-f(2)}{x-2}} = 5 \to \frac{1}{4}f'(2) = 5 \to f'(2) = 20$

$\frac{1}{4} \quad f'(2)$

$y = f(u) \xrightarrow{\text{مشتق}} y' = u'f'(u)$

$\lim_{h\to 0}\frac{f(2+\frac{1}{2}h) - f(2-h)}{10h-h^3} = \frac{0}{0}$ مبهم $\xrightarrow{Hop} \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{2}f'(2+\cancel{\frac{h}{2}}) - (-1)f'(2-\cancel{h})}{10-3h^2} = \frac{\frac{1}{2}f'(2)+f'(2)}{10} = 3$

تعریف مشتق همیشه به شکل یک حد $\frac{۰}{۰}$ است پس برای رفع ابهام آن می‌توانیم از قاعده‌ی هوپیتال استفاده کنیم (به شرط آن که f مشتق‌پذیر باشد). فقط نکته‌ای که باید به آن خیلی دقت کنید، این است که هنگام هوپیتال گرفتن از صورت و مخرج کسر، نسبت به متغیری مشتق می‌گیریم که دارد به سمت صفر (یا هر چیز دیگر) میل می‌کند.

تست ۱۳: اگر تابع f در $x=۱$ مشتق‌پذیر و $\lim_{h\to ۰}\frac{f(۱-۲h)}{h+h^۲}=۴$ باشد، حاصل $f(۱)+f'(۱)$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) -۲ ✓ ۳) ۴ ۴) -۴

$\lim_{h\to 0}\frac{f(1-2h)}{h+h^2} = 4 \to \frac{f(1)}{\text{صفر}} = 4 \longrightarrow \boxed{f(1)=0}$ حتماً

الکی نمی‌تونن

چون ۰ شده جواب رفع ابهام ۴ دارا و...

(۱) f رو دربیارن:

$\frac{0}{0} \xrightarrow{Hop} \lim_{h\to 0}\frac{(0-2)f'(1-2h)}{1+2h} = \frac{-2f'(1)}{1} = -2f'(1) = 4$

$\boxed{f'(1) = -2}$

مثال ۱۴: اگر $f(۳)=۲$ باشد و f تابعی مشتق‌پذیر باشد، حاصل حد $\lim\limits_{x\to ۱}\frac{f(۳x)-۲}{۶x-۶}$ چند برابر $f'(۳)$ است؟

پاسخ: خوب می‌بینی که جواب حد $\frac{۰}{۰}$ می‌شه: $\lim\limits_{x\to ۱}\frac{f(۳)-۲}{۶-۶}=\frac{۲-۲}{۶-۶}=\frac{۰}{۰}$ مبهم

واسه رفع ابهام نسبت به x، هُپ می‌زنیم: $\Rightarrow \lim\limits_{x\to ۱}\frac{۳f'(۳x)-۰}{۶}=\frac{۳}{۶}f'(۳)=\frac{۱}{۲}f'(۳)$

راستی $(f(۳x))'=۳f'(۳x)$ است. مثل $f(x^۲)$ که داشتیم: $(f(x^۲))'=۲xf'(x^۲)$

$y=f(x^۴)\longrightarrow y'=۴x^۳f'(x^۴)$

درس ۲: روابط محاسبه‌ی مشتق

محاسبه‌ی مشتق بعضی از توابع

۱) تابع ثابت $f(x)=c$ به صورت خط افقی است که شیب آن صفر است. پس $f'(x)=۰$ می‌باشد.

$f(x)=\pi\longrightarrow y'=۰$

۲) مشتق تابع $f(x)=ax+b$ برابر a است یعنی $f'(x)=a$ که a همان شیب خط است.

مثلاً:

$f(x)=۲x+۶\ \Rightarrow\ f'(x)=۲$

$f(x)=\frac{x}{۲}\ \Rightarrow\ f'(x)=\frac{۱}{۲}$

$f(x)=x\ \Rightarrow\ f'(x)=۱$

۳) مشتق تابع $f(x)=x^m$ به صورت $f'(x)=mx^{m-۱}$ است. $m\in\mathbb{Q}$

مثلاً:

$$\begin{cases} f(x)=kx^m \\ f'(x)=k(m)x^{m-۱} \end{cases}$$

$f(x)=x^۲\longrightarrow y'=۲x$

$f(x)=x^۳\longrightarrow y'=۳x^۲$

$f(x)=\frac{۱}{x^۲}=x^{-۲}\longrightarrow y'=-۲x^{-۳}=-\frac{۲}{x^۳}$

$f(x)=\frac{۱}{x^۳}=x^{-۳}\longrightarrow y'=-۳x^{-۴}=-\frac{۳}{x^۴}$

$f(x)=\sqrt[۵]{x^۳}=x^{\frac{۳}{۵}}\longrightarrow y'=\frac{۳}{۵}x^{\frac{۳}{۵}-۱}=\frac{۳}{۵}x^{-\frac{۲}{۵}}=\frac{۳}{۵x^{\frac{۲}{۵}}}=\frac{۳}{۵\sqrt[۵]{x^۲}}$

$f(x)=\frac{۱}{\sqrt[۳]{x}}$

۴) اگر عددی پشت تابع ضرب شده باشد، عیناً پشت تابعِ مشتق نیز ضرب می‌شود. یعنی مشتقِ $kf(x)$ برابر است با $kf'(x)$.

$y=\sqrt{u}\longrightarrow y'=\frac{u'}{۲\sqrt{u}}$

$y=\sqrt{x}\longrightarrow y'=\frac{۱}{۲\sqrt{x}}$

$y=\sqrt{۲x+۳}\longrightarrow y'=\frac{۲}{۲\sqrt{۲x+۳}}$

$f(x)=۳x^۷\longrightarrow y'=۳(۷x^۶)$

$f(x)=۵\sqrt[۳]{x^۲}=۵x^{\frac{۲}{۳}}\longrightarrow y'=۵\left(\frac{۲}{۳}\right)x^{-\frac{۱}{۳}}$

$f(x)=\frac{۳}{x^۲}=۳x^{-۲}\longrightarrow y'=۳(-۲)x^{-۳}$

$f(x)=۲\sqrt{x}+۵=۲x^{\frac{۱}{۲}}+۵\longrightarrow y'=۲\left(\frac{۱}{۲}\right)x^{\frac{۱}{۲}-۱}=x^{-\frac{۱}{۲}}=\frac{۱}{\sqrt{x}}$

$f(x)=\frac{۳}{۲}\sqrt{۲x+۳}+۷=\frac{۳}{۲}(۲x+۳)^{\frac{۱}{۲}}+۷\longrightarrow y'=\frac{۳}{۲}\left(\frac{۱}{۲}\right)(۲)(۲x+۳)^{-\frac{۱}{۲}}=\frac{۳}{۲\sqrt{۲x+۳}}$

$y'=\frac{۳}{۲}\left(\frac{۲}{۲\sqrt{۲x+۳}}\right)$

۵) اگر بین تابع‌ها جمع و تفریق داشته باشیم کافیه از هر کدوم از تابع‌ها جداگانه مشتق بگیریم و علامت جمع و تفریق هم بذاریم باشه.

$f(x)=x^{۳}-x^{۲}$ $\qquad y'=۳x^{۲}-۲x$

$f(x)=۶x-x^{۲}+۷\sqrt{x}$ $\qquad y'=۶-۲x+۷\left(\frac{۱}{۲\sqrt{x}}\right)$

۶) اگر دو تابع در هم ضرب شده باشند، مشتق حاصل ضربشان از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید. (u و v توابعی برحسب x هستند.)

$$y=u\cdot v \Rightarrow y'=\underbrace{u'}_{\text{مشتق اولی}}\cdot\underbrace{v}_{\text{خود دومی}}+\underbrace{v'}_{\text{مشتق دومی}}\cdot\underbrace{u}_{\text{خود اولی}}$$

به زبان فارسی: مشتق اولی در خود دومی به علاوه‌ی مشتق دومی در خود اولی.

$f(x)=(x^{۲}-۱)(۷x^{۳}+۵x^{۲}+x^{۵})$

$y'=(۲x)(۷x^{۳}+۵x^{۲}+x^{۵})+(۲۱x^{۲}+۱۰x+۵x^{۴})(x^{۲}-۱)$

۷) اگر دو تابع به هم تقسیم شوند برای محاسبه‌ی مشتق تقسیم آن‌ها به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$y=\frac{u}{v} \Rightarrow y'=\frac{u'v-v'u}{v^{۲}}$$

u و v توابعی برحسب x هستند.

به زبان فارسی: مشتق صورت در خود مخرج منهای مشتق مخرج در خود صورت تقسیم بر مخرج به توانِ دو.

$$f(x)=\frac{u}{v} \Rightarrow f'(x)=\frac{u'v-v'u}{v^{۲}}$$

به زبان فارسی:
$$f'=\frac{(\text{مشتق صورت})\times(\text{خود مخرج})-(\text{مشتق مخرج})\times(\text{خود صورت})}{(\text{مخرج})^{۲}}$$

مثلاً:
$$f(x)=\frac{۲x^{۲}-۷x}{۳x^{۲}+۹x+۵}$$

$$f'(x)=\frac{(۲(۲x)-۷)(۳x^{۲}+۹x+۵)-(۳(۲x)+۹)(۲x^{۲}-۷x)}{(۳x^{۲}+۹x+۵)^{۲}}$$

$f(x)=\frac{۲x+۵}{۶x-۹}$ $\qquad y'=\frac{۲(۶x-۹)-۶(۲x+۵)=۲(-۹)-۶(۵)}{(۶x-۹)^{۲}}$

$f(x)=\frac{۵x-۷}{x+۱}$ $\qquad y'=\frac{۵(x+۱)-(۱)(۵x-۷)=۵(۱)-(۱)(-۷)}{(x+۱)^{۲}}$

$f(x)=\frac{x+۷}{x-۲}$ $\qquad y'=\frac{۱(x-۲)-(۱)(x+۷)=۱(-۲)-(۱)(۷)}{(x-۲)^{۲}}$

در حالت کلی مشتق تابع هموگرافیک $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ به صورت $f'(x)=\frac{ad-bc}{(cx+d)^{۲}}$ است. دستور پرتکرار

جون هر کی دوست داری فقط وقتی از این فرمول استفاده کن که صورت و مخرج با عبارتِ xدار شروع بشن یعنی این غلطه:

$$f(x)=\frac{۱-۲x}{۶x-۷} \Rightarrow f'(x)=\frac{(۱)(-۷)-(۶)(-۲)}{(۶x-۷)^{۲}} \times$$

درستش اینه:

$$f(x)=\frac{-2x+1}{6x-7} \Rightarrow f'(x)=\frac{(-2)(-7)-(6)(1)}{(6x-7)^2}$$

حالا یه چیزه باحال. یادته که مشتق $f(x)=\frac{1}{x}$ رو چطوری به دست می‌آوردیم؟

$$f(x)=\frac{1}{x}=x^{-1} \Rightarrow f'(x)=(-1)x^{-2}=\frac{-1}{x^2}$$

ولی از راه مشتق کسری هم می‌تونیم به دست بیاریمش:

$$f(x)=\frac{1}{x} \Rightarrow f'(x)=\frac{0-1}{x^2}=-\frac{1}{x^2}$$

ولی در حالت کلی یادت باشه که:

$$\boxed{f(x)=\frac{k}{x} \Rightarrow f'(x)=\frac{-k}{x^2} \quad \text{.یک عدد است } k}$$

$$f(x)=\frac{2}{x} \longrightarrow y'=-\frac{2}{x^2}$$

$$f(x)=\frac{-3}{x} \longrightarrow y'=\frac{3}{x^2}$$

اگر در تمام فرمول‌های مشتق به جای x عبارت u که عبارتی برحسب x است قرار بگیرد، در این صورت داریم:

توی u ایکس داریم

u ایکسی است

$u=x^3-3x^2$

۱) $y=u^n \Rightarrow y'=nu'u^{n-1}$

۲) $y=\frac{1}{u} \Rightarrow y'=\frac{-u'}{u^2}$

۳) $y=\sqrt{u} \Rightarrow y'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$ مشتق زیرش به دوتا رادیکالش

۴) $y=\sqrt[3]{u} \Rightarrow y'=\frac{u'}{3\sqrt[3]{u^2}}$

۵) $y=\sqrt[n]{u} \Rightarrow y'=\frac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$

۶) $y=\frac{au+b}{cu+d} \Rightarrow y'=\frac{ad-bc}{(cu+d)^2}(u')$ شبیه هموگرافیک

مثال ۱۵: مشتق توابع زیر را به‌دست آورید: پایه عبارت توان دار را u بگیر:

الف) $y=(\underbrace{x^2+3x-1}_{u})^7$

$y'=7(2x+3)(x^2+3x-1)^6$

$y'=n$ (مشتق پایه)(پایه به توان یکی کمتر)

ب) $y = ۵(x^۲ + x - ۱)^۶$

$y' = ۵(۶)(۲x+۱)(x^۲+x-۱)^۵$

پ) $y = f^۳(x) \longrightarrow y' = ۳ f'(x) f^۲(x)$

$y = u^۳ \longrightarrow y' = ۳ u' u^۲$

پایه به توان یکی کمتر × مشتق پایه × توان

ت) $y = \sqrt{۴ + ۲x}$ $\quad y' = \frac{۰+۲}{۲\sqrt{۴+۲x}}$

$y = \sqrt{u} \longrightarrow y' = \frac{u'}{۲\sqrt{u}}$

ث) $y = \sqrt{x^۲ - ۳x} \longrightarrow y' = \frac{۲x-۳}{۲\sqrt{x^۲-۳x}}$

ج) $y = \sqrt{\frac{۲x-۱}{۳x+۲}} = u \longrightarrow y' = \frac{u'}{۲\sqrt{u}} = \frac{\frac{۲(۲)-(-۱)(۳)}{(۳x+۲)^۲}}{۲\sqrt{\frac{۲x-۱}{۳x+۲}}}$

$y = \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}$

چ) $y = \sqrt{f(x)}$

$y' = \frac{f'(x)}{۲\sqrt{f(x)}}$

ح) $y = \frac{۳x^۲ + ۱}{x^۲ + ۱}$ $\quad u = x^۲ \longrightarrow y' = \left(\frac{۳(۱)-(۱)(۱)}{(x^۲+۱)^۲}\right)(۲x)$

شبیه هموگرافیک $\quad y = \frac{au+b}{cu+d} \longrightarrow y' = \left(\frac{ad-bc}{(cu+d)^۲}\right)u'$

خ) $y = \frac{۵\sqrt{x} - ۱}{۳\sqrt{x} + ۲}$ $\quad u = \sqrt{x}$

شبیه هموگرافیک $\quad y' = \left(\frac{۵(۲)-(-۱)(۳)}{(۳\sqrt{x}+۲)^۲}\right)\left(u' = \frac{۱}{۲\sqrt{x}}\right)$

تست ۱۶: مشتق تابع $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ در نقطه‌ی $x = ۱$ برابر ۳ است. اگر $f(۱) = ۰$، $f'(۱) = -۴$ و $g'(۱)$ موجود باشد، مقدار $g(۱)$ کدام است؟ *(سراسری تجربی)*

۱) $-\frac{۴}{۳}$ ۲) $-\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{۴}{۳}$

مشتق کسر $\quad y' = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g^۲(x)}$

$y'_{(x=۱)} = \frac{f'(۱)g(۱) - \cancel{g'(۱)f(۱)}}{g^۲(۱)} = ۳$ (صفر) $\rightsquigarrow \frac{(-۴)g(۱)}{g^۲(۱)} = ۳ \longrightarrow \frac{-۴}{g(۱)} = ۳ \quad g(۱) = \frac{-۴}{۳}$

تست ۱۷: مقدار مشتق تابع $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x-1}}$ در $x=5$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۱۶}$ ۲) $\frac{۳}{۳۲}$ ۳) $\frac{۵}{۱۶}$ ۴) $\frac{۵}{۳۲}$

مشتق کسر

$$y'=\frac{(1)(\sqrt{x-1})-(\frac{1}{2\sqrt{x-1}})x}{(\sqrt{x-1})^2=(x-1)} \longrightarrow y'_{(x=5)}=\frac{2-\frac{5}{4}=\frac{3}{4}}{5-1=4}=\frac{3}{16}$$

تست ۱۸: مشتق $f(x)=\frac{1}{1+\frac{1}{x}}$ به چه صورت است؟

۱) $\frac{1}{1-\frac{1}{x}}$ ۲) $\frac{1}{1-\frac{1}{x^2}}$ ۳) $\frac{1}{-\frac{1}{x^2}}$ ۴) $\frac{1}{(x+1)^2}$

ساده کن

$$y=\frac{1}{1+\frac{1}{x}=\frac{x+1}{x}}=\frac{x}{x+1} \qquad y'=\frac{(1)(1)-0}{(x+1)^2}=\frac{1}{(x+1)^2}$$

تست ۱۹: مشتق تابع $f(x)=x\sqrt[3]{\frac{3x+1}{x+2}}$ در نقطهٔ $x=-3$، کدام است؟ (تجربی خارج از کشور ۹۸)

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۴}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

$$\begin{cases} y=u.v \\ y'=u'v+v'u \end{cases} \qquad y=\sqrt[3]{u},\quad y'=\frac{u'}{3\sqrt[3]{u^2}}$$

$$y'=(1)\sqrt[3]{\frac{3x+1}{x+2}}+\frac{\frac{3(2)-(1)(1)}{(x+2)^2}}{3\sqrt[3]{\left(\frac{3x+1}{x+2}\right)^2}}\,x \xrightarrow{x=-3} 2+\frac{5}{12}(-3)=2-\frac{5}{4}=\frac{3}{4}$$

تست ۲۰: مشتق عبارت $(\frac{16}{x}-\sqrt[3]{x^2})^2$ به ازای $x=-8$ کدام است؟ (سراسری ۸۸)

۱) ۲ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) ۱ ۴) -۱

$$y=u^n \longrightarrow y'=nu'u^{n-1}$$

$$y=\left(\frac{16}{x}-x^{\frac{2}{3}}\right)^2 \longrightarrow y'=2\left(-\frac{16}{x^2}-\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}\right)\left(\frac{16}{x}-\sqrt[3]{x^2}\right)$$

$$y'_{(x=-8)}=2\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}=\frac{-3+4}{12}=\frac{1}{12}\right)(-2-4)=-1$$

$y = u^n$

$y' = n u' u^{n-1}$

تست ۲۱: مقدار مشتق تابع با ضابطهٔ $f(x) = \sqrt[3]{(\frac{2x - x^2}{3x + 5})^2}$ در نقطهٔ $x = -2$، کدام است؟ *(سراسری تجربی خارج از کشور ۹۹)*

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

$$y = \left(\frac{2x - x^2}{3x+5}\right)^{\frac{2}{3}} \rightsquigarrow y' = \frac{2}{3}\left(\frac{(2-2x)(3x+5) - 3(2x - x^2)}{(3x+5)^2}\right)\left(\frac{2x - x^2}{3x+5}\right)^{-\frac{1}{3}}$$

$$y'\Big|_{x=-2} = \frac{2}{3}\left(\frac{\overset{18}{\cancel{6(-1) - 3(-8)}}}{1}\right)\left(\frac{-4-4}{-1} = 8\right)^{-\frac{1}{3}} = 12\left(\frac{1}{2}\right) = 6$$

$y = u^n \to y' = n u' u^{n-1}$

تست ۲۲: مشتق تابع با ضابطهٔ $f(x) = (\frac{\sqrt[3]{x^2 + 2x}}{x^2 - x})^3$، در نقطهٔ $x = 2$، کدام است؟ *(سراسری تجربی ۹۹)*

$y = \sqrt[3]{u} \to y' = \frac{u'}{3\sqrt[3]{u^2}}$

۱) $-\frac{3}{4}$ ۲) $-\frac{5}{4}$ ۳) $-\frac{5}{2}$ ۴) $-\frac{15}{4}$

$$y' = 3\left(\frac{\frac{2x+2}{3\sqrt[3]{(x^2+2x)^2}}(x^2 - x) - (2x-1)\sqrt[3]{x^2+2x}}{(x^2-x)^2}\right)\left(\frac{\sqrt[3]{x^2+2x}}{x^2-x}\right)^2$$

$$y' = 3\left(\frac{\overset{1-6=-5}{\cancel{1}} - 3(2)}{4}\right)\left(\frac{2}{2} = 1\right)^2 = -\frac{15}{4}$$

تست ۲۳: فرض کنید $f(x) = \cos^3(2x) + ax^2 + b$، $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{x} = 0$ و $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{f'(x)}{x} = 2$. مقدار $a + b$ کدام است؟

سال سابان در رشته ریاضی

(سراسری ریاضی ۱۴۰۰)

۱) ۸ ۲) ۶ ۳) ۴ ۴) -8

پاسخ: گزینهٔ «۲» ـ چون $x \to 0$، پس حق داریم از هم‌ارزی $\cos^n(u) \sim 1 - \frac{nu^2}{2}$ استفاده کنیم. ابتدا هم‌ارز تابع f را در $x = 0$ می‌نویسیم:

$$f(x) = \cos^3(2x) + ax^2 + b \sim (1 - \frac{3(2x)^2}{2}) + ax^2 + b = 1 - 6x^2 + ax^2 + b = (a - 6)x^2 + b + 1$$

ضابطهٔ f' را هم حساب می‌کنیم:

$$f'(x) = 2(a - 6)x$$

حالا از دو حد داده‌شده، کمک می‌گیریم:

$$1)\ \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{x} = 0 \Rightarrow \lim_{x \to 0^+} \frac{(a-6)x^2 + (b+1)}{x} = 0 \Rightarrow b + 1 = 0 \Rightarrow b = -1$$

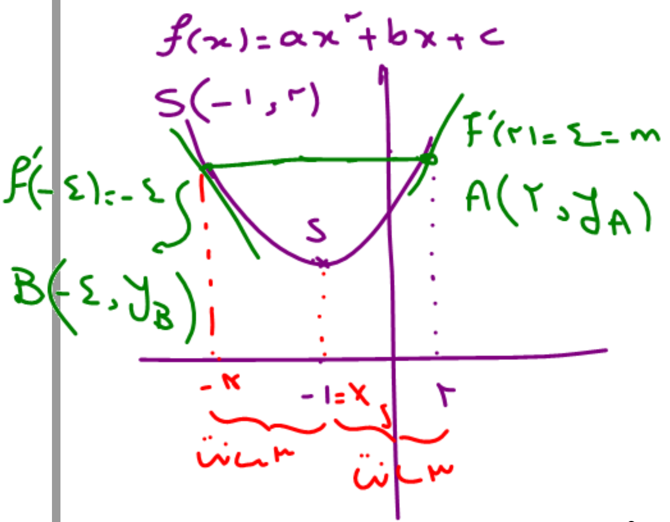
اگر $b + 1$ صفر نمی‌شد، حاصل حد، بی‌نهایت می‌شد.

$$۲)\ \lim_{x\to ۰^-}\frac{f'(x)}{x}=۲ \Rightarrow \lim_{x\to ۰^-}\frac{۲(a-۶)\cancel{x}}{\cancel{x}}=۲ \Rightarrow ۲(a-۶)=۲ \Rightarrow a=۷$$

پس: $a+b=۷+(-۱)=۶$

تست ۲۴: اگر f تابعی درجه دوم و مختصات رأس آن $S(-۱,۲)$ و $f'(۲)=۴$ باشد، آن‌گاه $f'(-۴)$ کدام است؟

۱) -۴ ✓ ۲) -۲ ۳) ۴ ۴) -۱



نکته: در هر سهمی ۲ نقطه متقارن نسبت به محور تقارن $x_S=\frac{-b}{2a}$ هم عرضند هم شیب قرینه دارند.

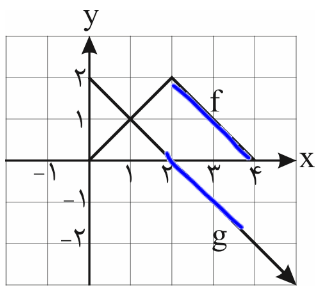
تست ۲۵: نمودار دو تابع f و g در زیر رسم شده است. حاصل $(f.g)'(۳)$ کدام است؟

۱) صفر ✓

۲) ۱

۳) ۲

۴) -۲



$\underbrace{y=u.v \quad y'=u'v+v'u}_{\text{مشتق ضرب}}$

$f'(۳)g(۳)+g'(۳)f(۳)$

$\underbrace{(-۱)(-۱)}+\underbrace{(-۱)(۱)}$

$(۱)+(-۱)=$ صفر

منظور از مشتق یک خط شیب آن خط است.

خط f و g در x=۳ موازی و هم شیب هستند

$f'(۳)=g'(۳)$

اگر u، عبارتی برحسب x باشد آن‌گاه مشتق $f(u)$ به شکل روبه‌رو محاسبه می‌شود: $\quad y=f(u) \Rightarrow y'=u'f'(u)$

مشتق تابع مرکب:

به مثال‌های زیر دقت کنید:

توی u ایکس داریم
u یکی هست
مثل $u=x^3-4x^2$

$y=f(\frac{x}{2}) \quad\quad y'=\frac{1}{2}f'(\frac{x}{2})$

$y=f(x^2) \quad\quad y'=2xf'(x^2)$

$y=f(\sqrt{x}) \quad\quad y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}f'(\sqrt{x})$

$y=f(x^3+5x) \longrightarrow y'=(3x^2+5)f'(x^3+5x)$

می‌توان ثابت کرد که مشتق تابع $f(x)=u^n$ که در آن u عبارتی برحسب x است (یعنی u تو دلش x داره) به صورت زیر حساب می‌شود:

$$f(x)=u^n \Rightarrow f'(x)=nu'u^{n-1}$$

مثلاً:

$$f(x)=(x^2-3x)^7 \Rightarrow f'(x)=\underset{\uparrow \atop n}{7}\underbrace{(2x-3)}_{u'}\underbrace{(x^2-3x)^6}_{u^{n-1}}$$

$$f(x)=(2x-3)^6 \Rightarrow f'(x)=6(2)(2x-3)^5$$

$y=\frac{ax+b}{cx+d} \quad y'=\frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$

$y=\sqrt{u} \longrightarrow y'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$

$y=u^n$

$y'=nu'u^{n-1}$

تست ۲۶: در تابع با ضابطهٔ $f(x)=(\sqrt{\frac{x+2}{2x-3}})^3$، حاصل $\boxed{\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}}$ کدام است؟ (سراسری ۹۵)

$f'(2)$

۱) ۲۱-   ۲) ۱۸-   ۳) ۱۲   ۴) ۱۵

$$y'=3\left(\frac{\frac{-3-4}{(2x-3)^2}}{2\sqrt{\frac{x+2}{2x-3}}}\right)\left(\cancel{\sqrt{\frac{x+2}{2x-3}}}\right)^{\cancel{3}\,2} \xrightarrow{x=2} 3\left(\frac{-7}{4}\right)(4)=-21$$

تست ۲۷: در تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{1+\sqrt{x}}{5-2x}$، حاصل $\boxed{\lim\limits_{x\to 4}\frac{f(x)-f(4)}{x-4}}$ کدام است؟ (سراسری تجربی ۹۸)

$f'(4)$

۱) $\frac{4}{9}$ ۲) $\frac{5}{12}$ ۳) $\frac{7}{12}$ ۴) $\frac{5}{6}$

$$f'(x)=\frac{(\frac{1}{2\sqrt{x}})(5-2x)-(-2)(1+\sqrt{x})}{(5-2x)^2} \xrightarrow{x=4} \frac{(\frac{1}{4})(-3)+6=\frac{21}{4}}{9}$$

$$=\frac{21}{4(9)}=\frac{7}{4(3)}=\frac{7}{12}$$

$y=\sqrt{u} \longrightarrow y'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$

$y=\frac{ax+b}{cx+d} \longrightarrow y'=\frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$

تست ۲۸: در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\sqrt{\frac{4x+5}{x+3}}$، حاصل $\boxed{\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}}$ کدام است؟ (سراسری خارج ۹۵)

$f'(1)$

۱) $\frac{7}{48}$ ۲) $\frac{5}{24}$ ۳) $\frac{7}{24}$ ۴) $\frac{7}{16}$

$$y'=\frac{\frac{4(3)-5(1)}{(x+3)^2}}{2\sqrt{\frac{4x+5}{x+3}}}\ \underset{x=1}{=}\ \frac{\frac{7}{16}}{2\sqrt{\frac{9}{4}}=2\left(\frac{3}{2}\right)=3}=\frac{7}{3(16)}=\frac{7}{48}$$

تست ۲۹: در تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{-x-1}{\sqrt{x}}$، حاصل $\boxed{\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(\frac{1}{4}+h)-f(\frac{1}{4})}{h}}$، کدام است؟ (تجربی خارج از کشور ۹۸)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

$f'(\frac{1}{4})$

$$f'(x)=\frac{(-1)\sqrt{x}-\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)(-x-1)}{(\sqrt{x})^2=x}\ \underset{x=\frac{1}{4}}{=}\ \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{1}{4}-1=-\frac{5}{4}\right)}{\frac{1}{4}}$$

$$\frac{-\frac{1}{2}+\frac{5}{4}=\frac{5}{4}-\frac{2}{4}=\frac{3}{4}}{\frac{1}{4}}=3$$

ساده‌سازی و سپس مشتق‌گیری (ساده سپس)

اگر تابعی قابل ساده‌شدن باشد، می‌توانیم ابتدا آن را ساده کرده سپس از تابع ساده‌شده مشتق بگیریم.

$u=\sqrt{u}\,\sqrt{u}\quad u>0$

$u=\sqrt[3]{u}\,\sqrt[3]{u^2}=\sqrt[3]{u^3}$

تست ۳۰: مشتق تابع $y=\frac{\sqrt[3]{x^2}+1}{x+\sqrt[3]{x}}$ به ازای $x=1$ کدام است؟

$\sqrt[3]{x}\,\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}$

۱) $-\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{1}{9}$ ۴) $-\frac{1}{9}$

$$y=\frac{\cancel{\sqrt[3]{x^2}+1}}{\sqrt[3]{x}\left(\cancel{\sqrt[3]{x^2}+1}\right)}=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}=x^{-\frac{1}{3}}$$

$$y'=-\frac{1}{3}x^{-\frac{1}{3}-1=-\frac{4}{3}}\ \underset{x=1}{=}\ -\frac{1}{3}$$

ساده، سپس

شعار ماست

دانشا اشتباه ماست!

$\sqrt{x}+\sqrt{x(x-2)}=\sqrt{x}\sqrt{x-2}$

تست ۳۱: مشتق تابع $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{x^2-2x}}{1+\sqrt{x-2}}$ در $x=4$ کدام است؟

۱) -1 ۲) صفر   ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) 2

پاسخ: کافی است در صورت کسر از $\sqrt{x}$ فاکتورگیری کنیم:

$$f(x)=\frac{\sqrt{x}\,(\cancel{1+\sqrt{x-2}})}{\cancel{1+\sqrt{x-2}}}=\sqrt{x}$$

حالا از $f(x)=\sqrt{x}$ مشتق می‌گیریم:

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}\Rightarrow f'(4)=\frac{1}{2\sqrt{4}}=\frac{1}{4}$$

$\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{x^2}$ $\sqrt[3]{x^2(1-x)}$

تست ۳۲: مشتق تابع $f(x)=\dfrac{x+\sqrt[3]{x^2-x^3}}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{1-x}}$ کدام است؟

۱) $\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ ۲) $\frac{2x}{3\sqrt[3]{x^2}}$ ۳) $\frac{2}{3\sqrt[3]{x^2}}$ ۴) $\frac{2x}{3\sqrt[3]{x}}$

پاسخ: کافی است در صورت کسر از $\sqrt[3]{x^2}$ فاکتورگیری کنیم (یعنی به $\sqrt[3]{x^2}$ تقسیم کنیم):

$$y=\frac{\sqrt[3]{x^2}\,(\cancel{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{1-x}})}{\cancel{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{1-x}}}=\sqrt[3]{x^2}=x^{\frac{2}{3}}$$

حالا از ضابطهٔ ساده‌شده مشتق‌گیری می‌کنیم:

$$y'=\frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1}=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}=\frac{2}{3x^{\frac{1}{3}}}=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

بشکن به یه توان یک و به توان ۲

تست ۳۳: مشتق تابع $y=(\sqrt{x+4}-\sqrt{x+1})^3(\sqrt{x+4}+\sqrt{x+1})^2$ در $x=0$ کدام است؟

۱) $\frac{9}{4}$ ۲) $\frac{27}{4}$ ۳) $-\frac{27}{4}$ ۴) $-\frac{9}{4}$

$$y=(\sqrt{x+4}-\sqrt{x+1})\underbrace{(\sqrt{x+4}-\sqrt{x+1})^2(\sqrt{x+4}+\sqrt{x+1})^2}_{\text{پایه‌ها مزدوج}}$$

یکی از توان ۲ها را بنویس / پایه‌ها که مزدوج جداگانه ضرب کن.

$$y=(\sqrt{x+4}-\sqrt{x+1})(x+4-x-1=3)^2$$

$$y=9(\sqrt{x+4}-\sqrt{x+1})\rightsquigarrow y'=9\left(\frac{1}{2\sqrt{x+4}}-\frac{1}{2\sqrt{x+1}}\right)\overset{x=0}{=\!=}9\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}\right)=-\frac{9}{4}$$

تست ۳۴: اگر $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}}{x+2}$ و $g(x)=\dfrac{x^2+4x+4}{(x+1)\sqrt{x+1}}$ باشند، حاصل $f'(x)g(x)+g'(x)f(x)$ به ازای $x=1$ کدام است؟

۱) $-\frac{1}{4}$ ✓   ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ ۴) $-\frac{1}{2\sqrt{2}}$

همون مشتق تابع $y=f(x).g(x)$ است.
پس ابتدا $y=f.g$ را می‌سازیم.

$$y=f(x).g(x)=\frac{\cancel{\sqrt{x+1}}}{\cancel{(x+2)}}\cdot\frac{(x+2)^2}{(x+1)\cancel{\sqrt{x+1}}}=\frac{x+2}{x+1}$$

به هموگرافیک:

$$y'=f'g+g'f=\frac{(1)(1)-2(1)=-1}{(x+1)^2}\xrightarrow{x=1}-\frac{1}{4}$$

تست ۳۵: اگر $f(x)=\dfrac{x^{3}+x^{2}+1}{x+1}$ و $g(x)=\dfrac{x+2}{x+1}$ باشد، حاصل $f'(x)-g'(x)$ برابر است با: $(x\neq -1)$

اول $y=f-g$ را باز سپس مشتق بگیر:

۱) $-2x$ ۲) $\dfrac{2x^{2}}{x+1}$ ۳) $\dfrac{x^{2}+1}{x+1}$ ۴) $2x$

$$y=f(x)-g(x)=\frac{x^{3}+x^{2}+1-x-2}{x+1}=\frac{(x^{3}+x^{2})-x-1}{x+1}=\frac{x^{2}(x+1)-(x+1)}{x+1}$$

$$y=f(x)-g(x)=\frac{(x+1)(x^{2}-1)}{x+1}=x^{2}-1 \rightsquigarrow y'=f'(x)-g'(x)=2x$$

گ ۴

تست ۳۶: اگر $f(x)=(\sqrt{1+x^{2}}-x)^{5}$ و $g(x)=\dfrac{1}{(\sqrt{1+x^{2}}+x)^{5}}$، مقدار $f'(x)g(x)-f(x)g'(x)$ کدام است؟

منفی یا تقسیم ابرو میندازه:

۱) -1 ۲) صفر ✓ ۳) ۱ ۴) ۲

$$y=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{(\sqrt{1+x^{2}}-x)^{5}}{\frac{1}{(\sqrt{1+x^{2}}+x)^{5}}}=(1+x^{2}-x^{2}=1)^{5}=1$$

$$y=\frac{f(x)}{g(x)}=1 \xrightarrow[\text{دو طرف}]{\text{مشتق از}} y'=\frac{f'g-g'f}{g^{2}}=0 \xrightarrow[\text{صورتش صفره}]{\text{کسری که صفره}} f'g-fg'=0$$

تست ۳۷: اگر $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{x+\sin x}$ و $g(x)=\dfrac{x^{2}+\sin^{2}x+2x\sin x}{x+1}$، آن‌گاه $2ff'g+g'f^{2}$ به ازای $x=1$ کدام است؟

$(x+\sin x)^{2}$

$y=u^{2}\longrightarrow y'=2u'u$

$y=f^{2}\longrightarrow y'=2f'f$

$y=f^{2}\cdot g$ را باز

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $-\frac{1}{4}$ ۴) ۱

پاسخ: اگر توجه کنید $2ff'g+g'f^{2}$ همان مشتق $g\cdot f^{2}$ است، پس:

$$y=(f^{2}\cdot g)'=((\frac{\sqrt{x}}{x+\sin x})^{2}\cdot\frac{(x+\sin x)^{2}}{x+1})'=(\frac{x}{(x+\sin x)^{2}}\cdot\frac{(x+\sin x)^{2}}{x+1})'=(\frac{x}{x+1})'=\frac{1}{(x+1)^{2}}\overset{x=1}{=}\frac{1}{4}$$

تست ۳۸: اگر $f(x)=\dfrac{x^{2}+x+1}{x+1}$ باشد، مشتق تابع $g(x)=2xf(x)+(x^{2}-1)f'(x)$ در $x=4$ کدام است؟ (قلم‌چی ریاضی ۹۹)

خود g مشتق $y=(x^{2}-1)f(x)$ است.

۱) ۱۲ ۲) ۱۸ ۳) ۲۴ ۴) ۴۸

پاسخ: گزینهٔ «۳»

$$g(x)=((x^{2}-1)f(x))'$$

$$(x^{2}-1)f(x)=(x^{2}-1)(\frac{x^{2}+x+1}{x+1})=(x-1)(x^{2}+x+1)=x^{3}-1$$

$$\Rightarrow g(x)=(x^{3}-1)'=3x^{2}\Rightarrow g'(x)=6x\Rightarrow g'(4)=24$$

if $f(x)=(x-a)g(x) \longrightarrow f'(a)=?$

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\cancel{(x-a)}g(x)-0}{\cancel{x-a}}=\lim_{x\to a}g(x)$$

بررسی مشتق در نقطه‌ی $x=a$ در توابعی که به ازای نقطه‌ی $x=a$، عاملِ صفرکننده دارند

در توابع به صورت $f(x)=g(x)\times h(x)$ در صورتی که $g(a)=۰$ باشد، برای محاسبه‌ی $f'(a)$ کافیست فقط از تابع $g(x)$ مشتق گرفته و آن را در $h(x)$ ضرب کنیم. در واقع برای محاسبه‌ی $f'(a)$ باید از عامل صفرشونده مشتق گرفته و آن را در بقیه عوامل ضرب کنیم.

مثال ۳۹:

مشتق یک تابع در ریشه خود برابر است با:
مشتق عبارت ریشه دار در بقیه تابع به ازای ریشه

ریشه

$y=(x^۲-۲x)(x+۱)^۳(۲x-۵)^۷ \qquad y'(۲)=?$

$$y'_{x=۲}=(۲x-۲)(۲+۱=۳)^۳(۲(۲)-۵=-۱)^۷=-۵۴$$

$y=(x-۱)(x-۲)\ldots(x-۸) \qquad y'(۲)=?$

$$y'_{x=۲}=(x-۲)'(۲-۱)(۲-۳)(۲-۴)(۲-۵)(۲-۶)(۲-۷)(۲-۸)$$

بقیه

$$(۱)(-۱)(-۲)(-۳)(-۴)(-۵)(-۶)=۶!$$

تست ۴۰: مشتق تابع $f(x)=\frac{(x-۱)\sqrt[۵]{۳x-۲}}{(۵x-۳)^۴}$ در نقطه‌ی $x=۱$ کدام است؟ *(سراسری ریاضی)*

۱) $\frac{۱}{۱۶}$ ۲) $\frac{۱}{۸}$ ۳) $\frac{۳}{۴۰}$ ۴) $\frac{۵}{۱۶}$

$$f'(۱)=\frac{(x-۱)'\sqrt[۵]{۳(۱)-۲=۱}}{(۵-۳=۲)^۴}=\frac{۱}{۱۶}$$

تست ۴۱: اگر $f(x)=(x^۲-x-۲)\sqrt[۳]{x^۲-۷x}$ باشد، حاصل $\lim\limits_{h\to۰}\frac{f(-۱+h)-f(-۱)}{h}$ کدام است؟ *(سراسری ریاضی ۹۲)*

۱) -۶ ✓ ۲) -۳ ۳) $-\frac{۳}{۲}$ ۴) $-\frac{۳}{۴}$

$f'(-۱)=?$

ریشه

$$f'(-۱)=(x^۲-x-۲)'\sqrt[۳]{(-۱)^۲-۷(-۱)}=(۲x-۱)\,۲=-۶$$

تست ۴۲: اگر $f(x)=\frac{(x+1)h(x)}{(2x+1)h(2x+1)}$ باشد، $f'(-1)$ کدام است؟ $(h(-1)\neq 0)$ *(سراسری تجربی)*

۱) ۲- ۲) ۱- ۳) ۱ ۴) ۲

$$f'(-1)=\frac{\boxed{(x+1)'}\,\cancel{h(-1)}}{(2(-1)+1=-1)\,\cancel{h(2(-1)+1=-1)}}=-1$$

تست ۴۳: مشتق تابع $f(x)=\frac{10x}{\sqrt{5+x}+\sqrt{5-x}}$ در $x=0$ کدام است؟ *(قلم‌چی ریاضی ۹۹)*

۱) $\sqrt{10}$ ۲) $\frac{\sqrt5}{2}$ ۳) ۵ ۴) $\sqrt5$

پاسخ: گزینهٔ «۴» ـ ابتدا ضابطهٔ تابع را ساده‌تر می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{10x}{\sqrt{5+x}+\sqrt{5-x}}\left(\frac{\sqrt{5+x}-\sqrt{5-x}}{\sqrt{5+x}-\sqrt{5-x}}\right)=\frac{10x(\sqrt{5+x}-\sqrt{5-x})}{2x}\Rightarrow f(x)=5(\sqrt{5+x}-\sqrt{5-x})$$

$$\Rightarrow f'(x)=5\left(\frac{1}{2\sqrt{5+x}}+\frac{1}{2\sqrt{5-x}}\right)\Rightarrow f'(0)=5\left(\frac{1}{2\sqrt5}+\frac{1}{2\sqrt5}\right)=\frac{5}{\sqrt5}=\sqrt5$$

روش دوم: اگر $u(x_0)=0$ و $v(x_0)\neq u(x_0)$ باشد، با فرض مشتق‌پذیری تابع u در $x=x_0$، برای مشتق تابع $h=u.v$ در $x=x_0$ می‌توانیم بنویسیم: $h'(x_0)=u'(x_0).v(x_0)$

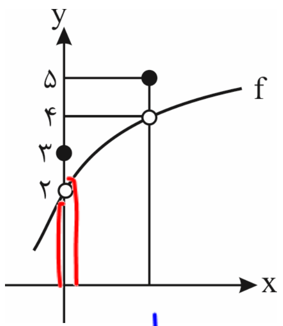
یعنی کافی است از عامل صفرکننده، مشتق بگیریم. با توجه به این نکته داریم:

$$f'(0)=\frac{10}{\sqrt{5+0}+\sqrt{5-0}}=\frac{10}{2\sqrt5}=\sqrt5$$

$$\frac{5}{\sqrt5}\cdot\frac{\sqrt5}{\sqrt5}=\frac{5\sqrt5}{5}=\sqrt5$$

تست ۴۴: با توجه به نمودار تابع f در شکل روبه‌رو، اگر $g(x)=(x^2-1)f(x-1)$ باشد، حاصل $g'(1)$ کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۸ ۳) ۶ ۴) ۴



لب صفر

$0^-, 0^+$

$$g'(1)=(x^2-1)'\underbrace{\lim_{x\to1} f(x-1)}_{2}$$

$$g'(1)=2(x=1)\;2=4$$

بصفر

$$\lim_{x\to1} f(x-1)\neq f(0)$$ در این تابع

$$\lim_{x\to0} f(x)=2\neq f(0)=3$$

مشتق تابع مرکب

اگر تابع g در x و تابع f در $g(x)$ مشتق‌پذیر باشند، آن‌گاه تابع fog در x مشتق دارد و داریم:

$$y=f(g(x)) \Rightarrow y'=g'(x)f'(g(x))$$

و به طور مشابه برای gof داریم:

$$y=g(f(x)) \Rightarrow y'=f'(x)g'(f(x))$$

که در این حالت باید، تابع f در x و تابع g در $f(x)$ مشتق‌پذیر باشد.

مثال ۴۵ : اگر $f(x)=x^{۲}+x$ و $g(x)=\sqrt{x+۲}$، مشتق تابع $y=(fog)(x)$ را نقطهٔ $x=۷$ حساب کنید.

پاسخ:

$$y=f(g(x)) \Rightarrow y'=g'(x)f'(g(x))$$

الان باید مشتق f و g را پیدا کنیم و در ضابطهٔ $f'(x)$ به جای xها، $g(۷)$ها را قرار دهیم، ببینید:

$$y'=g'(x)f'(g(x)) \overset{x=۷}{=\!=} g'(۷)f'(g(۷))$$

$$\begin{cases} g(x)=\sqrt{x+۲} \Rightarrow g'(x)=\dfrac{۱}{۲\sqrt{x+۲}} \xrightarrow{x=۷} g'(۷)=\dfrac{۱}{۲\sqrt{۹}}=\dfrac{۱}{۶} \\ \begin{cases} g(۷)=\sqrt{۷+۲}=\sqrt{۹}=۳ \\ f'(x)=۲x+۱ \end{cases} \Rightarrow f'(g(۷))=f'(۳)=۲(۳)+۱=۷ \end{cases}$$

پس:

$$y'=g'(۷)f'(g(۷))=\frac{۱}{۶}\times ۷=\frac{۷}{۶}$$

تست ۴۶: اگر $\underbrace{\lim\limits_{x\to ۲}\dfrac{g(x)-g(۲)}{x-۲}=\dfrac{۳}{۲}}_{g'(۲)=\frac{۳}{۲}}$ و $f(x)=\sqrt{۵-x^{۲}}$ باشند، آن‌گاه $(gof)'(۱)$ کدام است؟ *(سراسری ریاضی خارج از کشور)*

۱) $-\frac{۳}{۴}$ ✓ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

$$y=g(f(x)) \rightsquigarrow y'=f'(x)g'(f(x)) \overset{x=1}{=\!=} \underbrace{f'(1)}_{-\frac{1}{2}}\,g'(f(1)=\sqrt{5-x^2}=2)$$

$$f'(x)=\frac{-2x}{2\sqrt{5-x^2}}=\frac{-x}{\sqrt{5-x^2}} \overset{x=1}{=\!=} -\frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)=-\frac{3}{4}$$

f′ هر چی بدیم دستش بگه عکسش!

تست ۴۷: اگر $f'(x)=\frac{۱}{x}$، مشتق تابع $f(x+\sqrt{۱+x^{۲}})$ کدام است؟ *(سراسری ریاضی خارج از کشور)*

۱) $-x+\sqrt{۱+x^{۲}}$ ۲) $x-\sqrt{۱+x^{۲}}$ ۳) $\frac{۱}{\sqrt{۱+x^{۲}}}$ ✓ ۴) $\sqrt{۱+x^{۲}}$

$$y=f(\overset{u}{x+\sqrt{1+x^2}})$$

$$y'=\left(1+\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{1+x^2}}\right)f'(x+\sqrt{1+x^2})=\left(\frac{\cancel{\sqrt{1+x^2}+x}}{\sqrt{1+x^2}}\right)\frac{1}{\cancel{x+\sqrt{1+x^2}}}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$y'=\underbrace{\quad}_{u'}\ f'(u)$$

تست ۴۸: اگر $g(x)=\frac{2x+1}{x-1}$ و $(fog)'(2)=6$ باشد، $f'(5)$ کدام است؟ (سراسری تجربی ۹۸)

همگرایی

۱) ۲- ۲) ۱- ۳) ۲ ۴) ۳

$y=f(g(x)) \rightsquigarrow y'=g'(x)f'(g(x))$

$g'(x)=\frac{-2-1}{(x-1)^2}$

$y'_{(x=2)}=g'(2)f'(g(2)=5)$

$g'(2)=-3$

$6=(-3)f'(5)$

$-2=f'(5)$

تست ۴۹: اگر $f(x)=\frac{x^3-2}{1+x^3}$ و $g(x)=\sqrt[3]{x-1}$ باشد، حاصل $f'(g(x))g'(x)$ کدام است؟ (ریاضی ۹۲)

۱) $\frac{3}{x}$ ۲) $\frac{3}{x^2}$ ۳) $\frac{1}{3x}$ ۴) $\frac{x-3}{x^2}$

مشتق تابع $y=f(g(x))$ است:

لذا $f\circ g$ را می‌سازیم و سپس مشتق می‌گیریم

همگرایی

$y=f(g(x))=\frac{g^3-2}{1+g^3}=\frac{(x-1)-2}{1+(x-1)}=\frac{x-3}{x} \rightsquigarrow y'=\frac{3}{x^2}$

تست ۵۰: اگر تابع f در $x=4$ مشتق‌پذیر و $\lim\limits_{x\to 4}\frac{f(x)+7}{x-4}=\frac{-3}{2}$ آن‌گاه مشتق $\frac{f(2x)}{x}$ در $x=2$ کدام است؟ (سراسری ریاضی ۹۶)

۱) $-\frac{1}{4}$ ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{1}{2}$

با به صفر باشه که ÷ بشه

$\lim\limits_{x\to 4}\frac{f(x)+7}{\underbrace{x-4}_{\text{صفر بشه}}}=-\frac{3}{2} \xrightarrow{\text{۲ نتیجه مهم}} \begin{cases} f(4)=-7 \\ f'(4)=-\frac{3}{2} \end{cases}$

$2(-\frac{3}{2})(2)-(-7)$

$y=\frac{f(2x)}{x} \to y'=\frac{(2f'(2x))(x)-(1)f(2x)}{x^2} \xrightarrow{x=2} \frac{2f'(4)(2)-f(4)}{4}=\frac{1}{4}$

مشتق توابع شامل قدرمطلق

برای محاسبه‌ی مشتق و یا مشتق راست و یا مشتق چپ این نوع از توابع در نقطه‌ی دلخواه $x=a$ ابتدا باید عبارت داخل قدرمطلق را در همسایگی آن نقطه تعیین علامت کنیم. حالا اگه توش به ازای اون نقطه مثبت بشه، خودش میاد بیرون و اگه توش به ازای اون نقطه منفی بشه قرینه‌اش میاد بیرون و حالا وقت مشتق‌گیریه. مثلاً مشتق تابع $f(x)=|2x^3-5x|$ به ازای $x=1$ این‌طوری به دست میاد: در

همسایگی نقطه‌ی $x=1$ توی قدرمطلق منفی می‌شه پس قرینه‌اش میاد بیرون: $f(x)=5x-2x^3$

حالا مشتق می‌گیریم و توی مشتق، $x=1$ رو جاگذاری می‌کنیم:

$$f'(x)=5-6x^2 \Rightarrow f'(1)=5-6=-1$$

تست ۵۱: مشتق تابع $f(x)=|x-1|+|x-2|+\cdots+|x-50|$ در نقطهٔ $\underbrace{x=7\sqrt{3}}_{12.12}$ برابر کدام است؟

$7(\sqrt{3}=1.72..)=12.12$

۱) -28 ۲) -27 ۳) -26 ۴) -25

$50-13+1=38$

۱۲ تا قدرمطلق اول ⊕ بقیه ⊖

$$f(x)=\underbrace{(x-1)+(x-2)+\cdots+(x-12)}_{12x-\text{عدد}}+\underbrace{(-x+13)+(-x+14)+\cdots+(-x+50)}_{-38x+\text{عدد}}=-26x+\text{عدد}$$

$$y'=-26$$

تست ۵۲: اگر $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=-\frac{1}{3}$ ، مشتق $f(\sqrt{|x|+3})$ در نقطه‌ی $x=-1$ کدام است؟

$f'(2)=-\frac{1}{3}$

۱) $\frac{1}{6}$ ۲) $\frac{1}{12}$ ۳) $-\frac{1}{6}$ ۴) $-\frac{1}{12}$

$y=f(\sqrt{-x+3})$ ، u

$y=f(u)\longrightarrow y'=u'f'(u)$

$$y'=\frac{-1}{2\sqrt{-x+3}}f'(\sqrt{-x+3})\ \overset{x=-1}{=\!=}\ -\frac{1}{4}f'(\sqrt{4}=2)=-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{12}$$

تست ۵۳: اگر $f(x)=\frac{4}{5}x-\frac{1}{5}|x|$ و $g(x)=4x+|x|$ باشند، مشتق تابع fog کدام است؟ (سراسری ۹۴)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) مشتق ندارد.

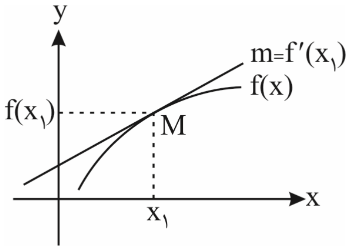
$$f(x)=\frac{4}{5}x-\frac{1}{5}|x|=\begin{cases}\frac{3}{5}x & x\geq 0\\ x & x<0\end{cases}\qquad g(x)=4x+|x|=\begin{cases}5x & x\geq 0\\ 3x & x<0\end{cases}$$

$$y=f(g(x))=\begin{cases}\frac{3}{5}(5x)=3x & x\geq 0\\ 3x & x<0\end{cases}$$

$$y=fog(x)=3x\longrightarrow y'=3$$

درس ۳: خط مماس

خط مماس بر منحنی از یک نقطه روی آن



گفتیم مقدار مشتق تابع $f(x)$ در نقطه‌ی $x_۱$ برابر است با شیب خط مماس بر منحنی تابع f در آن نقطه.

پس برای نوشتن معادله‌ی خط مماس بر منحنی $y=f(x)$ در نقطه‌ای مانند M به طول $x_۱$ کافی است $m=f'(x_۱)$ را پیدا کنیم و معادله‌ی خط مماس را با استفاده از رابطه‌ی $y-f(x_۱)=f'(x_۱)(x-x_۱)$ بنویسیم.

به نظر می‌رسد حرف دیگری نمانده ولی بگذارید برای آن که یاد بگیرید معادله‌ی مماس را سریع‌تر بنویسید یک مثال حل کنیم. می‌خواهیم معادله‌ی خط مماس بر منحنی تابع $f(x)=\frac{۲x+۱}{x-۲}$ را در نقطه‌ای به طول ۴ واقع بر منحنی بنویسیم. اول $x=۴$ را می‌گذاریم توی ضابطه‌ی تابع و عرض نقطه را پیدا می‌کنیم. $f(۴)=\frac{۹}{۲}$ پس مختصات نقطه شد $(۴,\frac{۹}{۲})$ حالا مشتق می‌گیریم $y'=\frac{-۵}{(x-۲)^۲}$، $x=۴$ را می‌گذاریم توی مشتق تا شیب مماس به دست آید: $m=\frac{-۵}{۴}$ حالا برای نوشتن معادله‌ی مماس دو تا کار می‌توانید بکنید:

۱) از همان فرمول بالا استفاده کنید:

$$y-\frac{۹}{۲}=-\frac{۵}{۴}(x-۴) \Rightarrow y=-\frac{۵}{۴}x+۵+\frac{۹}{۲} \Rightarrow y=-\frac{۵}{۴}x+\frac{۱۹}{۲} \Rightarrow ۴y+۵x=۳۸$$

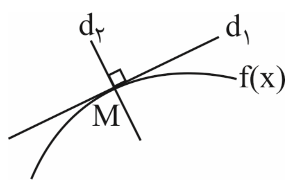
علت این که معادله را ساده کردیم، این است که در گزینه‌ها معمولاً با این شکل معادله سروکار دارید.

۲) یک راه دیگر داریم که معادله‌ی ساده‌شده‌ی خط را سریع‌تر بنویسیم. (این راه کاملاً اختیاری است.)

فرض کنید مختصات نقطه به صورت (α,β) و شیب خط برابر $m=\frac{a}{b}$ است. معادله‌ی خط را به صورت $by-ax=?$ بنویسید و مختصات (α,β) را در آن قرار دهید تا طرف دیگر تساوی به دست آید.

در این‌جا مختصات نقطه بود $(۴,\frac{۹}{۲})$ و شیب هم $m=-\frac{۵}{۴}$ پس:

$$۴y+۵x=? \Rightarrow \overbrace{(۴(\frac{۹}{۲})+۵(۴)=۳۸)}^{\text{می‌شود در ذهن انجام بدهید}} \Rightarrow ۴y+۵x=۳۸$$



خط قائم بر منحنی $f(x)$ در نقطه‌ی M، خطی است که بر خط مماس بر منحنی در آن نقطه عمود باشد. پس شیب خط قائم برابر $\frac{-۱}{m_{\text{مماس}}}$ یا $-\frac{۱}{f'(x_۱)}$ است. بنابراین برای نوشتن معادله‌ی خط قائم هم مثل نوشتن معادله‌ی خط مماس عمل می‌کنیم: اول مختصات نقطه، بعد مشتق و پیدا کردن شیب مماس، بعد پیدا کردن شیب خط قائم و در آخر هم نوشتن معادله‌ی خط قائم.

تست ۵۴: خط مماس بر منحنی تابع $f(x)=\frac{۵x-۴}{\sqrt{x}}$ در نقطهٔ $x=۴$ واقع بر آن، محور yها را با کدام عرض، قطع می‌کند؟ *(سراسری ریاضی ۹۹)*

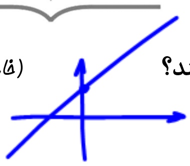
۱) -۴ ۲) -۱ ۳) ۲ ۴) ۳

$f(x)=\frac{۵x-۴}{\sqrt{x}} \longrightarrow f(۴)=۸ \quad A(۴,۸)$

$f'(x)=\frac{۵\sqrt{x}-(\frac{۱}{۲\sqrt{x}})(۵x-۴)}{(\sqrt{x})^۲=x} \qquad f'(۴)=\frac{۱۰-۴}{۴}=\frac{۶}{۴}=\frac{۳}{۲}=m_A$

$y-y_A=m_A(x-x_A) \rightarrow y-۸=\frac{۳}{۲}(x-۴) \xrightarrow{x=۰} y=۲ \quad B(۰,۲)$

محل برخورد مماس با محور yها



تست ۵۵: خط مماس بر منحنی به معادله‌ی $y=\frac{1}{\sqrt[3]{4x}}$ در نقطه‌ی $(2,\frac{1}{2})$، محور yها را با کدام عرض قطع می‌کند؟ (خارج ۸۹)

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{5}{6}$ ۳) $\frac{7}{6}$ ۴) $\frac{4}{3}$

$y=(4x)^{-\frac{1}{3}} \longrightarrow y'=-\frac{1}{3}(4)(4x)^{-\frac{4}{3}} \xrightarrow{x=2} -\frac{4}{3}(8)^{-\frac{4}{3}}=-\frac{4}{3}\left(\frac{1}{16}\right)=\frac{-1}{12}$

$A(2,\frac{1}{2})$ $m_A=-\frac{1}{12}$

$y-y_A=m(x-x_A)$

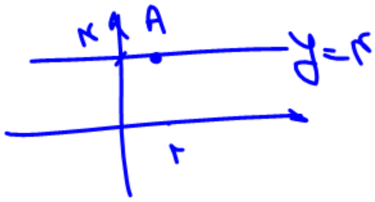
$y-\frac{1}{2}=-\frac{1}{12}(x-2) \xrightarrow{x=0} y=\frac{1}{6}+\frac{1}{2}=\frac{1+3}{6}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

تست ۵۶: خط مماس بر منحنی به معادله‌ی $y=\frac{x^2}{x-1}$ در نقطه‌ای به طول ۲ واقع بر آن، محور yها را با کدام عرض قطع می‌کند؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴ (سراسری ریاضی خارج از کشور)

$f(2)=\frac{(2)^2}{2-1}=4$ $A(2,4)$

$f'(x)=\frac{2x(x-1)-x^2}{(x-1)^2}$ $f'(2)=0=m_A \rightsquigarrow$ مماس افقی است



معادله $y-y_A=m_A(x-x_A)$

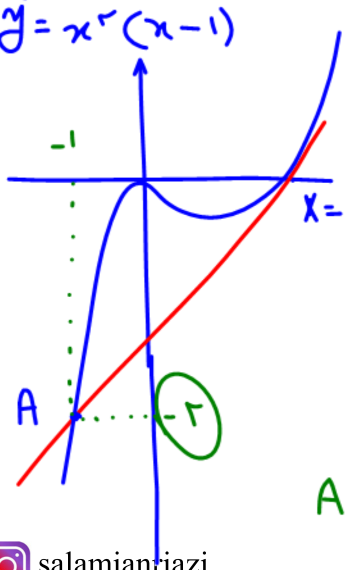
$y-4=0(x-2) \longrightarrow y-4=0 \longrightarrow \boxed{y=4}$

تست ۵۷: خط مماس بر منحنی به معادله‌ی $y=x^3-x^2$ در نقطه‌ای به طول $x=1$ واقع بر آن، منحنی را در نقطه‌ی دیگر A قطع می‌کند. عرض A کدام است؟ (خارج ۸۷)

۱) -3 ۲) -2 ۳) ۲ ۴) ۳

رسم برای بهتر فهمیدن

$y=x^2(x-1)$



$x=1 \longrightarrow B(1,0)$ ($y=x^3-x^2$)

$y'=3x^2-2x$

$y'=3-2=1=m_B$

$B(1,0)$ در معادله

$y-0=1(x-1)$

$\begin{cases} y=x-1 \\ y=x^3-x^2 \end{cases}$

$x^3-x^2=x-1$

$x^2(\cancel{x-1})=\cancel{x-1}$

$x^2=1$

$x=\pm1 \longrightarrow x=-1$ در

تابع را قطع می‌کند.

$A(-1,-2)$ ($y=x^3-x^2$)

تعیین نقاطی از منحنی که مماس بر منحنی در آن نقطه دارای شیب معلوم باشد

برای تعیین این نقاط از منحنی مشتق گرفته و مشتق را برابر شیب خط مماس قرار می‌دهیم.

مثال ۵۸: مماس بر منحنی $y = x^{3} - 3x^{2} - 9x$ در چه نقاطی موازی محور xها است؟ مشتق صفر

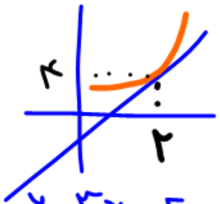
$y' = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x^2 - 2x - 3) = 0 \longrightarrow x_1 = -1 \quad , x_2 = 3$

در ۲ نقطه مماس موازی محور xها هست.

نکته: هرجا مشتق تابع صفر باشد، مماس موازی محور xهاست و برعکس.

تست ۵۹: خط به معادلهٔ $y = 3x - 2$ در نقطهٔ $x = 2$ بر منحنی پیوستهٔ $y = f(x)$ مماس است. حاصل $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{f^{2}(x) - 4f(x)}{x - 2}$ کدام است؟ (سراسری ریاضی ۹۵)

۱) ۳ ۲) ۶ ۳) ۱۲ ✓ ۴) ۱۵



$y = 3x - 2 \quad A(2,4)$

$\begin{cases} f(2) = 4 \\ f'(2) = 3 \end{cases}$

$\dfrac{(f(2)=4)^2 - 4(f(2)=4) = 0}{2-2=0} \underset{x\to 2}{\overset{Hop}{=}} \dfrac{2f'(x)f(x) - 4f'(x)}{1}$

$\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2f'(2)f(2) - 4f'(2)}{1} = 2(3)(4) - 4(3) = 12$

راه ۲: $\boxed{\lim\limits_{x\to 2} \left(\dfrac{f(x) - \cancel{4}}{x-2}\right)} f(x) = f'(2)\, f(2) = 3(4) = 12$

نکته: در نقطه‌ای که f با یک خط مماس است f و خط هم هم‌تماسند هم هم‌شیب

تست ۶۰: در تابع با ضابطهٔ $f(x) = \dfrac{4x - 5}{x + 1}$ و دامنهٔ $[0,8]$ خط مماس بر نمودار آن موازی پاره‌خطی است که ابتدا و انتهای منحنی را به هم وصل می‌کند. این خط مماس، محور yها را با کدام عرض قطع می‌کند؟ (خارج تجربی ۹۸)

۱) -2 ۲) $-1/5$ ۳) -1 ✓ ۴) $-0/5$

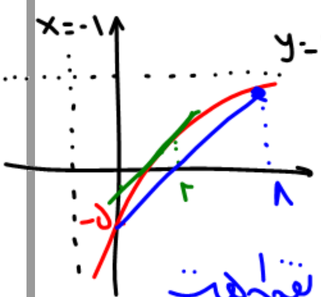
$\dfrac{f(8) - f(0)}{8 - 0} = f'(x)$

شیب خط مماس بر تابع = شیب خط واصل اول و آخر

$\dfrac{3 - (-5)}{8} = 1 = \dfrac{4(1) - (-5)(1)}{(x+1)^2} = \dfrac{9}{(x+1)^2}$

$(x+1)^2 = 9$

$\begin{cases} x + 1 = 3 & x = 2 \in [0,8] \quad A(2,1) \\ x + 1 = -3 & x = -4 \end{cases} \qquad f'(2) = \dfrac{9}{(2+1)^2} = 1 = m_A$



$y - y_A = m_A(x - x_A) \rightarrow y - 1 = 1(x - 2) \xrightarrow{x=0} \boxed{y = -1}$

نکته: اگر f روی بازه $[a,b]$ پیوسته و روی (a,b) مشتق‌پذیر باشد حداقل روی آن یک نقطه هست که مماس موازی خط واصل اول و آخر است.

$f'(x) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$

اگر یک خط و یک منحنی بر هم مماس باشند (طول نقطه‌ی تماس را نداریم) معادله‌ی تلاقی آن‌ها ریشه‌ی مکرر (معمولاً مضاعف) می‌دهد. در این‌جا دو حالت زیر می‌تواند رخ دهد:

۱) اگر معادله‌ی تلاقی، درجه دوم باشد، باید $\Delta = ۰$ قرار دهیم.

تست ۶۱: اگر خط $y = ۴x + a$ بر منحنی $y = x^۲ + ۲x + ۳$ مماس باشد، مقدار a کدام است؟ *(مشابه خارج تجربی ۹۷)*

۱) ۱   ۲) ۱-   ۳) ۲   ۴) ۲-

پاسخ: گزینه‌ی «۳» ـ روش تلاقی: معادله‌ی خط و منحنی را قطع می‌دهیم و شرط وجود ریشه‌ی مضاعف را می‌نویسیم:

$$\begin{cases} y = x^۲ + ۲x + ۳ \\ y = ۴x + a \end{cases} \Rightarrow x^۲ + ۲x + ۳ = ۴x + a \Rightarrow x^۲ - ۲x + (۳ - a) = ۰ \Rightarrow \Delta = ۰ \Rightarrow ۴ - ۴(۳ - a) = ۰$$

$$\Rightarrow -۸ + ۴a = ۰ \Rightarrow a = ۲$$

۲) مشتق هر دو را مساوی می‌گذاریم و معادله‌ی جدید را حل می‌کنیم و x را به دست می‌آوریم. به این x، طول نقطه‌ی تماس می‌گویند. این x را در منحنی و خط جاگذاری می‌کنیم و عرض‌هایشان را مساوی قرار می‌دهیم. روش دوم سؤال قبل رو ببینید:

$$\begin{cases} y = x^۲ + ۲x + ۳ \Rightarrow y' = ۲x + ۲ \\ y = ۴x + a \Rightarrow y' = ۴ \end{cases} \xrightarrow{\text{مشتق‌هارومساوی‌بذار}} ۲x + ۲ = ۴ \Rightarrow ۲x = ۲ \Rightarrow x = ۱$$

به $x = ۱$ طول نقطه‌ی تماس می‌گویند.

حالا $x = ۱$ رو توی منحنی و خط جاگذاری کن و عرض‌هاشون رو مساوی قرار بده:

$$\begin{cases} x = ۱ \xrightarrow{\text{درمنحنی}} y = ۱ + ۲ + ۳ = ۶ \\ x = ۱ \xrightarrow{\text{درخط}} y = ۴ + a \end{cases} \xrightarrow{\text{عرض‌هامساوی}} ۶ = ۴ + a \Rightarrow \boxed{a = ۲} \text{ خلاص}$$

روش ۲ همیشه کارآمده ولی روش ۱ یعنی تلاقی و سپس $\Delta = ۰$ وقتی به درد می‌خوره که معادله‌ی تلاقی درجه ۲ باشه.

تست ۶۲: به ازای کدام مقدار b خط به معادله‌ی $y = -۳x + b$ بر نمودار تابع $y = x^۳ - ۳x^۲$ مماس است؟

۱) ۲-   ۲) ۱-   ۳) ۱   ۴) ۲

پاسخ: گزینه‌ی «۳» ـ چون با یک تابع درجه سوم روبه‌رو هستیم از مشتق استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases} y = x^۳ - ۳x^۲ \Rightarrow y' = ۳x^۲ - ۶x \\ y = -۳x + b \Rightarrow y' = -۳ \end{cases} \xrightarrow{\text{مشتق‌هارومساوی‌بذار}} ۳x^۲ - ۶x = -۳ \Rightarrow ۳x^۲ - ۶x + ۳ = ۰$$

$$\Rightarrow x^۲ - ۲x + ۱ = ۰ \Rightarrow (x - ۱)^۲ = ۰ \Rightarrow x = ۱ \text{ طول نقطه‌ی تماس}$$

$$\begin{cases} x = ۱ \xrightarrow{\text{درمنحنی}} y = ۱ - ۳ = -۲ \\ x = ۱ \xrightarrow{\text{درخط}} y = -۳ + b \end{cases} \xrightarrow{\text{عرض‌هامساوی}} -۲ = -۳ + b \Rightarrow b = ۱ \text{ خلاص}$$

تست ۶۳: معادلهٔ خط مماس بر نمودار تابع $y = \dfrac{x^۲ + mx + ۱}{x + ۳}$ در نقطه‌ای به طول واحد بر روی نمودار، به صورت $۴y - ۳x = n$ است. مقدار $m + n$ چه‌قدر است؟ *(سراسری ۱۴۰۱)*

$4y = 3x + n$ $A\left(1, \frac{2+m}{4}\right)$ $f' = \frac{(2x+m)(x+3) - (x^2+mx+1)}{(x+3)^2}$

$y = \frac{3}{4}x + \frac{n}{4}$

۱) ۳-   ۲) ۲-   ۳) ۲   ۴) ۳ ✓

$A\left(1, \frac{m+2}{4}\right)$ در نقطه تماس، خط مماس و منحنی هم عرضند

هم شیب می‌شوند

$f(1) = \frac{3}{4}(1) + \frac{n}{4} = \frac{m+2}{4} \rightarrow 3 + n = m + 2 \rightarrow m - n = 1$

$f'(1) = \frac{3}{\cancel{4}} = \frac{(2+m)(4) - (2+m)}{\cancel{16}\ 4} = 3(m+2) \rightarrow m + 2 = 4 \rightarrow m = 2 \rightarrow \boxed{n = 1}$

V.I.P

ویژه علاقه‌مندان:

تست ۶۴: دو نقطه بر منحنی $y=\frac{x-3}{x-1}$ وجود دارد که مماس در آن نقاط موازی خط $y=2x$ است. فاصلهٔ این دو نقطه برابر چقدر است؟

خط های موازی یعنی شیب ها مساوی

۱) $\sqrt{5}$ ۲) $2\sqrt{5}$ ✓ ۳) $2\sqrt{2}$ ۴) $\sqrt{2}$

$y'=\frac{-1+3=2}{(x-1)^2}=2 \to (x-1)^2=1 \to \begin{cases} x-1=1 \to x=2 & A(2,-1) \\ x-1=-1 \to x=0 & B(0,3) \end{cases}$

$AB=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}=\sqrt{4+16=20}=2\sqrt{5}$

تست ۶۵: منحنی $y=\frac{x^4+mx+3}{x+2}$ بر محور xها مماس است. مقدار m کدام است؟

نکته: ریشه مضاعف هم در عبارت صورت هم در مشتق می‌باشد

۱) -1 ۲) -2 ۳) -3 ۴) -4 ✓

$y=\frac{x^4+mx+3}{x+2}=0 \to \boxed{x^4+mx+3=0}$ خط $y=0$ را با ریشه مضاعف قطع می‌کند

$y'=\frac{(4x^3+m)(x+2)-(x^4+mx+3)}{(x+2)^2}=0 \to 4x^3+m=0 \to x=\sqrt[3]{-\frac{m}{4}} \xrightarrow[m=-4]{\text{گزینه‌ها}} \boxed{x=1}$

$y=\frac{x^4+mx+3}{x+2}$ $x=-2 \notin D_f$

تست ۶۶: حداکثر چند خط موازی محور xها می‌توان بر تابع $f(x)=ax^4+bx^2+c$ مماس کرد؟

$y'=0$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ✓ ۴) صفر

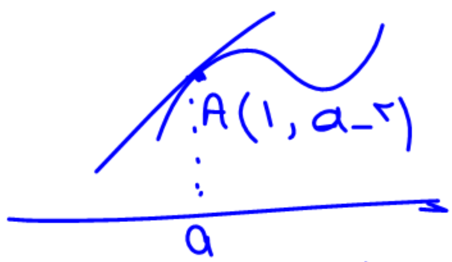
$y'=4ax^3+2bx=0 \to x(4ax^2+2b)=0 \begin{cases} \boxed{x=0} \\ x=\pm\sqrt{\frac{-b}{2a}} \xrightarrow{\frac{b}{a}<0} x \text{ تا } 2 \end{cases}$

$x=0,\pm\sqrt{\frac{-b}{2a}}$ ، ۳ نقطه، حداکثر $\frac{b}{a}<0$ باشد، تابع ۳ مماس می‌شود

تست ۶۷: خط مماس بر منحنی $y=x^3+ax^2-3x$ در نقطه‌ای به طول $x=1$ واقع بر آن، بر منحنی $y=x^2$ نیز مماس است. مقدار a کدام می‌تواند باشد؟

$A(1,a-2)$ $y'=3x^2+2ax-3$

۱) -1 ✓ ۲) -2 ۳) -3 ۴) -4



$\begin{cases} y'_{x=1}=2a=m_A \\ \boxed{A(1,a-2)} \end{cases}$

$y-y_A=m_A(x-x_A)$

$y-a+2=2a(x-1)$

$y=2ax-a-2$ باید بر x^2 مماس باشد:

$x^2=2ax-a-2$

$x^2-2ax+(a+2)=0$

شرط مماس: $\Delta=(-2a)^2-4(a+2)=0$ ، $4a^2-4a-8=4(a^2-a-2)=0$

$\begin{cases} a=-1 \\ a=2 \end{cases}$

درس ۴: مشتق‌پذیری و پیوستگی

اگر در تابع پیوسته $f(x)$ حاصل حد $\lim\limits_{x\to x_1}\dfrac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}$ وجود داشته باشد (یعنی برابر عدد مشخصی شود) آن را مشتق تابع $f(x)$ در نقطه‌ی x_1 می‌نامیم و با $f'(x_1)$ نشان می‌دهیم. یعنی $f'(x_1)=\lim\limits_{x\to x_1}\dfrac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}$ و مقدارش برابر شیب خط مماس بر منحنی تابع $f(x)$ در نقطه‌ی x_1 است.

اگر این حد را از سمت راست حساب کنیم می‌گوییم مشتق راست تابع را در نقطه‌ی x_1 پیدا کرده‌ایم و آن را با $f'_+(x_1)$ نشان می‌دهیم:

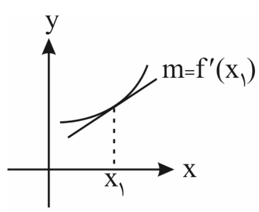
$$f'_+(x_1)=\lim_{x\to x_1^+}\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}$$

و اگر این حد را از سمت چپ حساب کنیم می‌گوییم مشتق چپ تابع را در نقطه‌ی x_1 پیدا کرده‌ایم و آن را با $f'_-(x_1)$ نشان می‌دهیم:

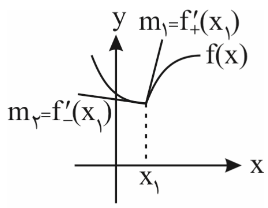
$$f'_-(x_1)=\lim_{x\to x_1^-}\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}$$

وقتی مقدار حد راست و حد چپ (یعنی همان مشتق راست و مشتق چپ) هر دو موجود و با هم برابر باشند، می‌گوییم تابع در نقطه‌ی x_1 مشتق‌پذیر است و اگر هر کدام از حدهای بالا وجود نداشته باشد یا $\pm\infty$ شود و یا $f'_+(x_1)\neq f'_-(x_1)$ باشد، می‌گوییم تابع در نقطه‌ی x_1 مشتق‌پذیر نیست.

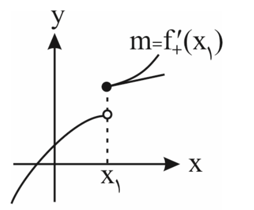
گفتیم که مقدار مشتق تابع در یک نقطه همان شیب خط مماس بر منحنی تابع است. حالا به شکل‌های زیر نگاه کنید:



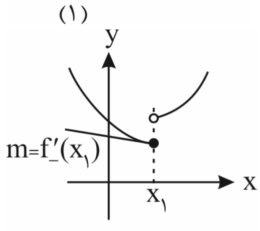
(۱)



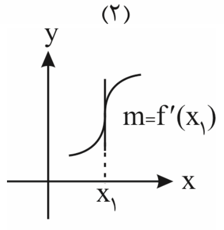
(۲)



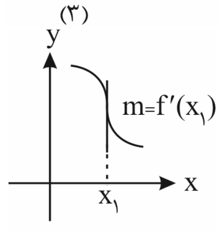
(۳)



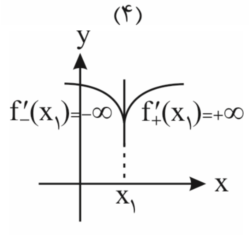
(۴)



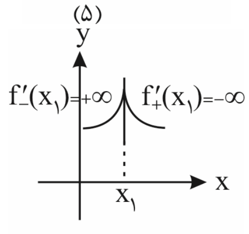
(۵)



(۶)



(۷)



(۸)

۱) تابع در نقطه‌ی x_1 پیوسته است و مقدار مشتق راست (شیب نیم‌مماس راست) و مشتق چپ (شیب نیم‌مماس چپ) با هم برابرند. دو نیم‌مماس (یعنی دو نیم‌خط مماس) در امتداد یکدیگرند و تابع در نقطه‌ی x_1 مشتق‌پذیر و دارای خط مماس است.

۲) تابع در نقطه‌ی x_1 پیوسته است و مقدار مشتق راست و چپ با هم فرق می‌کند. تابع هم مشتق راست دارد و هم مشتق چپ ولی

مشتق‌پذیر نیست. نیم‌مماس راست و چپ در امتداد هم نیستند و با هم زاویه می‌سازند و به همین خاطر به این نقطه می‌گوییم نقطه‌ی زاویه‌دار یا نقطه‌ی گوشه‌ای.

۳) تابع در نقطه‌ی x_1 فقط از سمت راست پیوسته و دارای مشتق راست است، پس فقط نیم‌مماس راست داریم و تابع در نقطه‌ی x_1 مشتق‌پذیر نیست.

۴) تابع در نقطه‌ی x_1 فقط از سمت چپ پیوسته و دارای مشتق چپ است، پس فقط نیم‌مماس چپ داریم و تابع در نقطه‌ی x_1 مشتق‌پذیر نیست.

۵) تابع در نقطه‌ی x_1 پیوسته است و مشتق راست و چپ تابع در این نقطه هر دو برابر $+\infty$ هستند و تابع در این نقطه مشتق‌پذیر نیست اما خط مماس قائم دارد. به این نقاط می‌گوییم عطف قائم.

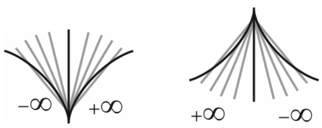
۶) تابع در نقطه‌ی x_1 پیوسته است و مشتق راست و چپ تابع در این نقطه هر دو برابر $-\infty$ هستند و تابع در این نقطه مشتق‌پذیر نیست اما خط مماس قائم دارد. به این نقاط می‌گوییم عطف قائم.

۷) تابع در نقطه‌ی x_1 پیوسته است و مشتق چپ تابع برابر $-\infty$ و مشتق راست برابر $+\infty$ است. تابع در این نقطه مشتق‌پذیر نیست و به این نقطه می‌گوییم نقطه‌ی بازگشتی.

۸) تابع در نقطه‌ی x_1 پیوسته است و مشتق چپ برابر $+\infty$ و مشتق راست برابر $-\infty$ است. تابع در این نقطه مشتق‌پذیر نیست و به این نقطه می‌گوییم نقطه‌ی بازگشتی.

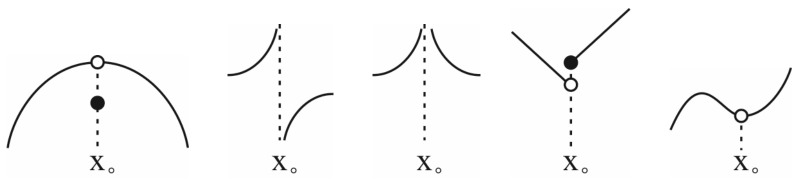
در تمام حالت‌های بالا تابع به شرطی در نقطه‌ی x_1 دارای خط مماس است که در آن پیوسته باشد. به عبارت دیگر تابع از هر سمت که پیوسته نباشد حتماً از همان سمت خط مماس ندارد. یعنی پیوستگی شرط لازم و نه کافی برای مشتق‌پذیری است.

برای تعیین علامت ∞ وقتی که خط مماس قائم داریم کافی است از نقاط نزدیک به نقطه‌ی مزبور به آن وصل کنیم و به سمت آن نقطه میل کنیم. علامت شیب خط قاطع (که حالت حدی‌اش می‌شود شیب خط مماس) همان علامت ∞ است.

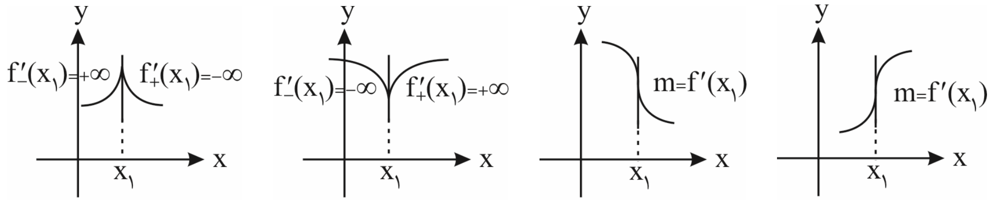


جمع‌بندی:

۱) اگر f در یک نقطه ناپیوسته باشد، در آن نقطه مشتق‌پذیر نیست.



۲) اگر f در یک نقطه پیوسته باشد و مماس قائم داشته باشد (و یا نیم‌مماس قائم) در آن نقطه مشتق‌پذیر نیست. (مشتق چپ و راست، هر دو نامتناهی)

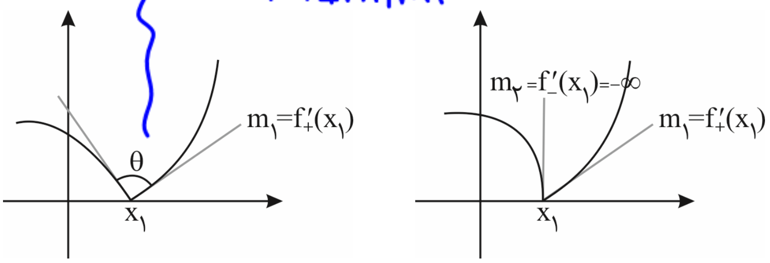


۳) اگر f در یک نقطه پیوسته باشد و مشتق چپ و راست در آن نقطه:

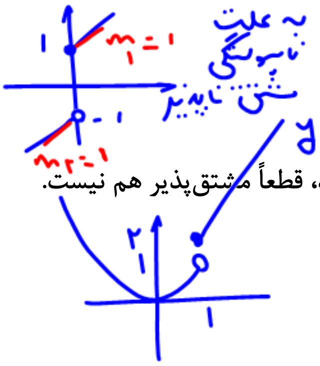
الف) هر دو موجود (متناهی) ولی نابرابر باشند (نقطهٔ گوشه‌ای).

ب) یکی متناهی و دیگری نامتناهی باشد (نقطهٔ گوشه‌ای).

برای حاده $\tan\theta = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right|$



$f(x) = \begin{cases} x+1 & x \geq 0 \\ x-1 & x < 0 \end{cases}$



بیایید مواردی را که گفتم در مورد ضابطه‌ها هم بررسی کنیم.

شرط اصلی مشتق‌پذیری، پیوستگی است. یعنی باید $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ باشد. اگر f در $x = a$ پیوسته نباشد، قطعاً مشتق‌پذیر هم نیست.

مثلاً $y = [x]$ و $y = \begin{cases} x+1 & x \geq 1 \\ x^2 & x < 1 \end{cases}$ در $x = 1$ مشتق‌پذیر نیستند چون در این نقطه پیوسته نیستند.

پیوستگی راست شرط لازم برای وجود مشتق راست و پیوستگی چپ شرط لازم برای وجود مشتق چپ است. به عبارتی تابع از هر طرف که پیوسته نباشد، از همان طرف مشتق‌پذیر نخواهد بود.

مشتق توابع چندضابطه‌ای در نقاط مرزی

در توابع چندضابطه‌ای برای تعیین مشتق تابع در نقطه مرزی ابتدا پیوستگی تابع را در این نقطه بررسی می‌کنیم. تابع از هر طرف که پیوسته نباشد، مشتق‌پذیر هم نیست. اگر تابع در نقطه مرزی پیوسته بود، از هر یک از ضابطه‌ها به طور مستقل مشتق گرفته و مشتق چپ و راست را جداگانه محاسبه می‌کنیم. اگر مشتق چپ و راست با هم برابر باشند، تابع در نقطه مرزی مشتق‌پذیر خواهد بود.

در تمام تابع‌ها نقطه‌ی $x = 1$ را بررسی می‌کنیم:

$$1)\ f(x) = \begin{cases} x^3 + 2x & x \geq 1 \\ x^2 + 3x - 1 & x < 1 \end{cases} \Rightarrow \text{پیوستگی} \begin{cases} \text{مقدار} = 3 \\ \text{حدراست} = 3 \Rightarrow f'_+(1) = 3x^2 + 2 = 5 \\ \text{حدچپ} = 3 \Rightarrow f'_-(1) = 2x + 3 = 5 \end{cases} \Rightarrow \text{مشتق‌پذیر}$$

تابع هم از راست پیوسته است و هم از چپ، از ضابطه‌های راست و چپ به طور مستقیم مشتق گرفتیم و در آخر چون مشتق راست و چپ برابر شدند، پس تابع مشتق‌پذیر است.

$$2)\ f(x) = \begin{cases} x^4 + x & x \geq 1 \\ x^3 + x & x < 1 \end{cases} \Rightarrow \text{پیوستگی} \begin{cases} \text{مقدار} = 2 \\ \text{حدراست} = 2 \Rightarrow f'_+(1) = 4x^3 + 1 = 5 \\ \text{حدچپ} = 2 \Rightarrow f'_-(1) = 3x^2 + 1 = 4 \end{cases} \Rightarrow \text{مشتق‌ناپذیر}$$

تابع هم از راست پیوسته است و هم از چپ، از ضابطه‌های راست و چپ به طور مستقیم مشتق گرفتیم و در آخر چون مشتق راست و چپ با هم برابر نشدند پس تابع مشتق‌پذیر نیست ولی هم مشتق راست دارد و هم مشتق چپ.

$$3)\ f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & x \geq 1 \\ x^3 + x & x < 1 \end{cases} \Rightarrow \text{پیوستگی} \begin{cases} \text{مقدار} = 3 \\ \text{حدراست} = 3 \Rightarrow f'_+(1) = 2x + 2 = 4 \\ \text{حدچپ} = 2 \Rightarrow f'_-(1) = \text{وجودندارد} \end{cases} \Rightarrow \text{مشتق‌ناپذیر}$$

تابع از سمت راست پیوسته است پس از ضابطه‌ی راست به طور مستقیم مشتق گرفتیم و مشتق راست را پیدا کردیم. تابع از سمت چپ پیوسته نیست پس مشتق چپ وجود ندارد. حواستان باشد که بدون توجه به پیوستگی از ضابطه‌ها مشتق نگیرید. اگر به پیوستگی توجه نکنیم و فقط از ضابطه‌ها مشتق بگیریم به اشتباه نتیجه می‌گیریم که تابع مشتق‌پذیر است.

۴) $f(x)=\begin{cases} x+\sqrt{x} & x>1 \\ x^2-1 & x=1 \\ x^3-x & x<1 \end{cases} \Rightarrow$ پیوستگی $\begin{cases} \text{مقدار} = 0 \\ \text{حدراست} = 2 \Rightarrow f'_+(1) = \text{وجودندارد} \\ \text{حدچپ} = 0 \Rightarrow f'_-(1) = 3x^2-1 = 2 \end{cases} \Rightarrow$ مشتق‌ناپذیر

تابع از سمت راست پیوسته نیست و مشتق راست ندارد. ولی از سمت چپ پیوسته است پس از ضابطه‌ی چپ مشتق گرفتیم و مقدار مشتق چپ را حساب کردیم.

۵) $f(x)=\begin{cases} x^2+2x & x>1 \\ x+\sqrt{x} & x=1 \\ x^4+2 & x<1 \end{cases} \Rightarrow$ پیوستگی $\begin{cases} \text{مقدار} = 2 \\ \text{حدراست} = 3 \Rightarrow f'_+(1) = \text{وجودندارد} \\ \text{حدچپ} = 3 \Rightarrow f'_-(1) = \text{وجودندارد} \end{cases} \Rightarrow$ مشتق‌ناپذیر

تابع نه از سمت راست پیوسته است و نه از سمت چپ، پس نه مشتق راست داریم و نه مشتق چپ، باز هم حواستان را جمع کنید که قبل از بررسی پیوستگی از ضابطه‌ها مشتق نگیرید.

۶) $f(x)=\begin{cases} x^2+x & x>1 \\ x^3+1 & x<1 \end{cases} \Rightarrow$ پیوستگی $\begin{cases} \text{حدراست} = 2 \\ \text{مقدار} = \text{ندارد} \Rightarrow \text{مشتق‌ناپذیر} \\ \text{حدچپ} = 2 \end{cases}$

۷) $f(x)=\begin{cases} \sqrt{x} & x\geq 0 \\ 5x & x<0 \end{cases} \Rightarrow$ پیوستگی $\begin{cases} \text{مقدار} = 0 \\ \text{حدراست} = 0 \Rightarrow f'_+(0) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = +\infty \text{ وجودندارد} \\ \text{حدچپ} = 0 \Rightarrow f'_-(0) = 5 \end{cases} \Rightarrow$ مشتق‌ناپذیر

تابع در $x=0$ پیوسته است اما چون مشتق راست نامتناهی $(+\infty)$ شده است، پس تابع مشتق‌پذیر نیست.

تست ۶۸: تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases} \sqrt{5-2x} & x\leq -2 \\ -\frac{1}{2}x^2+bx+c & x>-2 \end{cases}$، در $x=-2$، مشتق‌پذیر است. مقدار c کدام است؟ (سراسری تجربی ۹۹)

۱) $-\frac{2}{3}$ ۲) $-\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{2}{3}$

$f_-(-2) = \sqrt{5-2(-2)=9} = 3 = f_+(-2) = -2-2b+c$

$\boxed{2b-c=-5}$

$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-\cancel{2}}{\cancel{2}\sqrt{5-2x}} & x\leq -2 \\ -x+b & x>-2 \end{cases}$

$f'_-(-2) = \dfrac{-1}{\sqrt{9}} = -\dfrac{1}{3}$

$f'_+(-2) = 2+b$

$2+b=-\dfrac{1}{3}$

$b=-\dfrac{1}{3}-2=-\dfrac{7}{3}$

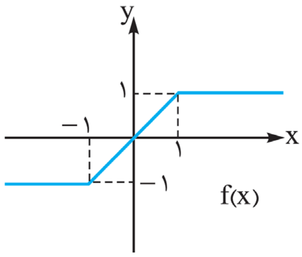
$\boxed{c=2b+5=-\dfrac{14}{3}+5=\dfrac{1}{3}}$

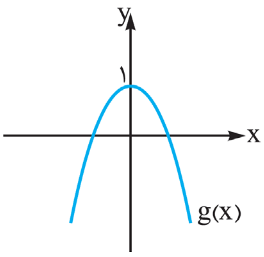
تست ۶۹: فرض کنید $f(x)=\begin{cases}-۱ & x<-۱\\ x & -۱\le x\le ۱\\ ۱ & x>۱\end{cases}$ و $g(x)=۱-x^۲$. تعداد عناصر مجموعه نقاطی که **gof** یا **fog** در آن‌ها مشتق‌پذیر نیست، کدام است؟

(سراسری ریاضی ۱۴۰۰)

۱) ۲   ۲) ۳   ۳) ۴   ۴) ۵

پاسخ: گزینهٔ «۳» ـ نمودار توابع **f** و **g** را رسم می‌کنیم:





۱) **fog** را تشکیل می‌دهیم. باید در **f**، جای تمام **x**ها، **g(x)** بنویسیم.

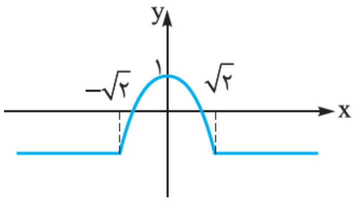
$$f(g(x))=\begin{cases}-۱ & g(x)<-۱\\ g(x) & -۱\le g(x)\le ۱\\ ۱ & g(x)>۱\end{cases}=\begin{cases}-۱ & ۱-x^۲<-۱\\ ۱-x^۲ & -۱\le ۱-x^۲\le ۱\\ ۱ & ۱-x^۲>۱\end{cases}=\begin{cases}-۱ & x^۲>۲\\ ۱-x^۲ & ۰\le x^۲\le ۲\\ ۱ & \underbrace{x^۲<۰}_{\text{همواره نادرست!}}\end{cases}$$

$\rightarrow |x|>\sqrt{۲}\quad x<-\sqrt{۲}$ یا $x>\sqrt{۲}$

$\rightarrow |x|<\sqrt{۲}\quad -\sqrt{۲}\le x\le\sqrt{۲}$

$$=\begin{cases}-۱ & x>\sqrt{۲}\,,\,x<-\sqrt{۲}\\ ۱-x^۲ & -\sqrt{۲}\le x\le\sqrt{۲}\\ ۱ & \text{تهی!}\end{cases}$$

نمودار **fog** را رسم می‌کنیم:

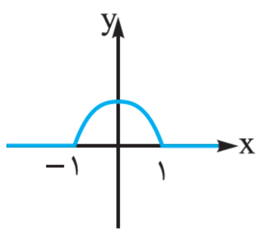


دو نقطه به طول‌های $\pm\sqrt{۲}$، نقطهٔ گوشه هستند و **fog** در آن‌ها مشتق‌پذیر نیست.

۲) **gof** را تشکیل می‌دهیم:

$$g(f(x))=۱-f^۲(x)=\begin{cases}۱-(-۱)^۲ & x<-۱\\ ۱-x^۲ & -۱\le x\le ۱\\ ۱-۱^۲ & x>۱\end{cases}=\begin{cases}۰ & x<-۱\\ ۱-x^۲ & -۱\le x\le ۱\\ ۰ & x>۱\end{cases}$$

نمودار **gof** را رسم می‌کنیم:



دو نقطه به طول‌های ±۱، نقطهٔ گوشه هستند، پس **gof** در آن‌ها مشتق‌پذیر نیست. پس دو تابع **gof** و **fog**، در کل در ۴ نقطه مشتق‌ناپذیرند.

تست ۷۰: فرض کنید $g(x)=ax^{۲}+bx+c$ ، $(a\neq ۰)$ و $f(x)=\begin{cases} g(x) & x\geq k \\ g'(x) & x<k \end{cases}$ باشد. اگر f یک تابع مشتق‌پذیر باشد، حداکثر مقدار k به شرط $b+c=a$ کدام است؟ (سراسری تجربی ۱۴۰۰)

۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ «۳» ـ با توجه به تابع $g(x)=ax^{۲}+bx+c$ ضابطهٔ تابع f به شکل $f(x)=\begin{cases} ax^{۲}+bx+c & x\geq k \\ ۲ax+b & x<k \end{cases}$ است. حالا برای این که تابع f مشتق‌پذیر باشد:

راه اول: با استفاده از شرط پیوستگی و مشتق‌پذیری باید معادلهٔ $ak^{۲}+bk+c=۲ak+b$ ریشهٔ مضاعف داشته باشد. چون $b+c=a$ است، پس $c=a-b$ و در نتیجه:

$$ak^{۲}+bk+a-b=۲ak+b \Rightarrow ak^{۲}+(b-۲a)k+a-۲b=۰$$

$$\text{ریشهٔ مضاعف } \Delta=۰ \Rightarrow (b-۲a)^{۲}-۴a(a-۲b)=۰ \Rightarrow b^{۲}-۴ab+۴a^{۲}-۴a^{۲}+۸ab=۰$$

$$\Rightarrow b^{۲}+۴ab=۰ \Rightarrow b(b+۴a)=۰ \Rightarrow b=۰ \text{ یا } b=-۴a$$

پس معادله به شکل زیر درمی‌آید:

$$b=۰ \Rightarrow ak^{۲}-۲ak+a=۰ \Rightarrow a(k^{۲}-۲k+۱)=۰ \Rightarrow \text{ریشهٔ مضاعف } k=۱$$

$$b=-۴a \Rightarrow ak^{۲}-۶ak+۹a=۰ \Rightarrow a(k^{۲}-۶k+۹)=۰ \Rightarrow \text{ریشهٔ مضاعف } k=۳$$

بنابراین حداکثر مقدار k برابر است با $k=۳$.

راه دوم: تابع $f(x)=\begin{cases} ax^{۲}+bx+c & x\geq k \\ ۲ax+b & x<k \end{cases}$ باید در $x=k$ هم پیوسته باشد و هم مشتق‌پذیر، پس:

$$\text{پیوستگی} \Rightarrow ak^{۲}+bk+c=۲ak+b \quad (۱)$$

$$\text{مشتق‌پذیری } f'(x)=\begin{cases} ۲ax+b & x>k \\ ۲a & x<k \end{cases} \Rightarrow ۲ak+b=۲a \quad (۲)$$

با مقایسهٔ (۱) و (۲) می‌توانیم بنویسیم:

$$ak^{۲}+bk+c=۲a \Rightarrow ak^{۲}+bk+c-۲a=۰$$

مجموع ضرایب این معادله برابر است با:

$$a+\overbrace{b+c}^{a}-۲a=۲a-۲a=۰$$

پس ریشه‌هایش برابرند با $k=۱$ و $k=\frac{c-۲a}{a}$.

از طرف دیگر این ریشه‌ها باید در معادلهٔ (۲) هم صدق کنند:

$$۲a\left(\frac{c-۲a}{a}\right)+\overbrace{b}^{a-c}=۲a \Rightarrow ۲c-۴a+a-c=۲a \Rightarrow c=۵a$$

پس $\frac{c}{a}=۵$ و در نتیجه مقدار ریشهٔ $k=\frac{c-۲a}{a}$ برابر است با:

$$k=\frac{c}{a}-۲=۵-۲=۳$$

پس حداکثر k برابر است با $k=۳$.

تست ۷۱: به ازای کدام مجموعه مقادیر $\mathbf{a}$ تابع $f(x)=\begin{cases} ax+۵ & x\ge ۱ \\ x^۲-a & x<۱ \end{cases}$ در $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است؟

۱) $\{۲,-۲\}$ ‌ ‌ ۲) $\{-۲\}$ ‌ ‌ ۳) $\{۲\}$ ‌ ‌ ۴) $\varnothing$

پاسخ: گزینه‌ی «۴» ـ اول پیوستگی و سپس مشتق‌پذیری در نقاط مرزی را بررسی می‌کنیم:

$$f(x)=\begin{cases} ax+۵ & x\ge ۱ \\ x^۲-a & x<۱ \end{cases} \Rightarrow \text{پیوستگی} \begin{cases} \text{مقدار}=a+۵ \\ \text{حدراست}=a+۵ \Rightarrow a+۵=۱-a \Rightarrow a=-۲ \\ \text{حدچپ}=۱-a \end{cases}$$

$$\text{مشتق‌پذیری} \begin{cases} f'_+(۱)=a \\ f'_-(۱)=۲x=۲ \end{cases} \Rightarrow a=۲$$

چون جواب‌های $\mathbf{a}$ برای پیوستگی و مشتق‌پذیری تابع با هم متفاوت است پس مقداری برای $\mathbf{a}$ یافت نمی‌شود یعنی $a\in\varnothing$؛ نکند به اشتباه فقط پیوستگی یا فقط مشتق‌پذیری را بررسی کنید و جواب غلط بدهید. باید هم مشتق‌پذیری را بررسی کنیم و هم پیوستگی را، مخصوصاً وقتی در گزینه‌ها «جواب ندارد» یا «تهی»، داشته باشیم.

$y=f(u) \longrightarrow y'=u'f'(u)$

تست ۷۲: اگر $f(x)=\begin{cases} x^۲+۲x & x\ge ۱ \\ \frac{۳}{x} & x<۱ \end{cases}$، حاصل $\lim\limits_{h\to ۰}\frac{f(\overbrace{۱+۳h^۲}^{u})-f(\overbrace{۱-h^۲}^{u})}{h^۲}$ کدام است؟ *(آزمون گزینه دو جامع)*

$h\to ۰$

$h^۲\to ۰^+$

۱) ۱۶ ‌ ‌ ۲) -۱۲ ‌ ‌ ۳) ۹ ‌ ‌ ۴) ۱۵

$$\frac{f(۱^+)-f(۱^-)=۳-۳=\text{صفر}}{۰^+} \xrightarrow[h\to ۰]{\text{Hop}} \lim_{h\to ۰}\frac{\cancel{۲h}\,\overset{۳}{}f'(۱+۳h^۲)-\overset{+۱}{\cancel{(-۲h)}}f'(۱-h^۲)}{\cancel{۲h}}$$

$$۳\underbrace{f'(۱^+)}_{۴}+\underbrace{f'(۱^-)}_{-۳}=۹$$

$$f'(x)=\begin{cases} ۲x+۲ & x>۱ \\ \frac{-۳}{x^۲} & x<۱ \end{cases}$$

$$f'_+(۱)=۴\neq f'_-(۱)=-۳$$

مشتق توابع قدرمطلقی به ازای نقطه‌ی $x_\circ$، وقتی که $x_\circ$ داخل قدرمطلق را صفر می‌کند

چنان‌چه تابع قدرمطلقی در نقطه‌ی $x_\circ$ پیوسته باشد:

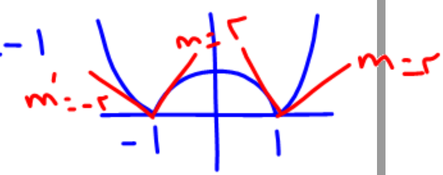
اگر عبارت داخل قدرمطلق به ازای این نقطه صفر شود، یعنی نقطه‌ی $x_\circ$ ریشه عبارت داخل قدرمطلق باشد، باید عبارت داخل قدرمطلق را تعیین علامت کرده و در سمت چپ و راست نقطه موردنظر عبارت را از قدرمطلق خارج کنیم سپس مشتق‌های راست و چپ را جداگانه بررسی می‌کنیم.

تذکر: گفتیم که $f'(x_\circ)$ همان شیب خط مماس بر منحنی $y=f(x)$ در نقطه‌ی $x_\circ$ است. اگر در تابعی مشتق‌های راست و چپ در نقطه‌ی $x_\circ$ جداگانه محاسبه شوند، مشتق راست $(f'_+(x_\circ))$ نشان‌دهنده شیب خط مماس بر منحنی در طرف راست نقطه و مشتق چپ $(f'_-(x_\circ))$ نشان‌دهنده شیب خط مماس بر منحنی در طرف چپ نقطه $x_\circ$ است. واضح است که اگر $f'_+(x_\circ)=f'_-(x_\circ)$ تابع در نقطه‌ی $x_\circ$ مشتق‌پذیر خواهد بود.

مثال ۷۳: مشتق‌پذیری تابع $f(x)=|x^2-1|$ را در نقطه‌ی $x=-1$ بررسی کنید.

$$y=\begin{cases} x^2-1 & x^2-1\geq 0 \quad x^2\geq 1 \quad |x|\geq 1 \quad x\geq 1 \text{ یا } x\leq -1 \\ -x^2+1 & x^2-1<0 \quad x^2<1 \quad |x|<1 \quad -1<x<1 \end{cases}$$

$D_f: \mathbb{R}$



$$y'=\begin{cases} 2x & x>1 \text{ یا } x<-1 \\ -2x & -1<x<1 \end{cases}$$

$f'_+(1)=2 \neq f'_-(1)=-2$

$f'_+(-1) \neq f'_-(-1)$

$D_{f'}=\mathbb{R}-\{\pm 1\}$

تست ۷۴: در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=x\sqrt{x}+|x-1|$ مقدار $f'_+(1)+3f'_-(1)$ کدام است؟ *(سراسری ۹۰)*

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ✓ ۴) ۵

$1^+: \ f(x)=x^{3/2}+x-1 \qquad f'(x)=\frac{3}{2}x^{1/2}+1 \xrightarrow{x=1} \frac{5}{2}$

$1^-: \ f(x)=x^{3/2}-x+1 \qquad f'(x)=\frac{3}{2}x^{1/2}-1 \xrightarrow{x=1} \frac{1}{2}$

تست ۷۵: مشتق چپ تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}$ در نقطه‌ی $x=0$ کدام است؟ *(سراسری ۸۹)*

مشتق در نقطه را با تعریف برو:

۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۲) $-\sqrt{2}$ ۳) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۴) $\sqrt{2}$

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

$$f'(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}-\cancel{f(0)}}{x-0}=\frac{\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}}{x}\cdot\frac{\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}}$$

$$\frac{\sqrt{\underbrace{1-(1-x^2)}_{=x^2}}=|x|=-\cancel{x}}{\cancel{x}\left(\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}\right)}=-\frac{1}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

تست ۷۶: اگر $f(x)=\sqrt{x^۳-۳x+۲}$ باشد، $f'_-(۱)$ برابر کدام است؟

۱) $-\sqrt{۳}$ ✓ ۲) $-\sqrt{۲}$ ۳) $\sqrt{۲}$ ۴) $\sqrt{۳}$

$(x-1)(x+2)$

$$f'_-(1)=\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-\cancel{f(1)}^{\text{صفر}}}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{\sqrt{x^3-3x+2=(x-1)(x^2+x-2)}}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1^-}\frac{\sqrt{(x-1)^2(x+2)}}{\cancel{x-1}}=\frac{|x-1|\sqrt{x+2}}{}=-\cancel{(x-1)}\sqrt{x+2}=-\sqrt{3}$$

$$\begin{array}{r|l} x^3-3x+2 & x-1 \\ \hline -x^3+x^2 & x^2+x-2 \\ x^2-3x & \\ -x^2+x & \\ -2x+2 & \end{array}$$

مشتق توابع شامل جزء صحیح

برای تعیین مشتق توابع شامل براکت در یک نقطه باز هم باید به پیوستگی تابع در آن نقطه دقت کنیم. اگر تابع پیوسته باشد، برای محاسبه مشتق ابتدا حاصل براکت را به ازای آن نقطه تعیین کرده سپس مشتق‌گیری می‌کنیم.

نکته: توابع شامل براکت در نقاطی که داخل براکت عدد صحیح نشود، پیوسته خواهند بود.

تست ۷۷: در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=|x|.[x]$، مقدار $f'_-(\circ)-f'_+(\circ)$ کدام است؟ *(سراسری تجربی ۸۷)*

۱) -۱ ۲) صفر ۳) ۱ ✓ ۴) ۲

$0^+ :\quad f(x)=x(\text{صفر})=0 \longrightarrow f'(0^+)=0$

$0^- :\quad f(x)=(-x)(-1)=x \longrightarrow f'(0^-)=1$

$$\Big\}\ f'_-(0)-f'_+(0)=1$$

تست ۷۸: تابع $f(x)=x^۲[x]$ در نقطه‌ی $x=۱$:

۱) مشتق دارد. ۲) فقط مشتق چپ دارد.

۳) فقط مشتق راست دارد. ✓ ۴) نه مشتق راست دارد نه مشتق چپ.

$f(1^+)=1=f(1)\neq f(1^-)=0$ ناپیوسته است

ولی پیوستگی راست دارد. در راست $x=1$ یعنی 1^+ به صورت

$f(x)=x^2[1^+]=x^2 \longrightarrow f'(x)=2x \xrightarrow{1^+} 2$

زیرا از راست پیوسته است.

$y = f(g(x)) \to y' = g'(x)\, f'(g(x)) \xrightarrow{x=\frac{۳}{\sqrt{۸}}} g'(\frac{۳}{\sqrt{۸}})\, f'(۲) = (\frac{-۱۶}{\sqrt{۲}})(۶۴)$

تست ۷۹: فرض کنید $f(x) = (x[x^۲ + \frac{۱}{۲}])^۲ + ۱$ و $g(x) = \frac{۱}{\sqrt[۳]{x^۲ - ۱}}$. مقدار مشتق تابع fog در $x = \frac{۳}{\sqrt{۸}}$، چند برابر $(-۱۲۸\sqrt{۲})$ است؟ (سراسری تجربی ۱۴۰۰)

$g(x) = (x^۲ - ۱)^{-\frac{۱}{۳}}$

$f(x) = ۱۶x^۲ + ۱$

$f'(x) = ۳۲x$

$g'(x) = -\frac{۲x}{۳}(x^۲ - ۱)^{-\frac{۴}{۳}} = -\frac{۱۶}{\sqrt{۲}}$

۱) -۴ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ «۴» ـ می‌دانیم $(fog)'(x) = g'(x)f'(g(x))$ پس باید $g'(\frac{۳}{\sqrt{۸}})$ و $f'(g(\frac{۳}{\sqrt{۸}}))$ را پیدا کنیم:

$$g(x) = \frac{۱}{\sqrt[۳]{x^۲ - ۱}} = (x^۲ - ۱)^{-\frac{۱}{۳}} \Rightarrow g'(x) = -\frac{۱}{۳}(x^۲ - ۱)^{-\frac{۴}{۳}}(۲x) = -\frac{۲x}{۳\sqrt[۳]{(x^۲ - ۱)^۴}}$$

$$\Rightarrow g'(\frac{۳}{\sqrt{۸}}) = -\frac{۲\frac{۳}{\sqrt{۸}}}{۳\sqrt[۳]{(\frac{۹}{۸} - ۱)^۴}} = -\frac{\frac{۲\times۳}{\sqrt{۸}}}{۳(\frac{۱}{۲})^۴} = -\frac{۳۲}{\sqrt{۸}} = \frac{-۳۲}{۲\sqrt{۲}} = -\frac{۱۶}{\sqrt{۲}}$$

و چون:

$$g(\frac{۳}{\sqrt{۸}}) = \frac{۱}{\sqrt[۳]{(\frac{۹}{۸} - ۱)}} = \frac{۱}{\sqrt[۳]{\frac{۱}{۸}}} = ۲$$

پس باید $f'(۲)$ را پیدا کنیم:

$$f(x) = (x\overbrace{[x^۲ + \frac{۱}{۲}]}^{[۴+\frac{۱}{۲}]=۴})^۲ + ۱ \Rightarrow f(x) = (۴x)^۲ + ۱ \Rightarrow f'(x) = ۳۲x \Rightarrow f'(۲) = ۳۲ \times ۲ = ۶۴$$

بنابراین $(fog)'(\frac{۳}{\sqrt{۸}})$ برابر است با:

$$(fog)'(\frac{۳}{\sqrt{۸}}) = g'(\frac{۳}{\sqrt{۸}})f'(۲) = -\frac{۱۶}{\sqrt{۲}} \times ۶۴ = -۸\sqrt{۲} \times ۶۴ = (-۱۲۸\sqrt{۲}) \times ۴$$

پس حاصل مشتق، ۴ برابر $(-۱۲۸\sqrt{۲})$ است.

تست ۸۰: اگر $f(x) = \frac{(x-۱)^۲}{x[۲x] + [-x]}$ باشد، $f'_+(۱) + f'_-(۱)$ برابر کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$ ✓

$۱^+ : \quad f(x) = \frac{(x-۱)^۲}{۲x-۲} = \frac{(x-۱)^۲}{۲(x-۱)} = \frac{x-۱}{۲} = \frac{x}{۲} - \frac{۱}{۲} \qquad f'(۱^+) = \frac{۱}{۲}$

$۱^- : \quad f(x) = \frac{(x-۱)^۲}{x-۱} = x - ۱ \qquad f'(۱^-) = ۱$

تست ۸۱: اگر $f(x)=\sqrt{x^{2}-[x]+|x|}$ باشد، $\lim\limits_{h\to 0^{+}}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$ کدام است؟ (سراسری ریاضی ۹۷)

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{5}{4}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $\frac{5}{2}$

$f'(1^{+}):$

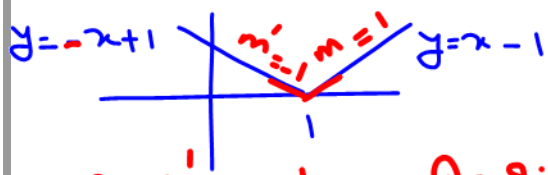
$f(x)=\sqrt{x^{2}-1+x}$

$f'(x)=\dfrac{2x+1}{2\sqrt{x^{2}+x-1}}$

$f'(1^{+})=\dfrac{3}{2}$

مشتق‌پذیری توابع شامل قدرمطلق

۱) در تابع $y=|f(x)|$ (که $f(x)$ تابعی پیوسته باشد)، در ریشه‌های سادهٔ مرتبه اول داخل قدرمطلق، تابع مشتق‌ناپذیر است. به این نقاط، گوشه‌ای می‌گویند.



$mm'=-1 \longrightarrow \theta=90^{\circ}$

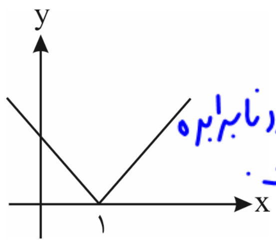
مثال ۸۲: مشتق‌پذیری $f(x)=|x-1|$ را در $x=1$ بررسی کنید.

پاسخ: چون به ازای $x=1$ تابع صفر می‌شود بهتر است از تعریف مشتق استفاده کنیم:

$$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{|x-1|-0}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{|x-1|}{x-1}\ \underset{\text{حد چپ و راست را جدا کن}}{\overset{\frac{0}{0}\ \text{قدرمطلق‌دار}}{=\!=\!=\!=}}\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1^{+}}\dfrac{x-1}{x-1}=1\\[2mm] \lim\limits_{x\to 1^{-}}\dfrac{-(x-1)}{x-1}=-1\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}f'_{+}(1)=1\\ f'_{-}(1)=-1\end{cases}\Rightarrow f'_{+}(1)\neq f'_{-}(1)$$

مشتق چپ و راست f را در $x=1$ نابرابرند پس تابع در این نقطه مشتق‌پذیر نیست. به این نقطه گوشه می‌گویند.



نقطه‌ای گوشه است که مشتق چپ و راست عدد نابرابره یا یکی ∞ و دیگری عدد است.

۲) مشتق $y=|f(x)|$ (که در آن $f(x)$ پیوسته است) در نقاطی که $f(x)$ دارای مرتبهٔ بزرگ‌تر از ۱ باشد مشتق‌پذیر است و مشتق تابع در این نقاط برابر صفر است. یعنی منحنی تابع در این نقاط بر محور xها مماس است.

ریشه غیر ساده اما در ریشه‌های ساده داخل قدرمطلق مشتق‌پذیر نیست

$A(-\infty,+\infty)$ x^{n} بزرگ

$f(x)=(x-a)(x-b)^{2}(x-c)^{3}=x^{6}+\dots$

$y=|f(x)|$

نکته: توابع $y=|u|$ در نقاط ریشه ساده u مشتق ناپذیرند (گوشه زاویه‌دار)

مثال ۸۳ : مشتق‌پذیری تابع $y=|(x-1)^3|$ را در $x=1$ بررسی کنید.

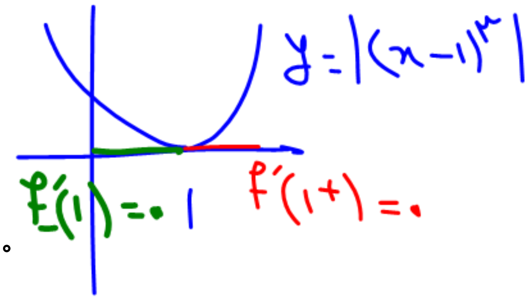
پاسخ: اولاً این تابع در $x=1$ پیوسته است. ثانیاً برای پیداکردن مشتق، بهتر است از تعریف مشتق استفاده کنیم:

$$y'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{|(x-1)^3|-0}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{|(x-1)^3|}{x-1}$$

حد چپ و راست را جداگانه پیدا می‌کنیم:

$$y'_+(1)=\lim_{x\to 1^+}\frac{|\overbrace{(x-1)^3}^{+}|}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1)^3}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}(x-1)^2=0$$

$$y'_-(1)=\lim_{x\to 1^-}\frac{|\overbrace{(x-1)^3}^{-}|}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{-(x-1)^3}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}-(x-1)^2=0$$



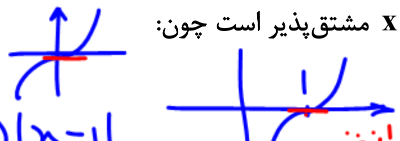
تابع $|(x-1)^3|$ در $x=1$ مشتق‌پذیر است: $y'_+(1)=y'_-(1)$

۳) تابع $y=h(x)|f(x)|$ (که f و h پیوسته هستند) در ریشه‌های مشترک f و h مشتق‌پذیر هستند. مثلاً $y=(x-1)|x-1|$ در $x=1$ مشتق‌پذیر است چون:

$$y'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)|x-1|-0}{x-1}=\lim_{x\to 1}|x-1|=0 \Rightarrow y'(1)=0$$

$y=x|x|$

$y=(x-1)|x-1|$



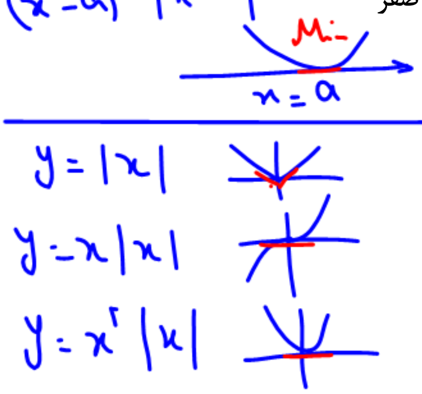
نکته: تابع $y=(x-a)^n|x-a|$ در $x=a$ مشتق‌پذیر است هرگاه $n\ge 1$ $(n\in\mathbb{N})$ باشد.

$y=x^2|x|$

تست ۸۴: اگر $f(x)=1-|x|$ باشد، تعداد نقاط مشتق‌ناپذیر تابع با ضابطه‌ی $y=f(f(x))$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

$y=(x-a)^{2n}|x-a|$



$y=f(f(x))=1-|f(x)|=1-|1-|x||$

$x=0\ ,\ \pm 1$ ۳ نقطه مشتق ناپذیر

$x=0$

$1-|x|=0$

$1=|x|$

$\pm 1=x$

تست ۸۵: در نقطهٔ گوشهٔ تابع $f(x)=\sqrt{x+m}\,|x-1|+x^2$، نیم‌مماس‌های راست و چپ بر هم عمودند. مقدار m کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

$x=1$ $\quad mm'=-1$

شرط عمود بودن $mm'=-1$

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x+m}\,(x-1)+x^2 & x\ge 1\\ -\sqrt{x+m}\,(x-1)+x^2 & x<1\end{cases}$$

چون مماس چپ و راست در $x=1$ بر هم عمودند ضرب شیبا شونو -1 می‌دارم:

$$f'_+(1).f'_-(1)=-1$$

$$f'(x)=\begin{cases}(x-1)'\sqrt{1+m}+2x & x>1 \longrightarrow f'_+(1)=2+\sqrt{1+m}\\ -(x-1)'\sqrt{1+m}+2x & x<1 \longrightarrow f'_-(1)=2-\sqrt{1+m}\end{cases}$$

$4-(1+m)=-1$

$4-1-m=-1$

$\boxed{4=m}$

تست ۸۶: به ازای کدام مقدار a، تابع $f(x)=x|x-2|-a|x-2|$ در $x=2$ مشتق‌پذیر است؟

۱) $a=2$ ۲) $a\in\varnothing$ ۳) $a=-2$ ۴) $a=0$

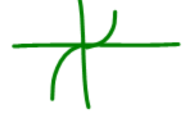
یعنی $x=2$ که ریشه‌ی داخل قدرمطلقه ضریب را نیز صفر کند: $2-a=0$
$2=a$

$f(x)=|x-2|(x-a)$

$\rightsquigarrow f(x)=(x-2)|x-2|$

بشناس:

$y=x|x|$



تست ۸۷: اگر تابع $f(x)=(2x^2+ax+b)|(x-1)(x-2)|$ در $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر باشد، b کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) -6

اگر پرانتز $2x^2+ax+b$ نبود در $x=1,2$ مشتق‌پذیر نبود پس حالا حتماً ۱ و ۲ پرانتز و صفر می‌کند و ریشه‌های داخل پرانتزه

$f(x)=2(x-1)(x-2)|(x-1)(x-2)|$

$f(x)=2(x^2-3x+2)|(x-1)(x-2)|$

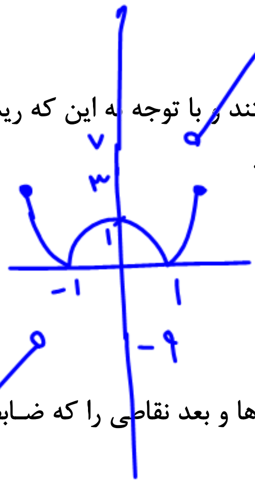
$f(x)=(2x^2\underbrace{-6}_{a}x+\underbrace{4}_{b})|(x-1)(x-2)|$

تست ۸۸: تابع $y=x|x^2-x|$، در چند نقطه مشتق‌پذیر نیست؟

۱) ۲ ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ۳

$y=x|x(x-1)|$

پاسخ: گزینه‌ی «۳» ـ در تابع $f(x)=x|x^2-x|$ ریشه‌های عبارت داخل قدرمطلق $x=0$ و $x=1$ هستند و با توجه به این که ریشه‌ی $x=0$ همان ریشه‌ی x خارج قدرمطلق است، پس تابع در $x=0$ مشتق‌پذیر و در $x=1$ مشتق‌ناپذیر است.



تست ۸۹: تابع $f(x)=\begin{cases}|x^2-1| & |x|\le 2\\ 4x-1 & |x|>2\end{cases}$ در چند نقطه مشتق‌پذیر نیست؟

$-2\le x\le 2$

$x\ge 2$ یا $x\le -2$

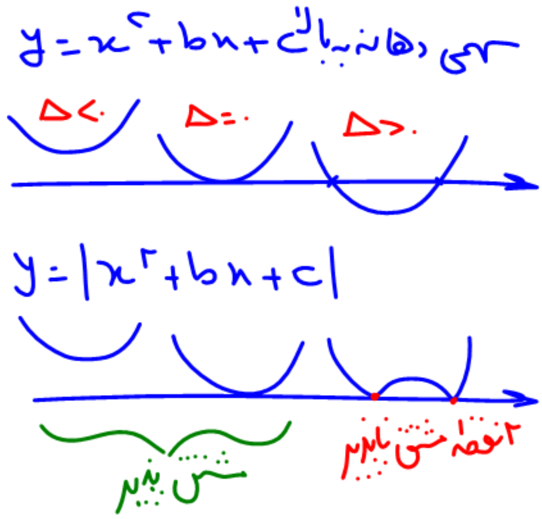
۱) ۱ ۲) ۴ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ: گزینه‌ی «۲» ـ برای بررسی مشتق‌پذیری تابع $f(x)=\begin{cases}|x^2-1| & |x|\le 2\\ 4x-1 & |x|>2\end{cases}$ اول هر کدام از ضابطه‌ها و بعد نقاطی را که ضابطه‌ی تابع در آن عوض می‌شود، بررسی می‌کنیم. ضابطه‌ی $|x^2-1|$ در نقاط $x=1$ و $x=-1$ مشتق‌پذیر نیست (که در محدوده‌ی تعریف ضابطه هستند و ریشه‌های ساده داخل قدرمطلق‌اند) ضابطه‌ی $4x-1$ همواره مشتق‌پذیر است. ضابطه‌ی تابع در نقاط $x=2$ و $x=-2$ عوض می‌شود، پس:

$$f(x)=\begin{cases}|x^2-1| & |x|\le 2\\ 4x-1 & |x|>2\end{cases}$$

$$x = ۲ \quad \text{پیوستگی} \begin{cases} \text{مقدار} = ۳ \\ \text{حدراست} = \lim\limits_{x\to ۲^+} ۴x-۱ = ۷ \\ \text{حدچپ} = \lim\limits_{x\to ۲^-} |x^۲-۱| = ۳ \end{cases} \Rightarrow \text{ناپیوسته} \Rightarrow \text{مشتق‌ناپذیر}$$

$$x = -۲ \quad \text{پیوستگی} \begin{cases} \text{مقدار} = ۳ \\ \text{حدراست} = \lim\limits_{x\to (-۲)^+} |x^۲-۱| = ۳ \\ \text{حدچپ} = \lim\limits_{x\to (-۲)^-} ۴x-۱ = -۹ \end{cases} \Rightarrow \text{ناپیوسته} \Rightarrow \text{مشتق‌ناپذیر}$$



پس تابع در چهار نقطه مشتق‌پذیر نیست.

مثال (مهم) ۹۰: حدود m را برای آن که تابع $f(x) = |x^۲ + mx + ۱|$:

الف) در دو نقطه مشتق‌ناپذیر باشد، بیابید.

$\Delta = m^2 - 4 > 0$

$m^2 > 4$

$|m| > 2$

$m < -2$ یا $m > 2$

ب) در $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر باشد، بیابید.

$\Delta \leq 0$

$m^2 - 4 \leq 0 \quad m^2 \leq 4 \quad |m| \leq 2$

$-2 \leq m \leq 2$

بررسی مشتق‌پذیری تابع شامل جزء صحیح

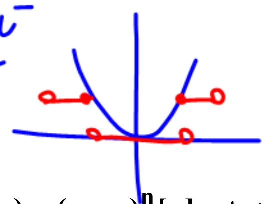
الف) تابع $[f(x)]$ در نقاطی که پیوسته است، مشتق‌پذیر بوده و مشتق آن همواره صفر است. در نقاط ناپیوسته نیز مشتق‌ناپذیر است. (در نقاط ناپیوسته تابع از هر طرف که پیوسته باشد از همان طرف مشتق‌پذیر است و مشتق آن صفر است.)

مثال ۹۱ : اگر $f(x) = [x^۲]$، مشتق‌پذیری آن را در نقاط $x = \frac{۳}{۲}$ و $x = ۲$ بررسی کنید.

۱) $f(x) = [x^۲] \ , \ x = \frac{۳}{۲}$

$f(\frac{۳}{۲}) = [\frac{۹}{۴} \notin \mathbb{Z}] \Rightarrow f'(\frac{۳}{۲}) = ۰$

نکته: $y=[u]$ در نقاطی که u صعودی اکید است، $[u]$ ناپیوسته است پیوستگی راست دارد و در نقاطی که u نزولی اکید است $[u]$ ناپیوسته است پیوستگی چپ دارد. در Min نسبی u تابع $[u]$ پیوسته و مشتق آن صفر.



۲) $f(x)=[x^2]\ ,\ x=2$

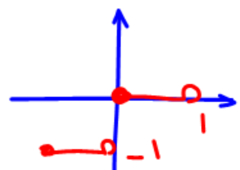
$f(2)=[4\in\mathbb{Z}]$

$$\begin{cases} f(2)=4 \\ f(2^+)=[4^+]=4 \xrightarrow{\text{از راست پیوسته است.}} f'_+(2)=0 \\ f(2^-)=[4^-]=3 \Rightarrow f'_-(2): \text{وجود ندارد} \end{cases}$$

ب) تابع $f(x)=(x-a)^n[x]$ در نقطهٔ $a\in\mathbb{Z}$ باشد با شرط $n\geq 2$ مشتق‌پذیر است. اگر $n=1$ پیوسته ولی مشتق‌ناپذیر است. به مثال‌های زیر توجه کنید:

می‌خواهیم توابع $[x]$، $x[x]$ و $x^2[x]$ را در $x=0$ از لحاظ پیوستگی و مشتق‌پذیری مقایسه کنیم:

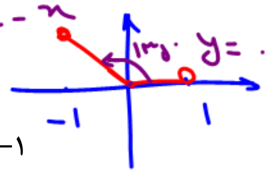
۱) $f(x)=[x] \Rightarrow \begin{cases} f(0)=0 \\ f(0^+)=0 \xrightarrow{\text{از راست پیوسته}} f'_+(0)=0 \\ f(0^-)=-1 \Rightarrow f'(0): \text{وجود ندارد} \end{cases}$



این تابع در $x=0$ ناپیوسته، مشتق‌ناپذیر است.

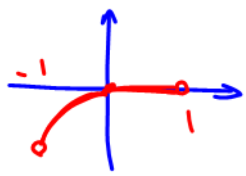
۲) $f(x)=x[x] \Rightarrow \begin{cases} f(0)=0 \\ f(0^+)=0 \Rightarrow f'_+(0)=0 \\ f(0^-)=x[0^-]=x(-1)=-x \Rightarrow f'_-(0)=-1 \end{cases}$

$f'_-(0)=-1$



$f'_+(0)=0$

تابع در $x=0$ پیوسته است. مشتق راست و چپ هم دارد ولی چون $f'_+(0)\neq f'_-(0)$ شد پس مشتق‌ناپذیر است. به این نقطه گوشه می‌گویند.



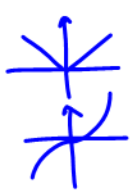
۳) $f(x)=x^2[x] \Rightarrow \begin{cases} f(0)=0 \\ f(0^+)=0 \Rightarrow f'_+(0)=0 \\ f(0^-)=x^2[0^-]=x^2(-1)=-x^2 \Rightarrow f'_-(0)=-2x=0 \end{cases}$

تابع در $x=0$ پیوسته است و مشتق چپ و راست هم دارد و چون $f'_+(0)=f'_-(0)$ شد پس در $x=0$ مشتق‌پذیر است.

جمع‌بندی:

یک بار به مقایسه‌ها توجه کنید: (در $x=0$)

$$\begin{cases} y=|x| \ \text{پیوسته مشتق ناپذیر} \\ y=x|x| \ \text{پیوسته مشتق پذیر} \end{cases}$$



$$\begin{cases} y=[x] \ \text{ناپیوسته} \\ y=x[x] \ \text{پیوسته مشتق ناپذیر} \\ y=x^2[x] \ \text{پیوسته مشتق پذیر} \end{cases}$$

نقطهٔ $x=0$ در $|x|$ و $x[x]$ نقطهٔ گوشه‌ای محسوب می‌شود.

تست ۹۲: تابع $f(x)=(x-1)[x]$ و $f(x)=(x-1)^2[x]$ به ترتیب در $x=1$، .... و .... هستند.

۱) فقط پیوسته، فقط پیوسته   ۲) مشتق‌پذیر، مشتق‌پذیر

۳) فقط پیوسته، مشتق‌پذیر ✓   ۴) مشتق‌پذیر، فقط پیوسته

اگر عددی داخل [ ] را صحیح کند و ضریب براکت را با ریشه ساده صفر کند مثل $x=1$ در $y=(x-1)[x]$ تابع در آن نقطه فقط پیوسته است اما اگر آن عدد یعنی $x=1$ ضریب براکت را با ریشه مکرر (خواه مرتبه زوج خواه فرد) صفر کند مشتق‌پذیر هم می‌شود: $y=(x-1)^2[x]$

تست ۹۳: اگر تابع $f(x)=(x^2+ax+b)[x]$ در $x=3$ مشتق‌پذیر باشد، $a+b$ کدام است؟

۱) صفر   ۲) ۳   ۳) ۳-   ۴) مقداری برای a و b وجود ندارد.

پس حتماً ضریب [x] را با ریشه مضاعف صفر کند.

$y=(x-3)^2[x]$

$y=(x^2-6x+9)[x]$

$a+b=3$

مشتق‌پذیری روی یک بازه

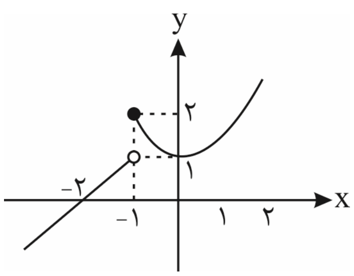
تابع f روی بازهٔ (a,b) مشتق‌پذیر است، هرگاه f در هر نقطه در این بازه مشتق‌پذیر باشد، تابع f روی بازهٔ $[a,b)$ مشتق‌پذیر است، هرگاه f در بازهٔ (a,b) مشتق‌پذیر باشد و در نقطهٔ a مشتق راست داشته باشد. تابع f روی بازهٔ $(a,b]$ مشتق‌پذیر است، هرگاه f در بازهٔ (a,b) مشتق‌پذیر باشد و در نقطهٔ b مشتق چپ داشته باشد.

تابع f روی بازهٔ $[a,b]$ مشتق‌پذیر است، هرگاه f در بازهٔ (a,b) مشتق‌پذیر باشد و در نقطهٔ a مشتق راست و در b مشتق چپ داشته باشد.

تست ۹۴ : نمودار تابع $f(x)=\begin{cases} x+2 & x<-1 \\ x^2+1 & x\geq -1 \end{cases}$ روی چند تا از بازه‌های $[-3,-2]$، $[-2,-1]$، $(-3,-1)$، $[-2,0]$، $[-1,0]$ و $[0,2]$ مشتق‌پذیر است؟

۱) ۴   ۲) ۵   ۳) ۶   ۴) صفر

پاسخ: بررسی تک‌تک بازه‌ها سخت و زمان‌بر است، پس تابع را رسم می‌کنیم:



تابع در نقطهٔ $x=-1$ ناپیوسته است و در این نقطه پیوستگی راست دارد و در $x=-1$ مشتق راست هم داریم (نیم مماس راست داریم) ولی مشتق چپ نداریم.

$[-2,0]$ مشتق‌ناپذیر است چون در $x=-1$ مشتق ندارد.

$[0,2]$: مشتق‌پذیر

$(-3,-1)$: مشتق‌پذیر

$[-1,0]$: مشتق‌پذیر

$[-2,-1]$: مشتق‌ناپذیر، چون در $x=-1$ مشتق چپ ندارد.

$[-3,-2]$: مشتق‌پذیر

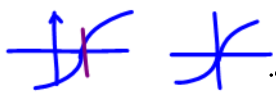
تست ۹۵ : نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=[x+\frac{1}{3}]+[x]$ روی بازهٔ $(0,3)$ در چند نقطه مشتق‌ناپذیر است؟ *(ریاضی خارج)*

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

پاسخ: تابع $y=[x]$ در بازهٔ $(0,3)$ در نقاط $x=1$ و $x=2$ ناپیوسته و مشتق‌ناپذیر است. تابع $y=[x+\frac{1}{3}]$ هم در بازهٔ $(0,3)$ در نقاط $x=\frac{2}{3}$، $x=\frac{5}{3}$، $x=\frac{8}{3}$ ناپیوسته و مشتق‌ناپذیر است. پس این تابع جمعاً در ۵ نقطه ناپیوسته و در نتیجه مشتق‌ناپذیر است.

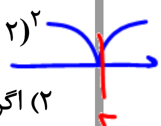
نکته: اگر دو تابع در $x=a$ یکی پیوسته و دیگری ناپیوسته باشد، آن‌وقت مجموعشان در آن نقطه ناپیوسته است. در این سؤال $x=1$ و $x=2$ که باعث ناپیوستگی $[x]$ شدند، تابع $[x+\frac{1}{3}]$ را پیوسته می‌کنند و همچنین نقاط $x=\frac{2}{3},\frac{5}{3},\frac{8}{3}$ که باعث ناپیوستگی $[x+\frac{1}{3}]$ شدند تابع $[x]$ را پیوسته می‌کنند پس هر ۵ نقطه یکی را پیوسته و دیگری را ناپیوسته می‌کنند پس جمعشان نیز حتماً به ازای هر ۵ نقطه ناپیوسته می‌شود.

مشتق‌پذیری رادیکال‌ها



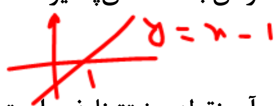
قبلاً در خصوص مماس قائم‌ها صحبت کرده‌ایم ولی در خصوص مشتق‌پذیری یک بار به نکات زیر توجه کنید.

۱) تابع در ریشه‌های زیر رادیکال وقتی توان عبارت زیر رادیکال از فرجه کم‌تر است، مشتق‌پذیر نیست، مثل $y=\sqrt[3]{x}$ و $y=\sqrt[3]{x-1}$ و $y=\sqrt[3]{(x-2)^2}$ به ترتیب در نقاط $x=0$، $x=1$ و $x=2$ مشتق‌ناپذیرند.



۲) اگر توان و فرجه مساوی باشند، چنان‌چه هر دو فرد باشند تابع در آن‌جا مشتق‌پذیر است. مثلاً $y=\sqrt[3]{(x-1)^3}$ چون می‌شود $y=\sqrt[3]{(x-1)^3}=x-1$ پس در $x=1$ مشتق‌پذیر است.

$y=x-1$



۳) اگر توان و فرجه مساوی باشند، چنان‌چه هر دو زوج باشند تابع در آن نقطه مشتق‌ناپذیر است (نقطهٔ گوشه‌ای). مثلاً:

$y=\sqrt{(x-1)^2}=|x-1| \Rightarrow$ در $x=1$ گوشه می‌شود و مشتق‌ناپذیر است.

تیپ‌های متداول

تست ۹۶ : تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{(x-1)(x-2)^3} & x\geq 0\\ |(x+1)(x+2)^2| & x<0\end{cases}$ در چند نقطه مشتق‌پذیر نیست؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

پاسخ: تابع را ساده‌تر می‌نویسیم:

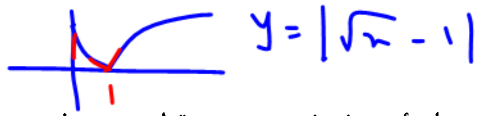
$$f(x)=\begin{cases}(x-2)\sqrt[3]{x-1} & x\ge 0\\ |(x+1)(x+2)^2| & x<0\end{cases}$$

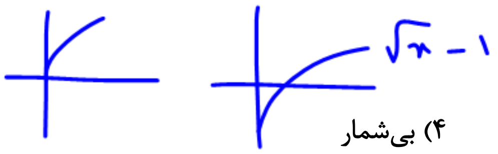
$$\left.\begin{cases}f(0)=(-2)\sqrt[3]{-1}=2\\ f(0^+)=2\\ f(0^-)=(1)(2)^2=4\end{cases}\right\} f(0^+)\neq f(0^-) \text{ ناپیوسته ومشتق‌ناپذیر}$$

تابع در $x=0$ ناپیوسته و مشتق‌ناپذیر است. در $x=1$ که ریشه زیر رادیکال است خط مماس عمودی می‌باشد و مشتق‌پذیر نیست البته $x=1$ در محدودهٔ ضابطهٔ بالایی $(x\ge 0)$ قرار دارد و می‌توانیم به آن گیر بدهیم.

در $x=-1$ از ضابطهٔ پایینی نقطهٔ گوشه (مشتق‌ناپذیر) داریم و در $x=-2$ چون ریشهٔ مرتبهٔ دوم است، مشکلی نداریم:

$\{1,-1,0\}=$ مشتق‌ناپذیرها



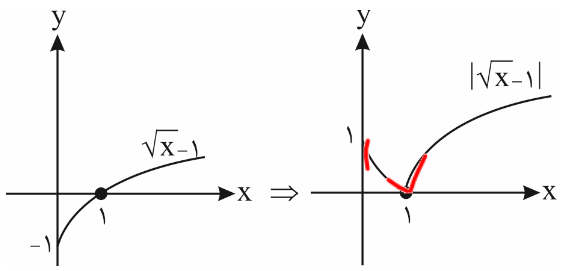


تست ۹۷ : تابع $f(x)=|\sqrt{x}-1|$ در دامنهٔ تعریف خود در چند نقطه مشتق‌پذیر نیست؟

۱) هیچ ۲) یک ۳) دو ۴) بی‌شمار

پاسخ: دامنهٔ $f(x)$ را پیدا می‌کنیم: $x\ge 0 \Rightarrow D_f=[0,+\infty)$

عامل $\sqrt{x}$ در $x=0$ مشتق‌پذیر نیست و عامل $\sqrt{x}-1$ در $x=1$ (ریشهٔ مرتبه اول در داخل قدرمطلق) نقطه گوشه می‌دهد و مشتق‌ناپذیر است. پس تابع در دو نقطه از دامنهٔ تعریفش مشتق‌پذیر نیست. به شکل توجه کنید:



همان‌طور که می‌بینید در $x=0$ (روی محور yها) نیم‌مماس عمودی داریم و $f'_+(0)=-\infty$ است پس مشتق ندارد و در $x=1$ هم نقطهٔ گوشه‌ای ایجاد شده است.

تست ۹۸ : خطوط $x=2$ و $x=a$ بر تابع $f(x)=\sqrt[3]{x^2-6x+b}$ مماس‌اند. مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۲

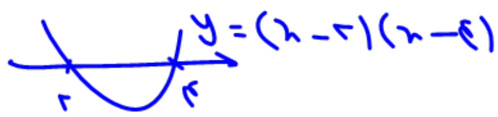
پاسخ: چون خطوط $x=2$ و $x=a$ هر دو موازی محور yها هستند پس مماس عمودی‌اند بنابراین هر دو، ریشهٔ زیر رادیکال هستند:

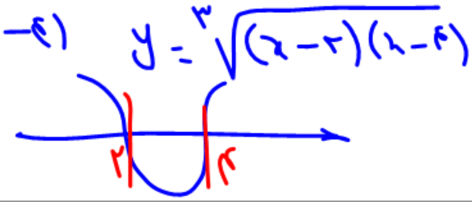
$$x=2 \Rightarrow \sqrt[3]{4-12+b}=0 \Rightarrow -8+b=0 \Rightarrow b=8$$

حالا $b=8$ را جاگذاری می‌کنیم: $f(x)=\sqrt[3]{x^2-6x+8}$

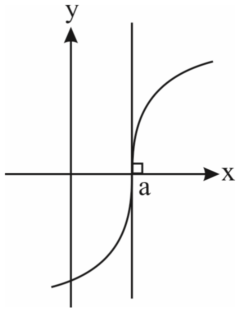
اکنون ریشه‌های زیر رادیکال را پیدا می‌کنیم: $x^2-6x+8=0 \Rightarrow (x-2)(x-4)=0 \Rightarrow \begin{cases}x=2\\x=4\end{cases}$

$x=2$ را که خودش گفته بود، پس حتماً $x=4$ همان $x=a$ است پس $a=4$ بنابراین: $a+b=4+8=12$





تست ۹۹ : اگر نمودار f به صورت مقابل باشد، کدام گزینه صحیح است؟



۱) $\begin{cases} f'_-(a) = -\infty \\ f'_+(a) = +\infty \end{cases}$

۲) $\begin{cases} f'_-(a) = +\infty \\ f'_+(a) = -\infty \end{cases}$

صعود

نزولی

نیم مماس قائم

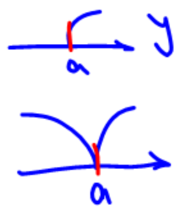
نیم مماس قائم

۳) $\begin{cases} f'_-(a) = +\infty \\ f'_+(a) = +\infty \end{cases}$ ✓

۴) $\begin{cases} f'_-(a) = -\infty \\ f'_+(a) = -\infty \end{cases}$

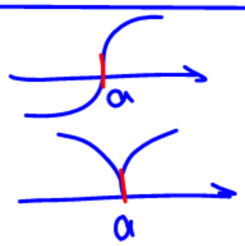
نتیجه: $y = \sqrt{x-a}$

$y = \sqrt[3]{(x-a)^2}$



$y = \sqrt[3]{x-a}$

$y = \sqrt[3]{|x-a|}$



بررسی نمودار مشتق

برای آن که از نمودار تابع، پی به وضعیت نمودار مشتق ببریم کافی است به موارد زیر توجه داشته باشیم:

۱) اگر تابع $f(x)$ در یک بازه اکیداً صعودی باشد تابع مشتق آن در ناحیهٔ اول یا دوم قرار می‌گیرد. این جمله به این معنی است که مشتق تابع یعنی $f'(x)$ در این بازه مثبت است پس بالای محور xها قرار می‌گیرد. به جملهٔ زیر نیز توجه داشته باشید:

اگر در نقطهٔ $x = a$ شیب خط مماس بر منحنی تابع مثبت باشد، نمودار تابع $f'(x)$ در این نقطه بالای محور xها قرار می‌گیرد.

۲) اگر تابع $f(x)$ در یک بازه اکیداً نزولی باشد، تابع مشتق آن در ناحیهٔ سوم یا چهارم قرار می‌گیرد. این جمله به این معنی است که مشتق تابع یعنی $f'(x)$ در این بازه منفی است پس پایین محور xها قرار می‌گیرد. به جملهٔ زیر نیز توجه داشته باشید:

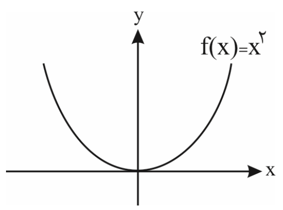
اگر در نقطهٔ $x = a$ شیب خط مماس بر منحنی تابع منفی باشد، نمودار تابع $f'(x)$ در این نقطه پایین محور xها قرار می‌گیرد.

۳) اگر تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x = a$ خط مماس افقی داشته باشد، تابع مشتق یعنی $f'(x)$ در این نقطه صفر است و برعکس.

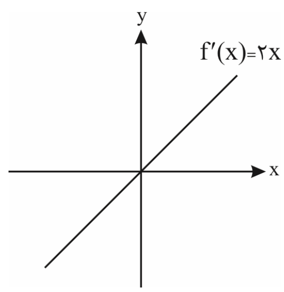
۴) اگر تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x = a$ خط مماس قائم داشته باشد (و یا نیم‌مماس قائم)، تابع مشتق یعنی $f'(x)$ در این نقطه حد بی‌نهایت دارد.

۵) اگر در تابع $f(x)$ نقطهٔ $x = a$ یک نقطهٔ گوشه‌ای باشد تابع مشتق یعنی $f'(x)$ در این نقطه تعریف نمی‌شود و حد راست و چپ $f'(x)$ در این نقطه نابرابر (و حداقل یکی از این حدها متناهی یعنی عدد مشخص) می‌شود.

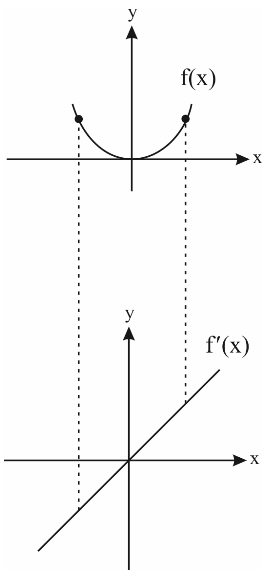
مثال ۱۰۰: به نمودار تابع $f(x) = x^2$ توجه کنید:



مشتق این تابع برابر $f'(x) = 2x$ است که شکل آن به صورت مقابل است:

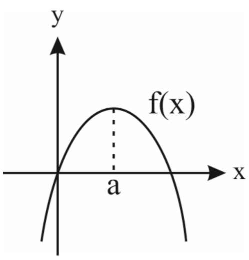


طبق شکل، در $x>0$ تابع $f(x)$ اکیداً صعودی است پس نمودار $f'(x)$ در $x>0$ بالای محور xها قرار می‌گیرد. هم‌چنین در $x<0$ تابع $f(x)$ اکیداً نزولی است پس نمودار $f'(x)$ در $x<0$ پایین محور xها قرار می‌گیرد و در $x=0$ چون به نمودار $f(x)$ خط مماس افقی رسم می‌شود پس شیب خط مماس برابر صفر است پس $f'(x)$ در این نقطه صفر می‌شود و به محور xها برخورد می‌کند. حالا یک بار با دقت به شکل‌های زیر توجه کنید:



می‌بینید که در یک نقطهٔ دلخواه سمت راست مبدأ مختصات، شیب خط مماس بر $f(x)$ مثبت شده است پس در همین نقطه، نمودار $f'(x)$ بالای محور xها قرار گرفته و در یک نقطهٔ دلخواه سمت چپ مبدأ مختصات، شیب خط مماس بر $f(x)$ منفی شده است پس در همین نقطه نمودار $f'(x)$ پایین محور xها قرار گرفته است و در $x=0$ که خط مماس افقی شده، نمودار $f'(x)$ به محور xها برخورد کرده و صفر شده است.

مثال ۱۰۱ : اگر نمودار $f(x)$ به شکل زیر باشد، نمودار $f'(x)$ را رسم کنید.



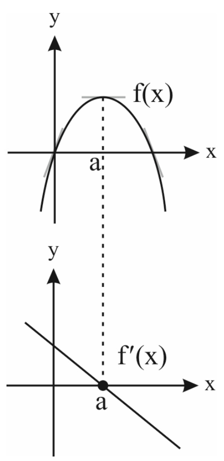
پاسخ: یک بار دیگر $f(x)$ را رسم می‌کنیم و زیر آن نمودار $f'(x)$ با این اطلاعات رسم می‌شود:

الف) در نقطهٔ $x=a$ خط مماس بر $f(x)$ افقی است پس $f'(x)$ در این نقطه صفر است.

ب) در فاصلهٔ $(a,+\infty)$ یعنی $x>a$، نمودار $f(x)$ اکیداً نزولی است (یا به عبارتی شیب خط‌های مماس منفی است) بنابراین $f'(x)$ منفی است و زیر محور xها قرار می‌گیرد.

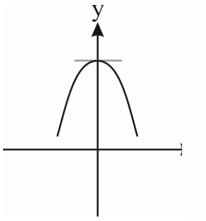
پ) در فاصلهٔ $(-\infty,a)$ یعنی $x<a$، نمودار $f(x)$ اکیداً صعودی است (یا به عبارتی شیب خط‌های مماس مثبت است) بنابراین $f'(x)$ مثبت است و بالای محور xها قرار می‌گیرد.

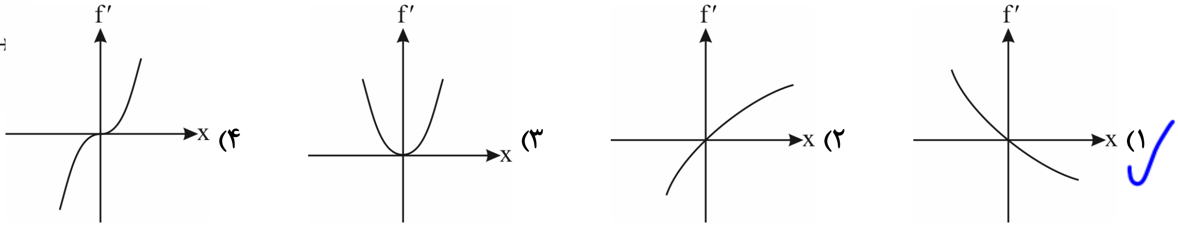
حالا به شکل‌ها توجه کنید:

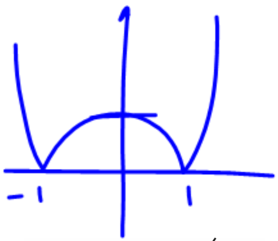


حالا برویم سراغ تست‌ها که نکات دیگر هم ببینیم؛ (البته در اندازه‌ای که موردنیاز کنکور است.)

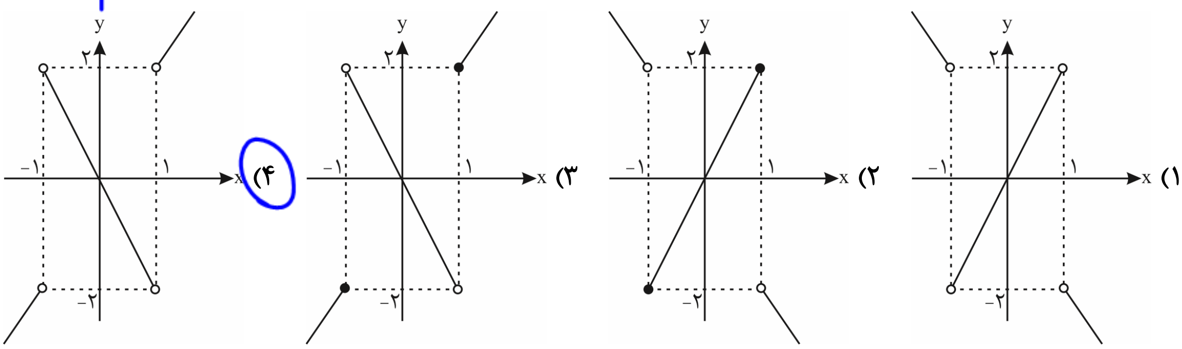
تست ۱۰۲: اگر نمودار $y=f(x)$ در همسایگی $x=0$ به صورت روبه‌رو باشد، نمودار f' در همسایگی $x=0$ به کدام صورت است؟







تست ۱۰۳: نمودار مشتق تابع $f(x)=|x^2-1|$ کدام است؟



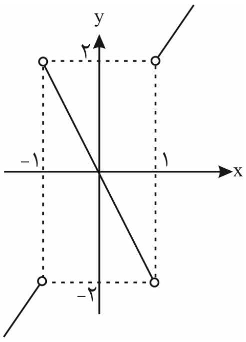
پاسخ: با ضابطه‌بندی تابع خواهیم داشت:

$$f(x)=\begin{cases} x^2-1 & x\geq 1 \text{ یا } x\leq -1 \\ 1-x^2 & -1<x<1 \end{cases}$$

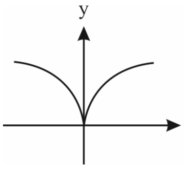
$x=\pm 1$ ریشه‌های ساده داخل قدرمطلق هستند (گوشه) و مشتق‌ناپذیرند.

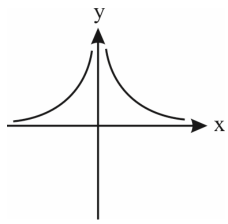
$$f'(x)=\begin{cases} 2x & x>1 \text{ یا } x<-1 \\ \text{تعریف نشده} & x=1\,,\,x=-1 \\ -2x & -1<x<1 \end{cases}$$

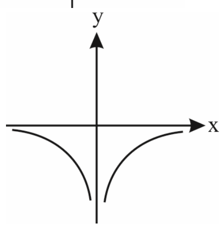
حالا f' را رسم می‌کنیم:

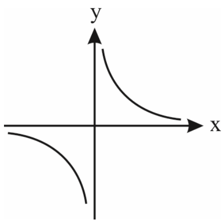


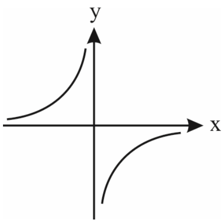
salamianriazi

تست ۱۰۴: هرگاه نمودار تابع f به صورت  باشد، نمودار f' به کدام شکل است؟

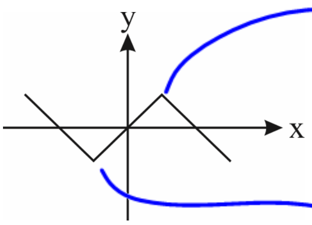
۱) 

۲) 

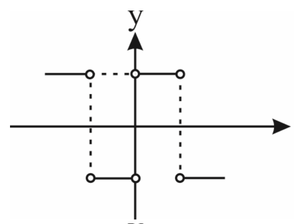
۳) 

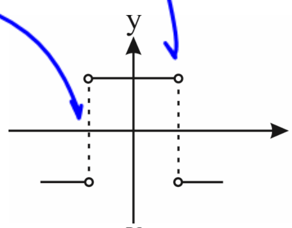
۴) 

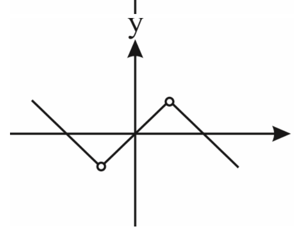
تست ۱۰۵: اگر نمودار تابع f به صورت مقابل باشد، نمودار تابع f' کدام است؟

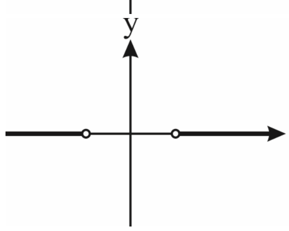


هرجا f گوشه بده
f' ناپیوستگی جهشی میده

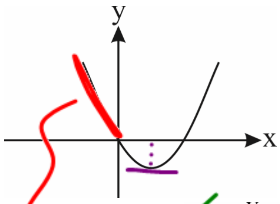
۱) 

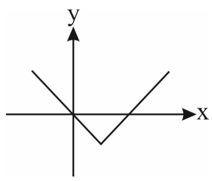
۲) 

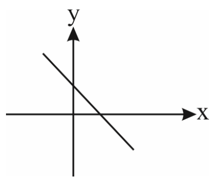
۳) 

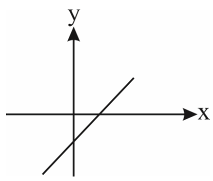
۴) 

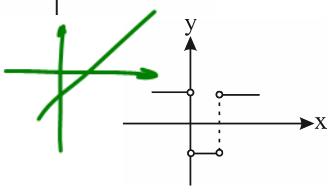
تست ۱۰۶: اگر نمودار تابع **f** به صورت زیر باشد، نمودار تابع مشتق آن کدام می‌تواند باشد؟



۱) 

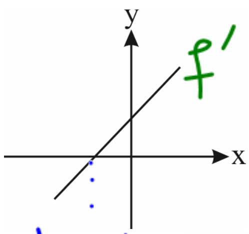
۲) 

۳) 

۴) 

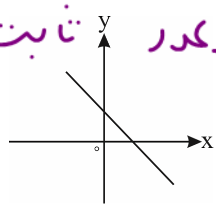
$x<0$ تابع نزولی → $f'<0$ باید زیر x ها باشد

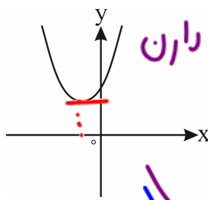
تست ۱۰۷: اگر f' به شکل مقابل باشد، **f** کدام است؟

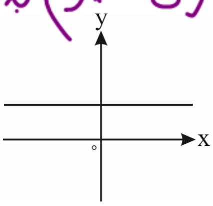


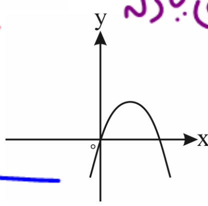
وقتی f میده f′ می‌خواد برای f′ یه جواب منحصر بفرد و یکتا داریم

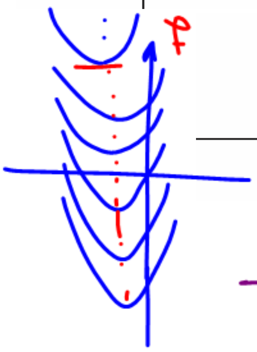
ولی وقتی f′ میده برای f یک دسته منحنی (بی‌شمار) به دست می‌آید که در هر کدوم ثابت فرق دارن

۱) 

۲) 

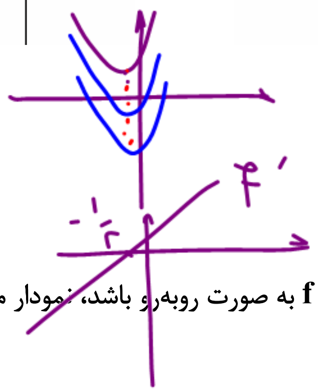
۳) 

۴) 

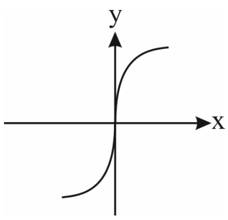


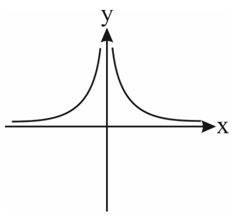
$f(x)=x^2+x+C$

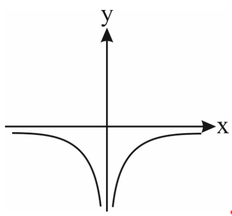
$f'(x)=2x+1$

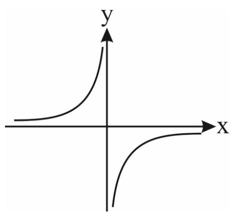


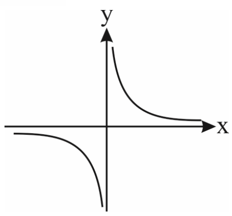
تست ۱۰۸: اگر تابع **f** به صورت روبه‌رو باشد، نمودار مشتق تابع **f** کدام است؟



۱)  ✓

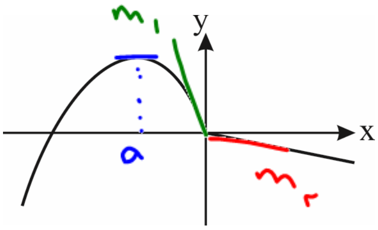
۲) 

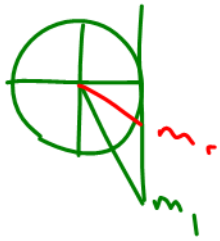
۳) 

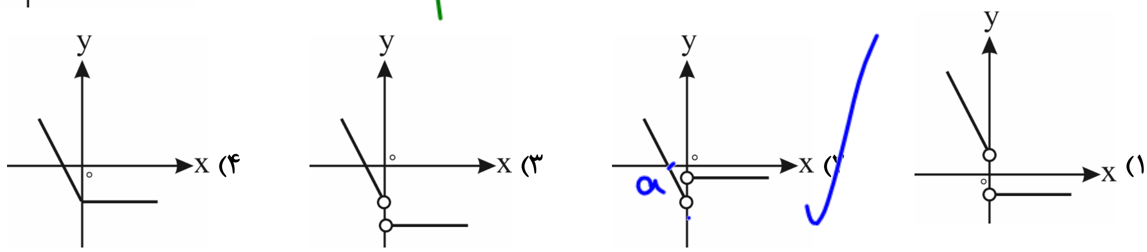
۴) 

برحسب f مماس قائم دارد و مشتق ناپذیر است f′ ستون و مجانب قائم دارد.

تست ۱۰۹: نمودار تابع $\mathbf{f}$ در شکل روبه‌رو، تشکیل شده از بخشی از نمودار یک تابع درجه دوم و یک نیم‌خط است. نمودار $\mathbf{f'}$ شبیه کدام است؟







ضابطه و دامنهٔ تابع مشتق

برای یافتن تابع مشتق تابع با ضابطهٔ $\mathbf{y = f(x)}$ از تابع مشتق می‌گیریم و البته حواسمان هست که $\mathbf{f'(x)}$ در نقاطی تعریف می‌شود که تابع $\mathbf{f}$ در آن نقاط مشتق‌پذیر باشد. به عبارتی باید حواسمان به دامنهٔ مشتق باشد حالا دامنهٔ تابع مشتق اصلاً یعنی چی؟

همان‌طور که قبلاً دیدیم تابع گاهی اوقات و یا در برخی نقاط مشتق‌پذیر نیست. دامنهٔ تابع مشتق مجموعهٔ تمام نقاطی از دامنهٔ تابع $\mathbf{f}$ است که در آن‌ها مشتق $\mathbf{f}$ وجود داشته باشد. حواستان باشد دامنهٔ تابع مشتق، زیرمجموعهٔ دامنهٔ خود تابع است. پس می‌توان نوشت:

$\mathbf{D_{f'} = D_f - \{}$نقاط مشتق‌ناپذیر$\mathbf{\}}$

در توابع چندجمله‌ای اگر دامنه را محدود نکنیم، دامنهٔ تابع با دامنهٔ تابع مشتق برابر است و داریم $\mathbf{D_{f'} = \mathbb{R}}$ و در توابع گویا

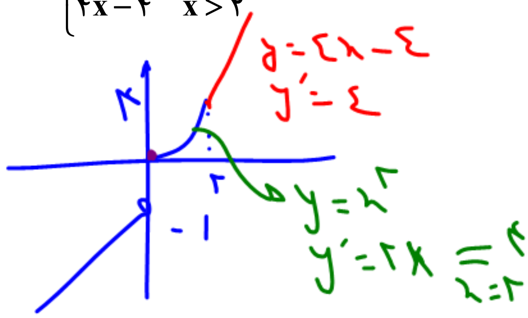
$D_f = \mathbf{D_{f'} = \mathbb{R} - \{}$ریشه‌های مخرج$\mathbf{\}}$

مثال ۱۱۰ : مشتق‌پذیری تابع $\mathbf{f(x) = \begin{cases} ۲x - ۱ & x < ۰ \\ x^۲ & ۰ \le x \le ۲ \\ ۴x - ۴ & x > ۲ \end{cases}}$ را بررسی کرده و سپس دامنه و نمودار $\mathbf{f'(x)}$ را مشخص کنید.

$D_f : \mathbb{R} \quad D_{f'} = \mathbb{R} - \{۰\}$

f ناپیوسته و مشتق‌ناپذیر

پاسخ:



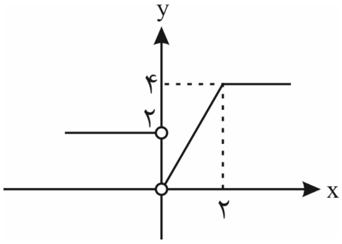
$$\mathbf{f(x) = \begin{cases} ۲x - ۱ & x < ۰ \\ x^۲ & ۰ \le x \le ۲ \\ ۴x - ۴ & x > ۲ \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} ۲ & x < ۰ \\ ۲x & ۰ < x < ۲ \\ ۴ & x > ۲ \end{cases}}$$

ابتدا علامت مساوی را برای $x=0$ و $x=2$ نمی‌گذاریم و بعد از بررسی وضعیت مشتق‌پذیری اگر تابع در هر کدام از آن‌ها مشتق‌پذیر باشد علامت مساوی را برایش قرار می‌دهیم.

در $x=2$ تابع پیوسته است و هم‌چنین مشتق چپ و راست برابر است. پس $x=2$ در دامنهٔ تابع مشتق قرار دارد ولی در $x=0$ تابع ناپیوسته است بنابراین مشتق ندارد و $x=0$ در دامنهٔ تابع مشتق قرار ندارد.

$$f'(x)=\begin{cases}2 & x<0\\ 2x & 0<x\le 2\\ 4 & x>2\end{cases}$$

$$D_{f'}=D_f-\{0\}=\mathbb{R}-\{0\}$$



مثال ۱۱۱ : دامنهٔ مشتق تابع $f(x)=\sqrt[3]{x+1}+|x-1|$ را پیدا کنید.

پاسخ: اولاً دامنهٔ خود تابع $\mathbb{R}$ است. ثانیاً این تابع در نقطهٔ $x=1$ به علت آن‌که نقطهٔ گوشه‌ای محسوب می‌شود و هم‌چنین در نقطهٔ $x=-1$ به علت آن‌که ریشهٔ زیر رادیکال است مشتق‌پذیر نیست، پس:

$$D_{f'}=\mathbb{R}-\{-1,1\}$$

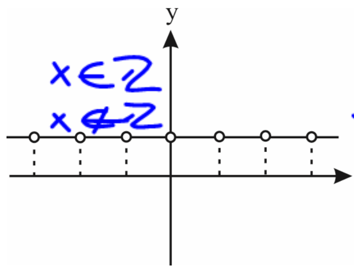
تیپ‌های متداول

در $x\in Z$ ناپیوسته و مشتق ناپذیره

تست ۱۱۲: نمودار مشتق تابع $f(x)=x+[x]$ کدام است؟

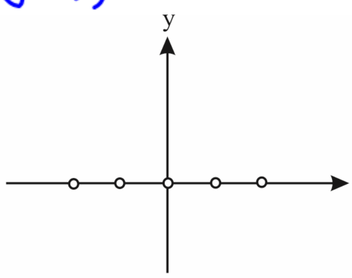
$f':\begin{cases} - & x\in Z\\ 1 & x\notin Z\end{cases}$

۱)

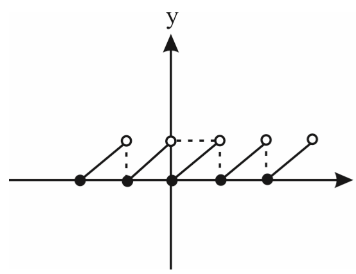


$y=1$

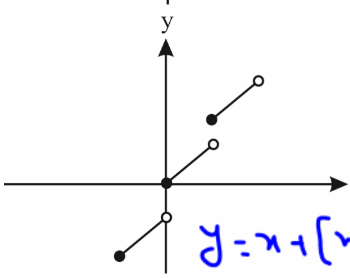
۲)



۳)



۴)



$y=x+[x]$

تست ۱۱۳: دامنهٔ مشتق تابع $f(x)=\sqrt[4]{2-|x|}$ کدام است؟

۱) $[-2,2]$ ۲) $(-2,2)-\{0\}$ ✓ ۳) $(-2,2)$ ۴) $(-2,0)$

$2 \geq |x|$

$D_f: -2 \leq x \leq 2$

می دانیم تابع رادیکالی در ریشه زیر رادیکال مشتق پذیر نیست

$2-|x|=0 \longrightarrow x=\pm 2$

$D_{f'}: (-2,2)-\{0\}$

ضمناً خود $|x|$ نیز در $x=0$ مشتق نپذیر.

تست ۱۱۴: در کدام تابع دامنهٔ تابع f با دامنهٔ f' برابر است؟

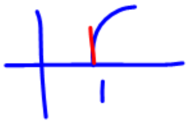
۱) $f(x)=|x^2-1|$ ۲) $f(x)=\frac{x}{x-1}$ ✓ ۳) $f(x)=[x]+[-x]$ ۴) $f(x)=\sqrt{x-1}$

$D_f: \mathbb{R}$ ، $D_{f'}: \mathbb{R}-\{\pm 1\}$

$D_f = D_{f'}: \mathbb{R}-\{1\}$ ، $f'(x)=\frac{-1}{(x-1)^2}$

$D_f: \mathbb{R}$ ، $D_{f'}: \mathbb{R}-\mathbb{Z}$

$D_f: [1,+\infty)$ ، $D_{f'}: (1,+\infty)$



مشتق مرتبهٔ دوم

مشتق تابع $y=f(x)$ را با نماد $y'=f'(x)$ نمایش می‌دهیم. به طریق مشابه می‌توانیم مشتق مرتبهٔ دوم تابع f را با نماد $y''=f''(x)$ نمایش بدهیم. به عنوان مثال اگر $f(x)=x^5-3x^4+x^2$ باشد، در این صورت:

$$f'(x)=5x^4-12x^3+2x \Rightarrow f''(x)=20x^3-36x^2+2$$

مثال ۱۱۵ : در تابع $f(x)=(2x-1)^2\sqrt{x^2+4x}$ مقدار $f''(\frac{1}{2})$ را پیدا کنید.

پاسخ: اگر توجه کنید $x=\frac{1}{2}$ باعث می‌شود تا $f(x)$ صفر شود. مشتق عامل صفرشونده یادتان هست؟ این‌جا عامل $(2x-1)^2$ در $\sqrt{x^2+4x}$ ضرب شده است پس برای یافتن مشتق در نقطهٔ $x=\frac{1}{2}$ کافی است فقط از عامل صفرشونده یعنی $(2x-1)^2$ مشتق بگیریم.

فقط فرقش با مثال‌های آن قسمت در این است که این‌جا توان عامل صفرشونده ۲ است ما هم مشتق مرتبه دوم را در $x=\frac{1}{2}$ می‌خواهیم پس کافی است ۲ بار از $(2x-1)^2$ مشتق بگیریم و $x=\frac{1}{2}$ را در بقیهٔ عبارت جاگذاری کنیم:

$$(2x-1)^2 \xrightarrow{\text{مشتق}} 4(2x-1) \xrightarrow{\text{مشتق}} 8 \Rightarrow f''(\tfrac{1}{2})=8\sqrt{(\tfrac{1}{2})^2+4(\tfrac{1}{2})}=8\sqrt{\tfrac{1}{4}+2}=8\sqrt{\tfrac{9}{4}}=8(\tfrac{3}{2})=12$$

حالا اگر در همین سؤال از ما مشتق اول را در $x=\frac{1}{2}$ می‌پرسید، جواب برابر صفر می‌شد.

توجه کنید که اگر درجهٔ عبارت صفرشونده بیشتر از مرتبهٔ مشتق باشد، مشتق برابر صفر است.

یادت باشه: اگر $f(x)$ یک چندجمله‌ای از درجهٔ n باشد آن‌گاه f' از درجهٔ $n-1$ و f'' از درجهٔ $n-2$ است.

تست ۱۱۶: اگر f یک چندجمله‌ای باشد و داشته باشیم $f'(x)f''(x) = x^{۹} + mx^{۸}$ آن‌گاه $f''(x)$ از درجهٔ چند است؟

۱) ۱   ۲) ۲   ۳) ۳   ۴) ۴

پاسخ: اگر فرض کنیم تابع f یک چندجمله‌ای از درجهٔ n باشد، f' از درجهٔ $n-۱$ و f'' از درجهٔ $n-۲$ خواهد بود. در این سؤال چون $f'f''$ از درجهٔ ۹ است، پس:

$$(n-۱)+(n-۲)=۹ \Rightarrow ۲n=۱۲ \Rightarrow n=۶$$

پس f'' از درجهٔ $n-۲$ یعنی ۴ است.

راستی اگر ۲ تابع چندجمله‌ای در هم ضرب شوند، درجه‌هایشان با هم جمع می‌شود پس در این سؤال f' و f'' که در هم ضرب شدند درجه‌هایشان با هم جمع شد.

تست ۱۱۷ : مقدار مشتق دوم $f(x)=x^{۲}\sqrt{۲-۳x}$ در نقطهٔ $x=۰$ برابر است با:

۱) $۲\sqrt{۲}$ ✓   ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۴) $-\frac{۳}{۲}\sqrt{۲}$

دو بار مشتق از x^2

$x^2 \longrightarrow 2x \longrightarrow 2$

$f''(0) = 2\sqrt{2-0} = 2\sqrt{2}$

$y = f\circ g$

$f(x) = x^2$, $g(x) = x^3$ $\Big\}$ $y = f(g(x)) = f(x^3) = (x^3)^2 = x^6$

تست ۱۱۸ : اگر $f(x)$ یک چندجمله‌ای از درجهٔ n و $g(x)=f(f'(x)).f''(x)$ یک چندجمله‌ای از درجهٔ ۱۴ باشد، مقدار n کدام است؟

۱) ۳   ۲) ۴   ۳) ۵   ۴) ۶

پاسخ: در درس‌نامه دیدیم که اگر f یک چندجمله‌ای از درجهٔ n باشد، f' از درجهٔ $n-۱$ و f'' از درجهٔ $n-۲$ است و همچنین دیدیم که اگر ۲ تابع چندجمله‌ای در هم ضرب شوند درجه‌هایشان با هم جمع می‌شوند.

یک نکتهٔ دیگر هم باید بدانید که وقتی ۲ تابع چندجمله‌ای با هم ترکیب می‌شوند درجه‌هایشان در هم ضرب می‌شود مثلاً اگر $f(x)=x^{۲}$ و $g(x)=x^{۵}$ باشد:

$$f(g(x))=(x^{۵})^{۲}=x^{۱۰} \quad \text{و} \quad \text{درجه}=۲\times۵$$

حالا برویم سراغ سؤال:

$$g(x)=\underset{\text{درجهٔ } n}{f}(\overset{\text{درجهٔ } n-۱}{f'(x)}).\underset{\text{درجهٔ } n-۲}{f''(x)}$$

$$\text{درجه } f(f'(x)) = n(n-۱)=n^{۲}-n$$

$$\text{درجه } g(x) = n^{۲}-n+n-۲=n^{۲}-۲=۱۴ \Rightarrow n^{۲}=۱۶ \Rightarrow n=۴$$

تست ۱۱۹ : تابع درجه دوم f چنان است که $f(۱)=۲$ و $f'(۱)=۳$ مقدار $f''(۱)=۴$ مقدار $f(۲)$ کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۰

$f(۱)=a+b+c=۲ \leftarrow f(x)=ax^۲+bx+c$

$b=-۱ \leftarrow f'(۱)=۲a+b=۳ \leftarrow f'(x)=۲ax+b$

$f''(۱)=۲a=۴ \leftarrow f''(x)=۲a$

$a=۲$

$۲+(-۱)+c=۲$

$c=۱$

$f(x)=۲x^۲-x+۱$

$f(۲)=۲(۲)^۲-۲+۱=۷$

تست ۱۲۰ : مشتق دوم تابع $y=\dfrac{\sqrt{x^۲-۱}+(x+۱)}{\sqrt{x+۱}+\sqrt{x-۱}}$ به ازای $x=۳$ برابر کدام است؟

$u=\sqrt{u}\sqrt{u}$

سال ۹۰ پیش شهرهات

داسنها اشتباه است

۱) $\dfrac{-۱}{۸}$ ۲) $\dfrac{-۱}{۱۶}$ ۳) $\dfrac{-۱}{۳۲}$ ۴) $\dfrac{-۱}{۶۴}$

$$y=\frac{\sqrt{(x+۱)(x-۱)}+\sqrt{x+۱}\sqrt{x+۱}}{\sqrt{x+۱}+\sqrt{x-۱}}=\frac{\sqrt{x+۱}\,\cancel{\left(\sqrt{x-۱}+\sqrt{x+۱}\right)}}{\cancel{\sqrt{x-۱}+\sqrt{x+۱}}}=(x+۱)^{\frac{۱}{۲}}$$

$$y'=\frac{۱}{۲}(x+۱)^{-\frac{۱}{۲}}\longrightarrow y''=-\frac{۱}{۴}(x+۱)^{-\frac{۳}{۲}}=-\frac{۱}{۴\sqrt{(x+۱)^۳}}\overset{x=۳}{=\!=}-\frac{۱}{۳۲}$$

تست ۱۲۱ : تابع $y=\sqrt{x^۲+۱}$ در رابطهٔ $yy''+(y')^۲=a$ صدق می‌کند، مقدار a کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

$$y=\sqrt{x^۲+۱}\Rightarrow y'=\frac{۲x}{۲\sqrt{x^۲+۱}}=\frac{x}{\sqrt{x^۲+۱}}$$

$$y''=\frac{(۱)\sqrt{x^۲+۱}-\frac{۲x}{۲\sqrt{x^۲+۱}}x}{(x^۲+۱)}=\frac{۱}{\sqrt{x^۲+۱}(x^۲+۱)}$$

$$\cancel{\sqrt{x^۲+۱}}\left(\frac{۱}{\cancel{\sqrt{x^۲+۱}}(x^۲+۱)}\right)+\frac{x^۲}{x^۲+۱}=$$

$$\frac{۱}{x^۲+۱}+\frac{x^۲}{x^۲+۱}=a$$

$$\frac{۱+x^۲}{x^۲+۱}=\boxed{a=۱}$$

تست ۱۲۲ : برای عدد مثبت a، تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}x^۳-x+c & x\le a\\ bx^۴ & x>a\end{cases}$ در نقطهٔ $x=a$ مشتق مرتبهٔ دوم دارد. مقدار c کدام است؟

$f_-(a)=f_+(a)=f(a)$

$f'_-(a)=f'_+(a)$

$f''_-(a)=f''_+(a)$

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) $\dfrac{۱}{۲}$ ۴) $\dfrac{-۱}{۲}$

پاسخ: برای این که این تابع در نقطهٔ مرزی a مشتق دوم داشته باشد، باید اولاً مشتق اول داشته باشد:

$$\text{شرط پیوستگی}: \begin{cases} f(a)=a^{3}-a+c \\ f(a^{-})=a^{3}-a+c \Rightarrow ba^{4}=a^{3}-a+c \\ f(a^{+})=ba^{4} \end{cases}$$

$$\text{شرط مشتق‌پذیری}: \begin{cases} f'_{-}(a)=3x^{2}-1=3a^{2}-1 \\ f'_{+}(a)=4bx^{3}=4ba^{3} \end{cases} \xrightarrow{f'_{+}(a)=f'_{-}(a)} 4ba^{3}=3a^{2}-1$$

دوماً حواستان باشد برای آن که f در $x=a$ مشتق دوم داشته باشد باید f' در a پیوسته باشد و $f''_{+}(a)=f''_{-}(a)$ باشد:

$$\begin{cases} f''_{+}(a)=12bx^{2}=12ba^{2} \\ f''_{-}(a)=6x=6a \end{cases} \Rightarrow 12ba^{2}=6a \xrightarrow{\div 12a} ab=\frac{1}{2}$$

حالا باید در رابطهٔ $4ba^{3}=3a^{2}-1$ به جای ab قرار دهیم $\frac{1}{2}$:

$$4(ba)a^{2}=3a^{2}-1 \Rightarrow 4(\frac{1}{2})a^{2}=3a^{2}-1 \Rightarrow 2a^{2}=3a^{2}-1 \Rightarrow a^{2}=1 \Rightarrow a=\pm 1 \xrightarrow[\text{است } a>0]{\text{خودش گفته}} a=1$$

چون $ab=\frac{1}{2}$ است و $a=1$ پس: $b=\frac{1}{2}$.

حالا در رابطهٔ پیوستگی a و b را جاگذاری می‌کنیم: $ba^{4}=a^{3}-a+c \Rightarrow \frac{1}{2}(1)^{4}=(1)^{3}-1+c \Rightarrow c=\frac{1}{2}$

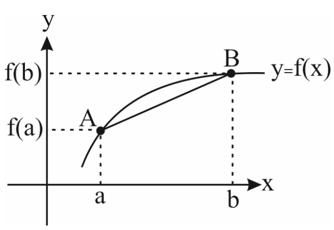
آهنگ تغییر

$\frac{\Delta y}{\Delta x}: \frac{0}{1} < \frac{0.5}{1} < \frac{1}{1}$

با مفهوم سرعت متوسط در فیزیک آشنا شده‌اید و دیدید که از رابطهٔ $\bar{V}=\frac{\Delta x}{\Delta t}$ برای پیداکردن سرعت متوسط استفاده می‌کنیم و هم‌چنین برای یافتن سرعت لحظه‌ای کافی است در لحظهٔ t مقدار مشتق تابع (مکان ـ زمان) را حساب کنیم. در درس ریاضی آهنگ متوسط و آهنگ تغییر لحظه‌ای را برای تابع f تعریف می‌کنیم. به طور کلی آهنگ متوسط تابع $y=f(x)$ در فاصلهٔ $[a,b]$ برابر است با:

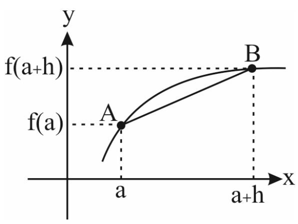
$$\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

یعنی اگر دو نقطهٔ $A(a,f(a))$ و $B(b,f(b))$ روی تابع $y=f(x)$ باشند، آن‌گاه شیب خط قاطع A و B برابر آهنگ متوسط تابع f در بازهٔ $[a,b]$ است.



آهنگ متوسط تغییر تابع در $[a,b] = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

هم‌چنین می‌توان این تعریف را این‌گونه بیان کرد:



$$\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

سرعت متوسط در فیزیک با $\bar{V}$ همون شیب خط واصل = آهنگ متوسط = $\dfrac{f(\text{ته}) - f(\text{سر})}{\text{ته} - \text{سر}}$

تست ۱۲۳ : آهنگ متوسط تغییر تابع با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt{x^{۲}+۱۴۴}$ نسبت به متغیر x روی بازه‌ای از $x=۵$ تا $x=۹$ کدام است؟

(سراسری تجربی)

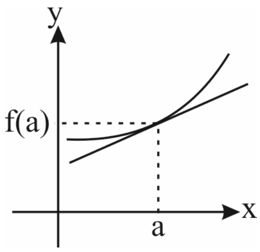
۱) ۰/۴   ۲) ۰/۵   ۳) ۰/۶   ۴) ۰/۷

پاسخ:

$$\text{آهنگ متوسط تغییر}=\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{f(۹)-f(۵)}{۹-۵}=\frac{\sqrt{۸۱+۱۴۴}-\sqrt{۲۵+۱۴۴}}{۴}=\frac{\sqrt{۲۲۵}-\sqrt{۱۶۹}}{۴}=\frac{۱۵-۱۳}{۴}=\frac{۲}{۴}=\frac{۱}{۲}=۰/۵$$

آهنگ لحظه‌ای (آنی)

آهنگ لحظه‌ای تابع $y=f(x)$ در نقطهٔ $x=a$ برابر $f'(a)$ است. به عبارت دیگر آهنگ لحظه‌ای تابع $y=f(x)$ در $x=a$ برابر شیب خط مماس بر $f(x)$ در نقطهٔ $x=a$ است.



سرعت لحظه‌ای در فیزیک = شیب خط مماس = $f'(a)$ = آهنگ آنی
لحظه‌ای
نقطه‌ای

از نظر هندسی شیب خط مماس بر تابع f در $x=a$ برابر آهنگ لحظه‌ای تغییر در $x=a$ می‌باشد.

تست ۱۲۴ : در تابع با ضابطهٔ $f(x)=\dfrac{۳۶}{x^{۲}}$، آهنگ متوسط تابع از $x_{۱}=۲$ تا $x_{۲}=۳$ چه‌قدر از آهنگ لحظه‌ای آن در $x=\sqrt[۳]{۱۲}$ بیشتر است؟

$\dfrac{f(\text{ته})-f(\text{سر})}{\text{ته}-\text{سر}}$

(تجربی خارج ۹۰)

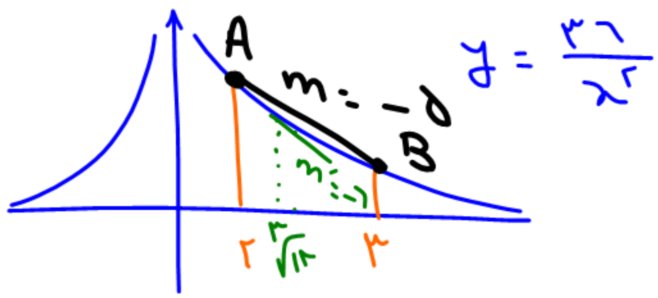
۱) ۱   ۲) ۱/۵   ۳) ۲   ۴) ۲/۵

پاسخ: آهنگ متوسط تغییر تابع $y=f(x)$ از $x=a$ تا $x=b$ برابر $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ و آهنگ لحظه‌ای همان مقدار مشتق تابع است.

$$\text{آهنگ متوسط}=\frac{f(۳)-f(۲)}{۳-۲}=\frac{\frac{۳۶}{۹}-\frac{۳۶}{۴}}{۳-۲}=\frac{۴-۹}{۱}=-۵$$

$$f(x)=\frac{۳۶}{x^{۲}}=۳۶x^{-۲}\Rightarrow f'(x)=-۷۲x^{-۳}=\frac{-۷۲}{x^{۳}}$$

$$\text{آهنگ لحظه‌ای}=f'(\sqrt[۳]{۱۲})=\frac{-۷۲}{(\sqrt[۳]{۱۲})^{۳}}=\frac{-۷۲}{۱۲}=-۶$$

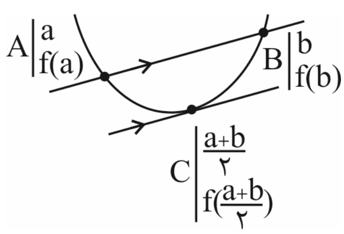


بنابراین آهنگ متوسط یک واحد از آهنگ لحظه‌ای بیشتر است.

یادت باشه: در تابع درجه دوم $f(x)=ax^{۲}+bx+c$ آهنگ متوسط در هر بازه، با آهنگ لحظه‌ای در وسط بازه برابر است یعنی:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'\left(\frac{a+b}{۲}\right)$$

مفهوم: در تابع درجه دوم خط مماس در نقطهٔ وسط بازه با خط واصل نقاط سر و ته بازه موازی است.



وسط بازه — درجه دوم

تست ۱۲۵: در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=۳x^۲+۴x-۲$، تفاضل آهنگ لحظه‌ای در نقطه‌ی $a+\frac{h}{۲}$ از آهنگ متوسط تغییر تابع وقتی متغیر x از عدد a به عدد $a+h$ تغییر کند، کدام است؟

۱) h $[a, a+h]$ ۲) ۲h   ۳) ۳h   ۴) صفر

پاسخ: گزینه‌ی «۴» ــ در این سؤال $f(x)=۳x^۲+۴x-۲$ یک تابع درجه‌ی دوم و بازه‌ی $[a,a+h]$ است ضمناً وسط بازه $\frac{a+a+h}{۲}=a+\frac{h}{۲}$ است پس طبق درس‌نامه:

$$f'(a+\frac{h}{۲})=\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \Rightarrow f'(a+\frac{h}{۲})-\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=۰$$

تست ۱۲۶: در تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{۱}{۲}x^۲-\frac{۱}{x}$، اختلاف آهنگ تغییر لحظه‌ای در $x=۲$، از آهنگ تغییر متوسط در بازهٔ $[۱,۴]$ کدام است؟ (تجربی ۹۸)

۱) ۰/۲۵   ۲) ۰/۵   ۳) ۰/۴۵   ۴) ۰/۷۵

لحظه‌ای $f'(x)=x+\frac{۱}{x^۲} \xrightarrow{x=۲} ۲+\frac{۱}{۴}=۲{,}۲۵$

متوسط: $\frac{f(۴)-f(۱)}{۴-۱}=\frac{(۸-\frac{۱}{۴})-(\frac{۱}{۲}-۱)}{۳}=\frac{۹-\frac{۳}{۴}}{۳}=۳-\frac{۱}{۴}=۲{,}۷۵$

اختلاف $=۰{,}۵$

تست ۱۲۷: آهنگ متوسط تغییر تابع $y=\sqrt{۲۱-x^۲+۴x}$ در بازهٔ $[۵,۶]$، برابر آهنگ تغییر لحظه‌ای این تابع، با کدام مقدار x است؟ (سراسری ریاضی ۹۹)

۱) $۴+\sqrt{۲}$ ۲) $۳+۲\sqrt{۲}$ ۳) $۲+\frac{۳}{۲}\sqrt{۲}$ ۴) $۲+\frac{۵}{۲}\sqrt{۲}$

پاسخ: گزینهٔ «۴» $y=\sqrt{۲۱-x^۲+۴x}$

آهنگ متوسط در بازهٔ $[۵,۶]$ برابر است با:

$$\frac{f(۶)-f(۵)}{۶-۵}=\frac{\sqrt{۲۱-۳۶+۲۴}-\sqrt{۲۱-۲۵+۲۰}}{۱}=\frac{\sqrt{۹}-\sqrt{۱۶}}{۱}=-۱$$

آهنگ لحظه‌ای نیز برابر است با:

$$y'=\frac{-۲x+۴}{۲\sqrt{۲۱-x^۲+۴x}}=\frac{\cancel{۲}(-x+۲)}{\cancel{۲}\sqrt{۲۱-x^۲+۴x}}=\frac{-x+۲}{\sqrt{۲۱-x^۲+۴x}}$$

با برابر قرار دادن این دو داریم:

$x\geq ۲ \leftarrow x-۲\geq$. باید خروجی رادیکال مثبت باشد

$$\frac{-x+۲}{\sqrt{۲۱-x^۲+۴x}}=-۱ \Rightarrow x-۲=\sqrt{۲۱-x^۲+۴x}\ (*) \xrightarrow{\text{به توان۲}} x^۲-۴x+۴=۲۱-x^۲+۴x$$

$$\Rightarrow ۲x^۲-۸x-۱۷=۰ \Rightarrow x=\frac{۸\pm\sqrt{۲۰۰}}{۴}=۲\pm\frac{۵}{۲}\sqrt{۲} \xrightarrow[(*)]{x\geq ۲} x=۲+\frac{۵}{۲}\sqrt{۲}$$

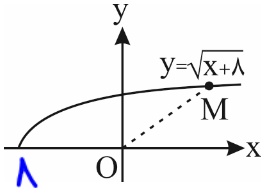
جوابی که بیشتر از دو هست

تست ۱۲۸: نقطه‌ی $M(x,y)$ بر روی منحنی به معادله‌ی $y=\sqrt{x+۸}$ در حال حرکت است. T فاصله‌ی نقطه‌ی M تا مبداء مختصات است. آهنگ تغییر لحظه‌ای T در نقطه‌ی $x=۷$ کدام است؟

۱) $\frac{۱۵}{۱۶}$ ۲) $\frac{۱۵}{۸}$ ۳) $\frac{۳}{۷}$ ۴) $\frac{۵}{۴}$

$M\,\Big|\begin{matrix} x \\ y=\sqrt{x+8}\end{matrix}$

پاسخ: گزینه‌ی «۱» ـ ابتدا منحنی تابع را رسم می‌کنیم:



$OM=\sqrt{(x_M-0)^2+(y_M-0)^2}$

$OM=\sqrt{x^2+x+8}$

می‌دانیم هر نقطه‌ای روی $y=\sqrt{x+8}$ عرضش برابر جذر طولش بعلاوه ۸ است

نقطه‌ای مانند $M(x,\sqrt{x+۸})$ را روی منحنی در نظر می‌گیریم و فاصله‌ی آن را تا مبداء با فرمول $T=\sqrt{x^۲+y^۲}$ پیدا می‌کنیم:

$$T=\sqrt{x^۲+y^۲}=\sqrt{x^۲+(\sqrt{x+۸})^۲}=\sqrt{x^۲+x+۸}$$

حالا از T نسبت به x مشتق می‌گیریم:

$$T=\sqrt{x^۲+x+۸}\Rightarrow T'=\frac{۲x+۱}{۲\sqrt{x^۲+x+۸}}$$

حالا به T مقدار ۷ را می‌دهیم:

$$T(۷)=\frac{۲(۷)+۱}{۲\sqrt{۷^۲+۷+۸}}=\frac{۱۵}{۲\sqrt{۶۴}}=\frac{۱۵}{۱۶}$$

سرعت متوسط و سرعت لحظه‌ای

دو مفهومی که در درس فیزیک بارها نام آن را شنیده‌اید، مفاهیم سرعت لحظه‌ای و سرعت متوسط است. بیایید یک بار دیگر با هم این مفاهیم را ببینیم:

سرعت متوسط: فرض کنیم معادلهٔ حرکت یک متحرک که در امتداد یک خط حرکت می‌کند به صورت $S=f(t)$ باشد در این صورت:

$$\bar{V}=\text{سرعت متوسط}=\frac{\text{تغییرات مکان}}{\text{تغییرات زمان}}=\frac{\Delta S}{\Delta t}=\frac{S_۲-S_۱}{t_۲-t_۱}=\frac{f(t_۲)-f(t_۱)}{t_۲-t_۱}$$

سرعت لحظه‌ای: آهنگ لحظه‌ای تغییر S را سرعت لحظه‌ای می‌نامیم:

$$V=S'=f'(t)$$

راستی خوبه که با چند تا از اصطلاحات آشنا شوید:

۱) برخورد با زمین: اگر جسمی در راستای قائم حرکت کند و معادلهٔ ارتفاع برحسب زمان آن $h=f(t)$ باشد، با قراردادن $h=۰$ زمان برخوردبا زمین به دست می‌آید.

۲) جهت حرکت: اگر $V>۰$ باشد حرکت در جهت مثبت محور مکان است و اگر $V<۰$ باشد حرکت در خلاف جهت محور مکان است.

۳) توقف: لحظه‌ای که سرعت لحظه‌ای صفر می‌شود.

مثال ۱۲۹ : ماشینی که با سرعت ثابت در حال حرکت است در لحظهٔ $t=0$ ترمز می‌گیرد تا این‌که متوقف شود. اگر فاصلهٔ مکان ماشین از لحظهٔ ترمز برحسب زمان به صورت $S(t)=24t-2t^2$ باشد:

الف) سرعت ماشین پس از چند ثانیه صفر می‌شود؟

ب) سرعت ماشین در لحظهٔ شروع ترمز چقدر بوده است؟

پ) سرعت متوسط ماشین از لحظهٔ شروع ترمز تا توقف کامل چقدر است؟

پاسخ: الف) به دنبال لحظه‌ای هستیم که سرعت لحظه‌ای برابر صفر می‌شود:

کافی است از معادلهٔ داده‌شده نسبت به t مشتق بگیریم: $S(t)=24t-2t^2$

$$V=S'(t)=24-4t \Rightarrow S'(t)=0 \Rightarrow 4t=24 \Rightarrow t=6$$

توجه کنید که ۶ ثانیه از لحظهٔ ترمزگرفتن تا ایستادن ماشین طول می‌کشد.

ب) لحظهٔ شروع ترمز یعنی $t=0$، پس سرعت لحظه‌ای ماشین در $t=0$ را پیدا می‌کنیم:

$$S'(0)=24-4(0)=24$$

پ) با توجه به (الف) و (ب)، سرعت متوسط متحرک از لحظهٔ ترمز $(t=0)$ تا لحظهٔ توقف $(t=6)$ برابر است با:

$$\text{سرعت متوسط}=\frac{S(6)-S(0)}{6-0}=\frac{(24(6)-2(6)^2)-0}{6-0}=\frac{6(24-12)}{6}=12$$

توفیق و رستگاری را از خدا بخواهید.