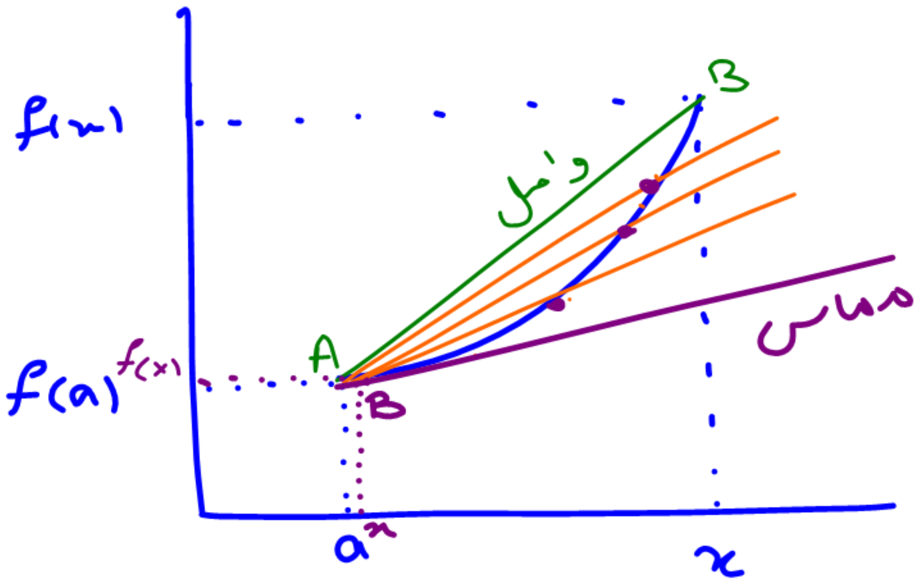


دانستن مشتق :
شیب

مشتق از جنس شیب است.

شیب خط مماس است.

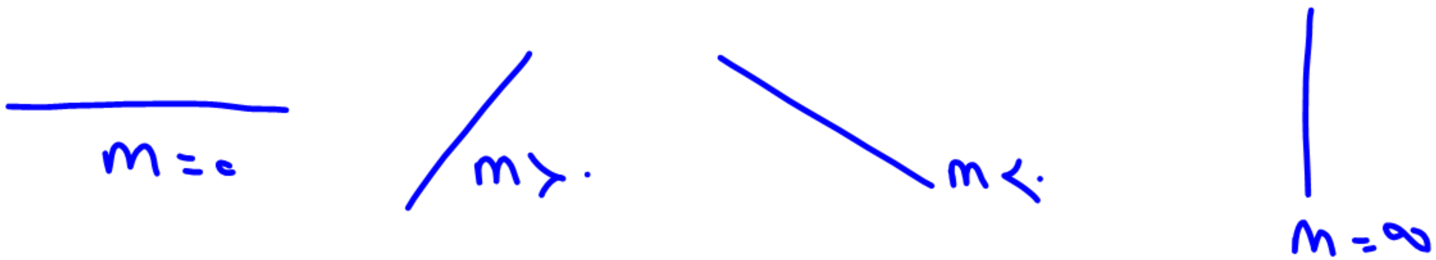
مماس همان واصل ۲ نقطه به شدت به هم نزدیک است.

شیب خط واصل AB $= \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$

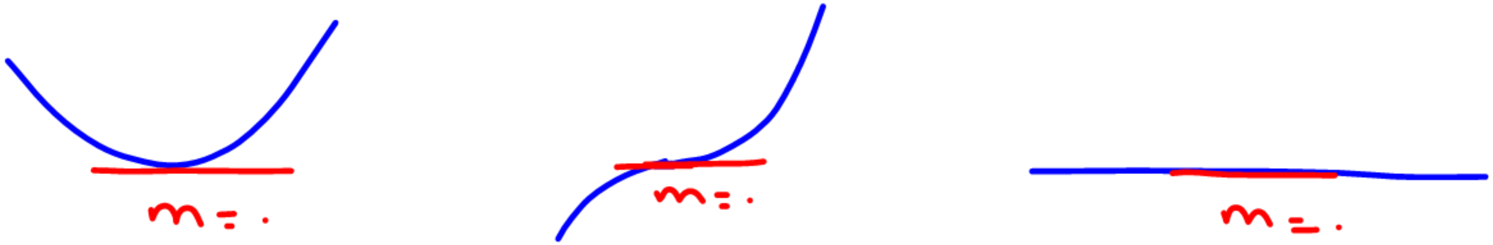
تعریف مشتق تابع در یک نقطه : $x=a$

$f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)-f(a) = \text{صفری}}{x-a = \text{صفری}}$ = مبهم → رفع ابهام = شیب خط مماس بر f در نقطه $x=a$

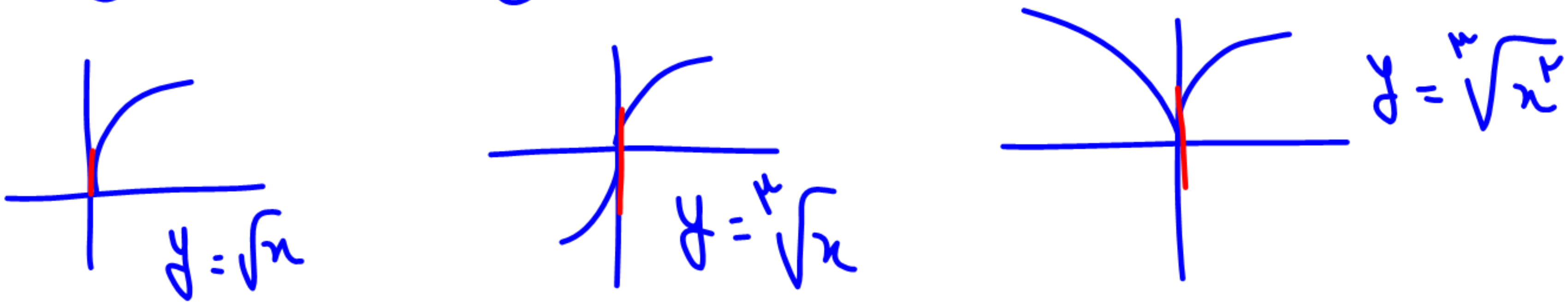
یادآوری:



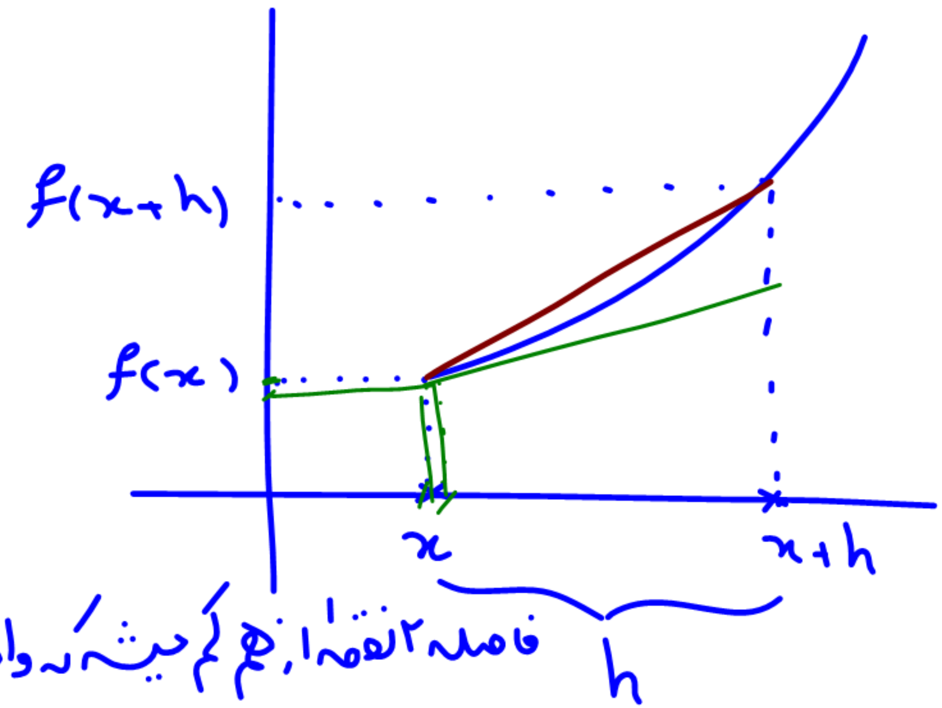
نکته: هر جا بتوان بر تابع مماس افقی کشید مشتق صفر است و برعکس.



نکته: هر جا بتوان بر تابع مماس قائم کشید مشتق ∞ است و برعکس.



تعریف مشتق تابع در حالت کلی:



فاصله ۲ نقطه از هم کم میشه به واصل به مماس تبدیل میشه

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x)$$

برای محاسبه فرمول مشتق تابع های مختلف از این دستورا استفاده می کنیم:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$$

نخست = پرایم : Prime

مثال) $\lim_{h\to 0} \dfrac{f(\overset{u}{5+7h})-f(\overset{u}{5+8h})}{2h}$ اگر $f'(5)=12$ باشد حاصل

راه اول با Hop

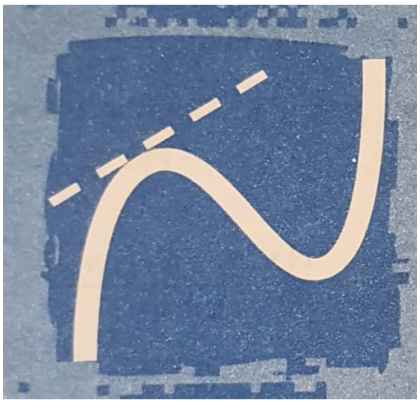
$$\frac{f(5)-f(5)}{2h}\;\frac{=0}{=0} \xrightarrow{Hop} \lim_{h\to 0} \frac{7f'(5+7h)-8f'(5+8h)}{2}$$

$$\begin{cases} y=f(u) \\ y'=u'f'(u) \end{cases}$$

$$=\frac{7f'(5)-8f'(5)}{2}=\frac{-f'(5)}{2}=\frac{-12}{2}=-6$$

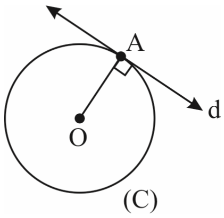
<u>راه دوم</u> : $m=7 \quad n=8 \quad a=5 \quad k=2$: $\left(\dfrac{m-n}{k}\right)f'(a)=\dfrac{7-8}{2}f'(5)=-\dfrac{1}{2}(12)=-6$

مشتق ـ رشتهٔ تجربی



درس ۱: آشنایی با مفهوم مشتق

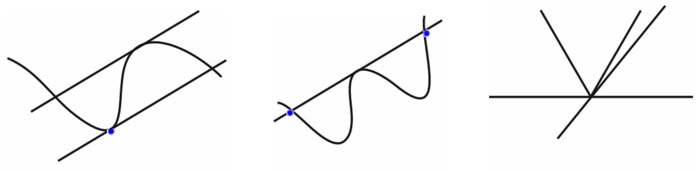
خط مماس بر منحنی



فرض کنیم دایره‌ی C و خط d در یک صفحه باشند، اگر خط و دایره فقط یک نقطه‌ی مشترک داشته باشند، آن‌گاه خط را بر دایره «مماس» می‌گوییم و آن نقطه را، نقطه‌ی تماس خط و دایره می‌نامند.

اگر این نقطه را A بنامیم می‌گوییم، خط در نقطه‌ی A بر دایره مماس است.

دقت کنید که این تعریف فقط مخصوص دایره است و نمی‌تواند برای هر منحنی دلخواه درست باشد. به شکل‌های زیر دقت کنید.



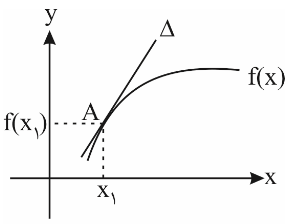
(۱) (۲) (۳)

در شکل‌های (۱) و (۲) خط مماس، منحنی را در بیش از یک نقطه قطع کرده است. در شکل (۳) خط، نمودار را در یک نقطه قطع کرده است ولی در هیچ نقطه‌ای بر آن مماس نیست.

تعریف مشتق

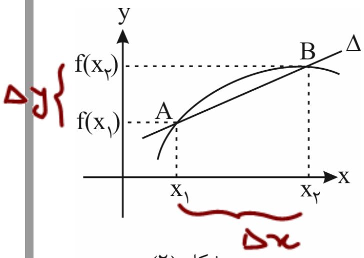
در شکل (۱) خط Δ در نقطه‌ی A بر منحنی $y = f(x)$ مماس است و می‌خواهیم شیب خط Δ را پیدا کنیم. اول ببینیم که خط مماس را چه‌طور تعریف می‌کنیم.

مشتق : شیب



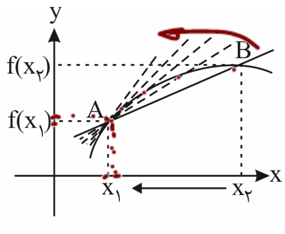
شکل (۱)

به شکل (۲) نگاه کنید. در این شکل خط Δ منحنی $f(x)$ را در دو نقطه‌ی A و B قطع کرده است.



شکل (۲)

حالا اگر مانند شکل (۳) نقطه‌ی B به سمت نقطه‌ی A حرکت کند خط Δ کم‌کم به خط مماس بر منحنی تبدیل می‌شود یعنی خط مماس حالت حدی خط قاطعی است که منحنی تابع را در دو نقطه قطع کند و نقطه‌ی دوم به سمت نقطه‌ی اول حرکت کند. برای پیداکردن شیب خط مماس هم از همین موضوع استفاده می‌کنیم.



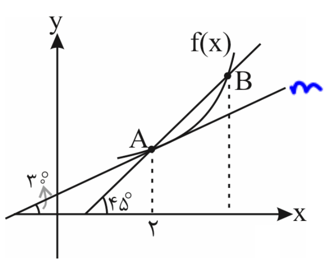
شکل (۳)

می‌دانیم شیب خط قاطع که منحنی را در دو نقطه‌ی A و B قطع می‌کند برابر $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ یا $m = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ است. حالا وقتی نقطه‌ی B به سمت نقطه‌ی A حرکت می‌کند مثل آن است که بگوییم $x_2 \to x_1$، پس شیب خط مماس برابر حد $\lim\limits_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ است. نقطه‌ی B یک نقطه‌ی متحرک است و در نتیجه به جای x_2 می‌توانیم بنویسیم x (چون x_2 در حال حرکت است) پس شیب خط مماس برابر $m_{\text{مماس}} = \lim\limits_{x \to x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}$ است. حالا می‌توانیم مشتق را تعریف کنیم.

اگر در تابع $f(x)$ حاصل حد $\lim\limits_{x \to x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}$ وجود داشته باشد (یعنی برابر عدد مشخصی شود) آن را مشتق تابع $f(x)$ در نقطه‌ی x_1 می‌نامیم و با $f'(x_1)$ نشان می‌دهیم. یعنی $f'(x_1) = \lim\limits_{x \to x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}$ و مقدارش برابر شیب خط مماس بر منحنی تابع $f(x)$ در نقطه‌ی x_1 است.

مشتق تابع به ازای طول نقطه‌ی تماس برابر شیب خط مماس بر منحنی در نقطه‌ی تماس می‌باشد، یعنی: $m = \lim\limits_{B \to A} m_{AB} = f'(x_1)$

تست ۱: با توجه به شکل مقابل $f'(2)$ کدام است؟



$m = \tan 30 = \frac{\sqrt{3}}{3}$

شیب خط مماس بر f در $x=2$ که همان تانژانت زاویه‌ای است که مماس با جهت مثبت محور xها می‌سازد.

۱) $\sqrt{3}$

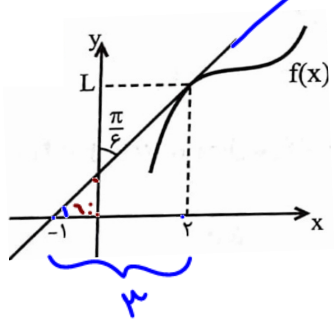
۲) ۱

۳) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ✓

۴) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

$f'(۲): m = \tan ۶۰ = \sqrt{۳}$ شیب خط مماس در $x=۲$

تست ۲: با توجه به شکل مقابل، حاصل $f(۲)+f'(۲)$ کدام است؟



$f(۲)=L$

$\tan ۶۰ = \sqrt{۳} = \frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}} = \frac{L}{۲-(-۱)=۳}$

$L = ۳\sqrt{۳}$ $\quad (f(۲)=L=۳\sqrt{۳}) + (f'(۲)=\sqrt{۳}) \rightarrow ۴\sqrt{۳}$

۱) $\frac{۱۰\sqrt{۳}}{۳}$

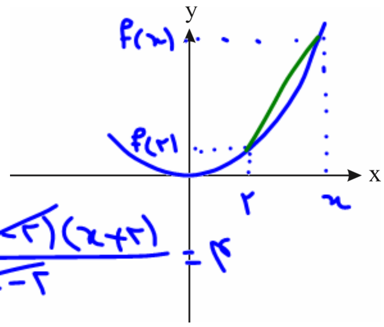
۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}+۳$

۳) $۳\sqrt{۳}$

۴) $۴\sqrt{۳}$ ✓

سوال ۳: شیب خط مماس بر منحنی توابع زیر را در نقاط خواسته‌شده به کمک تعریف مشتق پیدا کنید.

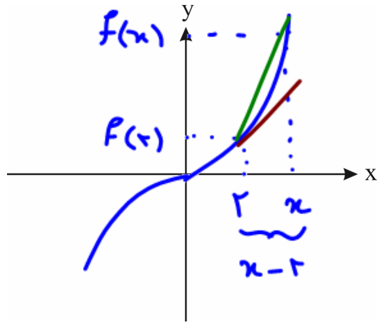
$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$



$f(x)=x^{۲}$; $x=۲$

$f'(۲) = \lim_{x \to ۲} \frac{f(x)-f(۲)}{x-۲} = \lim_{x \to ۲} \frac{x^{۲}-۴}{x-۲} = \frac{۰}{۰}$ مبهم $= \lim_{x \to ۲} \frac{\cancel{(x-۲)}(x+۲)}{\cancel{x-۲}} = ۴$

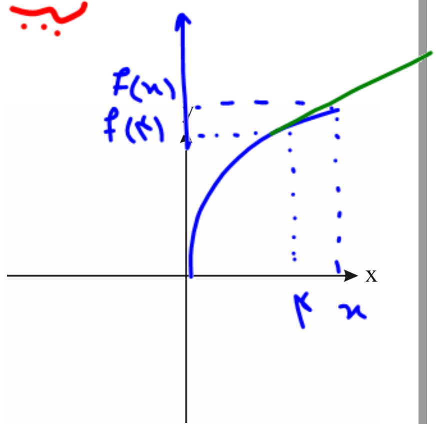
$f'(۲) = ۴$ مشتق در یک نقطه را با تعریف مشتق یافتیم:



$f(x)=x^{۳}$; $x=۲$

$f'(۲) = \lim_{x \to ۲} \frac{f(x)-f(۲)}{x-۲} = \lim_{x \to ۲} \frac{x^{۳}-۸}{x-۲}$

$= \lim_{x \to ۲} \frac{\cancel{(x-۲)}(x^{۲}+۲x+۴)}{\cancel{x-۲}} = ۱۲$: شیب مماس در $x=۲$



$f(x)=\sqrt{x}$; $x=۴$

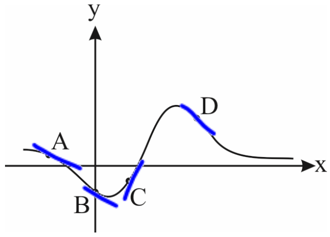
$f'(۴) = \lim_{x \to ۴} \frac{f(x)-f(۴)}{x-۴} = \lim_{x \to ۴} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{۴}}{x-۴}$

$= \lim_{x \to ۴} \frac{(\sqrt{x}-۲)}{(x-۴)} \frac{(\sqrt{x}+۲)}{(\sqrt{x}+۲)} = \lim_{x \to ۴} \frac{\cancel{x-۴}}{\cancel{(x-۴)}(\sqrt{x}+۲)} = \frac{۱}{۲+۲} = \frac{۱}{۴}$

هرجا تابع نزولی باشد مشتق منفی و هرجا صعودی باشد مشتق مثبت است

اگر تابع مماس افقی داشته باشد مشتق صفر است.

تست ۴: با توجه به نمودار روبه‌رو، در کدام‌یک از نقاط زیر مقدار تابع و مقدار مشتق، هم‌علامت هستند؟



۱) **A**

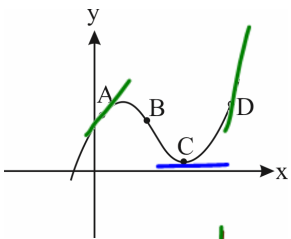
۲) **B** ✓

۳) **C**

۴) **D**

x	A	B	C	D
f	+	−	−	+
f'	−	−	+	−

تست ۵: نمودار تابع مشتق‌پذیر **f** به صورت روبه‌رو است. اگر **m** شیب خط مماس در هر نقطه باشد، کدام گزینه درست است؟

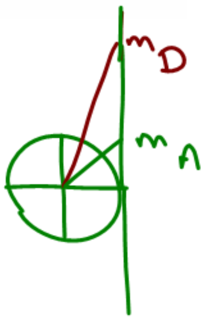


۱) $m_D > m_A > m_B > m_C$

۲) $m_A > m_D > m_B > m_C$

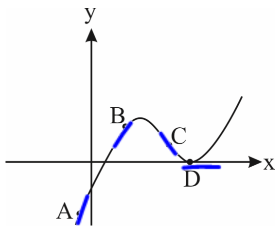
۳) $m_D > m_A > m_C > m_B$ ✓

۴) $m_A > m_D > m_C > m_B$



مشتق: شیب خط مماس است.

تست ۶: نمودار تابع مشتق‌پذیر **f** به صورت زیر است. در کدام نقطه از نقاط مشخص‌شده روی شکل، مشتق کم‌ترین مقدار خود را دارد؟



کمترین شیب

۱) **A** $m_A > 0$

۲) **B** $m_B > 0$

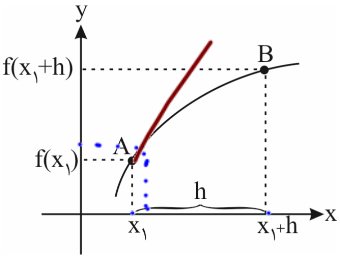
۳) **C** ✓ دارای منفی است

۴) **D** $m_D = 0$

تعریف مشتق و محاسبه‌ی حد

گفتیم مشتق تابع f در نقطه‌ی $x_۱$ از رابطه‌ی $f'(x_۱)=\lim\limits_{x\to x_۱}\frac{f(x)-f(x_۱)}{x-x_۱}$ به دست می‌آید. این تعریف را می‌شود به شکل دیگری هم بنویسیم. اگر فرض کنیم $x-x_۱=h$ داریم $x=x_۱+h$ و وقتی $x\to x_۱$ یعنی $h\to ۰$، پس:

$$f'(x_۱)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(x_۱+h)-f(x_۱)}{h}$$



$$f'(x)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(x_۱+h)-f(x_۱)}{h}$$

با استفاده از تعریف $f'(x)=\lim\limits_{h\to ۰}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ می‌توانیم تابع مشتق بعضی از تابع‌ها را حساب کنیم. مثلاً اگر از ما بپرسند مشتق $f(x)=x^۲$ را بیابید (و نگویند در چه نقطه‌ای، یعنی به صورت کلی) باید تعریف را بنویسیم:

$$f'(x)=\lim_{h\to ۰}\frac{(x+h)^۲-x^۲}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{\cancel{x^۲}+۲xh+h^۲-\cancel{x^۲}}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{۲xh+h^۲}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{\cancel{h}(۲x+h)}{\cancel{h}}=\lim_{h\to ۰}۲x+h=۲x$$

اگر می‌گفت مشتق $f(x)=x^۲$ رو توی مثلاً نقطه‌ی $x=۲$ حساب کنید بهتر بود از تعریف مشتق در نقطه، یعنی $\lim\limits_{x\to x_۱}\frac{f(x)-f(x_۱)}{x-x_۱}$ استفاده می‌کردیم.

پس مشتق $f(x)=x^۲$ همیشه به صورت $f'(x)=۲x$ است یعنی شما هر عددی دوست داری جاگذاری کن و مشتق رو توی اون نقطه به دست بیار. مثلاً مشتق $f(x)=x^۲$ در نقاط $x=۱,۲,۳$ به ترتیب $f'(۱)=۲(۱)=۲$ ،$f'(۲)=۲(۲)=۴$ و $f'(۳)=۲(۳)=۶$ است.

معمولاً از تعریف دوم زمانی استفاده می‌کنیم که ضابطهٔ مشتق را بخواهیم. ولی با کمک تعریف اول، مقدار شیب خط مماس یا همان مقدار مشتق را در نقطهٔ $x=x_۱$ محاسبه می‌کنیم.

تست ۷: اگر $f'(۱)=۲$ باشد، حاصل $\lim\limits_{h\to ۰}\frac{f(۱)-f(۱+h)}{۳h}$ کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) $-\frac{۲}{۳}$ ۴) $-\frac{۳}{۲}$

$f'(۱)=۲$

$$\lim_{h\to ۰}\frac{-۱}{۳}\boxed{\frac{f(۱+h)-f(۱)}{h}}=-\frac{۱}{۳}(۲)=-\frac{۲}{۳}$$

Salamian — Specialized School of Mathematics

معرفی از $f'(a)$:

اگر مشتق تابع f در $x=a$ موجود باشد، آن‌گاه: $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+mh)-f(a+nh)}{kh}=\dfrac{m-n}{k}f'(a)$

تست ۸: حاصل کدام‌یک با بقیه فرق می‌کند؟

۱) $2f'(2)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+3h)-f(2-h)}{2h}$

۲) $2f'(2)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{\frac{1}{2}h}$

۳) $2f'(2)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2-h)-f(2-5h)}{2h}$

۴) $-2f'(2)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+h)-f(2+5h)}{2h}$ ✓

1) $a=2 \quad m=3 \quad n=-1 \quad k=2 : \dfrac{m-n}{k}f'(a)=\dfrac{3-(-1)}{2}f'(2)=2f'(2)$

2) $a=2 \quad m=1 \quad n=0 \quad k=\frac{1}{2} : \dfrac{m-n}{k}f'(a)=\dfrac{1-0}{\frac{1}{2}}f'(2)=2f'(2)$

4) $a=2 \quad m=1 \quad n=5 \quad k=2 : \dfrac{m-n}{k}f'(a)=\dfrac{1-5}{2}f'(2)=-2f'(2)$

تست ۹: اگر $f'(2)=4$، آن‌گاه حاصل $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2)-f(2-3h)}{2h}$ کدام است؟

۱) ۶ ✓ ۲) ۶- ۳) ۳ ۴) ۳-

$m=0 \quad n=-3 \quad k=2$

$\dfrac{m-n}{k}f'(2)=\dfrac{0-(-3)}{2}f'(2)=\dfrac{3}{2}f'(2)=\dfrac{3}{2}(4)=6$

تست ۱۰: اگر تابع f مشتق‌پذیر باشد و $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x-h)}{h}=2\sqrt{x}$، آن‌گاه $f'(4)$ کدام است؟ (سراسری ریاضی)

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{4}{3}$ ۳) ۴ ۴) ۲

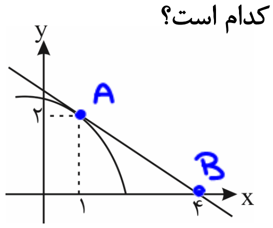
$m=1, n=-1, k=1$

$\dfrac{m-n}{k}f'(x)=\dfrac{1-(-1)}{1}f'(x)=2f'(x)=2\sqrt{x}$

$f'(x)=\sqrt{x}$

$f'(4)=\sqrt{4}=2$

تست ۱۱: در شکل مقابل، خط مماس بر منحنی f در $x=۱$ رسم شده است. حاصل $\lim\limits_{h\to ۰}\dfrac{f(۱+h)-f(۱)}{h}$ کدام است؟



۱) $-\dfrac{۳}{۲}$ ۲) -۲ ۳) $-\dfrac{۲}{۳}$ ✓ ۴) $-\dfrac{۱}{۲}$

$f'(۱)=m_{AB}=\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\dfrac{۰-۲}{۴-۱}=\dfrac{-۲}{۳}$

تابع در $x=۱$ نزولی است و باید شیب (مشتق) آن منفی باشد

توجه: $f(u)\xrightarrow[\text{مشتق}]{}u'f'(u)$

تست ۱۲: اگر $\lim\limits_{x\to ۲}\dfrac{f(x)-f(۲)}{x^۲-۴}$ برابر ۵ باشد، حاصل $\lim\limits_{h\to ۰}\dfrac{f(۲+\frac{h}{۲})-f(۲-h)}{۱۰h-h^۳}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) -۱ ۳) ۳ ۴) ۴

مزدوج

$\lim\limits_{x\to ۲}\dfrac{f(x)-f(۲)}{x^۲-۴}=۵\to\lim\limits_{x\to ۲}\underbrace{\boxed{\dfrac{۱}{(x+۲)}}}_{\frac{۱}{۴}}\underbrace{\boxed{\dfrac{f(x)-f(۲)}{x-۲}}}_{f'(۲)}=۵\to\dfrac{۱}{۴}f'(۲)=۵\to f'(۲)=۲۰$

$y=f(u)\xrightarrow{\text{مشتق}}y'=u'f'(u)$

$\lim\limits_{h\to ۰}\dfrac{f(۲+\frac{۱}{۲}h)-f(۲-h)}{۱۰h-h^۳}=\dfrac{۰}{۰}$ مبهم $\xrightarrow{Hop}\lim\limits_{h\to ۰}\dfrac{\frac{۱}{۲}f'(۲+\cancel{\frac{h}{۲}})-(-۱)f'(۲-\cancel{h})}{۱۰-۳h^۲}=\dfrac{\frac{۱}{۲}f'(۲)+f'(۲)}{۱۰}=۳$

تعریف مشتق همیشه به شکل یک حد $\dfrac{۰}{۰}$ است پس برای رفع ابهام آن می‌توانیم از قاعده‌ی هوپیتال استفاده کنیم (به شرط آن که f مشتق‌پذیر باشد). فقط نکته‌ای که باید به آن خیلی دقت کنید، این است که هنگام هوپیتال گرفتن از صورت و مخرج کسر، نسبت به متغیری مشتق می‌گیریم که دارد به سمت صفر (یا هر چیز دیگر) میل می‌کند.

تست ۱۳: اگر تابع f در $x=۱$ مشتق‌پذیر و $\lim\limits_{h\to ۰}\dfrac{f(۱-۲h)}{h+h^۲}=۴$ باشد، حاصل $f(۱)+f'(۱)$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) -۲ ✓ ۳) ۴ ۴) -۴

$\lim\limits_{h\to ۰}\dfrac{f(۱-۲h)}{h+h^۲}=۴\to\dfrac{f(۱)}{\text{صفر}}=۴\longrightarrow\boxed{f(۱)=۰}$ حتماً

چون چه شده جواب نهایی عدد ۴ درآورده.

اگر نمی‌تونن

(۱) ۴ فروردین:

$\dfrac{۰}{۰}\xrightarrow{Hop}\lim\limits_{h\to ۰}\dfrac{(۰-۲)f'(۱-۲h)}{۱+۲h}=\dfrac{-۲f'(۱)}{۱}=-۲f'(۱)=۴$

$\boxed{f'(۱)=-۲}$

مثال ۱۴: اگر $f(۳)=۲$ باشد و f تابعی مشتق‌پذیر باشد، حاصل حد $\lim\limits_{x\to ۱}\frac{f(\overset{u}{۳x})-۲}{۶x-۶}$ چند برابر $f'(۳)$ است؟

پاسخ: خوب می‌بینی که جواب حد $\frac{۰}{۰}$ می‌شه: $\lim\limits_{x\to ۱}\frac{f(۳)-۲}{۶-۶}=\frac{۲-۲}{۶-۶}=\frac{۰}{۰}$ مبهم

واسه رفع ابهام نسبت به x، هُپ می‌زنیم: $\Rightarrow \lim\limits_{x\to ۱}\frac{۳f'(۳x)-۰}{۶}=\frac{۳}{۶}f'(۳)=\frac{۱}{۲}f'(۳)$

راستی $(f(۳x))'=۳f'(۳x)$ است. مثل $f(x^۲)$ که داشتیم: $(f(x^۲))'=۲xf'(x^۲)$

$y=f(x^۴)\to y'=۴x^۳f'(x^۴)$

درس ۲: روابط محاسبه‌ی مشتق

محاسبه‌ی مشتق بعضی از توابع

۱) تابع ثابت $f(x)=c$ به صورت خط افقی است که شیب آن صفر است. پس $f'(x)=۰$ می‌باشد.

$f(x)=\pi \to y'=۰$

۲) مشتق تابع $f(x)=ax+b$ برابر a است یعنی $f'(x)=a$ که a همان شیب خط است.

مثلاً:

$f(x)=۲x+۶ \Rightarrow f'(x)=۲$

$f(x)=\frac{x}{۲} \Rightarrow f'(x)=\frac{۱}{۲}$

$f(x)=x \Rightarrow f'(x)=۱$

۳) مشتق تابع $f(x)=x^m$ به صورت $f'(x)=mx^{m-۱}$ است. $m\in\mathbb{Q}$

مثلاً:

$$\begin{cases} f(x)=kx^m \\ f'(x)=k(m)x^{m-۱}\end{cases}$$

$f(x)=x^۲ \to y'=۲x$

$f(x)=x^۳ \to y'=۳x^۲$

$f(x)=\frac{۱}{x^۲}=x^{-۲} \to y'=-۲x^{-۳}=-\frac{۲}{x^۳}$

$f(x)=\frac{۱}{x^۳}=x^{-۳} \to y'=-۳x^{-۴}=-\frac{۳}{x^۴}$

$f(x)=\sqrt[۵]{x^۳}=x^{\frac{۳}{۵}} \to y'=\frac{۳}{۵}x^{\frac{۳}{۵}-۱}=\frac{۳}{۵}x^{-\frac{۲}{۵}}=\frac{۳}{۵x^{\frac{۲}{۵}}}=\frac{۳}{۵\sqrt[۵]{x^۲}}$

$f(x)=\frac{۱}{\sqrt[۳]{x}}$

۴) اگر عددی پشت تابع ضرب شده باشد، عیناً پشت تابعِ مشتق نیز ضرب می‌شود. یعنی مشتقِ $kf(x)$ برابر است با $kf'(x)$.

$f(x)=۳x^۷ \to y'=۳(۷x^۶)$

$f(x)=۵\sqrt[۳]{x^۲}=۵x^{\frac{۲}{۳}} \to y'=۵(\frac{۲}{۳})x^{-\frac{۱}{۳}}$

$f(x)=\frac{۳}{x^۲}=۳x^{-۲} \to y'=۳(-۲)x^{-۳}$

$f(x)=۲\sqrt{x}+۵=۲x^{\frac{۱}{۲}}+۵ \to y'=۲(\frac{۱}{۲})x^{\frac{۱}{۲}-۱}=x^{-\frac{۱}{۲}}=\frac{۱}{\sqrt{x}}$

$f(x)=\frac{۳}{۲}\sqrt{۲x+۳}+۷=\frac{۳}{۲}(۲x+۳)^{\frac{۱}{۲}}+۷ \to y'=\frac{۳}{۲}(\frac{۱}{۲})(۲)(۲x+۳)^{-\frac{۱}{۲}}=\frac{۳}{۲\sqrt{۲x+۳}}$

$y'=\frac{۳}{۲}\left(\frac{۲}{۲\sqrt{۲x+۳}}\right)$

$y=\sqrt{u}\to y'=\frac{u'}{۲\sqrt{u}}$

$y=\sqrt{x}\to y'=\frac{۱}{۲\sqrt{x}}$

$y=\sqrt{۲x+۳}\to y'=\frac{۲}{۲\sqrt{۲x+۳}}$

۵) اگر بین تابع‌ها جمع و تفریق داشته باشیم کافیه از هر کدوم از تابع‌ها جداگانه مشتق بگیریم و علامت جمع و تفریق هم بذاریم باشه.

$f(x)=x^3-x^2$ $\qquad y'=3x^2-2x$

$f(x)=6x-x^2+7\sqrt{x}$ $\qquad y'=6-2x+7\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$

۶) اگر دو تابع در هم ضرب شده باشند، مشتق حاصل ضربشان از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید. (u و v توابعی برحسب x هستند.)

$$y=u\cdot v \Rightarrow y'=\underbrace{u'}_{\text{مشتق اولی}}\cdot\underbrace{v}_{\text{خود دومی}}+\underbrace{v'}_{\text{مشتق دومی}}\cdot\underbrace{u}_{\text{خود اولی}}$$

به زبان فارسی: مشتق اولی در خود دومی به علاوه‌ی مشتق دومی در خود اولی.

$f(x)=(x^2-1)(7x^3+5x^2+x^5)$

$y'=(2x)(7x^3+5x^2+x^5)+(21x^2+10x+5x^4)(x^2-1)$

۷) اگر دو تابع به هم تقسیم شوند برای محاسبه‌ی مشتق تقسیم آن‌ها به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$y=\frac{u}{v} \Rightarrow y'=\frac{u'v-v'u}{v^2}$$

u و v توابعی برحسب x هستند.

به زبان فارسی: مشتق صورت در خود مخرج منهای مشتق مخرج در خود صورت تقسیم بر مخرج به توانِ دو.

$$f(x)=\frac{u}{v} \Rightarrow f'(x)=\frac{u'v-v'u}{v^2}$$

به زبان فارسی:
$$f'=\frac{(\text{مشتق‌صورت})\times(\text{خود مخرج})-(\text{مشتق مخرج})\times(\text{خود صورت})}{(\text{مخرج})^2}$$

مثلاً:
$$f(x)=\frac{2x^2-7x}{3x^2+9x+5}$$

$$f'(x)=\frac{(2(2x)-7)(3x^2+9x+5)-(3(2x)+9)(2x^2-7x)}{(3x^2+9x+5)^2}$$

$f(x)=\frac{2x+5}{6x-9}$ $\qquad y'=\frac{2(6x-9)-6(2x+5)=2(-9)-6(5)}{(6x-9)^2}$

$f(x)=\frac{5x-7}{x+1}$ $\qquad y'=\frac{5(x+1)-(1)(5x-7)=5(1)-(1)(-7)}{(x+1)^2}$

$f(x)=\frac{x+7}{x-2}$ $\qquad y'=\frac{1(x-2)-(1)(x+7)=1(-2)-(1)(7)}{(x-2)^2}$

در حالت کلی مشتق تابع هموگرافیک $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ به صورت $f'(x)=\frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$ است. دستور پرتکرار

چون هر کی دوست داری فقط وقتی از این فرمول استفاده کن که صورت و مخرج با عبارتِ xدار شروع بشن یعنی این غلطه:

$$f(x)=\frac{1-2x}{6x-7} \Rightarrow f'(x)=\frac{(1)(-7)-(6)(-2)}{(6x-7)^2} \quad ✗$$

درستش اینه: $f(x)=\dfrac{-۲x+۱}{۶x-۷} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{(-۲)(-۷)-(۶)(۱)}{(۶x-۷)^۲}$

حالا یه چیزه باحال. یادته که مشتق $f(x)=\dfrac{۱}{x}$ رو چطوری به دست می‌آوردیم؟

$$f(x)=\frac{۱}{x}=x^{-۱} \Rightarrow f'(x)=(-۱)x^{-۲}=\frac{-۱}{x^۲}$$

ولی از راه مشتق کسری هم می‌تونیم به دست بیاریمش:

$$f(x)=\frac{۱}{x} \Rightarrow f'(x)=\frac{۰-۱}{x^۲}=-\frac{۱}{x^۲}$$

ولی در حالت کلی یادت باشه که:

$f(x)=\dfrac{k}{x} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{-k}{x^۲}$ که k یک عدد است.

$$f(x)=\frac{۲}{x} \longrightarrow y'=-\frac{۲}{x^۲}$$

$$f(x)=\frac{-۳}{x} \longrightarrow y'=\frac{۳}{x^۲}$$

اگر در تمام فرمول‌های مشتق به جای x عبارت u که عبارتی برحسب x است قرار بگیرد، در این صورت داریم:

توی u ایکس داریم

u ایکسی است

$u=x^۳-۳x^۲$

۱) $y=u^n \Rightarrow y'=nu'u^{n-۱}$

۲) $y=\dfrac{۱}{u} \Rightarrow y'=\dfrac{-u'}{u^۲}$

۳) $y=\sqrt{u} \Rightarrow y'=\dfrac{u'}{۲\sqrt{u}}$ مشتق زیرش به دوتا رادیکالش

۴) $y=\sqrt[۳]{u} \Rightarrow y'=\dfrac{u'}{۳\sqrt[۳]{u^۲}}$

۵) $y=\sqrt[n]{u} \Rightarrow y'=\dfrac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-۱}}}$

۶) $y=\dfrac{au+b}{cu+d} \Rightarrow y'=\dfrac{ad-bc}{(cu+d)^۲}(u')$ شبیه هموگرافیک

مثال ۱۵: مشتق توابع زیر را به‌دست آورید: پایه به صورت توان دار را یاد بگیر

الف) $y=(\underbrace{x^۲+۳x-۱}_{u})^۷$

$y'=۷(۲x+۳)(x^۲+۳x-۱)^۶$

$y'=n$ (مشتق پایه)(پایه به توان یکی کمتر)

ب) $y = ۵(x^۲ + x - ۱)^۶$

$y' = ۵(۶)(۲x+۱)(x^۲+x-۱)^۵$

پ) $y = f^۳(x) \longrightarrow y' = ۳ f'(x) f^۲(x)$

$y = u^۳ \longrightarrow y' = ۳ u' u^۲$

پایه به توان یکی کمتر × مشتق پایه × توان

ت) $y = \sqrt{۴ + ۲x}$ $\qquad y' = \dfrac{۰+۲}{۲\sqrt{۴+۲x}}$

$y = \sqrt{u} \longrightarrow y' = \dfrac{u'}{۲\sqrt{u}}$

ث) $y = \sqrt{x^۲ - ۳x} \longrightarrow y' = \dfrac{۲x-۳}{۲\sqrt{x^۲-۳x}}$

ج) $y = \sqrt{\dfrac{۲x-۱}{۳x+۲}} = u \longrightarrow y' = \dfrac{u'}{۲\sqrt{u}} = \dfrac{\dfrac{۲(۲)-(-۱)(۳)}{(۳x+۲)^۲}}{۲\sqrt{\dfrac{۲x-۱}{۳x+۲}}}$

$y = \sqrt{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$

چ) $y = \sqrt{f(x)}$

$y' = \dfrac{f'(x)}{۲\sqrt{f(x)}}$

ح) $y = \dfrac{۳x^۲ + ۱}{x^۲ + ۱}$ $\qquad u = x^۲ \longrightarrow y' = \left(\dfrac{۳(۱)-(۱)(۱)}{(x^۲+۱)^۲}\right)(۲x)$

شبیه هموگرافیک $\qquad y = \dfrac{au+b}{cu+d} \longrightarrow y' = \left(\dfrac{ad-bc}{(cu+d)^۲}\right)u'$

خ) $y = \dfrac{۵\sqrt{x} - ۱}{۳\sqrt{x} + ۲}$ $\qquad u = \sqrt{x}$

شبیه هموگرافیک $\qquad y' = \left(\dfrac{۵(۲)-(-۱)(۳)}{(۳\sqrt{x}+۲)^۲}\right)\left(u' = \dfrac{۱}{۲\sqrt{x}}\right)$

تست ۱۶: مشتق تابع $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ در نقطه‌ی $x = ۱$ برابر ۳ است. اگر $f(۱) = ۰$، $f'(۱) = -۴$ و $g'(۱)$ موجود باشد، مقدار $g(۱)$ کدام است؟ *(سراسری تجربی)*

۱) $-\dfrac{۴}{۳}$ $\qquad$ ۲) $-\dfrac{۲}{۳}$ $\qquad$ ۳) $\dfrac{۳}{۴}$ $\qquad$ ۴) $\dfrac{۴}{۳}$

مشتق کسر $\qquad y' = \dfrac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g^۲(x)}$

$y'_{(x=۱)} = \dfrac{f'(۱)g(۱) - \cancel{g'(۱)f(۱)}}{g^۲(۱)} = ۳$ (صفر) $\rightsquigarrow \dfrac{(-۴)g(۱)}{g^۲(۱)} = ۳ \longrightarrow \dfrac{-۴}{g(۱)} = ۳ \qquad g(۱) = \dfrac{-۴}{۳}$

تست ۱۷: مقدار مشتق تابع $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x-1}}$ در $x=5$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{16}$ ۲) $\frac{3}{32}$ ۳) $\frac{5}{16}$ ۴) $\frac{5}{32}$

مشتق کسر

$$y'=\frac{(1)(\sqrt{x-1})-(\frac{1}{2\sqrt{x-1}})x}{(\sqrt{x-1})^2=(x-1)} \longrightarrow y'_{(x=5)}=\frac{2-\frac{5}{4}=\frac{3}{4}}{5-1=4}=\frac{3}{16}$$

تست ۱۸: مشتق $f(x)=\frac{1}{1+\frac{1}{x}}$ به چه صورت است؟

۱) $\frac{1}{1-\frac{1}{x}}$ ۲) $\frac{1}{1-\frac{1}{x^2}}$ ۳) $\frac{1}{-\frac{1}{x^2}}$ ۴) $\frac{1}{(x+1)^2}$

ساده کن

$$y=\frac{1}{1+\frac{1}{x}=\frac{x+1}{x}}=\frac{x}{x+1} \qquad y'=\frac{(1)(1)-0}{(x+1)^2}=\frac{1}{(x+1)^2}$$

تست ۱۹: مشتق تابع $f(x)=x\sqrt[3]{\frac{3x+1}{x+2}}$ در نقطهٔ $x=-3$، کدام است؟ (تجربی خارج از کشور ۹۸)

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) $\frac{3}{2}$

$$\begin{cases} y=u.v \\ y'=u'v+v'u \end{cases} \qquad y=\sqrt[3]{u},\quad y'=\frac{u'}{3\sqrt[3]{u^2}}$$

$$y'=(1)\sqrt[3]{\frac{3x+1}{x+2}}+\frac{\frac{3(2)-(1)(1)}{(x+2)^2}}{3\sqrt[3]{\left(\frac{3x+1}{x+2}\right)^2}}\,x \xrightarrow{x=-3} 2+\frac{5}{12}(-3)=2-\frac{5}{4}=\frac{3}{4}$$

تست ۲۰: مشتق عبارت $(\frac{16}{x}-\sqrt[3]{x^2})^2$ به ازای $x=-8$ کدام است؟ (سراسری ۸۸)

۱) ۲ ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) ۱ ۴) -1

$$y=u^n \longrightarrow y'=n\,u'\,u^{n-1}$$

$$y=\left(\frac{16}{x}-x^{\frac{2}{3}}\right)^2 \longrightarrow y'=2\left(-\frac{16}{x^2}-\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}\right)\left(\frac{16}{x}-\sqrt[3]{x^2}\right)$$

$$y'_{(x=-8)}=2\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}=\frac{-3+4}{12}=\frac{1}{12}\right)(-2-4)=-1$$

تست ۲۱: مقدار مشتق تابع با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt[3]{(\frac{2x-x^2}{3x+5})^2}$ در نقطهٔ $x=-2$، کدام است؟ *(سراسری تجربی خارج از کشور ۹۹)*

۱) ۳   ۲) ۴   ۳) ۵   ۴) ۶

تست ۲۲: مشتق تابع با ضابطهٔ $f(x)=(\frac{\sqrt[3]{x^2+2x}}{x^2-x})^3$، در نقطهٔ $x=2$، کدام است؟ *(سراسری تجربی ۹۹)*

۱) $-\frac{3}{4}$ ۲) $-\frac{5}{4}$ ۳) $-\frac{5}{2}$ ۴) $-\frac{15}{4}$

تست ۲۳: فرض کنید $f(x)=\cos^3(2x)+ax^2+b$، $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x}=0$ و $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f'(x)}{x}=2$. مقدار $a+b$ کدام است؟

(سراسری ریاضی ۱۴۰۰)

۱) ۸   ۲) ۶   ۳) ۴   ۴) -8

پاسخ: گزینهٔ «۲» ـ چون $x\to 0$، پس حق داریم از هم‌ارزی $\cos^n(u)\sim 1-\frac{nu^2}{2}$ استفاده کنیم. ابتدا هم‌ارز تابع f را در $x=0$ می‌نویسیم:

$$f(x)=\cos^3(2x)+ax^2+b\sim(1-\frac{3(2x)^2}{2})+ax^2+b=1-6x^2+ax^2+b=(a-6)x^2+b+1$$

ضابطهٔ f' را هم حساب می‌کنیم:

$$f'(x)=2(a-6)x$$

حالا از دو حد داده‌شده، کمک می‌گیریم:

$$1)\ \lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x}=0\Rightarrow\lim_{x\to 0^+}\frac{(a-6)x^2+(b+1)}{x}=0\Rightarrow b+1=0\Rightarrow b=-1$$

اگر $b+1$ صفر نمی‌شد، حاصل حد، بی‌نهایت می‌شد.

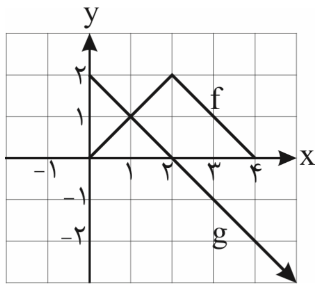
$$۲)\ \lim_{x\to ۰^-} \frac{f'(x)}{x} = ۲ \Rightarrow \lim_{x\to ۰^-} \frac{۲(a-۶)\cancel{x}}{\cancel{x}} = ۲ \Rightarrow ۲(a-۶) = ۲ \Rightarrow a = ۷$$

پس: $a + b = ۷ + (-۱) = ۶$

تست ۲۴: اگر f تابعی درجه دوم و مختصات رأس آن $S(-۱,۲)$ و $f'(۲) = ۴$ باشد، آن‌گاه $f'(-۴)$ کدام است؟

۱) -۴ ۲) -۲ ۳) ۴ ۴) -۱

تست ۲۵: نمودار دو تابع f و g در زیر رسم شده است. حاصل $(f.g)'(۳)$ کدام است؟



۱) صفر

۲) ۱

۳) ۲

۴) -۲

اگر u، عبارتی برحسب x باشد آن‌گاه مشتق $f(u)$ به شکل روبه‌رو محاسبه می‌شود: $y = f(u) \Rightarrow y' = u'f'(u)$

به مثال‌های زیر دقت کنید:

$y = f(\frac{x}{۲})$

$y = f(x^۲)$

$y = f(\sqrt{x})$

$y = f(x^۳ + ۵x)$

می‌توان ثابت کرد که مشتق تابع $f(x) = u^n$ که در آن u عبارتی برحسب x است (یعنی u تو دلش x داره) به صورت زیر حساب می‌شود:

$f(x) = u^n \Rightarrow f'(x) = nu'u^{n-۱}$

مثلاً: $f(x) = (x^۲ - ۳x)^۷ \Rightarrow f'(x) = \underset{\uparrow n}{۷}\underbrace{(۲x-۳)}_{u'}\underbrace{(x^۲-۳x)^۶}_{u^{n-۱}}$

$f(x) = (۲x-۳)^۶ \Rightarrow f'(x) = ۶(۲)(۲x-۳)^۵$

تست ۲۶: در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = (\sqrt{\frac{x+۲}{۲x-۳}})^۳$، حاصل $\lim\limits_{x \to ۲} \frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}$ کدام است؟ *(سراسری ۹۵)*

۱) -۲۱ ۲) -۱۸ ۳) ۱۲ ۴) ۱۵

تست ۲۷: در تابع با ضابطهٔ $f(x) = \frac{۱+\sqrt{x}}{۵-۲x}$، حاصل $\lim\limits_{x \to ۴} \frac{f(x)-f(۴)}{x-۴}$ ، کدام است؟ *(سراسری تجربی ۹۸)*

۱) $\frac{۴}{۹}$ ۲) $\frac{۵}{۱۲}$ ۳) $\frac{۷}{۱۲}$ ۴) $\frac{۵}{۶}$

تست ۲۸: در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\sqrt{\frac{4x+5}{x+3}}$، حاصل $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$ کدام است؟ (سراسری خارج ۹۵)

۱) $\frac{7}{48}$ ۲) $\frac{5}{24}$ ۳) $\frac{7}{24}$ ۴) $\frac{7}{16}$

تست ۲۹: در تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{-x-1}{\sqrt{x}}$، حاصل $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(\frac{1}{4}+h)-f(\frac{1}{4})}{h}$، کدام است؟ (تجربی خارج از کشور ۹۸)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

ساده‌سازی و سپس مشتق‌گیری (ساده سپس)

اگر تابعی قابل ساده‌شدن باشد، می‌توانیم ابتدا آن را ساده کرده سپس از تابع ساده‌شده مشتق بگیریم.

تست ۳۰: مشتق تابع $y=\frac{\sqrt[3]{x^2}+1}{x+\sqrt[3]{x}}$ به ازای $x=1$ کدام است؟

۱) $-\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{1}{9}$ ۴) $-\frac{1}{9}$

تست ۳۱: مشتق تابع $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{x^{۲}-۲x}}{۱+\sqrt{x-۲}}$ در $x=۴$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) صفر ۳) $\dfrac{۱}{۴}$ ۴) ۲

پاسخ: کافی است در صورت کسر از $\sqrt{x}$ فاکتورگیری کنیم:

$$f(x)=\frac{\sqrt{x}\,\cancel{(۱+\sqrt{x-۲})}}{\cancel{۱+\sqrt{x-۲}}}=\sqrt{x}$$

حالا از $f(x)=\sqrt{x}$ مشتق می‌گیریم:

$$f'(x)=\frac{۱}{۲\sqrt{x}}\Rightarrow f'(۴)=\frac{۱}{۲\sqrt{۴}}=\frac{۱}{۴}$$

تست ۳۲: مشتق تابع $f(x)=\dfrac{x+\sqrt[۳]{x^{۲}-x^{۳}}}{\sqrt[۳]{x}+\sqrt[۳]{۱-x}}$ کدام است؟

۱) $\dfrac{۲}{۳\sqrt[۳]{x}}$ ۲) $\dfrac{۲x}{۳\sqrt[۳]{x^{۲}}}$ ۳) $\dfrac{۲}{۳\sqrt[۳]{x^{۲}}}$ ۴) $\dfrac{۲x}{۳\sqrt[۳]{x}}$

پاسخ: کافی است در صورت کسر از $\sqrt[۳]{x^{۲}}$ فاکتورگیری کنیم (یعنی به $\sqrt[۳]{x^{۲}}$ تقسیم کنیم):

$$y=\frac{\sqrt[۳]{x^{۲}}\,\cancel{(\sqrt[۳]{x}+\sqrt[۳]{۱-x})}}{\cancel{\sqrt[۳]{x}+\sqrt[۳]{۱-x}}}=\sqrt[۳]{x^{۲}}=x^{\frac{۲}{۳}}$$

حالا از ضابطهٔ ساده‌شده مشتق‌گیری می‌کنیم:

$$y'=\frac{۲}{۳}x^{\frac{۲}{۳}-۱}=\frac{۲}{۳}x^{-\frac{۱}{۳}}=\frac{۲}{۳x^{\frac{۱}{۳}}}=\frac{۲}{۳\sqrt[۳]{x}}$$

تست ۳۳: مشتق تابع $y=(\sqrt{x+۴}-\sqrt{x+۱})^{۳}(\sqrt{x+۴}+\sqrt{x+۱})^{۲}$ در $x=۰$ کدام است؟

۱) $\dfrac{۹}{۴}$ ۲) $\dfrac{۲۷}{۴}$ ۳) $-\dfrac{۲۷}{۴}$ ۴) $-\dfrac{۹}{۴}$

تست ۳۴: اگر $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+۱}}{x+۲}$ و $g(x)=\dfrac{x^{۲}+۴x+۴}{(x+۱)\sqrt{x+۱}}$ باشند، حاصل $f'(x)g(x)+g'(x)f(x)$ به ازای $x=۱$ کدام است؟

۱) $-\dfrac{۱}{۴}$ ۲) $\dfrac{۱}{۴}$ ۳) $\dfrac{۱}{۲\sqrt{۲}}$ ۴) $-\dfrac{۱}{۲\sqrt{۲}}$

تست ۳۵: اگر $f(x)=\dfrac{x^۳+x^۲+۱}{x+۱}$ و $g(x)=\dfrac{x+۲}{x+۱}$ باشد، حاصل $f'(x)-g'(x)$ برابر است با: $(x\neq -۱)$

۱) $-۲x$ ۲) $\dfrac{۲x^۲}{x+۱}$ ۳) $\dfrac{x^۲+۱}{x+۱}$ ۴) $۲x$

تست ۳۶: اگر $f(x)=(\sqrt{۱+x^۲}-x)^۵$ و $g(x)=\dfrac{۱}{(\sqrt{۱+x^۲}+x)^۵}$، مقدار $f'(x)g(x)-f(x)g'(x)$ کدام است؟

۱) ۱- ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ۲

تست ۳۷: اگر $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{x+\sin x}$ و $g(x)=\dfrac{x^۲+\sin^۲ x+۲x\sin x}{x+۱}$، آن‌گاه $۲ff'g+g'f^۲$ به ازای $x=۱$ کدام است؟

۱) $\dfrac{۱}{۲}$ ۲) $\dfrac{۱}{۴}$ ۳) $-\dfrac{۱}{۴}$ ۴) ۱

پاسخ: اگر توجه کنید $۲ff'g+g'f^۲$ همان مشتق $f^۲.g$ است، پس:

$$y=(f^۲.g)'=((\frac{\sqrt{x}}{x+\sin x})^۲.\frac{(x+\sin x)^۲}{x+۱})'=(\frac{x}{(x+\sin x)^۲}.\frac{(x+\sin x)^۲}{x+۱})'=(\frac{x}{x+۱})'=\frac{۱}{(x+۱)^۲}\overset{x=۱}{=\!=}\frac{۱}{۴}$$

تست ۳۸: اگر $f(x)=\dfrac{x^۲+x+۱}{x+۱}$ باشد، مشتق تابع $g(x)=۲xf(x)+(x^۲-۱)f'(x)$ در $x=۴$ کدام است؟ (قلم‌چی ریاضی ۹۹)

۱) ۱۲ ۲) ۱۸ ۳) ۲۴ ۴) ۴۸

پاسخ: گزینهٔ «۳»

$$g(x)=((x^۲-۱)f(x))'$$

$$(x^۲-۱)f(x)=(x^۲-۱)(\frac{x^۲+x+۱}{x+۱})=(x-۱)(x^۲+x+۱)=x^۳-۱$$

$$\Rightarrow\ g(x)=(x^۳-۱)'=۳x^۲\ \Rightarrow\ g'(x)=۶x\ \Rightarrow\ g'(۴)=۲۴$$

بررسی مشتق در نقطه‌ی $x=a$ در توابعی که به ازای نقطه‌ی $x=a$، عاملِ صفرکننده دارند

در توابع به صورت $f(x)=g(x)\times h(x)$ در صورتی که $g(a)=0$ باشد، برای محاسبه‌ی $f'(a)$ کافیست فقط از تابع $g(x)$ مشتق گرفته و آن را در $h(x)$ ضرب کنیم. در واقع برای محاسبه‌ی $f'(a)$ باید از عامل صفرشونده مشتق گرفته و آن را در بقیه عوامل ضرب کنیم.

مثال ۳۹:

$$y=(x^{۲}-۲x)(x+۱)^{۳}(۲x-۵)^{۷} \qquad y'(۲)=?$$

$$y=(x-۱)(x-۲)\dots(x-۸) \qquad y'(۲)=?$$

تست ۴۰: مشتق تابع $f(x)=\frac{(x-۱)\sqrt[۵]{۳x-۲}}{(۵x-۳)^{۴}}$ در نقطه‌ی $x=۱$ کدام است؟ *(سراسری ریاضی)*

۱) $\frac{۱}{۱۶}$ ۲) $\frac{۱}{۸}$ ۳) $\frac{۳}{۴۰}$ ۴) $\frac{۵}{۱۶}$

تست ۴۱: اگر $f(x)=(x^{۲}-x-۲)\sqrt[۳]{x^{۲}-۷x}$ باشد، حاصل $\lim\limits_{h\to ۰}\frac{f(-۱+h)-f(-۱)}{h}$ کدام است؟ *(سراسری ریاضی ۹۲)*

۱) -۶ ۲) -۳ ۳) $-\frac{۳}{۲}$ ۴) $-\frac{۳}{۴}$

تست ۴۲: اگر $f(x)=\frac{(x+1)h(x)}{(2x+1)h(2x+1)}$ باشد، $f'(-1)$ کدام است؟ $(h(-1)\neq 0)$ (سراسری تجربی)

۱) ۲- ۲) ۱- ۳) ۱ ۴) ۲

تست ۴۳: مشتق تابع $f(x)=\frac{10x}{\sqrt{5+x}+\sqrt{5-x}}$ در $x=0$ کدام است؟ (قلم‌چی ریاضی ۹۹)

۱) $\sqrt{10}$ ۲) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ ۳) ۵ ۴) $\sqrt{5}$

پاسخ: گزینهٔ «۴» ـ ابتدا ضابطهٔ تابع را ساده‌تر می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{10x}{\sqrt{5+x}+\sqrt{5-x}}\left(\frac{\sqrt{5+x}-\sqrt{5-x}}{\sqrt{5+x}-\sqrt{5-x}}\right)=\frac{10x(\sqrt{5+x}-\sqrt{5-x})}{2x} \Rightarrow f(x)=5(\sqrt{5+x}-\sqrt{5-x})$$

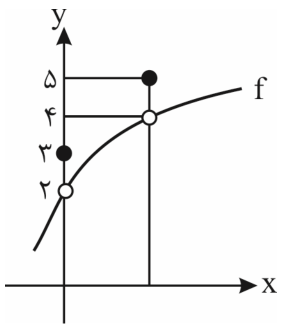
$$\Rightarrow f'(x)=5\left(\frac{1}{2\sqrt{5+x}}+\frac{1}{2\sqrt{5-x}}\right) \Rightarrow f'(0)=5\left(\frac{1}{2\sqrt{5}}+\frac{1}{2\sqrt{5}}\right)=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$$

روش دوم: اگر $u(x_0)=0$ و $v(x_0)\neq u(x_0)$ باشد، با فرض مشتق‌پذیری تابع u در $x=x_0$، برای مشتق تابع $h=u.v$ در $x=x_0$ می‌توانیم بنویسیم: $h'(x_0)=u'(x_0).v(x_0)$

یعنی کافی است از عامل صفرکننده، مشتق بگیریم. با توجه به این نکته داریم:

$$f'(0)=\frac{10}{\sqrt{5+0}+\sqrt{5-0}}=\frac{10}{2\sqrt{5}}=\sqrt{5}$$

تست ۴۴: با توجه به نمودار تابع f در شکل روبه‌رو، اگر $g(x)=(x^2-1)f(x-1)$ باشد، حاصل $g'(1)$ کدام است؟



۱) ۱۰
۲) ۸
۳) ۶
۴) ۴

مشتق تابع مرکب

اگر تابع g در x و تابع f در $g(x)$ مشتق‌پذیر باشند، آن‌گاه تابع fog در x مشتق دارد و داریم:

$$y = f(g(x)) \Rightarrow y' = g'(x)f'(g(x))$$

و به طور مشابه برای gof داریم:

$$y = g(f(x)) \Rightarrow y' = f'(x)g'(f(x))$$

که در این حالت باید، تابع f در x و تابع g در $f(x)$ مشتق‌پذیر باشد.

مثال ۴۵ : اگر $f(x) = x^۲ + x$ و $g(x) = \sqrt{x+۲}$، مشتق تابع $y = (fog)(x)$ را نقطهٔ $x = ۷$ حساب کنید.

پاسخ:

$$y = f(g(x)) \Rightarrow y' = g'(x)f'(g(x))$$

الان باید مشتق f و g را پیدا کنیم و در ضابطهٔ $f'(x)$ به جای xها، $g(۷)$ها را قرار دهیم، ببینید:

$$y' = g'(x)f'(g(x)) \overset{x=۷}{=\!=} g'(۷)f'(g(۷))$$

$$\begin{cases} g(x) = \sqrt{x+۲} \Rightarrow g'(x) = \dfrac{۱}{۲\sqrt{x+۲}} \xrightarrow{x=۷} g'(۷) = \dfrac{۱}{۲\sqrt{۹}} = \dfrac{۱}{۶} \\ \begin{cases} g(۷) = \sqrt{۷+۲} = \sqrt{۹} = ۳ \\ f'(x) = ۲x+۱ \end{cases} \Rightarrow f'(g(۷)) = f'(۳) = ۲(۳)+۱ = ۷ \end{cases}$$

پس:

$$y' = g'(۷)f'(g(۷)) = \frac{۱}{۶} \times ۷ = \frac{۷}{۶}$$

تست ۴۶: اگر $\lim\limits_{x \to ۲} \dfrac{g(x)-g(۲)}{x-۲} = \dfrac{۳}{۲}$ و $f(x) = \sqrt{۵-x^۲}$ باشند، آن‌گاه $(gof)'(۱)$ کدام است؟ *(سراسری ریاضی خارج از کشور)*

۱) $-\dfrac{۳}{۴}$ ۲) $-\dfrac{۱}{۲}$ ۳) $\dfrac{۱}{۲}$ ۴) $\dfrac{۳}{۲}$

تست ۴۷: اگر $f'(x) = \dfrac{۱}{x}$، مشتق تابع $f(x + \sqrt{۱+x^۲})$ کدام است؟ *(سراسری ریاضی خارج از کشور)*

۱) $-x + \sqrt{۱+x^۲}$ ۲) $x - \sqrt{۱+x^۲}$ ۳) $\dfrac{۱}{\sqrt{۱+x^۲}}$ ۴) $\sqrt{۱+x^۲}$

تست ۴۸: اگر $g(x)=\frac{2x+1}{x-1}$ و $(fog)'(2)=6$ باشد، $f'(5)$ کدام است؟ (سراسری تجربی ۹۸)

۱) ۲-   ۲) ۱-   ۳) ۲   ۴) ۳

تست ۴۹: اگر $f(x)=\frac{x^3-2}{1+x^3}$ و $g(x)=\sqrt[3]{x-1}$ باشد، حاصل $f'(g(x))g'(x)$ کدام است؟ (ریاضی ۹۲)

۱) $\frac{3}{x}$ ۲) $\frac{3}{x^2}$ ۳) $\frac{1}{3x}$ ۴) $\frac{x-3}{x^2}$

تست ۵۰: اگر تابع f در $x=4$ مشتق‌پذیر و $\lim\limits_{x\to 4}\frac{f(x)+7}{x-4}=\frac{-3}{2}$ آن‌گاه مشتق $\frac{f(2x)}{x}$ در $x=2$ کدام است؟ (سراسری ریاضی ۹۶)

۱) $-\frac{1}{4}$ ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{1}{2}$

مشتق توابع شامل قدرمطلق

برای محاسبه‌ی مشتق و یا مشتق راست و یا مشتق چپ این نوع از توابع در نقطه‌ی دلخواه $x=a$ ابتدا باید عبارت داخل قدرمطلق را در همسایگی آن نقطه تعیین علامت کنیم. حالا اگه توش به ازای اون نقطه مثبت بشه، خودش میاد بیرون و اگه توش به ازای اون نقطه منفی بشه قرینه‌اش میاد بیرون و حالا وقت مشتق‌گیریه. مثلاً مشتق تابع $f(x)=|2x^3-5x|$ به ازای $x=1$ این‌طوری به دست میاد: در

همسایگی نقطه‌ی $x=۱$ توی قدرمطلق منفی می‌شه پس قرینه‌اش میاد بیرون:

$$f(x)=۵x-۲x^{۳}$$

حالا مشتق می‌گیریم و توی مشتق، $x=۱$ رو جاگذاری می‌کنیم:

$$f'(x)=۵-۶x^{۲} \Rightarrow f'(۱)=۵-۶=-۱$$

تست ۵۱: مشتق تابع $f(x)=|x-۱|+|x-۲|+\cdots+|x-۵۰|$ در نقطهٔ $x=۷\sqrt{۳}$ برابر کدام است؟

۱) -۲۸　　۲) -۲۷　　۳) -۲۶　　۴) -۲۵

تست ۵۲: اگر $\lim\limits_{x\to ۲}\dfrac{f(x)-f(۲)}{x-۲}=-\dfrac{۱}{۳}$، مشتق $f(\sqrt{|x|+۳})$ در نقطه‌ی $x=-۱$ کدام است؟

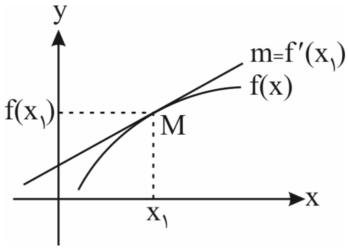
۱) $\dfrac{۱}{۶}$　　۲) $\dfrac{۱}{۱۲}$　　۳) $-\dfrac{۱}{۶}$　　۴) $-\dfrac{۱}{۱۲}$

تست ۵۳: اگر $f(x)=\dfrac{۴}{۵}x-\dfrac{۱}{۵}|x|$ و $g(x)=۴x+|x|$ باشند، مشتق تابع fog کدام است؟ (سراسری ۹۴)

۱) ۲　　۲) ۳　　۳) ۴　　۴) مشتق ندارد.

درس ۳: خط مماس

خط مماس بر منحنی از یک نقطه روی آن



گفتیم مقدار مشتق تابع $\mathbf{f(x)}$ در نقطه‌ی $\mathbf{x_۱}$ برابر است با شیب خط مماس بر منحنی تابع $\mathbf{f}$ در آن نقطه.

پس برای نوشتن معادله‌ی خط مماس بر منحنی $\mathbf{y=f(x)}$ در نقطه‌ای مانند $\mathbf{M}$ به طول $\mathbf{x_۱}$ کافی است $\mathbf{m=f'(x_۱)}$ را پیدا کنیم و معادله‌ی خط مماس را با استفاده از رابطه‌ی $\mathbf{y-f(x_۱)=f'(x_۱)(x-x_۱)}$ بنویسیم.

به نظر می‌رسد حرف دیگری نمانده ولی بگذارید برای آن که یاد بگیرید معادله‌ی مماس را سریع‌تر بنویسید یک مثال حل کنیم. می‌خواهیم معادله‌ی خط مماس بر منحنی تابع $\mathbf{f(x)=\frac{۲x+۱}{x-۲}}$ را در نقطه‌ای به طول ۴ واقع بر منحنی بنویسیم. اول $\mathbf{x=۴}$ را می‌گذاریم توی ضابطه‌ی تابع و عرض نقطه را پیدا می‌کنیم. $\mathbf{f(۴)=\frac{۹}{۲}}$ پس مختصات نقطه شد $\mathbf{(۴,\frac{۹}{۲})}$ حالا مشتق می‌گیریم $\mathbf{y'=\frac{-۵}{(x-۲)^۲}}$، $\mathbf{x=۴}$ را می‌گذاریم توی مشتق تا شیب مماس به دست آید: $\mathbf{m=\frac{-۵}{۴}}$ حالا برای نوشتن معادله‌ی مماس دو تا کار می‌توانید بکنید:

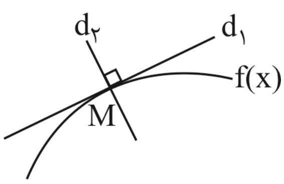
۱) از همان فرمول بالا استفاده کنید: $\mathbf{y-\frac{۹}{۲}=-\frac{۵}{۴}(x-۴) \Rightarrow y=-\frac{۵}{۴}x+۵+\frac{۹}{۲} \Rightarrow y=-\frac{۵}{۴}x+\frac{۱۹}{۲} \Rightarrow ۴y+۵x=۳۸}$

علت این که معادله را ساده کردیم، این است که در گزینه‌ها معمولاً با این شکل معادله سروکار دارید.

۲) یک راه دیگر داریم که معادله‌ی ساده‌شده‌ی خط را سریع‌تر بنویسیم. (این راه کاملاً اختیاری است.)

فرض کنید مختصات نقطه به صورت $\mathbf{(\alpha,\beta)}$ و شیب خط برابر $\mathbf{m=\frac{a}{b}}$ است. معادله‌ی خط را به صورت $\mathbf{by-ax=?}$ بنویسید و مختصات $\mathbf{(\alpha,\beta)}$ را در آن قرار دهید تا طرف دیگر تساوی به دست آید.

در این‌جا مختصات نقطه بود $\mathbf{(۴,\frac{۹}{۲})}$ و شیب هم $\mathbf{m=-\frac{۵}{۴}}$ پس: $\mathbf{۴y+۵x=? \Rightarrow \overbrace{(۴(\frac{۹}{۲})+۵(۴)=۳۸)}^{\text{می‌شود در ذهن انجام بدهید}} \Rightarrow ۴y+۵x=۳۸}$



خط قائم بر منحنی $\mathbf{f(x)}$ در نقطه‌ی $\mathbf{M}$، خطی است که بر خط مماس بر منحنی در آن نقطه عمود باشد. پس شیب خط قائم برابر $\mathbf{\frac{-۱}{m_{\text{مماس}}}}$ یا $\mathbf{-\frac{۱}{f'(x_۱)}}$ است. بنابراین برای نوشتن معادله‌ی خط قائم هم مثل نوشتن معادله‌ی خط مماس عمل می‌کنیم: اول مختصات نقطه، بعد مشتق و پیدا کردن شیب مماس، بعد پیدا کردن شیب خط قائم و در آخر هم نوشتن معادله‌ی خط قائم.

تست ۵۴: خط مماس بر منحنی تابع $\mathbf{f(x)=\frac{۵x-۴}{\sqrt{x}}}$ در نقطهٔ $\mathbf{x=۴}$ واقع بر آن، محور $\mathbf{y}$ها را با کدام عرض، قطع می‌کند؟ *(سراسری ریاضی ۹۹)*

۱) -۴ ۲) -۱ ۳) ۲ ۴) ۳

تست ۵۵: خط مماس بر منحنی به معادله‌ی $y=\frac{۱}{\sqrt[۳]{۴x}}$ در نقطه‌ی $(۲,\frac{۱}{۲})$، محور yها را با کدام عرض قطع می‌کند؟ (خارج ۸۹)

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۵}{۶}$ ۳) $\frac{۷}{۶}$ ۴) $\frac{۴}{۳}$

تست ۵۶: خط مماس بر منحنی به معادله‌ی $y=\frac{x^۲}{x-۱}$ در نقطه‌ای به طول ۲ واقع بر آن، محور yها را با کدام عرض قطع می‌کند؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴ *(سراسری ریاضی خارج از کشور)*

تست ۵۷: خط مماس بر منحنی به معادله‌ی $y=x^۳-x^۲$ در نقطه‌ای به طول $x=۱$ واقع بـر آن، منحنـی را در نقطـه‌ی دیگـر A قطـع می‌کند. عرض A کدام است؟ (خارج ۸۷)

۱) -۳ ۲) -۲ ۳) ۲ ۴) ۳

تعیین نقاطی از منحنی که مماس بر منحنی در آن نقطه دارای شیب معلوم باشد

برای تعیین این نقاط از منحنی مشتق گرفته و مشتق را برابر شیب خط مماس قرار می‌دهیم.

مثال ۵۸: مماس بر منحنی $y = x^۳ - ۳x^۲ - ۹x$ در چه نقاطی موازی محور xها است؟

تست ۵۹: خط به معادلهٔ $y = ۳x - ۲$ در نقطهٔ $x = ۲$ بر منحنی پیوستهٔ $y = f(x)$ مماس است. حاصل $\lim\limits_{x \to ۲} \frac{f^۲(x) - ۴f(x)}{x - ۲}$ کدام است؟ *(سراسری ریاضی ۹۵)*

۱) ۳ ۲) ۶ ۳) ۱۲ ۴) ۱۵

تست ۶۰: در تابع با ضابطهٔ $f(x) = \frac{۴x - ۵}{x + ۱}$ و دامنهٔ $[۰,۸]$ خط مماس بر نمودار آن موازی پاره‌خطی است که ابتدا و انتهای منحنی را به هم وصل می‌کند. این خط مماس، محور yها را با کدام عرض قطع می‌کند؟ *(خارج تجربی ۹۸)*

۱) ۲- ۲) ۱/۵- ۳) ۱- ۴) ۰/۵-

اگر یک خط و یک منحنی بر هم مماس باشند (طول نقطه‌ی تماس را نداریم) معادله‌ی تلاقی آن‌ها ریشه‌ی مکرر (معمولاً مضاعف) می‌دهد. در این‌جا دو حالت زیر می‌تواند رخ دهد:

۱) اگر معادله‌ی تلاقی، درجه دوم باشد، باید $\Delta = ۰$ قرار دهیم.

تست ۶۱: اگر خط $y = ۴x + a$ بر منحنی $y = x^۲ + ۲x + ۳$ مماس باشد، مقدار a کدام است؟ *(مشابه خارج تجربی ۹۷)*

۱) ۱ ۲) ۱- ۳) ۲ ۴) ۲-

پاسخ: گزینه‌ی «۳» ـ روش تلاقی: معادله‌ی خط و منحنی را قطع می‌دهیم و شرط وجود ریشه‌ی مضاعف را می‌نویسیم:

$$\begin{cases} y = x^۲ + ۲x + ۳ \\ y = ۴x + a \end{cases} \Rightarrow x^۲ + ۲x + ۳ = ۴x + a \Rightarrow x^۲ - ۲x + (۳ - a) = ۰ \Rightarrow \Delta = ۰ \Rightarrow ۴ - ۴(۳ - a) = ۰$$

$$\Rightarrow -۸ + ۴a = ۰ \Rightarrow a = ۲$$

۲) مشتق هر دو را مساوی می‌گذاریم و معادله‌ی جدید را حل می‌کنیم و x را به دست می‌آوریم. به این x، طول نقطه‌ی تماس می‌گویند. این x را در منحنی و خط جاگذاری می‌کنیم و عرض‌هایشان را مساوی قرار می‌دهیم. روش دوم سؤال قبل رو ببینید:

$$\begin{cases} y = x^۲ + ۲x + ۳ \Rightarrow y' = ۲x + ۲ \\ y = ۴x + a \Rightarrow y' = ۴ \end{cases} \xrightarrow{\text{مشتق‌هارومساوی‌بذار}} ۲x + ۲ = ۴ \Rightarrow ۲x = ۲ \Rightarrow x = ۱$$

به $x = ۱$ طول نقطه‌ی تماس می‌گویند.

حالا $x = ۱$ رو توی منحنی و خط جاگذاری کن و عرض‌هاشون رو مساوی قرار بده:

$$\begin{cases} x = ۱ \xrightarrow{\text{درمنحنی}} y = ۱ + ۲ + ۳ = ۶ \\ x = ۱ \xrightarrow{\text{درخط}} y = ۴ + a \end{cases} \xrightarrow{\text{عرض‌هامساوی}} ۶ = ۴ + a \Rightarrow \boxed{a = ۲} \text{ خلاص}$$

روش ۲ همیشه کارآمده ولی روش ۱ یعنی تلاقی و سپس $\Delta = ۰$ وقتی به درد می‌خوره که معادله‌ی تلاقی درجه ۲ باشه.

تست ۶۲: به ازای کدام مقدار b خط به معادله‌ی $y = -۳x + b$ بر نمودار تابع $y = x^۳ - ۳x^۲$ مماس است؟

۱) ۲- ۲) ۱- ۳) ۱ ۴) ۲

پاسخ: گزینه‌ی «۳» ـ چون با یک تابع درجه سوم روبه‌رو هستیم از مشتق استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases} y = x^۳ - ۳x^۲ \Rightarrow y' = ۳x^۲ - ۶x \\ y = -۳x + b \Rightarrow y' = -۳ \end{cases} \xrightarrow{\text{مشتق‌هارومساوی‌بذار}} ۳x^۲ - ۶x = -۳ \Rightarrow ۳x^۲ - ۶x + ۳ = ۰$$

$$\Rightarrow x^۲ - ۲x + ۱ = ۰ \Rightarrow (x - ۱)^۲ = ۰ \Rightarrow x = ۱ \text{ طول نقطه‌ی تماس}$$

$$\begin{cases} x = ۱ \xrightarrow{\text{درمنحنی}} y = ۱ - ۳ = -۲ \\ x = ۱ \xrightarrow{\text{درخط}} y = -۳ + b \end{cases} \xrightarrow{\text{عرض‌هامساوی}} -۲ = -۳ + b \Rightarrow b = ۱ \text{ خلاص}$$

تست ۶۳: معادلهٔ خط مماس بر نمودار تابع $y = \dfrac{x^۲ + mx + ۱}{x + ۳}$ در نقطه‌ای به طول واحد بر روی نمودار، به صورت $۴y - ۳x = n$ است. مقدار $m + n$ چه‌قدر است؟ *(سراسری ۱۴۰۱)*

۱) ۳- ۲) ۲- ۳) ۲ ۴) ۳

ویژه علاقه‌مندان:

تست ۶۴: دو نقطه بر منحنی $y=\frac{x-۳}{x-۱}$ وجود دارد که مماس در آن نقاط موازی خط $y=۲x$ است. فاصلهٔ این دو نقطه برابر چقدر است؟

۱) $\sqrt{۵}$ ۲) $۲\sqrt{۵}$ ۳) $۲\sqrt{۲}$ ۴) $\sqrt{۲}$

تست ۶۵: منحنی $y=\frac{x^۴+mx+۳}{x+۲}$ بر محور xها مماس است. مقدار m کدام است؟

۱) -۱ ۲) -۲ ۳) -۳ ۴) -۴

تست ۶۶: حداکثر چند خط موازی محور xها می‌توان بر تابع $f(x)=ax^۴+bx^۲+c$ مماس کرد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

تست ۶۷: خط مماس بر منحنی $y=x^۳+ax^۲-۳x$ در نقطه‌ای به طول $x=۱$ واقع بر آن، بر منحنی $y=x^۲$ نیز مماس است. مقدار a کدام می‌تواند باشد؟

۱) -۱ ۲) -۲ ۳) -۳ ۴) -۴

درس ۴: مشتق‌پذیری و پیوستگی

اگر در تابع پیوسته $f(x)$ حاصل حد $\lim\limits_{x\to x_1}\dfrac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}$ وجود داشته باشد (یعنی برابر عدد مشخصی شود) آن را مشتق تابع $f(x)$ در نقطه‌ی x_1 می‌نامیم و با $f'(x_1)$ نشان می‌دهیم. یعنی $f'(x_1)=\lim\limits_{x\to x_1}\dfrac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}$ و مقدارش برابر شیب خط مماس بر منحنی تابع $f(x)$ در نقطه‌ی x_1 است.

اگر این حد را از سمت راست حساب کنیم می‌گوییم مشتق راست تابع را در نقطه‌ی x_1 پیدا کرده‌ایم و آن را با $f'_+(x_1)$ نشان می‌دهیم:

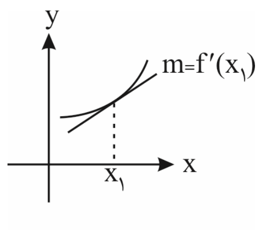
$$f'_+(x_1)=\lim_{x\to x_1^+}\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}$$

و اگر این حد را از سمت چپ حساب کنیم می‌گوییم مشتق چپ تابع را در نقطه‌ی x_1 پیدا کرده‌ایم و آن را با $f'_-(x_1)$ نشان می‌دهیم:

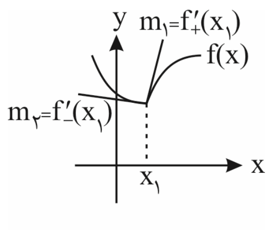
$$f'_-(x_1)=\lim_{x\to x_1^-}\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}$$

وقتی مقدار حد راست و حد چپ (یعنی همان مشتق راست و مشتق چپ) هر دو موجود و با هم برابر باشند، می‌گوییم تابع در نقطه‌ی x_1 مشتق‌پذیر است و اگر هر کدام از حدهای بالا وجود نداشته باشد یا $\pm\infty$ شود و یا $f'_+(x_1)\neq f'_-(x_1)$ باشد، می‌گوییم تابع در نقطه‌ی x_1 مشتق‌پذیر نیست.

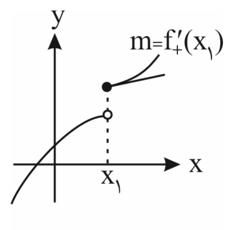
گفتیم که مقدار مشتق تابع در یک نقطه همان شیب خط مماس بر منحنی تابع است. حالا به شکل‌های زیر نگاه کنید:



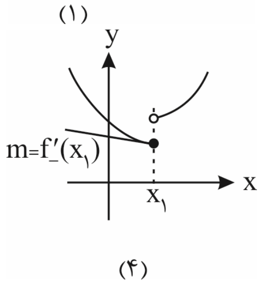
(۱)



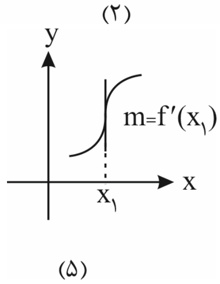
(۲)



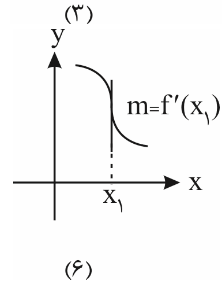
(۳)



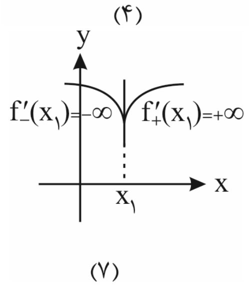
(۴)



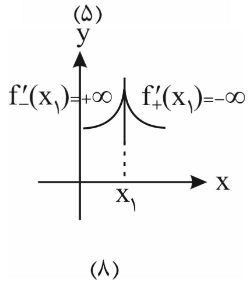
(۵)



(۶)



(۷)



(۸)

۱) تابع در نقطه‌ی x_1 پیوسته است و مقدار مشتق راست (شیب نیم‌مماس راست) و مشتق چپ (شیب نیم‌مماس چپ) با هم برابرند. دو نیم‌مماس (یعنی دو نیم‌خط مماس) در امتداد یکدیگرند و تابع در نقطه‌ی x_1 مشتق‌پذیر و دارای خط مماس است.

۲) تابع در نقطه‌ی x_1 پیوسته است و مقدار مشتق راست و چپ با هم فرق می‌کند. تابع هم مشتق راست دارد و هم مشتق چپ ولی

مشتق‌پذیر نیست. نیم‌مماس راست و چپ در امتداد هم نیستند و با هم زاویه می‌سازند و به همین خاطر به این نقطه می‌گوییم نقطه‌ی زاویه‌دار یا نقطه‌ی گوشه‌ای.

۳) تابع در نقطه‌ی x_1 فقط از سمت راست پیوسته و دارای مشتق راست است، پس فقط نیم‌مماس راست داریم و تابع در نقطه‌ی x_1 مشتق‌پذیر نیست.

۴) تابع در نقطه‌ی x_1 فقط از سمت چپ پیوسته و دارای مشتق چپ است، پس فقط نیم‌مماس چپ داریم و تابع در نقطه‌ی x_1 مشتق‌پذیر نیست.

۵) تابع در نقطه‌ی x_1 پیوسته است و مشتق راست و چپ تابع در این نقطه هر دو برابر $+\infty$ هستند و تابع در این نقطه مشتق‌پذیر نیست اما خط مماس قائم دارد. به این نقاط می‌گوییم عطف قائم.

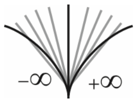
۶) تابع در نقطه‌ی x_1 پیوسته است و مشتق راست و چپ تابع در این نقطه هر دو برابر $-\infty$ هستند و تابع در این نقطه مشتق‌پذیر نیست اما خط مماس قائم دارد. به این نقاط می‌گوییم عطف قائم.

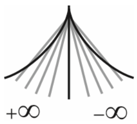
۷) تابع در نقطه‌ی x_1 پیوسته است و مشتق چپ تابع برابر $-\infty$ و مشتق راست برابر $+\infty$ است. تابع در این نقطه مشتق‌پذیر نیست و به این نقطه می‌گوییم نقطه‌ی بازگشتی.

۸) تابع در نقطه‌ی x_1 پیوسته است و مشتق چپ برابر $+\infty$ و مشتق راست برابر $-\infty$ است. تابع در این نقطه مشتق‌پذیر نیست و به این نقطه می‌گوییم نقطه‌ی بازگشتی.

در تمام حالت‌های بالا تابع به شرطی در نقطه‌ی x_1 دارای خط مماس است که در آن پیوسته باشد. به عبارت دیگر تابع از هر سمت که پیوسته نباشد حتماً از همان سمت خط مماس ندارد. یعنی پیوستگی شرط لازم و نه کافی برای مشتق‌پذیری است.

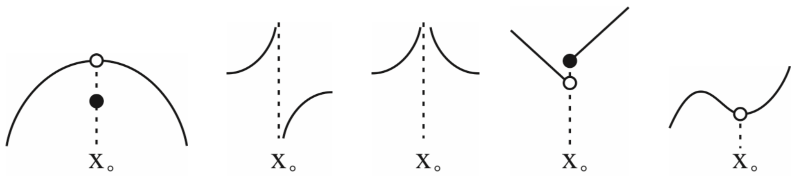
برای تعیین علامت ∞ وقتی که خط مماس قائم داریم کافی است از نقاط نزدیک به نقطه‌ی مزبور به آن وصل کنیم و به سمت آن نقطه میل کنیم. علامت شیب خط قاطع (که حالت حدی‌اش می‌شود شیب خط مماس) همان علامت ∞ است.



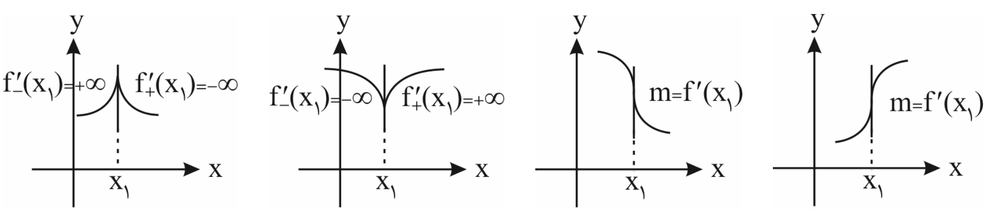


جمع‌بندی:

۱) اگر f در یک نقطه ناپیوسته باشد، در آن نقطه مشتق‌پذیر نیست.



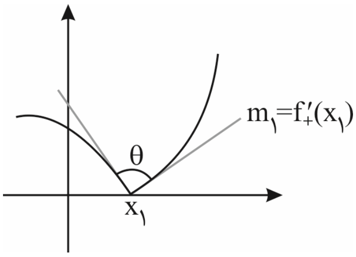
۲) اگر f در یک نقطه پیوسته باشد و مماس قائم داشته باشد (و یا نیم‌مماس قائم) در آن نقطه مشتق‌پذیر نیست. (مشتق چپ و راست، هر دو نامتناهی)

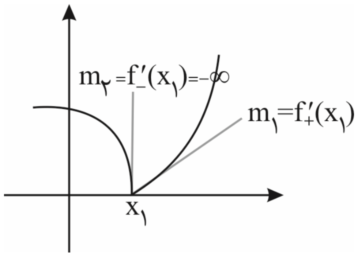


۳) اگر f در یک نقطه پیوسته باشد و مشتق چپ و راست در آن نقطه:

الف) هر دو موجود (متناهی) ولی نابرابر باشند (نقطهٔ گوشه‌ای).

ب) یکی متناهی و دیگری نامتناهی باشد (نقطهٔ گوشه‌ای).





بیایید مواردی را که گفتم در مورد ضابطه‌ها هم بررسی کنیم.

شرط اصلی مشتق‌پذیری، پیوستگی است. یعنی باید $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$ باشد. اگر f در $x=a$ پیوسته نباشد، قطعاً مشتق‌پذیر هم نیست.

مثلاً $y=[x]$ و $y=\begin{cases} x+1 & x\geq 1 \\ x^2 & x<1 \end{cases}$ در $x=1$ مشتق‌پذیر نیستند چون در این نقطه پیوسته نیستند.

پیوستگی راست شرط لازم برای وجود مشتق راست و پیوستگی چپ شرط لازم برای وجود مشتق چپ است. به عبارتی تابع از هر طرف که پیوسته نباشد، از همان طرف مشتق‌پذیر نخواهد بود.

مشتق توابع چندضابطه‌ای در نقاط مرزی

در توابع چندضابطه‌ای برای تعیین مشتق تابع در نقطه مرزی ابتدا پیوستگی تابع را در این نقطه بررسی می‌کنیم. تابع از هر طرف که پیوسته نباشد، مشتق‌پذیر هم نیست. اگر تابع در نقطه مرزی پیوسته بود، از هر یک از ضابطه‌ها به طور مستقل مشتق گرفته و مشتق چپ و راست را جداگانه محاسبه می‌کنیم. اگر مشتق چپ و راست با هم برابر باشند، تابع در نقطه مرزی مشتق‌پذیر خواهد بود.

در تمام تابع‌ها نقطه‌ی $x=1$ را بررسی می‌کنیم:

$$1)\ f(x)=\begin{cases} x^3+2x & x\geq 1 \\ x^2+3x-1 & x<1 \end{cases} \Rightarrow \text{پیوستگی} \begin{cases} \text{مقدار}=3 \\ \text{حدراست}=3 \Rightarrow f'_+(1)=3x^2+2=5 \\ \text{حدچپ}=3 \Rightarrow f'_-(1)=2x+3=5 \end{cases} \Rightarrow \text{مشتق‌پذیر}$$

تابع هم از راست پیوسته است و هم از چپ، از ضابطه‌های راست و چپ به طور مستقیم مشتق گرفتیم و در آخر چون مشتق راست و چپ برابر شدند، پس تابع مشتق‌پذیر است.

$$2)\ f(x)=\begin{cases} x^4+x & x\geq 1 \\ x^3+x & x<1 \end{cases} \Rightarrow \text{پیوستگی} \begin{cases} \text{مقدار}=2 \\ \text{حدراست}=2 \Rightarrow f'_+(1)=4x^3+1=5 \\ \text{حدچپ}=2 \Rightarrow f'_-(1)=3x^2+1=4 \end{cases} \Rightarrow \text{مشتق‌ناپذیر}$$

تابع هم از راست پیوسته است و هم از چپ، از ضابطه‌های راست و چپ به طور مستقیم مشتق گرفتیم و در آخر چون مشتق راست و چپ با هم برابر نشدند پس تابع مشتق‌پذیر نیست ولی هم مشتق راست دارد و هم مشتق چپ.

$$3)\ f(x)=\begin{cases} x^2+2x & x\geq 1 \\ x^3+x & x<1 \end{cases} \Rightarrow \text{پیوستگی} \begin{cases} \text{مقدار}=3 \\ \text{حدراست}=3 \Rightarrow f'_+(1)=2x+2=4 \\ \text{حدچپ}=2 \Rightarrow f'_-(1)=\text{وجودندارد} \end{cases} \Rightarrow \text{مشتق‌ناپذیر}$$

تابع از سمت راست پیوسته است پس از ضابطه‌ی راست به طور مستقیم مشتق گرفتیم و مشتق راست را پیدا کردیم. تابع از سمت چپ پیوسته نیست پس مشتق چپ وجود ندارد. حواستان باشد که بدون توجه به پیوستگی از ضابطه‌ها مشتق نگیرید. اگر به پیوستگی توجه نکنیم و فقط از ضابطه‌ها مشتق بگیریم به اشتباه نتیجه می‌گیریم که تابع مشتق‌پذیر است.

$$۴)\ f(x)=\begin{cases} x+\sqrt{x} & x>۱ \\ x^۲-۱ & x=۱ \\ x^۳-x & x<۱ \end{cases} \Rightarrow \text{پیوستگی} \begin{cases} \text{مقدار}=۰ \\ \text{حدراست}=۲ \Rightarrow f'_+(۱)=\text{وجودندارد} \\ \text{حدچپ}=۰ \Rightarrow f'_-(۱)=۳x^۲-۱=۲ \end{cases} \Rightarrow \text{مشتق‌ناپذیر}$$

تابع از سمت راست پیوسته نیست و مشتق راست ندارد. ولی از سمت چپ پیوسته است پس از ضابطه‌ی چپ مشتق گرفتیم و مقدار مـشتق چپ را حساب کردیم.

$$۵)\ f(x)=\begin{cases} x^۲+۲x & x>۱ \\ x+\sqrt{x} & x=۱ \\ x^۴+۲ & x<۱ \end{cases} \Rightarrow \text{پیوستگی} \begin{cases} \text{مقدار}=۲ \\ \text{حدراست}=۳ \Rightarrow f'_+(۱)=\text{وجودندارد} \\ \text{حدچپ}=۳ \Rightarrow f'_-(۱)=\text{وجودندارد} \end{cases} \Rightarrow \text{مشتق‌ناپذیر}$$

تابع نه از سمت راست پیوسته است و نه از سمت چپ، پس نه مشتق راست داریم و نه مشتق چپ، باز هم حواستان را جمع کنید که قبل از بررسی پیوستگی از ضابطه‌ها مشتق نگیرید.

$$۶)\ f(x)=\begin{cases} x^۲+x & x>۱ \\ x^۳+۱ & x<۱ \end{cases} \Rightarrow \text{پیوستگی} \begin{cases} \text{حدراست}=۲ \\ \text{مقدار}=\text{ندارد} \\ \text{حدچپ}=۲ \end{cases} \Rightarrow \text{مشتق‌ناپذیر}$$

$$۷)\ f(x)=\begin{cases} \sqrt{x} & x\ge ۰ \\ ۵x & x<۰ \end{cases} \Rightarrow \text{پیوستگی} \begin{cases} \text{مقدار}=۰ \\ \text{حدراست}=۰ \Rightarrow f'_+(۰)=\dfrac{۱}{۲\sqrt{x}}=+\infty\ \text{وجودندارد} \\ \text{حدچپ}=۰ \Rightarrow f'_-(۰)=۵ \end{cases} \Rightarrow \text{مشتق‌ناپذیر}$$

تابع در $x=۰$ پیوسته است اما چون مشتق راست نامتناهی $(+\infty)$ شده است، پس تابع مشتق‌پذیر نیست.

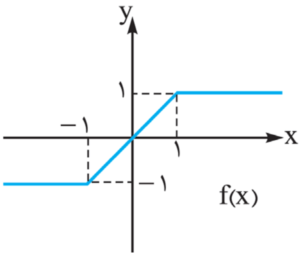
تست ۶۸: تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases} \sqrt{۵-۲x} & x\le -۲ \\ -\frac{۱}{۲}x^۲+bx+c & x>-۲ \end{cases}$، در $x=-۲$، مشتق‌پذیر است. مقدار c کدام است؟ (سراسری تجربی ۹۹)

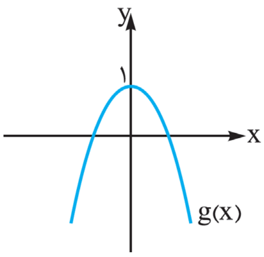
۱) $-\frac{۲}{۳}$ ۲) $-\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

تست ۶۹: فرض کنید $f(x)=\begin{cases}-۱ & x<-۱\\ x & -۱\le x\le ۱\\ ۱ & x>۱\end{cases}$ و $g(x)=۱-x^۲$. تعداد عناصر مجموعه نقاطی که gof یا fog در آن‌ها مشتق‌پذیر نیست، کدام است؟ (سراسری ریاضی ۱۴۰۰)

۱) ۲   ۲) ۳   ۳) ۴   ۴) ۵

پاسخ: گزینهٔ «۳» ـ نمودار توابع f و g را رسم می‌کنیم:



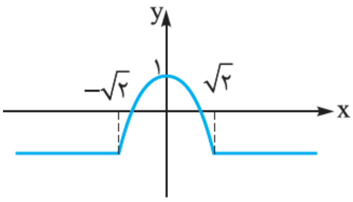


۱) fog را تشکیل می‌دهیم. باید در f، جای تمام xها، $g(x)$ بنویسیم.

$$f(g(x))=\begin{cases}-۱ & g(x)<-۱\\ g(x) & -۱\le g(x)\le ۱\\ ۱ & g(x)>۱\end{cases}=\begin{cases}-۱ & ۱-x^۲<-۱\\ ۱-x^۲ & -۱\le ۱-x^۲\le ۱\\ ۱ & ۱-x^۲>۱\end{cases}=\begin{cases}-۱ & x^۲>۲\\ ۱-x^۲ & ۰\le x^۲\le ۲\\ ۱ & \underbrace{x^۲<۰}_{\text{همواره نادرست!}}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}-۱ & x>\sqrt{۲}\,,\ x<-\sqrt{۲}\\ ۱-x^۲ & -\sqrt{۲}\le x\le \sqrt{۲}\\ ۱ & \text{تهی!}\end{cases}$$

نمودار fog را رسم می‌کنیم:

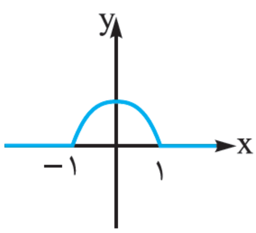


دو نقطه به طول‌های $\pm\sqrt{۲}$، نقطهٔ گوشه هستند و fog در آن‌ها مشتق‌پذیر نیست.

۲) gof را تشکیل می‌دهیم:

$$g(f(x))=۱-f^۲(x)=\begin{cases}۱-(-۱)^۲ & x<-۱\\ ۱-x^۲ & -۱\le x\le ۱\\ ۱-۱^۲ & x>۱\end{cases}=\begin{cases}۰ & x<-۱\\ ۱-x^۲ & -۱\le x\le ۱\\ ۰ & x>۱\end{cases}$$

نمودار gof را رسم می‌کنیم:



دو نقطه به طول‌های ±۱، نقطهٔ گوشه هستند، پس gof در آن‌ها مشتق‌پذیر نیست. پس دو تابع gof و fog، در کل در ۴ نقطه مشتق‌ناپذیرند.

تست ۷۰: فرض کنید $g(x)=ax^۲+bx+c$ ، $(a\neq ۰)$ و $f(x)=\begin{cases} g(x) & x\geq k \\ g'(x) & x<k \end{cases}$ باشد. اگر f یک تابع مشتق‌پذیر باشد، حداکثر مقدار k به شرط $b+c=a$ کدام است؟ (سراسری تجربی ۱۴۰۰)

۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ «۳» ـ با توجه به تابع $g(x)=ax^۲+bx+c$ ضابطهٔ تابع f به شکل $f(x)=\begin{cases} ax^۲+bx+c & x\geq k \\ ۲ax+b & x<k \end{cases}$ است. حالا برای این که تابع f مشتق‌پذیر باشد:

راه اول: با استفاده از شرط پیوستگی و مشتق‌پذیری باید معادلهٔ $ak^۲+bk+c=۲ak+b$ ریشهٔ مضاعف داشته باشد. چون $b+c=a$ است، پس $c=a-b$ و در نتیجه:

$$ak^۲+bk+a-b=۲ak+b \Rightarrow ak^۲+(b-۲a)k+a-۲b=۰$$

$$\text{ریشهٔ مضاعف } \Delta=۰ \Rightarrow (b-۲a)^۲-۴a(a-۲b)=۰ \Rightarrow b^۲-۴ab+۴a^۲-۴a^۲+۸ab=۰$$

$$\Rightarrow b^۲+۴ab=۰ \Rightarrow b(b+۴a)=۰ \Rightarrow b=۰ \text{ یا } b=-۴a$$

پس معادله به شکل زیر درمی‌آید:

$$b=۰ \Rightarrow ak^۲-۲ak+a=۰ \Rightarrow a(k^۲-۲k+۱)=۰ \Rightarrow \text{ریشهٔ مضاعف } k=۱$$

$$b=-۴a \Rightarrow ak^۲-۶ak+۹a=۰ \Rightarrow a(k^۲-۶k+۹)=۰ \Rightarrow \text{ریشهٔ مضاعف } k=۳$$

بنابراین حداکثر مقدار k برابر است با $k=۳$.

راه دوم: تابع $f(x)=\begin{cases} ax^۲+bx+c & x\geq k \\ ۲ax+b & x<k \end{cases}$ باید در $x=k$ هم پیوسته باشد و هم مشتق‌پذیر، پس:

$$\text{پیوستگی} \Rightarrow ak^۲+bk+c=۲ak+b \quad (۱)$$

$$\text{مشتق‌پذیری } f'(x)=\begin{cases} ۲ax+b & x>k \\ ۲a & x<k \end{cases} \Rightarrow ۲ak+b=۲a \quad (۲)$$

با مقایسهٔ (۱) و (۲) می‌توانیم بنویسیم:

$$ak^۲+bk+c=۲a \Rightarrow ak^۲+bk+c-۲a=۰$$

مجموع ضرایب این معادله برابر است با:

$$a+\overbrace{b+c}^{a}-۲a=۲a-۲a=۰$$

پس ریشه‌هایش برابرند با $k=۱$ و $k=\frac{c-۲a}{a}$.

از طرف دیگر این ریشه‌ها باید در معادلهٔ (۲) هم صدق کنند:

$$۲a(\frac{c-۲a}{a})+\overbrace{b}^{a-c}=۲a \Rightarrow ۲c-۴a+a-c=۲a \Rightarrow c=۵a$$

پس $\frac{c}{a}=۵$ و در نتیجه مقدار ریشهٔ $k=\frac{c-۲a}{a}$ برابر است با:

$$k=\frac{c}{a}-۲=۵-۲=۳$$

پس حداکثر k برابر است با $k=۳$.

تست ۷۱: به ازای کدام مجموعه مقادیر $\mathbf{a}$ تابع $f(x)=\begin{cases} ax+۵ & x\ge ۱ \\ x^۲-a & x<۱ \end{cases}$ در $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است؟

۱) $\{۲,-۲\}$ ۲) $\{-۲\}$ ۳) $\{۲\}$ ۴) $\varnothing$

پاسخ: گزینه‌ی «۴» ـ اول پیوستگی و سپس مشتق‌پذیری در نقاط مرزی را بررسی می‌کنیم:

$$f(x)=\begin{cases} ax+۵ & x\ge ۱ \\ x^۲-a & x<۱ \end{cases} \Rightarrow \text{پیوستگی} \begin{cases} \text{مقدار}=a+۵ \\ \text{حدراست}=a+۵ \Rightarrow a+۵=۱-a \Rightarrow a=-۲ \\ \text{حدچپ}=۱-a \end{cases}$$

$$\text{مشتق‌پذیری} \begin{cases} f'_+(۱)=a \\ f'_-(۱)=۲x=۲ \end{cases} \Rightarrow a=۲$$

چون جواب‌های $\mathbf{a}$ برای پیوستگی و مشتق‌پذیری تابع با هم متفاوت است پس مقداری برای $\mathbf{a}$ یافت نمی‌شود یعنی $a\in\varnothing$؛ نکند به اشتباه فقط پیوستگی یا فقط مشتق‌پذیری را بررسی کنید و جواب غلط بدهید. باید هم مشتق‌پذیری را بررسی کنیم و هم پیوستگی را، مخصوصاً وقتی در گزینه‌ها «جواب ندارد» یا «تهی»، داشته باشیم.

تست ۷۲: اگر $f(x)=\begin{cases} x^۲+۲x & x\ge ۱ \\ \frac{۳}{x} & x<۱ \end{cases}$، حاصل $\lim\limits_{h\to ۰}\frac{f(۱+۳h^۲)-f(۱-h^۲)}{h^۲}$ کدام است؟ *(آزمون گزینه دو جامع)*

۱) ۱۶ ۲) -۱۲ ۳) ۹ ۴) ۱۵

مشتق توابع قدرمطلقی به ازای نقطه‌ی x_0، وقتی که x_0 داخل قدرمطلق را صفر می‌کند

چنان‌چه تابع قدرمطلقی در نقطه‌ی x_0 پیوسته باشد:

اگر عبارت داخل قدرمطلق به ازای این نقطه صفر شود، یعنی نقطه‌ی x_0 ریشه عبارت داخل قدرمطلق باشد، باید عبارت داخل قدرمطلق را تعیین علامت کرده و در سمت چپ و راست نقطه موردنظر عبارت را از قدرمطلق خارج کنیم سپس مشتق‌های راست و چپ را جداگانه بررسی می‌کنیم.

تذکر: گفتیم که $f'(x_0)$ همان شیب خط مماس بر منحنی $y=f(x)$ در نقطه‌ی x_0 است. اگر در تابعی مشتق‌های راست و چپ در نقطه‌ی x_0 جداگانه محاسبه شوند، مشتق راست $(f'_+(x_0))$ نشان‌دهنده شیب خط مماس بر منحنی در طرف راست نقطه و مشتق چپ $(f'_-(x_0))$ نشان‌دهنده شیب خط مماس بر منحنی در طرف چپ نقطه x_0 است. واضح است که اگر $f'_+(x_0)=f'_-(x_0)$ تابع در نقطه‌ی x_0 مشتق‌پذیر خواهد بود.

مثال ۷۳: مشتق‌پذیری تابع $f(x)=|x^2-1|$ را در نقطه‌ی $x=-1$ بررسی کنید.

تست ۷۴: در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=x\sqrt{x}+|x-1|$ مقدار $f'_+(1)+3f'_-(1)$ کدام است؟ *(سراسری ۹۰)*

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

تست ۷۵: مشتق چپ تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}$ در نقطه‌ی $x=0$ کدام است؟ *(سراسری ۸۹)*

۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۲) $-\sqrt{2}$ ۳) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۴) $\sqrt{2}$

تست ۷۶: اگر $f(x)=\sqrt{x^{۳}-۳x+۲}$ باشد، $f'_{-}(۱)$ برابر کدام است؟

۱) $-\sqrt{۳}$ ۲) $-\sqrt{۲}$ ۳) $\sqrt{۲}$ ۴) $\sqrt{۳}$

مشتق توابع شامل جزء صحیح

برای تعیین مشتق توابع شامل براکت در یک نقطه باز هم باید به پیوستگی تابع در آن نقطه دقت کنیم. اگر تابع پیوسته باشد، برای محاسبه مشتق ابتدا حاصل براکت را به ازای آن نقطه تعیین کرده سپس مشتق‌گیری می‌کنیم.

نکته: توابع شامل براکت در نقاطی که داخل براکت عدد صحیح نشود، پیوسته خواهند بود.

تست ۷۷: در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=|x|.[x]$، مقدار $f'_{-}(۰)-f'_{+}(۰)$ کدام است؟ *(سراسری تجربی ۸۷)*

۱) ۱− ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ۲

تست ۷۸: تابع $f(x)=x^{۲}[x]$ در نقطه‌ی $x=۱$:

۱) مشتق دارد. ۲) فقط مشتق چپ دارد.

۳) فقط مشتق راست دارد. ۴) نه مشتق راست دارد نه مشتق چپ.

تست ۷۹: فرض کنید $f(x)=(x[x^۲+\frac{۱}{۲}])^۲+۱$ و $g(x)=\frac{۱}{\sqrt[۳]{x^۲-۱}}$. مقدار مشتق تابع fog در $x=\frac{۳}{\sqrt{۸}}$، چند برابر $(-۱۲۸\sqrt{۲})$ است؟ (سراسری تجربی ۱۴۰۰)

۱) -۴ ۲) ۱   ۳) ۲   ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ «۴» ـ می‌دانیم $(fog)'(x)=g'(x)f'(g(x))$ پس باید $g'(\frac{۳}{\sqrt{۸}})$ و $f'(g(\frac{۳}{\sqrt{۸}}))$ را پیدا کنیم:

$$g(x)=\frac{۱}{\sqrt[۳]{x^۲-۱}}=(x^۲-۱)^{-\frac{۱}{۳}} \Rightarrow g'(x)=-\frac{۱}{۳}(x^۲-۱)^{-\frac{۴}{۳}}(۲x)=-\frac{۲x}{۳\sqrt[۳]{(x^۲-۱)^۴}}$$

$$\Rightarrow g'(\frac{۳}{\sqrt{۸}})=-\frac{۲\frac{۳}{\sqrt{۸}}}{۳\sqrt[۳]{(\frac{۹}{۸}-۱)^۴}}=-\frac{\frac{۲\times ۳}{\sqrt{۸}}}{۳(\frac{۱}{۲})^۴}=-\frac{۳۲}{\sqrt{۸}}=\frac{-۳۲}{۲\sqrt{۲}}=-\frac{۱۶}{\sqrt{۲}}$$

و چون:

$$g(\frac{۳}{\sqrt{۸}})=\frac{۱}{\sqrt[۳]{(\frac{۹}{۸}-۱)}}=\frac{۱}{\sqrt[۳]{\frac{۱}{۸}}}=۲$$

پس باید $f'(۲)$ را پیدا کنیم:

$$f(x)=(x\underbrace{[x^۲+\frac{۱}{۲}]}_{[۴+\frac{۱}{۲}]=۴})^۲+۱ \Rightarrow f(x)=(۴x)^۲+۱ \Rightarrow f'(x)=۳۲x \Rightarrow f'(۲)=۳۲\times ۲=۶۴$$

بنابراین $(fog)'(\frac{۳}{\sqrt{۸}})$ برابر است با:

$$(fog)'(\frac{۳}{\sqrt{۸}})=g'(\frac{۳}{\sqrt{۸}})f'(۲)=-\frac{۱۶}{\sqrt{۲}}\times ۶۴=-۸\sqrt{۲}\times ۶۴=(-۱۲۸\sqrt{۲})\times ۴$$

پس حاصل مشتق، ۴ برابر $(-۱۲۸\sqrt{۲})$ است.

تست ۸۰: اگر $f(x)=\frac{(x-۱)^۲}{x[۲x]+[-x]}$ باشد، $f'_+(۱)+f'_-(۱)$ برابر کدام است؟

۱) ۱   ۲) ۲   ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

تست ۸۱: اگر $f(x)=\sqrt{x^۲-[x]+|x|}$ باشد، $\lim\limits_{h\to ۰^+}\dfrac{f(۱+h)-f(۱)}{h}$ کدام است؟ (سراسری ریاضی ۹۷)

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۵}{۴}$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $\frac{۵}{۲}$

مشتق‌پذیری توابع شامل قدرمطلق

۱) در تابع $y=|f(x)|$ (که $f(x)$ تابعی پیوسته باشد)، در ریشه‌های سادهٔ مرتبه اول داخل قدرمطلق، تابع مشتق‌ناپذیر است. به این نقاط، گوشه‌ای می‌گویند.

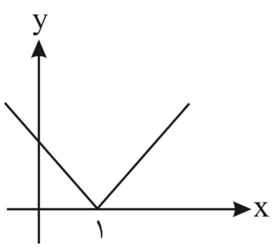
مثال ۸۲: مشتق‌پذیری $f(x)=|x-۱|$ را در $x=۱$ بررسی کنید.

پاسخ: چون به ازای $x=۱$ تابع صفر می‌شود بهتر است از تعریف مشتق استفاده کنیم:

$$f'(۱)=\lim_{x\to ۱}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{|x-۱|-۰}{x-۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{|x-۱|}{x-۱}\ \xrightarrow[\text{حد چپ و راست را جدا کن}]{\frac{۰}{۰}\ \text{قدرمطلق‌دار}}\ \begin{cases}\lim\limits_{x\to ۱^+}\dfrac{x-۱}{x-۱}=۱\\[2mm] \lim\limits_{x\to ۱^-}\dfrac{-(x-۱)}{x-۱}=-۱\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}f'_+(۱)=۱\\ f'_-(۱)=-۱\end{cases}\Rightarrow f'_+(۱)\neq f'_-(۱)$$

مشتق چپ و راست f را در $x=۱$ نابرابرند پس تابع در این نقطه مشتق‌پذیر نیست. به این نقطه گوشه می‌گویند.



۲) مشتق $y=|f(x)|$ (که در آن $f(x)$ پیوسته است) در نقاطی که $f(x)$ دارای مرتبهٔ بزرگ‌تر از ۱ باشد مشتق‌پذیر است و مشتق تابع در این نقاط برابر صفر است. یعنی منحنی تابع در این نقاط بر محور xها مماس است.

مثال ۸۳ : مشتق‌پذیری تابع $y=|(x-1)^3|$ را در $x=1$ بررسی کنید.

پاسخ: اولاً این تابع در $x=1$ پیوسته است. ثانیاً برای پیداکردن مشتق، بهتر است از تعریف مشتق استفاده کنیم:

$$y'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{|(x-1)^3|-0}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{|(x-1)^3|}{x-1}$$

حد چپ و راست را جداگانه پیدا می‌کنیم:

$$y'_+(1)=\lim_{x\to 1^+}\frac{|\overbrace{(x-1)^3}^{+}|}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1)^3}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}(x-1)^2=0$$

$$y'_-(1)=\lim_{x\to 1^-}\frac{|\overbrace{(x-1)^3}^{-}|}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{-(x-1)^3}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}-(x-1)^2=0$$

تابع $|(x-1)^3|$ در $x=1$ مشتق‌پذیر است: $y'_+(1)=y'_-(1)$

۳) تابع $y=h(x)|f(x)|$ (که f و h پیوسته هستند) در ریشه‌های مشترک f و h مشتق‌پذیر هستند. مثلاً $y=(x-1)|x-1|$ در $x=1$ مشتق‌پذیر است چون:

$$y'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)|x-1|-0}{x-1}=\lim_{x\to 1}|x-1|=0 \Rightarrow y'(1)=0$$

نکته: تابع $y=(x-a)^n|x-a|$ در $x=a$ مشتق‌پذیر است هرگاه $n\ge 1$ $(n\in\mathbb{N})$ باشد.

تست ۸۴: اگر $f(x)=1-|x|$ باشد، تعداد نقاط مشتق‌ناپذیر تابع با ضابطه‌ی $y=f(f(x))$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

تست ۸۵: در نقطهٔ گوشهٔ تابع $f(x)=\sqrt{x+m}\,|x-1|+x^2$، نیم‌مماس‌های راست و چپ بر هم عمودند. مقدار m کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

تست ۸۶: به ازای کدام مقدار a، تابع $f(x)=x|x-2|-a|x-2|$ در $x=2$ مشتق‌پذیر است؟

۱) $a=2$ ۲) $a\in\varnothing$ ۳) $a=-2$ ۴) $a=0$

تست ۸۷: اگر تابع $f(x)=(2x^2+ax+b)|(x-1)(x-2)|$ در $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر باشد، b کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۶−

تست ۸۸: تابع $y=x|x^2-x|$، در چند نقطه مشتق‌پذیر نیست؟

۱) ۲ ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ۳

پاسخ: گزینه‌ی «۳» ـ در تابع $f(x)=x|x^2-x|$ ریشه‌های عبارت داخل قدرمطلق $x=0$ و $x=1$ هستند و با توجه به این که ریشه‌ی $x=0$ همان ریشه‌ی x خارج قدرمطلق است، پس تابع در $x=0$ مشتق‌پذیر و در $x=1$ مشتق‌ناپذیر است.

تست ۸۹: تابع $f(x)=\begin{cases}|x^2-1| & |x|\le 2\\ 4x-1 & |x|>2\end{cases}$ در چند نقطه مشتق‌پذیر نیست؟

۱) ۱ ۲) ۴ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ: گزینه‌ی «۲» ـ برای بررسی مشتق‌پذیری تابع $f(x)=\begin{cases}|x^2-1| & |x|\le 2\\ 4x-1 & |x|>2\end{cases}$ اول هر کدام از ضابطه‌ها و بعد نقاطی را که ضابطه‌ی تابع در آن عوض می‌شود، بررسی می‌کنیم. ضابطه‌ی $|x^2-1|$ در نقاط $x=1$ و $x=-1$ مشتق‌پذیر نیست (که در محدوده‌ی تعریف ضابطه هستند و ریشه‌های ساده داخل قدرمطلق‌اند) ضابطه‌ی $4x-1$ همواره مشتق‌پذیر است. ضابطه‌ی تابع در نقاط $x=2$ و $x=-2$ عوض می‌شود، پس:

$$f(x)=\begin{cases}|x^2-1| & |x|\le 2\\ 4x-1 & |x|>2\end{cases}$$

$$x=2 \ \text{پیوستگی} \begin{cases} \text{مقدار} = ۳ \\ \text{حدراست} = \lim\limits_{x\to ۲^+} ۴x-۱ = ۷ \\ \text{حدچپ} = \lim\limits_{x\to ۲^-} |x^۲ - ۱| = ۳ \end{cases} \Rightarrow \text{ناپیوسته} \Rightarrow \text{مشتق‌ناپذیر}$$

$$x=-۲ \ \text{پیوستگی} \begin{cases} \text{مقدار} = ۳ \\ \text{حدراست} = \lim\limits_{x\to (-۲)^+} |x^۲ - ۱| = ۳ \\ \text{حدچپ} = \lim\limits_{x\to (-۲)^-} ۴x-۱ = -۹ \end{cases} \Rightarrow \text{ناپیوسته} \Rightarrow \text{مشتق‌ناپذیر}$$

پس تابع در چهار نقطه مشتق‌پذیر نیست.

مثال (مهم) ۹۰: حدود m را برای آن که تابع $f(x)=|x^۲+mx+۱|$:

الف) در دو نقطه مشتق‌ناپذیر باشد، بیابید.

ب) در $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر باشد، بیابید.

بررسی مشتق‌پذیری تابع شامل جزء صحیح

الف) تابع $[f(x)]$ در نقاطی که پیوسته است، مشتق‌پذیر بوده و مشتق آن همواره صفر است. در نقاط ناپیوسته نیز مشتق‌ناپـذیر اسـت. (در نقاط ناپیوسته تابع از هر طرف که پیوسته باشد از همان طرف مشتق‌پذیر است و مشتق آن صفر است.)

مثال ۹۱ : اگر $f(x)=[x^۲]$، مشتق‌پذیری آن را در نقاط $x=\frac{۳}{۲}$ و $x=۲$ بررسی کنید.

۱) $f(x)=[x^۲]\ ,\ x=\frac{۳}{۲}$

$f(\frac{۳}{۲})=[\frac{۹}{۴}\notin \mathbb{Z}] \Rightarrow f'(\frac{۳}{۲})=۰$

۲) $f(x)=[x^۲]\ ,\ x=۲$

$f(۲)=[۴\in\mathbb{Z}]$

$$\begin{cases} f(۲)=۴ \\ f(۲^+)=[۴^+]=۴ \xrightarrow{\text{از راست پیوسته است.}} f'_+(۲)=۰ \\ f(۲^-)=[۴^-]=۳ \Rightarrow f'_-(۲):\text{وجودندارد} \end{cases}$$

ب) تابع $f(x)=(x-a)^n[x]$ در نقطهٔ $a\in\mathbb{Z}$ باشد با شرط $n\ge ۲$ مشتق‌پذیر است. اگر $n=۱$ پیوسته ولی مشتق‌ناپذیر است. به مثال‌های زیر توجه کنید:

می‌خواهیم توابع $[x]$، $x[x]$ و $x^۲[x]$ را در $x=۰$ از لحاظ پیوستگی و مشتق‌پذیری مقایسه کنیم:

$$۱)\ f(x)=[x] \Rightarrow \begin{cases} f(۰)=۰ \\ f(۰^+)=۰ \xrightarrow{\text{از راست پیوسته}} f'_+(۰)=۰ \\ f(۰^-)=-۱ \Rightarrow f'(۰):\text{وجودندارد} \end{cases}$$

این تابع در $x=۰$ ناپیوسته، مشتق‌ناپذیر است.

$$۲)\ f(x)=x[x] \Rightarrow \begin{cases} f(۰)=۰ \\ f(۰^+)=۰ \Rightarrow f'_+(۰)=۰ \\ f(۰^-)=x[۰^-]=x(-۱)=-x \Rightarrow f'_-(۰)=-۱ \end{cases}$$

تابع در $x=۰$ پیوسته است. مشتق راست و چپ هم دارد ولی چون $f'_+(۰)=f'_-(۰)$ شد پس مشتق‌ناپذیر است. به این نقطه گوشه می‌گویند.

$$۳)\ f(x)=x^۲[x] \Rightarrow \begin{cases} f(۰)=۰ \\ f(۰^+)=۰ \Rightarrow f'_+(۰)=۰ \\ f(۰^-)=x^۲[۰^-]=x^۲(-۱)=-x^۲ \Rightarrow f'_-(۰)=-۲x=۰ \end{cases}$$

تابع در $x=۰$ پیوسته است و مشتق چپ و راست هم دارد و چون $f'_+(۰)=f'_-(۰)$ شد پس در $x=۰$ مشتق‌پذیر است.

جمع‌بندی:

یک بار به مقایسه‌ها توجه کنید: (در $x=۰$)

$$\begin{cases} y=[x] \text{ ناپیوسته} \\ y=x[x] \text{ پیوسته مشتق ناپذیر} \\ y=x^۲[x] \text{ پیوسته مشتق پذیر} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=|x| \text{ پیوسته مشتق ناپذیر} \\ y=x|x| \text{ پیوسته مشتق پذیر} \end{cases}$$

نقطهٔ $x=۰$ در $|x|$ و $x[x]$ نقطهٔ گوشه‌ای محسوب می‌شود.

تست ۹۲: تابع $f(x)=(x-1)[x]$ و $f(x)=(x-1)^{2}[x]$ به ترتیب در $x=1$، .... و .... هستند.

۱) فقط پیوسته، فقط پیوسته
۲) مشتق‌پذیر، مشتق‌پذیر
۳) فقط پیوسته، مشتق‌پذیر
۴) مشتق‌پذیر، فقط پیوسته

تست ۹۳: اگر تابع $f(x)=(x^{2}+ax+b)[x]$ در $x=3$ مشتق‌پذیر باشد، $a+b$ کدام است؟

۱) صفر
۲) ۳
۳) -3
۴) مقداری برای a و b وجود ندارد.

مشتق‌پذیری روی یک بازه

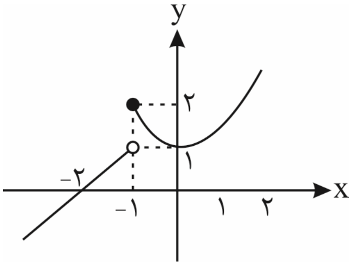
تابع f روی بازهٔ (a,b) مشتق‌پذیر است، هرگاه f در هر نقطه در این بازه مشتق‌پذیر باشد، تابع f روی بازهٔ $[a,b)$ مشتق‌پذیر است، هرگاه f در بازهٔ (a,b) مشتق‌پذیر باشد و در نقطهٔ a مشتق راست داشته باشد. تابع f روی بازهٔ $(a,b]$ مشتق‌پذیر است، هرگاه f در بازهٔ (a,b) مشتق‌پذیر باشد و در نقطهٔ b مشتق چپ داشته باشد.

تابع f روی بازهٔ $[a,b]$ مشتق‌پذیر است، هرگاه f در بازهٔ (a,b) مشتق‌پذیر باشد و در نقطهٔ a مشتق راست و در b مشتق چپ داشته باشد.

تست ۹۴ : نمودار تابع $f(x)=\begin{cases} x+2 & x<-1 \\ x^{2}+1 & x\geq -1 \end{cases}$ روی چند تا از بازه‌های $[-3,-2]$، $[-2,-1]$، $(-3,-1)$، $[-2,0]$، $[-1,0]$ و $[0,2]$ مشتق‌پذیر است؟

۱) ۴
۲) ۵
۳) ۶
۴) صفر

پاسخ: بررسی تک‌تک بازه‌ها سخت و زمان‌بر است، پس تابع را رسم می‌کنیم:



تابع در نقطهٔ $x=-۱$ ناپیوسته است و در این نقطه پیوستگی راست دارد و در $x=-۱$ مشتق راست هم داریم (نیم مماس راست داریم) ولی مشتق چپ نداریم.

$[-۲,۰]$ مشتق‌ناپذیر است چون در $x=-۱$ مشتق ندارد.

$[۰,۲]$: مشتق‌پذیر

$(-۳,-۱]$: مشتق‌پذیر

$[-۱,۰]$: مشتق‌پذیر

$[-۲,-۱]$: مشتق‌ناپذیر، چون در $x=-۱$ مشتق چپ ندارد.

$[-۳,-۲]$: مشتق‌پذیر

تست ۹۵ : نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=[x+\frac{۱}{۳}]+[x]$ روی بازهٔ $(۰,۳)$ در چند نقطه مشتق‌ناپذیر است؟ *(ریاضی خارج)*

۱) ۲   ۲) ۳   ۳) ۴   ۴) ۵

پاسخ: تابع $y=[x]$ در بازهٔ $(۰,۳)$ در نقاط $x=۱$ و $x=۲$ ناپیوسته و مشتق‌ناپذیر است. تابع $y=[x+\frac{۱}{۳}]$ هم در بازهٔ $(۰,۳)$ در نقاط $x=\frac{۲}{۳}$، $x=\frac{۵}{۳}$، $x=\frac{۸}{۳}$ ناپیوسته و مشتق‌ناپذیر است. پس این تابع جمعاً در ۵ نقطه ناپیوسته و در نتیجه مشتق‌ناپذیر است.

نکته: اگر دو تابع در $x=a$ یکی پیوسته و دیگری ناپیوسته باشد، آن‌وقت مجموعشان در آن نقطه ناپیوسته است. در این سؤال $x=۱$ و $x=۲$ که باعث ناپیوستگی $[x]$ شدند، تابع $[x+\frac{۱}{۳}]$ را پیوسته می‌کنند و هم‌چنین نقاط $x=\frac{۲}{۳},\frac{۵}{۳},\frac{۸}{۳}$ که باعث ناپیوستگی $[x+\frac{۱}{۳}]$ شدند تابع $[x]$ را پیوسته می‌کنند پس هر ۵ نقطه یکی را پیوسته و دیگری را ناپیوسته می‌کنند پس جمعشان نیز حتماً به ازای هر ۵ نقطه ناپیوسته می‌شود.

مشتق‌پذیری رادیکال‌ها

قبلاً در خصوص مماس قائم‌ها صحبت کرده‌ایم ولی در خصوص مشتق‌پذیری یک بار به نکات زیر توجه کنید.

۱) تابع در ریشه‌های زیر رادیکال وقتی توان عبارت زیر رادیکال از فرجه کم‌تر است، مشتق‌پذیر نیست، مثل $y=\sqrt[۳]{x}$ و $y=\sqrt[۳]{x-۱}$ و $y=\sqrt[۳]{(x-۲)^{۲}}$ به ترتیب در نقاط $x=۰$، $x=۱$ و $x=۲$ مشتق‌ناپذیرند.

۲) اگر توان و فرجه مساوی باشند، چنان‌چه هر دو فرد باشند تابع در آن‌جا مشتق‌پذیر است. مثلاً $y=\sqrt[۳]{(x-۱)^{۳}}$ چون می‌شود $y=\sqrt[۳]{(x-۱)^{۳}}=x-۱$ پس در $x=۱$ مشتق‌پذیر است.

۳) اگر توان و فرجه مساوی باشند، چنان‌چه هر دو زوج باشند تابع در آن نقطه مشتق‌ناپذیر است (نقطهٔ گوشه‌ای). مثلاً:

$y=\sqrt{(x-۱)^{۲}}=|x-۱| \Rightarrow$ در $x=۱$ گوشه می‌شود و مشتق‌ناپذیر است.

تیپ‌های متداول

تست ۹۶ : تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\sqrt[۳]{(x-۱)(x-۲)^{۳}} & x\geq ۰\\ |(x+۱)(x+۲)^{۲}| & x<۰\end{cases}$ در چند نقطه مشتق‌پذیر نیست؟

۱) ۲   ۲) ۳   ۳) ۴   ۴) ۵

پاسخ: تابع را ساده‌تر می‌نویسیم:

$$f(x)=\begin{cases}(x-۲)\sqrt[۳]{x-۱} & x\geq ۰\\ |(x+۱)(x+۲)^۲| & x<۰\end{cases}$$

$$\begin{cases}f(۰)=(-۲)\sqrt[۳]{-۱}=۲\\ \left.\begin{array}{l}f(۰^+)=۲\\ f(۰^-)=(۱)(۲)^۲=۴\end{array}\right\}f(۰^+)\neq f(۰^-)\ \text{ناپیوسته و مشتق‌ناپذیر}\end{cases}$$

تابع در $x=۰$ ناپیوسته و مشتق‌ناپذیر است. در $x=۱$ که ریشه زیر رادیکال است خط مماس عمودی می‌باشد و مشتق‌پذیر نیست البته $x=۱$ در محدودهٔ ضابطهٔ بالایی $(x\geq ۰)$ قرار دارد و می‌توانیم به آن گیر بدهیم.

در $x=-۱$ از ضابطهٔ پایینی نقطهٔ گوشه (مشتق‌ناپذیر) داریم و در $x=-۲$ چون ریشهٔ مرتبهٔ دوم است، مشکلی نداریم:

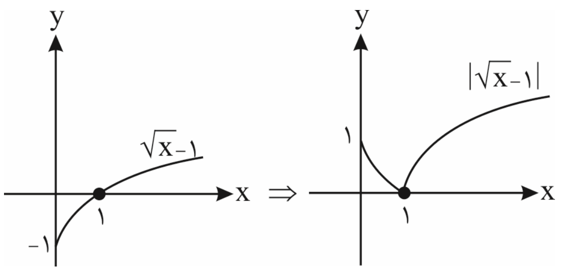
$\{۱,-۱,۰\}=$مشتق‌ناپذیرها

تست ۹۷ : تابع $f(x)=|\sqrt{x}-۱|$ در دامنهٔ تعریف خود در چند نقطه مشتق‌پذیر نیست؟

۱) هیچ　　　۲) یک　　　۳) دو　　　۴) بی‌شمار

پاسخ: دامنهٔ $f(x)$ را پیدا می‌کنیم: $x\geq ۰ \Rightarrow D_f=[۰,+\infty)$

عامل $\sqrt{x}$ در $x=۰$ مشتق‌پذیر نیست و عامل $\sqrt{x}-۱$ در $x=۱$ (ریشهٔ مرتبه اول در داخل قدرمطلق) نقطه گوشه می‌دهد و مشتق‌ناپذیر است. پس تابع در دو نقطه از دامنهٔ تعریفش مشتق‌پذیر نیست. به شکل توجه کنید:



همان‌طور که می‌بینید در $x=۰$ (روی محور yها) نیم‌مماس عمودی داریم و $f'_+(۰)=-\infty$ است پس مشتق ندارد و در $x=۱$ هم نقطهٔ گوشه‌ای ایجاد شده است.

تست ۹۸ : خطوط $x=۲$ و $x=a$ بر تابع $f(x)=\sqrt[۳]{x^۲-۶x+b}$ مماس‌اند. مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۷　　　۲) ۸　　　۳) ۹　　　۴) ۱۲

پاسخ: چون خطوط $x=۲$ و $x=a$ هر دو موازی محور yها هستند پس مماس عمودی‌اند بنابراین هر دو، ریشهٔ زیر رادیکال هستند:

$$x=۲ \Rightarrow \sqrt[۳]{۴-۱۲+b}=۰ \Rightarrow -۸+b=۰ \Rightarrow b=۸$$

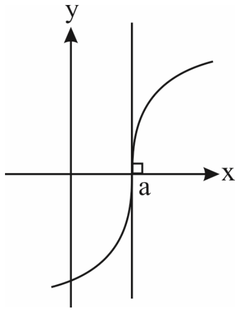
حالا $b=۸$ را جاگذاری می‌کنیم: $f(x)=\sqrt[۳]{x^۲-۶x+۸}$

اکنون ریشه‌های زیر رادیکال را پیدا می‌کنیم:

$$x^۲-۶x+۸=۰ \Rightarrow (x-۲)(x-۴)=۰ \Rightarrow \begin{cases}x=۲\\ x=۴\end{cases}$$

$x=۲$ را که خودش گفته بود، پس حتماً $x=۴$ همان $x=a$ است پس $a=۴$ بنابراین: $a+b=۴+۸=۱۲$

تست ۹۹ : اگر نمودار f به صورت مقابل باشد، کدام گزینه صحیح است؟



۱) $\begin{cases} f'_-(a) = -\infty \\ f'_+(a) = +\infty \end{cases}$

۲) $\begin{cases} f'_-(a) = +\infty \\ f'_+(a) = -\infty \end{cases}$

۳) $\begin{cases} f'_-(a) = +\infty \\ f'_+(a) = +\infty \end{cases}$

۴) $\begin{cases} f'_-(a) = -\infty \\ f'_+(a) = -\infty \end{cases}$

بررسی نمودار مشتق

برای آن که از نمودار تابع، پی به وضعیت نمودار مشتق ببریم کافی است به موارد زیر توجه داشته باشیم:

۱) اگر تابع $f(x)$ در یک بازه اکیداً صعودی باشد تابع مشتق آن در ناحیهٔ اول یا دوم قرار می‌گیرد. این جمله به این معنی است که مشتق تابع یعنی $f'(x)$ در این بازه مثبت است پس بالای محور xها قرار می‌گیرد. به جملهٔ زیر نیز توجه داشته باشید:

اگر در نقطهٔ $x = a$ شیب خط مماس بر منحنی تابع مثبت باشد، نمودار تابع $f'(x)$ در این نقطه بالای محور xها قرار می‌گیرد.

۲) اگر تابع $f(x)$ در یک بازه اکیداً نزولی باشد، تابع مشتق آن در ناحیهٔ سوم یا چهارم قرار می‌گیرد. این جمله به این معنی است که مشتق تابع یعنی $f'(x)$ در این بازه منفی است پس پایین محور xها قرار می‌گیرد. به جملهٔ زیر نیز توجه داشته باشید:

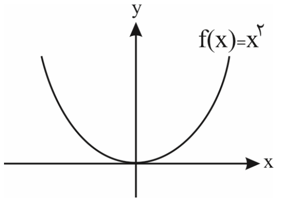
اگر در نقطهٔ $x = a$ شیب خط مماس بر منحنی تابع منفی باشد، نمودار تابع $f'(x)$ در این نقطه پایین محور xها قرار می‌گیرد.

۳) اگر تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x = a$ خط مماس افقی داشته باشد، تابع مشتق یعنی $f'(x)$ در این نقطه صفر است و برعکس.

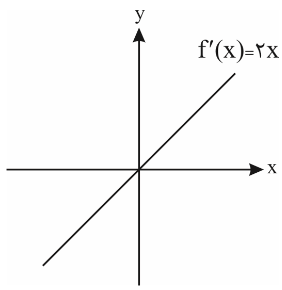
۴) اگر تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x = a$ خط مماس قائم داشته باشد (و یا نیم‌مماس قائم)، تابع مشتق یعنی $f'(x)$ در این نقطه حد بی‌نهایت دارد.

۵) اگر در تابع $f(x)$ نقطهٔ $x = a$ یک نقطهٔ گوشه‌ای باشد تابع مشتق یعنی $f'(x)$ در این نقطه تعریف نمی‌شود و حد راست و چپ $f'(x)$ در این نقطه نابرابر (و حداقل یکی از این حدها متناهی یعنی عدد مشخص) می‌شود.

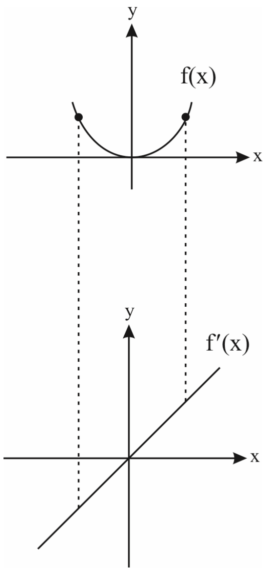
مثال ۱۰۰: به نمودار تابع $f(x) = x^۲$ توجه کنید:



مشتق این تابع برابر $f'(x) = ۲x$ است که شکل آن به صورت مقابل است:

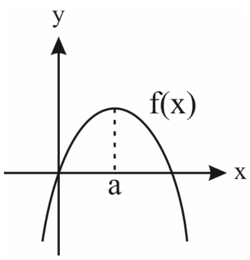


طبق شکل، در $x > 0$ تابع $f(x)$ اکیداً صعودی است پس نمودار $f'(x)$ در $x > 0$ بالای محور xها قرار می‌گیرد. هم‌چنین در $x < 0$ تابع $f(x)$ اکیداً نزولی است پس نمودار $f'(x)$ در $x < 0$ پایین محور xها قرار می‌گیرد و در $x = 0$ چون به نمودار $f(x)$ خط مماس افقی رسم می‌شود پس شیب خط مماس برابر صفر است پس $f'(x)$ در این نقطه صفر می‌شود و به محور xها برخورد می‌کند. حالا یک بار با دقت به شکل‌های زیر توجه کنید:



می‌بینید که در یک نقطهٔ دلخواه سمت راست مبدأ مختصات، شیب خط مماس بر $f(x)$ مثبت شده است پس در همین نقطه، نمودار $f'(x)$ بالای محور xها قرار گرفته و در یک نقطهٔ دلخواه سمت چپ مبدأ مختصات، شیب خط مماس بر $f(x)$ منفی شده است پس در همین نقطه نمودار $f'(x)$ پایین محور xها قرار گرفته است و در $x = 0$ که خط مماس افقی شده، نمودار $f'(x)$ به محور xها برخورد کرده و صفر شده است.

مثال ۱۰۱ : اگر نمودار $f(x)$ به شکل زیر باشد، نمودار $f'(x)$ را رسم کنید.



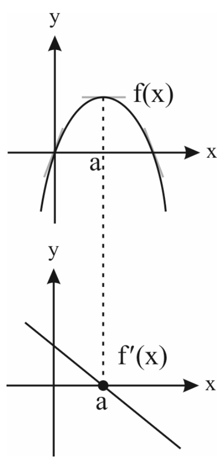
پاسخ: یک بار دیگر $f(x)$ را رسم می‌کنیم و زیر آن نمودار $f'(x)$ با این اطلاعات رسم می‌شود:

الف) در نقطهٔ $x = a$ خط مماس بر $f(x)$ افقی است پس $f'(x)$ در این نقطه صفر است.

ب) در فاصلهٔ $(a, +\infty)$ یعنی $x > a$، نمودار $f(x)$ اکیداً نزولی است (یا به عبارتی شیب خط‌های مماس منفی است) بنابراین $f'(x)$ منفی است و زیر محور xها قرار می‌گیرد.

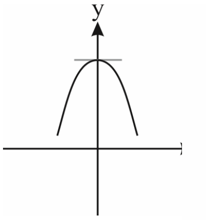
پ) در فاصلهٔ $(-\infty, a)$ یعنی $x < a$، نمودار $f(x)$ اکیداً صعودی است (یا به عبارتی شیب خط‌های مماس مثبت است) بنابراین $f'(x)$ مثبت است و بالای محور xها قرار می‌گیرد.

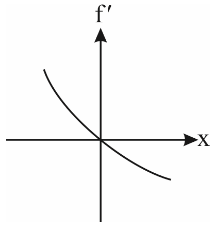
حالا به شکل‌ها توجه کنید:

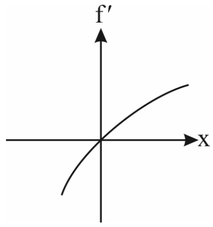


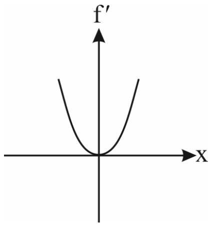
حالا برویم سراغ تست‌ها که نکات دیگر هم ببینیم؛ (البته در اندازه‌ای که موردنیاز کنکور است.)

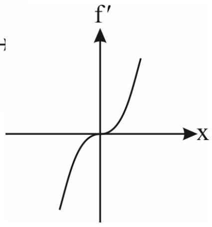
تست ۱۰۲: اگر نمودار $y = f(x)$ در همسایگی $x = ۰$ به صورت روبه‌رو باشد، نمودار f' در همسایگی $x = ۰$ به کدام صورت است؟



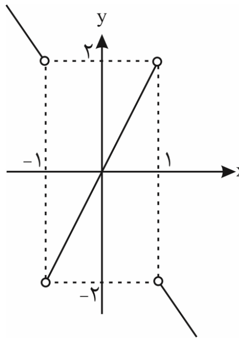
۱)


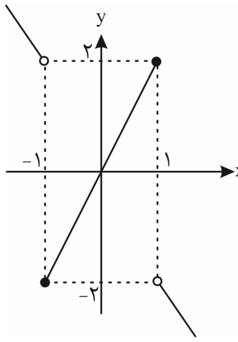
۲)


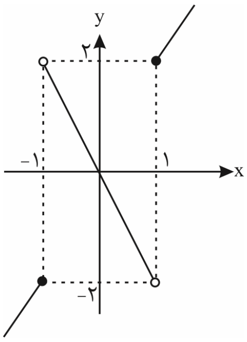
۳)


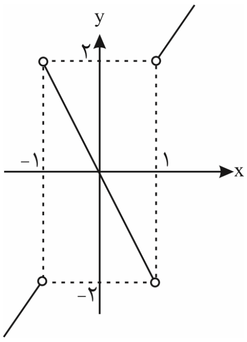
۴)


تست ۱۰۳: نمودار مشتق تابع $f(x) = |x^۲ - ۱|$ کدام است؟

۱)


۲)


۳)


۴)


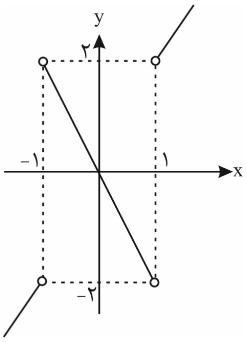
پاسخ: با ضابطه‌بندی تابع خواهیم داشت:

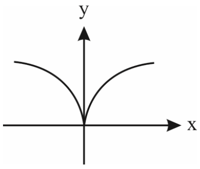
$$f(x) = \begin{cases} x^۲ - ۱ & x \geq ۱ \text{ یا } x \leq -۱ \\ ۱ - x^۲ & -۱ < x < ۱ \end{cases}$$

$x = \pm ۱$ ریشه‌های ساده داخل قدرمطلق هستند (گوشه) و مشتق‌ناپذیرند.

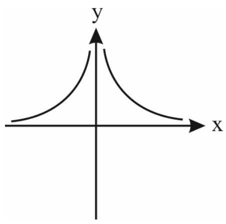
$$f'(x) = \begin{cases} ۲x & x > ۱ \text{ یا } x < -۱ \\ \text{تعریف‌نشده} & x = ۱ , x = -۱ \\ -۲x & -۱ < x < ۱ \end{cases}$$

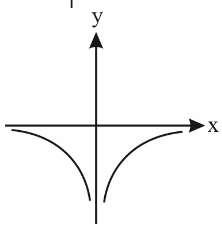
حالا f' را رسم می‌کنیم:

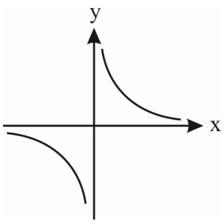


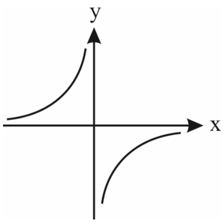
تست ۱۰۴: هرگاه نمودار تابع f به صورت 

باشد، نمودار f' به کدام شکل است؟

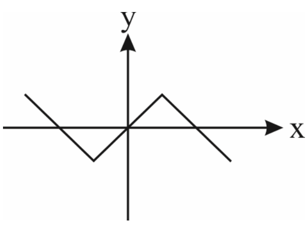
۱) 

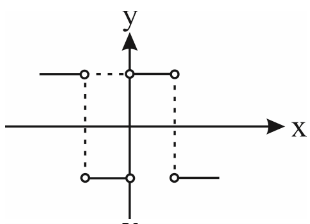
۲) 

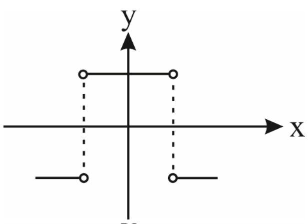
۳) 

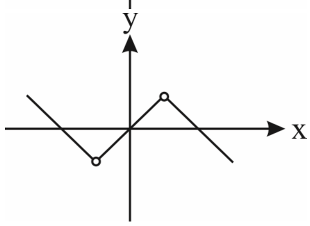
۴) 

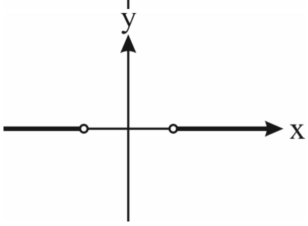
تست ۱۰۵: اگر نمودار تابع f به صورت مقابل باشد، نمودار تابع f' کدام است؟



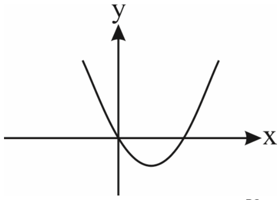
۱) 

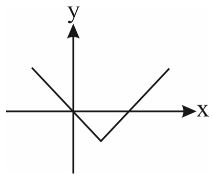
۲) 

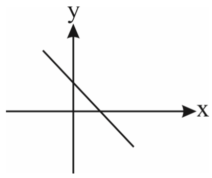
۳) 

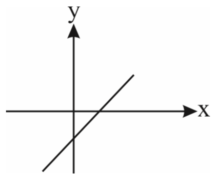
۴) 

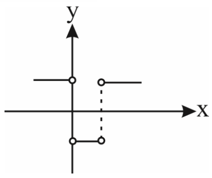
تست ۱۰۶: اگر نمودار تابع f به صورت زیر باشد، نمودار تابع مشتق آن کدام می‌تواند باشد؟



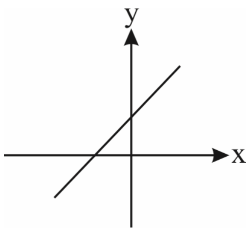
۱) 

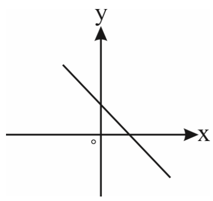
۲) 

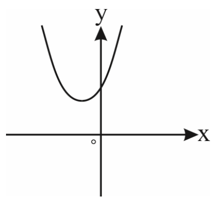
۳) 

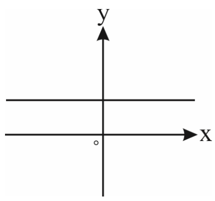
۴) 

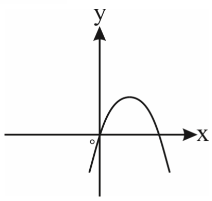
تست ۱۰۷: اگر f' به شکل مقابل باشد، f کدام است؟



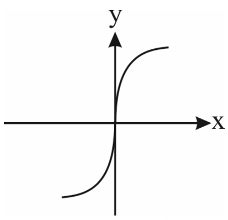
۱) 

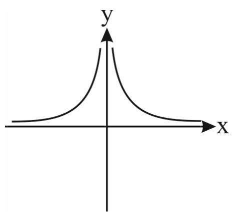
۲) 

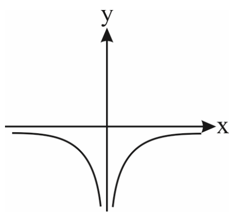
۳) 

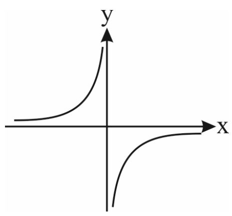
۴) 

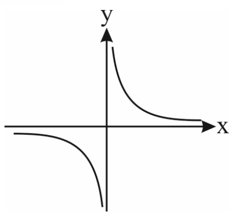
تست ۱۰۸: اگر تابع f به صورت روبه‌رو باشد، نمودار مشتق تابع f کدام است؟



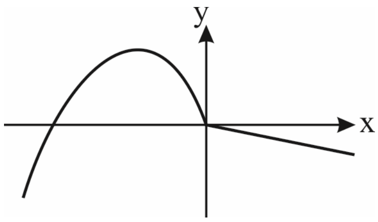
۱) 

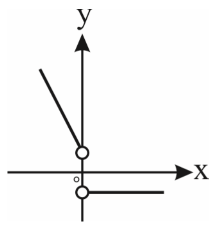
۲) 

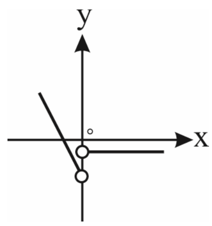
۳) 

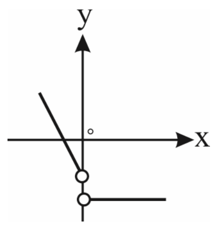
۴) 

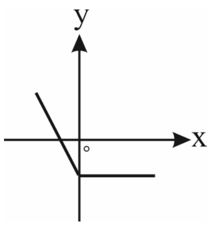
تست ۱۰۹: نمودار تابع f در شکل روبه‌رو، تشکیل شده از بخشی از نمودار یک تابع درجه دوم و یک نیم‌خط است. نمودار f' شبیه کدام است؟




۱)


۲)


۳)


۴)

ضابطه و دامنهٔ تابع مشتق

برای یافتن تابع مشتق تابع با ضابطهٔ $y=f(x)$ از تابع مشتق می‌گیریم و البته حواسمان هست که $f'(x)$ در نقاطی تعریف می‌شود که تابع f در آن نقاط مشتق‌پذیر باشد. به عبارتی باید حواسمان به دامنهٔ مشتق باشد حالا دامنهٔ تابع مشتق اصلاً یعنی چی؟

همان‌طور که قبلاً دیدیم تابع گاهی اوقات و یا در برخی نقاط مشتق‌پذیر نیست. دامنهٔ تابع مشتق مجموعهٔ تمام نقاطی از دامنهٔ تابع f است که در آن‌ها مشتق f وجود داشته باشد. حواستان باشد دامنهٔ تابع مشتق، زیرمجموعهٔ دامنهٔ خود تابع است. پس می‌توان نوشت:

$D_{f'} = D_f - \{\text{نقاط مشتق‌ناپذیر}\}$

در توابع چندجمله‌ای اگر دامنه را محدود نکنیم، دامنهٔ تابع با دامنهٔ تابع مشتق برابر است و داریم $D_{f'}=\mathbb{R}$ و در توابع گویا $D_{f'}=\mathbb{R}-\{\text{ریشه‌های مخرج}\}$.

مثال ۱۱۰ : مشتق‌پذیری تابع $f(x)=\begin{cases} ۲x-۱ & x<۰ \\ x^۲ & ۰\le x\le ۲ \\ ۴x-۴ & x>۲ \end{cases}$ را بررسی کرده و سپس دامنه و نمودار $f'(x)$ را مشخص کنید.

پاسخ:

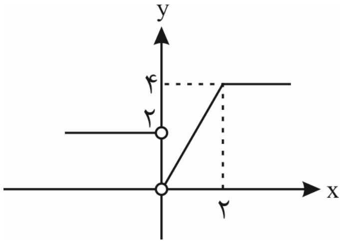
$$f(x)=\begin{cases} ۲x-۱ & x<۰ \\ x^۲ & ۰\le x\le ۲ \\ ۴x-۴ & x>۲ \end{cases} \Rightarrow f'(x)=\begin{cases} ۲ & x<۰ \\ ۲x & ۰<x<۲ \\ ۴ & x>۲ \end{cases}$$

ابتدا علامت مساوی را برای $x = ۰$ و $x = ۲$ نمی‌گذاریم و بعد از بررسی وضعیت مشتق‌پذیری اگر تابع در هر کدام از آن‌ها مشتق‌پذیر باشد علامت مساوی را برایش قرار می‌دهیم.

در $x = ۲$ تابع پیوسته است و هم‌چنین مشتق چپ و راست برابر است. پس $x = ۲$ در دامنهٔ تابع مشتق قرار دارد ولی در $x = ۰$ تابع ناپیوسته است بنابراین مشتق ندارد و $x = ۰$ در دامنهٔ تابع مشتق قرار ندارد.

$$f'(x) = \begin{cases} ۲ & x < ۰ \\ ۲x & ۰ < x \le ۲ \\ ۴ & x > ۲ \end{cases}$$

$$D_{f'} = D_f - \{۰\} = \mathbb{R} - \{۰\}$$

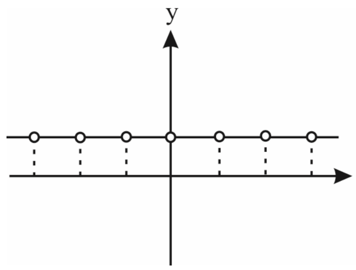


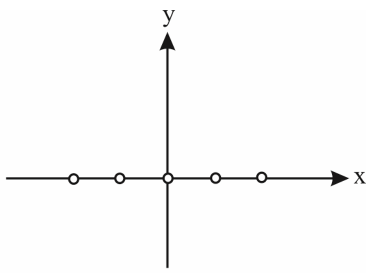
مثال ۱۱۱ : دامنهٔ مشتق تابع $f(x) = \sqrt[۳]{x+۱} + |x-۱|$ را پیدا کنید.

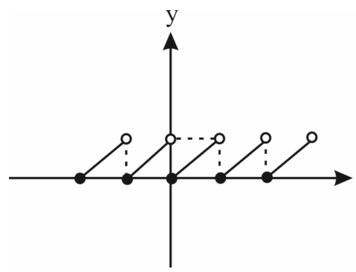
پاسخ: اولاً دامنهٔ خود تابع $\mathbb{R}$ است. ثانیاً این تابع در نقطهٔ $x = ۱$ به علت آن‌که نقطهٔ گوشه‌ای محسوب می‌شود و هم‌چنین در نقطهٔ $x = -۱$ به علت آن‌که ریشهٔ زیر رادیکال است مشتق‌پذیر نیست، پس: $D_{f'} = \mathbb{R} - \{-۱,۱\}$

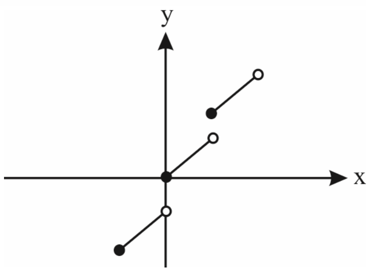
تیپ‌های متداول

تست ۱۱۲: نمودار مشتق تابع $f(x) = x + [x]$ کدام است؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

تست ۱۱۳: دامنهٔ مشتق تابع $f(x)=\sqrt[4]{2-|x|}$ کدام است؟

۱) $[-2,2]$ ۲) $(-2,2)-\{0\}$ ۳) $(-2,2)$ ۴) $(-2,0)$

تست ۱۱۴: در کدام تابع دامنهٔ تابع f با دامنهٔ f' برابر است؟

۱) $f(x)=|x^2-1|$ ۲) $f(x)=\frac{x}{x-1}$ ۳) $f(x)=[x]+[-x]$ ۴) $f(x)=\sqrt{x-1}$

مشتق مرتبهٔ دوم

مشتق تابع $y=f(x)$ را با نماد $y'=f'(x)$ نمایش می‌دهیم. به طریق مشابه می‌توانیم مشتق مرتبهٔ دوم تابع f را با نماد $y''=f''(x)$ نمایش بدهیم. به عنوان مثال اگر $f(x)=x^5-3x^4+x^2$ باشد، در این صورت:

$$f'(x)=5x^4-12x^3+2x \Rightarrow f''(x)=20x^3-36x^2+2$$

مثال ۱۱۵ : در تابع $f(x)=(2x-1)^2\sqrt{x^2+4x}$ مقدار $f''(\frac{1}{2})$ را پیدا کنید.

پاسخ: اگر توجه کنید $x=\frac{1}{2}$ باعث می‌شود تا $f(x)$ صفر شود. مشتق عامل صفرشونده یادتان هست؟ این‌جا عامل $(2x-1)^2$ در $\sqrt{x^2+4x}$ ضرب شده است پس برای یافتن مشتق در نقطهٔ $x=\frac{1}{2}$ کافی است فقط از عامل صفرشونده یعنی $(2x-1)^2$ مشتق بگیریم.

فقط فرقش با مثال‌های آن قسمت در این است که این‌جا توان عامل صفرشونده ۲ است ما هم مشتق مرتبه دوم را در $x=\frac{1}{2}$ می‌خواهیم پس کافی است ۲ بار از $(2x-1)^2$ مشتق بگیریم و $x=\frac{1}{2}$ را در بقیهٔ عبارت جاگذاری کنیم:

$$(2x-1)^2 \xrightarrow{\text{مشتق}} 4(2x-1) \xrightarrow{\text{مشتق}} 8 \Rightarrow f''(\frac{1}{2})=8\sqrt{(\frac{1}{2})^2+4(\frac{1}{2})}=8\sqrt{\frac{1}{4}+2}=8\sqrt{\frac{9}{4}}=8(\frac{3}{2})=12$$

حالا اگر در همین سؤال از ما مشتق اول را در $x=\frac{1}{2}$ می‌پرسید، جواب برابر صفر می‌شد.

توجه کنید که اگر درجهٔ عبارت صفرشونده بیشتر از مرتبهٔ مشتق باشد، مشتق برابر صفر است.

یادت باشه: اگر $f(x)$ یک چندجمله‌ای از درجهٔ n باشد آن‌گاه f' از درجهٔ $n-1$ و f'' از درجهٔ $n-2$ است.

تست ۱۱۶: اگر f یک چندجمله‌ای باشد و داشته باشیم $f'(x)f''(x)=x^{۹}+mx^{۸}$ آن‌گاه $f''(x)$ از درجهٔ چند است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: اگر فرض کنیم تابع f یک چندجمله‌ای از درجهٔ n باشد، f' از درجهٔ $n-۱$ و f'' از درجهٔ $n-۲$ خواهد بود. در این سؤال چون $f'f''$ از درجهٔ ۹ است، پس:

$$(n-۱)+(n-۲)=۹ \Rightarrow ۲n=۱۲ \Rightarrow n=۶$$

پس f'' از درجهٔ $n-۲$ یعنی ۴ است.

راستی اگر ۲ تابع چندجمله‌ای در هم ضرب شوند، درجه‌هایشان با هم جمع می‌شود پس در این سؤال f' و f'' که در هم ضرب شدند درجه‌هایشان با هم جمع شد.

تست ۱۱۷ : مقدار مشتق دوم $f(x)=x^{۲}\sqrt{۲-۳x}$ در نقطهٔ $x=۰$ برابر است با:

۱) $۲\sqrt{۲}$ ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۴) $-\frac{۳}{۲}\sqrt{۲}$

تست ۱۱۸ : اگر $f(x)$ یک چندجمله‌ای از درجهٔ n و $g(x)=f(f'(x)).f''(x)$ یک چندجمله‌ای از درجهٔ ۱۴ باشد، مقدار n کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

پاسخ: در درس‌نامه دیدیم که اگر f یک چندجمله‌ای از درجهٔ n باشد، f' از درجهٔ $n-۱$ و f'' از درجهٔ $n-۲$ است و هم‌چنین دیدیم که اگر ۲ تابع چندجمله‌ای در هم ضرب شوند درجه‌هایشان با هم جمع می‌شوند.

یک نکتهٔ دیگر هم باید بدانید که وقتی ۲ تابع چندجمله‌ای با هم ترکیب می‌شوند درجه‌هایشان در هم ضرب می‌شود مثلاً اگر $f(x)=x^{۲}$ و $g(x)=x^{۵}$ باشد:

$$f(g(x))=(x^{۵})^{۲}=x^{۱۰} \quad \text{و} \quad \text{درجه}=۲\times۵$$

حالا برویم سراغ سؤال:

$$g(x)=\underbrace{f}_{\text{درجهٔ}\,n}(\overset{\text{درجهٔ}\,n-۱}{f'(x)}).\underbrace{f''(x)}_{\text{درجهٔ}\,n-۲}$$

$$f(f'(x))\ \text{درجه}=n(n-۱)=n^{۲}-n$$

$$g(x)\ \text{درجه}=n^{۲}-n+n-۲=n^{۲}-۲=۱۴ \Rightarrow n^{۲}=۱۶ \Rightarrow n=۴$$

تست ۱۱۹ : تابع درجه دوم f چنان است که $f(۱)=۲$ و $f'(۱)=۳$ مقدار $f''(۱)=۴$ مقدار $f(۲)$ کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۰

تست ۱۲۰ : مشتق دوم تابع $y=\dfrac{\sqrt{x^۲-۱}+x+۱}{\sqrt{x+۱}+\sqrt{x-۱}}$ به ازای $x=۳$ برابر کدام است؟

۱) $\dfrac{-۱}{۸}$ ۲) $\dfrac{-۱}{۱۶}$ ۳) $\dfrac{-۱}{۳۲}$ ۴) $\dfrac{-۱}{۶۴}$

تست ۱۲۱ : تابع $y=\sqrt{x^۲+۱}$ در رابطهٔ $yy''+(y')^۲=a$ صدق می‌کند، مقدار a کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

تست ۱۲۲ : برای عدد مثبت a، تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases} x^۳-x+c & x\le a \\ bx^۴ & x>a \end{cases}$ در نقطهٔ $x=a$ مشتق مرتبهٔ دوم دارد. مقدار c کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) $\dfrac{۱}{۲}$ ۴) $\dfrac{-۱}{۲}$

پاسخ: برای این که این تابع در نقطهٔ مرزی a مشتق دوم داشته باشد، باید اولاً مشتق اول داشته باشد:

$$\begin{cases} f(a)=a^3-a+c \\ f(a^-)=a^3-a+c \Rightarrow ba^4=a^3-a+c \\ f(a^+)=ba^4 \end{cases}$$: شرط پیوستگی

$$\begin{cases} f'_-(a)=3x^2-1=3a^2-1 \\ f'_+(a)=4bx^3=4ba^3 \end{cases} \xrightarrow{f'_+(a)=f'_-(a)} 4ba^3=3a^2-1$$: شرط مشتق‌پذیری

دوماً حواستان باشد برای آن که f در $x=a$ مشتق دوم داشته باشد باید f' در a پیوسته باشد و $f''_+(a)=f''_-(a)$ باشد:

$$\begin{cases} f''_+(a)=12bx^2=12ba^2 \\ f''_-(a)=6x=6a \end{cases} \Rightarrow 12ba^2=6a \xrightarrow{\div 12a} ab=\frac{1}{2}$$

حالا باید در رابطهٔ $4ba^3=3a^2-1$ به جای ab قرار دهیم $\frac{1}{2}$:

$$4(ba)a^2=3a^2-1 \Rightarrow 4(\frac{1}{2})a^2=3a^2-1 \Rightarrow 2a^2=3a^2-1 \Rightarrow a^2=1 \Rightarrow a=\pm 1 \xrightarrow[\text{است } a>0]{\text{خودش گفته}} a=1$$

چون $ab=\frac{1}{2}$ است و $a=1$ پس: $b=\frac{1}{2}$.

حالا در رابطهٔ پیوستگی a و b را جاگذاری می‌کنیم:

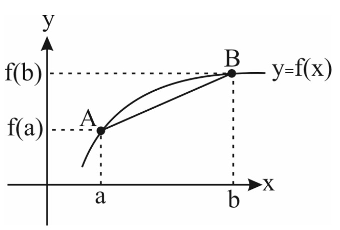
$$ba^4=a^3-a+c \Rightarrow \frac{1}{2}(1)^4=(1)^3-1+c \Rightarrow c=\frac{1}{2}$$

آهنگ تغییر

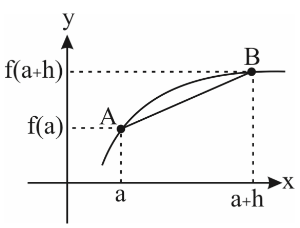
با مفهوم سرعت متوسط در فیزیک آشنا شده‌اید و دیدید که از رابطهٔ $\bar{V}=\frac{\Delta x}{\Delta t}$ برای پیداکردن سرعت متوسط استفاده می‌کنیم و هم‌چنین برای یافتن سرعت لحظه‌ای کافی است در لحظهٔ t مقدار مشتق تابع (مکان ـ زمان) را حساب کنیم. در درس ریاضی آهنگ متوسط و آهنگ تغییر لحظه‌ای را برای تابع f تعریف می‌کنیم. به طور کلی آهنگ متوسط تابع $y=f(x)$ در فاصلهٔ $[a,b]$ برابر است با:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

یعنی اگر دو نقطهٔ $A(a,f(a))$ و $B(b,f(b))$ روی تابع $y=f(x)$ باشند، آن‌گاه شیب خط قاطع A و B برابر آهنگ متوسط تابع f در بازهٔ $[a,b]$ است.



هم‌چنین می‌توان این تعریف را این‌گونه بیان کرد:



$$\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

تست ۱۲۳ : آهنگ متوسط تغییر تابع با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt{x^{۲}+۱۴۴}$ نسبت به متغیر x روی بازه‌ای از $x=۵$ تا $x=۹$ کدام است؟

(سراسری تجربی)

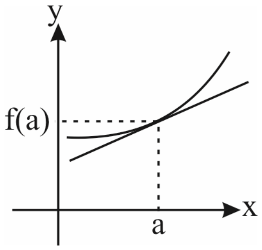
۱) ۰/۴ ۲) ۰/۵ ۳) ۰/۶ ۴) ۰/۷

پاسخ:

$$\text{آهنگ متوسط تغییر}=\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{f(۹)-f(۵)}{۹-۵}=\frac{\sqrt{۸۱+۱۴۴}-\sqrt{۲۵+۱۴۴}}{۴}=\frac{\sqrt{۲۲۵}-\sqrt{۱۶۹}}{۴}=\frac{۱۵-۱۳}{۴}=\frac{۲}{۴}=\frac{۱}{۲}=۰/۵$$

آهنگ لحظه‌ای (آنی)

آهنگ لحظه‌ای تابع $y=f(x)$ در نقطهٔ $x=a$ برابر $f'(a)$ است. به عبارت دیگر آهنگ لحظه‌ای تابع $y=f(x)$ در $x=a$ برابر شیب خط مماس بر $f(x)$ در نقطهٔ $x=a$ است.



از نظر هندسی شیب خط مماس بر تابع f در $x=a$ برابر آهنگ لحظه‌ای تغییر در $x=a$ می‌باشد.

تست ۱۲۴ : در تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{۳۶}{x^{۲}}$، آهنگ متوسط تابع از $x_۱=۲$ تا $x_۲=۳$ چه‌قدر از آهنگ لحظه‌ای آن در $x=\sqrt[۳]{۱۲}$ بیشتر است؟

(تجربی خارج ۹۰)

۱) ۱ ۲) ۱/۵ ۳) ۲ ۴) ۲/۵

پاسخ: آهنگ متوسط تغییر تابع $y=f(x)$ از $x=a$ تا $x=b$ برابر $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ و آهنگ لحظه‌ای همان مقدار مشتق تابع است.

$$\text{آهنگ متوسط}=\frac{f(۳)-f(۲)}{۳-۲}=\frac{\frac{۳۶}{۹}-\frac{۳۶}{۴}}{۳-۲}=\frac{۴-۹}{۱}=-۵$$

$$f(x)=\frac{۳۶}{x^{۲}}=۳۶x^{-۲}\Rightarrow f'(x)=-۷۲x^{-۳}=\frac{-۷۲}{x^{۳}}$$

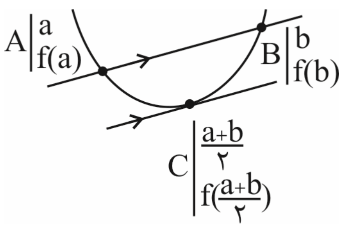
$$\text{آهنگ لحظه‌ای}=f'(\sqrt[۳]{۱۲})=\frac{-۷۲}{(\sqrt[۳]{۱۲})^{۳}}=\frac{-۷۲}{۱۲}=-۶$$

بنابراین آهنگ متوسط یک واحد از آهنگ لحظه‌ای بیشتر است.

یادت باشه: در تابع درجه دوم $f(x)=ax^{۲}+bx+c$ آهنگ متوسط در هر بازه، با آهنگ لحظه‌ای در وسط بازه برابر است یعنی:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\frac{a+b}{۲})$$

مفهوم: در تابع درجه دوم خط مماس در نقطهٔ وسط بازه با خط واصل نقاط سر و ته بازه موازی است.



تست ۱۲۵: در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=۳x^۲+۴x-۲$، تفاضل آهنگ لحظه‌ای در نقطه‌ی $a+\frac{h}{۲}$ از آهنگ متوسط تغییر تابع وقتی متغیر x از عدد a به عدد $a+h$ تغییر کند، کدام است؟

۱) h ۲) $۲h$ ۳) $۳h$ ۴) صفر

پاسخ: گزینه‌ی «۴» ــ در این سؤال $f(x)=۳x^۲+۴x-۲$ یک تابع درجه‌ی دوم و بازه‌ی $[a,a+h]$ است ضمناً وسط بازه $\frac{a+a+h}{۲}=a+\frac{h}{۲}$ است پس طبق درس‌نامه:

$$f'(a+\frac{h}{۲})=\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \Rightarrow f'(a+\frac{h}{۲})-\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=۰$$

تست ۱۲۶: در تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{۱}{۲}x^۲-\frac{۱}{x}$، اختلاف آهنگ تغییر لحظه‌ای در $x=۲$، از آهنگ تغییر متوسط در بازهٔ $[۱,۴]$ کدام است؟ *(تجربی ۹۸)*

۱) ۰/۲۵ ۲) ۰/۵ ۳) ۰/۴۵ ۴) ۰/۷۵

تست ۱۲۷: آهنگ متوسط تغییر تابع $y=\sqrt{۲۱-x^۲+۴x}$ در بازهٔ $[۵,۶]$، برابر آهنگ تغییر لحظه‌ای این تابع، با کدام مقدار x است؟ *(سراسری ریاضی ۹۹)*

۱) $۴+\sqrt{۲}$ ۲) $۳+۲\sqrt{۲}$ ۳) $۲+\frac{۳}{۲}\sqrt{۲}$ ۴) $۲+\frac{۵}{۲}\sqrt{۲}$

پاسخ: گزینهٔ «۴» $y=\sqrt{۲۱-x^۲+۴x}$

آهنگ متوسط در بازهٔ $[۵,۶]$ برابر است با:

$$\frac{f(۶)-f(۵)}{۶-۵}=\frac{\sqrt{۲۱-۳۶+۲۴}-\sqrt{۲۱-۲۵+۲۰}}{۱}=\frac{\sqrt{۹}-\sqrt{۱۶}}{۱}=-۱$$

آهنگ لحظه‌ای نیز برابر است با:

$$y'=\frac{-۲x+۴}{۲\sqrt{۲۱-x^۲+۴x}}=\frac{\cancel{۲}(-x+۲)}{\cancel{۲}\sqrt{۲۱-x^۲+۴x}}=\frac{-x+۲}{\sqrt{۲۱-x^۲+۴x}}$$

با برابر قرار دادن این دو داریم:

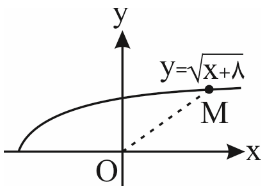
$$\frac{-x+۲}{\sqrt{۲۱-x^۲+۴x}}=-۱ \Rightarrow x-۲=\sqrt{۲۱-x^۲+۴x}\ (*) \xrightarrow{\text{به توان ۲}} x^۲-۴x+۴=۲۱-x^۲+۴x$$

$$\Rightarrow ۲x^۲-۸x-۱۷=۰ \Rightarrow x=\frac{۸\pm\sqrt{۲۰۰}}{۴}=۲\pm\frac{۵}{۲}\sqrt{۲} \xrightarrow[(*)]{x\geq ۲} x=۲+\frac{۵}{۲}\sqrt{۲}$$

تست ۱۲۸: نقطه‌ی $M(x,y)$ بر روی منحنی به معادله‌ی $y=\sqrt{x+8}$ در حال حرکت است. T فاصله‌ی نقطه‌ی M تا مبداء مختصات است. آهنگ تغییر لحظه‌ای T در نقطه‌ی $x=7$ کدام است؟

۱) $\frac{15}{16}$ ۲) $\frac{15}{8}$ ۳) $\frac{3}{7}$ ۴) $\frac{5}{4}$

پاسخ: گزینه‌ی «۱» ـ ابتدا منحنی تابع را رسم می‌کنیم:



نقطه‌ای مانند $M(x,\sqrt{x+8})$ را روی منحنی در نظر می‌گیریم و فاصله‌ی آن را تا مبداء با فرمول $T=\sqrt{x^2+y^2}$ پیدا می‌کنیم:

$$T=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{x^2+(\sqrt{x+8})^2}=\sqrt{x^2+x+8}$$

حالا از T نسبت به x مشتق می‌گیریم:

$$T=\sqrt{x^2+x+8}\Rightarrow T'=\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+8}}$$

حالا به T مقدار ۷ را می‌دهیم:

$$T(7)=\frac{2(7)+1}{2\sqrt{7^2+7+8}}=\frac{15}{2\sqrt{64}}=\frac{15}{16}$$

سرعت متوسط و سرعت لحظه‌ای

دو مفهومی که در درس فیزیک بارها نام آن را شنیده‌اید، مفاهیم سرعت لحظه‌ای و سرعت متوسط است. بیایید یک بار دیگر با هم این مفاهیم را ببینیم:

سرعت متوسط: فرض کنیم معادلهٔ حرکت یک متحرک که در امتداد یک خط حرکت می‌کند به صورت $S=f(t)$ باشد در این صورت:

$$\bar{V}=\text{سرعت متوسط}=\frac{\text{تغییرات مکان}}{\text{تغییرات زمان}}=\frac{\Delta S}{\Delta t}=\frac{S_2-S_1}{t_2-t_1}=\frac{f(t_2)-f(t_1)}{t_2-t_1}$$

سرعت لحظه‌ای: آهنگ لحظه‌ای تغییر S را سرعت لحظه‌ای می‌نامیم:

$$V=S'=f'(t)$$

راستی خوبه که با چند تا از اصطلاحات آشنا شوید:

۱) برخورد با زمین: اگر جسمی در راستای قائم حرکت کند و معادلهٔ ارتفاع برحسب زمان آن $h=f(t)$ باشد، با قراردادن $h=0$ زمان برخوردبا زمین به دست می‌آید.

۲) جهت حرکت: اگر $V>0$ باشد حرکت در جهت مثبت محور مکان است و اگر $V<0$ باشد حرکت در خلاف جهت محور مکان است.

۳) توقف: لحظه‌ای که سرعت لحظه‌ای صفر می‌شود.

مثال ۱۲۹ : ماشینی که با سرعت ثابت در حال حرکت است در لحظهٔ $t=0$ ترمز می‌گیرد تا این‌که متوقف شود. اگر فاصلهٔ مکان ماشین از لحظهٔ ترمز برحسب زمان به صورت $S(t)=24t-2t^2$ باشد:

الف) سرعت ماشین پس از چند ثانیه صفر می‌شود؟

ب) سرعت ماشین در لحظهٔ شروع ترمز چقدر بوده است؟

پ) سرعت متوسط ماشین از لحظهٔ شروع ترمز تا توقف کامل چقدر است؟

پاسخ: الف) به دنبال لحظه‌ای هستیم که سرعت لحظه‌ای برابر صفر می‌شود:

کافی است از معادلهٔ داده‌شده نسبت به t مشتق بگیریم:

$$S(t)=24t-2t^2$$

$$V=S'(t)=24-4t \Rightarrow S'(t)=0 \Rightarrow 4t=24 \Rightarrow t=6$$

توجه کنید که ۶ ثانیه از لحظهٔ ترمزگرفتن تا ایستادن ماشین طول می‌کشد.

ب) لحظهٔ شروع ترمز یعنی $t=0$، پس سرعت لحظه‌ای ماشین در $t=0$ را پیدا می‌کنیم:

$$S'(0)=24-4(0)=24$$

پ) با توجه به (الف) و (ب)، سرعت متوسط متحرک از لحظهٔ ترمز $(t=0)$ تا لحظهٔ توقف $(t=6)$ برابر است با:

$$\text{سرعت متوسط}=\frac{S(6)-S(0)}{6-0}=\frac{(24(6)-2(6)^2)-0}{6-0}=\frac{6(24-12)}{6}=12$$

توفیق و رستگاری را از خدا بخواهید.