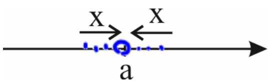
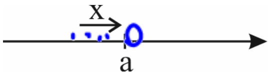
حد و پیوستگی کنکور (3 تست)

۱) وقتی می‌گوییم **x** میل می‌کند به سمت عدد **a** (و این‌جوری می‌نویسیمش: $x \to a$) منظورمان این است که **x** روی محور اعداد در یک همسایگی محذوف **a** بسیار به **a** نزدیک می‌شود، یعنی **x** تقریباً برابر **a** است؛ این شکلی:



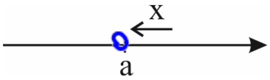
$x \neq a$

۲) وقتی می‌گوییم **x** از سمت چپ به **a** میل می‌کند (که این‌جوری می‌نویسیمش: $x \to a^-$) منظورمان این است که **x** روی محور اعداد از سمت اعداد کوچک‌تر از **a** به آن نزدیک می‌شود؛ این شکلی:



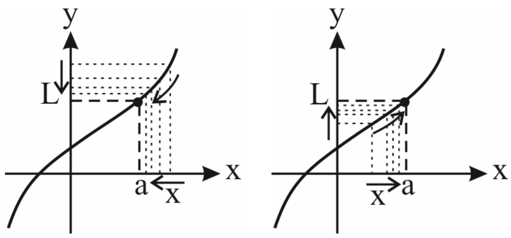
a کمتر با سمت چپ a

۳) وقتی می‌گوییم **x** از سمت راست به **a** میل می‌کند (که این‌جوری می‌نویسیمش: $x \to a^+$) منظورمان این است که **x** روی محور اعداد از سمت اعداد بزرگ‌تر از **a** به آن نزدیک می‌شود؛ این شکلی:



a بیشتر با سمت راست a

حالا بیایید حد را از روی نمودار تابع بررسی کنیم:

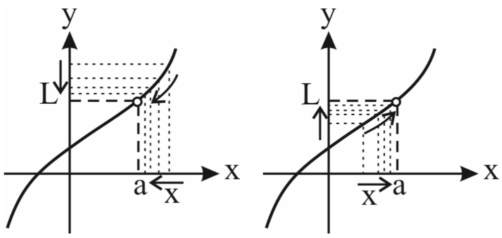


(الف)

تابع در همسایگی راست و چپ **a** تعریف شده

حد چپ = حد راست

تابع در $x = a$ حد دارد.

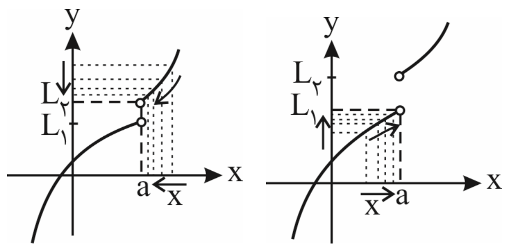


(ب)

تابع در همسایگی راست و چپ **a** تعریف شده

حد چپ = حد راست

تابع در $x = a$ حد دارد

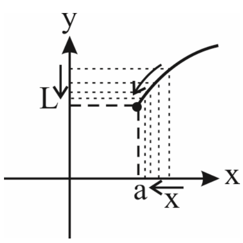


(پ)

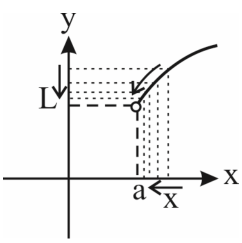
تابع در همسایگی راست و چپ **a** تعریف شده

حد چپ $\neq$ حد راست

تابع در $x = a$ حد ندارد.



(ت)



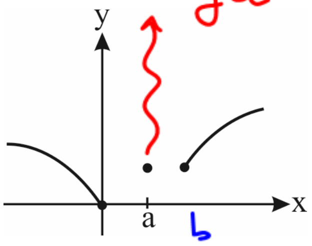
(ث)

تابع در همسایگی راست **a** تعریف شده

تابع در $x = a$ حد راست دارد ولی کلاً در این نقطه حد ندارد.

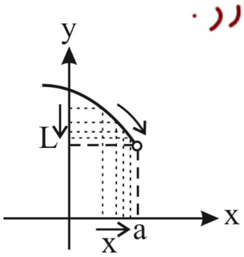
اگر $l_1 \neq l_2$ حد ندارد.
اگر $l_1 = l_2 =$ عدد برابر باشه حد دارد.

تابع در نقطه منفرد حد ندارد.
Single Point

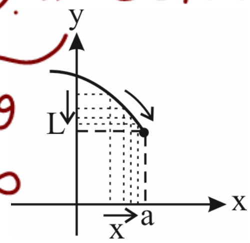


(ح)

ونه ∞ برابر
∞ عدد نیست.



(چ)



(ج)

تابع در همسایگی چپ **a** تعریف شده
تابع در **x = a** حد چپ دارد ولی کلاً در این نقطه حد ندارد.

تابع در هیچ همسایگی **a** تعریف نـشده و در **x = a** حد ندارد.

$D_f\ (-\infty, 0] \cup \{a\} \cup [b, +\infty)$

وقتی می‌خواهیم ببینیم یک تابع وقتی $x \to a$ حد دارد یا نه، مهم‌ترین موضوع بررسی دامنه‌ی تابع است، البته لازم نیست تمـام دامنــه را پیدا کنیم. منظورمان این است که باید ببینیم آیا تابع در یک همسایگی راست یا چپ نقطه‌ی **a** تعریف شده یا نه، یعنی کافی است وضعیت تابع را در اطراف نقطه‌ی **a** بررسی کنیم.

عدد برابر
$l_2 = l_1$

اگر تابع در همسایگی راست و چپ نقطه‌ی **x = a** تعریف شده باشد وقتی حد دارد که حد راست تابع برابر حد چپ آن باشد.

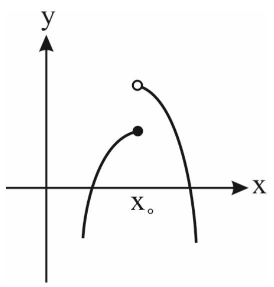
سوال ۱: جواب حد .... از جنس y است ....

حد در نقطه‌ی x_0 یعنی .... نیش y چپ و راست نقطه x_0 و با خود نقطه x_0 کاری نداریم ....

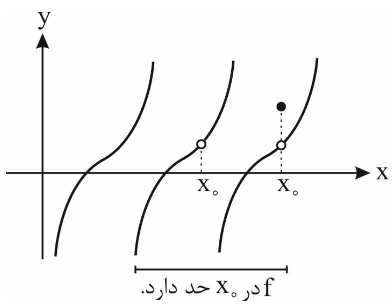
حد در صورت وجود باید .... یکتا و متناهی باشند یعنی دو تا نشود و ∞ هم نشود ....

جهش تابع: $(\Delta L = |L_2 - L_1|)$

اگر $f(x)$ در x_0 حد نداشته باشد، در x_0 دچار جهش می‌شود.



تابع در x_0 جهش دارد $\equiv$ در x_0 حد ندارد



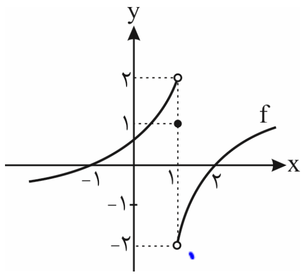
تابع در x_0 جهش ندارد $\equiv$ در x_0 حد دارد

بالا یا پایین پریدن یک نقطه یا حذف یک نقطه، جهش محسوب نمی‌شود و تابع در آن نقطه حد دارد.

(۱) وقتی حد را از روی نمودار می‌پرسند، حد چپ و راست را جداگانه پیدا می‌کنیم.

خود یک

تست ۲: در شکل روبه‌رو، حاصل $f(۱)+\lim\limits_{x\to ۱^-} f(x)-\lim\limits_{x\to ۱^+} f(x)$ کدام است؟



۱) ۱

۲) ۳

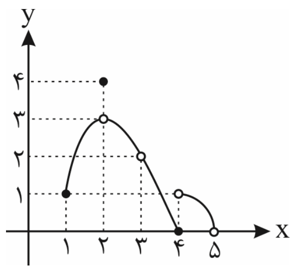
۳) ۵

۴) وجود ندارد.

$1 + 2 - (-2) = 5$

نکته: در نقطه x حد چپ حد راست و مقدار تابع می‌تونه ۳ عدد مختلف باشه.

تست ۳: نمودار تابع f به صورت مقابل می‌باشد. تابع f در چند نقطه حد ندارد؟



۱) صفر

۲) ۱

۳) ۲

۴) ۳

$x=1,5,4$ سر و ته بازه و جایی که شکستگی داره $x=4$

$x=1,5$

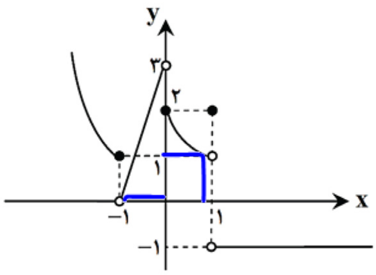
$\lim\limits_{x\to 2} f(x)=3$ در $x=2,3,4$ حد داره.

$\lim\limits_{x\to 3} f(x)=2$

در $x=1$ تابع از چپ تعریف نشده در $x=5$ از راست تعریف نشده.

در $x=4$ حد چپ صفره و حد راست برابر یک هست.

تست ۴: نمودار تابع $f(x)$ به شکل زیر است. حاصل $\lim\limits_{x\to(-۱)^+} f(x)+\lim\limits_{x\to ۱^-} f(x)$ کدام است؟



۱) ۱

۲) ۲

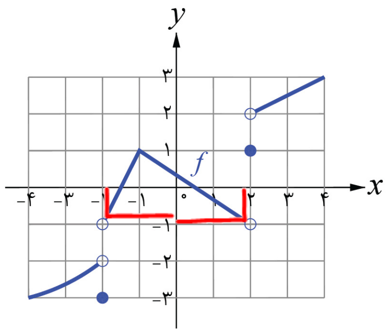
۳) ۳

۴) ۴

$1 + 0 = 1$

$\lim_{x\to a} f(g(x) = \overset{\text{خود}}{L} \text{ یا } L^- \text{ یا } L^+) =$ بازی رو تابع داخلی شروع میکنه جواب رو دقیق‌شو می‌دم دست تابع بیرونی

تست ۵: با توجه به شکل، حاصل $\lim_{x\to 1^+}(f(3-x)+f(x-3))$ کدام است؟



۱) ۱
۲) ۲-
۳) ۳-
۴) صفر

$\lim_{x\to 1^+} f(3-1^+ = 2^-) = -1$

$1,1$

$\lim_{x\to 1^+ = 1,1 = 1+\varepsilon} f(x-3 = (-2)^+) = -1$

$x-3 = (1+\varepsilon)-3 = -2+\varepsilon$ $(-2)^+$

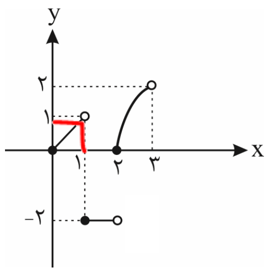
$x\to 1^+ = 1+\varepsilon$

اپسیلون: یه عدد ریز مثبت

$(1^+ = 1,1)-3 = -1,9$

$-2 \qquad -1$

تست ۶: نمودار تابع f به صورت شکل مقابل است. حاصل $\lim_{x\to 2^+} f(\frac{1}{2x-3})$ کدام است؟



۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۲-

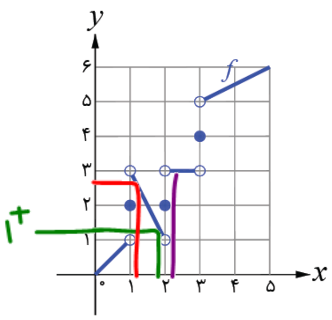
$\lim f\left(\frac{1}{\underbrace{2(2)^+}_{2^+}-3 = 1^+} = \text{کسر کمتر از واحد} = 1^-\right) = 1$

اگر $\frac{1}{1}$ بود یک ولی نه $\frac{1}{1^+} = 1^-$

$$\boxed{\frac{5}{6}<1 \qquad \frac{5}{5}=1 \text{ واحد} \qquad \frac{5}{4}>1}$$

جواب آخر حد را L^- و L^+ نمی‌گیریم

تست ۷: با توجه به شکل، مجموع حدهای راست و چپ تابع fof در $x\to 2$ کدام است؟



۱) ۵
۲) ۶
۳) ۷
۴) ۸

$\lim_{x\to 2^-} f(f(2^-) = 1^+) = f(1^+) = 3$

$\lim_{x\to 2^+} f(f(2^+) = \overset{\text{خود}}{3}) = f(\overset{\text{خود}}{3}) = 4$

جمع → ۷

تذکر مهم: اگر $x\to a$ و a یک مقدار ابتدا یا انتهای دامنه باشد نیازی به حد چپ یا حد راست خود را از دست می‌دهد. اگر هم نقطه منفرد از دامنه بود هم حد چپ و راست از دست می‌رود
مثلاً اگه $D_f: (-\infty,1]\cup\{2\}\cup[10,+\infty)$ باشد f در $x=2$ حد ندارد

سوال ۸: در مورد حد تابع $f(x)=\sqrt{1-x}$ در $x=1$ چه می‌توان گفت؟ حد ندارد. زیرا باید $1-x\geq 0$ و $1\geq x$,

$D_f:(-\infty,1]$ تابع در راست $x=1$ تعریف نشده. حد راست ندارد. لذا ممکن حد در

$x=1$ ندارد. $x=1$ یک حفره دیواره‌ای (انتها) است. (نقطه انتهای دامنه)

تست ۹: در کدام نقطه حدهای راست و چپ تابع $f(x)=\sqrt{x^2-x}+\sqrt{2x-x^2}$ هیچ‌کدام وجود ندارند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) صفر Single Point ۴) $\frac{3}{2}$

$x^2-x=x(x-1)\geq 0$: $+$ ۰ $-$ ۱ $+$

$2x-x^2=x(2-x)\geq 0$: $-$ ۰ $+$ ۲ $-$

اشتراک $D_f:\{0\}\cup[1,2]$ ، $\frac{3}{2}=1.5$

تست ۱۰: تابع $f(x)=\sqrt{x-3+2b}$ در $x=a$ حد ندارد، ولی $f(a)=2-b$. مقدار $2a+3b$ کدام است؟ نکته: $y=\sqrt{u}$ در ریشه u حد ندارد.

۱) صفر ۲) -2 ۳) ۶ ۴) ۴

a ریشه زیر رادیکال

$(f(a)=2-b)$ و $(f(a)=0) \to 2-b=0$ ، $\boxed{2=b}$

$f(a)=\sqrt{a-3+2b}=0$

$a-3+2(2)=0$

$\boxed{a=-1}$

(۲) وقتی حد در نقطهٔ مرزی (نقطهٔ تغییر ضابطه) پرسیده می‌شود، حد چپ و راست را در آن نقطه جداگانه پیدا می‌کنیم. به طور کلی در توابع دو و یا چند ضابطه‌ای همیشه به نقطهٔ مرزی توجه ویژه‌ای می‌کنیم چون تابع در این نقطه از لحاظ حددار بودن مشکوک است.

تست ۱۱: به ازای کدام مجموعه مقادیر a، تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}(x+a)^2 & x\geq -1\\ 2x+1 & x<-1\end{cases}$ در نقطهٔ $x=-1$ حد دارد؟ $l_1=l_2$

۱) $\{0\}$ ۲) $\{2\}$ ۳) $\varnothing$ ۴) $\mathbb{R}$

$\lim_{x\to -1} f \begin{cases} x\to(-1)^+ & (-1+a)^2=L_1\\ x\to(-1)^- & 2x+1=-1=L_2\end{cases}$

شرط حد دار بودن: $l_1=l_2$

$(-1+a)^2=-1$

امکان ندارد و هیچ a پیدا نمی‌شود. $a\in\varnothing$

هرگز $(-1+a)^2$ برابر عدد منفی نمی‌شود

$l_1 = l_2$

تست ۱۲: اگر تابع $f(x)=\begin{cases}3x^2-1 & x>2\\ ax-b & x<2\end{cases}$ در $x=2$ حد داشته باشد و $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=4$ باشد، مقدار $a-b$ کدام است؟

۱) $\frac{26}{3}$ ۲) -4 ۳) 11 ۴) $-\frac{11}{3}$

$\lim\limits_{x\to(-1)} f(x) = ax-b = \boxed{-a-b=4}$

$\lim\limits_{x\to 2} f\begin{cases} x\to 2^+ & 3(2)^2-1=11=L_1\\ x\to 2^- & ax-b=2a-b=L_2\end{cases}$ $L_1=L_2 \longrightarrow \boxed{2a-b=11}$

$+\begin{cases}a+b=-4\\ 2a-b=11\end{cases}$ $3a=7 \longrightarrow a=\frac{7}{3}$ $b=-4-\frac{7}{3}=-\frac{19}{3}$ $a-b=\frac{7}{3}-\left(-\frac{19}{3}\right)=\frac{26}{3}$

(۳) در توابع چندجمله‌ای به شکل $f(x)=ax^n+bx^{n-1}+\cdots+c$ یا توابع مثلثاتی $f(x)=\sin^n x$ و $f(x)=\cos^n x$ و $y=a^x$ و توابعی به شکل $f(x)=|ax^n+bx^{n-1}+\cdots+c|$ و $f(x)=\sqrt[2n+1]{ax^n+bx^{n-1}+\cdots+c}$، تابع در تمام نقاط دامنه‌اش (یعنی $\mathbb{R}$) حد دارد و حد تابع برابر مقدار تابع است. و حد با جاگذاری بدست می‌آید.

تعریف حددار بودن

اگر حد چپ و راست در x_0 متناهی و موجود و برابر باشد، تابع را در x_0 حددار گوییم (عدد برابر)، یعنی مثلاً اگر حد چپ و راست هر دو $+\infty$ شد، گوییم تابع در $x=0$ حد متناهی ندارد، بلکه حد نامتناهی دارد.

در محاسبه‌ی حد، عمل جاگذاری و عمل چپ و راست را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

در حدهای معمولی (حد توابع پیوسته) مثل محاسبه‌ی حد چندجمله‌ای‌ها در یک نقطه از عمل جاگذاری استفاده می‌شود:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$$

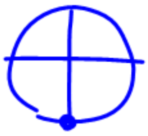
$$\lim_{x\to 1}\frac{3+|x|}{|2-x|+1}=\frac{4}{2}=2$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\cos^2 x=\frac{1}{4}$$

$$\lim_{x\to 1} x^3+2x=1+2=3$$

سوال ۱۳: حد زیر را محاسبه کنید.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}(\tan 2x+\sin 3x)=\underbrace{\tan\frac{\pi}{3}}_{\sqrt{3}}+\underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{1}$$



تست ۱۴: حد تابع $y=\frac{\sin^{2} x+2\cos x}{2\sin^{2} x-\cos x}$ وقتی $x\to -\frac{\pi}{2}$ کدام است؟

۱) -2 ۲) 2 ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $-\frac{1}{2}$

$-\frac{\pi}{2}$

$$\frac{(-1)^2+2(0)}{2(-1)^2-0}=\frac{1}{2}$$

تست ۱۵: اگر $f(x+2)=\frac{x+4}{x}$ حاصل $\lim_{x\to 2} f(x)$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۲/۵ ۴) ۳/۵

می‌خوام توی شکلم f برابر ۴ بشه پس $x+2=4$

$x=2 \rightsquigarrow =\frac{2+4}{2}=\frac{6}{2}=3$

تست ۱۶: اگر تابع f در نقطهٔ $x=1$ دارای حد نامنفی و $\lim_{x\to 1}\frac{f^{2}(x)+1}{f(x)+1}=\frac{5}{2}$ باشد، حاصل $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{f(x)+1}}{1-f(x)}$ برابر کدام است؟

۱) ۱ ۲) -1 ۳) ۳ ۴) -3

$\lim_{x\to 1} f(x)=L\geq 0$

$\lim_{x\to 1}\frac{L^2+1}{L+1}=\frac{5}{2} \rightsquigarrow 2L^2+2=5L+5$

ضرب

$2L^2-5L-3=0$ $\quad \boxed{1L^2-5L-6=0 \to L_1=-1\ ,\ L_2=6}$

$L_1=-\frac{1}{2}$ $\quad L_2=\frac{6}{2}=3=L$ نامنفی

$\rightsquigarrow \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{f+1}}{1-f}=\frac{\sqrt{3+1}}{1-3}=\frac{2}{-2}=-1$

نکته: اگر حد تابع جزء صحیح را در نقطه‌ای بپرسند که داخل جزء صحیح، $\mathbb{Z}$ نشود، مثل موارد ~~بالا~~ زیر کافی است فقط جاگذاری کنید.

تست ۱۷: اگر $f(x)=|x|+[x+\frac{\sqrt{3}}{2}]$ باشد، حد چپ در $x=3$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۴

$$\lim_{x\to 3^-=2.9} f(x)=|3^{+}|+\underbrace{\left[3^-+\left(\frac{\sqrt{3}=1.7}{2}=0.85\right)=3.85^-\right]}_{3}$$

$$=3+3=6$$

(۴) توابع شامل جزء صحیح

هرگاه داخل جزء صحیح، $\mathbb{Z}$ شود باید حد چپ و راست را جداگانه پیدا کنیم مگر آن که خود طراح فقط حد چپ یا راست را بپرسد. جلوتر نیز در قسمت حدهای $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$، به جزء صحیح برخورد می‌کنیم که بیشتر در موردش صحبت خواهیم کرد.

تست ۱۸: حاصل $\lim\limits_{x\to 0}[x]\dfrac{\cos x}{2+\sin x}$ کدام است؟

۱) صفر ‏ ‏ ۲) $\frac{1}{2}$ ‏ ‏ ۳) $-\frac{1}{2}$ ‏ ‏ ۴) موجود نیست. ✓

$$\lim_{x\to 0}\begin{cases} x\to 0^+ & [0^+]\dfrac{\cos 0}{2+\cancel{\sin 0}} = (\text{صفر})\left(\frac{1}{2}\right) = \text{صفر} \\ x\to 0^- & [0^-]\dfrac{\cos 0}{2+\cancel{\sin 0}} = (-1)\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

اینستا و تلگرام
@salamianriazi

تست ۱۹: حاصل $\lim\limits_{x\to(-2)^-} x[x][x^2]$ کدام است؟

۱) -18 ‏ ‏ ۲) 18 ‏ ‏ ۳) -24 ‏ ‏ ۴) 24

$(-2)^- = -2.1$

-3 ‏ ‏ -2

$$\lim_{x\to(-2)^-} x[x][x^2] = (-2)\left[(-2)^- = -2.1\right]\left[(-2.1)^2 = 4.\ldots\right] = (-2)(-3)(4) = 24$$

تست ۲۰: حاصل $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x^2+[x]}{[-x]}$ کدام است؟

۱) 2 ‏ ‏ ۲) 3 ‏ ‏ ۳) -2 ‏ ‏ ۴) -3

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{x^2+[x]}{[-x]} = \frac{x^2+2 = (2)^2+2 = 6}{[-(2^+ = 2.1) = -2.1] = -3} = -2$$

اول براکتو بر می‌داریم به جاش عدد می‌ذاریم

تست ۲۱: مجموع حد راست و چپ تابع $y=[x]+[2x]$ وقتی $x\to -\frac{1}{2}$ کدام است؟

-0.5

۱) -4 ‏ ‏ ۲) -6 ‏ ‏ ۳) -5 ‏ ‏ ۴) -3

$$\left.\begin{cases} x\to\left(-\frac{1}{2}\right)^- = -0.6 \quad -\frac{1}{2}-\varepsilon & [-0.6]+[2(-0.6) = -1.2] = -1-2 = -3 \\ x\to\left(-\frac{1}{2}\right)^+ = -0.4 \quad -\frac{1}{2}+\varepsilon & [-0.4]+[2(-0.4) = -0.8] = -1-1 = -2 \end{cases}\right\}\ \text{مجموع} = -5$$

تست ۲۲: برای کدام a تابع $f(x)=[x]^2-3[x]$ در $x=a$ حد دارد؟ $a\in Z$

۱) ۱　　۲) ۲　　۳) ۳　　۴) ۴

$x\to a^+$: $[a^+]^2-3[a^+]=a^2-3a=L_1$

$x\to a^-$: $[a^-]^2-3[a^-]=(a-1)^2-3(a-1)=a^2-2a+1-3a+3=L_2$

$L_1=L_2 \to \cancel{a^2}-3a=\cancel{a^2}-5a+4$

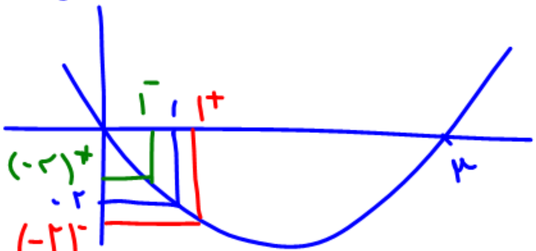
$2a=4 \to a=2$

تست ۲۳: حاصل $\lim_{x\to 1}[x^2-3x]$ کدام است؟

سهمی داخل براکت بکش

۱) صفر　　۲) -2　　۳) -3　　۴) حد ندارد.

$y=x^2-3x=x(x-3)$



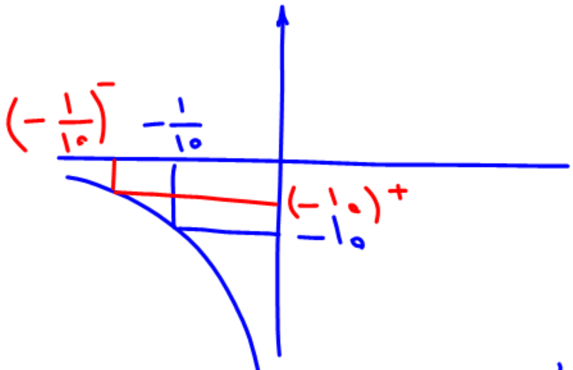
$x\to 1^-$: $[(-2)^+]=-2$

$x\to 1^+$: $[(-2)^-]=-3$

تست ۲۴: در تابع $y=[\frac{1}{x}]$ وقتی $x\to-\frac{1}{10}$ حد چپ کدام است؟

$y=\frac{1}{x}$ را بکش

۱) ۱۱　　۲) -9　　۳) -10　　۴) -11



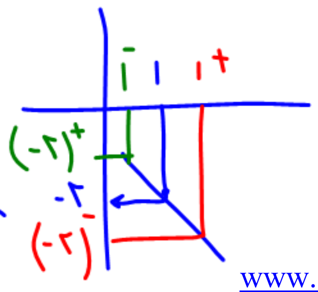
$\lim_{x\to(-\frac{1}{10})^-}\left[\frac{1}{x}=(-10)^+\right]=-10$

نکته: اگر $\lim_{x\to a}[f(x)]$ و $f(a)=L$ حاصل $f'(a)$ را پیدا کن اگر $f'(a)>0$ بود f در a صعودی و اگر $f'(a)<0$ بود f در a نزولیه و با توجه به شکل حد را حل کن.

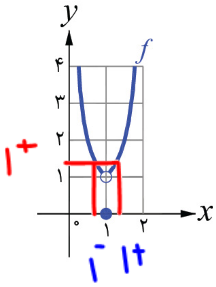
$\lim_{x\to 1}[x^2-3x]$

$f(x)=x^2-3x$　　$f(1)=-2$

$f'(x)=2x-3$　　$f'(1)=-1<0$ نزولی



تست ۲۵: با توجه به شکل، حاصل $\lim\limits_{x\to 1}[\frac{2}{f(x)}]$ برابر کدام است؟



۱) ۱

۲) ۲

۳) صفر

۴) وجود ندارد.

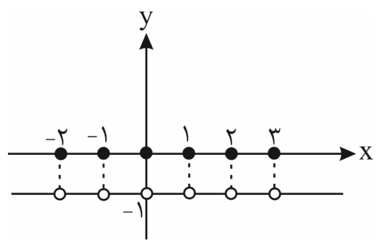
$\lim\limits_{x\to 1}[\frac{2}{1^+} = 2^-] = 1$

می‌بینیم f در ۲ طرف x=1 عرضش 1^+ است

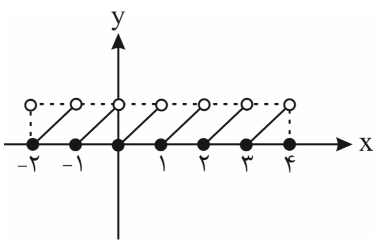
ولی $\frac{2}{1}=2$ $\frac{2}{1^+}=2^-$ است. از دبستان می‌دانیم $\frac{2}{1}=2$ و این که اگر مخرج کسری بزرگ شود، کسر کمی کم می‌شود.

دو تابع مهم

با دو تابع از این تابع‌ها خیلی سروکار دارید:



(۲) $f(x)=[x]+[-x]$



(۱) $f(x)=x-[x]$

حالا به نمودار $f(x)=[x]+[-x]$ نگاه کنید. از روی نمودار معلوم است که در تمام نقاط $\mathbb{R}$، حد تابع برابر (-1) است.

تست ۲۶: حاصل $\lim\limits_{x\to 1}[x-[x]]$ کدام است؟

۱) -1

۲) صفر

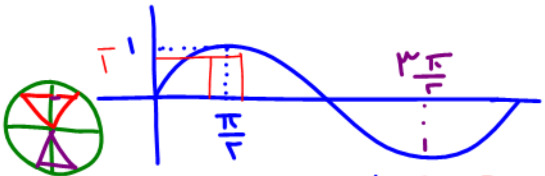
۳) ۱

۴) حد ندارد.

راه یک: عدد Z از براکت بیاد بیرون $\lim\limits_{x\to 1}[x\underbrace{-[x]}_{\in Z}] = [x]-[x] = 0$

راه دو: $\lim\limits_{x\to 1}[0\leq x-[x]<1] = 0$

هرگاه درون براکت صحیح شود و تابع داخل براکت max یا min نشود حد ندارد. مثلاً $y=[x]$ در $x=\dots,-2,-1,0,\dots$ حد نـدارد ولی در $x=-\sqrt{2},\frac{-1}{2},\frac{1}{2}$ حد دارد.



$\lim_{x\to\frac{3\pi}{2}}[\sin x]=-1$ ، $(-1)^+$

$y=[2x]$ در $x=-\frac{1}{2}$ و $x=1$ حد ندارد اما در $x=\frac{1}{3}$ حد دارد.

$y=[\sqrt{x}]$ در $x=1$ حد ندارد ولی در $x=2$ حد دارد.

$y=[\sin x]$ در $x=\frac{\pi}{6}$ حد دارد اما در $x=\pi$ حد ندارد.

$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}[\sin x]\begin{cases}x\to\frac{\pi}{2}^+ & [1^-]=0\\ x\to\frac{\pi}{2}^- & [1^-]=0\end{cases}$ $\quad\begin{cases}x\to\frac{3\pi}{2}^+ & [(-1)^+]=-1\\ x\to\frac{3\pi}{2}^- & [(-1)^+]=-1\end{cases}$

اگر درون براکت در نقطه‌ای صحیح شود و تابعِ درون براکت در آن نقطه max و یا min شود، تابع در آن‌جا حد دارد. مثلاً $[\sin x]$ در نقاط $x=\frac{\pi}{2}$ و $x=\frac{3\pi}{2}$ حد دارد و یا $[x^2]$ در نقطهٔ $x=0$ حد دارد.

$\lim_{x\to0}[x^2]=\begin{cases}x\to0^+ & [0^+]=0\\ x\to0^- & [(0^-)^2=0^+]=0\end{cases}$ حد دارد

x^2 در صفر Min نسبی است.

تست ۲۷: حاصل $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}[\sin 3x][\cos 4x]$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۱- ۳) صفر ۴) وجود ندارد.

$\begin{cases}x\to\frac{\pi}{2}^+ & [\sin\frac{3\pi}{2}^+][\cos 4(\frac{\pi}{2})^+=\cos(2\pi^+)^-]=(-1)(\text{صفر})=0\\ x\to\frac{\pi}{2}^- & [\sin\frac{3\pi}{2}^-]_{(-1)^+}[\cos 4(\frac{\pi}{2})^-=\cos(2\pi)^-]=(-1)(\text{صفر})=0\end{cases}$

تست ۲۸: حاصل $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}[\sin 2x]$ کدام است؟

۱) ۱- ۲) صفر ۳) ۱ ۴) حد ندارد.

$\begin{cases}x\to\frac{\pi}{2}^- & [\sin 2(\frac{\pi}{2}^-)=\sin\pi^-=0^+]=[0^+]=\text{صفر}\\ x\to\frac{\pi}{2}^+ & [\sin 2(\frac{\pi}{2}^+)=\sin\pi^+=0^-]=[0^-]=-1\end{cases}$

تست ۲۹: حاصل $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}[\frac{1}{\sin 3x}]$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱- ۳) ۲- ۴) حد ندارد.

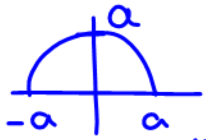
$\begin{cases}x\to\frac{\pi}{2}^- & [\frac{1}{\sin(\frac{3\pi}{2})^-=-\frac{9}{10}}=-\frac{10}{9}=-1/\dots]=-2\\ x\to\frac{\pi}{2}^+ & [\frac{1}{\sin(\frac{3\pi}{2})^+=-\frac{9}{10}}=-\frac{10}{9}=-1/\dots]=-2\end{cases}$

-9 مثل $(-1)^+$

$\frac{3\pi}{2}^-$ ، $\frac{3\pi}{2}^+$

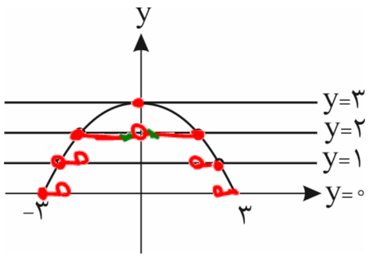
رسم $y=[u]$ با دانستن u : u را بین خطوط $y=z$ برش دهیم. این خطوط به تابع خورد برخورد کرد از بالا نور بتابون به قسمت های بین ۲ خط را بریز روی خط پایین. زیر هر نقطه پر یک نقطه توخالی است.

نکته: $y=\sqrt{a^2-x^2}$ نیم دایره به شعاع a



تست ۳۰: تابع $y=[\sqrt{9-x^2}]$ در چند نقطه از دامنه‌اش حد ندارد؟

۱) ۳   ۲) ۴   ۳) ۵   ۴) ۶



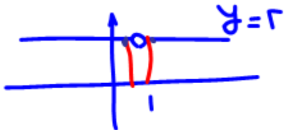
پاسخ: گزینه‌ی «۴» ـ به دنبال نقاطی هستیم که داخل براکت صحیح باشد و چون فقط به دنبال تعداد نقاط هستیم بهتر است نمودار عبارت داخل براکت را رسم کنیم. نمودار تابع $f(x)=\sqrt{9-x^2}$ به صورت یک نیم‌دایره به مرکز مبدأ مختصات و شعاع ۳ است. در $x=\pm 3$ که در یک همسایگی تعریف نشده حد ندارد. $x=0$ طول ماکزیمم نسبی است پس در آن حد دارد. در ۴ نقطه‌ی دیگر که داخل براکت صحیح می‌شود هم حد ندارد.

$\frac{\text{صفر نبی}}{\text{صفر نبی}}=$ هر عدد   (هر عدد) صفر نبی = صفر نبی $\frac{0}{0}=2$ یا $\frac{0}{0}=3$

حالت $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$:

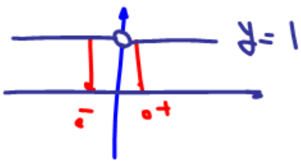
به حالت‌هایی که در شرایط مشابه، جواب‌های مختلف یا هر عددی از آن‌ها به دست می‌آید، اصطلاحاً مبهم گفته می‌شود. مثلاً $\lim_{x\to 0} y=\frac{x}{x}=\frac{0}{0}=1$ یا $\lim_{x\to 1} y=\frac{2x-2}{x-1}=\frac{0}{0}=\frac{2(x-1)}{x-1}=2$.

$y=\frac{2x-2}{x-1}=\frac{2(x-1)}{x-1}=2$



$\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ برابر هر عددی می‌تواند باشد، زیرا اگر (هر عدد $=\frac{0}{0}$) را طرفین وسطین کنیم، (صفر = هر عدد × صفر) است. به یافتن جواب کسر $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ عمل رفع ابهام گفته می‌شود.

$y=\frac{x}{x}=1$, $x\neq 0$



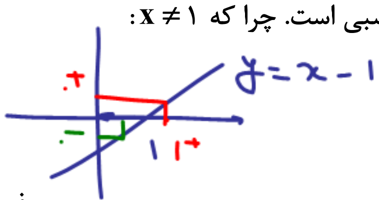
$\lim_{x\to 0} y=\frac{x}{x}=\frac{0}{0}=1$

رفع ابهام حالت $\frac{0}{0}$:

در ابتدا باید بدانیم هر $\frac{0}{0}$ مبهم نیست و تنها $\frac{\text{صفرنسبی(حدی)}}{\text{صفرنسبی(حدی)}}$ مبهم است و باید رفع ابهام شود. در این‌جا اشاره می‌کنیم که صفر نسبی (حدی) با صفر مطلق (خود صفر) فرق دارد. مثلاً در تابع $f(x)=x-1$ وقتی مقدار تابع به ازای $x=1$ را می‌یابیم جواب صفر مطلق می‌شود، اما حد تابع وقتی $x\to 1$ برابر صفر نسبی است. چرا که $x\neq 1$:

در بیلیت جواب آخر حد 0^+ یا 0^- نباشد.

$$\lim_{x\to 1} x-1\begin{cases} x\to 1^+ & 1^+-1=0^+=0 \\ x\to 1^- & 1^--1=0^-=0\end{cases}$$



$f(x)=x-1 \xrightarrow{x=1} f(1)=1-1=0$ صفر مطلق

حد تابع در $x=1$ برابر صفر، عرض از در خواهیک صفرنسبت

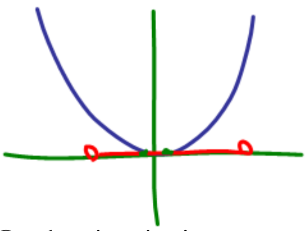
توجه: $(1^-)^2=1^-$ $(0^-)^2=0^+$

$(-0/1)^2=0/01$

$(0/9)^2=0/81=1^-$

$$\lim_{x\to 0}[x^2]\begin{cases} x\to 0^+ & [0^+]=0= \text{صفرمطلق} \\ x\to 0^- & [(0^-)^2=0^+]=0= \text{صفرمطلق}\end{cases}$$

حد دارد.



$y=[x^2]$

انواع $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$:

اگر مخرج صفر مطلق بود، حاصل تعریف نشده است و جواب وجود ندارد.

۱) $\frac{\text{صفرنسبی}}{\text{صفرنسبی}}$ = مبهم است ← رفع ابهام ← مثال : $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}}=1$

صفر = عدد ریز

۲) $\frac{\text{صفرمطلق}}{\text{صفرنسبی}}$ = صفر ← مبهم نیست ← مثال : $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{[x]}{x}=\frac{[0^+]}{0^+}=\frac{0}{0^+}=0$

۳) $\frac{\text{صفرمطلق}}{\text{صفرمطلق}}$ = تعریف نشده (وجود ندارد) ← مثال : $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{[x]}{[x]}=\frac{[0^+]}{[0^+]}=\frac{\text{خودصفر}}{\text{خودصفر}}=$ تعریف نشده

۴) $\frac{\text{صفرنسبی}}{\text{صفرمطلق}}$ = تعریف نشده (وجود ندارد) ← مثال : $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x}{[x]}=\frac{\text{صفرنسبی}}{\text{صفرمطلق}}=$ تعریف نشده

رفع ابهام $\frac{0}{0}$ در توابع جبری:

با توجه به توضیحات درس‌نامه در این قسمت یاد می‌گیریم که با ابهام‌های $\frac{0}{0}$ چگونه برخورد و آن‌ها را رفع ابهام کنیم.

در ابتدای بخش با روش‌های رفع ابهام $\frac{0}{0}$ در توابع جبری آشنا می‌شویم که در زیر آمده است. فقط برای تأکید هم که شده، دوباره به شیپور زیر توجه کنید.

در محاسبه‌ی حد توابع شامل قدرمطلق و جزء صحیح، اول باید قدرمطلق را با تعیین علامت و جزء صحیح را با تعیین مقدار، حذف کنیم و سپس حد را محاسبه کنیم.

الف) حذف عامل صفرشونده: در این حالت با استفاده از تجزیه، فاکتورگیری یا اتحادهای مناسب، عامل صفرشونده‌ی یکسان از صورت و مخرج را حذف می‌کنیم و سپس مقدار حد را در آن نقطه می‌یابیم.

مثال ۳۱:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-4}=\frac{0}{0}=\text{مبهم}=\lim_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}(x-3)}{\cancel{(x-2)}(x+2)}=\frac{2-3}{2+2}=\frac{-1}{4}$$

$x-2=$ عامل ابهام یا صفرساز یا مبهم کن

$$\lim_{x\to -4}\frac{x^2+3x-4}{x^3+4x^2+x+4}=\frac{0}{0}\ \text{مبهم}=\lim_{x\to -4}\frac{\cancel{(x+4)}(x-1)}{\cancel{(x+4)}(x^2+1)}=\frac{-4-1=-5}{(-4)^2+1=17}=\frac{-5}{17}$$

$x-(-4)$

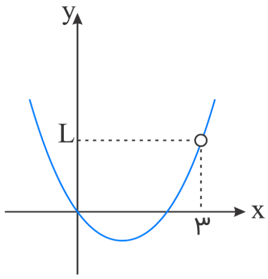
$x+4$

$x^2(x+4)+(x+4)$

قاعده هوپیتال: در مبهم $\frac{0}{0}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

تست ۳۲: اگر نمودار تابع $f(x)=\frac{x^3+nx^2+6x}{x-3}$ به صورت شکل زیر باشد، مقدار $n+L$ کدام است؟



۱) ۳

۲) -۲

۳) -۵

۴) ۲

نکته: طول حفره هم صورت و هم مخرج کسر را صفر می‌کند.

$\xrightarrow[x=3]{\text{صورت}} 3^3+n(3)^2+6(3)=0 \quad 27+9n+18=0$

$n=-5$

نکته: عامل حفره کسر در ریشه مشترک صورت و مخرج

$$\lim_{x\to3}\frac{x^3-5x^2+6x}{x-3}=\frac{x(x^2-5x+6)}{x-3}=\frac{x\cancel{(x-3)}(x-2)}{\cancel{x-3}}=3=L$$

تست ۳۳: حاصل $\lim\limits_{x\to2^+}\frac{x^2[x]-8}{x^2-2x}$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) صفر ۳) وجود ندارد. ۴) ۲

پاسخ: گزینه‌ی «۱» ـ اول جزء صحیح را تعیین مقدار می‌کنیم: براکتو برمی‌داریم به جاش عدد می‌ذاریم:

$$x\to2^+ \Rightarrow [x]=2 \Rightarrow \text{حد}=\lim_{x\to2^+}\frac{(x^2)(2)-8}{x^2-2x}=\lim_{x\to2^+}\frac{2x^2-8}{x^2-2x}$$

این حد ابهام $\frac{0}{0}$ دارد. برای رفع ابهام باید با استفاده از اتحادها و یا تجزیه، عامل صفرشونده را از صورت و مخرج حذف کنیم (دقت کنید، با توجه به این که $x\to2^+$، عامل صفرشونده $(x-2)$ است که باید از صورت و مخرج حذف شود):

$$\text{حد}=\lim_{x\to2^+}\frac{2(x^2-4)}{x^2-2x}=\lim_{x\to2^+}\frac{2(x-2)(x+2)}{x(x-2)}=\lim_{x\to2^+}\frac{2(x+2)}{x}=\frac{2(2+2)}{2}=4$$

تست ۳۴: حاصل $\lim\limits_{x\to2^+}\frac{x^2-4}{x^3-[x^3]}$ کدام است؟ (تجربی ۱۴۰۱)

۱) صفر ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) ۱ ۴) $+\infty$

$$\lim_{x\to2^+}\frac{x^2-4}{x^3-[(2^+)^3=8^+]}=\lim_{x\to2^+}\frac{x^2-4=\cancel{(x-2)}(x+2)}{x^3-8=\cancel{(x-2)}(x^2+2x+4)}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$$

ب) گویا کردن: گاهی در محاسبه‌ی حد توابع شامل رادیکال، برای رفع ابهام می‌توانیم از گویا کردن صورت یا مخرج کسر (یا هر دو) استفاده کنیم.

مثال ۳۵: حاصل $\lim\limits_{x\to ۱}\frac{۱-x}{۱-\sqrt{x}}$ را بیابید.

پاسخ: حد داده‌شده دارای ابهام $\frac{۰}{۰}$ است. برای رفع ابهام از گویاکردن استفاده می‌کنیم.

$$\lim_{x\to ۱}\left(\frac{۱-x}{۱-\sqrt{x}}\times\frac{۱+\sqrt{x}}{۱+\sqrt{x}}\right)=\lim_{x\to ۱}\frac{(۱-x)(۱+\sqrt{x})}{۱-x}=\lim_{x\to ۱}۱+\sqrt{x}=۱+۱=۲$$

$$(a-b)(a+b)=a^2-b^2$$

تست ۳۶: حاصل $\lim\limits_{x\to ۴}\frac{۳-\sqrt{۲x+۱}}{۲-\sqrt{x}}$ کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۴}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

$$\lim_{x\to ۴}\frac{(۳-\sqrt{۲x+۱})}{\underbrace{(۲-\sqrt{x})}}\cdot\frac{(۳+\sqrt{۲x+۱})}{(۳+\sqrt{۲x+۱})}\cdot\underbrace{\frac{(۲+\sqrt{x})}{(۲+\sqrt{x})}}=\lim_{x\to ۴}\frac{(۹-۲x-۱)(۲+\sqrt{\cancel{x}})}{\cancel{(۴-x)}(۳+\sqrt{۲x+۱})}=\frac{۲(۴)}{۳+۳=۶}=\frac{۴}{۳}$$

$$۸-۲x=۲\cancel{(۴-x)}$$

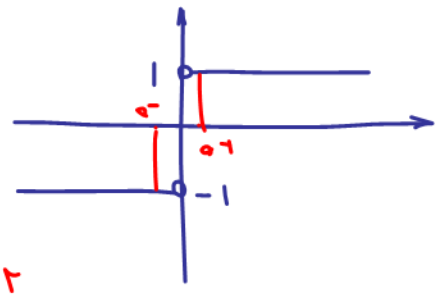
(۵) توابع شامل قدرمطلق

در محاسبه‌ی حد توابعی که شامل قدرمطلق هستند، اگر داخل قدرمطلق صفر شده و حاصل حد به صورت مبهم $\frac{۰}{۰}$ دربیاید، باید حد چپ و راست را جداگانه بررسی کنیم.

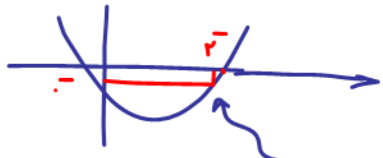
برای این کار ابتدا عبارت داخل قدرمطلق را تعیین علامت می‌کنیم. سپس عبارت‌ها را از قدرمطلق خارج کرده و حد تابع را می‌یابیم.

مثال ۳۷:

$$\lim_{x\to ۰}\frac{x}{|x|}=\begin{cases}\lim\limits_{x\to ۰^+}\frac{x}{|x|}=\frac{x}{x}=۱=l_۱\\[2mm] \lim\limits_{x\to ۰^-}\frac{x}{|x|}=\frac{x}{-x}=-۱=l_۲\end{cases}$$



$l_۱ \neq l_۲$ حد ندارد.



تست ۳۸: حد عبارت $\dfrac{|x^{۲}-x-۲|}{۲x-\sqrt{x^{۲}+۱۲}}$ وقتی $x\to ۲^{-}$ کدام است؟ (ریاضی ۹۰)

۱) -۳ ۲) -۲ ۳) ۲ ۴) ۳

$$\lim_{x\to ۲^{-}} \frac{-(x^{۲}-x-۲)=-(x+۱)\cancel{(x-۲)}(۲x+\sqrt{x^{۲}+۱۲})}{(۲x-\sqrt{x^{۲}+۱۲})(۲x+\sqrt{x^{۲}+۱۲})=۴x^{۲}-x^{۲}-۱۲=۳x^{۲}-۱۲=۳(x^{۲}-۴)=۳\cancel{(x-۲)}(x+۲)}=(-۳)(۸)$$

$$=\frac{(-\cancel{۳})(\cancel{۸})^{۲}}{\cancel{۳}(\cancel{۴})}=-۲$$

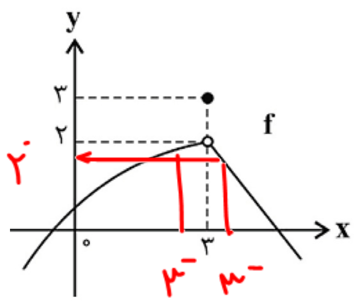
تست ۳۹: حد چپ تابع $f(x)=\dfrac{(۳-[x])\sqrt{x^{۲}-۶x+۹}}{x-۳}$ در نقطه‌ی $x=۳$ کدام است؟

۱) صفر ۲) -۱ ۳) ۱ ۴) موجود نیست.

$$\lim_{x\to ۳^{-}} f(x)=\frac{(۳-\cancel{[x]}^{۲})\sqrt{(x-۳)^{۲}}}{x-۳}=\frac{|x-۳|}{x-۳}=\frac{-(x-۳)}{x-۳}=-۱$$

تست ۴۰: با توجه به نمودار تابع f، حاصل $\lim\limits_{x\to ۳}\dfrac{f^{۳}(x)-۸}{|f(x)-۲|}$ کدام است؟

۴
$۲^{-}-۲$
صفر $\ominus$



۱) ۱۲
۲) -۴
۳) -۱۲
۴) ۴

$$\lim \frac{f^{۳}-۸}{-(f-۲)}=\lim_{x\to ۲}\frac{\cancel{(f-۲)}(f^{۲}+۲f+۴)}{-\cancel{(f-۲)}}=-۱۲$$

ج) تغییر متغیر: در این‌جا با کمک تغییر متغیر مناسب، حد را به نقطه‌ی صفر منتقل می‌کنیم. پس برای محاسبه‌ی $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ با فرض $x-a=t$ (با توجه به این که $x\to a$ بنابراین $x-a\to ۰$ و در نتیجه $t\to ۰$):

$$\begin{cases} x=a+t \\ x\to a \Rightarrow t\to ۰ \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{t\to ۰}\frac{f(a+t)}{g(a+t)}$$

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x-1=t\\ t\to 0}} \frac{2\sqrt{t}+t}{\sqrt{t}} = \frac{\cancel{\sqrt{t}}(2+\sqrt{t})}{\cancel{\sqrt{t}}} = 2$$

مثال ۴۱: حاصل $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{2\sqrt{x-1}+x-1}{\sqrt{x-1}}$ را بیابید.

پاسخ: حد داده‌شده دارای ابهام $\frac{0}{0}$ است. بنابراین از تغییر متغیر برای محاسبه‌ی حد کمک می‌گیریم:

$$\begin{cases} x-1=t \Rightarrow x=t+1 \\ x\to 1^+ \Rightarrow t\to 0^+ \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to 1^+} \frac{2\sqrt{x-1}+x-1}{\sqrt{x-1}} = \lim_{t\to 0^+} \frac{2\sqrt{t}+t}{\sqrt{t}} = \frac{0}{0}$$

حالا برای رفع ابهام از $\sqrt{t}$ در صورت فاکتور می‌گیریم و از حذف عامل صفرشونده استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{2\sqrt{t}+t}{\sqrt{t}} = \lim_{t\to 0^+} \frac{\sqrt{t}(2+\sqrt{t})}{\sqrt{t}} = \lim_{t\to 0^+} (2+\sqrt{t}) = 2+0 = 2$$

د) استفاده از هم‌ارزی: حد یک چندجمله‌ای وقتی $x\to 0$ برابر حد جمله‌ی با کم‌ترین توان آن چندجمله‌ای است.

برای مثال $x^3-3x^2 \underset{x\to 0}{\sim} -3x^2$ (علامت $\sim$ به معنای هم‌ارز بودن است.) هم‌ارزش

مثال ۴۲: حاصل $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3+3x^2-x}{x^2+2x}$ را بیابید.

پاسخ: چون حد داده‌شده ابهام $\frac{0}{0}$ دارد، برای رفع ابهام از هم‌ارزی استفاده می‌کنیم. (دقت کنید که $x\to 0$)

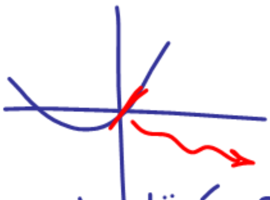
$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3+3x^2-x}{x^2+2x} = \lim_{x\to 0} \frac{-x}{2x} = -\frac{1}{2}$$

سوال ۴۳: حاصل حد روبه‌رو را بیابید.

$$\lim_{x\to 0} \frac{x+\sqrt[3]{x}+2x^2}{\sqrt[3]{8x}+x^3} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{8x}} = \sqrt[3]{\frac{x}{8x}} = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{8x-x^3+2\sqrt{x}}{4x^2+x^3-\sqrt{x}} = -2$$

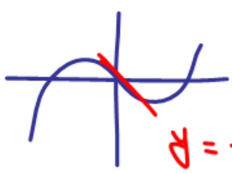
$$y = x^2+x \underset{x\to 0}{\sim} x \qquad x(x+1)$$



می‌بینیم نمودار سهمی $y=x^2+x$ حوالی صفر شبیه $y=x$ با جمله کم‌توان هست.

نکته: در تست‌های تشخیص منحنی با کمک این داستان می‌توان شکل نمودار را در حوالی $x=0$ با جمله کم‌توان متوجه شد.

$$y = x^3-x \underset{x\to 0}{\sim} -x$$



تست ۴۴: در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x} & x>0\\ -\sqrt{1+x} & x\leq 0\end{cases}$، حاصل $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x^3-x)$ کدام است؟ (ریاضی ۸۹)

۱) ۱- ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) موجود نیست.

ضابطه اول

$$\lim_{x\to 0^-} f\left(x^3-x \xrightarrow[x\to 0^-]{\text{هم‌توان}} -x=-(0^-)=0^+\right)=f(0^+)=\sqrt{1-x}=\sqrt{1-0}=1$$

$$x^3-x \overset{x\to 0^-}{\sim} -x$$

علامت هم‌ارزی

روش هوپیتال

اگر توابع f و g در نقطه‌ی x_0 مشتق‌پذیر باشند و $f(x_0)=0$ و $g(x_0)=0$ آن‌گاه:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

در مبهم $\frac{0}{0}$ و $\frac{\infty}{\infty}$ (اگر f و g در نقطه‌ی x_0 یا وقتی x به $\pm\infty$ می‌رود، مشتق‌پذیر باشند) می‌توان از این روش استفاده کرد.

پس تسلط بر تمام فرمول‌های مشتق‌گیری برای استفاده از روش هوپیتال ضروری است.

در مبهم $\frac{0}{0}$ و $\frac{\infty}{\infty}$: از صورت و مخرج جداگانه مشتق می‌گیریم و سپس حد را حساب می‌کنیم. اگر باز هم مبهم بود به عمل مشتق‌گیری مستقل ادامه می‌دهیم.

چند قاعدهٔ مشتق‌گیری:

$y=b \longrightarrow y'=0$ $\qquad y=\frac{1}{2}\longrightarrow y'=0$

$y=ax+b \longrightarrow y'=a$ $\qquad y=\frac{x}{2}-7\longrightarrow y'=\frac{1}{2}$

$y=kx^n \longrightarrow y'=knx^{n-1}$ $\qquad y=7x^5 \rightsquigarrow y'=7(5x^4)$

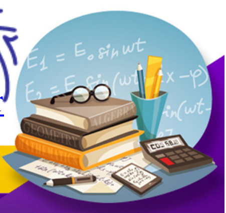
$y=\frac{1}{x}=x^{-1}\longrightarrow y'=-1x^{-2}=\frac{-1}{x^2}$

$y=\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}\longrightarrow y'=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

$y=u\pm v\longrightarrow y'=u'\pm v'$: $\quad y=x^3-4x^2\rightsquigarrow y'=3x^2-8x$

$y=\sqrt{u}\longrightarrow y'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$: $\quad y=\sqrt{3x+2}\rightsquigarrow y'=\frac{3}{2\sqrt{3x+2}}$

$y=\sqrt[3]{u}\longrightarrow y'=\frac{u'}{3\sqrt[3]{u^2}}$: $\quad y=\sqrt[3]{x^2-4x}\longrightarrow y'=\frac{2x-4}{3\sqrt[3]{(x^2-4x)^2}}$



سوال ۴۵: حاصل حدهای زیر را به دست آورید.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt[n]{x}-1} = \frac{0}{0} \xrightarrow{Hop} \lim_{x\to 1}\frac{1}{\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}} = \frac{1}{\frac{1}{n}\underbrace{(1)^{\frac{1}{n}-1}}_{\text{یک به هر توان یک است}}} = \frac{1}{\frac{1}{n}} = n$$

$x^{\frac{1}{n}}$

$$\boxed{\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt[n]{x}-1} = n}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt[3]{x}-1)} =$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt[2]{x}-1}\ \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1} = 2(3) = 6$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x+x^2+x^3+x^4+\cdots+x^n-n}{x-1} = \frac{0}{0} \xrightarrow{Hop} \lim_{x\to 1}\frac{1+2x+3x^2+4x^3+\cdots+nx^{n-1}-0}{1}$$

$$= 1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

جمع اعداد طبیعی تا n

تست ۴۶: اگر $\lim \frac{ax+3a}{1-\sqrt{5x+16}}$ وقتی $x\to -3$ برابر ۲ باشد، آن‌گاه a کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۳ ۳) ۳- ۴) ۵- ✓

$$\frac{0}{0}\ \text{مبهم} \xrightarrow{Hop} \lim_{x\to -3}\frac{a}{0-\frac{5}{2\sqrt{5x+16}}} = \frac{a}{-\frac{5}{2}} = 2 \to a = \left(-\frac{5}{2}\right)(2) = -5$$

$$\boxed{\sqrt{u} \xrightarrow{\text{مشتق}} \frac{u'}{2\sqrt{u}}}$$

تست ۴۷: اگر $\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{ax+1}-3}{\sqrt{x}-2} = b$، ab کدام است؟

۱) $\frac{4}{3}$ ۲) $\frac{8}{3}$ ۳) $\frac{4}{5}$ ۴) $\frac{8}{5}$

(الف) $\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{4a+1}-\underset{\text{باید } 0}{3}}{\sqrt{4}-2=2-2=0} = b \rightsquigarrow \sqrt{4a+1}=3 \xrightarrow{\text{مربع}} 4a+1=9 \to \boxed{a=2}$

(ب) $\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x}-2} = \frac{0}{0} \xrightarrow{Hop} \lim_{x\to 4}\frac{\frac{\cancel{2}}{\cancel{2}\sqrt{2x+1}}-0}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{4}} = \boxed{\frac{4}{3}=b}$

کسری که صفر صفر جوابش می‌تونه هر عددی باشه. کسر صفر صفر باشه جواب رو نوا بهم یک عدد خاص در می‌آید.

توی این موردها که صورت یا مخرج صفر و جواب عدد ناشده کسر را صفر صفر کن.

تست ۴۸: اگر $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{ax^2+2x+b}=2$ باشد، آن‌گاه $a-b$ کدام است؟ (b متناهی است.)

b عدد

۱) -1 ۲) 1 ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $-\frac{1}{2}$ ✓

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-3+2=0}{a+2+b=0} = 2 \longrightarrow a+b=-2$$

$$\frac{0}{0}\xrightarrow{Hop}\lim_{x\to 1}\frac{2x-3}{2ax+2}=\frac{-1}{2a+2}=2 \longrightarrow -1=4a+4 \longrightarrow a=-\frac{5}{4}$$

$$b=-2-a=-2+\frac{5}{4}=-\frac{3}{4} \qquad a-b=-\frac{1}{2}$$

تست ۴۹: حدّ عبارت $\dfrac{x^2+10x+16}{12+6\sqrt[3]{x}}$، وقتی $x\to -8$، کدام است؟ (تجربی ۹۸)

۱) -24 ۲) -18 ۳) -12 ۴) -6

$$\frac{0}{0}\xrightarrow{Hop}\lim_{x\to -8}\frac{2x+10}{0+6\left(\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\right)}=\frac{2(-8)+10=-6}{2\left(\frac{1}{\sqrt[3]{(-8)^2}}\right)}\quad \sqrt[3]{(-8)}^2=(-2)^2=4$$

$$=\frac{-6}{2\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2}}=-12$$

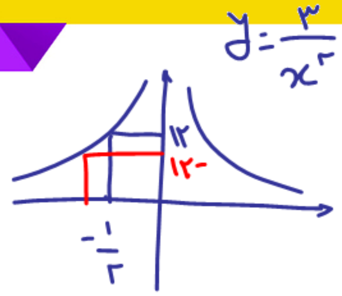
اول فرجه بگیر بعد به توان برسون

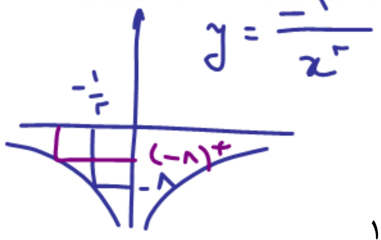
تست ۵۰: حاصل $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x-7\sqrt{x}+5}{2x-\sqrt{3x+1}}$، کدام است؟ (ریاضی ۹۹)

۱) $-1/5$ ۲) $-1/2$ ✓ ۳) $-0/8$ ۴) $-0/6$

$$\frac{0}{0}\xrightarrow{Hop}\lim_{x\to 1}\frac{2-7\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)+0}{2-\frac{3}{2\sqrt{3x+1}}}=\frac{2-\frac{7}{2}=-\frac{3}{2}}{2-\frac{3}{4}=\frac{5}{4}}=-\frac{12}{10}=-1/2$$

$$\frac{\text{عدد}}{0^- \text{ یا } 0^+} = \pm\infty$$





براکت‌ها رو برداریم
به جاش عدد بذاریم

تست ۵۱: مقدار $\lim\limits_{x\to(-\frac{1}{2})^-}\dfrac{10x-5+[\frac{3}{x^2}]}{16x-[\frac{-2}{x^2}]}$ ، کدام است؟ (ریاضی ۱۴۰۰)

$x\to(-\frac{1}{2})^-\ \left[\frac{3}{x^2}=12^-\right]=11$ $\qquad x\to(-\frac{1}{2})^-\ \left[\frac{-2}{x^2}=(-8)^+\right]=-8$

۱) $-\infty$ ۲) صفر ۳) $\frac{5}{8}$ ۴) $+\infty$

$$\lim_{x\to(-\frac{1}{2})^-}\frac{10x-5+11}{16x-(-8)}=\frac{10x+6=10(-\frac{1}{2})+6=-5+6=1}{16x+8=0^-}=\frac{1}{0^-}=-\infty$$

x		$-\frac{1}{2}$	
$16x+8$	$-$		$+$

استفاده از یک هم‌ارزی

برنولی

$u\to 0:\ (1+u)^n \sim 1+nu$

$u\to 0:\ \sqrt[n]{1+u}\sim 1+\frac{u}{n}$

$(1+u)^{\frac{1}{n}} \underset{u\to 0}{\sim} 1+\frac{u}{n}$

$(1+0/01)^5\sim 1/05$

$\sqrt[5]{1/01}\sim 1+\left(\frac{\frac{1}{100}}{5}=\frac{1}{500}=\frac{2}{1000}\right)=1/002$

تست ۵۲: حاصل $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{2x+1}-1}{x}$ برابر کدام است؟

۱) ۱ ۲) صفر ۳) $\frac{2}{3}$ ✓ ۴) $\frac{1}{2}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+2x}-1}{x}\underset{x\to 0}{\sim}\frac{(1+\frac{2x}{3})-1}{x}=\frac{2}{3}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1-x}-\sqrt{1+5x}}{x^2-7x}\ \underset{\text{کم توان}}{\overset{\text{برنولی}}{\sim}}\ \frac{(1-\frac{x}{3})-(1+\frac{5x}{2})}{-7x}=\frac{-x(\frac{1}{3}+\frac{5}{2}=\frac{2+15=17}{6})}{-7x}=\frac{17}{42}$$

چند سؤال مهم، چند ایدهٔ مهم:

تست ۵۳: حاصل $\lim\limits_{x\to -3}\sqrt{\dfrac{x^2-4x-21}{2x^2+7x+3}}$ برابر کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\sqrt{2}$ ۴) $\sqrt{3}$

$$\sqrt{\frac{0}{0}\ \underset{x\to -3}{\xrightarrow{\text{Hop}}}\ \frac{2x-4}{4x+7}=\frac{2(-3)-4=-10}{4(-3)+7=-5}}=\sqrt{2}$$

اگر بخشی از حد عدد غیرصفر شد عدد را بذار بقیه هوپ بزن!

تست ۵۴: حاصل $\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x^3+x+1)(x^4-3x+2)}{(x^2-\sqrt{x})\sqrt{5x-1}}$ برابر کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

$$\frac{(1+1+1)\,\text{صفر}}{\text{صفر}\,\sqrt{5-1=4}}=\frac{3}{2}\xrightarrow{Hop}\frac{4x^3-3}{2x-\frac{1}{2\sqrt{x}}}=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}\right)=1$$

تست ۵۵: حاصل $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{x^2-1}+x-1}{\sqrt{4x-4}+x^2-1}$ برابر کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $\sqrt{2}$ ۴) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\begin{cases}x\to1^+\\ x-1=t\\ t\to0^+\end{cases}\quad \lim\frac{\sqrt{\underbrace{(x+1)}_{2}\underbrace{(x-1)}_{t}}+\underbrace{(x-1)}_{t}}{\sqrt{4\underbrace{(x-1)}_{t}}+\underbrace{(x-1)}_{t}\underbrace{(x+1)}_{2}}=\frac{\sqrt{2t}+t}{2\sqrt{t}+2t}$$

کم توان $\frac{1}{2}$

تست ۵۶: حاصل $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{|x+1|-|x-1|}{\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}}$ برابر کدام است؟

۱) $\sqrt{2}$ ۲) $2\sqrt{2}$ ۳) $-\sqrt{2}$ ۴) $-2\sqrt{2}$

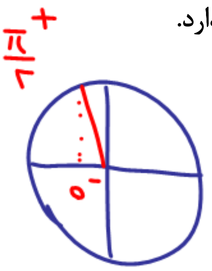
$$\lim_{x\to0^-}\frac{x+1-(-x+1)=2\cancel{x}}{\sqrt{1-\left(1+\frac{-x^2}{2}\right)=\frac{x^2}{2}}=\frac{|x|}{\sqrt{2}}=\frac{-x}{\sqrt{2}}}=\frac{2}{-\frac{1}{\sqrt{2}}}=-2\sqrt{2}$$

حالت $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ در حدهای مثلثاتی

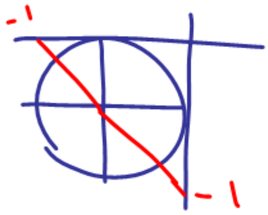
تست ۵۷: حاصل $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^+}\frac{\sin x+[\cos x]}{\cos^2 x}$ کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

۱) $-\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) -1 ۴) حد وجود ندارد.

$\frac{\pi}{2}^+$



$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\frac{\sin x+\overset{-1}{[0^-]}}{\cos^2 x=1-\sin^2 x}=\frac{-(\cancel{1-\sin x})}{(\cancel{1-\sin x})(1+\sin x)}=-\frac{1}{2}$$

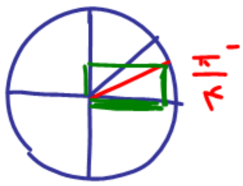


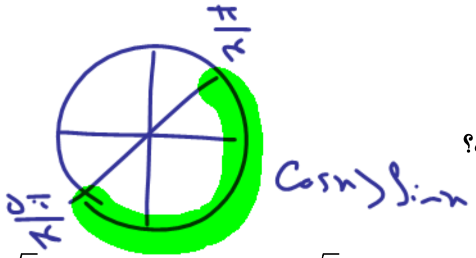
تست ۵۸: حاصل $\lim\limits_{x\to\frac{۳\pi}{۴}^-}\dfrac{۱+\cot x}{۱+\tan x}$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) صفر ۳) ۱ ۴) $+\infty$

$$\frac{0}{0}=\lim \frac{1+\frac{\cos x}{\sin x}}{1+\frac{\sin x}{\cos x}}=\frac{\frac{\cancel{\sin x+\cos x}}{\sin x}}{\frac{\cancel{\cos x+\sin x}}{\cos x}}=\frac{\cos x}{\sin x}=\cot x=-1$$

$$x\to\frac{3\pi}{4}$$

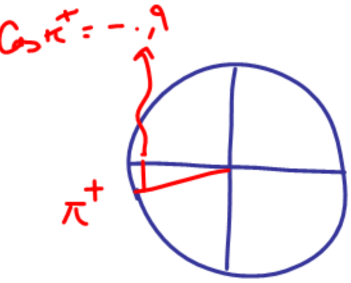




تست ۵۹: حاصل $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۴}^-}\dfrac{|\sin x-\cos x|}{\tan x-۱}$ کدام است؟

۱) $-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۳) $\sqrt{۲}$ ۴) $-\sqrt{۲}$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}^-}\frac{-(\cancel{\sin x-\cos x})}{\frac{\sin x}{\cos x}-1=\frac{\cancel{\sin x-\cos x}}{\cos x}}=-\cos x=-\cos\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$



تست ۶۰: حاصل $\lim\limits_{x\to\pi^+}\dfrac{|۱+\cos x|}{\sin^۲ x}$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) ۱ ۴) -۱

$$\lim_{x\to\pi^+}\frac{\cancel{1+\cos x}}{1-\cos^2 x=\cancel{(1+\cos x)}(1-\cos x)}=\frac{1}{1-\underbrace{\cos\pi}_{(-1)}}=\frac{1}{2}$$

تست ۶۱: حاصل $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{1-\sin^3 x}{1-\sin^2 x}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) صفر

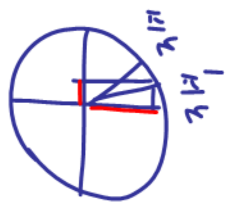
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cancel{(1-\sin x)}(1+\sin x+\sin^2 x)}{\cancel{(1-\sin x)}(1+\sin x)} = \frac{1+1+1}{1+1} = \frac{3}{2}$$

اتحاد معروف $\quad 1-\sin 2x = (\sin x-\cos x)^2$

تست ۶۲: حد چپ $\dfrac{\sqrt{1-\sin 2x}}{\sin x-\cos x}$ در $x=\frac{\pi}{4}$:

۱) ۱ ۲) -1 ۳) $\sqrt{2}$ ۴) $-\sqrt{2}$

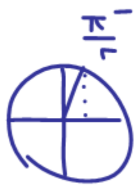
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}^-} \frac{\sqrt{(\sin x-\cos x)^2} = |\sin x-\cos x| = -(\sin x-\cos x)}{\sin x-\cos x} = -1$$



$1+\cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2}$

تست ۶۳: حاصل $\lim\limits_{x\to\pi^-} \dfrac{\sqrt{1+\cos x}}{\sin x}$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۲) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $-\frac{1}{2}$



$$\lim_{x\to\pi^-} \frac{\sqrt{1+\cos x = 2\cos^2\frac{x}{2}} = \sqrt{2}\left|\cos\frac{x}{2}\right| = \sqrt{2}\cancel{\cos\frac{x}{2}}}{\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cancel{\cos\frac{x}{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{2\left(\sin\frac{\pi}{2}=1\right)} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$1-\cos\theta = 2\sin^2\frac{\theta}{2}$

تست ۶۴: حاصل $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{1-\cos 2x}{\sin x\tan x}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) -۲ ۳) ۱ ۴) -۱

$$\lim_{x\to\pi} \frac{1-\cos 2x}{\sin x\tan x} = \frac{2\cancel{\sin^2} x}{\cancel{\sin x}\,\frac{\cancel{\sin x}}{\cos x}} = \lim_{x\to\pi} 2\cos x = 2\cos\pi = -2$$

$1+\cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2}$

تست ۶۵: حاصل $\lim\limits_{x\to\pi^+} \dfrac{\pi \sin x \sin\frac{x}{4}}{\sqrt{1+\cos x}}$ کدام است؟

۱) $-\pi$ ✓

۲) -2π

۳) π^2

۴) $\pi^2\sqrt{2}$

دوبرابر نصف کن

$$\lim_{x\to\pi^+} \frac{\pi\left(\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\sin x}{\sqrt{2\cos^2\frac{x}{2}} = \sqrt{2}\left|\cos\frac{x}{2}\right|}\quad \frac{\pi}{2}^+ = \frac{\pi\left(\frac{\cancel{\sqrt{2}}}{2}\right)\cancel{2}\sin\frac{x}{2}\cancel{\cos\frac{x}{2}}}{-\cancel{\sqrt{2}}\cancel{\cos\frac{x}{2}}} = \frac{\pi\left(\sin\frac{\pi}{2}=1\right)}{-1} = -\pi$$

رلشه ریاضی مابان

اگر **U** به نحوی صفر شود، همارزی ۲ برقرار است و در این همارزی لازم نیست که **x** حتماً به سمت صفر برود، بلکه باید به جایی بـرود که **U** به سمت صفر میل کند.

$\tan U \underset{U\to 0}{\sim} U$ $\qquad$ $\sin U \underset{U\to 0}{\sim} U$

R سوال ۶۶: حاصل حدهای زیر را بیابید.

۱) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x + \sin^2 x + \sin x^2}{\tan^3 x + \tan 3x} =$

۲) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\tan 4x}}{2\sqrt{x} + \sqrt{8\sin 2x}} =$

۳) $\boxed{\sin^n u \underset{u\to 0}{\sim} u^n}$ $\qquad$ $\sin^2 2x \underset{x\to 0}{\sim} (2x)^2 = 4x^2$

۴) $\boxed{\tan^n u \underset{u\to 0}{\sim} u^n}$ $\qquad$ $\tan^4 \pi x \underset{x\to 0}{\sim} (\pi x)^4 = \pi^4 x^4$

R سوال ۶۷: حاصل حد مقابل را به دست آورید.

$\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\sin^3 2x - \tan^2 3x}{x|2x|} =$

R تست ۶۸: حاصل $\lim\limits_{x\to\sqrt{2}}\dfrac{\sin(2-x^2)}{\sqrt{2}-x}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{2}$ ۲) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ۳) $2\sqrt{2}$ ۴) صفر

R تست ۶۹: حاصل $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) صفر ۳) ∞ ۴) حد ندارد.

R تست ۷۰: حاصل $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) صفر ۳) ∞ ۴) $\sin 1$

۵) $\boxed{1-\cos u \underset{u\to 0}{\sim} \frac{1}{2}u^2}$ $\qquad 1-\cos 3x \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{2}9x^2$

۶) $\boxed{1-\cos^n u \underset{u\to 0}{\sim} \frac{1}{2}nu^2}$ $\qquad 1-\cos^2\frac{x}{2} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{2}\times 2\times(\frac{x}{2})^2=\frac{x^2}{4}$

R تست ۷۱: حاصل $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos^{2}x-\sqrt{\cos x}}{x^{2}}$ ، کدام است؟ (سراسری ریاضی ۹۳)

۱) $-\dfrac{3}{2}$ ۲) $-\dfrac{3}{4}$ ۳) $-\dfrac{1}{4}$ ۴) $\dfrac{3}{2}$

تست ۷۲: حاصل $\lim\limits_{x\to 0^{-}}\dfrac{\sqrt{1-\cos 2x}}{\tan x}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{2}$ ۲) $-\sqrt{2}$ ۳) ۲ ۴) -۲

تست ۷۳: فرض کنید $\lim\limits_{x\to 0^{+}}\dfrac{\tan^{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}-1\right)}{\left(1-\cos(\sqrt{2x})\right)^{n}}=a$ ، مقدار $a+n$ کدام است؟ (ریاضی ۱۴۰۰)

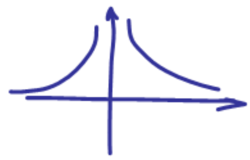
۱) $\dfrac{7}{4}$ ۲) $\dfrac{9}{4}$ ۳) $\dfrac{5}{8}$ ۴) $\dfrac{17}{4}$

حد بی‌نهایت مربوط به سال دوازدهم در حد بی‌نهایت جواب حد (∞) بی‌نهایت میشه

اگر با نزدیک شدن x به عدد a مقادیر تابع دائماً در حال افزایش باشد می‌گوییم حد تابع نامتناهی و $+\infty$ است و اگر دائماً در حال کاهش باشد می‌گوییم حد تابع نامتناهی و $-\infty$ است.

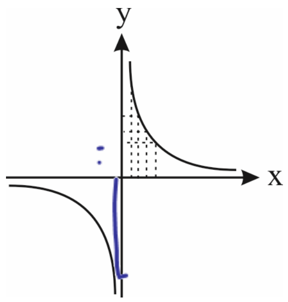
به عنوان مثال به تابع $y=\dfrac{1}{x}$ توجه کنید. وقتی که x از سمت راست به صفر میل می‌کند، مخرج تابع از راست به صفر نزدیک می‌شود. یعنی

$y=\frac{1}{x^{2k+1}}$



$y=\frac{1}{x^{2k}} \leftarrow y=\frac{1}{|x|}$

مقدار مخرج دائماً در حال کم‌ترشدن است و از آن‌جا که صورت تابع عدد ثابت یک است، مقدار کسر زیاد می‌شود و می‌توانیم بنویسیم:



$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=\frac{1}{0^-}=-\infty$$

در توابع کسری اگر حد صورت کسر مخالف صفر باشد و مخرج کسر به صفر میل کند کسر به سمت بی‌نهایت میل می‌کند:

$$\frac{\text{عدد}>0}{0^+}=+\infty \qquad \frac{\text{عدد}<0}{0^-}=+\infty \qquad \frac{\text{عدد}>0}{0^-}=-\infty \qquad \frac{\text{عدد}<0}{0^+}=-\infty$$

$$\frac{\text{عدد}}{\text{صفر}}=\pm\infty$$

(۶) در محاسبه حد در توابع کسری اگر صورت کسر برابر یک عدد و مخرجش صفر شود، باید حد چپ و راست را جداگانه حساب کنیم.

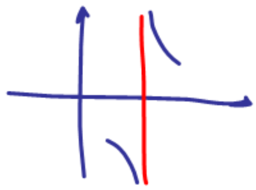
تست ۷۴: حاصل $\lim_{x\to 1}\frac{x+1}{x-1}$ کدام است؟

۱) حد ندارد. ✓ ۲) $-\infty$ ۳) $+\infty$ ۴) صفر

$x\to 1^+ \quad y=\frac{1+1=2}{1^+-1=0^+}=+\infty=L_1$

حد ندارد

$x\to 1^- \quad y=\frac{1+1=2}{1^--1=0^-}=-\infty=L_2$



$x=1$

مجانب قائم

اگر $x\to a$ آن‌گاه $y\to\pm\infty$، خط $x=a$ را مجانب قائم گویند.

در تابع کسری، ریشه مخرج مجانب قائم است اگر حد آن ∞ شود.

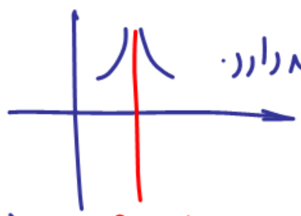
تست ۷۵: حاصل $\lim_{x\to 1}\frac{x+1}{(x-1)^2}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) صفر ۳) $-\infty$ ۴) $+\infty$

$x\to 1^+ \quad y=\frac{1+1=2}{(1^+-1=0^+)^2=0^+}=+\infty=L_1$

حد ندارد

$x\to 1^- \quad y=\frac{1+1=2}{(1^--1=0^-)^2=0^+}=+\infty=L_2$



$x=1$

مجانب قائم

اگر $\underbrace{L_1=L_2}_{\text{عدد برابر و }\infty\text{ برابر}}$ باشد حد دارد.

تست ۷۶: حاصل $\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2+3x}{\underbrace{x^2-3x+2}_{0^+}}$ کدام است؟

۱) $+\infty$ ۲) $-\infty$ ۳) صفر ۴) ۲

	1		2	
+	0	−	0	+

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{1+3=4}{(x-1)(x-2)}=\frac{4}{(1^--1=0^-)(1-2=-1)=0^+}=+\infty$$

تست ۷۷: در مورد تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{x^2-1}{x+|x|}$ کدام بیان درست است؟ (تجربی ۹۸)

۱) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=+\infty$ ۲) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=-\infty$ ۳) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$ ۴) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$ ✓

$x\to 0^-$: $\lim \frac{x^2-1=-1}{x+|x|=x-x=\text{صفر مطلق}}=$ ت.ن

$x\to 0^+$: $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x^2-1=-1}{x+|x|=x+x}=\frac{-1}{2x}=\frac{-1}{\underbrace{2(0^+)}_{=0^+}}=-\infty$

تست ۷۸: اگر $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x-4}{2x^2+ax+b}=-\infty$ باشد، $a+b$ کدام است؟ (ریاضی ۹۳، مشابه ریاضی ۹۸)

مهم

۱) -3 ۲) ۳ ۳) ۶ ✓ ۴) ۱۲

$\lim\limits_{x\to 3} \frac{3-4=-1}{\text{باید } 0^+ \text{ درست شود}}=-\infty$

پس مخرج باید به صورت زیر باشد:

$2(x-3)^2=2(x^2-6x+9)=2x^2-12x+18$

$a=-12$ $b=18$ $a+b=6$

تست ۷۹: حاصل $\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{3x^2-8x+4}{x^2-4x+4}$ کدام است؟

۱) $-\infty$ ✓ ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ۳

$\lim\limits_{x\to 2}\frac{3(2)^2-8(2)+4=0}{2^2-4(2)+4=0}\xrightarrow{Hop}\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{6x-8}{2x-4}=\frac{4}{\underbrace{2(2^-)}_{4^-}-4=0^-}=-\infty$

تست ۸۰: اگر $\lim\limits_{x\to 2}\frac{3-a[x]}{4-x^2}=+\infty$ باشد، چند مقدار صحیح برای a وجود دارد؟

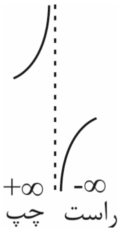
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) صفر ۴) بی‌شمار

$x\to 2^-$: $\lim \frac{3-a[2^-]=3-a>0}{4-4^-=0^+}=+\infty$ (الف) $3>a$

$x\to 2^+$: $\lim \frac{3-a[2^+]=3-2a<0}{4-4^+=0^-}=+\infty$ (ب) $\frac{3}{2}<a$

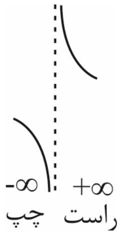
اشتراک الف و ب $\to \frac{3}{2}<a<3 \to \boxed{a=2}$

وضعیت منحنی حوالی ریشه مخرجش، هنگامی که حد به ازای ریشهٔ مخرج، ∞ می‌شود :



(۱)

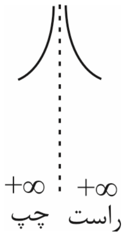
$y=-\frac{1}{x}$



(۲)

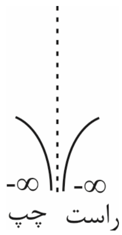
$y=\frac{1}{x}$

انفصال ساده



(۳)

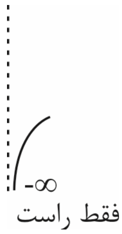
$y=\frac{1}{x^2}$



(۴)

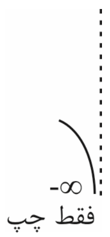
$y=-\frac{1}{x^2}$

انفصال مضاعف



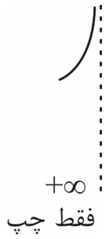
(۵)

$y=\frac{-1}{\sqrt{x}}$



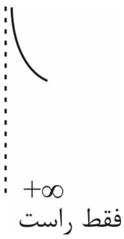
(۶)

$y=\frac{-1}{\sqrt{-x}}$



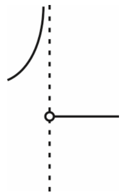
(۷)

$y=\frac{1}{\sqrt{-x}}$



(۸)

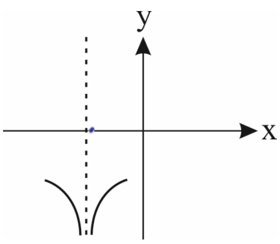
$y=\frac{1}{\sqrt{x}}$



(۹)

$\lim_{x\to 0} y=\frac{[x]}{x}$ $\begin{cases} x\to 0^+ & \frac{\text{صفر}}{0^+}=0 \\ x\to 0^- & \frac{-1}{0^-}=+\infty \end{cases}$

تست ۸۱: شکل روبه‌رو وضعیت نمودار کدام تابع را در اطراف ریشه‌ی مخرجش نشان می‌دهد؟



۱) $y=\frac{x-2}{(x-1)^2}$

۲) $y=\frac{x+2}{(x-1)^2}$

۳) $y=\frac{x-2}{(x+1)^2}$ $\quad \lim_{x\to -1} = \frac{-3}{0^+}=-\infty$

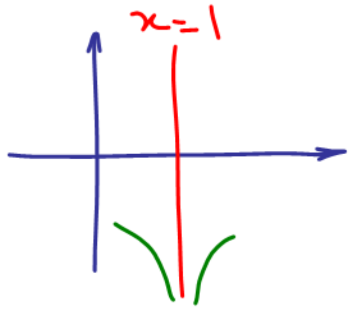
۴) $y=\frac{x+2}{(x+1)^2}$ $\quad \lim_{x\to -1} = \frac{-1+2=1}{0^+}=+\infty$

می‌بینیم ریشه مخرج یا مجانب قائم یک عدد منفیه پس گ ۱ و ۲ غلط هستند از ۳، ۴ اولی درسته
که حدش تو ریشه مخرج $-\infty$ بشه:

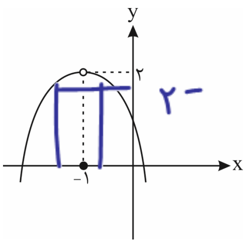
۲ طرف $x=1$

سوال ۸۲: تابع $f(x)=\dfrac{(-1)^{[x]}}{(x-1)^2}$ را در همسایگی عدد $x=1$ رسم کنید.

$$\begin{cases} x \to 1^- & y=\dfrac{(-1)^{[1^-]=0}=1}{(1^- -1=0^-)^2=0}=-\infty \\ x \to 1^+ & y=\dfrac{(-1)^{[1^+]=1}=-1}{(1^+ -1=0^+)^2=0^+}=-\infty \end{cases}$$



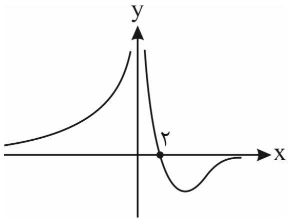
تست ۸۳: اگر نمودار تابع f به صورت مقابل باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x}{f(x)-2}$ کدام است؟



۱) $\frac{1}{2}$
۲) صفر
۳) $-\infty$
۴) $+\infty$ ✓

$$\lim_{x\to -1}\frac{x=-1}{2^- -2=0^-}=+\infty$$

تست ۸۴: شکل روبه‌رو نمودار تابع $f(x)=\dfrac{ax+2}{x^2+b}$ است. $f(4)$ کدام است؟ باید a, b را یافت (مشابه تجربی خارج ۹۵)



۱) $-\frac{1}{8}$ ✓
۲) $-\frac{1}{4}$
۳) $\frac{1}{4}$
۴) $\frac{1}{8}$

۲ مجهول پس باید ۲ معادله هم نوشت

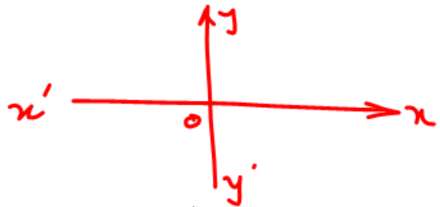
می‌بینیم: $f(2)=0$

$$f(2)=\frac{2a+2}{4+b}=0 \to a=-1$$

می‌بینیم تابع در $x=0$ تعریف نشده پس $x=0$ ریشه مخرج است: $(0)^2+b=0 \to \boxed{b=0}$

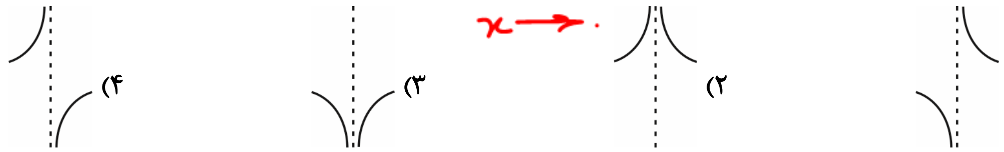
$$f(x)=\frac{-x+2}{x^2} \qquad f(4)=\frac{-4+2=-2}{4^2=16}=-\frac{1}{8}$$

محور y'oy یعنی خط $x=0$ یا (محور y)



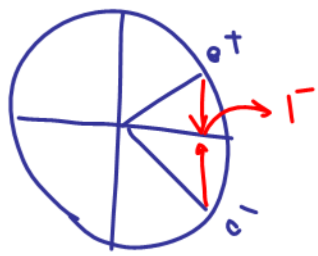
تست ۸۵: تابع $f(x)=\dfrac{۶+\sin x}{\cos x-۱}$ در حوالی محور y'oy به کدام صورت است؟

$x\to 0$



$$\begin{cases} x\to 0^+ & y=\dfrac{6+0}{1^- -1=0^-}=-\infty \\ x\to 0^- & y=\dfrac{6+0}{1^- -1=0^-}=-\infty \end{cases}$$

از ۲ طرف خط $x=0$ به $-\infty$ می‌رود
لذا گزینه ۳ درسته!



تست ۸۶: حاصل $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۲}}\dfrac{x-۲}{\cos ۲x+۱}$ کدام است؟

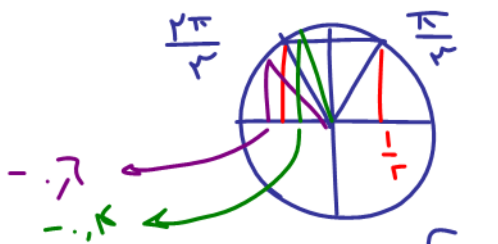
۱) صفر
۲) $-\infty$
۳) $+\infty$
۴) ۱

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\left(\frac{\pi}{2}=\frac{3.14}{2}=1.57\right)-2=\text{منفی } x}{1+\cos 2x=2\cos^2 x=2(0^+)}=-\infty$$

فرمول ۳۷

تست ۸۷: در مورد تابع با ضابطهٔ $f(x)=\dfrac{\sin x}{۱+۲\cos x}$، کدام بیان درست است؟ (تجربی خارج ۹۸)

۱) $\lim\limits_{x\to\frac{۲\pi}{۳}^+} f(x)=-\infty$ ✓
۲) $\lim\limits_{x\to\frac{۲\pi}{۳}^+} f(x)=+\infty$
۳) $\lim\limits_{x\to\frac{۲\pi}{۳}^-} f(x)=-\infty$
۴) $\lim\limits_{x\to\frac{۴\pi}{۳}} f(x)=+\infty$



$\cos\frac{2\pi}{3}=-0.5$

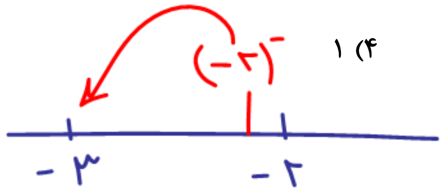
$\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)^+=(-0.5)^-$

$\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)^-=(-0.5)^+$

$$\begin{cases} x\to\left(\frac{2\pi}{3}\right)^- & \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1+2(-0.4)=0^+}=+\infty \\ x\to\left(\frac{2\pi}{3}\right)^+ & \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1+2(-0.6)=0^-}=-\infty \end{cases}$$

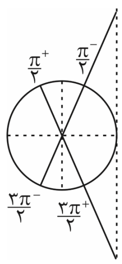
تست ۸۸: حاصل $\lim\limits_{x\to(-2)^-}\dfrac{[x]+3}{x+2}$ ، کدام است؟ (تجربی ۹۹)

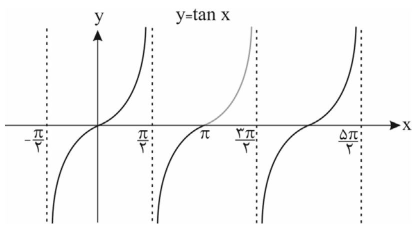
۱) $-\infty$ ۲) -1 ۳) صفر ۴) ۱

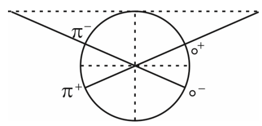


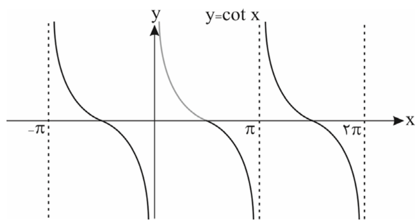
$$\lim_{\underbrace{x\to(-2)^-}_{=-2,1}}\frac{[x]+3}{x+2}=\frac{-3+3}{0^-}=\frac{\text{صفر مطلق}}{\text{صفر نسبی}}=\text{صفر}$$

در نقاطی که **tan** یا **cot** بی‌نهایت می‌شوند، باید حد چپ و راست را جداگانه حساب کرد که برای تعیین علامت بی‌نهایـت از دایـره‌ی مثلثاتی استفاده می‌شود.









$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-\text{ یا }\frac{3\pi}{2}^-}\tan x=\\ \tan\frac{\pi}{2}\ ,\ \tan\frac{3\pi}{2}\\ \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+\text{ یا }\frac{3\pi}{2}^+}\tan x=\end{cases}$$

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^+\text{ یا }\pi^+}\cot x=\\ \cot 0\ ,\ \cot\pi\\ \lim\limits_{x\to 0^-\text{ یا }\pi^-}\cot x=\end{cases}$$

تست ۸۹: حاصل $\lim\limits_{x\to0^+}\tan(\dfrac{\pi(x+1)}{2})$ و $\lim\limits_{x\to0^+}\tan(\dfrac{\pi[x+1]}{2})$ به ترتیب از راست به چپ کدام است؟

۱) $-\infty$ و $-\infty$ ۲) $+\infty$ و تعریف‌نشده

۳) $-\infty$ و $+\infty$ ۴) $-\infty$ و تعریف‌نشده

پاسخ: گزینه‌ی «۴»

$$\lim_{x\to0^+}\tan(\frac{\pi(x+1)}{2})=\tan(\frac{\pi^+}{2})=-\infty$$

$$\lim_{x\to0^+}\tan(\frac{\pi[x+1]}{2})=\tan(\frac{\pi[1^+]}{2})=\tan(\text{مطلق }\frac{\pi}{2})=\text{تعریف‌نشده}$$

تست ۹۰: حاصل $\lim\limits_{x\to ۲^+} \cot\frac{\pi}{۳-x}$ کدام است؟

۱) $+\infty$ ۲) $-\infty$ ۳) ۱ ۴) صفر

تست ۹۱: حاصل $\lim\limits_{x\to ۰^+} \log x$ و $\lim\limits_{x\to ۱^-} \log_{۰/۲}(۱-x)$ به ترتیب کدام است؟

۱) $+\infty , -\infty$ ۲) $-\infty , +\infty$ ۳) هر دو $+\infty$ ۴) هر دو $-\infty$

سؤال ۹۲: حاصل $\lim\limits_{x\to ۰^+} (\frac{۳x+۷}{۲x+۸})^{\log x}$ کدام است؟

حد در بی‌نهایت

حد هر تابع چندجمله‌ای وقتی $x \to \pm\infty$ برابر حد جمله‌ای است که بزرگ‌ترین درجه را دارد.

۷) $$\boxed{\lim_{x\to\pm\infty}(ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \cdots + k) = \lim_{x\to\pm\infty} ax^n}$$

مثال ۹۳: حاصل حدهای زیر را به دست آورید.

۱) $\lim_{x\to\pm\infty}(x^2 - 5x^3 + 4\sqrt[3]{x}) =$

۲) $\lim_{x\to\pm\infty}(\sqrt[3]{x-1} - \sqrt[5]{2x^2 - 3x}) =$

رفع ابهام از حالت $\frac{\infty}{\infty}$:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{ax^n + bx^{n-1} + \cdots + k}{a'x^m + b'x^{m-1} + \cdots + k'} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{ax^n}{a'x^m} = \begin{cases} \infty & n > m \\ \frac{a}{a'} & n = m \\ 0 & n < m \end{cases}$$

....

....

تست ۹۴: اگر $\lim_{x\to\infty}\frac{|x^2-4|}{ax^2 - x + 2} = -1$ آن‌گاه حد راست این عبارت در نقطهٔ $x = -2$ کدام است؟

(سراسری ریاضی خارج از کشور ۹۰)

۱) $-\frac{4}{3}$ ۲) $-\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{4}{3}$

تست ۹۵: در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{ax + \sqrt{4x^2 + 5}}{2x + 2}$، اگر $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{5}{2}$ ، آن‌گاه حد $f(x)$ وقتی $x \to -1$ کدام است؟ (تجربی ۹۵)

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{5}{6}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $\frac{5}{4}$

تست ۹۶: تابع با ضابطهٔ $f(x)=\dfrac{ax-\sqrt[3]{x^{2}-1}}{4x^{n}-12}$ را در نظر بگیرید. اگر $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\dfrac{1}{6}$ باشد، آن‌گاه $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ ، کدام است؟

(تجربی ۹۹)

۱) $\dfrac{1}{24}$ ۲) $\dfrac{1}{18}$ ۳) $\dfrac{1}{12}$ ۴) $\dfrac{5}{36}$

تست ۹۷: برای مقادیر طبیعی **n**، چند مقدار مختلف برای حاصل $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x^{n}+nx^{2}+1}{x^{n}+x^{2}-1}$ ممکن است و مجموع این مقدارها چقدر است؟

۱) دو مقدار، ۴ ۲) دو مقدار، ۵ ۳) سه مقدار، ۷ ۴) سه مقدار، ۸

تست ۹۸: حاصل $\lim\limits_{x\to-\infty} x(x+\sqrt{x^{2}-8})$ کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۳)

۱) ۸- ۲) صفر ۳) ۴ ۴) ∞

تست ۹۹: حاصل $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{x+3}-\sqrt{x+7})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x+9})$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲- ۳) صفر ۴) ۴-

تست ۱۰۰: اگر $f(x)=x-\sqrt{۴x^{۲}+x}$ باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$ کدام است؟ (تجربی خارج ۹۸)

۱) ۲-
۲) ۱-
۳) ۲
۴) ۳

تست ۱۰۱: اگر $g(x)=\frac{\sqrt{ax^{۲}+bx+c}}{|x-۱|}$ و $\lim\limits_{x\to۱^{+}}(۴-[x])g(x)=۶$ باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$ کدام است؟ (تجربی ۱۴۰۱)

۱) ۱-
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۲-

تست ۱۰۲: فرض کنید $n\in\mathbb{N}$، حاصل $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{۲^{۲n+۱}-۲^{۱-۲n}}{۲^{۲n+۱}+۳\times۲^{۱-۲n}}$، کدام است؟ (ریاضی ۹۹)

۱) ۱
۲) $\frac{۱}{۳}$
۳) $-\frac{۱}{۳}$
۴) -۱

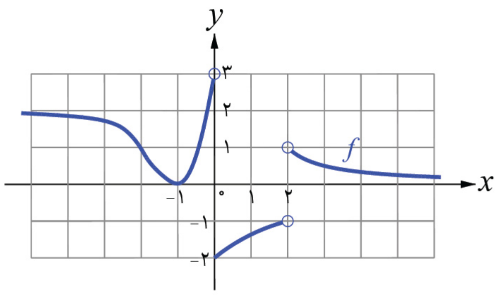
تست ۱۰۳: اگر $f(x)=\frac{۲x+۵}{x^{۲}-۴x+۳}$ و $g(x)=۲^{x}$، آن‌گاه $\lim\limits_{x\to۱^{+}}g(f(x))$ کدام است؟ (سراسری ریاضی)

۱) صفر
۲) ۱
۳) $+\infty$
۴) $\frac{۱}{۲}$

تست ۱۰۴: حاصل $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{6}{x^2-2x}-\dfrac{x+1}{x-2}\right)$ کدام است؟ (تجربی ۹۶)

۱) $-\frac{5}{2}$ ۲) $-\frac{3}{2}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{3}{2}$

تست ۱۰۵: با توجه به شکل، حاصل $\lim\limits_{x\to 0^+} fof\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}-\dfrac{1}{x}\right)$ برابر کدام است؟



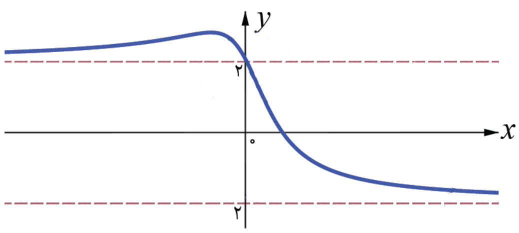
۱) ۱

۲) ۱-

۳) ۳

۴) صفر

تست ۱۰۶: شکل مقابل نمودار تابع با ضابطهٔ $y=\dfrac{Ax+B}{\sqrt{x^2+1}}$ است. $Ax+B$ کدام است؟



۱) $-2x-2$

۲) $-2x+2$

۳) $2x-2$

۴) $2x+2$

پیوستگی

پیوستگی f در نقطه‌ی x_0

در فصل حد تابع در نقطه‌ی x_0 گفته شد، که عرض دو نقطه طرفین x_0 را پیدا می‌کنیم، در این فصل کلاً به اتصال نقطه $(x_0, f(x_0))$ به دو طرف آن توجه می‌کنیم.

تابع $y = f(x)$ را در نقطه‌ی $x = a$ پیوسته گوییم هرگاه دو شرط زیر همواره و هم‌زمان برقرار باشد:

۱) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

۲) $a \in D_f$

به زبان ساده‌تر در نقطه‌ی a که در دامنه‌ی تابع است، حد تابع با مقدار تابع برابر شود.

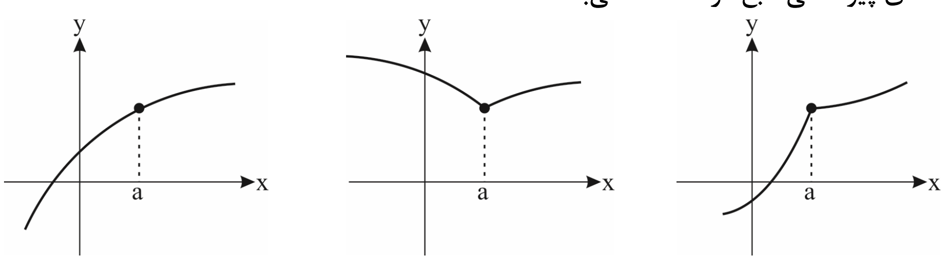
نکته: در مبحث حد مشاهده کردیم که در محاسبه‌ی حد توابع گاهی نیاز است، حد چپ و راست را به دست آوریم پس در این صورت تعریف پیوستگی نیز به صورت معادل به فرم زیر بیان می‌شود:

۱) $a \in D_f$

۲) $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = f(a)$

مفهوم پیوستگی از روی نمودار

هر سه نمودار نشان‌دهنده‌ی پیوستگی تابع در $x = a$ می‌باشند.



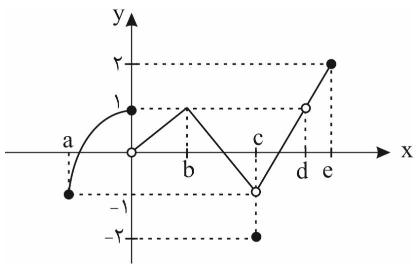
تست ۱۰۷: نمودار تابع f به صورت مقابل است. با توجه به نمودار، تابع در چند نقطه ناپیوسته است؟

۱) ۳

۲) ۴

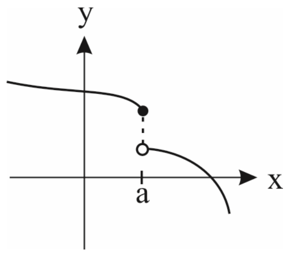
۳) ۶

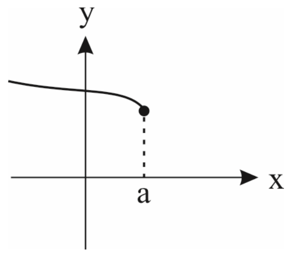
۴) ۵



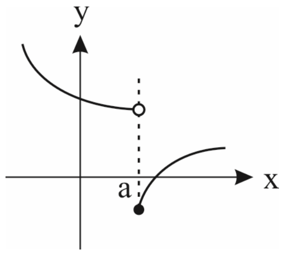
پیوستگی یک طرفه

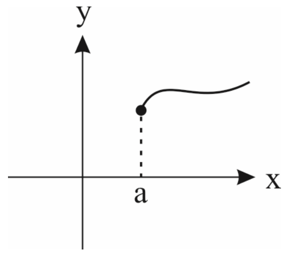
۱) پیوستگی چپ: تابع f در $x=a$ را از چپ پیوسته گوییم هرگاه: $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=f(a) \qquad (a\in D_f)$





۲) پیوستگی راست: تابع f در $x=a$ را از راست پیوسته گوییم هرگاه: $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=f(a) \qquad (a\in D_f)$





نکته: f در a پیوسته است اگر و تنها اگر f در a هم از راست و هم از چپ پیوسته باشد.

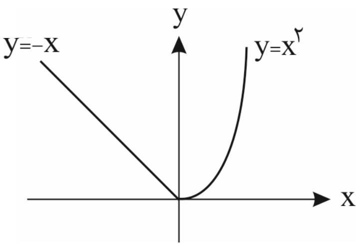
تست ۱۰۸: به ازای کدام مقدار a تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\dfrac{۸+x^۳}{|x+۲|} & x\neq -۲\\ a & x=-۲\end{cases}$ در نقطهٔ $x=-۲$ فقط از چپ پیوسته است؟ (تجربی ۹۸)

۱) ۱۲- ۲) ۶- ۳) ۶ ۴) ۱۲

تست ۱۰۹: تابع $f(x)=\begin{cases}x^۲ & x\geq ۰\\ -x & x<۰\end{cases}$ در مبدأ .... است.

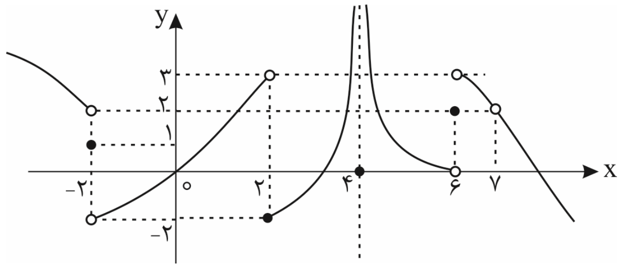
۱) پیوسته ۲) فقط پیوسته‌ی راست ۳) فقط پیوسته‌ی چپ ۴) ناپیوسته

پاسخ: گزینه‌ی «۱» ـ واضح است که شکل به صورت یکپارچه به هم متصل است پس تابع در تمام نقاط به‌خصوص در صفر پیوسته است.



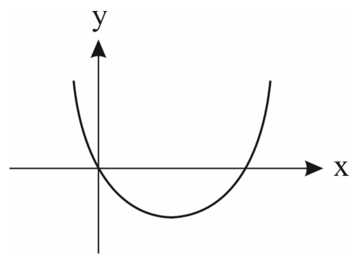
$$\begin{cases} 0\in D_f \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} x^2=0=f(0) \\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} (-x)=0 \end{cases} \Rightarrow$$ تابع در $x=0$ پیوسته است.

سوال ۱۱۰: در شکل زیر نمودار تابع $f(x)$ رسم شده است. نقاط ناپیوستگی تابع f را به دست آورید.

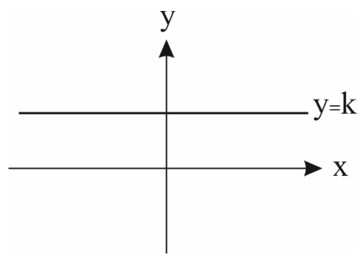


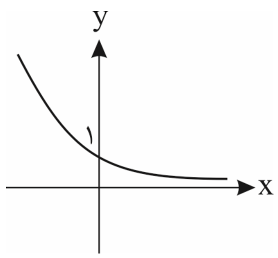
۱) توابع چندجمله‌ای در هر نقطه‌ای پیوسته هستند و در کل $\mathbb{R}$ در تمام نقاط پیوستگی دارند. مثلاً $f(x)=x^3-2x^2$، $f(x)=2$، $f(x)=2x^2-5$ و ... در تمام نقاط پیوسته هستند.

توابع به فرم $y=a^x$ $(a\neq 1, a>0)$، $y=\sin ax$ و $y=\cos ax$ روی $\mathbb{R}$ پیوسته‌اند.

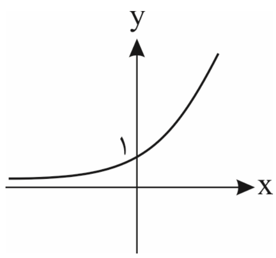


$y=x^2-x=x(x-1)$

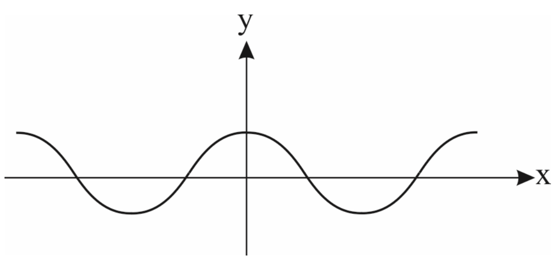




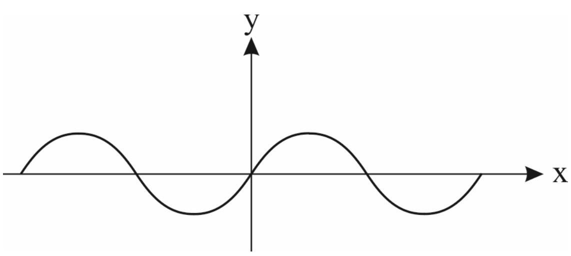
$y=(\frac{1}{2})^x$



$y=2^x$

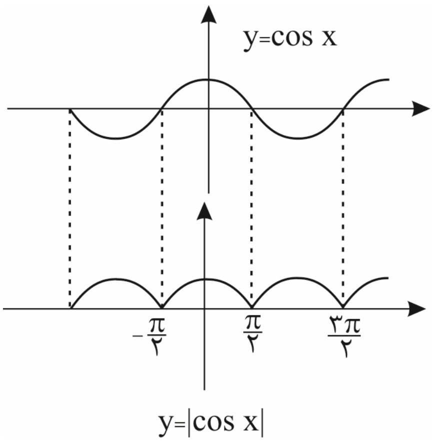


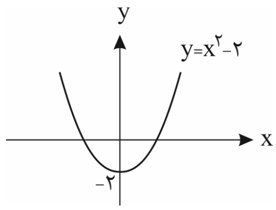
$y=\cos ax$

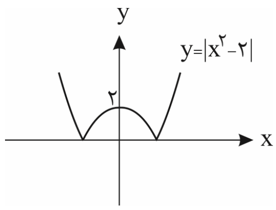


$y=\sin ax \;\; (a>0)$

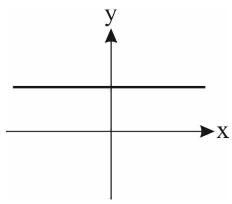
۲) اگر $f(x)$ در $x_\circ$ پیوسته باشد، $|f(x)|$ در $x_\circ$ پیوسته است، مثلاً $y=\cos x$ و $y=x^{۲}-۲$ پیوسته‌اند، پس $y=|\cos x|$ و $y=|x^{۲}-۲|$ نیز پیوسته‌اند.



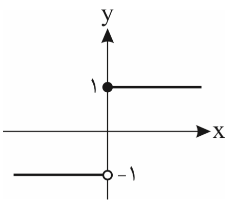




عکس مطلب فوق درست نیست، یعنی اگر $|f|$ در $x_\circ$ پیوسته باشد، نمی‌توان گفت که لزوماً f در $x_\circ$ پیوسته بوده است، مثلاً

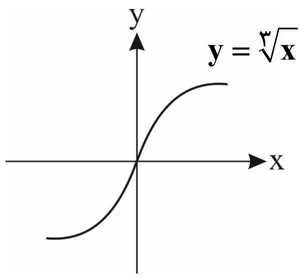


$y=|f(x)|=۱$ در $x=\circ$ پیوسته است در حالی که $f(x)=\begin{cases}۱ & x\geq \circ \\ -۱ & x<\circ\end{cases}$



در $x=\circ$ ناپیوسته است.

۳) اگر $f(x)$ پیوسته باشد، $f^{n}(x)$ و $\sqrt[۲n+۱]{f(x)}$ نیز پیوسته است. مثلاً $f(x)=\sqrt[۳]{۲x^{۲}-۷}$ و یا $f(x)=(x^{۲}-۶)^{۵}$.



۴) تابع $y=\sqrt[۲n]{f(x)}$ (f تابعی پیوسته) در هر نقطه‌ای غیر از نقاط انتهایی دامنه پیوسته است. برای مثال تابع $y=\sqrt{x-۱}$ (دامنه‌ی تابع $x\geq ۱$ است) در $x=۲$ پیوسته است ولی در $x=۱$ (نقطه‌ی انتهایی دامنه) ناپیوسته است، چون در همسایگی چپ $x=۱$ تعریف نمی‌شود.

تست ۱۱۱: تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{۱-\sqrt{۱-x}} & x\neq \circ \\ a & x=\circ\end{cases}$، به ازای کدام مقدار a در نقطهٔ $x=\circ$ پیوسته است؟ (تجربی ۹۶)

۱) ۲-　　۲) ۱-　　۳) ۱　　۴) ۲

تست ۱۱۲: تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-1}{x-\sqrt{x}} & x>1\\ ax-a+2 & x\le 1\end{cases}$، به ازای کدام مقدار **a** در نقطهٔ $x=1$ پیوسته است؟ (تجربی خارج ۹۶)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) هر مقدار a ۴) هیچ مقدار a

تست ۱۱۳: به ازای کدام مقدار **A** تابع $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+|x|}{x^2-2|x|} & x\neq 0\\ A & x=0\end{cases}$ در نقطه‌ی $x=0$ پیوسته است؟ (تجربی خارج ۹۰)

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۲ ۳) $-\frac{1}{2}$ ۴) -2

۵) در توابع دو ضابطه‌ای یا چندضابطه‌ای نقاط مرزی (تغییر ضابطه) مشکوک به ناپیوستگی هستند و باید پیوستگی را در آن‌ها کنترل کنیم.

تست ۱۱۴: به ازای کدام مقدار **a**، تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}x^2+ax-5 & x>2\\ ax-1 & x\le 2\end{cases}$ بر روی مجموعه‌ی اعداد حقیقی پیوسته است؟

(تجربی ۹۱)

۱) هر مقدار حقیقی a ۲) هیچ مقدار a ۳) فقط $a=-2$ ۴) فقط $a=2$

تست ۱۱۵: تابع $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin ۲x}{\sqrt{۱-\cos ۲x}} & x\neq ۰\\ ۲a & x=۰\end{cases}$ به ازای کدام مقدار a در $x=۰$ پیوسته است؟

۱) $\pm\frac{\sqrt{۲}}{۲}$
۲) $-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$
۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$
۴) هیچ مقدار a

تست ۱۱۶: تابع $f(x)=\dfrac{۱}{a\cos x+۲}$ در $\mathbb{R}$ پیوسته است. مجموعهٔ مقادیر a کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۲}<a<\frac{۱}{۲}$
۲) $-۲<a<۲$
۳) $a<-۲$ یا $a>۲$
۴) $a<-\frac{۱}{۲}$ یا $a>\frac{۱}{۲}$

۶) در توابع کسری ریشه‌های مخرج نقاط ناپیوستگی تابع هستند. مثلاً $y=\dfrac{-۱}{x}$ در $x=۰$ ناپیوسته است.

تست ۱۱۷: تابع $y=\dfrac{۲x-۳}{x^۲-ax+۹}$ به ازای چه مقادیری از a همواره پیوسته است؟

۱) $a>۶$
۲) $-۶<a<۶$
۳) $a<-۶$
۴) $\varnothing$

۷) تابع $y=[ax]$ در نقاط توش $\mathbb{Z}$ کن دچار ناپیوستگی می‌شود. مثلاً $y=[\frac{x}{2}]$ در نقاط $\frac{x}{2}=k$ و در نتیجه $x=2k$ یعنی xهای زوج ناپیوسته است. نقطه‌ی $x=4$ را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 4^+}[\frac{x}{2}]=[\frac{4^+}{2}=2^+]=2 \\ \lim\limits_{x\to 4^-}[\frac{x}{2}]=[\frac{4^-}{2}=2^-]=1 \\ f(4)=[\frac{4}{2}]=2 \end{cases}$$

در این نقطه حد چپ و راست نابرابر است پس تابع پیوسته نیست. (چون اصلاً حد ندارد.)

دقت کنید که در xهای توش $\mathbb{Z}$ کُنِ ضریب صفرکن، تابع پیوسته می‌باشد. مثلاً اگر $f(x)=(x-4)[\frac{x}{2}]$ باشد، تابع در $x=4$ پیوسته است زیرا:

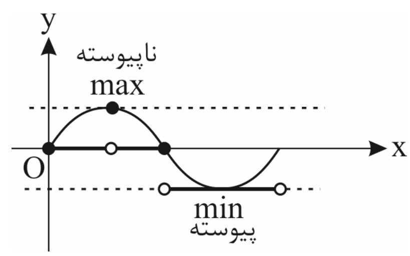
$$\lim_{x\to 4^+}(x-4)[\frac{x}{2}]=(4-4)[\frac{4^+}{2}=2^+]=0\times 2=0$$

$$\lim_{x\to 4^-}(x-4)[\frac{x}{2}]=(4-4)[\frac{4^-}{2}=2^-]=0\times 1=0$$

$$f(4)=(4-4)[\frac{4}{2}]=0\times 2=0$$

یه دقتِ دیگه:

اگه xهایِ توش $\mathbb{Z}$ کن، طول نقطه‌ی min نسبی عبارت درون جزء صحیح باشند باز هم تابع در آن‌جا پیوسته خواهد بود. مثلاً $f(x)=[\sin x]$ در $x=\frac{3\pi}{2}$ توش $\mathbb{Z}$ می‌شود ولی باز هم پیوسته است چون:



$$\lim_{x\to \frac{3\pi}{2}^+}[\sin x]=[-1^+]=-1$$

$$\lim_{x\to \frac{3\pi}{2}^-}[\sin x]=[-1^+]=-1$$

$$f(\frac{3\pi}{2})=[\sin\frac{3\pi}{2}]=-1$$

تست ۱۱۸: تابع $f(x)=(-1)^{[x]}\sin \pi x$ در نقاط $x\in\mathbb{Z}$ از نظر پیوستگی چگونه است؟ (ریاضی خارج ۹۳)

۱) همواره پیوسته
۲) فقط در اعداد فرد پیوسته
۳) فقط در اعداد زوج پیوسته
۴) از چپ پیوسته، از راست ناپیوسته

تست ۱۱۹: پیوستگی تابع $f(x)=(x^2-9)[\frac{x}{3}]$ در نقاط $x=3$ و $x=-3$ به ترتیب چگونه است؟

۱) در دو نقطه ناپیوسته است.

۲) در دو نقطه پیوسته است.

۳) در نقطه‌ی $x=3$ پیوسته و در نقطه‌ی $x=-3$ ناپیوسته است.

۴) در نقطه‌ی $x=3$ ناپیوسته و در نقطه‌ی $x=-3$ پیوسته است.

تست ۱۲۰: تابع $f(x)=[-\sin x]$ در $x=\frac{\pi}{2}$، .... است.

۱) فقط پیوسته‌ی راست
۲) فقط پیوسته‌ی چپ
۳) پیوسته
۴) نه از راست و نه از چپ پیوسته

تست ۱۲۱: تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}[x]+[-x] & x\notin\mathbb{Z}\\ a & x\in\mathbb{Z}\end{cases}$ به ازای کدام مقدار a، بر روی مجموعه‌ی اعداد حقیقی پیوسته است؟ *(ریاضی ۹۶)*

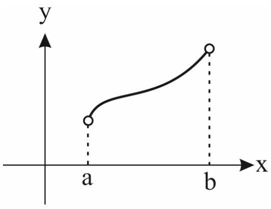
۱) -1
۲) 1
۳) صفر
۴) همواره ناپیوسته

تست ۱۲۲: تابع $f(x)=(-1)^{[x]}\sin\frac{\pi x}{2}$ در نقاط $x\in\mathbb{Z}$ از نظر پیوستگی، چگونه است؟ *(ریاضی ۹۳)*

۱) فقط در اعداد زوج پیوسته است.
۲) فقط در اعداد فرد پیوسته است.
۳) همواره ناپیوسته است.
۴) همواره پیوسته است.

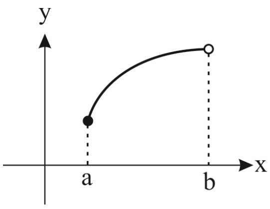
پیوستگی در بازه

۱) تابع $f(x)$ در بازه‌ی (a,b) پیوسته است، هرگاه در هر نقطه از بازه‌ی (a,b) پیوسته باشد:



$$\forall x_0 \in (a,b): \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

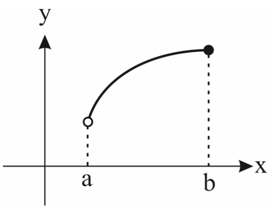
۲) تابع $y=f(x)$ در بازه‌ی $[a,b)$ پیوسته است اگر دو شرط زیر توأماً برقرار باشند:



در هر نقطه از (a,b) پیوسته باشد. ۱) $\forall x_0 \in (a,b): \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

در a پیوسته از راست باشد. ۲) $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$

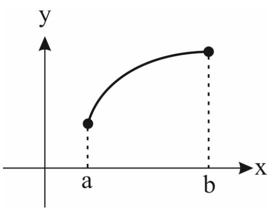
۳) تابع $y=f(x)$ در بازه‌ی $(a,b]$ پیوسته است اگر دو شرط زیر توأماً برقرار باشند:



در هر نقطه از (a,b) پیوسته باشد. ۱) $\forall x_0 \in (a,b): \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

در b پیوسته از چپ باشد. ۲) $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = f(b)$

۴) تابع $y=f(x)$ در بازه‌ی $[a,b]$ پیوسته است اگر شرط‌های زیر همگی برقرار باشند:



در هر نقطه از (a,b) پیوسته باشد. ۱) $\forall x_0 \in (a,b): \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

در b پیوسته از چپ باشد. ۲) $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = f(b)$

در a پیوسته از راست باشد. ۳) $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$

تست ۱۲۳: تابع $y = x^2[x] + 3x$ در بازه‌ی $[0,1]$ .... است.

۱) همواره پیوسته ۲) در یک نقطه ناپیوسته ۳) در دو نقطه ناپیوسته ۴) در بی‌شمار نقطه ناپیوسته

پاسخ: گزینه‌ی «۲» ـ برای آن که f در بازه‌ی $[0,1]$ پیوسته باشد:

۱) باید در بازه‌ی $(0,1)$ پیوسته باشد. $[x]=0$ پس $y=3x$ که همواره پیوسته است.

۲) در $x=0$ پیوسته‌ی راست باشد.

۳) در $x=1$ پیوسته‌ی چپ باشد.

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0 \\ f(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$ در $x=0$ پیوسته‌ی راست است.

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 1[1^-] + 3(1) = 3 \\ f(1) = 1[1] + 3 = 4 \end{cases} \Rightarrow$$ در $x=1$ ناپیوسته است.

پس در بازه‌ی $[0,1]$ در کل ناپیوسته است. به بیان دیگر این تابع در بازه‌ی $[0,1)$ پیوسته است ولی در $x=1$ ناپیوسته است.

تست ۱۲۴: تعداد نقاط ناپیوسته‌ی تابع با ضابطه‌ی $f(x)=[x]^{۲}-[x]$ روی بازه‌ی $(-۱,۲)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

تست ۱۲۵: تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=(x-۳)[\frac{۱}{۳}x-۱]$ روی بازه‌ی $(۰,۹)$ در چند نقطه ناپیوسته است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

تست ۱۲۶: تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-[x]}{x^{۳}-x-۶} & x\neq ۲\\ a & x=۲\end{cases}$، به ازای کدام مقدار a، در بازه‌ی $[۲,۳)$، پیوسته است؟ (ریاضی ۹۷)

۱) $\frac{۱}{۱۱}$ ۲) $\frac{۱}{۹}$ ۳) $\frac{۱}{۸}$ ۴) $\frac{۱}{۶}$

تست ۱۲۷: اگر $f(x)=(ax+b-۲x^{۲})[x]$ در بازهٔ $(۲,۵)$ پیوسته باشد، مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۱۰- ۲) ۵- ۳) ۵ ۴) ۱۰

تقسیم و روابط آن

یکی از سؤالات معروف در دوره‌ی اول این بود که «عدد ۳۱ را بر ۷ تقسیم کنید و خارج‌قسمت و باقی‌مانده را بیابید.»

باقی‌مانده + خارج‌قسمت × مقسوم‌علیه = مقسوم

$$۳۱ = ۷ \times ۴ + ۳$$

با استفاده از همین موضوع ساده، تقسیم چندجمله‌ای‌ها را به این صورت انجام می‌دهیم:

۱- مقسوم را بر اساس توان‌های نزولی از بزرگ به کوچک مرتب می‌کنیم.

۲- جمله‌ای که در مقسوم، بزرگ‌ترین درجه را دارد بر جمله‌ای از مقسوم‌علیه که بزرگ‌ترین درجه را دارد تقسیم می‌کنیم.

۳- عبارت به‌دست‌آمده در خارج‌قسمت را در مقسوم‌علیه ضرب می‌کنیم و علامتش را قرینه کرده با مقسوم جمع می‌کنیم.

۴- این مراحل سه‌گانه را تا جایی ادامه می‌دهیم که درجه‌ی به‌دست‌آمده در ردیف باقی‌مانده کم‌تر از درجه‌ی مقسوم‌علیه باشد.

مثلاً: عبارت $x^۳ + x^۲ - ۲$ را بر $x - ۱$ تقسیم می‌کنیم:

$$\begin{array}{l|l}
\text{مقسوم} & \text{مقسوم‌علیه} \\
\cancel{x^۳} + x^۲ - ۲ & x - ۱ \\ \cline{2-2}
-\cancel{x^۳} + x^۲ & x^۲ + ۲x + ۲ \\ \cline{1-1}
\cancel{۲x^۲} - ۲ & \text{خارج‌قسمت} \\
-\cancel{۲x^۲} + ۲x & \\ \cline{1-1}
۲x - ۲ & \\
-۲x + ۲ & \\ \cline{1-1}
۰ = R & \\
\text{باقی‌مانده} &
\end{array}$$

با توجه به قانون تقسیم داریم:

باقی‌مانده + خارج‌قسمت × مقسوم‌علیه = مقسوم

$$x^۳ + x^۲ - ۲ = (x - ۱)(x^۲ + ۲x + ۲) + ۰$$

پس اگر مقسوم را با $P(x)$، مقسوم‌علیه را با $D(x)$، خارج‌قسمت را با $Q(x)$ و باقی‌مانده را با $R(x)$ نمایش دهیم، خواهیم داشت:

باقی‌مانده + خارج‌قسمت × مقسوم‌علیه = مقسوم

$$P(x) = D(x) \times Q(x) + R(x)$$

یادت باشه همواره باقی‌مانده حداقل یک درجه کم‌تر از مقسوم‌علیه است.

۱- محاسبه‌ی باقی‌مانده‌ی تقسیم $P(x)$ بر چندجمله‌ای درجه اول $ax + b$:

وقتی $P(x)$ را بر $ax + b$ تقسیم می‌کنیم کافی است، برای یافتن باقی‌مانده، به جای x قرار دهیم $\frac{-b}{a}$. به این ترتیب داریم:

$$ax + b = ۰ \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$$

$$\text{باقی‌مانده } R = P(-\frac{b}{a})$$

مثال ۱۲۸: باقی‌مانده‌ی تقسیم $x^۴-ax^۳+x^۲+۲ax+۱$ بر $x+۱$ برابر ۴ شده است. a کدام است؟ (سراسری ریاضی ۸۰)

پاسخ: $x+۱=۰ \Rightarrow x=-۱$

$$R=P(-۱)=۴ \Rightarrow (-۱)^۴-a(-۱)^۳+(-۱)^۲+۲a(-۱)+۱=۴ \Rightarrow ۱+a+۱-۲a+۱=۴ \Rightarrow -a=۱ \Rightarrow a=-۱$$

مثال ۱۲۹: باقی‌مانده‌ی تقسیم $۱۵x^۲+۱۴x-۲۹$ را بر $x-۱$ بیابید.

پاسخ: $x-۱=۰ \Rightarrow x=۱$

$$R=P(۱)=۱۵(۱)^۲+۱۴(۱)-۲۹=۲۹-۲۹=۰ \Rightarrow R=۰$$

باقی‌مانده صفر شد، یعنی این که $۱۵x^۲+۱۴x-۲۹$ بر $x-۱$ بخش‌پذیر است. پس عامل $x-۱$ را در خود دارد.

۲- محاسبه‌ی باقی‌مانده‌ی تقسیم $P(x)$ بر یک چندجمله‌ای با درجه‌ی بیشتر از یک:

گفتیم برای پیدا کردن باقی‌مانده، مقسوم‌علیه را صفر می‌کنیم: $P(x)=\overbrace{D(x)}^{\circ}\times Q(x)+R(x)$

و این برای وقتی بود که مقسوم‌علیه از درجه‌ی اول بود. حال اگر مقسوم‌علیه از درجه‌ی اول نباشد باز هم آن را مساوی صفر قرار می‌دهیم. اما این‌جا، جمله‌های پرتوان را برحسب جمله‌های با توان کم‌تر می‌نویسیم و با ظاهر کردن جملات پرتوان در مقسوم، معادل کم‌توانشان را جاگذاری می‌کنیم.

مثال ۱۳۰: باقی‌مانده‌ی تقسیم $۲x^۹+x^۵+۲$ را بر $x^۳-۱$ بیابید.

پاسخ: ابتدا قرار می‌دهیم $x^۳-۱=۰$ پس $x^۳=۱$ (این یک معادله نیست. یعنی نباید نتیجه بگیرید که $x=۱$ است). حال در رابطه‌ی $۲x^۹+x^۵+۲$، $x^۳$ می‌سازیم و به جایش $(x^۳=۱)$ قرار می‌دهیم.

$$۲x^۹+x^۵+۲=۲(x^۳)^۳+(x^۳)x^۲+۲ \xlongequal{x^۳=۱} ۲(۱)^۳+(۱)x^۲+۲=x^۲+۴$$

یعنی باقی‌مانده، $x^۲+۴$ است.

تست ۱۳۱: فرض کنید چندجمله‌ای $p(x)$ بر $x^۲-۱$، بخش‌پذیر باشد، اگر $Q(x)=p(x-۱)+p(۱-x)$، آن‌گاه باقی‌ماندهٔ تقسیم $Q(x)$ بر $x-۲$ کدام است؟ (تجربی ۹۹)

۱) -۱ ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ۲

تست ۱۳۲: فرض کنید باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $p(x)$ بر $x-۴$ و $x+۲$، به ترتیب ۳ و ۱ باشند. باقی‌ماندهٔ تقسیم $p(x^۲)+۴p(-x)$ بر $x-۲$، کدام است؟ (تجربی خارج ۹۹)

۱) ۷ ۲) ۱ ۳) صفر ۴) -۱

۳- اگر باقی‌مانده‌ی تقسیم عبارت $P(x)$ بر $x-a$ و $x-b$ به ترتیب $R_۱$ و $R_۲$ باشد، باقی‌مانده‌ی تقسیم $P(x)$ بر $(x-a)(x-b)$ برابر است با $R(x)=Ax+B$ چرا که مقسوم‌علیه از درجه دو است و باقی‌مانده باید درجه‌اش از مقسوم‌علیه کم‌تر باشد:

$$\begin{array}{c|c} P(x) & (x-a)(x-b) \\ \hline R=Ax+B & Q(x) \end{array}$$

مثال ۱۳۳: اگر باقی‌مانده‌ی تقسیم $f(x)$ بر $x+۱$ و $x-۲$ به ترتیب -۱ و ۵ باشد، باقی‌مانده‌ی $f(x)$ بر $x^۲-x-۲$ کدام است؟

$$\begin{array}{c|c} f(x) & x^۲-x-۲ \\ \hline R=Ax+B & Q(x) \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+۱=۰ \Rightarrow x=-۱ \Rightarrow R=f(-۱)=-۱ \Rightarrow \\ x-۲=۰ \Rightarrow x=۲ \Rightarrow R=f(۲)=۵ \Rightarrow \end{cases} \begin{cases} A(-۱)+B=-۱ & (I) \\ A(۲)+B=۵ & (II) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} (I)\times ۲ \\ (II) \end{matrix} \begin{cases} -۲A+۲B=-۲ \\ ۲A+B=۵ \end{cases} \Rightarrow ۳B=۳ \Rightarrow B=۱ \Rightarrow A=۲ \Rightarrow R=Ax+B=۲x+۱$$

پس باقی‌مانده $R=۲x+۱$ است.

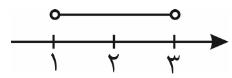
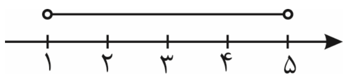
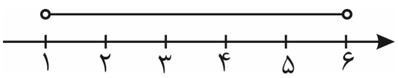
تست ۱۳۴: باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x-۱$ و $۲x+۱$ به ترتیب ۸ و ۵ است. باقی‌ماندهٔ تقسیم $P(x)$ بر $۲x^۲-x-۱$، کدام است؟ (ریاضی ۹۹)

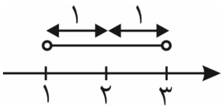
۱) $-x+۴$ ۲) $x+۳$ ۳) $۲x+۶$ ۴) $۲x-۳$

همسایگی

۱) اگر عددی مانند $x_{\circ}$ عضو درونی بازهٔ (c,d) باشد آن‌گاه می‌نویسیم $x_{\circ}\in(c,d)$ و بازهٔ (c,d) را یک همسایگی باز $x_{\circ}$ می‌نامیم.

هر بازهٔ بازی که شامل عدد $x_{\circ}$ باشد، یک همسایگی $x_{\circ}$ نامیده می‌شود. مثلاً بازه‌های $(۱,۳)$، $(۱,۵)$ و $(۱,۶)$ همگی یک همسایه نقطهٔ ۲ هستند:

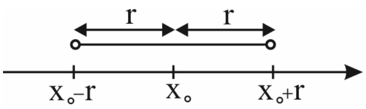






بین این بازه‌ها، بازهٔ $(۱,۳)$ یک همسایگی متقارن نقطهٔ ۲ است.

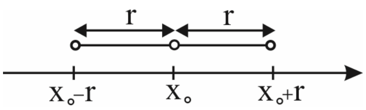
یعنی نقطهٔ ۲ دقیقاً در وسط بازه واقع شده است:

در حالت کلی بازهٔ $(x_{\circ}-r,x_{\circ}+r)$ یک همسایگی متقارن نقطهٔ $x_{\circ}$ به شعاع r است.



همسایگی متقارن عدد $x_{\circ}$، به مرکز $x_{\circ}$ و شعاع r علاوه بر $(x_{\circ}-r,x_{\circ}+r)$ به صورت روبه‌رو نیز نمایش می‌دهیم:

$\{x\,|\,x\in\mathbb{R}\,,|x-x_{\circ}|<r\}$



در فصل حد با یک نوع دیگر از همسایگی آشنا می‌شوید به اسم همسایگی محذوف متقارن نقطهٔ $x_{\circ}$، فرق این همسایگی با قبلی در این است که در این‌جا خود $x_{\circ}$ جزء همسایگی نیست یعنی نقطهٔ $x_{\circ}$ در بازه حضور ندارد:

در حالت کلی $(x_{\circ}-r,x_{\circ}+r)-\{x_{\circ}\}$ یک همسایگی محذوف متقارن نقطهٔ $x_{\circ}$ به شعاع r است که آن را به صورت روبه‌رو نمایش می‌دهند: $\{x\,|\,x\in\mathbb{R}\,,\circ<|x-x_{\circ}|<r\}=(x_{\circ}-r,x_{\circ})\cup(x_{\circ},x_{\circ}+r)$

یعنی این‌که x نمی‌تواند $x_{\circ}$ باشد، یعنی $x_{\circ}$ را حذف کرده‌ایم به این خاطر است که قدرمطلق را بزرگ‌تر از صفر قرار داده‌ایم. ضمناً در این حالت نیز مرکز همسایگی نقطهٔ $x_{\circ}$ است.

یادت باشه: همسایگی متقارن نقطهٔ $x_{\circ}$ به شعاع r معادل $|x-x_{\circ}|<r$ و همسایگی محذوف (حذف‌شده) نقطهٔ $x_{\circ}$ به شعاع r معادل $\circ<|x-x_{\circ}|<r$ است.

یادت باشه: برای آن‌که نامساوی $a<x<b$ را به صورت یک همسایگی متقارن عدد $x_{\circ}$ و شعاع r نشان دهیم از دستور $|x-\frac{a+b}{۲}|<\frac{b-a}{۲}$ استفاده می‌کنیم.

مثال ۱۳۵: نامساوی $-۲<x<۸$ را به صورت یک همسایگی متقارن نمایش دهید.

پاسخ: طبق رابطهٔ فوق داریم:

$$|x-\frac{۸+(-۲)}{۲}|<\frac{۸-(-۲)}{۲}$$

یعنی $|x-۳|<۵$ و به این معنی است که در این همسایگی متقارن، عدد ۳ مرکز و عدد ۵ شعاع است.

یادت باشه: همسایگی محذوف متقارن از اجتماع دو بازه تشکیل شده که در بالا نیز به آن اشاره کردیم:

$(x_{\circ}-r,x_{\circ})\cup(x_{\circ},x_{\circ}+r)$

تست ۱۳۶: اگر $(۲x-۳, x+۵) \cup (y+۱, ۳-y)$ یک همسایگی محذوف نقطهٔ ۱ باشد، مقدار x کدام است؟

۱) ۲-　　۲) ۲　　۳) ۴-　　۴) ۴

همسایگی چپ و راست

اگر r عددی مثبت باشد، آن‌گاه $(x_{\circ}, x_{\circ}+r)$ یک همسایگی راست $(x_{\circ}-r, x_{\circ})$ یک همسایگی چپ از $x_{\circ}$ نامیده می‌شود.

تست ۱۳۷: به ازای کدام مجموعه مقادیر x، بازهٔ $(x+۱, ۲x-۱)$ یک همسایگی عدد ۳ می‌باشد؟ (ریاضی ۹۸)

۱) $\varnothing$　　۲) $\{۲\}$　　۳) $۲ < x < ۲/۵$　　۴) $۱/۵ < x < ۲$

پاسخ: وقتی می‌گوید که بازهٔ (c,d) یک همسایگی عدد $x_{\circ}$ است یعنی $x_{\circ} \in (c,d)$ است (طبق درس‌نامه)، پس در این‌جا داریم:

$$۳ \in (x+۱, ۲x-۱) \Rightarrow x+۱ < ۳ < ۲x-۱ \Rightarrow \begin{cases} x+۱ < ۳ \Rightarrow x < ۲ \\ ۲x-۱ > ۳ \Rightarrow ۲x > ۴ \Rightarrow x > ۲ \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} \varnothing$$

تست ۱۳۸: در همسایگی محذوف متقارن به صورت $(۳a-۷, a+۵) - \{۳\}$ شعاع همسایگی کدام است؟ (ریاضی ۸۹)

۱) ۱　　۲) ۲　　۳) ۳　　۴) ۴

پاسخ: طبق درس‌نامه، مرکز همسایگی نقطهٔ ۳ است، پس $۳ = \frac{۳a-۷+a+۵}{۲}$ و در نتیجه $a = ۲$ می‌باشد. پس همسایگی به صورت $(-۱, ۷) - \{۳\}$ درمی‌آید که شعاعش برابر $۴ = \frac{۷-(-۱)}{۲}$ است.

یادت باشه: اگر $(a,b) - \{c\}$ یک همسایگی محذوف متقارن باشد آن‌گاه داریم:

مرکز همسایگی $c = \frac{a+b}{۲}$

شعاع همسایگی $= \frac{b-a}{۲}$

تست ۱۳۹: اگر بازهٔ $(x+y, ۳y-x)$ یک همسایگی راست نقطهٔ ۲ و بازهٔ $(x-y, x+۲y)$ یک همسایگی چپ نقطهٔ ۷ باشد، مقدار x کدام است؟

۱) ۲-　　۲) ۲　　۳) ۳　　۴) ۳-

تست ۱۴۰: بازهٔ (a,b) یک همسایگی متقارن .... به شعاع .... است.

۱) $\frac{a+b}{۲}$ ، $\frac{a-b}{۲}$ ۲) $\frac{a+b}{۲}$ ، $\frac{b-a}{۲}$ ۳) $\frac{a-b}{۲}$ ، $\frac{a+b}{۲}$ ۴) $\frac{a+b}{۲}$ ، $\frac{a+b}{۲}$

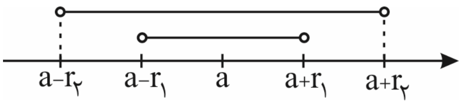
پاسخ: بازهٔ (a,b) وقتی یک همسایگی متقارن است که مرکز همسایگی نقطهٔ میانی بازه باشد یعنی $\frac{a+b}{۲}$ و شعاع همسایگی هم باید برابر نصف طول بازه باشد یعنی $\frac{b-a}{۲}$.

تست ۱۴۱: اگر اجتماع دو همسایگی باز متقارن یک عدد، یک همسایگی باز متقارن آن عدد شده باشد، آن‌گاه الزاماً:

۱) اشتراک دو همسایگی تهی است. ۲) اشتراک دو همسایگی برابر یکی از آن‌ها است.

۳) دو همسایگی برابرند. ۴) یکی از دو همسایگی تهی است.

پاسخ: دو همسایگی باز متقارن یک عدد را روی محور در نظر بگیرید:



اجتماعشان برابر همسایگی بزرگ‌تر و اشتراکشان برابر همسایگی کوچک‌تر است. پس اشتراک دو همسایگی برابر یکی از آن‌ها است.

تست ۱۴۲: یک همسایگی متقارن به مرکز a و شعاع بیشترین مقدار ممکن، زیرمجموعهٔ جواب نامعادلهٔ $|\frac{x-۳}{۲x-۱}|>۱$ است. a کدام است؟ (ریاضی خارج ۸۹)

۱) $-\frac{۳}{۴}$ ۲) $-\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۱۱}{۶}$

پاسخ: طبق خاصیت $\frac{|x|}{|y|}=|\frac{x}{y}|$، نامعادلهٔ داده‌شده را به صورت $\frac{|x-۳|}{|۲x-۱|}>۱$ می‌نویسیم. حالا چون مطمئن هستیم که مخرج هرگز منفی نیست، طرفین وسطین می‌کنیم:

$$|x-۳|>|۲x-۱| \xrightarrow[x\neq\frac{۱}{۲}]{\text{توان ۲}} x^۲-۶x+۹>۴x^۲-۴x+۱ \Rightarrow ۳x^۲+۲x-۸<۰$$

برای حل نامعادلهٔ $۳x^۲+۲x-۸<۰$ باید تعیین علامت کنیم. ریشه‌های عبارت می‌شوند $\frac{-۲\pm\sqrt{۱۰۰}}{۶}$ یعنی $x=-۲$ و $x=\frac{۴}{۳}$. (از روش دلتا، ریشه‌ها را پیدا کردیم.)

پس جدول تعیین علامت عبارت به صورت

x	$-\infty$		-۲		$\frac{۴}{۳}$		$+\infty$
		+	۰	−	۰	+	
				ج			

است و البته حواسمان هست که به ازای $x=\frac{۱}{۲}$ مخرج نامعادلهٔ $|\frac{x-۳}{۲x-۱}|>۱$ صفر می‌شود پس $x\neq\frac{۱}{۲}$. بنابراین جواب به صورت زیر خواهد بود:

$$x\in(-۲,\frac{۴}{۳})-\{\frac{۱}{۲}\}=(-۲,\frac{۱}{۲})\cup(\frac{۱}{۲},\frac{۴}{۳})$$

بین این دو بازه، بیشترین شعاع متعلق به بازهٔ $(-۲,\frac{۱}{۲})$ است پس مرکز همین بازه که مدنظر طراح است، می‌شود:

$$a=\frac{-۲+\frac{۱}{۲}}{۲}=\frac{-۳}{۴}$$

توفیق و رستگاری را از خدا بخواهید.