

ف, a بی‌دریجه

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \begin{cases} x \rightarrow a^+ \\ x \rightarrow a^- \end{cases}$$

$$f'_+(a) = m_l$$

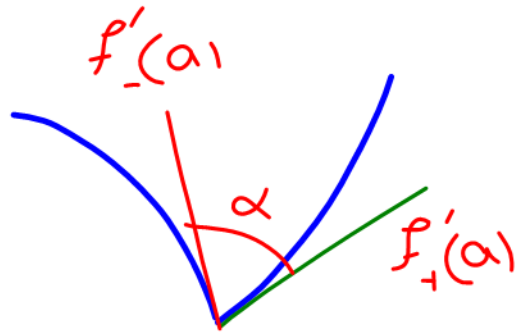
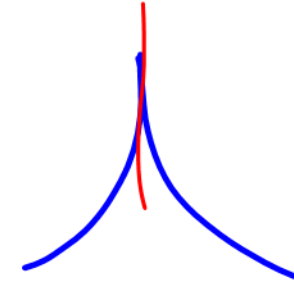
$$f'_-(a) = m_r$$

if $f'_-(a) = f'_+(a) \rightarrow$ مشتق بی‌دریجه

در بی‌دریجه بی‌دریجه

انواع مشتق ناپذیری :

بارگشت



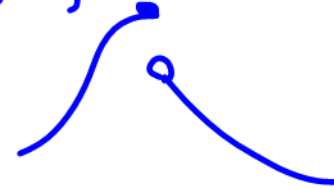
نوشه (زاویه دار)

$$f'_-(a) = +\infty \neq f'_+(a) = -\infty$$

نیم راسته نام معور

نیم راسته نام معور

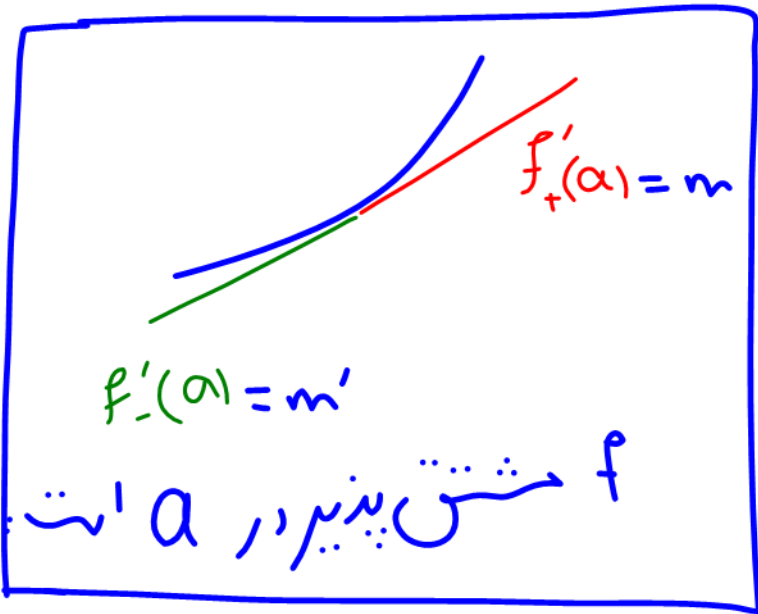
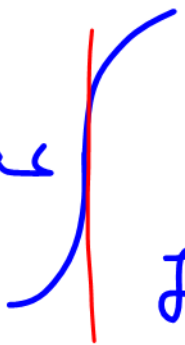
ناپولنه



مشتق ناپذیر

$$f'_-(a) = f'_+(a) = +\infty$$

عطف قائم

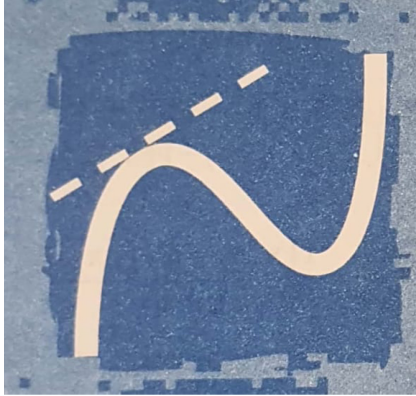


$$f'_+(a) = m$$

$$f'_-(a) = m'$$

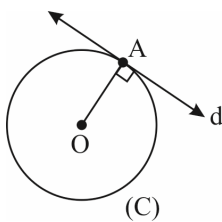
f مشتق پذیر در a است

مشتق - رشته تجربی



درس ۱: آشنایی با مفهوم مشتق

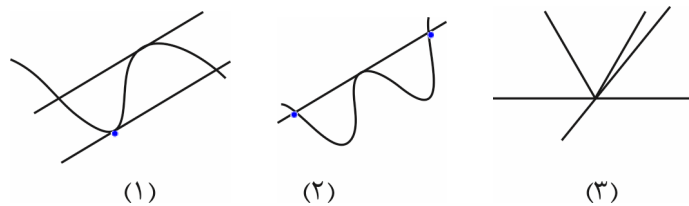
خط مماس بر منحنی



فرض کنیم دایره‌ی C و خط d در یک صفحه باشند، اگر خط و دایره فقط یک نقطه‌ی مشترک داشته باشند، آن گاه خط را بر دایره «مماس» می‌گوییم و آن نقطه را، نقطه‌ی تماس خط و دایره می‌نامند.

اگر این نقطه را A بنامیم می‌گوییم، خط در نقطه‌ی A بر دایره مماس است.

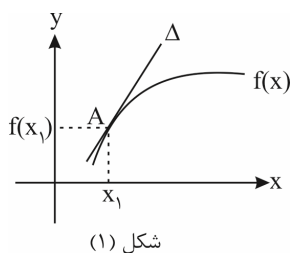
دقت کنید که این تعریف فقط مخصوص دایره است و نمی‌تواند برای هر منحنی دلخواه درست باشد. به شکل‌های زیر دقت کنید.



در شکل‌های (۱) و (۲) خط مماس، منحنی را در بیش از یک نقطه قطع کرده است. در شکل (۳) خط، نمودار را در یک نقطه قطع کرده است ولی در هیچ نقطه‌ای بر آن مماس نیست.

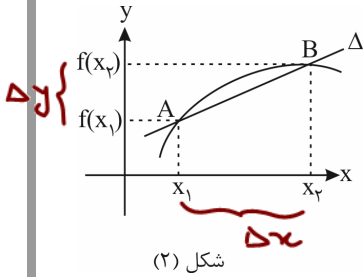
تعریف مشتق

در شکل (۱) خط Δ در نقطه‌ی A بر منحنی $y = f(x)$ مماس است و می‌خواهیم شیب خط Δ را پیدا کنیم. اول ببینیم که خط مماس را چه‌طور تعریف می‌کنیم.



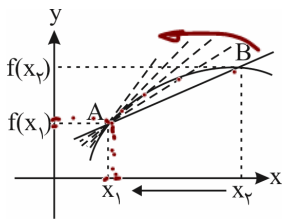
مشتق: شیب

به شکل (۲) نگاه کنید. در این شکل خط Δ منحنی $f(x)$ را در دو نقطه A و B قطع کرده است.



شکل (۲)

حالا اگر مانند شکل (۳) نقطه B به سمت نقطه A حرکت کند خط Δ کم کم به خط مماس بر منحنی تبدیل می شود یعنی خط مماس حالت حدی خط قاطعی است که منحنی تابع را در دو نقطه قطع کند و نقطه B دوم به سمت نقطه A اول حرکت کند. برای پیدا کردن شیب خط مماس هم از همین موضوع استفاده می کنیم.



شکل (۳)

می دانیم شیب خط قاطع که منحنی را در دو نقطه A و B قطع می کند برابر $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ یا $m = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ است. حالا وقتی

نقطه B به سمت نقطه A حرکت می کند مثل آن است که بگوییم $x_2 \rightarrow x_1$ ، پس شیب خط مماس برابر حد

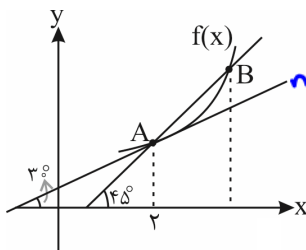
نقطه B یک نقطه متحرک است و در نتیجه به جای x_2 می توانیم بنویسیم x (چون x_2 در حال

حرکت است) پس شیب خط مماس برابر $m_{\text{مماس}} = \lim_{x \rightarrow x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}$ است. حالا می توانیم مشتق را تعریف کنیم.

اگر در تابع $f(x)$ حاصل حد $\lim_{x \rightarrow x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}$ وجود داشته باشد (یعنی برابر عدد مشخصی شود) آن را مشتق تابع $f(x)$ در نقطه x_1 می نامیم و با $f'(x_1)$ نشان می دهیم. یعنی $f'(x_1) = \lim_{x \rightarrow x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}$ و مقدارش برابر شیب خط مماس بر منحنی تابع $f(x)$ در نقطه x_1 است.

مشتق تابع به ازای طول نقطه A مماس بر منحنی در نقطه A مماس می باشد، یعنی: $m = \lim_{B \rightarrow A} m_{AB} = f'(x_1)$

تست ۱: با توجه به شکل مقابل $f'(2)$ کدام است؟



$$m = \tan \alpha = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$

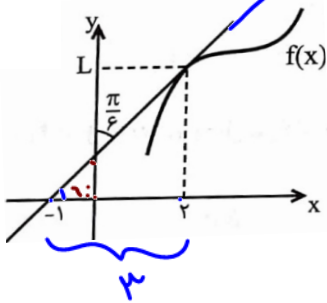
شیب خط مماس بر $f(x)$ در $x=2$ که همان تانژانت زایی است که مماس با جهت مثبت محور x ها سازد.

- (۱) $\sqrt{3}$
- (۲) ۱
- (۳) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ✓
- (۴) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$f'(2) = m = \tan \alpha = \sqrt{3}$$

شیب خط مماس در $x=2$

تست ۲: با توجه به شکل مقابل، حاصل $f(2) + f'(2)$ کدام است؟



$$f(2) = L$$

$$\tan \alpha = \sqrt{3} = \frac{\text{مقابل}}{\text{جانب مجاور}} = \frac{L}{2 - (-1) = 3}$$

$$L = 3\sqrt{3}$$

$$f(2) = L = 3\sqrt{3} + f'(2) = \sqrt{3}$$

$$\frac{10\sqrt{3}}{3} \quad (1)$$

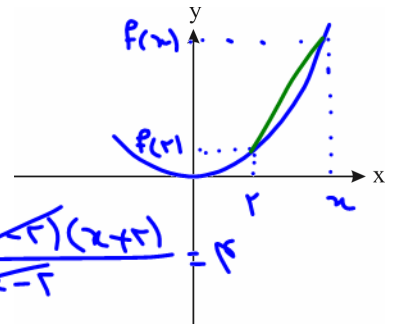
$$\frac{\sqrt{3}}{3} + 3 \quad (2)$$

$$3\sqrt{3} \quad (3)$$

$$4\sqrt{3} \quad (4) \checkmark$$

سوال ۳: شیب خط مماس بر منحنی توابع زیر را در نقاط خواسته شده به کمک تعریف مشتق پیدا کنید.

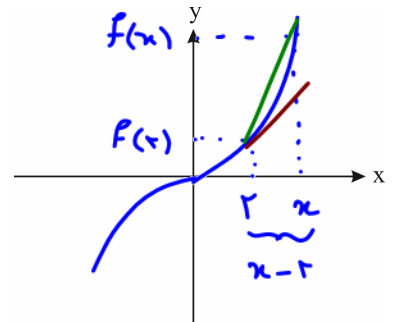
$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$



$$f(x) = x^2 ; x = 2$$

$$f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{0}{0} \text{ مخرج } = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = 4$$

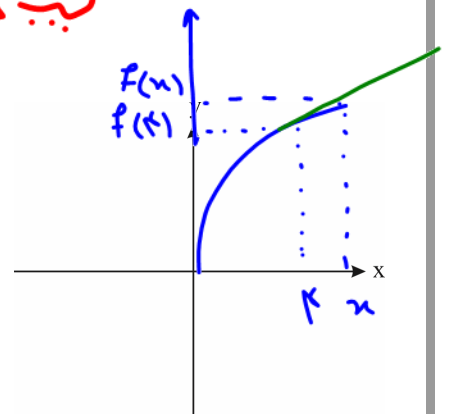
مشتق در یک نقطه، با تعریف مشتق یافتیم: $f'(2) = 4$



$$f(x) = x^3 ; x = 2$$

$$f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^2 + 2x + 4)}{x-2} = 12 \quad \text{شیب مماس در } x=2$$



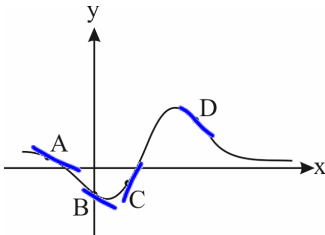
$$f(x) = \sqrt{x} ; x = 4$$

$$f'(4) = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{4}}{x - 4}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)}{(x - 4)(\sqrt{x} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} = \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4}$$

برجای تابع نزدیکی باشد مشتق منفی و هر جا صعودی باشد مشتق مثبت است
اگر تابع مداس این داشته باشد مشتق صفر است.

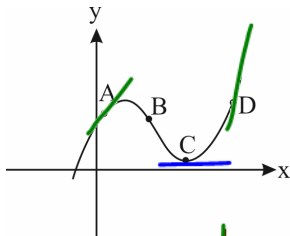
تست ۴: با توجه به نمودار روبه‌رو، در کدام یک از نقاط زیر مقدار تابع و مقدار مشتق، هم‌علامت هستند؟



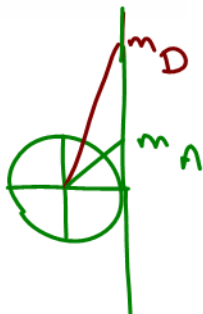
- A (۱)
B (۲) ✓
C (۳)
D (۴)

x	A	B	C	D
f	+	-	-	+
f'	-	-	+	-

تست ۵: نمودار تابع مشتق‌پذیر f به صورت روبه‌رو است. اگر m شیب خط مماس در هر نقطه باشد، کدام گزینه درست است؟

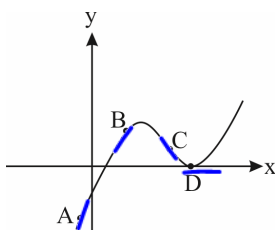


- $m_D > m_A > m_B > m_C$ (۱)
 $m_A > m_D > m_B > m_C$ (۲)
 $m_D > m_A > m_C > m_B$ (۳) ✓
 $m_A > m_D > m_C > m_B$ (۴)



مشتق: شیب خط مماس است.

تست ۶: نمودار تابع مشتق‌پذیر f به صورت زیر است. در کدام نقطه از نقاط مشخص شده روی شکل، مشتق کم‌ترین مقدار خود را دارد؟



کمترین شیب

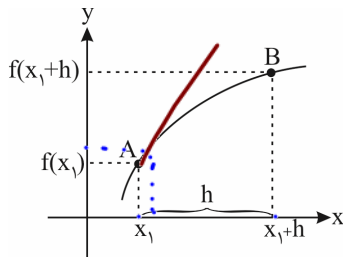
- A (۱) $m_A > \dots$
B (۲) $m_B > \dots$
C (۳) ✓ $m_C > \dots$
D (۴) $m_D = \dots$

تعریف مشتق و محاسبه‌ی حد

گفتیم مشتق تابع f در نقطه‌ی x_1 از رابطه‌ی $f'(x_1) = \lim_{x \rightarrow x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}$ به دست می‌آید. این تعریف را می‌شود به شکل دیگری هم

بنویسیم. اگر فرض کنیم $x - x_1 = h$ داریم $x = x_1 + h$ و وقتی $x \rightarrow x_1$ یعنی $h \rightarrow 0$ ، پس:

$$f'(x_1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}$$



$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}$$

با استفاده از تعریف $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ می‌توانیم تابع مشتق بعضی از تابع‌ها را حساب کنیم. مثلاً اگر از ما بپرسند مشتق

$f(x) = x^2$ را بیابید (و نگویند در چه نقطه‌ای، یعنی به صورت کلی) باید تعریف را بنویسیم:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2xh + h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2x+h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 2x+h = 2x$$

اگر می‌گفت مشتق $f(x) = x^2$ رو توی مثلاً نقطه‌ی $x = 2$ حساب کنید بهتر بود از تعریف مشتق در نقطه، یعنی $\lim_{x \rightarrow x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}$ استفاده می‌کردیم.

پس مشتق $f(x) = x^2$ همیشه به صورت $f'(x) = 2x$ است یعنی شما هر عددی دوست داری جاگذاری کن و مشتق رو توی اون نقطه به دست بیار. مثلاً مشتق $f(x) = x^2$ در نقاط $x = 1, 2, 3$ به ترتیب $f'(1) = 2(1) = 2$ ، $f'(2) = 2(2) = 4$ و $f'(3) = 2(3) = 6$ است.

معمولاً از تعریف دوم زمانی استفاده می‌کنیم که ضابطه مشتق را بخواهیم. ولی با کمک تعریف اول، مقدار شیب خط مماس یا همان مقدار مشتق را در نقطه $x = x_1$ محاسبه می‌کنیم.

تست ۷: اگر $f'(1) = 2$ باشد، حاصل $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1) - f(1+h)}{2h}$ کدام است؟

$$-\frac{3}{2} \quad (4) \qquad -\frac{2}{3} \quad (3) \qquad \frac{3}{2} \quad (2) \qquad \frac{2}{3} \quad (1)$$

$$f'(1) = 2$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{3} \quad \boxed{\frac{f(1+h) - f(1)}{h}} = -\frac{1}{3} \quad (2) = -\frac{2}{3}$$

مغزبی از $f'(a)$:

اگر مشتق تابع f در $x = a$ موجود باشد، آن گاه:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+mh) - f(a+nh)}{kh} = \frac{m-n}{k} f'(a)$$

تست ۸: حاصل کدام یک با بقیه فرق می کند؟

$$2f'(2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{\frac{1}{2}h} \quad (2)$$

$$2f'(2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+2h) - f(2-h)}{2h} \quad (1)$$

$$-2f'(2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2+5h)}{2h} \quad (4)$$

$$2f'(2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2-h) - f(2-5h)}{2h} \quad (3)$$

$$1) \alpha=2 \quad m=2 \quad n=-1 \quad k=2 : \frac{m-n}{k} f'(a) = \frac{2-(-1)}{2} f'(2) = 2f'(2)$$

$$2) \alpha=2 \quad m=1 \quad n=0 \quad k=\frac{1}{2} : \frac{m-n}{k} f'(a) = \frac{1-0}{\frac{1}{2}} f'(2) = 2f'(2)$$

$$3) \alpha=2 \quad m=1 \quad n=5 \quad k=2 : \frac{m-n}{k} f'(a) = \frac{1-5}{2} f'(2) = -2f'(2)$$

تست ۹: اگر $f'(2) = 4$ ، آن گاه حاصل $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2) - f(2-3h)}{2h}$ کدام است؟

-۲ (۴)

۲ (۳)

-۶ (۲)

۶ (۱)

$$m=0 \quad n=-3 \quad k=2$$

$$\frac{m-n}{k} f'(2) = \frac{0-(-3)}{2} f'(2) = \frac{3}{2} f'(2) = \frac{3}{2} (4) = 6$$

(سراسری ریاضی)

تست ۱۰: اگر تابع f مشتق پذیر باشد و $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{h} = 2\sqrt{x}$ ، آن گاه $f'(4)$ کدام است؟

۲ (۴)

۴ (۳)

$\frac{4}{3}$ (۲)

$\frac{2}{3}$ (۱)

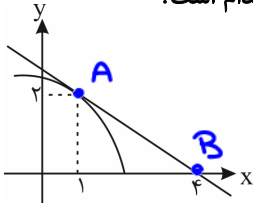
$$m=1, n=-1, k=1$$

$$\frac{m-n}{k} f'(x) = \frac{1-(-1)}{1} f'(x) = 2f'(x) = 2\sqrt{x}$$

$$f'(x) = \sqrt{x}$$

$$f'(4) = \sqrt{4} = 2$$

تست ۱۱: در شکل مقابل، خط مماس بر منحنی f در $x=1$ رسم شده است. حاصل $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$ کدام است؟



- (۱) $-\frac{3}{2}$
- (۲) -2
- (۳) $-\frac{2}{3}$ ✓
- (۴) $-\frac{1}{2}$

$$f'(1) = m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{0 - 2}{3 - 1} = -\frac{2}{2} = -1$$

تابع در $x=1$ نزولی است و باید شیب (شتن) آن مثبتی باشد

نوبت: $f(u)$ شیب $u' f'(u)$

تست ۱۲: اگر $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x^2 - 4}$ برابر ۵ باشد، حاصل $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+\frac{h}{2}) - f(2-h)}{1 \cdot h - h^3}$ کدام است؟

- (۱) ۲
- (۲) -۱
- (۳) ۳
- (۴) ۴

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x^2 - 4} = 5 \rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(x+2)} \cdot \frac{f(x) - f(2)}{x-2} = 5 \rightarrow \frac{1}{4} f'(2) = 5 \rightarrow f'(2) = 20$$

$y = f(u) \xrightarrow{\text{شتن}} y' = u' f'(u)$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+\frac{1}{2}h) - f(2-h)}{1 \cdot h - h^3} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{Hop}} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} f'(2+\frac{h}{2}) - (-1) f'(2-h)}{1 \cdot 3h^2} = \frac{\frac{1}{2} f'(2) + f'(2)}{3 \cdot 0} = \frac{f'(2) + f'(2)}{0} = \frac{20 + 20}{0} = \infty$$

تعریف مشتق همیشه به شکل یک حد $\frac{0}{0}$ است پس برای رفع ابهام آن می توانیم از قاعده‌ی هوییتال استفاده کنیم (به شرط آن که f مشتق پذیر باشد). فقط نکته‌ای که باید به آن خیلی دقت کنید، این است که هنگام هوییتال گرفتن از صورت و مخرج کسر، نسبت به متغیری مشتق می گیریم که دارد به سمت صفر (یا هر چیز دیگر) میل می کند.

تست ۱۳: اگر تابع f در $x=1$ مشتق پذیر و $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-2h)}{h+h^2} = 4$ باشد، حاصل $f(1) + f'(1)$ کدام است؟

- (۱) ۲
- (۲) -۲ ✓
- (۳) ۴
- (۴) -۴

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-2h)}{h+h^2} = \frac{0}{0} \rightarrow \frac{f(1)}{0} = \infty \rightarrow \text{حقاً } f(1) = 0$$

$$\frac{0}{0} \xrightarrow{\text{Hop}} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(-2) f'(1-2h)}{1+2h} = \frac{-2 f'(1)}{1} = -2 f'(1) = 4 \rightarrow f'(1) = -2$$

الترنجی تون
 $f(1)$ رو در بیارن

مثال ۱۴: اگر $f(3) = 2$ باشد و f تابعی مشتق پذیر باشد، حاصل حد $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(3x) - 2}{6x - 6}$ چند برابر $f'(3)$ است؟

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(3) - 2}{6 - 6} = \frac{2 - 2}{6 - 6} = \frac{0}{0} \text{ مبهم}$$

پاسخ: خوب می بینی که جواب حد $\frac{0}{0}$ می شه:

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3f'(3x) - 0}{6} = \frac{3}{6} f'(3) = \frac{1}{2} f'(3)$$

واسه رفع ابهام نسبت به x ، هپ می زنیم:

راستی $(f(3x))' = 3f'(3x)$ است. مثل $f(x^2)$ که داشتیم: $(f(x^2))' = 2xf'(x^2)$

$$y = f(x^2) \rightarrow y' = 2x f'(x^2)$$

درس ۲: روابط محاسبه مشتق

محاسبه مشتق بعضی از توابع

$$f(x) = c \rightarrow y' = 0$$

(۱) تابع ثابت $f(x) = c$ به صورت خط افقی است که شیب آن صفر است. پس $f'(x) = 0$ می باشد.

(۲) مشتق تابع $f(x) = ax + b$ برابر a است یعنی $f'(x) = a$ که همان شیب خط است.

$$f(x) = 2x + 6 \Rightarrow f'(x) = 2$$

مثلاً:

$$f(x) = \frac{x}{2} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2}$$

$$f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1$$

(۳) مشتق تابع $f(x) = x^m$ به صورت $f'(x) = mx^{m-1}$ است. $m \in \mathbb{Q}$

$$f(x) = x^2 \rightarrow y' = 2x$$

$$f(x) = x^3 \rightarrow y' = 3x^2$$

$$f(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2} \rightarrow y' = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$$

$$f(x) = \frac{1}{x^3} = x^{-3} \rightarrow y' = -3x^{-4} = -\frac{3}{x^4}$$

$$f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \rightarrow y' = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\text{مثلاً: } \begin{cases} f(x) = kx^m \\ f'(x) = k(m)x^{m-1} \end{cases}$$

(۴) اگر عددی پشت تابع ضرب شده باشد، عیناً پشت تابع مشتق نیز ضرب می شود. یعنی مشتق $kf(x)$ برابر است با $kf'(x)$.

$$f(x) = 3x^4 \rightarrow y' = 3(4x^3)$$

$$f(x) = 5\sqrt{x^2} = 5x^{\frac{1}{2}} \rightarrow y' = 5\left(\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{1}{2}}$$

$$f(x) = \frac{3}{x^2} = 3x^{-2} \rightarrow y' = 3(-2)x^{-3}$$

$$f(x) = 2\sqrt{x} + 5 = 2x^{\frac{1}{2}} + 5 \rightarrow y' = 2\left(\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$f(x) = \frac{3}{2}\sqrt{2x+3} + 7 = \frac{3}{2}(2x+3)^{\frac{1}{2}} + 7 \rightarrow y' = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)(2)(2x+3)^{-\frac{1}{2}} = \frac{3}{2\sqrt{2x+3}}$$

$$y = \sqrt{u} \rightarrow y' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

$$y = \sqrt{x} \rightarrow y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$y = \sqrt{2x+3} \rightarrow y' = \frac{2}{2\sqrt{2x+3}}$$

۵) اگر بین تابع‌ها جمع و تفریق داشته باشیم کافیست از هر کدام از تابع‌ها جداگانه مشتق بگیریم و علامت جمع و تفریق هم بذاریم باشد.

$$f(x) = x^3 - x^2 \quad y' = 3x^2 - 2x$$

$$f(x) = 6x - x^2 + 7\sqrt{x} \quad y' = 6 - 2x + 7\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$$

۶) اگر دو تابع در هم ضرب شده باشند، مشتق حاصل ضربشان از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید. (u و v توابعی بر حسب x هستند).

$$y = u \cdot v \Rightarrow y' = \underbrace{u'}_{\text{مشتق اولی}} \cdot \underbrace{v}_{\text{خود}} + \underbrace{u}_{\text{خود}} \cdot \underbrace{v'}_{\text{مشتق اولی}}$$

به زبان فارسی: مشتق اولی در خود دومی به علاوه‌ی مشتق دومی در خود اولی.

$$f(x) = (x^2 - 1)(7x^3 + 5x^2 + x^5)$$

$$y' = (2x)(7x^3 + 5x^2 + x^5) + (21x^2 + 10x + 5x^4)(x^2 - 1)$$

۷) اگر دو تابع به هم تقسیم شوند برای محاسبه‌ی مشتق تقسیم آن‌ها به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$y = \frac{u}{v} \Rightarrow y' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

u و v توابعی بر حسب x هستند.

به زبان فارسی: مشتق صورت در خود منهای مشتق مخرج در خود صورت تقسیم بر مخرج به توان دو.

$$f(x) = \frac{u}{v} \Rightarrow f'(x) = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

$$f' = \frac{(\text{خود صورت}) \times (\text{مشتق مخرج}) - (\text{مشتق صورت}) \times (\text{خود مخرج})}{(\text{مخرج})^2}$$

به زبان فارسی:

$$f(x) = \frac{2x^2 - 7x}{3x^2 + 9x + 5}$$

مثلاً:

$$f'(x) = \frac{(2(2x) - 7)(3x^2 + 9x + 5) - (3(2x) + 9)(2x^2 - 7x)}{(3x^2 + 9x + 5)^2}$$

$$f(x) = \frac{2x + 5}{6x - 9} \quad y' = \frac{2(6x - 9) - 6(2x + 5)}{(6x - 9)^2} = \frac{2(-9) - 6(5)}{(6x - 9)^2}$$

$$f(x) = \frac{5x - 7}{x + 1} \quad y' = \frac{5(x + 1) - (1)(5x - 7)}{(x + 1)^2} = \frac{5(1) - (1)(-7)}{(x + 1)^2}$$

$$f(x) = \frac{x + 7}{x - 2} \quad y' = \frac{1(x - 2) - (1)(x + 7)}{(x - 2)^2} = \frac{1(-2) - (1)(7)}{(x - 2)^2}$$

در حالت کلی مشتق تابع هموگرافیک $f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$ به صورت $f'(x) = \frac{ad - bc}{(cx + d)^2}$ است. **دستوار پرتکرار**

چون هر کی دوست داری فقط وقتی از این فرمول استفاده کن که صورت و مخرج با عبارت x دار شروع بشن یعنی این غلطه:

$$f(x) = \frac{1 - 2x}{6x - 7} \Rightarrow f'(x) = \frac{(1)(-7) - (6)(-2)}{(6x - 7)^2} \quad \times$$

$$f(x) = \frac{-2x+1}{6x-7} \Rightarrow f'(x) = \frac{(-2)(-7) - (6)(1)}{(6x-7)^2}$$

درستش اینه:

حالا یه چیزه باحال. یادته که مشتق $f(x) = \frac{1}{x}$ رو چطوری به دست می آوردیم؟

$$f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1} \Rightarrow f'(x) = (-1)x^{-2} = \frac{-1}{x^2}$$

ولی از راه مشتق کسری هم می تونیم به دست بیاریمش:

$$f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{0 \cdot 1 - 1 \cdot 1}{x^2} = -\frac{1}{x^2}$$

ولی در حالت کلی یادت باشه که:

$$f(x) = \frac{k}{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{-k}{x^2} \quad \text{ک یک عدد است.}$$

$$f(x) = \frac{2}{x} \rightarrow y' = -\frac{2}{x^2}$$

$$f(x) = \frac{-3}{x} \rightarrow y' = \frac{3}{x^2}$$

اگر در تمام فرمول های مشتق به جای x عبارت u که عبارتی بر حسب x است قرار بگیرد، در این صورت داریم:

$$1) y = u^n \Rightarrow y' = nu'u^{n-1}$$

$$2) y = \frac{1}{u} \Rightarrow y' = \frac{-u'}{u^2}$$

$$3) y = \sqrt{u} \Rightarrow y' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

$$4) y = \sqrt[3]{u} \Rightarrow y' = \frac{u'}{3\sqrt[3]{u^2}}$$

$$5) y = \sqrt[n]{u} \Rightarrow y' = \frac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$$

$$6) y = \frac{au+b}{cu+d} \Rightarrow y' = \frac{ad-bc}{(cu+d)^2} (u')$$

نوی u ایس داریم
 $u = x^3 - 3x^2$
 u ایکی است

مشتق زیرش به دو تا داریمش

مثال ۱۵: مشتق توابع زیر را به دست آورید:

$$\text{الف) } y = (x^2 + 3x - 1)^7$$

باید عبارت توان دار را بگیرد:

$$y' = 7(2x+3)(x^2+3x-1)^6$$

باید به توان می کشد (مشتق باید) $y' = n$

ب) $y = 5(x^2 + x - 1)^6$

$y' = 5(2)(2x+1)(x^2+x-1)^5$

پ) $y = f^3(x) \rightarrow y' = 3 f'(x) f^2(x)$

$y = u^3 \rightarrow y' = 3u^2 u'$
پایه توان یکی کمتر - مشتق پایه * توان

ت) $y = \sqrt{4+2x}$

$y = \sqrt{u} \rightarrow y' = \frac{u'}{2\sqrt{u}} \quad y' = \frac{0+2}{2\sqrt{4+2x}}$

ث) $y = \sqrt{x^2 - 3x}$

$y' = \frac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x}}$

ج) $y = \sqrt{\frac{2x-1}{3x+2}} = u \rightarrow y' = \frac{u'}{2\sqrt{u}} = \frac{\frac{2(2-(-1)(3)}{(3x+2)^2}}{2\sqrt{\frac{2x-1}{3x+2}}}}$

$y = \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}$

چ) $y = \sqrt{f(x)}$

$y' = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$

ح) $y = \frac{3x^2+1}{x^2+1}$

$u = x^2$

$y' = \left(\frac{3(1) - (1)(1)}{(x^2+1)^2} \right) (2x)$

شبه هورانید $y = \frac{au+b}{cu+d} \rightarrow y' = \left(\frac{ad-bc}{(cu+d)^2} \right) u'$

خ) $y = \frac{5\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x+2}} \quad u = \sqrt{x}$

شبه هورانید

$y' = \left(\frac{5(1) - (-1)(2)}{(2\sqrt{x+2})^2} \right) \left(u' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \right)$

تست ۱۶: مشتق تابع $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ در نقطه‌ی $x=1$ برابر ۳ است. اگر $f(1) = 0$ ، $f'(1) = -4$ و $g'(1)$ موجود باشد، مقدار $g(1)$ کدام

(سراسری تهرانی)

است؟

$\frac{4}{3}$ (۴)

$\frac{3}{4}$ (۳)

$-\frac{2}{3}$ (۲)

$-\frac{4}{3}$ (۱)

شکل $y' = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)}$

$y'_{(x=1)} = \frac{f'(1)g(1) - \cancel{g'(1)f(1)}}{g^2(1)} = 3 \rightarrow \frac{(-4)g(1)}{g^2(1)} = 3 \rightarrow \frac{-4}{g(1)} = 3 \rightarrow g(1) = \frac{4}{3}$

تست ۱۷: مقدار مشتق تابع $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x-1}}$ در $x = 5$ کدام است؟

شماره

(۴) $\frac{5}{32}$ (۳) $\frac{5}{16}$ (۲) $\frac{3}{32}$ (۱) $\frac{3}{16}$

$$y' = \frac{(1)(\sqrt{x-1}) - (\frac{1}{2\sqrt{x-1}})x}{(\sqrt{x-1})^2 = (x-1)} \rightarrow y' = \frac{2 - \frac{5}{2} = \frac{4}{2}}{5-1=4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

تست ۱۸: مشتق $f(x) = \frac{1}{1+\frac{1}{x}}$ به چه صورت است؟

(۴) $\frac{1}{(x+1)^2}$ (۳) $\frac{1}{x^2}$ (۲) $\frac{1}{1-\frac{1}{x^2}}$ (۱) $\frac{1}{1-\frac{1}{x}}$

ساده کن

$$y = \frac{1}{1 + \frac{1}{x} = \frac{x+1}{x}} = \frac{x}{x+1}$$

$$y' = \frac{(1)(1) - 0}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}$$

تست ۱۹: مشتق تابع $f(x) = x^3 \sqrt{\frac{x+1}{x+2}}$ در نقطه $x = -3$ کدام است؟

(۴) $\frac{3}{2}$ (۳) $\frac{4}{3}$ (۲) $\frac{3}{4}$ (۱) $\frac{2}{3}$

(تجربی فارغ از کشور ۹۸)
 $y = u \cdot v$
 $y' = u'v + v'u$

$y = \sqrt[3]{u} \cdot v$
 $y' = \frac{u'}{3\sqrt[3]{u^2}} \cdot v + \sqrt[3]{u} \cdot v'$

$$y' = (1) \sqrt[3]{\frac{x+1}{x+2}} + \frac{3(2) - (1)(1)}{(x+2)^2} \cdot x$$

$$x = \frac{-3}{2} \quad 2 + \frac{5}{12}(-3) = 2 - \frac{5}{4} = \frac{8}{4} - \frac{5}{4} = \frac{3}{4}$$

تست ۲۰: مشتق عبارت $(\frac{16}{x} - \sqrt{x^2})^2$ به ازای $x = -8$ کدام است؟

(۴) -1 (۳) 1 (۲) $-\frac{1}{2}$ (۱) 2

$$y = u^n \rightarrow y' = n u^{n-1} u'$$

$$y = \left(\frac{17}{x} - x^{\frac{1}{2}}\right)^2 \rightarrow y' = 2 \left(-\frac{17}{x^2} - \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}\right) \left(\frac{17}{x} - \sqrt{x}\right)$$

$$y'_{(x=-8)} = 2 \left(-\frac{1}{8} + \frac{1}{4}\right) = \frac{-2+2}{8} = \frac{0}{8} = 0 \left(-2 - 2\right) = -4$$

$$y = u^n$$

$$y' = n u' u^{n-1}$$

(سراسری تهری فارج از کشور ۹۹)

تست ۲۱: مقدار مشتق تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt[3]{\left(\frac{2x-x^2}{3x+5}\right)^2}$ در نقطه $x = -2$ ، کدام است؟

$$y = \left(\frac{2x-x^2}{3x+5}\right)^{\frac{2}{3}} \quad y' = \frac{2}{3} \left(\frac{(2-2x)(3x+5) - 3(2x-x^2)}{(3x+5)^2}\right) \left(\frac{2x-x^2}{3x+5}\right)^{-\frac{1}{3}}$$

$$y'_{x=-2} = \frac{2}{3} \left(\frac{1(-1) - 3(-1)}{1}\right) \left(\frac{-3-2-1}{-1}\right)^{-\frac{1}{3}} = 12 \left(\frac{1}{-1}\right) = -12$$

$$y = u^n \rightarrow y' = n u' u^{n-1}$$

(سراسری تهری ۹۹)

تست ۲۲: مشتق تابع با ضابطه $f(x) = \left(\frac{\sqrt[3]{x^2+2x}}{x^2-x}\right)^3$ در نقطه $x = 2$ ، کدام است؟

$$y = \sqrt[3]{u} \rightarrow y' = \frac{u'}{3\sqrt[3]{u^2}} \quad y' = \frac{3 \left(\frac{2x+2}{3\sqrt[3]{(x^2+2x)^2}} (x^2-x) - (2x-1) \sqrt[3]{x^2+2x} \right)}{(x^2-x)^2} \left(\frac{\sqrt[3]{x^2+2x}}{x^2-x} \right)^2$$

$$y' = 3 \left(\frac{1-7=-6}{3} \right) \left(\frac{2}{2} = 1 \right)^2 = -18$$

تست ۲۳: فرض کنید $f(x) = \cos^3(2x) + ax^2 + b$ ، $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = 0$ و $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f'(x)}{x} = 2$ ، مقدار $a+b$ کدام است؟

(سراسری ریاضی ۱۴۰۰)

بال حساب درشته ای فنی

پاسخ: گزینه «۲» - چون $x \rightarrow 0$ ، پس حق داریم از هم‌ارزی $\cos^n(u) \sim 1 - \frac{nu^2}{2}$ استفاده کنیم. ابتدا هم‌ارز تابع f را در $x = 0$

$$f(x) = \cos^3(2x) + ax^2 + b \sim \left(1 - \frac{3(2x)^2}{2}\right) + ax^2 + b = 1 - 6x^2 + ax^2 + b = (a-6)x^2 + b + 1$$

$$f'(x) = 2(a-6)x$$

$$1) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(a-6)x^2 + (b+1)}{x} = 0 \Rightarrow b+1 = 0 \Rightarrow b = -1$$

اگر $b+1$ صفر نمی‌شد، حاصل حد، بی‌نهایت می‌شد.

$$2) \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f'(x)}{x} = 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2(a-6)x}{x} = 2 \Rightarrow 2(a-6) = 2 \Rightarrow a = 7$$

$$a + b = 7 + (-1) = 6$$

پس:

تست ۲۴: اگر f تابعی درجه دوم و مختصات رأس آن $S(-1, 2)$ و $f'(2) = 4$ باشد، آن گاه $f'(-4)$ کدام است؟

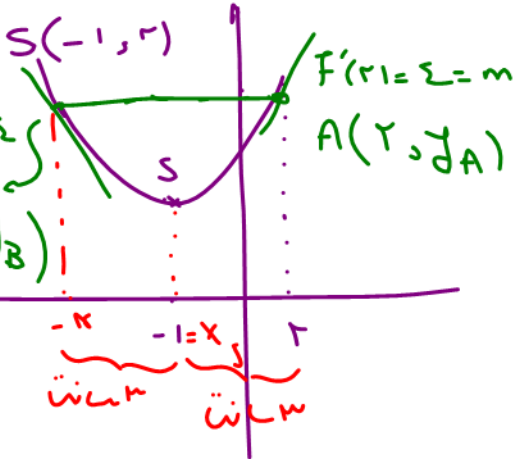
-۱ (۴)

۴ (۳)

-۲ (۲)

-۴ (۱) ✓

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$



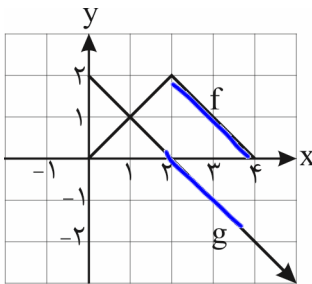
نکته: در هر سهمی ۲ نقطه متعامد زینت

$$x = \frac{-b}{2a}$$

هم هم عرضند

هم شیب دارند

تست ۲۵: نمودار دو تابع f و g در زیر رسم شده است. حاصل $(f \cdot g)'(3)$ کدام است؟



$$y = u \cdot v$$

$$y' = u'v + v'u$$

$$f'(3)g(3) + g'(3)f(3)$$

$$\underbrace{(-1)(-1)}_{(1)} + \underbrace{(-1)(1)}_{(-1)} = \text{صفر}$$

منظور از شیب
یب خط
شیب آن خط
است

خط f در $x=3$

موازی و هم شیب هستند

$$f'(3) = g'(3)$$



$$y = f(u) \Rightarrow y' = u'f'(u)$$

اگر u عبارتی بر حسب x باشد آن گاه مشتق $f(u)$ به شکل روبه رو محاسبه می شود:

مشتق تابع مرکب:

لگوی u ایس داریم

$$y = f\left(\frac{x}{r}\right) \quad y' = \frac{1}{r} f'\left(\frac{x}{r}\right)$$

$$y = f(x^r) \quad y' = r x^{r-1} f'(x^r)$$

$$y = f(\sqrt{x}) \quad y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} f'(\sqrt{x})$$

$$y = f(x^r + \delta x) \quad y' = (r x^{r-1} + \delta) f'(x^r + \delta x)$$

u ایکی هست

$$مثلاً: u = x^3 - 2x^2$$

می توان ثابت کرد که مشتق تابع $f(x) = u^n$ که در آن u عبارتی بر حسب x است (یعنی u تو دلش x داره) به صورت زیر حساب می شود:

$$f(x) = u^n \Rightarrow f'(x) = n u' u^{n-1}$$

$$f(x) = (x^2 - 3x)^5 \Rightarrow f'(x) = \underbrace{5}_{n} \underbrace{(2x - 3)}_{u'} \underbrace{(x^2 - 3x)^4}_{u^{n-1}}$$

مثلاً:

$$f(x) = (2x - 3)^6 \Rightarrow f'(x) = 6(2)(2x - 3)^5$$

$$y = \frac{ax+b}{cx+d} \quad y' = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$$

(سراسری ۹۵)

$$y = u^n$$

$$y' = n u' u^{n-1}$$

۱۵ (۴)

$$f'(2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$$

کدام است؟

۱۲ (۳)

$$y = \sqrt{u} \rightarrow y' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

تست ۲۶: در تابع با ضابطه $f(x) = \left(\sqrt{\frac{x+2}{2x-3}}\right)^3$ حاصل

-۱۸ (۲)

(۱) -۲۱

$$y = 3 \left(\frac{-x-2}{(2x-3)^2} \right) \left(\frac{x+2}{2x-3} \right)^2 \xrightarrow{x=2} 3 \left(\frac{-4}{1} \right) \left(\frac{4}{1} \right) = -48$$

(سراسری تجربی ۹۸)

تست ۲۷: در تابع با ضابطه $f(x) = \frac{1+\sqrt{x}}{5-2x}$ حاصل

$\frac{5}{6}$ (۴)

$$f'(4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4}$$

$\frac{7}{12}$ (۳)

$\frac{5}{12}$ (۲)

$\frac{4}{9}$ (۱)

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)(5-2x) - (-2)(1+\sqrt{x})}{(5-2x)^2} \xrightarrow{x=4} \frac{\left(\frac{1}{4}\right)(-3) + 2}{9} = \frac{5}{12}$$

$$= \frac{5}{12} = \frac{7}{12(9)} = \frac{7}{108}$$

(سراسری قارج ۹۵)

$$y = \sqrt{u} \rightarrow y' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

$$y = \frac{ax+b}{cx+d} \rightarrow y' = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$$

تست ۲۸: در تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{\frac{4x+5}{x+3}}$ حاصل $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$ کدام است؟

$\frac{7}{16}$ (۴) $\frac{7}{24}$ (۳) $\frac{5}{24}$ (۲) $\frac{7}{48}$ (۱)

$$y' = \frac{\frac{4(x+h)+5}{(x+h)^2} - \frac{4(1)+5}{(1+3)^2}}{2\sqrt{\frac{4x+5}{x+3}}} \quad x=1 \quad \frac{7}{16}$$

$$2\sqrt{\frac{9}{4}} = 2\left(\frac{3}{2}\right) = 3 \quad \frac{7}{3(16)} = \frac{7}{48}$$

(تجربی قارج از کشور ۹۸)

تست ۲۹: در تابع با ضابطه $f(x) = \frac{-x-1}{\sqrt{x}}$ حاصل $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\frac{1}{4}+h) - f(\frac{1}{4})}{h}$ کدام است؟

4 (۴) 3 (۳) 2 (۲) 1 (۱)

$$f'(x) = \frac{(-1)\sqrt{x} - (\frac{1}{2\sqrt{x}})(-x-1)}{(\sqrt{x})^2 = x} \quad x = \frac{1}{4} \quad \frac{(-\frac{1}{4}) - (-\frac{1}{4} - 1) = -\frac{5}{4}}{\frac{1}{4}}$$

$$\frac{-\frac{1}{4} + \frac{5}{4} = \frac{4}{4} = 1}{\frac{1}{4}} = 4$$

ساده سازی و سپس مشتق گیری (ساده سپس)

اگر تابعی قابل ساده شدن باشد، می توانیم ابتدا آن را ساده کرده سپس از تابع ساده شده مشتق بگیریم.

$$u = \sqrt{u} \sqrt{u} \quad u > 0$$

$$u = \sqrt[3]{u} \sqrt[3]{u^2} = \sqrt[3]{u^3}$$

تست ۳۰: مشتق تابع $y = \frac{\sqrt[3]{x^2+1}}{x+\sqrt{x}}$ به ازای $x=1$ کدام است؟

$-\frac{1}{9}$ (۴) $\frac{1}{9}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۲) $-\frac{1}{3}$ (۱)

$$y = \frac{\sqrt[3]{x^2+1}}{\sqrt{x}(\sqrt[3]{x^2+1})} = \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = x^{-\frac{1}{3}}$$

$$y' = -\frac{1}{3} x^{-\frac{1}{3}-1} = -\frac{4}{3} \quad x=1 \quad -\frac{1}{3}$$

ساده، سپس
تفرقات
دانه اشتباه است!

$$\sqrt{x} + \sqrt{x(x-2)} = \sqrt{x} \sqrt{x-2}$$

تست ۳۱: مشتق تابع $f(x) = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x^2 - 2x}}{1 + \sqrt{x-2}}$ در $x = 4$ کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) صفر (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) ۲

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}(1 + \sqrt{x-2})}{1 + \sqrt{x-2}} = \sqrt{x}$$

پاسخ: کافی است در صورت کسر از \sqrt{x} فاکتورگیری کنیم:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$$

حالا از $f(x) = \sqrt{x}$ مشتق می‌گیریم:

تست ۳۲: مشتق تابع $f(x) = \frac{x + \sqrt[3]{x^2 - x^3}}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{1-x}}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ (۲) $\frac{2x}{3\sqrt[3]{x^2}}$ (۳) $\frac{2}{3\sqrt[3]{x^2}}$ (۴) $\frac{2x}{3\sqrt[3]{x}}$

پاسخ: کافی است در صورت کسر از $\sqrt[3]{x^2}$ فاکتورگیری کنیم (یعنی به $\sqrt[3]{x^2}$ تقسیم کنیم):

$$y = \frac{\sqrt[3]{x^2}(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{1-x})}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{1-x}} = \sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}$$

$$y' = \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

حالا از ضابطه ساده‌شده مشتق‌گیری می‌کنیم:

بشکن به سه توان یک و به توان ۲

تست ۳۳: مشتق تابع $y = (\sqrt{x+4} - \sqrt{x+1})^3 (\sqrt{x+4} + \sqrt{x+1})^2$ در $x = 0$ کدام است؟

- (۱) $\frac{9}{4}$ (۲) $\frac{27}{4}$ (۳) $-\frac{27}{4}$ (۴) $-\frac{9}{4}$

$$y = (\sqrt{x+4} - \sqrt{x+1})^3 (\sqrt{x+4} + \sqrt{x+1})^2$$

بلی از توان ۲ هارا بنویس
بایه ها که همزود صند رافه بشن

$$y = (\sqrt{x+4} - \sqrt{x+1}) (x+4 - x - 1 = 3)^2 (\sqrt{x+4} + \sqrt{x+1})$$

$$y = 9(\sqrt{x+4} - \sqrt{x+1}) \rightarrow y' = 9\left(\frac{1}{2\sqrt{x+4}} - \frac{1}{2\sqrt{x+1}}\right) \Big|_{x=0} = 9\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) = -\frac{9}{4}$$

تست ۳۴: اگر $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{x+2}$ و $g(x) = \frac{x^2 + 4x + 4}{(x+1)\sqrt{x+1}}$ باشند، حاصل $f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$ به ازای $x = 1$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ (۴) $-\frac{1}{2\sqrt{2}}$

همون مشتق تابع $y = f(x) \cdot g(x)$ است
پس ابتدا $y = f \cdot g$ را می‌سازیم

$$y = f(x) \cdot g(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{x+2} \cdot \frac{(x+2)^2}{(x+1)\sqrt{x+1}} = \frac{x+2}{x+1}$$

$$y' = f'g + g'f = \frac{(1)(1) - 2(1)}{(x+1)^2} = \frac{-1}{(x+1)^2} \Big|_{x=1} = -\frac{1}{4}$$

تست ۳۵: اگر $f(x) = \frac{x^2 + x^2 + 1}{x+1}$ و $g(x) = \frac{x+2}{x+1}$ باشد، حاصل $f'(x) - g'(x)$ برابر است با: $(x \neq -1)$

دل $y = f - g$ را باز
سپس مشتق کنید:

(۱) $-2x$ (۲) $\frac{2x^2}{x+1}$ (۳) $\frac{x^2+1}{x+1}$ (۴) $2x$

$$y = f(x) - g(x) = \frac{x^3 + x^2 + 1 - x - 2}{x+1} = \frac{(x^3 + x^2) - x - 1}{x+1} = \frac{x^2(x+1) - (x+1)}{x+1}$$

$$y = f(x) - g(x) = \frac{(x+1)(x^2-1)}{x+1} = x^2 - 1 \rightsquigarrow y' = f'(x) - g'(x) = 2x \quad \underline{۳۵}$$

تست ۳۶: اگر $f(x) = (\sqrt{1+x^2} - x)^5$ و $g(x) = \frac{1}{(\sqrt{1+x^2} + x)^5}$ مقدار $f'(x)g(x) - f(x)g'(x)$ کدام است؟

منویاد تقسیم f بر g مینویسد:

(۱) -1 (۲) صفر (۳) 1 (۴) 2

$$y = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{(\sqrt{1+x^2} - x)^5}{\frac{1}{(\sqrt{1+x^2} + x)^5}} = (1 + x^2 - x^2 = 1)^5 = 1$$

$$y = \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \xrightarrow{\text{مشتق از روطف}} y' = \frac{f'g - g'f}{g^2} = 0 \xrightarrow{\text{صورتش صفره}} f'g - f'g' = 0$$

تکریله صفره

تست ۳۷: اگر $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x + \sin x}$ و $g(x) = \frac{x^2 + \sin^2 x + 2x \sin x}{x+1}$ ، آن گاه $2ff'g + g'f^2$ به ازای $x=1$ کدام است؟

$y = \sqrt{x} \rightarrow y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
 $y = x^2 \rightarrow y' = 2x$

(۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) $-\frac{1}{4}$ (۴) 1

جابز

پاسخ: اگر توجه کنید $2ff'g + g'f^2$ همان مشتق $f^2 \cdot g$ است، پس:

$$y = (f^2 \cdot g)' = \left(\left(\frac{\sqrt{x}}{x + \sin x} \right)^2 \cdot \frac{(x + \sin x)^2}{x+1} \right)' = \left(\frac{x}{(x + \sin x)^2} \cdot \frac{(x + \sin x)^2}{x+1} \right)' = \left(\frac{x}{x+1} \right)' = \frac{1}{(x+1)^2} \Big|_{x=1} = \frac{1}{4}$$

تست ۳۸: اگر $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x+1}$ باشد، مشتق تابع $g(x) = 2xf(x) + (x^2 - 1)f'(x)$ در $x=4$ کدام است؟ (قلم پی ریاضی ۹۹)

خورد مشتق $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x+1}$

(۱) 12 (۲) 18 (۳) 24 (۴) 48

$g(x) = ((x^2 - 1)f(x))'$ پاسخ: گزینه «۳»

$$(x^2 - 1)f(x) = (x^2 - 1) \left(\frac{x^2 + x + 1}{x+1} \right) = (x-1)(x^2 + x + 1) = x^3 - 1$$

$$\Rightarrow g(x) = (x^3 - 1)' = 3x^2 \Rightarrow g'(x) = 6x \Rightarrow g'(4) = 24$$

if $f(x) = (x-a)g(x) \rightarrow f'(a) = ?$

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-a)g(x) - 0}{x-a} = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

بررسی مشتق در نقطه‌ای $x = a$ در توابعی که به ازای نقطه‌ی $x = a$ عامل صفر کننده دارند

در توابع به صورت $f(x) = g(x) \times h(x)$ در صورتی که $g(a) = 0$ باشد، برای محاسبه‌ی $f'(a)$ کفایت فقط از تابع مشتق $g(x)$ گرفته و آن را در $h(x)$ ضرب کنیم. در واقع برای محاسبه‌ی $f'(a)$ باید از عامل صفرشونده مشتق گرفته و آن را در بقیه عوامل ضرب کنیم.

مثال ۳۹:

$y = (x^2 - 2x)(x+1)^3(2x-5)^4 \quad y'(2) = ?$

مشتق یک تابع در ریشه خود برابر است با:

$$y' = (2x-2)(2+1)^3(2(2)-5)^4 = -54$$

مشتق عبارت اینه دارد در بقیه تابع به ازای اینه

$y = (x-1)(x-2)\dots(x-8) \quad y'(2) = ?$

$$y' = (x-2)'(2-1)(2-3)(2-4)(2-5)(2-6)(2-7)(2-8)$$

$$= (1)(-1)(-2)(-3)(-4)(-5)(-6) = 7!$$

(سراسری ریاضی)

تست ۴۰: مشتق تابع $f(x) = \frac{(x-1)\sqrt[4]{3x-2}}{(\Delta x-3)^4}$ در نقطه‌ی $x=1$ کدام است؟

$\frac{5}{16}$ (۴)

$\frac{3}{40}$ (۳)

$\frac{1}{8}$ (۲)

$\frac{1}{16}$ (۱)

$$f'(1) = \frac{(x-1)' \sqrt[4]{3(1)-2}}{(\Delta x-3)^4} = \frac{1}{16}$$

(سراسری ریاضی ۹۲)

تست ۴۱: اگر $f(x) = (x^2 - x - 2)\sqrt{x^2 - 7x}$ باشد، حاصل $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h}$ کدام است؟

$-\frac{3}{4}$ (۴)

$-\frac{3}{2}$ (۳)

-3 (۲)

-6 (۱)

$f'(-1) = ?$

$$f'(-1) = (x^2 - x - 2)' \sqrt{(-1)^2 - 7(-1)} = (2x - 1) \sqrt{8} = -6$$

(سراسری تهرانی)

تست ۴۲: اگر $f(x) = \frac{(x+1)h(x)}{(2x+1)h(2x+1)}$ باشد، $f'(-1)$ کدام است؟ $(h(-1) \neq 0)$

۲ (۴) ^{بیب} ۱ (۳) -۱ (۲) ✓ -۲ (۱)

$$f'(-1) = \frac{(x+1)' h(-1)}{(2(-1)+1) h(2(-1)+1)} = -1$$

(قلم‌پی ریاضی ۹۹)

تست ۴۳: مشتق تابع $f(x) = \frac{1 \cdot x}{\sqrt{5+x} + \sqrt{5-x}}$ در $x=0$ کدام است؟

$\sqrt{5}$ (۴) ✓ ۵ (۳) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ (۲) $\sqrt{10}$ (۱)

پاسخ: گزینه «۴» - ابتدا ضابطه تابع را ساده‌تر می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{1 \cdot x}{\sqrt{5+x} + \sqrt{5-x}} \cdot \frac{(\sqrt{5+x} - \sqrt{5-x})}{(\sqrt{5+x} - \sqrt{5-x})} = \frac{1 \cdot x(\sqrt{5+x} - \sqrt{5-x})}{2x} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{2}(\sqrt{5+x} - \sqrt{5-x})$$

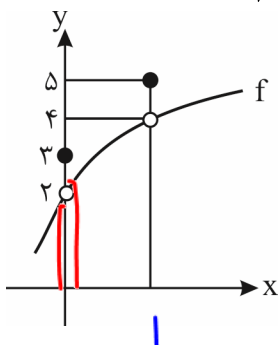
$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{5+x}} + \frac{1}{\sqrt{5-x}} \right) \Rightarrow f'(0) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}} \right) = \frac{1}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

روش دوم: اگر $u(x_0) = 0$ و $v(x_0) \neq 0$ باشد، با فرض مشتق‌پذیری تابع u در x_0 ، برای مشتق تابع $h = u \cdot v$ در x_0 می‌توانیم بنویسیم:

یعنی کافی است از عامل صفرکننده، مشتق بگیریم. با توجه به این نکته داریم:

$$f'(0) = \frac{1 \cdot 0}{\sqrt{5+0} + \sqrt{5-0}} = \frac{1 \cdot 0}{2\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

تست ۴۴: با توجه به نمودار تابع f در شکل روبه‌رو، اگر $g(x) = (x^2 - 1)f(x-1)$ باشد، حاصل $g'(1)$ کدام است؟



لبصغ
۵ ۴ ۳ ۲

$$g'(1) = (x^2 - 1)' \lim_{x \rightarrow 1} f(x-1)$$

$$g'(1) = 2(x-1) \cdot 2 = 4$$

لبصغ
در این تابع $\lim_{x \rightarrow 1} f(x-1) = f(0) = 2$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2 = f(0) = 2$$

مشتق تابع مرکب

اگر تابع g در x و تابع f در $g(x)$ مشتق پذیر باشند، آن گاه تابع $f \circ g$ در x مشتق دارد و داریم:

$$y = f(g(x)) \Rightarrow y' = g'(x)f'(g(x))$$

$$y = g(f(x)) \Rightarrow y' = f'(x)g'(f(x))$$

و به طور مشابه برای $g \circ f$ داریم:

که در این حالت باید، تابع f در x و تابع g در $f(x)$ مشتق پذیر باشد.

مثال ۴۵: اگر $f(x) = x^2 + x$ و $g(x) = \sqrt{x+2}$ ، مشتق تابع $y = (f \circ g)(x)$ را نقطه $x=7$ حساب کنید.

$$y = f(g(x)) \Rightarrow y' = g'(x)f'(g(x))$$

پاسخ:

الان باید مشتق f و g را پیدا کنیم و در ضابطه $f'(x)$ به جای x ها، $g(x)$ ها را قرار دهیم، ببینید:

$$y' = g'(x)f'(g(x)) \stackrel{x=7}{=} g'(7)f'(g(7))$$

$$\begin{cases} g(x) = \sqrt{x+2} \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+2}} \xrightarrow{x=7} g'(7) = \frac{1}{2\sqrt{9}} = \frac{1}{6} \\ \begin{cases} g(7) = \sqrt{7+2} = \sqrt{9} = 3 \\ f'(x) = 2x+1 \end{cases} \Rightarrow f'(g(7)) = f'(3) = 2(3)+1 = 7 \end{cases}$$

$$y' = g'(7)f'(g(7)) = \frac{1}{6} \times 7 = \frac{7}{6}$$

پس:

تست ۴۶: اگر $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x) - g(2)}{x - 2} = \frac{3}{2}$ و $f(x) = \sqrt{5-x^2}$ باشند، آن گاه $(g \circ f)'(1)$ کدام است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور)

$$\frac{3}{2} \quad (4) \quad \frac{1}{2} \quad (3) \quad -\frac{1}{2} \quad (2) \quad \underbrace{\frac{3}{2}}_{g'(2)} \quad -\frac{3}{4} \quad (1) \quad \checkmark$$

$$y = g(f(x)) \rightsquigarrow y' = f'(x)g'(f(x)) \stackrel{x=1}{=} f'(1)g'(f(1) = \sqrt{5-1^2} = 2)$$

$$f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{5-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{5-x^2}} \stackrel{x=1}{=} -\frac{1}{2} \quad -\frac{1}{2} \left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{4}$$

مهمترین دیدگاه!

(سراسری ریاضی خارج از کشور)

تست ۴۷: اگر $f(x) = \frac{1}{x}$ ، مشتق تابع $f(x + \sqrt{1+x^2})$ کدام است؟

$$\sqrt{1+x^2} \quad (4) \quad \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad (3) \quad x - \sqrt{1+x^2} \quad (2) \quad -x + \sqrt{1+x^2} \quad (1)$$

$$y = f(x + \sqrt{1+x^2})$$

$$y' = \left(1 + \frac{fx}{\sqrt{1+x^2}}\right) f'(x + \sqrt{1+x^2}) = \left(\frac{\sqrt{1+x^2} + x}{\sqrt{1+x^2}}\right) \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$y' = u' f'(u)$$

(سراسری تهرانی ۹۸)

تست ۴۸: اگر $g(x) = \frac{2x+1}{x-1}$ و $(fog)'(2) = 6$ باشد، $f'(5)$ کدام است؟

هجوگر است

$$y = f(g(x)) \rightarrow y' = g'(x) f'(g(x))$$

$$y'_{(x=2)} = g'(2) f'(g(2) = 5)$$

$$7 = (-2) f'(5)$$

$$-2 = f'(5)$$

$$g'(x) = \frac{-2-1}{(x-1)^2}$$

$$g'(2) = -2$$

(ریاضی ۹۲)

تست ۴۹: اگر $f(x) = \frac{x^3-2}{1+x^3}$ و $g(x) = \sqrt[3]{x-1}$ باشد، حاصل $f'(g(x))g'(x)$ کدام است؟

$$\frac{x-2}{x^2} \quad (4) \quad \frac{1}{3x} \quad (3) \quad \frac{2}{x^2} \quad (2) \quad \frac{2}{x} \quad (1)$$

مشتق تابع $y = f(g(x))$

هجوگر است! لذا $f \circ g$ را می سازیم و پس مشتق می گیریم

$$y = f(g(x)) = \frac{g^3 - 2}{1 + g^3} = \frac{(x-1) - 2}{1 + (x-1)} = \frac{x-3}{x} \rightarrow y' = \frac{3}{x^2}$$

تست ۵۰: اگر تابع f در $x=4$ مشتق پذیر و $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x)+7}{x-4} = \frac{-3}{2}$ آن گاه مشتق $\frac{f(2x)}{x}$ در $x=2$ کدام است؟

$$\frac{1}{2} \quad (4) \quad \frac{1}{4} \quad (3) \quad -\frac{1}{2} \quad (2) \quad -\frac{1}{4} \quad (1)$$

باید معنی باشد که مثبت

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x)+7}{x-4} = -\frac{3}{2} \xrightarrow{\text{نتیجه منفی}} \left\{ \begin{array}{l} f(4) = -7 \\ f'(4) = -\frac{3}{2} \end{array} \right.$$

$$y = \frac{f(2x)}{x} \rightarrow y' = \frac{(2f'(2x))(2) - (1)f(2x)}{x^2} \quad x=2 \quad \frac{2f'(4)(2) - f(4)}{4} = \frac{1}{4}$$

مشتق توابع شامل قدرمطلق

برای محاسبه مشتق و یا مشتق راست و یا مشتق چپ این نوع از توابع در نقطه دلخواه $x = a$ ابتدا باید عبارت داخل قدرمطلق را در همسایگی آن نقطه تعیین علامت کنیم. حالا اگر توش به ازای اون نقطه مثبت بشه، خودش میاد بیرون و اگه توش به ازای اون نقطه منفی بشه قرینه اش میاد بیرون و حالا وقت مشتق گیری. مثلاً مشتق تابع $f(x) = |2x^3 - 5x|$ به ازای $x=1$ این طوری به دست میاد: در

$$f(x) = 5x - 2x^2$$

همسایگی نقطه‌ی $x=1$ توی قدرمطلق منفی می‌شه پس قرینه‌اش میاد بیرون:
حالا مشتق می‌گیریم و توی مشتق، $x=1$ رو جاگذاری می‌کنیم:

$$f'(x) = 5 - 4x \Rightarrow f'(1) = 5 - 4 = 1$$

تست ۵۱: مشتق تابع $f(x) = |x-1| + |x-2| + \dots + |x-50|$ در نقطه $x = \sqrt{3}$ برابر کدام است؟
 (۱) -28 (۲) $50 - 13 + 1 = 38$ (۳) -26 (۴) -25 (۵) 13 (۶) 13 قدر اول \oplus بقیه \ominus

$$f(x) = (x-1) + (x-2) + \dots + (x-13) + (-x+13) + (-x+14) + \dots + (-x+50) =$$

$$f(x) = 12x - 1x - 38x + \dots = -26x + \dots$$

$$y' = -26$$

تست ۵۲: اگر $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = -\frac{1}{3}$ ، مشتق $f(\sqrt{|x|+3})$ در نقطه‌ی $x = -1$ کدام است؟

$$y = f(\sqrt{-x+3}) \quad y = f(u) \rightarrow y' = u' \cdot f'(u) \quad f'(2) = -\frac{1}{3}$$

$$y' = \frac{-1}{2\sqrt{-x+3}} \cdot f'(\sqrt{-x+3}) \stackrel{x=-1}{=} -\frac{1}{2} \cdot f'(\sqrt{4}=2) = -\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{12}$$

(سراسری ۹۴)

تست ۵۳: اگر $f(x) = \frac{4}{5}x - \frac{1}{5}|x|$ و $g(x) = 4x + |x|$ باشند، مشتق تابع $f \circ g$ کدام است؟

(۴) مشتق ندارد.

(۳) ۴

(۲) ۳

(۱) ۲

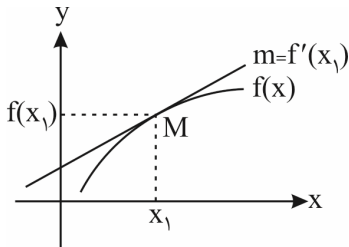
$$f(x) = \frac{4}{5}x - \frac{1}{5}|x| = \begin{cases} \frac{3}{5}x & x \geq 0 \\ \frac{4}{5}x & x < 0 \end{cases} \quad g(x) = 4x + |x| = \begin{cases} 5x & x \geq 0 \\ 3x & x < 0 \end{cases}$$

$$y = f(g(x)) = \begin{cases} \frac{3}{5}(5x) = 3x & x \geq 0 \\ 3x & x < 0 \end{cases}$$

$$y = f \circ g(x) = 3x \rightarrow y' = 3$$

درس ۳: خط مماس

خط مماس بر منحنی از یک نقطه روی آن



گفتیم مقدار مشتق تابع $f(x)$ در نقطه‌ی x_1 برابر است با شیب خط مماس بر منحنی تابع f در آن نقطه.

پس برای نوشتن معادله‌ی خط مماس بر منحنی $y = f(x)$ در نقطه‌ای مانند M به طول x_1 کافی است $m = f'(x_1)$ را پیدا کنیم و معادله‌ی خط مماس را با استفاده از رابطه‌ی $y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1)$ بنویسیم.

به نظر می‌رسد حرف دیگری نمانده ولی بگذارید برای آن که یاد بگیرید معادله‌ی مماس را سریع‌تر بنویسید یک مثال حل کنیم. می‌خواهیم

معادله‌ی خط مماس بر منحنی تابع $f(x) = \frac{2x+1}{x-2}$ را در نقطه‌ای به طول ۴ واقع بر منحنی بنویسیم. اول $x = 4$ را می‌گذاریم نوی

ضابطه‌ی تابع و عرض نقطه را پیدا می‌کنیم. $f(4) = \frac{9}{2}$ پس مختصات نقطه شد $(4, \frac{9}{2})$ حالا مشتق می‌گیریم $y' = \frac{-5}{(x-2)^2}$ را $x = 4$ می‌گذاریم نوی مشتق تا شیب مماس به دست آید: $m = \frac{-5}{4}$ حالا برای نوشتن معادله‌ی مماس دو تا کار می‌توانید بکنید:

$$y - \frac{9}{2} = -\frac{5}{4}(x - 4) \Rightarrow y = -\frac{5}{4}x + 5 + \frac{9}{2} \Rightarrow y = -\frac{5}{4}x + \frac{19}{2} \Rightarrow 4y + 5x = 38$$

از همان فرمول بالا استفاده کنید: علت این که معادله را ساده کردیم، این است که در گزینه‌ها معمولاً با این شکل معادله سروکار دارید.

(۲) یک راه دیگر داریم که معادله‌ی ساده‌شده‌ی خط را سریع‌تر بنویسیم. (این راه کاملاً اختیاری است.)

فرض کنید مختصات نقطه به صورت (α, β) و شیب خط برابر $m = \frac{a}{b}$ است. معادله‌ی خط را به صورت $by - ax = ?$ بنویسید و مختصات (α, β) را در آن قرار دهید تا طرف دیگر تساوی به دست آید.

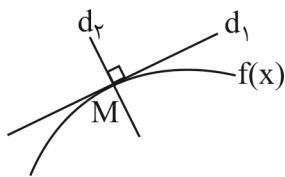
می‌شود در ذهن انجام بدهید

$$4y + 5x = ? \Rightarrow (4(\frac{9}{2}) + 5(4) = 38) \Rightarrow 4y + 5x = 38 \quad \text{پس: } m = -\frac{5}{4} \text{ و شیب هم } (4, \frac{9}{2})$$

خط قائم بر منحنی $f(x)$ در نقطه‌ی M ، خطی است که بر خط مماس بر منحنی در آن نقطه عمود

باشد. پس شیب خط قائم برابر $\frac{-1}{m}$ یا $-\frac{1}{f'(x_1)}$ است. بنابراین برای نوشتن معادله‌ی خط قائم

هم مثل نوشتن معادله‌ی خط مماس عمل می‌کنیم: اول مختصات نقطه، بعد مشتق و پیدا کردن شیب مماس، بعد پیدا کردن شیب خط قائم و در آخر هم نوشتن معادله‌ی خط قائم.



تست ۵۴: خط مماس بر منحنی تابع $f(x) = \frac{5x-4}{\sqrt{x}}$ در نقطه $x = 4$ واقع بر آن، محور y ها را با کدام عرض، قطع می‌کند؟ (سراسری ریاضی ۹۹)

$$3 \quad (4) \qquad 2 \quad (3) \qquad -1 \quad (2) \qquad -4 \quad (1)$$

$$f(x) = \frac{5x-4}{\sqrt{x}} \qquad \longrightarrow \qquad f(4) = 1 \qquad A(4, 1)$$

$$f'(x) = \frac{5\sqrt{x} - (\frac{1}{\sqrt{x}})(5x-4)}{(\sqrt{x})^2} \qquad f'(4) = \frac{10-4}{4} = \frac{3}{2} = m_A$$

$$y - y_A = m_A(x - x_A) \longrightarrow y - 1 = \frac{3}{2}(x - 4) \xrightarrow{x=0} y = -2 \quad B(0, -2)$$

حل ۲ خود را با محور y ها

تست ۵۵: خط مماس بر منحنی به معادله $y = \frac{1}{\sqrt[3]{4x}}$ در نقطه $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$ ، محور y ها را با کدام عرض قطع می کند؟ (فارج ۱۹)

$y = (\frac{1}{4x})^{-\frac{1}{3}} \rightarrow y' = -\frac{1}{3}(\frac{1}{4x})^{-\frac{4}{3}} \cdot (\frac{1}{4})^{-\frac{1}{3}} \cdot (-\frac{1}{4x^2})$
 $\frac{5}{6} (2) \quad \frac{2}{3} (1)$
 $\frac{1}{4} = \frac{1}{4x^2} \rightarrow x = \frac{1}{2}$
 $y = -\frac{1}{3} \left(\frac{1}{4 \cdot \frac{1}{4}}\right)^{-\frac{4}{3}} = -\frac{1}{3} (1)^{-\frac{4}{3}} = -\frac{1}{3}$

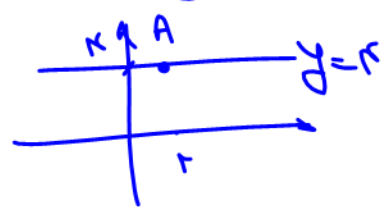
$A(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \quad m_A = -\frac{1}{3}$
 $y - y_A = m(x - x_A)$
 $y - \frac{1}{2} = -\frac{1}{3}(x - \frac{1}{2})$
 $x = 0 \rightarrow y = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3} = \frac{4}{6}$

تست ۵۶: خط مماس بر منحنی به معادله $y = \frac{x^2}{x-1}$ در نقطه‌ای به طول ۲ واقع بر آن، محور y ها را با کدام عرض قطع می کند؟

(سراسری ریاضی فارج از کشور) ۴ (۴) ۲ (۳) ۱ (۲) ۱ (صفر)

$f(x) = \frac{x^2}{x-1} = 2 \quad A(2, 2)$

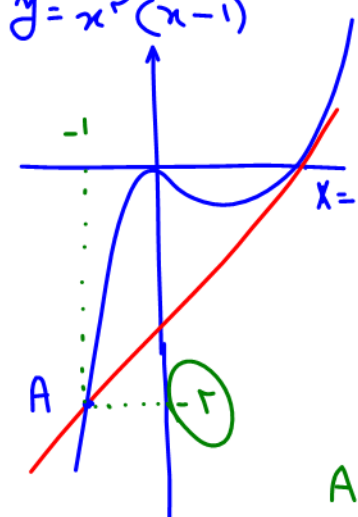
$f'(x) = \frac{2x(x-1) - x^2}{(x-1)^2}$
 $f'(2) = 0 = m_A \rightarrow$ *مماس افقی است*



$y - y_A = m_A(x - x_A)$
 $y - 2 = 0(x - 2) \rightarrow y - 2 = 0 \rightarrow y = 2$

تست ۵۷: خط مماس بر منحنی به معادله $y = x^3 - x^2$ در نقطه‌ای به طول $x=1$ واقع بر آن، منحنی را در نقطه‌ی دیگر A قطع می کند. عرض A کدام است؟ (فارج ۱۷)

۳ (۴) ۲ (۳) -۲ (۲) -۳ (۱)



$y = x^3 - x^2 \quad y' = 3x^2 - 2x$
 $y' = 3 - 2 = 1 = m_B$
 $B(1, 0)$
 $y - 0 = 1(x - 1) \rightarrow y = x - 1$
 $x^3 - x^2 = x - 1$
 $x^3 - x^2 - x + 1 = 0$
 $x^2(x-1) - (x-1) = 0$
 $(x^2 - 1)(x-1) = 0$
 $(x-1)^2(x+1) = 0$
 $x = 1$ (repeated), $x = -1$
 $A(-1, -2)$
تابع افق می کند

تعیین نقاطی از منحنی که مماس بر منحنی در آن نقطه دارای شیب معلوم باشد

برای تعیین این نقاط از منحنی مشتق گرفته و مشتق را برابر شیب خط مماس قرار می دهیم.

مثال ۵۸: مماس بر منحنی $y = x^3 - 3x^2 - 9x$ در چه نقاطی موازی محور x ها است؟ شش صفر

$$y = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x^2 - 2x - 3) = \dots \rightarrow x_1 = -1, x_2 = 3$$

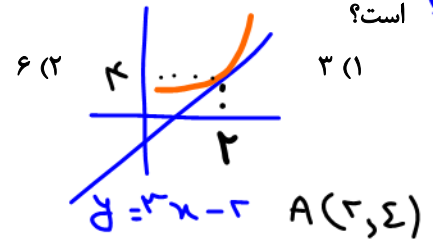
در ۲ نقطه مماس موازی محور x هاست.

نکته: پیرجاشق تابع صفر باشد مماس موازی محور x هاست و برعکس.

تست ۵۹: خط به معادله $y = 3x - 2$ در نقطه $x = 2$ بر منحنی پیوسته $y = f(x)$ مماس است. حاصل $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f^2(x) - 4f(x)}{x - 2}$ کدام است؟

(سراسری ریاضی ۹۵)

$$\frac{(f(2) - 4)^2 - 4(f(2) - 2)}{2 - 2} = \text{Hop} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2f'(x)f(x) - 4f'(x)}{1}$$



$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2f'(x)f(x) - 4f'(x)}{1} = 2(3)(4) - 4(3) = 12$$

نکته: در نقطه ای که مماس خط مماس است $f'(x) = f'(2) = 3$ و $f(2) = 4$ پس $f'(x)f(x) = 3(4) = 12$ و $4f'(x) = 4(3) = 12$ پس $12 - 12 = 0$ و $0/0$ است. در خط هم هم تقاطع هم هم شیب.

تست ۶۰: در تابع با ضابطه $f(x) = \frac{4x - 5}{x + 1}$ و دامنه $[0, 8]$ خط مماس بر نمودار آن موازی پاره خطی است که ابتدا و انتهای منحنی را به هم وصل می کند. این خط مماس، محور y ها را با کدام عرض قطع می کند؟

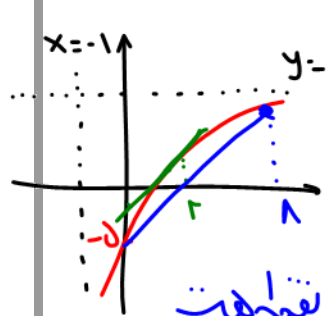
(فارج تجربی ۹۸)

$$\frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = f'(c) \quad \text{هم وصل می کند. این خط مماس، محور } y \text{ ها را با کدام عرض قطع می کند؟}$$

شیب خط مماس بر تابع = شیب خط واصل اول دو آفر

$$\frac{3 - (-5)}{1} = 1 = \frac{4(1) - (-5)(1)}{(1+1)^2} = \frac{9}{(x+1)^2}$$

$$(x+1)^2 = 9$$



$$\begin{cases} x+1 = 3 & x = 2 \in [0, 8] & A(2, 1) & f'(2) = \frac{9}{(2+1)^2} = 1 = m_A \\ x+1 = -3 & x = -4 \end{cases}$$

$$y - y_A = m_A (x - x_A) \rightarrow y - 1 = 1(x - 2) \xrightarrow{x=0} \boxed{y = -1}$$

نکته: اگر آردی بازه $[a, b]$ پیوسته و روی آن (a, b) شق پیوسته باشد حد اول روی آن باید تقاطع است که مماس موازی خط واصل اول را خراب است.



اگر یک خط و یک منحنی بر هم مماس باشند (طول نقطه‌ی تماس را نداریم) معادله‌ی تلاقی آن‌ها ریشه‌ی مکرر (معمولاً مضاعف) می‌دهد. در این‌جا دو حالت زیر می‌تواند رخ دهد:
(۱) اگر معادله‌ی تلاقی، درجه دوم باشد، باید $\Delta = 0$ قرار دهیم.

تست ۶۱: اگر خط $y = 4x + a$ بر منحنی $y = x^2 + 2x + 3$ مماس باشد، مقدار a کدام است؟
(۱) ۱ (۲) -۱ (۳) ۲ (۴) -۲

پاسخ: گزینه‌ی «۳» - روش تلاقی: معادله‌ی خط و منحنی را قطع می‌دهیم و شرط وجود ریشه‌ی مضاعف را می‌نویسیم:

$$\begin{cases} y = x^2 + 2x + 3 \\ y = 4x + a \end{cases} \Rightarrow x^2 + 2x + 3 = 4x + a \Rightarrow x^2 - 2x + (3 - a) = 0 \Rightarrow \Delta = 0 \Rightarrow 4 - 4(3 - a) = 0$$

$$\Rightarrow -8 + 4a = 0 \Rightarrow a = 2$$

(۲) مشتق هر دو را مساوی می‌گذاریم و معادله‌ی جدید را حل می‌کنیم و x را به دست می‌آوریم. به این x ، طول نقطه‌ی تماس می‌گویند. این x را در منحنی و خط جاگذاری می‌کنیم و عرض‌هایشان را مساوی قرار می‌دهیم. روش دوم سؤال قبل رو ببینید:

$$\begin{cases} y = x^2 + 2x + 3 \Rightarrow y' = 2x + 2 \\ y = 4x + a \Rightarrow y' = 4 \end{cases} \xrightarrow{\text{مشتق‌ها رو مساوی بذار}} 2x + 2 = 4 \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 1$$

به $x = 1$ طول نقطه‌ی تماس می‌گویند.

حالا $x = 1$ رو توی منحنی و خط جاگذاری کن و عرض‌هاشون رو مساوی قرار بده:

$$\begin{cases} x = 1 \xrightarrow{\text{در منحنی}} y = 1 + 2 + 3 = 6 \\ x = 1 \xrightarrow{\text{در خط}} y = 4 + a \end{cases} \xrightarrow{\text{عرض‌ها مساوی}} 6 = 4 + a \Rightarrow \boxed{a = 2} \text{ خلاص}$$

روش ۲ همیشه کارآمده ولی روش ۱ یعنی تلاقی و سپس $\Delta = 0$ وقتی به درد می‌خوره که معادله‌ی تلاقی درجه ۲ باشه.

تست ۶۲: به ازای کدام مقدار b خط به معادله‌ی $y = -3x + b$ بر نمودار تابع $y = x^3 - 3x^2$ مماس است؟
(۱) -۲ (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) ۲

پاسخ: گزینه‌ی «۳» - چون با یک تابع درجه سوم روبرو هستیم از مشتق استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases} y = x^3 - 3x^2 \Rightarrow y' = 3x^2 - 6x \\ y = -3x + b \Rightarrow y' = -3 \end{cases} \xrightarrow{\text{مشتق‌ها رو مساوی بذار}} 3x^2 - 6x = -3 \Rightarrow 3x^2 - 6x + 3 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow (x - 1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ طول نقطه‌ی تماس}$$

$$\begin{cases} x = 1 \xrightarrow{\text{در منحنی}} y = 1 - 3 = -2 \\ x = 1 \xrightarrow{\text{در خط}} y = -3 + b \end{cases} \xrightarrow{\text{عرض‌ها مساوی}} -2 = -3 + b \Rightarrow \boxed{b = 1} \text{ خلاص}$$

تست ۶۳: معادله‌ی خط مماس بر نمودار تابع $y = \frac{x^2 + mx + 1}{x + 3}$ در نقطه‌ای به طول واحد بر روی نمودار، به صورت $4y - 3x = n$ است.

مقدار $m + n$ چقدر است؟
(۱) -۳ (۲) -۲ (۳) ۲ (۴) ۳

نقطه‌ی تماس، خط مماس و منحنی هم هم‌تangent
می‌شوند هم هم‌tangent

$A(1, \frac{m+2}{3})$

$f(1) = \frac{1^2 + m(1) + 1}{1 + 3} = \frac{m+2}{4} \rightarrow 4 + n = m + 2 \rightarrow m - n = 1$

$f'(1) = \frac{2x + m}{(x+3)^2} = \frac{2 + m}{16} = \frac{3}{4} \rightarrow 2 + m = 12 \rightarrow m = 10 \rightarrow n = 1$

$\boxed{27}$

تست ۶۴: دو نقطه بر منحنی $y = \frac{x-3}{x-1}$ وجود دارد که مماس در آن نقاط موازی خط $y = 2x$ است. فاصله این دو نقطه برابر چقدر است؟

خط‌های موازی یعنی شیب‌های $\sqrt{2}$ (۴) $2\sqrt{2}$ (۳) $2\sqrt{5}$ (۲) $\sqrt{5}$ (۱)

$$y' = \frac{-1+3}{(x-1)^2} = 2 \rightarrow (x-1)^2 = 1 \rightarrow x-1 = 1 \rightarrow x=2 \quad A(2, -1)$$

$$x-1 = -1 \rightarrow x=0 \quad B(0, 3)$$

$$AB = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = 4 + 16 = 20 = 2\sqrt{5}$$

تست ۶۵: منحنی $y = \frac{x^2 + mx + 3}{x+2}$ بر محور x ها مماس است. مقدار m کدام است؟ نکته: ریشه مخالف هم‌ریشه‌ها در صورت

خط $y=0$ تابع را بر ریشه مخالف قطع می‌کند. $x = -2$ (۲) -3 (۳) -4 (۴) هم‌رشته‌ها در صورت

$$y = \frac{x^2 + mx + 3}{x+2} = 0 \rightarrow x^2 + mx + 3 = 0$$

$$y' = \frac{(2x+m)(x+2) - (x^2 + mx + 3)}{(x+2)^2} = 0 \rightarrow 2x^2 + m = 0 \rightarrow x = \sqrt{-\frac{m}{2}}$$

$$y = \frac{x^2 + mx + 3}{x+2} \quad \Delta_f$$

تست ۶۶: حداکثر چند خط موازی محور x ها می‌توان بر تابع $f(x) = ax^2 + bx^2 + c$ مماس کرد؟

صفر (۴) 2 (۲) 3 (۳) 1 (۱)

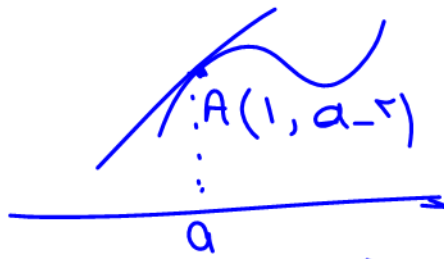
$$y' = 2ax + 2bx = 0 \rightarrow x(2ax + 2b) = 0$$

بیشتر $\frac{b}{a} < 0$ است. $x = 0, \pm \sqrt{\frac{-b}{2a}}$

بنابراین 3 خط مماس بر شیب

تست ۶۷: خط مماس بر منحنی $y = x^3 + ax^2 - 3x$ در نقطه‌ای به طول $x=1$ واقع بر آن، بر منحنی $y = x^2$ نیز مماس است. مقدار a کدام می‌تواند باشد؟

$A(1, a-2)$ $y' = 3x^2 + 2ax - 3$ -4 (۴) -3 (۳) -2 (۲) -1 (۱)



$$\begin{cases} y' = 2a = m_A \\ x=1 \end{cases}$$

$$A(1, a-2)$$

$$y - y_A = m_A(x - x_A)$$

$$y - a + 2 = 2a(x - 1)$$

$x^2 = 2ax - a - 2$

$x^2 - 2ax + (a+2) = 0$

$\Delta = (-2a)^2 - 4(a+2) = 4a^2 - 4a - 8 = 4(a^2 - a - 2) = 4(a-2)(a+1)$

$a = -1$
 $a = 2$

درس ۴: مشتق پذیری و پیوستگی

اگر در تابع پیوسته $f(x)$ حاصل حد $\lim_{x \rightarrow x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}$ وجود داشته باشد (یعنی برابر عدد مشخصی شود) آن را مشتق تابع $f(x)$ در

نقطه‌ی x_1 می‌نامیم و با $f'(x_1)$ نشان می‌دهیم. یعنی $f'(x_1) = \lim_{x \rightarrow x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}$ و مقدارش برابر شیب خط مماس بر منحنی تابع $f(x)$ در نقطه‌ی x_1 است.

اگر این حد را از سمت راست حساب کنیم می‌گوییم مشتق راست تابع را در نقطه‌ی x_1 پیدا کرده‌ایم و آن را با $f'_+(x_1)$ نشان می‌دهیم:

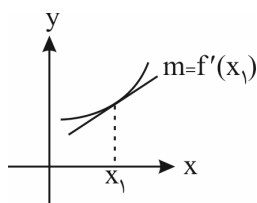
$$f'_+(x_1) = \lim_{x \rightarrow x_1^+} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}$$

و اگر این حد را از سمت چپ حساب کنیم می‌گوییم مشتق چپ تابع را در نقطه‌ی x_1 پیدا کرده‌ایم و آن را با $f'_-(x_1)$ نشان می‌دهیم:

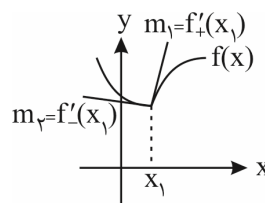
$$f'_-(x_1) = \lim_{x \rightarrow x_1^-} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}$$

وقتی مقدار حد راست و حد چپ (یعنی همان مشتق راست و مشتق چپ) هر دو موجود و با هم برابر باشند، می‌گوییم تابع در نقطه‌ی x_1 مشتق پذیر است و اگر هر کدام از حدهای بالا وجود نداشته باشد یا $\pm\infty$ شود و یا $f'_+(x_1) \neq f'_-(x_1)$ باشد، می‌گوییم تابع در نقطه‌ی x_1 مشتق پذیر نیست.

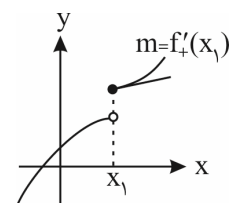
گفتیم که مقدار مشتق تابع در یک نقطه همان شیب خط مماس بر منحنی تابع است. حالا به شکل‌های زیر نگاه کنید:



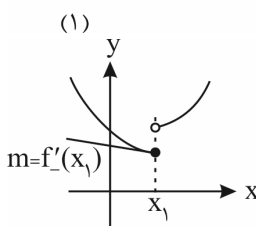
(۱)



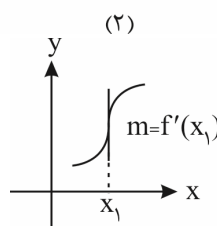
(۲)



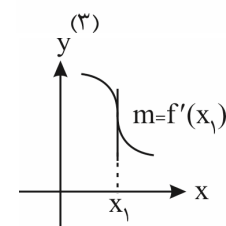
(۳)



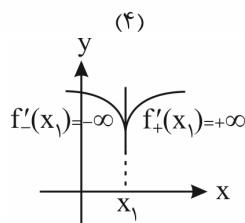
(۴)



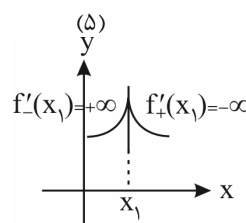
(۵)



(۶)



(۷)



(۸)

(۱) تابع در نقطه‌ی x_1 پیوسته است و مقدار مشتق راست (شیب نیم‌مماس راست) و مشتق چپ (شیب نیم‌مماس چپ) با هم برابرند. دو نیم‌مماس (یعنی دو نیم‌خط مماس) در امتداد یکدیگرند و تابع در نقطه‌ی x_1 مشتق پذیر و دارای خط مماس است.

(۲) تابع در نقطه‌ی x_1 پیوسته است و مقدار مشتق راست و چپ با هم فرق می‌کند. تابع هم مشتق راست دارد و هم مشتق چپ ولی

مشتق پذیر نیست. نیم مماس راست و چپ در امتداد هم نیستند و با هم زاویه می سازند و به همین خاطر به این نقطه می گوئیم نقطه‌ی زاویه دار یا نقطه‌ی گوشه‌ای.

۳) تابع در نقطه‌ی x_1 فقط از سمت راست پیوسته و دارای مشتق راست است، پس فقط نیم مماس راست داریم و تابع در نقطه‌ی x_1 مشتق پذیر نیست.

۴) تابع در نقطه‌ی x_1 فقط از سمت چپ پیوسته و دارای مشتق چپ است، پس فقط نیم مماس چپ داریم و تابع در نقطه‌ی x_1 مشتق پذیر نیست.

۵) تابع در نقطه‌ی x_1 پیوسته است و مشتق راست و چپ تابع در این نقطه هر دو برابر $+\infty$ هستند و تابع در این نقطه مشتق پذیر نیست اما خط مماس قائم دارد. به این نقاط می گوئیم عطف قائم.

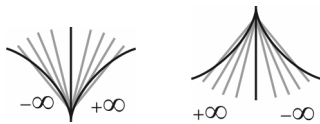
۶) تابع در نقطه‌ی x_1 پیوسته است و مشتق راست و چپ تابع در این نقطه هر دو برابر $-\infty$ هستند و تابع در این نقطه مشتق پذیر نیست اما خط مماس قائم دارد. به این نقاط می گوئیم عطف قائم.

۷) تابع در نقطه‌ی x_1 پیوسته است و مشتق چپ تابع برابر $-\infty$ و مشتق راست برابر $+\infty$ است. تابع در این نقطه مشتق پذیر نیست و به این نقطه می گوئیم نقطه‌ی بازگشتی.

۸) تابع در نقطه‌ی x_1 پیوسته است و مشتق چپ برابر $+\infty$ و مشتق راست برابر $-\infty$ است. تابع در این نقطه مشتق پذیر نیست و به این نقطه می گوئیم نقطه‌ی بازگشتی.

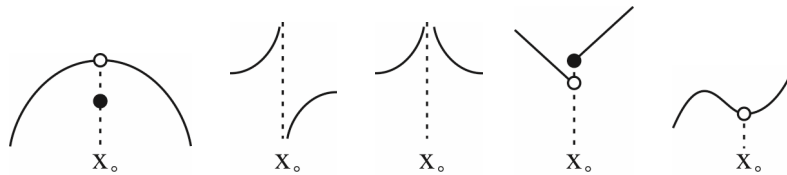
در تمام حالت‌های بالا تابع به شرطی در نقطه‌ی x_1 دارای خط مماس است که در آن پیوسته باشد. به عبارت دیگر تابع از هر سمت که پیوسته نباشد حتماً از همان سمت خط مماس ندارد. یعنی پیوستگی شرط لازم و نه کافی برای مشتق پذیری است.

برای تعیین علامت ∞ وقتی که خط مماس قائم داریم کافی است از نقاط نزدیک به نقطه‌ی مزبور به آن وصل کنیم و به سمت آن نقطه میل کنیم. علامت شیب خط قاطع (که حالت حدی‌اش می شود شیب خط مماس) همان علامت ∞ است.

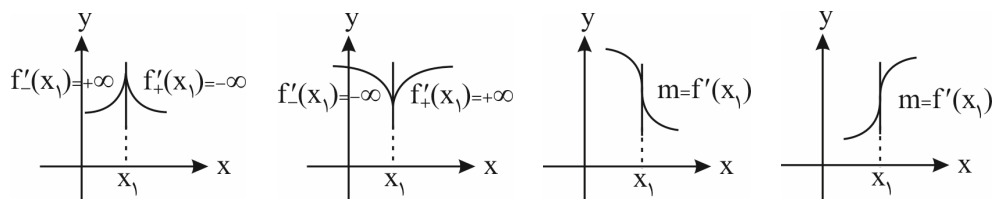


جمع بندی:

۱) اگر f در یک نقطه ناپیوسته باشد، در آن نقطه مشتق پذیر نیست.



۲) اگر f در یک نقطه پیوسته باشد و مماس قائم داشته باشد (و یا نیم مماس قائم) در آن نقطه مشتق پذیر نیست. (مشتق چپ و راست، هر دو نامتناهی)



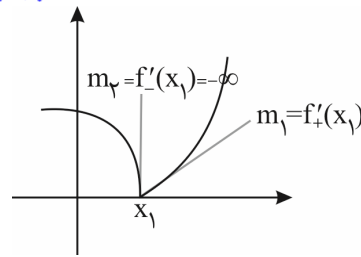
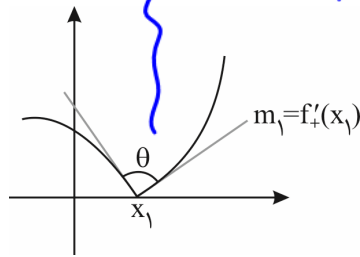
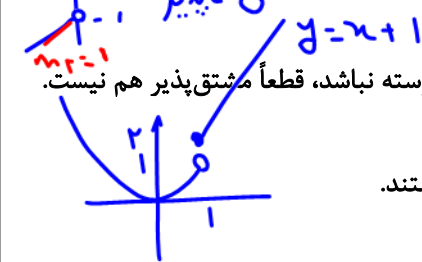
۳) اگر f در یک نقطه پیوسته باشد و مشتق چپ و راست در آن نقطه:

الف) هر دو موجود (متناهی) ولی نابرابر باشند (نقطه گوشه‌ای).

ب) یکی متناهی و دیگری نامتناهی باشد (نقطه گوشه‌ای).

برای حساب $\tan \theta = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right|$

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & x \geq 1 \\ x-1 & x < 1 \end{cases}$$



بیا باید مواردی را که گفتیم در مورد ضابطه‌ها هم بررسی کنیم.

شرط اصلی مشتق پذیری، پیوستگی است. یعنی باید $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ باشد. اگر f در $x = a$ پیوسته نباشد، قطعاً مشتق پذیر هم نیست.

مثلاً $y = [x]$ و $y = \begin{cases} x+1 & x \geq 1 \\ x^2 & x < 1 \end{cases}$ در $x = 1$ مشتق پذیر نیستند چون در این نقطه پیوسته نیستند.

پیوستگی راست شرط لازم برای وجود مشتق راست و پیوستگی چپ شرط لازم برای وجود مشتق چپ است. به عبارتی تابع از هر طرف که پیوسته نباشد، از همان طرف مشتق پذیر نخواهد بود.

مشتق توابع چندضابطه‌ای در نقاط مرزی

در توابع چندضابطه‌ای برای تعیین مشتق تابع در نقطه مرزی ابتدا پیوستگی تابع را در این نقطه بررسی می‌کنیم. تابع از هر طرف که پیوسته نباشد، مشتق پذیر هم نیست. اگر تابع در نقطه مرزی پیوسته بود، از هر یک از ضابطه‌ها به طور مستقل مشتق گرفته و مشتق چپ و راست را جداگانه محاسبه می‌کنیم. اگر مشتق چپ و راست با هم برابر باشند، تابع در نقطه مرزی مشتق پذیر خواهد بود. در تمام توابع این نقطه‌ی $x = 1$ را بررسی می‌کنیم:

$$1) f(x) = \begin{cases} x^3 + 2x & x \geq 1 \\ x^2 + 3x - 1 & x < 1 \end{cases} \Rightarrow \text{پیوستگی} \begin{cases} \text{مقدار} = 3 \\ \text{حدراست} = 3 \Rightarrow f'_+(1) = 3x^2 + 2 = 5 \\ \text{حدچپ} = 3 \Rightarrow f'_-(1) = 2x + 3 = 5 \end{cases} \Rightarrow \text{مشتق پذیر}$$

تابع هم از راست پیوسته است و هم از چپ، از ضابطه‌های راست و چپ به طور مستقیم مشتق گرفتیم و در آخر چون مشتق راست و چپ برابر شدند، پس تابع مشتق پذیر است.

$$2) f(x) = \begin{cases} x^4 + x & x \geq 1 \\ x^3 + x & x < 1 \end{cases} \Rightarrow \text{پیوستگی} \begin{cases} \text{مقدار} = 2 \\ \text{حدراست} = 2 \Rightarrow f'_+(1) = 4x^3 + 1 = 5 \\ \text{حدچپ} = 2 \Rightarrow f'_-(1) = 3x^2 + 1 = 4 \end{cases} \Rightarrow \text{مشتق ناپذیر}$$

تابع هم از راست پیوسته است و هم از چپ، از ضابطه‌های راست و چپ به طور مستقیم مشتق گرفتیم و در آخر چون مشتق راست و چپ با هم برابر نشدند پس تابع مشتق پذیر نیست ولی هم مشتق راست دارد و هم مشتق چپ.

$$3) f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & x \geq 1 \\ x^3 + x & x < 1 \end{cases} \Rightarrow \text{پیوستگی} \begin{cases} \text{مقدار} = 3 \\ \text{حدراست} = 3 \Rightarrow f'_+(1) = 2x + 2 = 4 \\ \text{حدچپ} = 2 \Rightarrow f'_-(1) = \text{وجود ندارد} \end{cases} \Rightarrow \text{مشتق ناپذیر}$$

تابع از سمت راست پیوسته است پس از ضابطه‌ی راست به طور مستقیم مشتق گرفتیم و مشتق راست را پیدا کردیم. تابع از سمت چپ پیوسته نیست پس مشتق چپ وجود ندارد. حواستان باشد که بدون توجه به پیوستگی از ضابطه‌ها مشتق نگیرید. اگر به پیوستگی توجه نکنیم و فقط از ضابطه‌ها مشتق بگیریم به اشتباه نتیجه می‌گیریم که تابع مشتق پذیر است.

$$4) f(x) = \begin{cases} x + \sqrt{x} & x > 1 \\ x^2 - 1 & x = 1 \\ x^3 - x & x < 1 \end{cases} \Rightarrow \text{پیوستگی} \begin{cases} \text{مقدار} = 0 \\ \text{وجود ندارد} \Rightarrow f'_+(1) = 2 \Rightarrow \text{حد راست} = 2 \\ \text{مشتق ناپذیر} \Rightarrow f'_-(1) = 3x^2 - 1 = 2 \Rightarrow \text{حد چپ} = 0 \end{cases}$$

تابع از سمت راست پیوسته نیست و مشتق راست ندارد. ولی از سمت چپ پیوسته است پس از ضابطه‌ی چپ مشتق گرفتیم و مقدار مشتق چپ را حساب کردیم.

$$5) f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & x > 1 \\ x + \sqrt{x} & x = 1 \\ x^4 + 2 & x < 1 \end{cases} \Rightarrow \text{پیوستگی} \begin{cases} \text{مقدار} = 2 \\ \text{وجود ندارد} \Rightarrow f'_+(1) = 3 \Rightarrow \text{حد راست} = 3 \\ \text{مشتق ناپذیر} \Rightarrow f'_-(1) = 4 \Rightarrow \text{حد چپ} = 3 \end{cases}$$

تابع نه از سمت راست پیوسته است و نه از سمت چپ، پس نه مشتق راست داریم و نه مشتق چپ، باز هم حواستان را جمع کنید که قبل از بررسی پیوستگی از ضابطه‌ها مشتق نگیرید.

$$6) f(x) = \begin{cases} x^2 + x & x > 1 \\ x^3 + 1 & x < 1 \end{cases} \Rightarrow \text{پیوستگی} \begin{cases} \text{حد راست} = 2 \\ \text{مشتق ناپذیر} \Rightarrow \text{مقدار} = \text{ندارد} \\ \text{حد چپ} = 2 \end{cases}$$

$$7) f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & x \geq 0 \\ 5x & x < 0 \end{cases} \Rightarrow \text{پیوستگی} \begin{cases} \text{مقدار} = 0 \\ \text{وجود ندارد} \Rightarrow f'_+(0) = \frac{1}{2\sqrt{x}} = +\infty \\ \text{مشتق ناپذیر} \Rightarrow f'_-(0) = 5 \end{cases}$$

تابع در $x = 0$ پیوسته است اما چون مشتق راست نامتناهی $(+\infty)$ شده است، پس تابع مشتق پذیر نیست.

تست ۶۸: تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \sqrt{5-2x} & x \leq -2 \\ -\frac{1}{2}x^2 + bx + c & x > -2 \end{cases}$ در $x = -2$ ، مشتق پذیر است. مقدار c کدام است؟ (سراسری تهرانی ۹۹)

$$\frac{2}{3} \quad (4) \qquad \frac{1}{3} \quad (3) \qquad -\frac{1}{3} \quad (2) \qquad -\frac{2}{3} \quad (1)$$

$$f_-(-2) = \sqrt{5-2(-2)} = 3 = f_+(-2) = -2 - 2b + c$$

$$\boxed{2b - c = -5}$$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{-1}{\sqrt{5-2x}} & x \leq -2 \\ -x + b & x > -2 \end{cases} \quad \begin{aligned} f'_-(-2) &= \frac{-1}{\sqrt{9}} = -\frac{1}{3} \\ f'_+(-2) &= 2 + b \end{aligned}$$

$$2 + b = -\frac{1}{3}$$

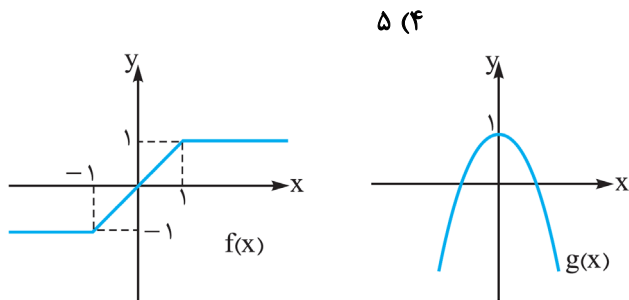
$$\boxed{c = 2b + 5 = -\frac{16}{3} + 5 = \frac{1}{3}}$$

$$b = -\frac{1}{3} - 2 = -\frac{7}{3}$$

تست ۶۹: فرض کنید $f(x) = \begin{cases} -1 & x < -1 \\ x & -1 \leq x \leq 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$ و $g(x) = 1 - x^2$. تعداد عناصر مجموعه نقاطی که $g \circ f$ یا $f \circ g$ در آن‌ها مشتق‌پذیر نیست، کدام است؟

(سراسری ریاضی ۱۴۰۰)

پاسخ: گزینه «۳» - نمودار توابع f و g را رسم می‌کنیم:



۴ (۳)

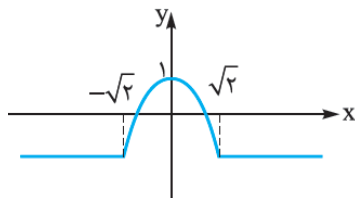
۳ (۲)

۲ (۱)

۱) $f \circ g$ را تشکیل می‌دهیم. باید در f ، جای تمام x ها، $g(x)$ بنویسیم.

$$f(g(x)) = \begin{cases} -1 & g(x) < -1 \\ g(x) & -1 \leq g(x) \leq 1 \\ 1 & g(x) > 1 \end{cases} = \begin{cases} -1 & 1 - x^2 < -1 \\ 1 - x^2 & -1 \leq 1 - x^2 \leq 1 \\ 1 & 1 - x^2 > 1 \end{cases} = \begin{cases} -1 & x^2 > 2 \rightarrow |x| > \sqrt{2} \rightarrow x < -\sqrt{2} \text{ یا } x > \sqrt{2} \\ 1 - x^2 & 0 \leq x^2 \leq 2 \rightarrow |x| < \sqrt{2} \\ 1 & x^2 < 0 \text{ همواره نادرست!} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -1 & x > \sqrt{2}, x < -\sqrt{2} \\ 1 - x^2 & -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2} \\ 1 & \text{تهی!} \end{cases}$$



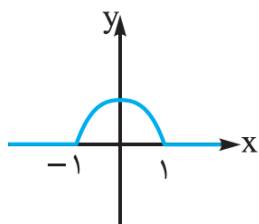
نمودار $f \circ g$ را رسم می‌کنیم:

دو نقطه به طول‌های $\pm\sqrt{2}$ ، نقطه گوشه هستند و $f \circ g$ در آن‌ها مشتق‌پذیر نیست.

۲) $g \circ f$ را تشکیل می‌دهیم:

$$g(f(x)) = 1 - f^2(x) = \begin{cases} 1 - (-1)^2 & x < -1 \\ 1 - x^2 & -1 \leq x \leq 1 \\ 1 - 1^2 & x > 1 \end{cases} = \begin{cases} 0 & x < -1 \\ 1 - x^2 & -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases}$$

نمودار $g \circ f$ را رسم می‌کنیم:



دو نقطه به طول‌های ± 1 ، نقطه گوشه هستند، پس $g \circ f$ در آن‌ها مشتق‌پذیر نیست. پس دو تابع $f \circ g$ و $g \circ f$ در کل در ۴ نقطه مشتق‌ناپذیرند.

تست ۷: فرض کنید $g(x) = ax^2 + bx + c$ ، $(a \neq 0)$ و $f(x) = \begin{cases} g(x) & x \geq k \\ g'(x) & x < k \end{cases}$ باشد. اگر f یک تابع مشتق پذیر باشد، حداکثر

(سراسری تهرانی ۱۴۰۰)

مقدار k به شرط $b + c = a$ کدام است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۱ (۲)

$\frac{3}{4}$ (۱)

پاسخ: گزینه «۳» - با توجه به تابع $g(x) = ax^2 + bx + c$ ضابطه تابع f به شکل $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + c & x \geq k \\ 2ax + b & x < k \end{cases}$ است. حالا برای

این که تابع f مشتق پذیر باشد:

راه اول: با استفاده از شرط پیوستگی و مشتق پذیری باید معادله $ak^2 + bk + c = 2ak + b$ ریشه مضاعف داشته باشد. چون $b + c = a$

است، پس $c = a - b$ و در نتیجه: $ak^2 + bk + a - b = 2ak + b \Rightarrow ak^2 + (b - 2a)k + a - 2b = 0$

$$\Delta = 0 \Rightarrow (b - 2a)^2 - 4a(a - 2b) = 0 \Rightarrow b^2 - 4ab + 4a^2 - 4a^2 + 8ab = 0$$

$$\Rightarrow b^2 + 4ab = 0 \Rightarrow b(b + 4a) = 0 \Rightarrow b = 0 \text{ یا } b = -4a$$

پس معادله به شکل زیر درمی آید:

$$b = 0 \Rightarrow ak^2 - 2ak + a = 0 \Rightarrow a(k^2 - 2k + 1) = 0 \Rightarrow \text{ریشه مضاعف } k = 1$$

$$b = -4a \Rightarrow ak^2 - 6ak + 9a = 0 \Rightarrow a(k^2 - 6k + 9) = 0 \Rightarrow \text{ریشه مضاعف } k = 3$$

بنابراین حداکثر مقدار k برابر است با $k = 3$.

راه دوم: تابع $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + c & x \geq k \\ 2ax + b & x < k \end{cases}$ باید در $x = k$ هم پیوسته باشد و هم مشتق پذیر، پس:

$$ak^2 + bk + c = 2ak + b \quad (۱) \Rightarrow \text{پیوستگی}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2ax + b & x > k \\ 2a & x < k \end{cases} \Rightarrow 2ak + b = 2a \quad (۲) \Rightarrow \text{مشتق پذیری}$$

با مقایسه (۱) و (۲) می توانیم بنویسیم:

$$ak^2 + bk + c = 2a \Rightarrow ak^2 + bk + c - 2a = 0$$

$$a + \overbrace{b+c}^a - 2a = 2a - 2a = 0$$

مجموع ضرایب این معادله برابر است با:

$$.k = \frac{c-2a}{a} \text{ و } k = 1 \text{ پس ریشه هایش برابرند}$$

از طرف دیگر این ریشه ها باید در معادله (۲) هم صدق کنند:

$$2a\left(\frac{c-2a}{a}\right) + \overbrace{b}^{a-c} = 2a \Rightarrow 2c - 4a + a - c = 2a \Rightarrow c = 5a$$

$$k = \frac{c}{a} - 2 = 5 - 2 = 3$$

پس $\frac{c}{a} = 5$ و در نتیجه مقدار ریشه $k = \frac{c-2a}{a}$ برابر است با:

پس حداکثر k برابر است با $k = 3$.

تست ۷۱: به ازای کدام مجموعه مقادیر a تابع $f(x) = \begin{cases} ax+5 & x \geq 1 \\ x^2 - a & x < 1 \end{cases}$ در \mathbb{R} مشتق پذیر است؟

- (۱) $\{2, -2\}$ (۲) $\{-2\}$ (۳) $\{2\}$ (۴) \emptyset

پاسخ: گزینه‌ی «۴» - اول پیوستگی و سپس مشتق پذیری در نقاط مرزی را بررسی می‌کنیم:

$$f(x) = \begin{cases} ax+5 & x \geq 1 \\ x^2 - a & x < 1 \end{cases} \Rightarrow \text{پیوستگی} \begin{cases} \text{مقدار} = a+5 \\ \text{حد راست} = a+5 \Rightarrow a+5 = 1-a \Rightarrow a = -2 \\ \text{حد چپ} = 1-a \end{cases}$$

$$\text{مشتق پذیری} \begin{cases} f'_+(1) = a \\ f'_-(1) = 2x = 2 \end{cases} \Rightarrow a = 2$$

چون جواب‌های a برای پیوستگی و مشتق پذیری تابع با هم متفاوت است پس مقداری برای a یافت نمی‌شود یعنی $a \in \emptyset$ ؛ نکند به اشتباه فقط پیوستگی یا فقط مشتق پذیری را بررسی کنید و جواب غلط بدهید. باید هم مشتق پذیری را بررسی کنیم و هم پیوستگی را، مخصوصاً

وقتی در گزینه‌ها «جواب ندارد» یا «تهی»، داشته باشیم.

$$y = f(u) \rightarrow y' = u' f'(u)$$

(آزمون گزینه دو جامع)

تست ۷۲: اگر $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & x \geq 1 \\ \frac{2}{x} & x < 1 \end{cases}$ حاصل $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+3h^2) - f(1-h^2)}{h^2}$ کدام است؟

$$\begin{matrix} h \rightarrow 0 \\ h^2 \rightarrow 0^+ \end{matrix}$$

۱۵ (۴)

۹ (۳)

-۱۲ (۲)

۱۶ (۱)

$$\frac{f(1^+) - f(1^-)}{0^+} = \frac{3 - 3}{0^+} = \text{صفری}$$

Hop
h ص.ر.

$$\frac{3h f'(1+3h^2) - (-1) f'(1-h^2)}{2h}$$

$$3 \underbrace{f'(1^+)}_3 + \underbrace{f'(1^-)}_{-2} = 9$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x+2 & x > 1 \\ -\frac{2}{x^2} & x < 1 \end{cases}$$

$$f'_+(1) = 4 \neq f'_-(1) = -2$$

مشتق توابع قدرمطلقى به ازای نقطه‌ی x_0 ، وقتی که x_0 داخل قدرمطلق را صفر می‌کند

چنانچه تابع قدرمطلقى در نقطه‌ی x_0 پیوسته باشد:

اگر عبارت داخل قدرمطلق به ازای این نقطه صفر شود، یعنی نقطه‌ی x_0 ریشه عبارت داخل قدرمطلق باشد، باید عبارت داخل قدرمطلق را تعیین علامت کرده و در سمت چپ و راست نقطه موردنظر عبارت را از قدرمطلق خارج کنیم سپس مشتق‌های راست و چپ را جداگانه بررسی می‌کنیم.

تذکره: گفتیم که $f'(x_0)$ همان شیب خط مماس بر منحنی $y = f(x)$ در نقطه‌ی x_0 است. اگر در تابعی مشتق‌های راست و چپ در نقطه‌ی x_0 جداگانه محاسبه شوند، مشتق راست $(f'_+(x_0))$ نشان‌دهنده شیب خط مماس بر منحنی در طرف راست نقطه و مشتق چپ $(f'_-(x_0))$ نشان‌دهنده شیب خط مماس بر منحنی در طرف چپ نقطه x_0 است. واضح است که اگر $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$ تابع در نقطه‌ی x_0 مشتق‌پذیر خواهد بود.

مثال ۷۳: مشتق‌پذیری تابع $f(x) = |x^2 - 1|$ را در نقطه‌ی $x = -1$ بررسی کنید.

$D_f = \mathbb{R}$

$$y = \begin{cases} x^2 - 1 & x^2 - 1 \geq 0 \quad x^2 \geq 1 \quad |x| \geq 1 \quad x \geq 1 \text{ یا } x \leq -1 \\ -x^2 + 1 & x^2 - 1 < 0 \quad x^2 < 1 \quad |x| < 1 \quad -1 < x < 1 \end{cases}$$

$$y' = \begin{cases} 2x & x > 1 \text{ یا } x < -1 \\ -2x & -1 < x < 1 \end{cases}$$

$D = \mathbb{R} - \{ \pm 1 \}$ (سر اسری ۹۰)

تست ۷۴: در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = x\sqrt{x} + |x-1|$ مقدار $f'_+(1) + 3f'_-(1)$ کدام است؟

۱+ : $f(x) = x\sqrt{x} + x - 1$ $f'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} + 1$ $\frac{x=1}{\frac{5}{2}}$

۱- : $f(x) = x\sqrt{x} - x + 1$ $f'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} - 1$ $\frac{x=1}{\frac{1}{2}}$

تست ۷۵: مشتق چپ تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{1 - x^2}}$ در نقطه‌ی $x = 0$ کدام است؟

مشتق در نقطه را با نوشتن بر او:

$\sqrt{2}$ (۴) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۳) $-\sqrt{2}$ (۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۱)

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{1 - \sqrt{1 - x^2}} - f(0)}{x - 0} = \frac{\sqrt{1 - \sqrt{1 - x^2}}}{x} \cdot \frac{\sqrt{1 + \sqrt{1 - x^2}}}{\sqrt{1 + \sqrt{1 - x^2}}}$$

$$\frac{\sqrt{1 - (1 - x^2)}}{x(\sqrt{1 + \sqrt{1 - x^2}})} = \frac{|x|}{x(\sqrt{1 + \sqrt{1 - x^2}})} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

تست ۷۶: اگر $f(x) = \sqrt{x^3 - 3x + 2}$ باشد، $f'_-(1)$ برابر کدام است؟

$\sqrt{3}$ (۴)

$\sqrt{2}$ (۳)

$-\sqrt{2}$ (۲)

$-\sqrt{3}$ (۱) ✓

$$f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{x^3 - 3x + 2} - \sqrt{1 - 3 + 2}}{x - 1}$$

$$\begin{array}{r} x^3 - 3x + 2 \quad | \quad x - 1 \\ \underline{-x^3 + x^2} \quad \quad \quad x - 1 \\ x^2 - 3x + 2 \quad \quad \quad \underline{-x^2 + x} \\ -2x + 2 \quad \quad \quad \underline{-2x + 2} \\ 0 \end{array}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{(x-1)(x+2)}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-1}}$$

مشتق توابع شامل جزء صحیح

برای تعیین مشتق توابع شامل براکت در یک نقطه باز هم باید به پیوستگی تابع در آن نقطه دقت کنیم. اگر تابع پیوسته باشد، برای محاسبه مشتق ابتدا حاصل براکت را به ازای آن نقطه تعیین کرده سپس مشتق گیری می‌کنیم.

نکته: توابع شامل براکت در نقاطی که داخل براکت عدد صحیح نشود، پیوسته خواهند بود.

(سراسری تهرمی ۸۷)

تست ۷۷: در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = |x| \cdot [x]$ ، مقدار $f'_+(0) - f'_-(0)$ کدام است؟

۲ (۴)

۱ (۳)

صفر (۲)

-۱ (۱)

تست ۷۸: تابع $f(x) = x^2[x]$ در نقطه‌ی $x = 1$:

(۱) مشتق دارد.

(۲) فقط مشتق چپ دارد.

(۳) فقط مشتق راست دارد.

(۴) نه مشتق راست دارد نه مشتق چپ.

تست ۷۹: فرض کنید $f(x) = (x[x^2 + \frac{1}{4}])^2 + 1$ و $g(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2 - 1}}$. مقدار مشتق تابع $f \circ g$ در $x = \frac{3}{\sqrt{8}}$ ، چند برابر $(-128\sqrt{2})$

(سراسری تهرانی ۱۴۰۰)

است؟

۴ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

-۴ (۱)

پاسخ: گزینه «۴» - می‌دانیم $(f \circ g)'(x) = g'(x)f'(g(x))$ پس باید $g'(\frac{3}{\sqrt{8}})$ و $f'(g(\frac{3}{\sqrt{8}}))$ را پیدا کنیم:

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2 - 1}} = (x^2 - 1)^{-\frac{1}{3}} \Rightarrow g'(x) = -\frac{1}{3}(x^2 - 1)^{-\frac{4}{3}}(2x) = -\frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2 - 1)^4}}$$

$$\Rightarrow g'(\frac{3}{\sqrt{8}}) = -\frac{2 \cdot \frac{3}{\sqrt{8}}}{3\sqrt[3]{(\frac{9}{8} - 1)^4}} = -\frac{\frac{2 \times 3}{\sqrt{8}}}{3(\frac{1}{2})^4} = -\frac{32}{\sqrt{8}} = \frac{-32}{2\sqrt{2}} = -\frac{16}{\sqrt{2}}$$

و چون:

$$g(\frac{3}{\sqrt{8}}) = \frac{1}{\sqrt[3]{(\frac{9}{8} - 1)}} = \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{1}{8}}} = 2$$

پس باید $f'(2)$ را پیدا کنیم:

$$\underbrace{[4 + \frac{1}{4}] = 4}_{f(x) = (x[x^2 + \frac{1}{4}])^2 + 1} \Rightarrow f(x) = (4x)^2 + 1 \Rightarrow f'(x) = 32x \Rightarrow f'(2) = 32 \times 2 = 64$$

$$(f \circ g)'(\frac{3}{\sqrt{8}}) = g'(\frac{3}{\sqrt{8}})f'(2) = -\frac{16}{\sqrt{2}} \times 64 = -8\sqrt{2} \times 64 = (-128\sqrt{2}) \times 4$$

بنابراین $(f \circ g)'(\frac{3}{\sqrt{8}})$ برابر است با:

پس حاصل مشتق، ۴ برابر $(-128\sqrt{2})$ است.

تست ۸۰: اگر $f(x) = \frac{(x-1)^2}{x[2x] + [-x]}$ باشد، $f'_+(1) + f'_-(1)$ برابر کدام است؟

$\frac{3}{2}$ (۴)

$\frac{1}{2}$ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

تست ۸۱: اگر $f(x) = \sqrt{x^2 - [x]} + |x|$ باشد، $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$ کدام است؟

$\frac{5}{2}$ (۴)

$\frac{3}{2}$ (۳)

$\frac{5}{4}$ (۲)

$\frac{1}{2}$ (۱)

مشتق پذیری توابع شامل قدرمطلق

(۱) در تابع $y = |f(x)|$ (که $f(x)$ تابعی پیوسته باشد)، در ریشه‌های ساده مرتبه اول داخل قدرمطلق، تابع مشتق ناپذیر است. به این نقاط، گوشه‌ای می‌گویند.

مثال ۸۲: مشتق پذیری $f(x) = |x-1|$ را در $x=1$ بررسی کنید.

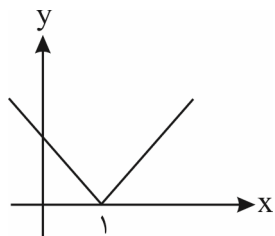
پاسخ: چون به ازای $x=1$ تابع صفر می‌شود بهتر است از تعریف مشتق استفاده کنیم:

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x-1| - 0}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x-1|}{x-1} \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{x-1} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(x-1)}{x-1} = -1 \end{cases}$$

قدرمطلق دار
حد چپ و راست را جداکن

$$\Rightarrow \begin{cases} f'_+(1) = 1 \\ f'_-(1) = -1 \end{cases} \Rightarrow f'_+(1) \neq f'_-(1)$$

مشتق چپ و راست f را در $x=1$ نابرابرند پس تابع در این نقطه مشتق پذیر نیست. به این نقطه گوشه می‌گویند.



(۲) مشتق $y = |f(x)|$ (که در آن $f(x)$ پیوسته است) در نقاطی که $f(x)$ دارای مرتبه بزرگ‌تر از ۱ باشد مشتق پذیر است و مشتق تابع در این نقاط برابر صفر است. یعنی منحنی تابع در این نقاط بر محور x مماس است.

مثال ۸۳: مشتق پذیری تابع $y = |(x-1)^3|$ را در $x=1$ بررسی کنید.

پاسخ: اولاً این تابع در $x=1$ پیوسته است. ثانیاً برای پیدا کردن مشتق، بهتر است از تعریف مشتق استفاده کنیم:

$$y'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|(x-1)^3| - 0}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|(x-1)^3|}{x-1}$$

حد چپ و راست را جداگانه پیدا می‌کنیم:

$$y'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\overset{+}{|(x-1)^3|}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)^3}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1)^2 = 0$$

$$y'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\overset{-}{|(x-1)^3|}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(x-1)^3}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} -(x-1)^2 = 0$$

تابع $|x-1|^3$ در $x=1$ مشتق پذیر است: $y'_+(1) = y'_-(1)$

۳) تابع $y = |h(x)|f(x)$ (که f و h پیوسته هستند) در ریشه‌های مشترک f و h مشتق پذیر هستند. مثلاً $y = (x-1)|x-1|$ در $x=1$ مشتق پذیر است چون:

$$y'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)|x-1| - 0}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} |x-1| = 0 \Rightarrow y'(1) = 0$$

نکته: تابع $|x-a|^n$ در $x=a$ مشتق پذیر است هرگاه $n \geq 1$ ($n \in \mathbb{N}$) باشد.

تست ۸۴: اگر $f(x) = 1 - |x|$ باشد، تعداد نقاط مشتق ناپذیر تابع با ضابطه‌ی $y = f(f(x))$ کدام است؟

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) صفر

تست ۸۵: در نقطه گوشه تابع $f(x) = \sqrt{x+m}|x-1| + x^2$ ، نیم‌مماس‌های راست و چپ بر هم عمودند. مقدار m کدام است؟

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

تست ۸۶: به ازای کدام مقدار a ، تابع $f(x) = x|x-2| - a|x-2|$ در $x=2$ مشتق پذیر است؟
 $a=0$ (۴) $a=-2$ (۳) $a \in \emptyset$ (۲) $a=2$ (۱)

تست ۸۷: اگر تابع $f(x) = (2x^2 + ax + b)|(x-1)(x-2)|$ در \mathbb{R} مشتق پذیر باشد، b کدام است؟
 -6 (۴) 6 (۳) 4 (۲) 2 (۱)

تست ۸۸: تابع $y = x|x^2 - x|$ ، در چند نقطه مشتق پذیر نیست؟
 3 (۴) 1 (۳) صفر (۲) 2 (۱)

پاسخ: گزینه‌ی «۳» - در تابع $f(x) = x|x^2 - x|$ ریشه‌های عبارت داخل قدرمطلق $x=0$ و $x=1$ هستند و با توجه به این که ریشه‌ی $x=0$ همان ریشه‌ی x خارج قدرمطلق است، پس تابع در $x=0$ مشتق پذیر و در $x=1$ مشتق ناپذیر است.

تست ۸۹: تابع $f(x) = \begin{cases} |x^2 - 1| & |x| \leq 2 \\ 4x - 1 & |x| > 2 \end{cases}$ در چند نقطه مشتق پذیر نیست؟
 3 (۴) 2 (۳) 4 (۲) 1 (۱)

پاسخ: گزینه‌ی «۲» - برای بررسی مشتق پذیری تابع $f(x) = \begin{cases} |x^2 - 1| & |x| \leq 2 \\ 4x - 1 & |x| > 2 \end{cases}$ اول هر کدام از ضابطه‌ها و بعد نقاطی را که ضابطه‌ی

تابع در آن عوض می‌شود، بررسی می‌کنیم. ضابطه‌ی $|x^2 - 1|$ در نقاط $x=1$ و $x=-1$ مشتق پذیر نیست (که در محدوده‌ی تعریف ضابطه هستند و ریشه‌های ساده داخل قدرمطلق اند) ضابطه‌ی $4x - 1$ همواره مشتق پذیر است. ضابطه‌ی تابع در نقاط $x=2$ و $x=-2$ عوض می‌شود، پس:

$$f(x) = \begin{cases} |x^2 - 1| & |x| \leq 2 \\ 4x - 1 & |x| > 2 \end{cases}$$

$$x = 2 \text{ پیوستگی} \left\{ \begin{array}{l} \text{مقدار} = 3 \\ \text{حدراست} = \lim_{x \rightarrow 2^+} 4x - 1 = 7 \\ \text{حدچپ} = \lim_{x \rightarrow 2^-} |x^2 - 1| = 3 \end{array} \right. \Rightarrow \text{مشتق ناپذیر} \Rightarrow \text{ناپیوسته}$$

$$x = -2 \text{ پیوستگی} \left\{ \begin{array}{l} \text{مقدار} = 3 \\ \text{حدراست} = \lim_{x \rightarrow (-2)^+} |x^2 - 1| = 3 \\ \text{حدچپ} = \lim_{x \rightarrow (-2)^-} 4x - 1 = -9 \end{array} \right. \Rightarrow \text{مشتق ناپذیر} \Rightarrow \text{ناپیوسته}$$

پس تابع در چهار نقطه مشتق پذیر نیست.

مثال (مهم) ۹۰: حدود m را برای آن که تابع $f(x) = |x^2 + mx + 1|$ مشتق ناپذیر باشد، بیابید.

(ب) در \mathbb{R} مشتق پذیر باشد، بیابید.

بررسی مشتق پذیری تابع شامل جزء صحیح

الف) تابع $[f(x)]$ در نقاطی که پیوسته است، مشتق پذیر بوده و مشتق آن همواره صفر است. در نقاط ناپیوسته نیز مشتق ناپذیر است. (در نقاط ناپیوسته تابع از هر طرف که پیوسته باشد از همان طرف مشتق پذیر است و مشتق آن صفر است.)

مثال ۹۱: اگر $f(x) = [x^2]$ ، مشتق پذیری آن را در نقاط $x = \frac{3}{4}$ و $x = 2$ بررسی کنید.

$$۱) f(x) = [x^2], \quad x = \frac{3}{4}$$

$$f\left(\frac{3}{4}\right) = \left[\frac{9}{16}\right] \notin \mathbb{Z} \Rightarrow f'\left(\frac{3}{4}\right) = 0$$

۲) $f(x) = [x^2]$, $x = 2$

$f(2) = [4 \in \mathbb{Z}]$

$$\begin{cases} f(2) = 4 \\ f(2^+) = [4^+] = 4 \xrightarrow{\text{از راست پیوسته است.}} f'_+(2) = 0 \\ f(2^-) = [4^-] = 3 \Rightarrow f'_-(2): \text{وجود ندارد} \end{cases}$$

ب) تابع $f(x) = (x-a)^n [x]$ در نقطه $a \in \mathbb{Z}$ باشد با شرط $n \geq 2$ مشتق پذیر است. اگر $n = 1$ پیوسته ولی مشتق ناپذیر است. به مثال‌های زیر توجه کنید:

می‌خواهیم توابع $[x]$ ، $x[x]$ و $x^2[x]$ را در $x = 0$ از لحاظ پیوستگی و مشتق‌پذیری مقایسه کنیم:

۱) $f(x) = [x] \Rightarrow \begin{cases} f(0) = 0 \\ f(0^+) = 0 \xrightarrow{\text{از راست پیوسته}} f'_+(0) = 0 \\ f(0^-) = -1 \Rightarrow f'(0): \text{وجود ندارد} \end{cases}$

این تابع در $x = 0$ ناپیوسته، مشتق ناپذیر است.

۲) $f(x) = x[x] \Rightarrow \begin{cases} f(0) = 0 \\ f(0^+) = 0 \Rightarrow f'_+(0) = 0 \\ f(0^-) = x[0^-] = x(-1) = -x \Rightarrow f'_-(0) = -1 \end{cases}$

تابع در $x = 0$ پیوسته است. مشتق راست و چپ هم دارد ولی چون $f'_+(0) = f'_-(0)$ شد پس مشتق ناپذیر است. به این نقطه گوشه می‌گویند.

۳) $f(x) = x^2[x] \Rightarrow \begin{cases} f(0) = 0 \\ f(0^+) = 0 \Rightarrow f'_+(0) = 0 \\ f(0^-) = x^2[0^-] = x^2(-1) = -x^2 \Rightarrow f'_-(0) = -2x = 0 \end{cases}$

تابع در $x = 0$ پیوسته است و مشتق چپ و راست هم دارد و چون $f'_+(0) = f'_-(0)$ شد پس در $x = 0$ مشتق پذیر است.

جمع بندی:

یک بار به مقایسه‌ها توجه کنید: (در $x = 0$)

$$\begin{cases} y = [x] \text{ ناپیوسته} \\ y = x[x] \text{ مشتق ناپذیر} \\ y = x^2[x] \text{ مشتق پذیر} \end{cases} \quad \begin{cases} y = |x| \text{ پیوسته مشتق ناپذیر} \\ y = x|x| \text{ پیوسته مشتق پذیر} \end{cases}$$

نقطه $x = 0$ در $|x|$ و $x[x]$ نقطه گوشه‌ای محسوب می‌شود.

تست ۹۲: تابع $f(x) = (x-1)[x]$ و $f(x) = (x-1)^2[x]$ به ترتیب در $x = 1$ ، و هستند.

- (۱) فقط پیوسته، فقط پیوسته
(۲) مشتق پذیر، مشتق پذیر
(۳) فقط پیوسته، مشتق پذیر
(۴) مشتق پذیر، فقط پیوسته

تست ۹۳: اگر تابع $f(x) = (x^2 + ax + b)[x]$ در $x = 3$ مشتق پذیر باشد، $a + b$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۳ (۳) -۳ (۴) مقداری برای a و b وجود ندارد.

مشتق پذیری روی یک بازه

تابع f روی بازه (a, b) مشتق پذیر است، هرگاه f در هر نقطه در این بازه مشتق پذیر باشد، تابع f روی بازه $[a, b)$ مشتق پذیر است، هرگاه f در بازه (a, b) مشتق پذیر باشد و در نقطه a مشتق راست داشته باشد. تابع f روی بازه $(a, b]$ مشتق پذیر است، هرگاه f در بازه (a, b) مشتق پذیر باشد و در نقطه b مشتق چپ داشته باشد.

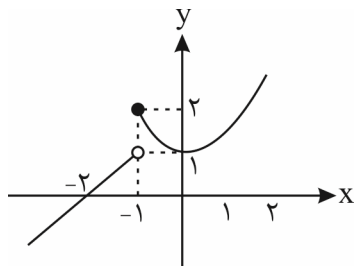
تابع f روی بازه $[a, b]$ مشتق پذیر است، هرگاه f در بازه (a, b) مشتق پذیر باشد و در نقطه a مشتق راست و در b مشتق چپ داشته باشد.

تست ۹۴: نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} x+2 & x < -1 \\ x^2+1 & x \geq -1 \end{cases}$ روی چند تا از بازه‌های $[-3, -2]$ ، $[-2, -1]$ ، $[-3, -1]$ ، $[-2, 0]$ ، $[-1, 0]$ و

$[0, 2]$ مشتق پذیر است؟

- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) صفر

پاسخ: بررسی تک تک بازه‌ها سخت و زمان بر است، پس تابع را رسم می‌کنیم:



تابع در نقطه $x = -1$ ناپیوسته است و در این نقطه پیوستگی راست دارد و در $x = -1$ مشتق راست هم داریم (نیم مماس راست داریم) ولی مشتق چپ نداریم.

$[-2, 0]$ مشتق ناپذیر است چون در $x = -1$ مشتق ندارد.

$[0, 2]$: مشتق پذیر

$[-3, -1]$: مشتق پذیر

$[-1, 0]$: مشتق پذیر

$[-2, -1]$: مشتق ناپذیر، چون در $x = -1$ مشتق چپ ندارد.

$[-3, -2]$: مشتق پذیر

تست ۹۵: نمودار تابع با ضابطه $f(x) = [x + \frac{1}{3}] + [x]$ روی بازه $(0, 3)$ در چند نقطه مشتق ناپذیر است؟ (ریاضی فارج)

۵ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

پاسخ: تابع $y = [x]$ در بازه $(0, 3)$ در نقاط $x = 1$ و $x = 2$ ناپیوسته و مشتق ناپذیر است. تابع $y = [x + \frac{1}{3}]$ هم در بازه $(0, 3)$ در نقاط

$x = \frac{2}{3}, x = \frac{5}{3}, x = \frac{8}{3}$ ناپیوسته و مشتق ناپذیر است. پس این تابع جمعاً در ۵ نقطه ناپیوسته و در نتیجه مشتق ناپذیر است.

نکته: اگر دو تابع در $x = a$ یکی پیوسته و دیگری ناپیوسته باشد، آن وقت مجموعشان در آن نقطه ناپیوسته است. در این سؤال $x = 1$ و

$x = 2$ که باعث ناپیوستگی $[x]$ شدند، تابع $[x + \frac{1}{3}]$ را پیوسته می کنند و همچنین نقاط $\frac{2}{3}, \frac{5}{3}, \frac{8}{3}$ که باعث ناپیوستگی $[x + \frac{1}{3}]$

شدند تابع $[x]$ را پیوسته می کنند پس هر ۵ نقطه یکی را پیوسته و دیگری را ناپیوسته می کنند پس جمعشان نیز حتماً به ازای هر ۵ نقطه ناپیوسته می شود.

مشتق پذیری رادیکالها

قبلاً در خصوص مماس قائمها صحبت کرده ایم ولی در خصوص مشتق پذیری یک بار به نکات زیر توجه کنید.

(۱) تابع در ریشه های زیر رادیکال وقتی عبارت زیر رادیکال از فرجه کم تر است، مشتق پذیر نیست، مثل $y = \sqrt[3]{x}$ و $y = \sqrt[3]{x-1}$

$y = \sqrt[3]{(x-2)^2}$ به ترتیب در نقاط $x = 0, x = 1$ و $x = 2$ مشتق ناپذیرند.

(۲) اگر توان و فرجه مساوی باشند، چنانچه هر دو فرد باشند تابع در آنجا مشتق پذیر است. مثلاً $y = \sqrt[3]{(x-1)^3}$ چون می شود

$y = \sqrt[3]{(x-1)^3} = x-1$ پس در $x = 1$ مشتق پذیر است.

(۳) اگر توان و فرجه مساوی باشند، چنانچه هر دو زوج باشند تابع در آن نقطه مشتق ناپذیر است (نقطه گوشه ای). مثلاً:

در $x = 1$ گوشه می شود و مشتق ناپذیر است. $y = \sqrt{(x-1)^2} = |x-1| \Rightarrow$

تیپ های متداول

تست ۹۶: تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{(x-1)(x-2)^3} & x \geq 0 \\ |(x+1)(x+2)^2| & x < 0 \end{cases}$ در چند نقطه مشتق پذیر نیست؟

۵ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

پاسخ: تابع را ساده تر می نویسیم:

$$f(x) = \begin{cases} (x-2)\sqrt{x-1} & x \geq 0 \\ |(x+1)(x+2)^2| & x < 0 \end{cases}$$

$$\left. \begin{cases} f(0) = (-2)\sqrt{-1} = 2 \\ f(0^+) = 2 \\ f(0^-) = (1)(2)^2 = 4 \end{cases} \right\} \text{ناپیوسته و مشتق ناپذیر } f(0^+) \neq f(0^-)$$

تابع در $x=0$ ناپیوسته و مشتق ناپذیر است. در $x=1$ که ریشه زیر رادیکال است خط مماس عمودی می‌باشد و مشتق پذیر نیست البته در $x=1$ در محدوده ضابطه بالایی ($x \geq 0$) قرار دارد و می‌توانیم به آن گیر بدهیم.

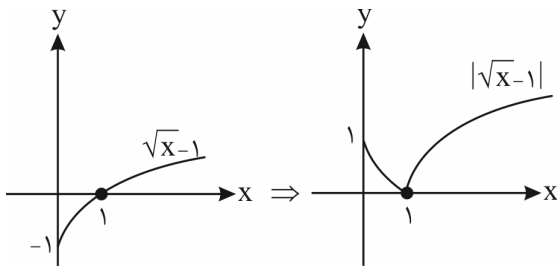
در $x=-1$ از ضابطه پایینی نقطه گوشه (مشتق ناپذیر) داریم و در $x=-2$ چون ریشه مرتبه دوم است، مشکلی نداریم: مشتق ناپذیرها $\{1, -1, 0\}$

تست ۹۷: تابع $f(x) = |\sqrt{x}-1|$ در دامنه تعریف خود در چند نقطه مشتق پذیر نیست؟

هیچ (۱) یک (۲) دو (۳) بی‌شمار (۴)

پاسخ: دامنه $f(x)$ را پیدا می‌کنیم: $x \geq 0 \Rightarrow D_f = [0, +\infty)$

عامل \sqrt{x} در $x=0$ مشتق پذیر نیست و عامل $\sqrt{x}-1$ در $x=1$ (ریشه مرتبه اول در داخل قدرمطلق) نقطه گوشه می‌دهد و مشتق ناپذیر است. پس تابع در دو نقطه از دامنه تعریفش مشتق پذیر نیست. به شکل توجه کنید:



همان‌طور که می‌بینید در $x=0$ (روی محور y) نیم‌مماس عمودی داریم و $f'_+(0) = -\infty$ است پس مشتق ندارد و در $x=1$ هم نقطه گوشه‌ای ایجاد شده است.

تست ۹۸: خطوط $x=2$ و $x=a$ بر تابع $f(x) = \sqrt[3]{x^2-6x+b}$ مماس‌اند. مقدار $a+b$ کدام است؟

۱۲ (۴) ۹ (۳) ۸ (۲) ۷ (۱)

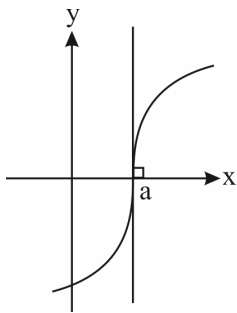
پاسخ: چون خطوط $x=2$ و $x=a$ هر دو موازی محور y ها هستند پس مماس عمودی‌اند بنابراین هر دو، ریشه زیر رادیکال هستند:

$$x=2 \Rightarrow \sqrt[3]{4-12+b} = 0 \Rightarrow -8+b=0 \Rightarrow b=8$$

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2-6x+8} \quad \text{حالا } b=8 \text{ را جاگذاری می‌کنیم:}$$

$$x^2-6x+8=0 \Rightarrow (x-2)(x-4)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=4 \end{cases} \quad \text{اکنون ریشه‌های زیر رادیکال را پیدا می‌کنیم:}$$

$$a+b=4+8=12 \quad \text{پس حتماً } x=4 \text{ همان } x=a \text{ است پس } a=4 \text{ بنابراین:}$$



تست ۹۹: اگر نمودار f به صورت مقابل باشد، کدام گزینه صحیح است؟

$$\begin{cases} f'_-(a) = +\infty \\ f'_+(a) = -\infty \end{cases} \quad (۲)$$

$$\begin{cases} f'_-(a) = -\infty \\ f'_+(a) = +\infty \end{cases} \quad (۱)$$

$$\begin{cases} f'_-(a) = -\infty \\ f'_+(a) = -\infty \end{cases} \quad (۴)$$

$$\begin{cases} f'_-(a) = +\infty \\ f'_+(a) = +\infty \end{cases} \quad (۳)$$

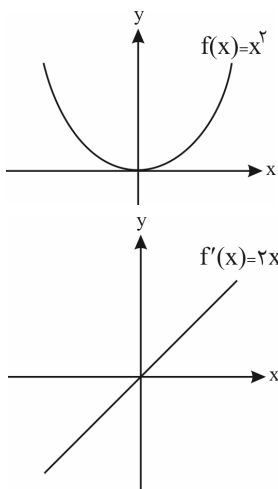
بررسی نمودار مشتق

برای آن که از نمودار تابع، پی به وضعیت نمودار مشتق ببریم کافی است به موارد زیر توجه داشته باشیم:

- (۱) اگر تابع $f(x)$ در یک بازه اکیداً صعودی باشد تابع مشتق آن در ناحیه اول یا دوم قرار می‌گیرد. این جمله به این معنی است که مشتق تابع یعنی $f'(x)$ در این بازه مثبت است پس بالای محور x ها قرار می‌گیرد. به جمله زیر نیز توجه داشته باشید: اگر در نقطه $x = a$ شیب خط مماس بر منحنی تابع مثبت باشد، نمودار تابع $f'(x)$ در این نقطه بالای محور x ها قرار می‌گیرد.
- (۲) اگر تابع $f(x)$ در یک بازه اکیداً نزولی باشد، تابع مشتق آن در ناحیه سوم یا چهارم قرار می‌گیرد. این جمله به این معنی است که مشتق تابع یعنی $f'(x)$ در این بازه منفی است پس پایین محور x ها قرار می‌گیرد. به جمله زیر نیز توجه داشته باشید: اگر در نقطه $x = a$ شیب خط مماس بر منحنی تابع منفی باشد، نمودار تابع $f'(x)$ در این نقطه پایین محور x ها قرار می‌گیرد.
- (۳) اگر تابع $f(x)$ در نقطه $x = a$ خط مماس افقی داشته باشد، تابع مشتق یعنی $f'(x)$ در این نقطه صفر است و برعکس.
- (۴) اگر تابع $f(x)$ در نقطه $x = a$ خط مماس قائم داشته باشد (و یا نیم‌مماس قائم)، تابع مشتق یعنی $f'(x)$ در این نقطه حد بی‌نهایت دارد.

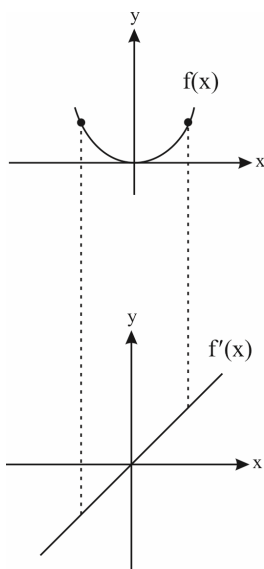
- (۵) اگر در تابع $f(x)$ نقطه $x = a$ یک نقطه گوشه‌ای باشد تابع مشتق یعنی $f'(x)$ در این نقطه تعریف نمی‌شود و حد راست و چپ $f'(x)$ در این نقطه نابرابر (و حداقل یکی از این حدها متناهی یعنی عدد مشخص) می‌شود.

مثال ۱۰۰: به نمودار تابع $f(x) = x^2$ توجه کنید:



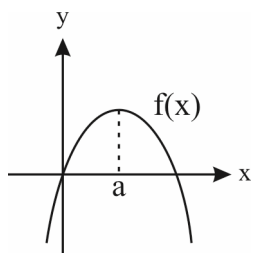
مشتق این تابع برابر $f'(x) = 2x$ است که شکل آن به صورت مقابل است:

طبق شکل، در $x > 0$ تابع $f(x)$ اکیداً صعودی است پس نمودار $f'(x)$ در $x > 0$ بالای محور x ها قرار می‌گیرد. هم‌چنین در $x < 0$ تابع $f(x)$ اکیداً نزولی است پس نمودار $f'(x)$ در $x < 0$ پایین محور x ها قرار می‌گیرد و در $x = 0$ چون به نمودار $f(x)$ خط مماس افقی رسم می‌شود پس شیب خط مماس برابر صفر است پس $f'(x)$ در این نقطه صفر می‌شود و به محور x ها برخورد می‌کند. حالا یک بار با دقت به شکل‌های زیر توجه کنید:



می‌بینید که در یک نقطه دلخواه سمت راست مبدأ مختصات، شیب خط مماس بر $f(x)$ مثبت شده است پس در همین نقطه، نمودار $f'(x)$ بالای محور x ها قرار گرفته و در یک نقطه دلخواه سمت چپ مبدأ مختصات، شیب خط مماس بر $f(x)$ منفی شده است پس در همین نقطه نمودار $f'(x)$ پایین محور x ها قرار گرفته است و در $x = 0$ که خط مماس افقی شده، نمودار $f'(x)$ به محور x ها برخورد کرده و صفر شده است.

مثال ۱۰۱: اگر نمودار $f(x)$ به شکل زیر باشد، نمودار $f'(x)$ را رسم کنید.

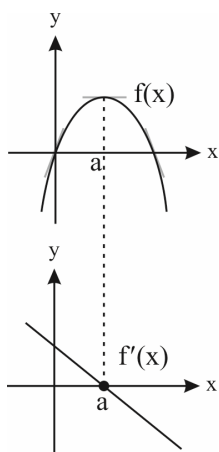


پاسخ: یک بار دیگر $f(x)$ را رسم می‌کنیم و زیر آن نمودار $f'(x)$ با این اطلاعات رسم می‌شود:
الف) در نقطه $x = a$ خط مماس بر $f(x)$ افقی است پس $f'(x)$ در این نقطه صفر است.

ب) در فاصله $(a, +\infty)$ یعنی $x > a$ ، نمودار $f(x)$ اکیداً نزولی است (یا به عبارتی شیب خط‌های مماس منفی است) بنابراین $f'(x)$ منفی است و زیر محور x ها قرار می‌گیرد.

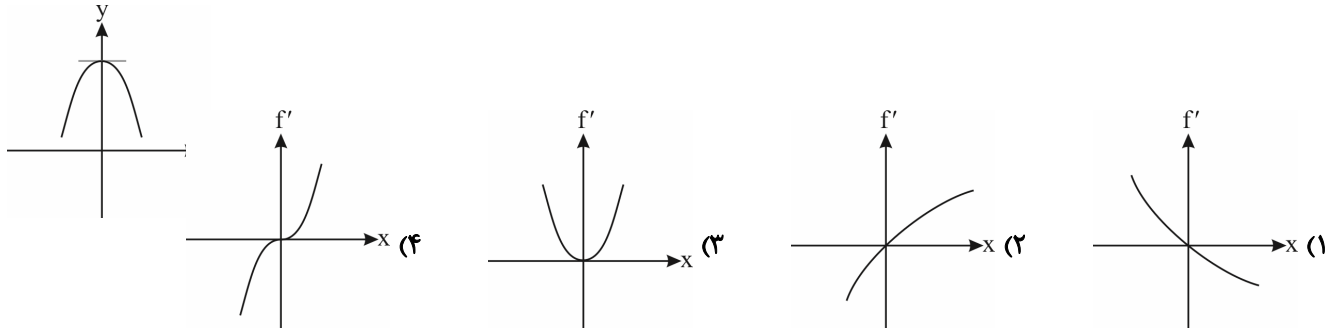
پ) در فاصله $(-\infty, a)$ یعنی $x < a$ ، نمودار $f(x)$ اکیداً صعودی است (یا به عبارتی شیب خط‌های مماس مثبت است) بنابراین $f'(x)$ مثبت است و بالای محور x ها قرار می‌گیرد.

حالا به شکل‌ها توجه کنید:

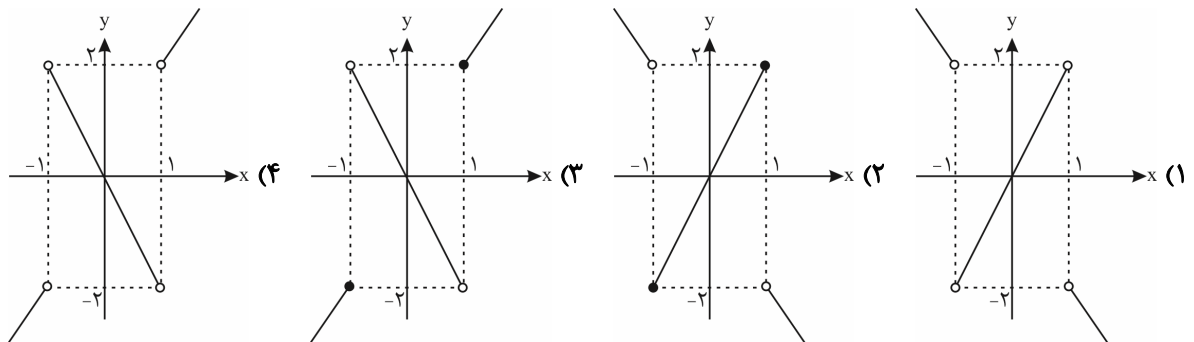


حالا برویم سراغ تست‌ها که نکات دیگر هم ببینیم؛ (البته در اندازه‌ای که مورد نیاز کنکور است).

تست ۱۰۲: اگر نمودار $y = f(x)$ در همسایگی $x = 0$ به صورت روبه‌رو باشد، نمودار f' در همسایگی $x = 0$ به کدام صورت است؟



تست ۱۰۳: نمودار مشتق تابع $f(x) = |x^2 - 1|$ کدام است؟



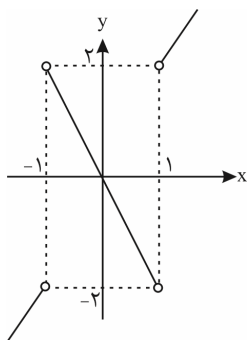
پاسخ: با ضابطه‌بندی تابع خواهیم داشت:

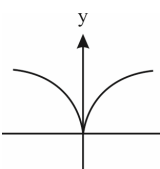
$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & x \geq 1 \text{ یا } x \leq -1 \\ 1 - x^2 & -1 < x < 1 \end{cases}$$

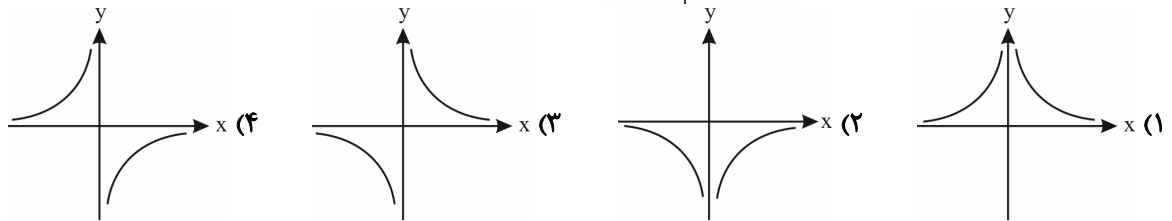
$x = \pm 1$ ریشه‌های ساده داخل قدرمطلق هستند (گوشه) و مشتق ناپذیرند.

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & x > 1 \text{ یا } x < -1 \\ \text{تعریف نشده} & x = 1, x = -1 \\ -2x & -1 < x < 1 \end{cases}$$

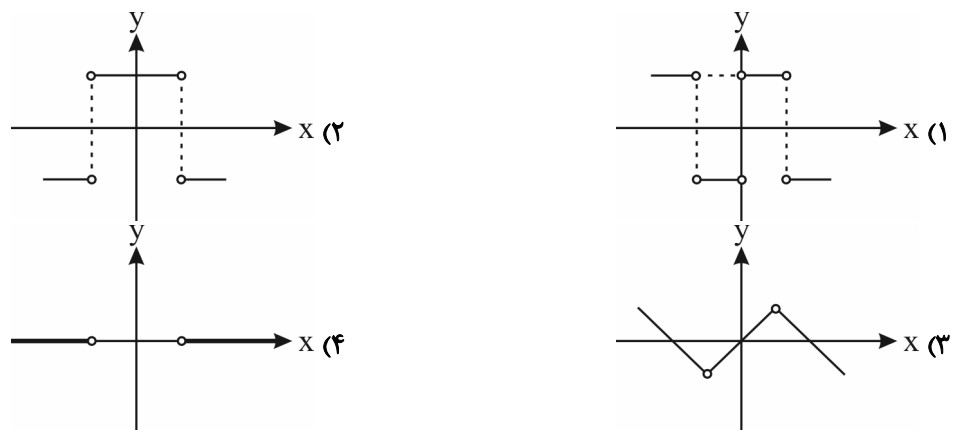
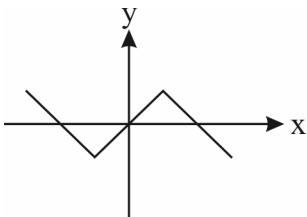
حالا f' را رسم می‌کنیم:



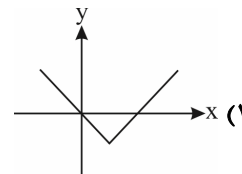
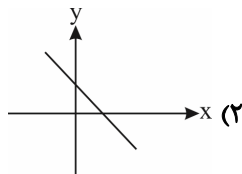
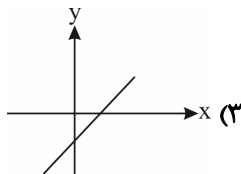
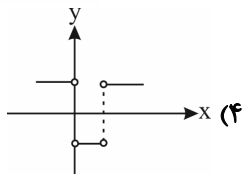
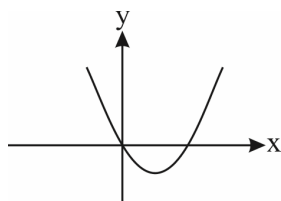
تست ۱۰۴: هرگاه نمودار تابع f به صورت  باشد، نمودار f' به کدام شکل است؟



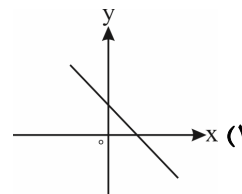
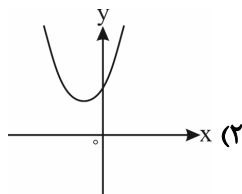
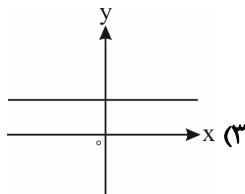
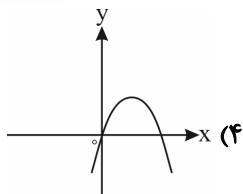
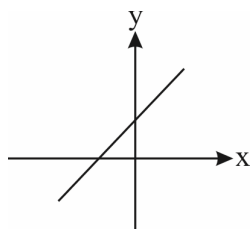
تست ۱۰۵: اگر نمودار تابع f به صورت مقابل باشد، نمودار تابع f' کدام است؟



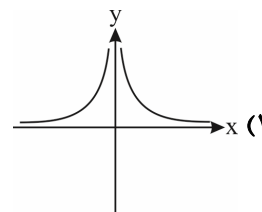
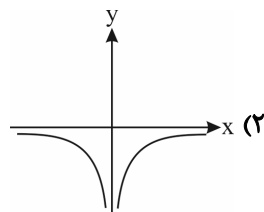
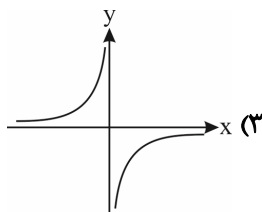
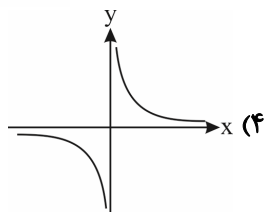
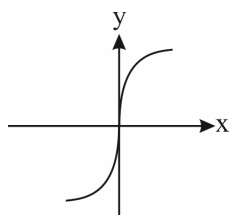
تست ۱۰۶: اگر نمودار تابع f به صورت زیر باشد، نمودار تابع مشتق آن کدام می‌تواند باشد؟



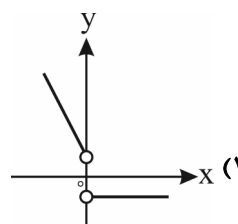
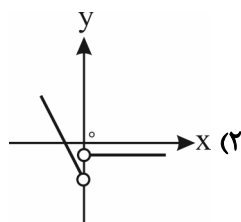
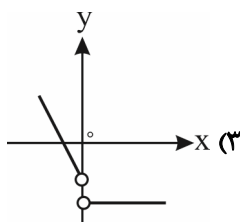
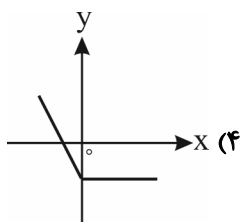
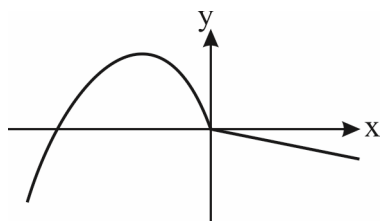
تست ۱۰۷: اگر f' به شکل مقابل باشد، f کدام است؟



تست ۱۰۸: اگر تابع f به صورت روبه‌رو باشد، نمودار مشتق تابع f کدام است؟



تست ۱۰۹: نمودار تابع f در شکل روبه‌رو، تشکیل شده از بخشی از نمودار یک تابع درجه دوم و یک نیم‌خط است. نمودار f' شبیه کدام است؟



ضابطه و دامنه تابع مشتق

برای یافتن تابع مشتق تابع با ضابطه $y = f(x)$ از تابع مشتق می‌گیریم و البته حواسمان هست که $f'(x)$ در نقاطی تعریف می‌شود که تابع f در آن نقاط مشتق‌پذیر باشد. به عبارتی باید حواسمان به دامنه مشتق باشد حالا دامنه تابع مشتق اصلاً یعنی چی؟ همان‌طور که قبلاً دیدیم تابع گاهی اوقات و یا در برخی نقاط مشتق‌پذیر نیست. دامنه تابع مشتق مجموعه تمام نقاطی از دامنه تابع f است که در آن‌ها مشتق f وجود داشته باشد. حواستان باشد دامنه تابع مشتق، زیرمجموعه دامنه خود تابع است. پس می‌توان نوشت:

$$D_{f'} = D_f - \{\text{نقاط مشتق‌ناپذیر}\}$$

در توابع چندجمله‌ای اگر دامنه را محدود نکنیم، دامنه تابع با دامنه تابع مشتق برابر است و داریم $D_{f'} = \mathbb{R}$ و در توابع گویا $D_{f'} = \mathbb{R} - \{\text{ریشه‌های مخرج}\}$.

$$\text{مثال ۱۱۰: مشتق‌پذیری تابع } f(x) = \begin{cases} 2x-1 & x < 0 \\ x^2 & 0 \leq x \leq 2 \\ 4x-4 & x > 2 \end{cases} \text{ را بررسی کرده و سپس دامنه و نمودار } f'(x) \text{ را مشخص کنید.}$$

پاسخ:

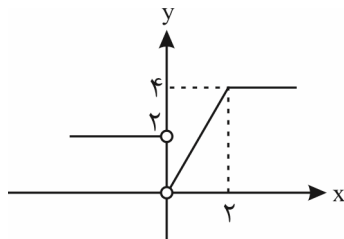
$$f(x) = \begin{cases} 2x-1 & x < 0 \\ x^2 & 0 \leq x \leq 2 \\ 4x-4 & x > 2 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2 & x < 0 \\ 2x & 0 < x < 2 \\ 4 & x > 2 \end{cases}$$

ابتدا علامت مساوی را برای $x = 0$ و $x = 2$ نمی‌گذاریم و بعد از بررسی وضعیت مشتق‌پذیری اگر تابع در هر کدام از آن‌ها مشتق‌پذیر باشد علامت مساوی را برایش قرار می‌دهیم.

در $x = 2$ تابع پیوسته است و همچنین مشتق چپ و راست برابر است. پس در $x = 2$ دامنه تابع مشتق قرار دارد ولی در $x = 0$ تابع ناپیوسته است بنابراین مشتق ندارد و $x = 0$ در دامنه تابع مشتق قرار ندارد.

$$f'(x) = \begin{cases} 2 & x < 0 \\ 2x & 0 < x \leq 2 \\ 4 & x > 2 \end{cases}$$

$$D_{f'} = D_f - \{0\} = \mathbb{R} - \{0\}$$



مثال ۱۱۱: دامنه مشتق تابع $f(x) = \sqrt[3]{x+1} + |x-1|$ را پیدا کنید.

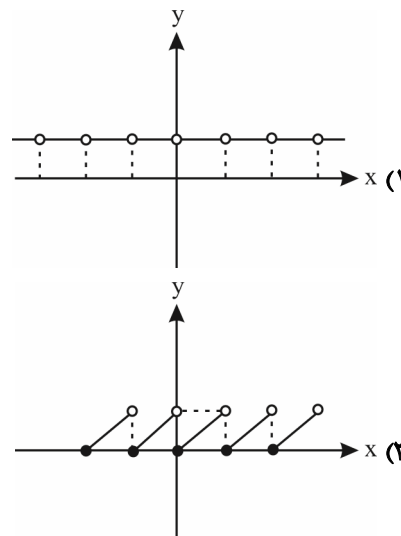
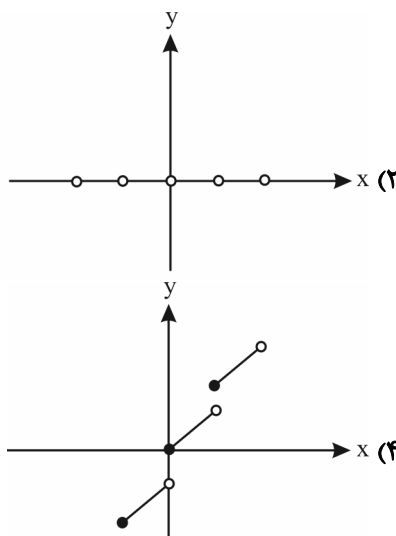
پاسخ: اولاً دامنه خود تابع \mathbb{R} است. ثانیاً این تابع در نقطه $x = 1$ به علت آن‌که نقطه گوشه‌ای محسوب می‌شود و همچنین در نقطه

$$D_{f'} = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$$

$x = -1$ به علت آن‌که ریشه زیر رادیکال است مشتق‌پذیر نیست، پس:

تیب‌های متداول

تست ۱۱۲: نمودار مشتق تابع $f(x) = x + [x]$ کدام است؟



تست ۱۱۳: دامنه مشتق تابع $f(x) = \sqrt[3]{2-|x|}$ کدام است؟

- (۱) $[-2, 2]$ (۲) $(-2, 2) - \{0\}$ (۳) $(-2, 2)$ (۴) $(-2, 0)$

تست ۱۱۴: در کدام تابع دامنه تابع f با دامنه f' برابر است؟

- (۱) $f(x) = |x^2 - 1|$ (۲) $f(x) = \frac{x}{x-1}$ (۳) $f(x) = [x] + [-x]$ (۴) $f(x) = \sqrt{x-1}$

مشتق مرتبه دوم

مشتق تابع $y = f(x)$ را با نماد $y' = f'(x)$ نمایش می‌دهیم. به طریق مشابه می‌توانیم مشتق مرتبه دوم تابع f را با نماد $y'' = f''(x)$ نمایش بدهیم. به عنوان مثال اگر $f(x) = x^5 - 3x^4 + x^2$ باشد، در این صورت:

$$f'(x) = 5x^4 - 12x^3 + 2x \Rightarrow f''(x) = 20x^3 - 36x^2 + 2$$

مثال ۱۱۵: در تابع $f(x) = (2x-1)^2 \sqrt{x^2 + 4x}$ مقدار $f''(\frac{1}{4})$ را پیدا کنید.

پاسخ: اگر توجه کنید $x = \frac{1}{4}$ باعث می‌شود تا $f(x)$ صفر شود. مشتق عامل صفرشونده یادتان هست؟ این‌جا عامل $(2x-1)^2$ در

$\sqrt{x^2 + 4x}$ ضرب شده است پس برای یافتن مشتق در نقطه $x = \frac{1}{4}$ کافی است فقط از عامل صفرشونده یعنی $(2x-1)^2$ مشتق بگیریم.

فقط فرقی با مثال‌های آن قسمت در این است که این‌جا توان عامل صفرشونده ۲ است ما هم مشتق مرتبه دوم را در $x = \frac{1}{4}$ می‌خواهیم پس

کافی است ۲ بار از $(2x-1)^2$ مشتق بگیریم و $x = \frac{1}{4}$ را در بقیه عبارت جاگذاری کنیم:

$$(2x-1)^2 \xrightarrow{\text{مشتق}} 4(2x-1) \xrightarrow{\text{مشتق}} 8 \Rightarrow f''(\frac{1}{4}) = 8\sqrt{(\frac{1}{4})^2 + 4(\frac{1}{4})} = 8\sqrt{\frac{1}{4} + 1} = 8\sqrt{\frac{5}{4}} = 8(\frac{\sqrt{5}}{2}) = 4\sqrt{5}$$

حالا اگر در همین سؤال از ما مشتق اول را در $x = \frac{1}{4}$ می‌پرسید، جواب برابر صفر می‌شد.

توجه کنید که اگر درجه عبارت صفرشونده بیشتر از مرتبه مشتق باشد، مشتق برابر صفر است.

یادت باشد: اگر $f(x)$ یک چندجمله‌ای از درجه n باشد آن‌گاه f' از درجه $n-1$ و f'' از درجه $n-2$ است.

تست ۱۱۶: اگر f یک چندجمله‌ای باشد و داشته باشیم $f'(x)f''(x) = x^9 + mx^4$ آن‌گاه $f''(x)$ از درجه چند است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

پاسخ: اگر فرض کنیم تابع f یک چندجمله‌ای از درجه n باشد، f' از درجه $n-1$ و f'' از درجه $n-2$ خواهد بود. در این سؤال چون $f'f''$ از درجه ۹ است، پس:

پس f'' از درجه $n-2$ یعنی ۴ است.
راستی اگر ۲ تابع چندجمله‌ای در هم ضرب شوند، درجه‌هایشان با هم جمع می‌شود پس در این سؤال f' و f'' که در هم ضرب شدند درجه‌هایشان با هم جمع شد.

تست ۱۱۷: مقدار مشتق دوم $f(x) = x^2\sqrt{2-3x}$ در نقطه $x=0$ برابر است با:

- (۱) $2\sqrt{2}$ (۲) $\sqrt{2}$ (۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۴) $-\frac{3}{2}\sqrt{2}$

تست ۱۱۸: اگر $f(x)$ یک چندجمله‌ای از درجه n و $g(x) = f(f'(x)) \cdot f''(x)$ یک چندجمله‌ای از درجه ۱۴ باشد، مقدار n کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

پاسخ: در درس‌نامه دیدیم که اگر f یک چندجمله‌ای از درجه n باشد، f' از درجه $n-1$ و f'' از درجه $n-2$ است و هم‌چنین دیدیم که اگر ۲ تابع چندجمله‌ای در هم ضرب شوند درجه‌هایشان با هم جمع می‌شوند.

یک نکته دیگر هم باید بدانید که وقتی ۲ تابع چندجمله‌ای با هم ترکیب می‌شوند درجه‌هایشان در هم ضرب می‌شود مثلاً اگر $f(x) = x^2$ و

$f(g(x)) = (x^5)^2 = x^{10}$ و درجه $= 2 \times 5$ باشد: $g(x) = x^5$

حالا برویم سراغ سؤال:

$$g(x) = \overset{\substack{\text{درجه } n-1 \\ \uparrow}}{f}(\overset{\substack{\text{درجه } n-2 \\ \downarrow}}{f'}(x)) \cdot \overset{\substack{\text{درجه } n-2 \\ \downarrow}}{f''}(x)$$

$$f(f'(x)) \text{ درجه} = n(n-1) = n^2 - n$$

$$g(x) \text{ درجه} = n^2 - n + n - 2 = n^2 - 2 = 14 \Rightarrow n^2 = 16 \Rightarrow n = 4$$

تست ۱۱۹: تابع درجه دوم f چنان است که $f(1) = 2$ و $f'(1) = 3$ مقدار $f''(1) = 4$ مقدار $f(2)$ کدام است؟

۱۰ (۴)

۹ (۳)

۸ (۲)

۷ (۱)

تست ۱۲۰: مشتق دوم تابع $y = \frac{\sqrt{x^2 - 1} + x + 1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}$ به ازای $x = 3$ برابر کدام است؟

$\frac{-1}{64}$ (۴)

$\frac{-1}{32}$ (۳)

$\frac{-1}{16}$ (۲)

$\frac{-1}{8}$ (۱)

تست ۱۲۱: تابع $y = \sqrt{x^2 + 1}$ در رابطه $yy'' + (y')^2 = a$ صدق می‌کند، مقدار a کدام است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

تست ۱۲۲: برای عدد مثبت a ، تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} x^3 - x + c & x \leq a \\ bx^4 & x > a \end{cases}$ در نقطه $x = a$ مشتق مرتبه دوم دارد. مقدار c کدام

است؟

$\frac{-1}{2}$ (۴)

$\frac{1}{2}$ (۳)

-۱ (۲)

۱ (۱)

پاسخ: برای این که این تابع در نقطه مرزی a مشتق دوم داشته باشد، باید اولاً مشتق اول داشته باشد:

$$\text{شرط پیوستگی: } \begin{cases} f(a) = a^3 - a + c \\ f(a^-) = a^3 - a + c \Rightarrow ba^4 = a^3 - a + c \\ f(a^+) = ba^4 \end{cases}$$

$$\text{شرط مشتق پذیری: } \begin{cases} f'_-(a) = 3x^2 - 1 = 3a^2 - 1 & \xrightarrow{f'_+(a)=f'_-(a)} 4ba^3 = 3a^2 - 1 \\ f'_+(a) = 4bx^3 = 4ba^3 \end{cases}$$

دوماً حواستان باشد برای آن که f در $x = a$ مشتق دوم داشته باشد باید f' در a پیوسته باشد و $f''_+(a) = f''_-(a)$ باشد:

$$\begin{cases} f''_+(a) = 12bx^2 = 12ba^2 \\ f''_-(a) = 6x = 6a \end{cases} \Rightarrow 12ba^2 = 6a \xrightarrow{\div 12a} ab = \frac{1}{2}$$

حالا باید در رابطه $4ba^3 = 3a^2 - 1$ به جای ab قرار دهیم $\frac{1}{2}$:

$$4(ba)a^2 = 3a^2 - 1 \Rightarrow 4\left(\frac{1}{2}\right)a^2 = 3a^2 - 1 \Rightarrow 2a^2 = 3a^2 - 1 \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = \pm 1 \xrightarrow[\text{است } a > 0]{\text{خودش گفته}} a = 1$$

چون $ab = \frac{1}{2}$ است و $a = 1$ پس: $b = \frac{1}{2}$.

حالا در رابطه پیوستگی a و b را جاگذاری می‌کنیم:

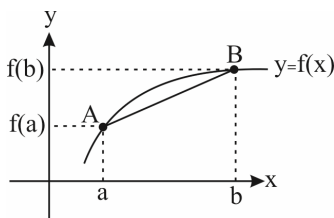
$$ba^4 = a^3 - a + c \Rightarrow \frac{1}{2}(1)^4 = (1)^3 - 1 + c \Rightarrow c = \frac{1}{2}$$

آهنگ تغییر

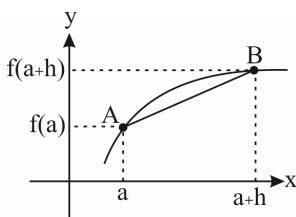
با مفهوم سرعت متوسط در فیزیک آشنا شده‌اید و دیدید که از رابطه $\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ برای پیدا کردن سرعت متوسط استفاده می‌کنیم و همچنین برای یافتن سرعت لحظه‌ای کافی است در لحظه t مقدار مشتق تابع (مکان - زمان) را حساب کنیم. در درس ریاضی آهنگ متوسط و آهنگ تغییر لحظه‌ای را برای تابع f تعریف می‌کنیم. به طور کلی آهنگ متوسط تابع $y = f(x)$ در فاصله $[a, b]$ برابر است با:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

یعنی اگر دو نقطه $A(a, f(a))$ و $B(b, f(b))$ روی تابع $y = f(x)$ باشند، آن‌گاه شیب خط قاطع A و B برابر آهنگ متوسط تابع f در بازه $[a, b]$ است.



همچنین می‌توان این تعریف را این‌گونه بیان کرد:



$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

تست ۱۲۳: آهنگ متوسط تغییر تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{x^2 + 144}$ نسبت به متغیر x روی بازه‌ای از $x = 5$ تا $x = 9$ کدام است؟
(سراسری تهری)

۰/۷ (۴)

۰/۶ (۳)

۰/۵ (۲)

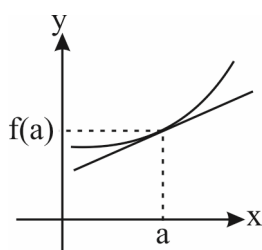
۰/۴ (۱)

پاسخ:

$$\text{آهنگ متوسط تغییر} = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(9) - f(5)}{9 - 5} = \frac{\sqrt{81 + 144} - \sqrt{25 + 144}}{4} = \frac{\sqrt{225} - \sqrt{169}}{4} = \frac{15 - 13}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0.5$$

آهنگ لحظه‌ای (آنی)

آهنگ لحظه‌ای تابع $y = f(x)$ در نقطه $x = a$ برابر $f'(a)$ است. به عبارت دیگر آهنگ لحظه‌ای تابع $y = f(x)$ در $x = a$ برابر شیب خط مماس بر $f(x)$ در نقطه $x = a$ است.



از نظر هندسی شیب خط مماس بر تابع f در $x = a$ برابر آهنگ لحظه‌ای تغییر در $x = a$ می‌باشد.

تست ۱۲۴: در تابع با ضابطه $f(x) = \frac{36}{x^2}$ ، آهنگ متوسط تابع از $x_1 = 2$ تا $x_2 = 3$ چه قدر از آهنگ لحظه‌ای آن در $x = \sqrt[3]{12}$ بیشتر است؟
(تهری فارغ ۹۰)

۲/۵ (۴)

۲ (۳)

۱/۵ (۲)

۱ (۱)

پاسخ: آهنگ متوسط تغییر تابع $y = f(x)$ از $x = a$ تا $x = b$ برابر $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ و آهنگ لحظه‌ای همان مقدار مشتق تابع است.

$$\text{آهنگ متوسط} = \frac{f(3) - f(2)}{3 - 2} = \frac{\frac{36}{9} - \frac{36}{4}}{3 - 2} = \frac{4 - 9}{1} = -5$$

$$f(x) = \frac{36}{x^2} = 36x^{-2} \Rightarrow f'(x) = -72x^{-3} = \frac{-72}{x^3}$$

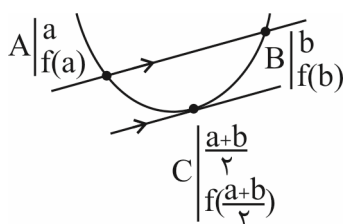
$$\text{آهنگ لحظه‌ای} = f'(\sqrt[3]{12}) = \frac{-72}{(\sqrt[3]{12})^3} = \frac{-72}{12} = -6$$

بنابراین آهنگ متوسط یک واحد از آهنگ لحظه‌ای بیشتر است.

یادت باشه: در تابع درجه دوم $f(x) = ax^2 + bx + c$ آهنگ متوسط در هر بازه، با آهنگ لحظه‌ای در وسط بازه برابر است یعنی:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

مفهوم: در تابع درجه دوم خط مماس در نقطه وسط بازه با خط واصل نقاط سر و ته بازه موازی است.



تست ۱۲۵: در تابع با ضابطه $f(x) = 3x^2 + 4x - 2$ ، تفاضل آهنگ لحظه‌ای در نقطه‌ی $a + \frac{h}{4}$ از آهنگ متوسط تغییر تابع وقتی متغیر

x از عدد a به عدد $a + h$ تغییر کند، کدام است؟

- (۱) h (۲) $2h$ (۳) $3h$ (۴) صفر

پاسخ: گزینه‌ی «۴» - در این سؤال $f(x) = 3x^2 + 4x - 2$ یک تابع درجه‌ی دوم و بازه‌ی $[a, a+h]$ است ضمناً وسط بازه

$$f'(a + \frac{h}{4}) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \Rightarrow f'(a + \frac{h}{4}) - \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = 0 \quad \frac{a+a+h}{4} = a + \frac{h}{4}$$

است پس طبق درس‌نامه:

تست ۱۲۶: در تابع با ضابطه $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{x}$ ، اختلاف آهنگ تغییر لحظه‌ای در $x=2$ ، از آهنگ متوسط در بازه $[1, 4]$ کدام

است؟

(تجربی ۹۸)

- (۱) 0.25 (۲) 0.5 (۳) 0.45 (۴) 0.75

تست ۱۲۷: آهنگ متوسط تغییر تابع $y = \sqrt{21-x^2} + 4x$ در بازه $[5, 6]$ ، برابر آهنگ تغییر لحظه‌ای این تابع، با کدام مقدار x است؟

(سراسری ریاضی ۹۹)

- (۱) $4 + \sqrt{2}$ (۲) $3 + 2\sqrt{2}$ (۳) $2 + \frac{3}{4}\sqrt{2}$ (۴) $2 + \frac{5}{4}\sqrt{2}$

$$y = \sqrt{21-x^2} + 4x$$

پاسخ: گزینه «۴»

آهنگ متوسط در بازه $[5, 6]$ برابر است با:

$$\frac{f(6) - f(5)}{6 - 5} = \frac{\sqrt{21-36} + 24 - \sqrt{21-25} + 20}{1} = \frac{\sqrt{9} - \sqrt{16}}{1} = -1$$

$$y' = \frac{-2x+4}{2\sqrt{21-x^2}+4x} = \frac{x(-x+2)}{x\sqrt{21-x^2}+4x} = \frac{-x+2}{\sqrt{21-x^2}+4x}$$

آهنگ لحظه‌ای نیز برابر است با:

با برابر قرار دادن این دو داریم:

$$\frac{-x+2}{\sqrt{21-x^2}+4x} = -1 \Rightarrow x-2 = \sqrt{21-x^2}+4x \quad (*) \xrightarrow{\text{به توان } 2} x^2 - 4x + 4 = 21 - x^2 + 4x$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 8x - 17 = 0 \Rightarrow x = \frac{8 \pm \sqrt{200}}{4} = 2 \pm \frac{5}{2}\sqrt{2} \xrightarrow{(*)} x = 2 + \frac{5}{2}\sqrt{2}$$

تست ۱۲۸: نقطه‌ی $M(x, y)$ بر روی منحنی به معادله‌ی $y = \sqrt{x+8}$ در حال حرکت است. T فاصله‌ی نقطه‌ی M تا مبدا مختصات است. آهنگ تغییر لحظه‌ی T در نقطه‌ی $x = 7$ کدام است؟

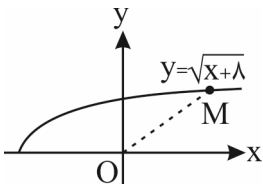
$$\frac{5}{4} \quad (4)$$

$$\frac{3}{7} \quad (3)$$

$$\frac{15}{8} \quad (2)$$

$$\frac{15}{16} \quad (1)$$

پاسخ: گزینه‌ی «۱» - ابتدا منحنی تابع را رسم می‌کنیم:



نقطه‌ی مانند $M(x, \sqrt{x+8})$ را روی منحنی در نظر می‌گیریم و فاصله‌ی آن را تا مبدا با فرمول $T = \sqrt{x^2 + y^2}$ پیدا می‌کنیم:

$$T = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (\sqrt{x+8})^2} = \sqrt{x^2 + x + 8}$$

حالا از T نسبت به x مشتق می‌گیریم:

$$T = \sqrt{x^2 + x + 8} \Rightarrow T' = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2 + x + 8}}$$

حالا به T مقدار 7 را می‌دهیم:

$$T(7) = \frac{2(7)+1}{2\sqrt{7^2 + 7 + 8}} = \frac{15}{2\sqrt{64}} = \frac{15}{16}$$

سرعت متوسط و سرعت لحظه‌ای

دو مفهومی که در درس فیزیک بارها نام آن را شنیده‌اید، مفاهیم سرعت لحظه‌ای و سرعت متوسط است. بیا یک بار دیگر با هم این مفاهیم را ببینیم:

سرعت متوسط: فرض کنیم معادله‌ی حرکت یک متحرک که در امتداد یک خط حرکت می‌کند به صورت $S = f(t)$ باشد در این صورت:

$$\bar{V} = \frac{\text{تغییرات مکان}}{\text{تغییرات زمان}} = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{S_2 - S_1}{t_2 - t_1} = \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}$$

سرعت لحظه‌ای: آهنگ لحظه‌ای تغییر S را سرعت لحظه‌ای می‌نامیم:

$$V = S' = f'(t)$$

راستی خوبه که با چند تا از اصطلاحات آشنا شوید:

(۱) برخورد با زمین: اگر جسمی در راستای قائم حرکت کند و معادله‌ی ارتفاع برحسب زمان آن $h = f(t)$ باشد، با قراردادن $h = 0$ زمان برخورد با زمین به دست می‌آید.

(۲) جهت حرکت: اگر $V > 0$ باشد حرکت در جهت مثبت محور مکان است و اگر $V < 0$ باشد حرکت در خلاف جهت محور مکان است.

(۳) توقف: لحظه‌ای که سرعت لحظه‌ای صفر می‌شود.

مثال ۱۲۹: ماشینی که با سرعت ثابت در حال حرکت است در لحظه $t = 0$ ترمز می‌گیرد تا این‌که متوقف شود. اگر فاصله مکان ماشین از

لحظه ترمز برحسب زمان به صورت $S(t) = 24t - 2t^2$ باشد:

(الف) سرعت ماشین پس از چند ثانیه صفر می‌شود؟

(ب) سرعت ماشین در لحظه شروع ترمز چقدر بوده است؟

(پ) سرعت متوسط ماشین از لحظه شروع ترمز تا توقف کامل چقدر است؟

پاسخ: (الف) به دنبال لحظه‌ای هستیم که سرعت لحظه‌ای برابر صفر می‌شود:

$$S(t) = 24t - 2t^2$$

کافی است از معادله داده شده نسبت به t مشتق بگیریم:

$$V = S'(t) = 24 - 4t \Rightarrow S'(t) = 0 \Rightarrow 4t = 24 \Rightarrow t = 6$$

توجه کنید که ۶ ثانیه از لحظه ترمزگرفتن تا ایستادن ماشین طول می‌کشد.

(ب) لحظه شروع ترمز یعنی $t = 0$ ، پس سرعت لحظه‌ای ماشین در $t = 0$ را پیدا می‌کنیم:

$$S'(0) = 24 - 4(0) = 24$$

(پ) با توجه به (الف) و (ب)، سرعت متوسط متحرک از لحظه ترمز ($t = 0$) تا لحظه توقف ($t = 6$) برابر است با:

$$\text{سرعت متوسط} = \frac{S(6) - S(0)}{6 - 0} = \frac{(24(6) - 2(6)^2) - 0}{6 - 0} = \frac{6(24 - 12)}{6} = 12$$

توفیق و رستگاری را از خدا بخواهید.