

101  $r \cos^r x + r \sin^r x = 1$

$(r \cos^r x - 1) + r \sin^r x = 0$

$\cos r x + \sin - r x = \dots \rightarrow \cos r x = -\sin - r x = \sin(-r x)$

$\cos(\frac{\pi}{r} - (-r x))$

$\cos r x = \cos(\frac{\pi}{r} + r x) \rightsquigarrow r x = r k \pi \pm (\frac{\pi}{r} + r x)$

$\cos u = \cos \alpha$

$u = r k \pi \pm \alpha$

$r x = r k \pi + \frac{\pi}{r} + r x$

$r x = r k \pi - \frac{\pi}{r} - r x$

$\Sigma x = r k \pi - \frac{\pi}{r}$

$x = \frac{k \pi}{r} - \frac{\pi}{r}$

$$\tan 2x = \tan x \dots$$

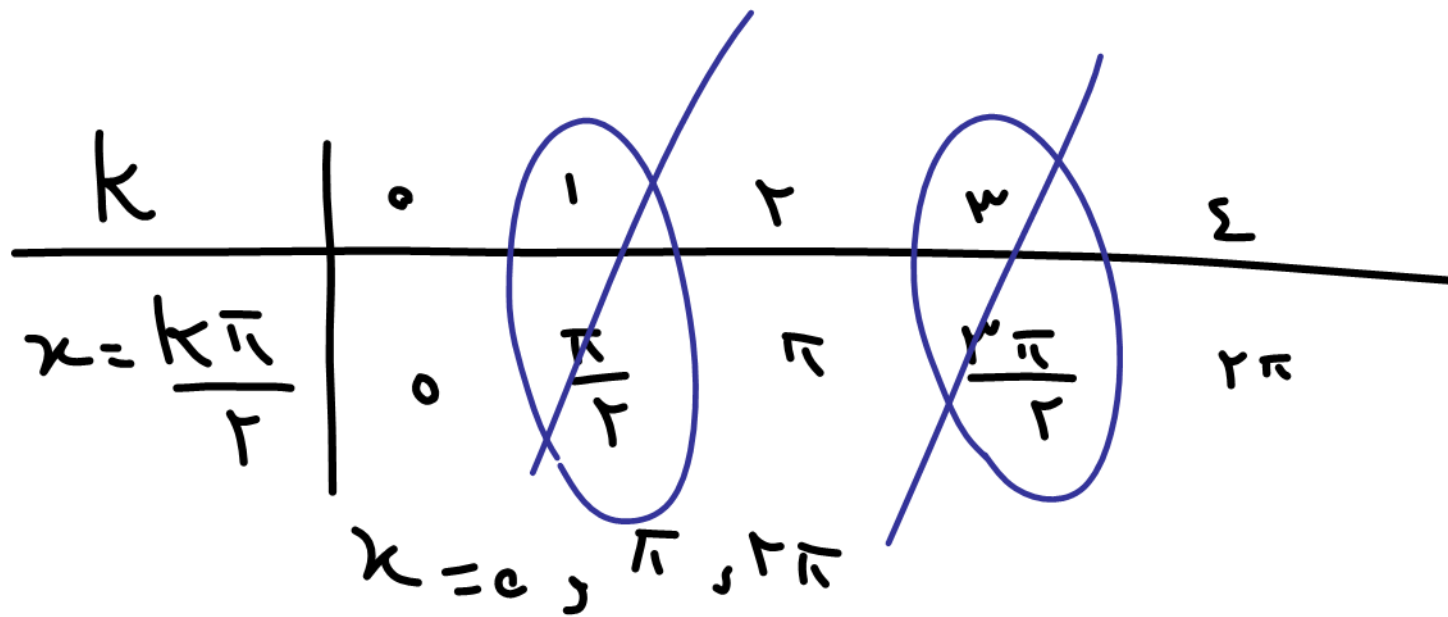
معادله تانژانتی

$$\tan \overset{u}{2x} = \tan \overset{\alpha}{x} \longrightarrow 2x = k\pi + x \longrightarrow 2x - x = k\pi$$

$$\tan u = \tan \alpha$$

$$x = \frac{k\pi}{1}$$

$$u = k\pi + \alpha$$



$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

می دانیم

$$\sin 0 = 0$$

در هر جایی



مخفوقات

$\tan r\pi + \tan x = \dots$  جواب آگلی

$$\tan r\pi = -\tan x$$


$$\tan(r\pi) = \tan(-x)$$

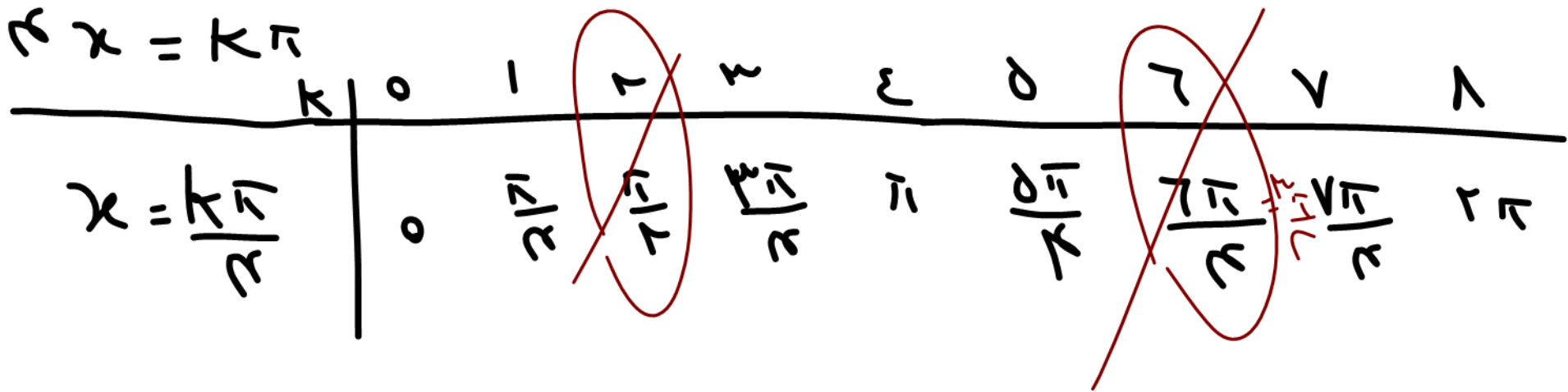
$$\tan u = \tan \alpha$$

$$u = k\pi + \alpha$$

$$r\pi = k\pi - x$$

$$x = k\pi - r\pi$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$




$$\frac{r \sin x - r \sin^3 x}{\sin x} = r \cos^2 x \quad \text{جواب عملی عالی}$$

$$\frac{\sin x (r - r \sin^2 x)}{\sin x} = r (1 - \sin^2 x) \implies r - r \sin^2 x = r - r \sin^2 x$$

~~$\sin x$~~

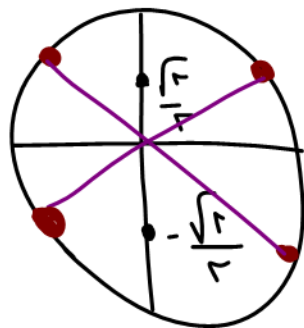


$$x = k\pi$$

اینه‌های مزاح

$$1 = r \sin^2 x$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{r} \implies \sin x = \pm \frac{\sqrt{r}}{r}$$



$$x = k\pi + \frac{\pi}{2} \quad \therefore \quad x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{2}$$

دوره تناوب :

$$f(x + T) = f(x) \quad T \neq 0$$

تابعی تناوبی که با افزودن یک مقدار نامصغر به  $x$  عرض تابع عوض نشود.

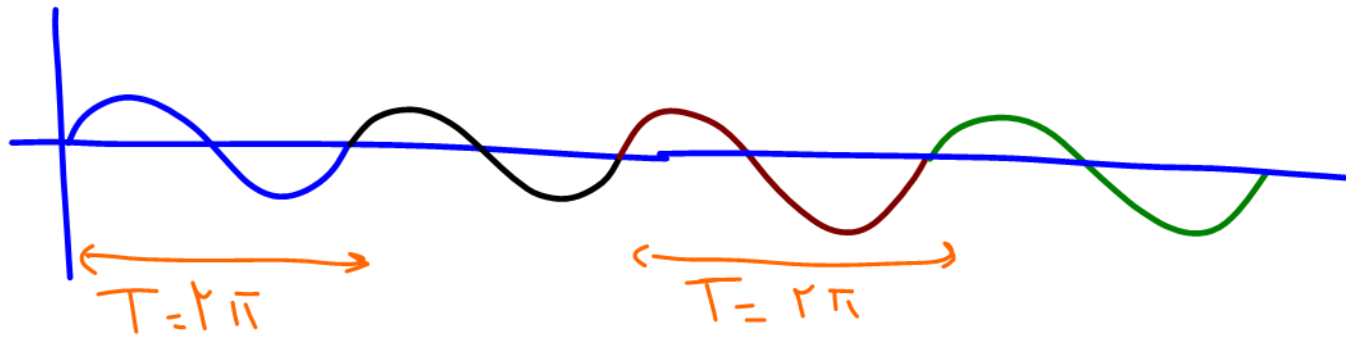
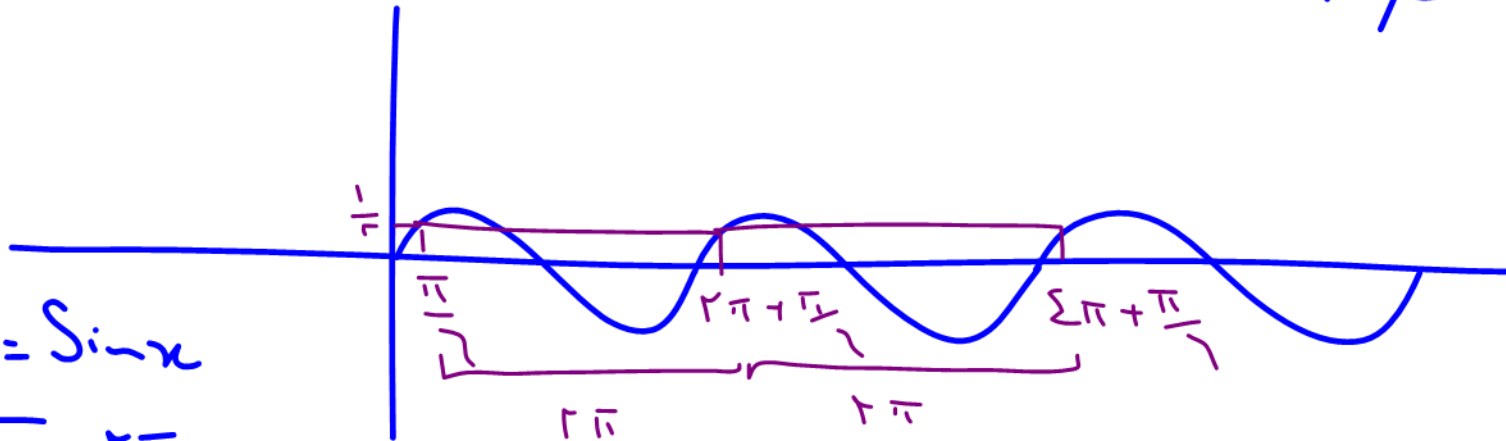
$$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{1}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 1 \cdot 2\pi\right) = \dots = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$$

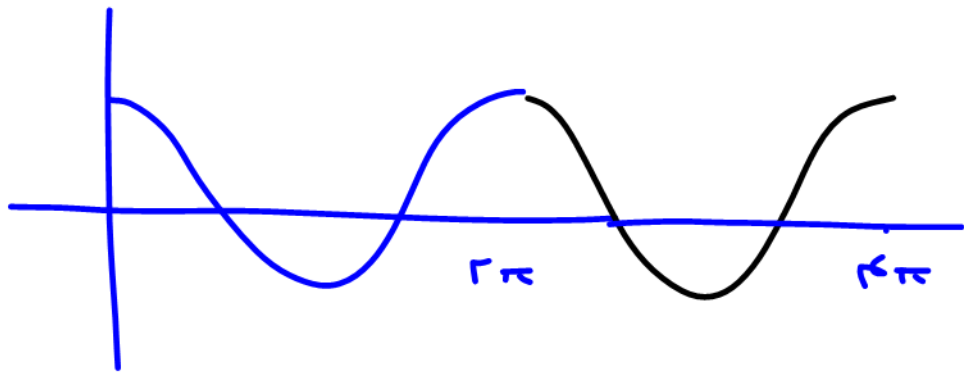
<sub>2, 4, 8, ...</sub>                      <sub>3, 4, ...</sub>

$$y = \sin x$$

$$T = 2\pi$$

دوره تناوب





$$y = \cos x \quad T = 2\pi$$

$$y = \sin(ax)$$

$$T = \frac{2\pi}{|a|}$$

$$y = \cos(ax)$$

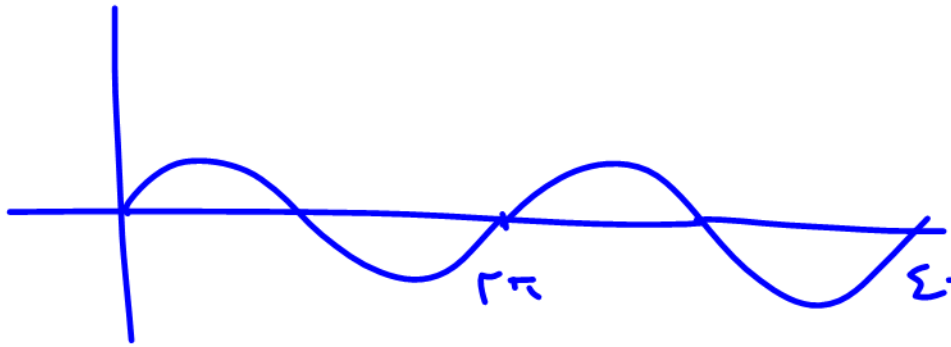
$$T = \frac{2\pi}{|a|}$$

$$T = \frac{2\pi}{\text{ضریب } x}$$

مثال: دوره تناوب  $y = \sin(3x)$  و  $y = \cos(2x)$  ؟

$$T = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

$$T = \frac{2\pi}{3}$$

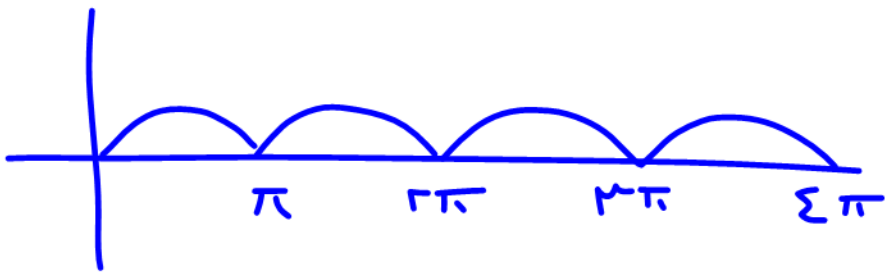


$$y = \sin x$$

$$T = 2\pi$$

$$y = \sin(ax)$$

$$T = \frac{2\pi}{|a|}$$

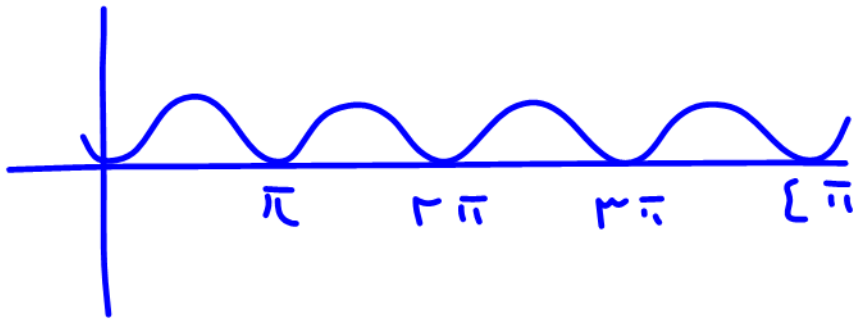


$$y = |\sin x|$$

$$T = \pi$$

$$y = |\sin(ax)|$$

$$T = \frac{\pi}{|a|}$$



$$y = \sin^k x$$

$$T = \pi$$

$$y = \sin^k(ax)$$

$$T = \frac{\pi}{|a|}$$

اگر دور تناوب  $f(x)$  به صورت  $T$  باشد، دور تناوب

$$\frac{T}{|b|} \text{ به صورت } af(bx+c)+d \text{ می باشد.}$$

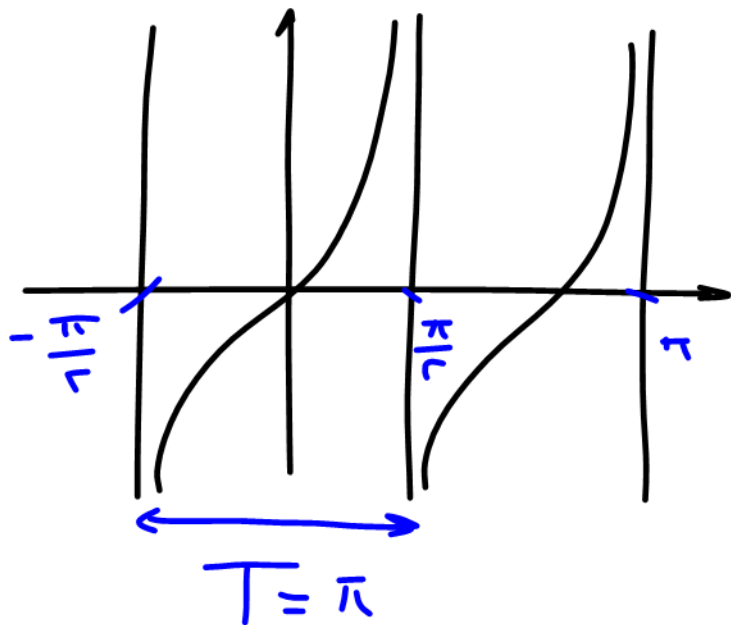
$$\text{الف) } y = 3 \sin\left(\pi x + \frac{\pi}{2}\right) + 7$$

$$T = \frac{2\pi}{\pi} = 2$$

$$\text{ب) } y = -3 \cos\left(2x + \frac{\pi}{16}\right) - 14$$

$$T = \frac{2\pi}{2} = \pi$$



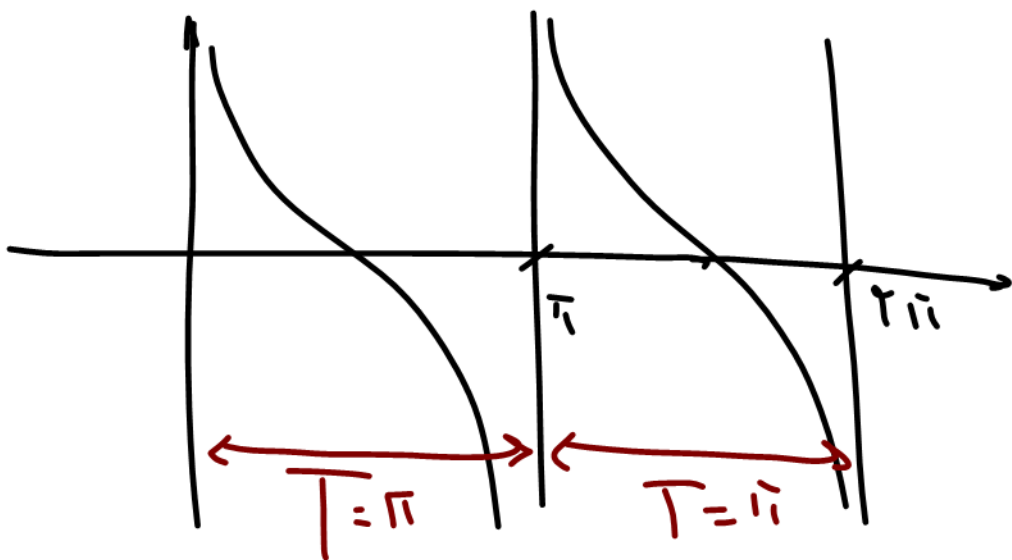


$$y = \tan x$$

$$y = \tan(ax)$$

$$T = \pi$$

$$T = \frac{\pi}{|a|}$$



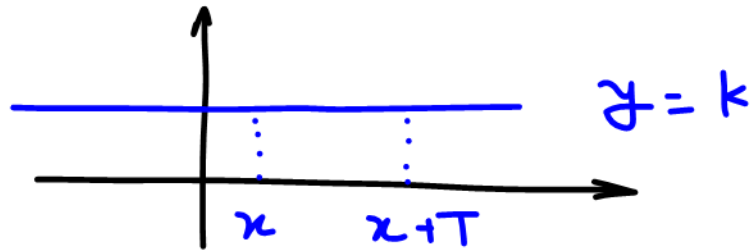
$$y = \cot x$$

$$y = \cot(ax)$$

$$T = \pi$$

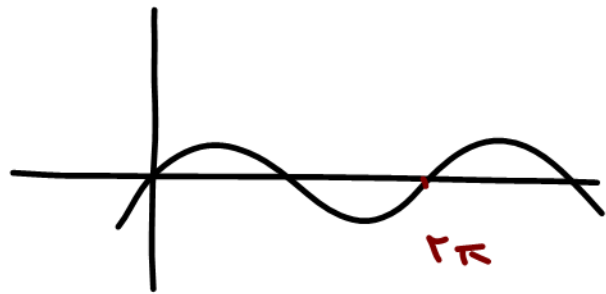
$$T = \frac{\pi}{|a|}$$

نکته: تابع ثابت متناوب است. دوره تناوب آن هر عدد حقیقی است.



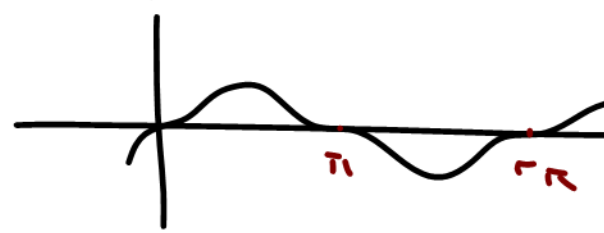
$$f(x) = f(x+T)$$

$$T \neq 0, T \in \mathbb{R}$$



$$y = \sin x$$

$$T = 2\pi$$

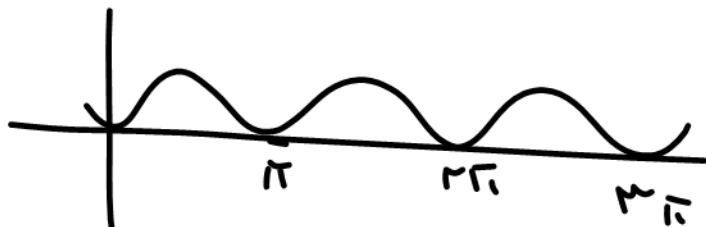


$$y = \sin(ax)$$

$$T = \frac{2\pi}{a}$$

$$y = \sin^{2k+1}(ax)$$

$$T = \frac{2\pi}{|a|}$$



$$y = \sin^2 x$$

$$T = \pi$$

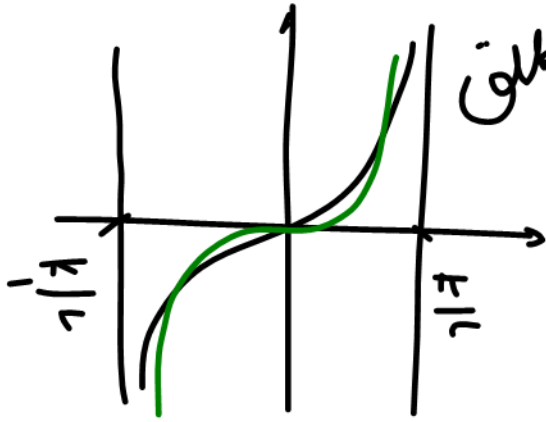
$$y = \sin^{2k}(ax)$$

$$T = \frac{\pi}{|a|}$$



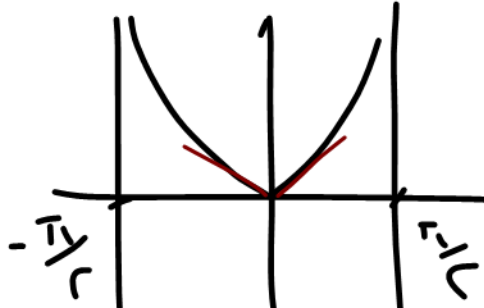
$$y = |\sin x| \rightarrow T = \frac{\pi}{|a|}$$

تناثرات رکتة تناثرات با هر توان (چه زوج چه فرد) و داخل قدر مطلق

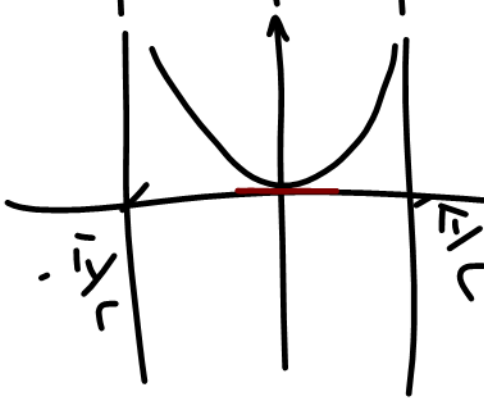


$$y = \tan x \quad T = \pi$$

$$y = \tan^{k+1} x \quad T = \pi$$



$$y = |\tan x| \quad T = \pi$$



$$y = \tan^k x \quad T = \pi$$

$$y = \tan(ax)$$

$$y = \tan^k(ax)$$

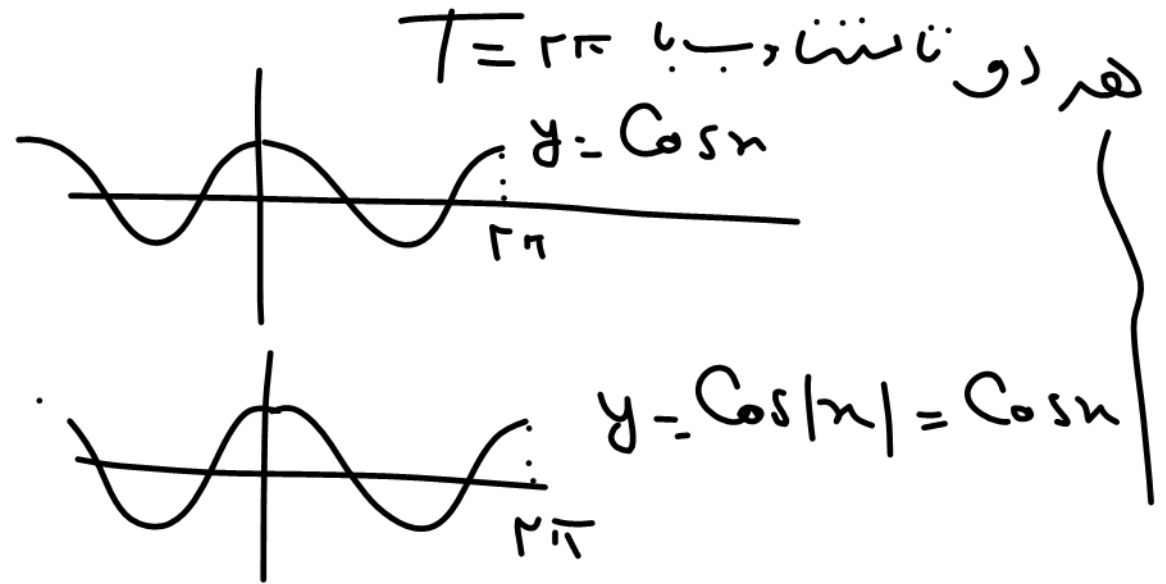
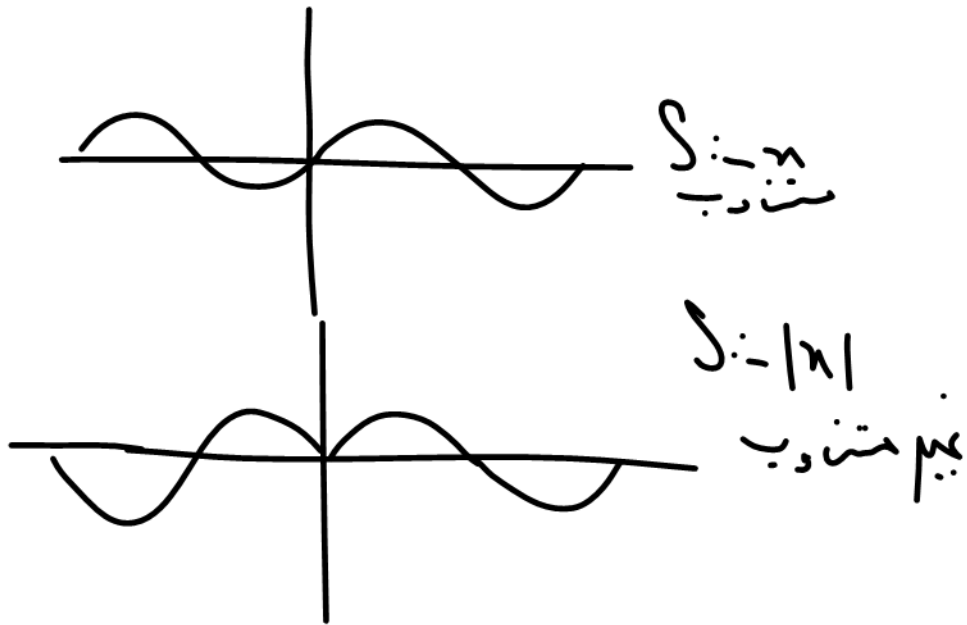
$$y = \tan^{k+1}(ax)$$

$$y = |\tan(ax)|$$

$$T = \frac{\pi}{|a|}$$

$\cot |x|, \tan |x|, \Sigma - |x|$  متناوب نیستند.

فقط  $\cos |x|$  که برابر همون  $\cos x$  است متناوب با  $T = 2\pi$



نکته: تابع متناوب یک به یک و داشتن پذیرفت.

نکته: تابع متناوب هرگز نمی تواند اکیداً یکنواپ باشد زیرا:

$$f(x+T) = f(x)$$

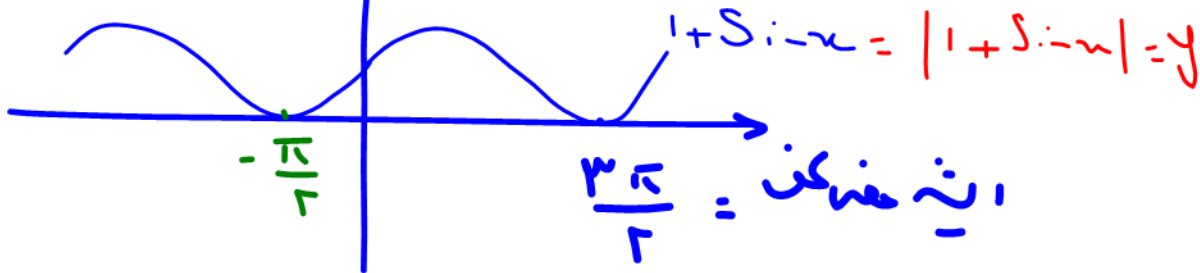
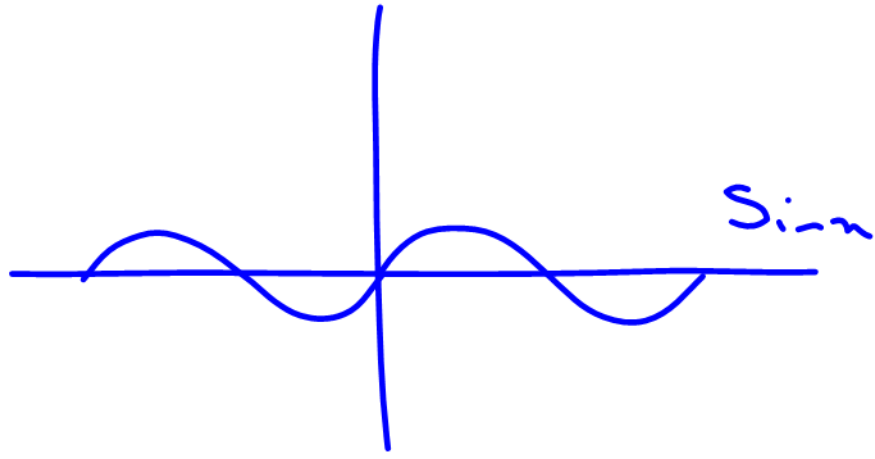
نکته: اگر دوره تناوب تابعی را بدهیم  $T$  است دوره تناوب  $y = af(bx+c)+d$  است  $\frac{T}{|b|}$ .

نمودار در خواستی:

$$y = |1 + \sin x|$$

دوره تناوب آن را

از روی شکل همین ببینید



$$T = \frac{3\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{4\pi}{2} = 2\pi$$

$$f(x+T) = f(x)$$

برای آن هم تابع غیر اویلی که گفته شد  
یابش و بلویا کمترین در رابعه زیر چیدس



















































































Trigonometry  
اندازه گیری مثلث  
سه بر سنجی

متقابل برودند سینوس باشد  
سینوس چو برودی کینوس نشید  
تائزانت بدت اکید و برعکس کتائزانت  
جوار برودن باشد کینوس

مثلثات پایه دوازدهم رشته تجربی

{ 5, 4, 3  
{ 13, 12, 5

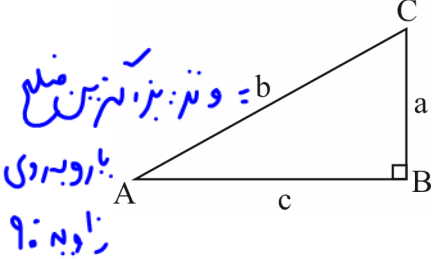
اعداد فیثاغورسی صاف در  $a^2 = b^2 + c^2$

نسبت های مثلثاتی

فرض می کنیم A یک زاویه حاده معلوم باشد، اگر مثلث قائم الزاویه ای را در نظر بگیریم که یکی از زاویه های غیر قائم آن A است، حاصل هر یک از کسرهای:

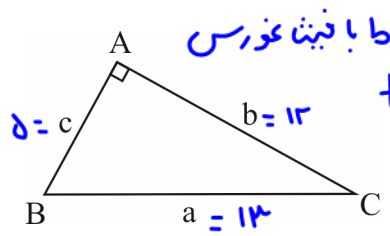
(1)  $\frac{\text{طول ضلع مقابل به زاویه A}}{\text{طول ضلع مجاور به زاویه A}}$  (2)  $\frac{\text{طول ضلع مجاور به زاویه A}}{\text{طول ضلع مقابل به زاویه A}}$  (3)  $\frac{\text{طول ضلع مقابل به زاویه A}}{\text{وتر}}$  و (4)  $\frac{\text{طول ضلع مجاور به زاویه A}}{\text{وتر}}$

همواره مقداری ثابت می باشند؛ یعنی فقط مقدار زاویه A مهم است و اندازه اضلاع مثلث قائم الزاویه ای که یک زاویه اش برابر A است تأثیری در این مقادیر ندارد. به دلیل ثابت بودن این مقادیر برای زاویه A، هر یک از آن ها را به ترتیب (1) تانژانت زاویه A، (2) کتانژانت زاویه A، (3) سینوس زاویه A و (4) کسینوس زاویه A می نامیم.



$\sin \hat{A} = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{c}$        $\cos \hat{A} = \frac{AB}{AC} = \frac{b}{c}$        $\frac{\sin \hat{A}}{\cos \hat{A}} = \frac{a}{b} = \frac{a}{c} = \tan \hat{A}$   
 $\tan \hat{A} = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{b} = \text{tg } \hat{A} = \text{tg } \hat{A}$        $\cot \hat{A} = \frac{AB}{BC} = \frac{b}{a} = \text{Cotg } \hat{A} = \text{Cotg } \hat{A}$        $\frac{c}{a} = \text{Cotan } \hat{A}$

در یک مثلث قائم الزاویه، نسبت های سینوس، کسینوس، تانژانت و کتانژانت را نسبت های مثلثاتی می نامیم.



تست 1: در شکل مقابل  $a + c = 18$  و  $\cos \hat{B} = \frac{5}{13}$  مقدار  $\tan \hat{C}$  کدام است؟  
 (1)  $\frac{5}{12}$       (2)  $\frac{12}{5}$       (3)  $\frac{13}{5}$       (4)  $\frac{5}{13}$

پاسخ: گزینه «1» - با توجه به تعریف کسینوس یک زاویه در مثلث قائم الزاویه، می توان نوشت:

$\cos \hat{B} = \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{5}{13} = \frac{c}{a} \xrightarrow{\times a} c = \frac{5}{13} a$

از رابطه  $a + c = 18$  استفاده می کنیم:

$a + c = 18 \Rightarrow a + \frac{5}{13} a = 18 \Rightarrow \frac{18}{13} a = 18 \Rightarrow a = 13 \Rightarrow c = 5$

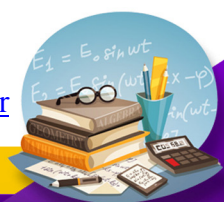
حال به کمک رابطه فیثاغورس اندازه b را محاسبه می کنیم:

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 13^2 = b^2 + 5^2 \Rightarrow b^2 = 169 - 25 = 144 \xrightarrow{\sqrt{\quad}} b = 12$

می دانیم که تانژانت یک زاویه، برابر نسبت ضلع مقابل به ضلع مجاور آن زاویه است.

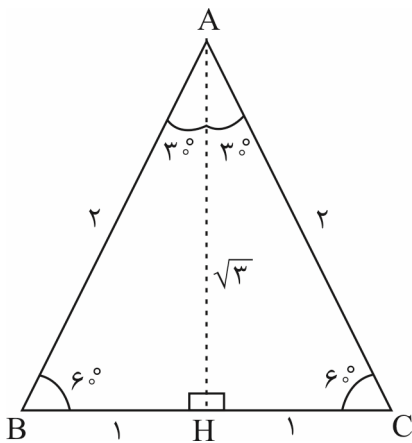
$\tan \hat{C} = \frac{c}{b} \Rightarrow \tan \hat{C} = \frac{5}{12}$

نکته: با در نظر گرفتن مثلث متساوی الاضلاع به ضلع 2 واحد، می توان نسبت های مثلثاتی زاویه های  $30^\circ$  و  $60^\circ$  را به صورت زیر محاسبه کرد. در مثلث متساوی الاضلاع، ارتفاع، میانه، نیمساز و عمود منصف وارد بر یک ضلع بر هم منطبق اند.



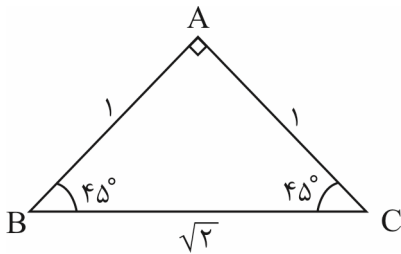
پای صحبت ۳ و ۶ (دو زاویه جمع ۹ یا متمم)

سینوس کینولته  
کینوس کینولته  
تانژانت کینولته  
کوتانژانت کینولته



$$\Delta ABH : \begin{cases} \sin 30^\circ = \frac{BH}{AB} = \frac{1}{2} \\ \cos 30^\circ = \frac{AH}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \tan 30^\circ = \frac{BH}{AH} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \cot 30^\circ = \frac{AH}{BH} = \sqrt{3} \end{cases} \quad \begin{cases} \sin 60^\circ = \frac{AH}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos 60^\circ = \frac{BH}{AB} = \frac{1}{2} \\ \tan 60^\circ = \frac{AH}{BH} = \sqrt{3} \\ \cot 60^\circ = \frac{BH}{AH} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

با در نظر گرفتن مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین به اضلاع قائمه ۱ واحد می توان نسبت های مثلثاتی زاویه ۴۵° (به عنوان مثال B) را به صورت زیر محاسبه کرد:



$$\sin 45^\circ = \frac{AC}{BC} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan 45^\circ = \frac{AC}{AB} = 1$$

$$\cos 45^\circ = \frac{AB}{BC} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cot 45^\circ = \frac{AB}{AC} = 1$$

خلاصه نسبت های مثلثاتی زوایای معروف (۶۰°، ۴۵°، ۳۰°)

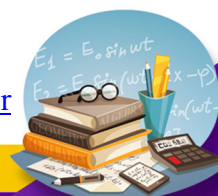
مقدار زاویه $\theta$ / مقدار نسبت مثلثاتی	۳۰°	۴۵°	۶۰°
$\sin \theta$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos \theta$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan \theta$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	۱	$\sqrt{3}$
$\cot \theta$	$\sqrt{3}$	۱	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

تست ۲: مقدار x در تساوی  $\frac{\sqrt{3} \tan 60^\circ - 4 \sin 30^\circ}{2\sqrt{2} \cos 45^\circ + \cot 45^\circ} = x \cos 60^\circ$  کدام است؟

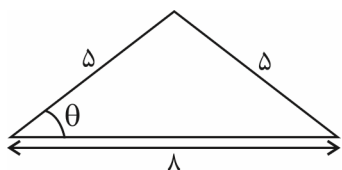
$\frac{3}{2}$  (۴)                      ۳ (۳)                       $\frac{2}{3}$  (۲)                       $\frac{1}{3}$  (۱)

پاسخ: گزینه «۲» - کافی است مقدار عددی هر یک از نسبت های مثلثاتی زوایای داده شده را جای گذاری کنیم:

$$x \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3} \times \sqrt{3} - 4 \times \frac{1}{2}}{2\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + 1} \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{3 - 2}{2 + 1} = \frac{1}{3} \xrightarrow{\times 2} x = \frac{2}{3}$$



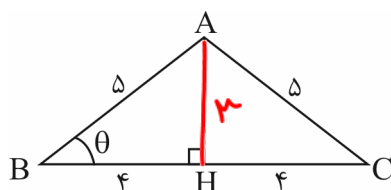
تست ۳: در مثلث مقابل، مقدار  $2 \cos \theta + \sin \theta$  کدام است؟



(۲)  $\frac{9}{5}$   
(۴)  $\frac{12}{5}$

(۱)  $\frac{8}{5}$   
(۳)  $\frac{11}{5}$

پاسخ: گزینه «۳» - مثلث رسم شده، متساوی الساقین است. پس ارتفاع، میانه و نیمساز وارد بر قاعده بر هم منطبق اند. ارتفاع وارد بر قاعده را رسم می کنیم:



$$\Delta ABH : AB^2 = AH^2 + BH^2 \Rightarrow 25 = AH^2 + 16 \Rightarrow AH^2 = 9 \xrightarrow{\sqrt{\quad}} AH = 3$$

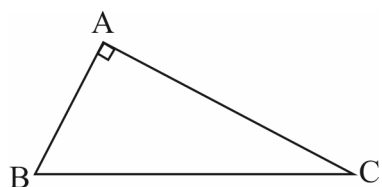
$$\sin \theta = \frac{AH}{AB} = \frac{3}{5}, \quad \cos \theta = \frac{BH}{AB} = \frac{4}{5}$$

در نتیجه مقدار خواسته شده برابر است با:

$$2 \cos \theta + \sin \theta = \frac{8}{5} + \frac{3}{5} = \frac{11}{5}$$

### ارتباط بین نسبت های مثلثاتی زوایای متمم

اگر دو زاویه متمم هم باشند (مجموعشان  $90^\circ$  باشد)، آن گاه سینوس یکی با کسینوس دیگری برابر است و برعکس، تانژانت یکی با کتانژانت دیگری برابر است و برعکس. در شکل زیر داریم:



$$\hat{B} + \hat{C} = 90^\circ$$

$$\sin \hat{B} = \frac{AC}{BC} = \cos \hat{C}, \quad \sin \hat{C} = \frac{AB}{BC} = \cos \hat{B}$$

$$\tan \hat{B} = \frac{AC}{AB} = \cot \hat{C}, \quad \tan \hat{C} = \frac{AB}{AC} = \cot \hat{B}$$

تست ۴: حاصل عبارت  $P = \frac{\Delta \sin 2^\circ \times \cot 83^\circ \times \tan 76^\circ}{8 \cot 14^\circ \times \cos 88^\circ \times \tan 7^\circ}$  کدام است؟

(۴)  $-\frac{8}{5}$

(۳)  $\frac{8}{5}$

(۲)  $-\frac{5}{8}$

(۱)  $\frac{5}{8}$

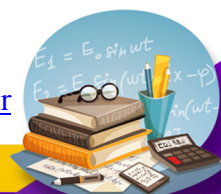
پاسخ: گزینه «۱» - از روابط نسبت های مثلثاتی زاویه های متمم استفاده می کنیم:

$$76^\circ + 14^\circ = 90^\circ \Rightarrow \tan 76^\circ = \cot 14^\circ$$

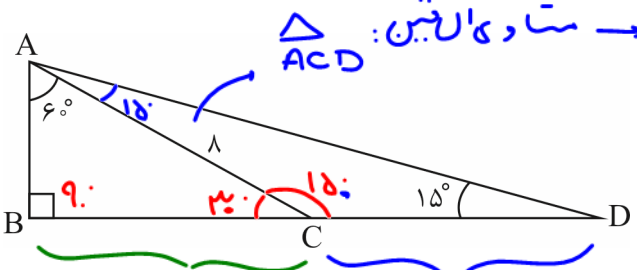
$$83^\circ + 7^\circ = 90^\circ \Rightarrow \cot 83^\circ = \tan 7^\circ$$

$$2^\circ + 88^\circ = 90^\circ \Rightarrow \sin 2^\circ = \cos 88^\circ$$

$$P = \frac{\Delta \sin 2^\circ \times \cot 83^\circ \times \tan 76^\circ}{8 \tan 76^\circ \times \sin 2^\circ \times \cot 83^\circ} = \frac{\Delta}{8}$$



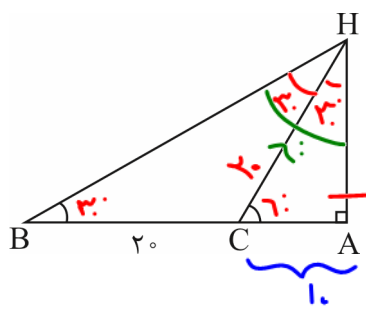
تست ۵: در شکل مقابل اندازه پاره خط BD برابر است با:



- ۴√۳ + ۴ (۱)
- ۴√۳ + ۸ (۲) ✓
- ۴√۳ + ۱۲ (۳)
- ۱۶ (۴)

$\triangle ABC: \cos 6^\circ = \frac{BC}{AC} = \frac{BC}{1} \Rightarrow BC = \cos 6^\circ$   
 $\triangle ACD: \text{ساوی الساقین} \rightarrow CD = CA = 1$   
 $BD = 1 + 4\sqrt{3}$

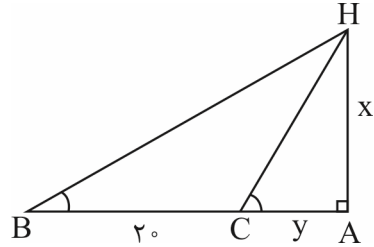
تست ۶: در شکل مقابل اگر  $\hat{B} = 3^\circ$  و  $\hat{C} = 6^\circ$ ، اندازه AH کدام است؟



- ۱۰ (۱)
- ۲۰√۳ (۲)
- ۱۰√۳ (۳) = AH
- ۲۰ (۴)

$\triangle ACH: \cos 6^\circ = \frac{AC}{AH} = \frac{1}{x} \Rightarrow AC = \frac{x}{\cos 6^\circ}$   
 $\triangle BAH: \tan 3^\circ = \frac{AH}{BA} = \frac{x}{20 + y} \Rightarrow x = (20 + y)\tan 3^\circ$   
 $\triangle BAH: \tan 6^\circ = \frac{AH}{AC} = \frac{x}{\frac{x}{\cos 6^\circ}} \Rightarrow \tan 6^\circ = \cos 6^\circ$

پاسخ: گزینه «۳» - اگر فرض کنیم  $AC = y$  و  $AH = x$ ، آن گاه در شکل مقابل داریم:

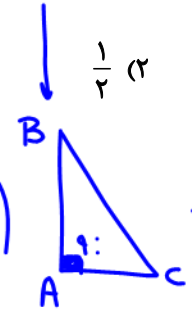


$$\begin{cases} \tan \hat{B} = \frac{AH}{AB} = \frac{x}{20+y} \Rightarrow \tan 3^\circ = \frac{x}{y+20} = \frac{\sqrt{3}}{3} (*) \\ \tan \hat{C} = \frac{AH}{AC} \Rightarrow \tan 6^\circ = \frac{x}{y} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{x}{y} \end{cases}$$

$x = y\sqrt{3} \xrightarrow{(*)} \frac{y\sqrt{3}}{y+20} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow 3y = y+20 \Rightarrow y=10 \Rightarrow x=10\sqrt{3} \Rightarrow AH=10\sqrt{3}$

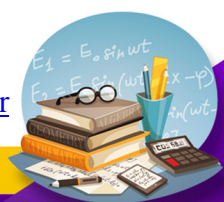
تست ۷: در مثلث قائم الزاویه ABC که  $\hat{A} = 90^\circ$ ، حاصل  $\frac{1}{1+\tan \hat{B}} + \frac{1}{1+\tan \hat{C}}$  کدام است؟

- ۱ (۱)
- $\frac{1}{2}$  (۲)
- ۲ (۳)
- ۴ (۴)



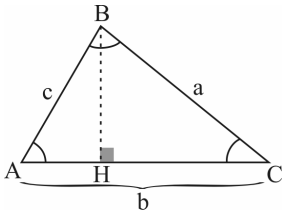
$\hat{B} + \hat{C} = 90^\circ$   
 $\hat{C} = 90^\circ - \hat{B}$   
 $\tan \hat{B} = \cot \hat{C}$

$\frac{1}{1+\tan \hat{B}} + \left( \frac{1}{1+\frac{1}{\cot \hat{C}}} = \frac{\tan \hat{C}}{1+\tan \hat{C}} \right)$   
 $\frac{1}{1+\tan \hat{B}} + \frac{\tan \hat{C}}{1+\tan \hat{C}} = \frac{\tan \hat{B} + 1}{1+\tan \hat{B}}$   
 $= \frac{1+\tan \hat{B}}{1+\tan \hat{B}} = 1$



حل مثلث و کاربردهای آن

به شکل روبه‌رو و اطلاعات زیر در مورد مثلث توجه کنید.

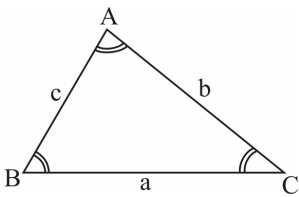


$$1) \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$$

$$2) \text{محیط} = a + b + c$$

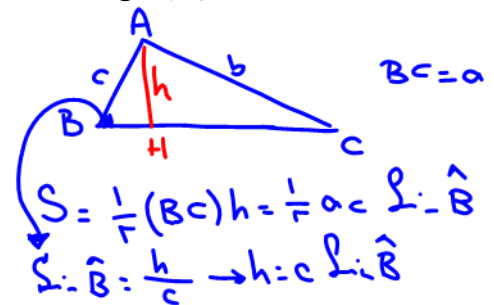
منظور از حل مثلث، یافتن تمامی زوایا و اضلاع آن است.

۱- مساحت مثلث: اگر دو ضلع یک مثلث و زاویه‌ی بین آن‌ها را داشته باشیم، آن‌گاه مساحت مثلث از رابطه‌ی زیر محاسبه می‌شود:

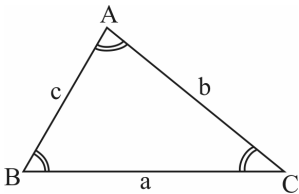


$$\text{مساحت} = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} ac \sin B$$

$$\frac{1}{2} abc \quad \frac{\sin C}{c} = \frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b}$$



۲- قانون سینوس‌ها: می‌دانیم مساحت یک مثلث برابر است با نصف حاصل ضرب دو ضلع در سینوس زاویه‌ی بین آن‌ها. پس:



$$S = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} ac \sin B = \frac{1}{2} bc \sin A$$

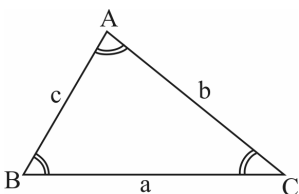
با تقسیم طرفین تساوی‌ها بر  $\frac{1}{2} abc$  و معکوس کردن آن‌ها، داریم:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \quad (\text{قانون سینوس‌ها})$$

توجه: قانون سینوس‌ها، برای حل مثلث‌هایی که در آن یک ضلع و زاویه‌ی روبه‌روی آن را داریم، بسیار سودمند خواهد بود.

۳- قانون کسینوس‌ها: وقتی دو ضلع یک مثلث و زاویه‌ی بین آن‌ها را داشته باشیم، قانون سینوس‌ها برای یافتن اضلاع و زوایا قابل استفاده نیست. در این حالت از «قانون کسینوس‌ها» استفاده می‌کنیم.

(در زیر ضلع با اضلاع در) - مجموع مربعات دو ضلع دیگر = مربع هر ضلع



$$1) a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$$

$$2) b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \hat{B}$$

$$3) c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C}$$

تعمیم  
فشارموزش  
منفی



$$a^2 = b^2 + c^2$$



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}_1$$

$$\hat{A}_1 > \hat{A} = 90^\circ$$

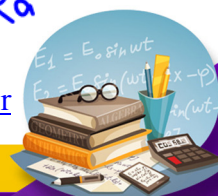
$$a_1 > a$$



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}_2$$

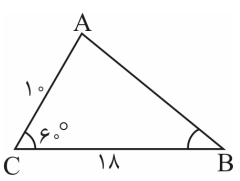
$$\hat{A}_2 < \hat{A} = 90^\circ$$

$$a_2 < a$$



$$(AB)^2 = (AC)^2 + (BC)^2 - 2(AC)(BC)\cos\gamma$$

مثال ۸: در شکل روبه‌رو، طول AB را بیابید.



$$AB^2 = 10^2 + 18^2 - 2(10)(18)\cos 60^\circ = 100 + 324 - 360 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 244 \Rightarrow AB = \sqrt{244}$$

پاسخ:

تست ۹: ناظری به فاصله‌ی ۳۵ متر از پای ستونی که بر روی آن مجسمه‌ای قرار دارد، ایستاده است. زاویه‌ی رؤیت انتها و ابتدای مجسمه با سطح افق  $45^\circ$  و  $40^\circ$  است. ارتفاع مجسمه کدام است؟  $(\tan 40^\circ = 0.8)$

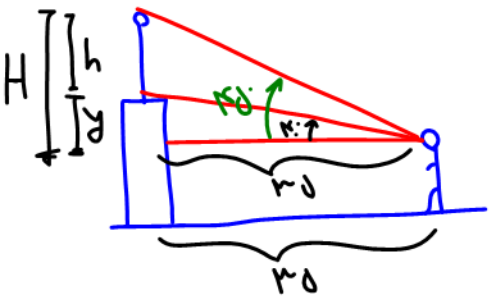
(فارج ریاضی ۹۴)

۷/۲ (۴)

۷ (۳)

۶/۴ (۲)

۶ (۱)



$$\tan 45^\circ = 1 = \frac{H}{35} \rightarrow H = 35$$

$$\tan 40^\circ = 0.8 = \frac{y}{35} \rightarrow y = 28$$

$$h = H - y = 35 - 28 = 7$$

تست ۱۰: در متوازی‌الاضلاعی اندازه‌ی دو قطر ۱۲ و ۸ واحد و زاویه‌ی بین دو قطر ۱۳۵ درجه است. مساحت متوازی‌الاضلاع چند برابر  $\sqrt{2}$  است؟

(تجربی ۹۲ و تجربی فارج ۹۴)

۳۶ (۴)

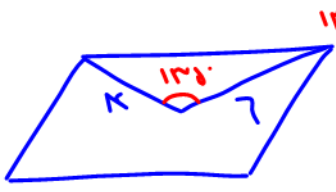
۳۲ (۳)

۲۴ (۲)

۱۸ (۱)



نکته: در هر متوازی‌الاضلاع، اقطار منصف یکدیگرند و شکل را به چهار مثلث هم‌مساحت تقسیم می‌کنند.



$$S = \frac{1}{2} ab \sin \theta = \frac{1}{2} (9)(12) \sin 135^\circ = \frac{1}{2} (9)(12) \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 24\sqrt{2}$$

تست ۱۱: مساحت مثلثی با دو ضلع ۱۶ و ۹ واحد برابر  $24\sqrt{5}$  واحد مربع است. بزرگ‌ترین ضلع این مثلث کدام است؟

(ریاضی ۹۴)

۲۴ (۴)

۲۳ (۳)

۲۲ (۲)

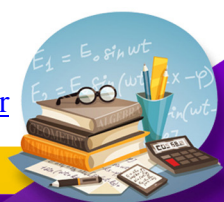
۲۱ (۱)

$$S = \frac{1}{2} ab \sin \theta = 24\sqrt{5} = \frac{1}{2} (9)(16) \sin \theta \rightarrow \sin \theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \rightarrow \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 + \cos^2 \theta = 1 \rightarrow \cos^2 \theta = 1 - \frac{5}{9} = \frac{4}{9} \rightarrow \cos \theta = \pm \frac{2}{3}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta = (16)^2 + (9)^2 - 2(9)(16) \left(-\frac{2}{3}\right) \rightarrow c = 23$$

برای ضلع بزرگ‌تر باید  $\cos \theta$  باشد  
منفی درستی بزرگ‌تر باشد در اینجا





تست ۱۲: مساحت مثلث به اضلاع ۷، ۹ و ۱۲ واحد کدام است؟

۱۴√۵ (۴)

۱۲√۵ (۳)

۱۴√۳ (۲)

۱۵√۲ (۱)

$P = \frac{a+b+c}{2}$  نصف محیط

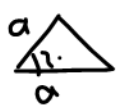
نسبه مساحت مثلث با داشتن اضلاع: (التورهدون)

$S = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)} = \sqrt{14(14-7)(14-9)(14-12)} = 14\sqrt{5}$

$P = \frac{12+9+7}{2} = 14$

$S = \frac{1}{2} a a \sin \alpha = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2}$

(قلم پی ۹۷)



مساحت مثلث متساوی الاضلاع

مسئله

حواستون به شش ضلعی منتظم هم باشه.



تست ۱۳: اگر قطر کوچک یک شش ضلعی منتظم برابر با  $2\sqrt{3}$  باشد، مساحت شش ضلعی منتظم کدام است؟

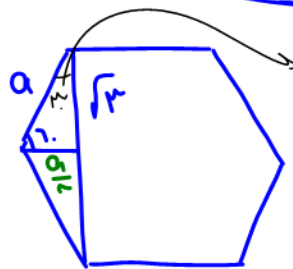
۱۲√۳ (۴)

۱۲ (۳)

۶√۳ (۲)

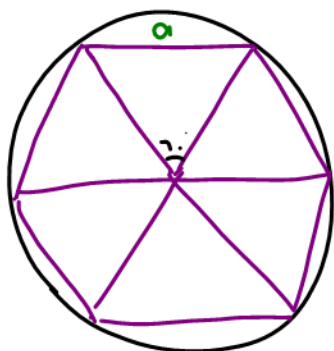
۶ (۱)

$S = 7 \left( \frac{a^2 \sqrt{3}}{2} \right)$   
مساحت مس



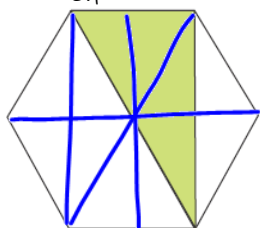
فیتاگورث  
 $a^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + (\sqrt{3})^2$   
 $a^2 - \frac{a^2}{4} = 3 - \frac{3a^2}{4} = 3$   
 $a^2 = 4 \rightarrow a = 2$

$S = 7 \left( \frac{a^2 \sqrt{3}}{2} \right) = 7\sqrt{3}$



حل باررس کا ثبغاری هشتم

(قلم پی ۹۷ و ۹۹)



تست ۱۴: مساحت شش ضلعی منتظم موجود در شکل زیر  $18\sqrt{3}$  است. مساحت ناحیه رنگی چه قدر است؟

$12 \Delta = 18\sqrt{3}$  برابر ۱۲ تا مثلثی است:

$\Delta = \frac{18\sqrt{3}}{12} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

$4 \left( \frac{3\sqrt{3}}{2} \right) = 6\sqrt{3}$

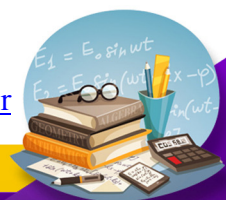
مساحت رنگ شده برابر ۴ تا مثلثی است.

۱۲ (۱)

۱۸ (۲)

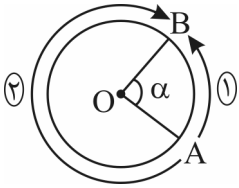
۶√۳ (۳) ✓

۹√۳ (۴)



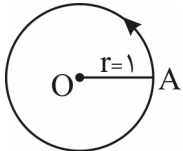
**تعریف جهت مثلثاتی**

شکل مقابل را در نظر بگیرید. اگر بخواهیم از نقطه‌ی A به B برویم، یکی از دو مسیر ۱ یا ۲ را می‌توانیم انتخاب کنیم. در مثلثات جهت شماره‌ی ۱ را که خلاف حرکت عقربه‌های ساعت است (پادساعتگرد)، جهت مثبت و جهت شماره‌ی ۲ را که موافق حرکت عقربه‌های ساعت است (ساعتگرد)، جهت منفی می‌گویند.



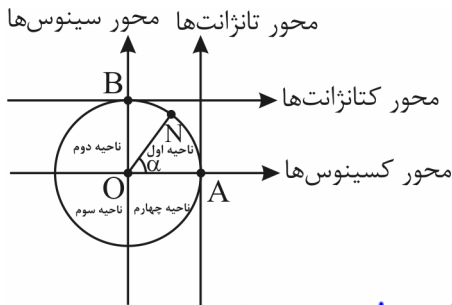
**تعریف دایره‌ی مثلثاتی**

دایره‌ای است به شعاع واحد که در آن، با توجه به شکل، نقطه‌ی A به عنوان مبدأ کمان‌ها در نظر گرفته می‌شود و جهت آن مثبت می‌باشد (پادساعتگرد).



**محورهای مثلثاتی**

- ۱- محور کسینوس‌ها: محوری که از مرکز دایره‌ی مثلثاتی و مبدأ کمان‌ها (نقطه‌ی A) می‌گذرد.
- ۲- محور سینوس‌ها: محوری که در مرکز دایره‌ی مثلثاتی بر محور کسینوس‌ها عمود است.
- ۳- محور تانژانت‌ها: محوری که در مبدأ کمان‌ها (نقطه‌ی A) بر دایره‌ی مثلثاتی مماس است و موازی محور سینوس‌هاست.
- ۴- محور کتانژانت‌ها: محوری است که در بالاترین نقطه‌ی دایره بر آن مماس است و با محور کسینوس‌ها موازی و بر محور تانژانت‌ها و سینوس‌ها عمود است.



این چهار محور مثلثاتی را در روبه‌رو می‌بینید:  
 نقطه‌ی N: انتهای کمان روبه‌رو به زاویه‌ی  $\alpha$   
 نقطه‌ی B: مبدأ محور  $\cot$   
 نقطه‌ی A: مبدأ محور  $\tan$   
 نقطه‌ی O: مبدأ محورهای  $\sin$  و  $\cos$

رفت: ضلع اول زاویه A ثابت است و ضلع دوم OB

روش به دست آوردن مقدار یک نسبت مثلثاتی از روی دایره‌ی مثلثاتی

فرض کنید، مطابق شکل روبه‌رو زاویه‌ای به اندازه‌ی  $\alpha$  انتخاب کرده‌ایم. در این صورت از انتهای کمان بر محور  $\sin$  و  $\cos$  عمود می‌کنیم. داریم:

$$OH = \sin \alpha, \quad OH' = -\cos \alpha$$

حال با امتداد OM به گونه‌ای که محور  $\tan$  و  $\cot$  قطع شود، داریم:

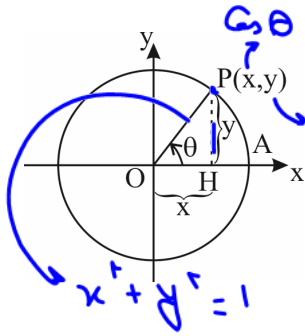
$$AT = -\tan \alpha, \quad BT' = -\cot \alpha$$

$\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1 \rightarrow \tan \alpha = \frac{1}{\cot \alpha}$

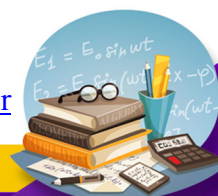
در دایره‌ی مثلثاتی، زاویه‌ی دلخواه  $\theta$  را در نظر می‌گیریم. با توجه به مثلث قائم‌الزاویه، مختصات

نقطه‌ی  $P(x, y)$  در این دایره برحسب زاویه‌ی  $\theta$  برابر است با:

$$P(x, y) = P(\cos \theta, \sin \theta) \Rightarrow \begin{cases} x = \cos \theta \\ y = \sin \theta \end{cases}$$

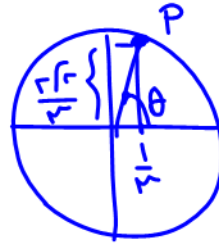


$\tan \alpha = \frac{y}{x}$   
 $\cot \alpha = \frac{x}{y} = \frac{1}{\tan \alpha}$   
 $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$



مثال ۱۵: اگر زاویه  $\theta$ ، دایره‌ی مثلثاتی را در نقطه‌ی  $P(\frac{1}{3}, \frac{2\sqrt{2}}{3})$  قطع کند، نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ی  $\theta$  را بیابید.

پاسخ:



$$\tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{\frac{2\sqrt{2}}{3}}{\frac{1}{3}} = 2\sqrt{2}$$

از طرفی:

$$P(\frac{1}{3}, \frac{2\sqrt{2}}{3}) = P(\cos \theta, \sin \theta)$$

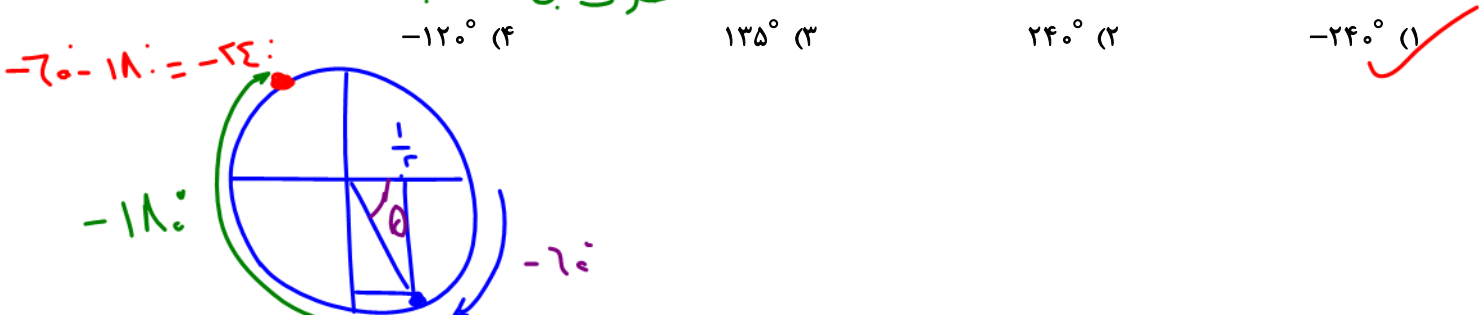
$$x = \cos \theta = \frac{1}{3}, \quad y = \sin \theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x} = 2\sqrt{2}, \quad \cot \theta = \frac{x}{y} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

تست ۱۶: نقطه‌ی  $P(\frac{1}{4}, -\frac{\sqrt{3}}{4})$  روی دایره‌ی مثلثاتی را  $180^\circ$  در جهت حرکت عقربه‌های ساعت حول مبدأ مختصات دوران می‌دهیم.

حالت مثبت مثلثاتی

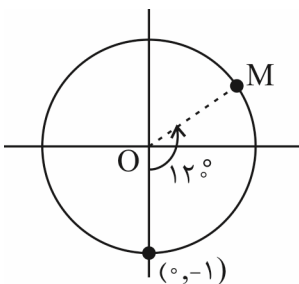
نقطه‌ی جدید چه زاویه‌ای بر روی دایره‌ی مثلثاتی به وجود می‌آورد؟



تست ۱۷: نقطه‌ی  $(0, -1)$  روی دایره‌ی مثلثاتی را حول مبدأ مختصات به اندازه‌ی  $120^\circ$  در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت دوران می‌دهیم. مختصات نقطه‌ی جدید کدام است؟

- (۱)  $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$     (۲)  $(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$     (۳)  $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2})$     (۴)  $(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$

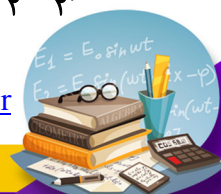
پاسخ: گزینه‌ی «۱» - نقطه‌ی  $(0, -1)$  روی دایره‌ی مثلثاتی مطابق با شکل زیر است. اگر آن را  $120^\circ$  در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت دوران دهیم، به نقطه‌ی M در ناحیه‌ی اول می‌رسیم.



OM با محور طول‌ها، زاویه‌ی  $30^\circ$  می‌سازد، بنابراین:

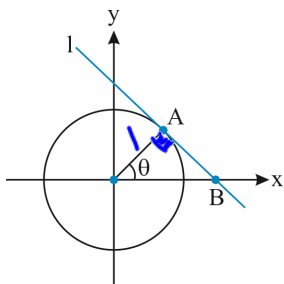
$$\begin{cases} x_M = \cos \theta \Rightarrow x_M = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ y_M = \sin \theta \Rightarrow y_M = \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \end{cases}$$

لذا  $M(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$



نکته: در هر دایره ضلع مماس در نقطه تماس بر شعاع عمود است.

تست ۱۸: در دایره مثلثاتی زیر، اندازه AB کدام است؟ (خط l بر دایره مماس است).



$\triangle OAB$  قائم الزامیه  
 $\tan \theta = \frac{\text{مقابل}}{\text{جوار}} = \frac{AB}{1}$

(۱)  $\cos \theta$

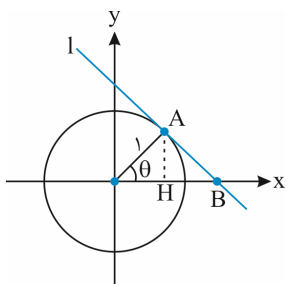
(۲)  $\frac{1}{\cos \theta}$

(۳)  $\tan \theta$

(۴)  $\frac{1}{\tan \theta}$

را سریع و بهتر

پاسخ: گزینه «۳» - خط مماس بر دایره بر شعاع عمود است. حالا اگر از نقطه A عمود بر محور طولها رسم کنیم، طبق روابط طولی در مثلث قائم الزامیه داریم:



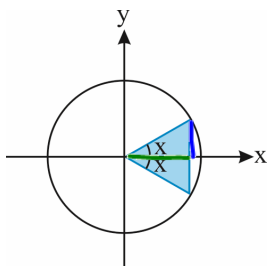
$(1)^2 = OH \times OB \xrightarrow{OH = \cos \theta} 1 = \cos \theta \times OB \Rightarrow OB = \frac{1}{\cos \theta}$

پس طبق قضیه فیثاغورس در مثلث OAB می توان نوشت:

$OB^2 = (1)^2 + AB^2 \Rightarrow \frac{1}{\cos^2 \theta} = 1 + AB^2$

$\Rightarrow AB^2 = \frac{1}{\cos^2 \theta} - 1 = \frac{1 - \cos^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \tan^2 \theta \Rightarrow AB = \tan \theta$

تست ۱۹: در دایره مثلثاتی زیر اگر مساحت ناحیه رنگی برابر با A باشد، کدام است  $A \times (\tan x + \cot x)$ ؟

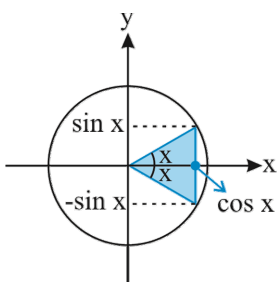


$A = S_{\Delta} = \frac{(\text{ارتفاع})(\text{فصل})}{2} = \frac{(2 \sin x) \cos x}{2} = \sin x \cos x$   
 $A \times (\tan x + \cot x) = \sin x \cos x \left( \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} \right) = \sin^2 x + \cos^2 x = 1$

پاسخ: گزینه «۴» - با توجه به شکل زیر، مساحت ناحیه رنگی، مساحت یک مثلث با ارتفاع  $\cos x$  و قاعده  $2 \sin x$  است. پس داریم:

$A = \frac{1}{2} \times (2 \sin x) \cos x = \sin x \cos x$

در نتیجه برای محاسبه  $A(\tan x + \cot x)$  می توان نوشت:



$A(\tan x + \cot x) = \sin x \cos x \left( \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} \right) = \sin x \cos x \left( \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} \right)$   
 $= \sin x \cos x \left( \frac{1}{\sin x \cos x} \right) = 1$

تست ۲۰: کدام یک از نامساوی‌های زیر بین زوایای ۴۰ و ۵۰ درجه برقرار است؟

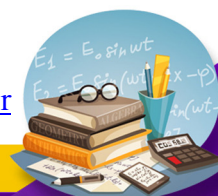
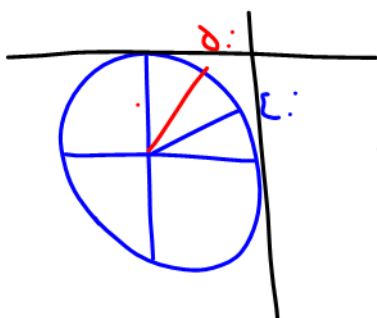
(۲)  $\cos 50^\circ < \cos 40^\circ$

(۱)  $\sin 50^\circ < \sin 40^\circ$

(۴)  $\cot 40^\circ < \cot 50^\circ$

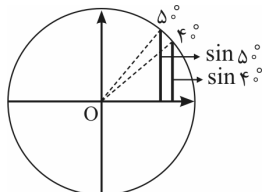
(۳)  $\tan 50^\circ < \tan 40^\circ$

(سراسری)

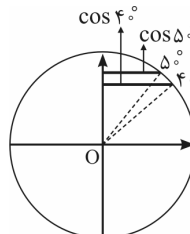


پاسخ: گزینه‌ی «۲»

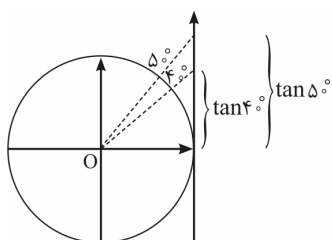
کافی است به دایره‌های مثلثاتی زیر خوب دقت کنید:



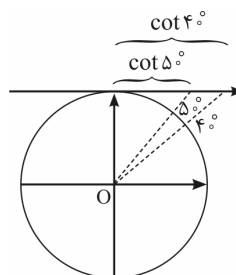
گزینه‌ی (۱) نادرست  $\Rightarrow \sin 5^\circ > \sin 4^\circ$



گزینه‌ی (۲) درست  $\Rightarrow \cos 5^\circ < \cos 4^\circ$



گزینه‌ی (۳) نادرست  $\Rightarrow \tan 5^\circ > \tan 4^\circ$



گزینه‌ی (۴) نادرست  $\Rightarrow \cot 4^\circ > \cot 5^\circ$

البته اگر به مفهوم صعود و نزول توابع نیز آشنا باشید، می‌توانید خیلی ساده‌تر پی به درستی گزینه‌ی (۲) ببرید.

$f(x) = \sin x$  در  $(0, \frac{\pi}{2})$  صعودی است.  $\Rightarrow 5^\circ > 4^\circ \Rightarrow \sin 5^\circ > \sin 4^\circ$

$f(x) = \cos x$  در  $(0, \frac{\pi}{2})$  نزولی است.  $\Rightarrow 5^\circ > 4^\circ \Rightarrow \cos 5^\circ < \cos 4^\circ$

$f(x) = \tan x$  در  $(0, \frac{\pi}{2})$  صعودی است.  $\Rightarrow 5^\circ > 4^\circ \Rightarrow \tan 5^\circ > \tan 4^\circ$

$f(x) = \cot x$  در  $(0, \frac{\pi}{2})$  نزولی است.  $\Rightarrow 5^\circ > 4^\circ \Rightarrow \cot 5^\circ < \cot 4^\circ$

تست ۲۱: اگر  $\cos \alpha \cdot \sin \alpha > 0$  و  $\cos \alpha \cdot \tan \alpha < 0$  آن‌گاه انتهای کمان  $\alpha$  در کدام ناحیه‌ی مثلثاتی است؟

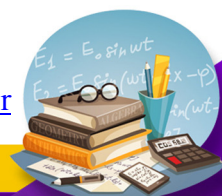
(۴) چهارم

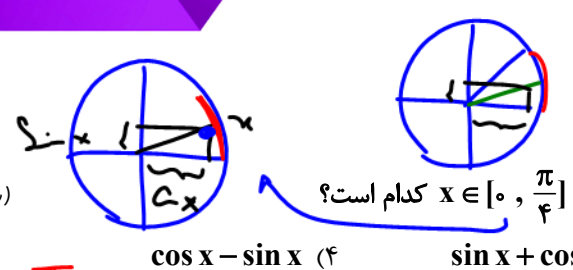
(۳) سوم

(۲) دوم

(۱) اول

Handwritten notes and diagrams for the test question. A unit circle is drawn with the second quadrant shaded in red. A red arrow points from the text "هدر و هلاستند پس یانه ای ۳" to the shaded area. Another red arrow points from the text "باید در ناحیه ۳ باشم تا  $\sin \alpha < 0$  شود." to the same area. The text " $\sin \alpha < 0$ " is written twice. The expression  $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} < 0$  is written with a red checkmark next to it. The numbers 1, 2, 3, and 4 are listed with blue checkmarks next to them, indicating they are incorrect options.





تست ۲۲: حاصل عبارت  $\frac{|\sin x - \cos x|}{2} + \frac{\sin x + \cos x}{2}$  که در آن  $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$  کدام است؟

پاسخ: گزینه «۲»



رابطه قدرت:

گفتیم در  $[0, \frac{\pi}{4}]$  (زیر خط  $y = x$ )،  $\cos x > \sin x$

$$\frac{|\sin x - \cos x|}{2} + \frac{\sin x + \cos x}{2} = \frac{-(\sin x - \cos x) + (\sin x + \cos x)}{2} = \cos x$$

$P = \sqrt{Q}$   
 $P \geq 0, Q \geq 0$

تست ۲۳: اگر  $a \in \mathbb{R}$  و  $\cos x = \sqrt{\frac{\cot x}{\cot x - a^2}}$ ، انتهای کمان  $x$  در کدام ناحیهی مثلثاتی است؟

- گزینه «۴» چهارم (۴)      سوم (۳)  $\cos x > 0$       دوم (۲)  $\cot x > 0$       اول (۱)  $\cot x < 0$

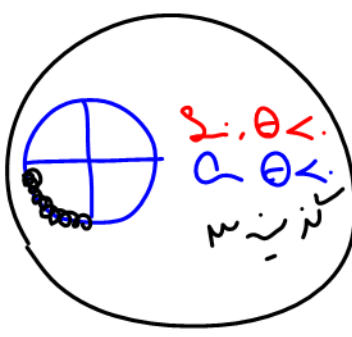
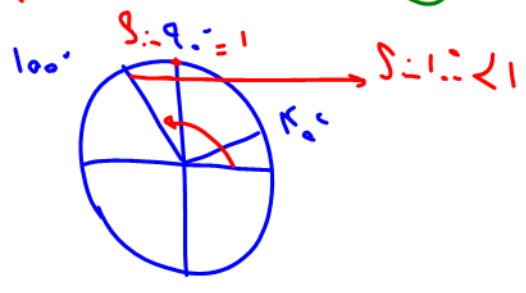
انتهای کمان  $x$  در ناحیهی اول یا چهارم  $\Rightarrow \cos x \geq 0 \Rightarrow \sqrt{\frac{\cot x}{\cot x - a^2}} \geq 0$

اما با انتخاب  $x$  در ناحیهی اول،  $\cot x > 0$  و در نتیجه به ازای مقادیر بزرگ  $a^2$  می‌تواند زیر رادیکال منفی شود و در نتیجه فرض مسئله که به ازای هر  $a \in \mathbb{R}$ ، تساوی برقرار است از بین می‌رود. پس  $x$  باید در ناحیهی چهارم باشد که در این صورت همواره زیر رادیکال مثبت خواهد بود:

$$\begin{cases} \cot x \leq 0 \\ \cot x - a^2 < 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{\cot x}{\cot x - a^2} \geq 0$$

مثال ۲ در مثبت کمان منبسط  
 $\cot x - a^2 < 0$   
 ۱ - ۱۶۲

- تست ۲۴: کدام نامساوی زیر نادرست است؟  
 (۱)  $\sin 20^\circ < \sin 40^\circ < \sin 100^\circ$   
 (۲)  $\cos 100^\circ < \cos 40^\circ < \cos 20^\circ$   
 (۳)  $\sin 40^\circ < \sin 90^\circ < \sin 100^\circ$



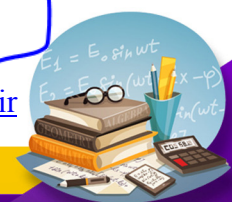
تست ۲۵: اگر  $\sin \theta + \tan \theta > 0$  و  $\frac{1}{\cos \theta} < \sin \theta \times \tan \theta$  باشند، انتهای کمان  $\theta$  در کدام ناحیه قرار دارد؟

$$\frac{1}{\cos \theta} < \sin \theta \cdot \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \Rightarrow \frac{1}{\cos \theta} < \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta} \Rightarrow 1 < \sin^2 \theta \Rightarrow \sin^2 \theta > 1$$

چون کسر  $(+)$  درخرج  $(-)$  به صورت  $(-)$  باشد:

$$\sin \theta (\cos \theta + 1) < 0$$

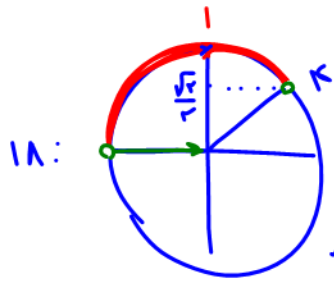
در اینجاست:  
 $\cos \theta < -1$   
 $1 < \cos \theta + 1 < 2$



نکته: از طریق ناماری گمان نمی توان نسبت مثلثاتی گرفت باید همان راه را ببرد منتقل کنیم

تست ۲۶: اگر  $45^\circ < \alpha < 135^\circ$  باشد و  $\sin \alpha = \frac{\Delta m + 1}{3}$ ، آن گاه حدود  $m$  کدام است؟

- (۱)  $(-\frac{1}{5}, \frac{2}{5})$
- (۲)  $(-\frac{1}{5}, \frac{2}{5})$
- (۳)  $(\frac{1}{5}, \frac{2}{5})$
- (۴)  $(0, \frac{2}{5})$



ضرب در ۳

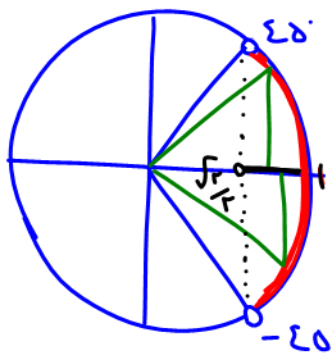
$$-1 < \Delta m + 1 \leq 3 \implies -2 < \Delta m \leq 2 \implies -\frac{1}{5} < m \leq \frac{2}{5}$$

کدام

برای همین امتداد مارش نداریم

تست ۲۷: اگر  $-45^\circ < \alpha < 45^\circ$  و  $\cos \alpha = \frac{3m + 2}{4}$ ، آن گاه بیشترین مقدار  $m$  برابر است با:

- (۱)  $\frac{1}{3}$
- (۲)  $\frac{2}{3}$
- (۳) ۱
- (۴)  $\frac{4}{3}$



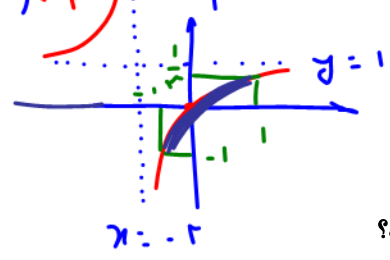
ضرب در ۴

$$\sqrt{2} < 3m + 2 \leq 4 \implies 2\sqrt{2} - 2 < 3m \leq 2 \implies \frac{2\sqrt{2} - 2}{3} < m \leq \frac{2}{3} = \text{Max}$$

۷.I.P تست ۲۸: مجموع حداقل و حداکثر مقدار عبارت  $\frac{\cos \alpha}{2 + \cos \alpha}$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{3}$
- (۲)  $-\frac{1}{3}$
- (۳)  $-\frac{2}{3}$
- (۴)  $\frac{2}{3}$

$y = f(g(x))$  where  $-1 \leq g(x) = \cos \alpha \leq 1$  and  $-\frac{1}{3} \leq f(x) \leq \frac{1}{3}$



Max =  $\frac{1}{3}$   
Min = -1

Max + Min =  $-\frac{2}{3}$

تابع  $f(x) = \frac{x}{2+x}$  با  $g(x) = \cos \alpha$  ترکیب شده و برد  $g$  را می خواهیم  
 ضربی  $\alpha$  باید ورودی تابع  $f$  باشد  
 $f(x)$  را بنویسید و  $x$  که همان  $\cos \alpha$  است را بین ۱ و -۱ بنویسید

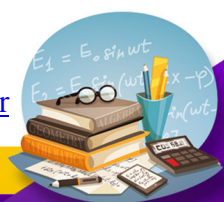
۷.I.P تست ۲۹: بیشترین مقدار عبارت  $4 + \cos^2 x + 2 \cos x$  کدام است؟

- (۱) ۷
- (۲) ۵
- (۳) ۴
- (۴) ۳

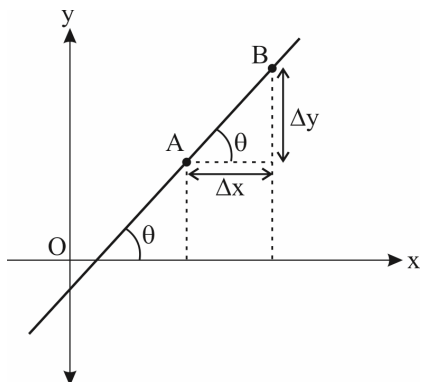
نکته: برای Max و Min عبارت درجه ۲ به شکل  $y = ax^2 + bx + c$  یا  $y = a \sin^2 x + b \sin x + c$  یا  $y = a \cos^2 x + b \cos x + c$  باید به جای  $x$  یک یا  $-1$  دید بهر  $\frac{b}{2a}$  دیدیم  
 البته باید  $-\frac{b}{2a} \leq 1$  باشد. کمترین مقدار است  
 آنکه Min و بیشترین Max است

$\cos x = 1 \implies y = 1 + 2 + 4 = 7 = \text{Max}$   
 $\cos x = -1 \implies y = 1 - 2 + 4 = 3$   
 $\cos x = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2} = -1 \implies y = 3$

$3 \leq y \leq 7$



رابطه شیب خط با تانژانت اولیه



می‌دانیم که شیب هر خط، برابر نسبت تفاضل عرض‌های دو نقطه واقع بر آن به تفاضل طول‌های همان دو نقطه است. حال اگر این خط محور Xها را قطع کند، شیب خط برابر تانژانت زاویه‌ای است که خط با جهت مثبت محور Xها می‌سازد، یعنی:

$$\tan \theta = \frac{\text{تفاضل عرض‌ها}}{\text{تفاضل طول‌ها}} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = m$$

به طور کلی می‌توان گفت:

(الف) اگر خطی موازی با محور Xها باشد، شیب آن صفر است.

(ب) اگر خطی عمود بر محور Xها باشد، شیب آن تعریف نشده است.

معادله خط

با داشتن یک نقطه از خط، مانند  $A(x_0, y_0)$  و شیب خط از معادله مقابل استفاده می‌کنیم:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

تست ۳۰: معادله خطی که با قسمت مثبت محور Xها زاویه  $45^\circ$  می‌سازد و از نقطه  $A(2, 3)$  می‌گذرد، کدام است؟

- (۱)  $y = 2x - 1$       (۲)  $y = 2x + 1$       (۳)  $y = x - 1$       (۴)  $y = x + 1$

پاسخ: گزینه «۴» - شیب این خط برابر  $m = \tan 45^\circ = 1$  است، در نتیجه:

$$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - 3 = 1(x - 2) \Rightarrow y = x + 1$$

تست ۳۱: اگر خط  $(5t - 3)x - 2\sqrt{3}y = 10$  با جهت مثبت محور Xها زاویه  $30^\circ$  بسازد،  $t$  کدام است؟

- (۱) صفر      (۲) ۱      (۳) ۲      (۴) ۳

پاسخ: گزینه «۲»

یادآوری: شیب خط  $ax + by = c$  برابر  $-\frac{a}{b}$  است.

$y = mx + h$

$\frac{(5t-3)x - 10}{2\sqrt{3}} = y$

$$m = \frac{-a}{b} \Rightarrow \begin{cases} a = 5t - 3 \\ b = -2\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow m = \frac{-(5t-3)}{-2\sqrt{3}} = \frac{5t-3}{2\sqrt{3}} = \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

شیب خط داده شده برابر  $\frac{5t-3}{2\sqrt{3}}$  است، در نتیجه:

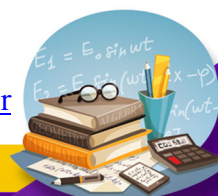
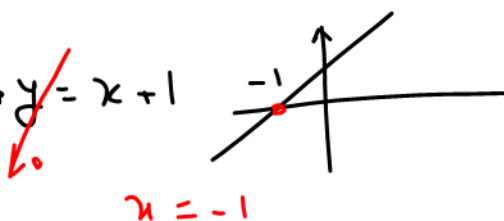
$$\tan 30^\circ = \frac{5t-3}{2\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{5t-3}{2\sqrt{3}} \Rightarrow 2\sqrt{3} \times \sqrt{3} = 3(5t-3) \Rightarrow 6 = 15t - 9 \Rightarrow 15t = 15 \Rightarrow t = 1$$

تست ۳۲: خطی که از نقطه  $A(2, 3)$  عبور کرده و با راستای مثبت محور Xها زاویه  $45^\circ$  می‌سازد، محور Xها را با چه طولی قطع می‌کند؟

- (۱) -۱      (۲) ۱      (۳) -۳      (۴) ۳

$\tan 45^\circ = 1 = m$

$y = mx + h$   
 $\frac{3}{2} \in y = x + h$   
 $3 = 2 + h$   
 $h = 1$





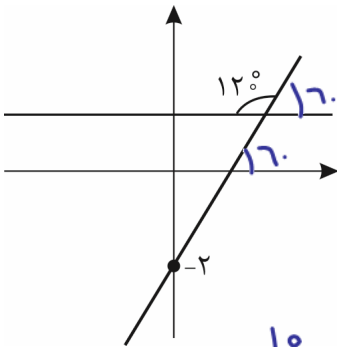
تست ۳۳: معادله خط مقابل کدام است؟

(۱)  $y + \sqrt{3}x = 2$

(۲)  $y = \sqrt{3}x - 2$  ✓

(۳)  $y - \sqrt{3}x - 2 = 0$

(۴)  $y = -\sqrt{3}x - 4$



$m = \tan 7^\circ = \sqrt{3}$   
 $A(0, -2)$

$A \in y = mx + h$   
 $A \in y = \sqrt{3}x + h$   
 $-2 = \sqrt{3}(0) + h$   
 $-2 = h$   
 $y = \sqrt{3}x - 2$

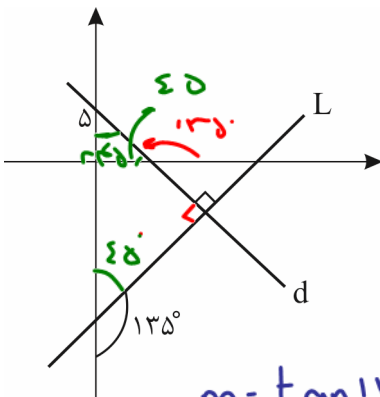
تست ۳۴: معادله خط d در شکل مقابل کدام است؟

(۱)  $y = -x + 5$  ✓

(۲)  $y = x + 5$

(۳)  $y = \sqrt{2}x + 5$

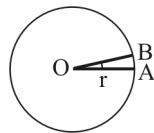
(۴)  $y = -\sqrt{2}x + 5$



$m = \tan 135^\circ = -1$   
 $d: y = mx + h$   
 $y = -x + h$   
 $A(0, 5) \in y = -x + h$   
 $5 = 0 + h$   
 $h = 5$

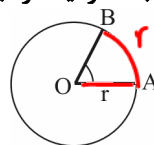
واحدهای کمان و زاویه

درجه: اگر محیط دایره را به ۳۶۰ قسمت مساوی تقسیم کنیم، هر قسمت کمانی به اندازه‌ی یک درجه است و زاویه‌ی مرکزی مقابل به آن مساوی ۱ درجه است. یعنی:



$\widehat{AB} = \frac{2\pi r}{360}$        $\widehat{AOB} = 1 \text{ درجه}$

رادیان: زاویه‌ی مرکزی روبه‌رو به کمانی که طول آن با شعاع دایره مساوی باشد را یک رادیان می‌نامیم. یعنی:



$\widehat{AB} = r$        $\widehat{AOB} = 1 \text{ رادیان}$

همچنین رادیه ... ۲,۲۸ ... برابر شعاع

محیط =  $2\pi r$

$= 2(3,14 \dots) r = 6,28 r$

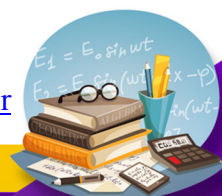
Radian

شعاع: Radius

همچنین رادیه ... ۲,۲۸ ... برابر شعاع

$P \approx 3,14 = \pi$

$P = \pi D = 2\pi r$   
 $6,28 \dots$



و به همین ترتیب ۲ رادیان، زاویه‌ی روبه‌رو به کمانی است که طول آن ۲ برابر شعاع دایره باشد و  $2\pi$  رادیان، زاویه‌ی مرکزی روبه‌رو به کمانی است که طول آن مساوی  $2\pi$  برابر شعاع دایره (همان محیط دایره) باشد. جالب شد!

هر دایره با هر شعاعی،  $360^\circ$  درجه یا  $2\pi$  رادیان است.

رابطه‌ی بین رادیان و درجه:

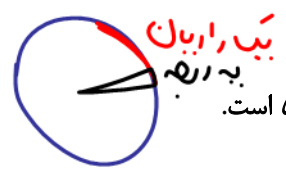
۱۸:  $D = \frac{\pi}{180} R$   
برای تبدیل زاویه بر حسب رادیان به درجه

$$\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi}$$

R اندازه‌ی زاویه بر حسب رادیان و D اندازه‌ی زاویه بر حسب درجه است، مثلاً اگر  $R = 1$  فرض شود، داریم:

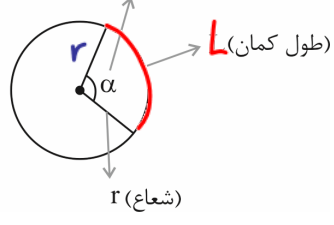
$$D = \frac{180}{\pi} \xrightarrow{\pi \approx 3.14} D \approx 57^\circ$$

بیب رادیان =  $57,3^\circ$   
بیب درجه =  $1/0,017$  رادیان



هر یک رادیان، تقریباً  $57^\circ$  است.

زاویه مرکزی بر حسب رادیان



$2\pi$	$2\pi r$
$\alpha$	$L$

$$L = \frac{\alpha \cdot 2\pi r}{2\pi} \rightarrow L = r\alpha$$

رادیان

محل کمانی که روی دایره داریم و قسمتی از محیط دایره است.

اگر طول کمان روبه‌رو به زاویه را با نماد L، شعاع دایره را با r و اندازه‌ی زاویه را با  $\alpha$  نشان دهیم، آن‌گاه رابطه‌ی بالا به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\alpha = \frac{L}{r}$$

تست ۳۵: اگر در یک دایره، اندازه‌ی کمان مقابل به زاویه‌ی مرکزی  $\theta = 50^\circ$  برابر ۱۰ سانتی‌متر باشد، مساحت این دایره چند برابر محیط آن است؟

$$L = r\theta \rightarrow 10 = r \cdot \frac{50\pi}{180} \rightarrow r = \frac{1800}{50\pi} = \frac{180}{5\pi}$$

$$S = \frac{\pi r^2}{2} = \frac{\pi}{2} \left(\frac{180}{5\pi}\right)^2 = \frac{9e}{5\pi} = \frac{18}{\pi}$$

دقت: همان برابری تبدیل به

تست ۳۶: دایره‌ای به مساحت  $4\pi$  مفروض است. قطاعی به محیط  $7/14$  از آن جدا کرده‌ایم. زاویه‌ای که توسط این قطاع از دایره جدا می‌شود، چند درجه است؟ ( $\pi = 3/14$ )

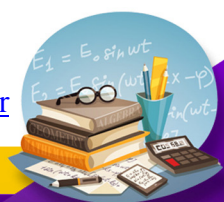
$$S = \pi r^2 = 4\pi \rightarrow r = 2$$

$$2r + (L = r\theta) = 7,14$$

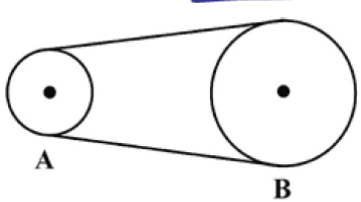
$$4 + 2\theta = 7,14$$

$$2\theta = 3,14$$

$$2\theta = \pi \rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} = 90^\circ$$



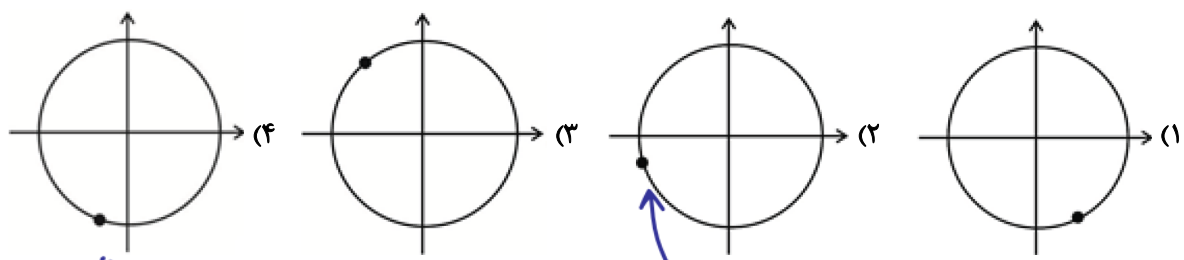
تست ۳۷: در شکل زیر چرخ‌دنده‌های A و B توسط نواری لاستیکی به هم وصل شده‌اند. شعاع چرخ‌دنده‌ی A، ۲۰ سانتی‌متر و شعاع چرخ‌دنده‌ی B برابر با ۱ متر است. اگر چرخ‌دنده‌ی B به اندازه‌ی  $\frac{3\pi}{2}$  رادیان بچرخد، چرخ‌دنده‌ی A چند دور می‌زند؟



$L_A = L_B$   
 $r_A \cdot \theta_A = r_B \cdot \theta_B$   
 $20 \cdot \theta_A = 100 \left( \frac{3\pi}{2} \right)$   
 $\theta_A = 5 \left( \frac{3\pi}{2} \right) = \frac{15\pi}{2}$   
 $\frac{15\pi/2}{2\pi} = \frac{15}{4} = 3.75$  دور

$2\pi$	بَد دور رَایره
$\frac{15\pi}{2}$	?

تست ۳۸: مجموع دو زاویه  $72^\circ$  و تفاضل آن دو زاویه  $\frac{\pi}{15}$  رادیان است. اگر اندازه‌ی زاویه‌ی بزرگ‌تر برابر با  $x$  درجه باشد، زاویه‌ی  $(5x - 10^\circ)$  به طور تقریبی روی دایره‌ی مثلثاتی کدام است؟

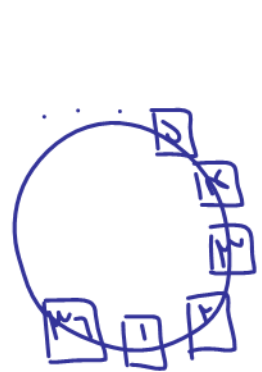


$$\begin{cases} x + y = 72^\circ \\ x - y = \frac{\pi}{15} = \frac{120}{15} = 8^\circ \end{cases}$$

$$2x = 80^\circ \rightarrow x = 40^\circ$$

$$5x - 10 = 5(40^\circ) - 10^\circ = 190^\circ$$

تست ۳۹: چرخ و فلکی دارای ۳۶ کابین است و شما در کابین شماره‌ی پنجم قرار دارید. اگر چرخ و فلک به اندازه‌ی  $\frac{11\pi}{3}$  رادیان در جهت مثبت مثلثاتی حرکت کند، در موقعیت اولیه‌ی کدام کابین قرار می‌گیرید؟ (شماره‌گذاری کابین‌ها در جهت مثبت مثلثاتی و فاصله‌ی کابین‌ها یکسان است.)



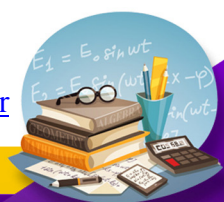
$$\frac{11\pi}{3} = 660^\circ$$

$$\frac{660^\circ}{36} = 18^\circ$$

$$18^\circ \times 36 = 648^\circ$$

$$648^\circ - 360^\circ = 288^\circ$$

$$\frac{288^\circ}{36} = 8$$



نکات ساعت

- الف) عقربه دقیقه‌شمار به ازای هر یک دقیقه ۶ درجه طی می‌کند.
- ب) عقربه ساعت‌شمار به ازای هر یک ساعت ۳۰ درجه طی می‌کند.
- پ) عقربه ساعت‌شمار به ازای هر یک دقیقه ۰/۵ درجه طی می‌کند.

ت) زاویه بین عقربه ساعت‌شمار و دقیقه‌شمار از دستور زیر پیدا می‌شود:

نسبت : h  
دقیقه : m

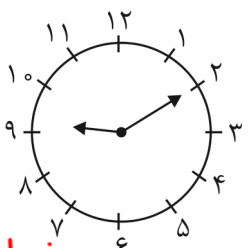
$$\theta = \left| \frac{11m}{2} - 30h \right|$$

تست ۴۰: چه مدت طول می‌کشد تا عقربه‌ی دقیقه‌شمار ساعت به اندازه‌ی  $\frac{8\pi}{3}$  رادیان دوران کند؟

۲۳ رادیان	۶ دقیقه
$\frac{8\pi}{3}$	?

- (۱) یک ساعت و ۲۰ دقیقه
- (۲) یک ساعت و ۱۰ دقیقه
- (۳) یک ساعت و ۳۰ دقیقه
- (۴) یک ساعت و ۲۰ دقیقه

یک ساعت و ۲۰ دقیقه = ۲۰ + ۶۰ = ۸۰ = ۲(۴۰) =  $\frac{8\pi}{3}$  (۲۰) = ۲۳



تست ۴۱: زاویه بین عقربه‌های ساعت‌شمار و دقیقه‌شمار در ساعت ۹:۱۰ چند رادیان است؟

- (۱)  $\frac{9\pi}{5}$
- (۲)  $\frac{29\pi}{30}$
- (۳)  $\frac{29\pi}{36}$
- (۴)  $\frac{145\pi}{36}$



مغز بدل نم

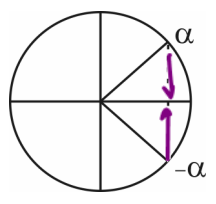
$$\theta = \left| 30h - \frac{11}{2}m \right| = \left| 30(9) - \frac{11}{2}(10) \right| = \left| 270 - 55 \right| = 215$$

یا  $360 - 215 = 145$

باید دید ۱۴۵ یا ۲۱۵ از کدوم کدوم است؟

$$\frac{215}{180} = \frac{29\pi}{36}$$

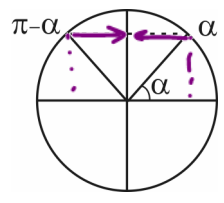
نسبت‌های مثلثاتی  $\alpha$  و  $-\alpha$  (قرینه)



- $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$
- $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$
- $\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$
- $\cot(-\alpha) = -\cot \alpha$

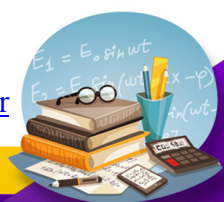
$\sin(-30^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$   
 $\cos(-60^\circ) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$

نسبت‌های مثلثاتی زوایای مکمل  $(\alpha, \pi - \alpha)$




- $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$
- $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$
- $\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha$
- $\cot(\pi - \alpha) = -\cot \alpha$

$\sin 15^\circ = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$   
 $\cos 120^\circ = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$



یادت باشه: دو زاویه‌ای که مکمل هستند (جمعشان  $180^\circ$  است) سینوس‌های مساوی دارند، اما کسینوس و تانژانت و کتانژانت قرینه دارند. یعنی به عنوان مثال جمع کسینوس‌های دو زاویه مکمل برابر صفر است. (برای تانژانت و کتانژانت نیز به همین صورت، البته به شرطی که هیچ یک از دو زاویه باعث بی‌معنی شدن تانژانت و کتانژانت نشود.)

۱۵:




$$\sin 150^\circ = \sin(\pi - 30^\circ) = \frac{3}{5}$$

$$\cos 150^\circ = \cos(\pi - 30^\circ) = -\frac{4}{5}$$

$$\tan 150^\circ = \tan(\pi - 30^\circ) = -\frac{3}{4}$$

$$\cot 150^\circ = \cot(\pi - 30^\circ) = -\frac{4}{3}$$

۱۲:




$$\sin 120^\circ = \sin(\pi - 60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 120^\circ = \cos(\pi - 60^\circ) = -\frac{1}{2}$$

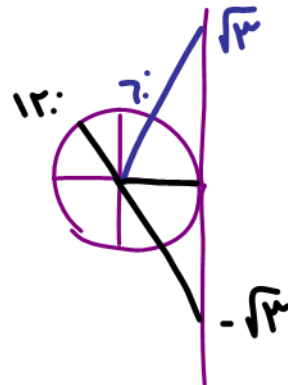
$$\tan 120^\circ = \tan(\pi - 60^\circ) = -\sqrt{3}$$

$$\cot 120^\circ = \cot(\pi - 60^\circ) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

۱۵:



$\cos 15^\circ + \cos 165^\circ = \text{صفر}$



مثال ۴۲:

$$\tan 120^\circ = -\tan 60^\circ = -\sqrt{3}$$

$$\tan 120^\circ + \tan 60^\circ = \text{صفر}$$

$$\tan \theta = \text{tg } \theta = \frac{\text{ت}}{\text{ج}}$$

مشتق جیب - تانژانت

زاویه‌های مکمل


اگر  $\alpha + \beta = \pi$ ، پس  $\alpha = \pi - \beta$  و در نتیجه:

$$\sin \alpha = +\sin \beta \quad , \quad \cos \alpha = -\cos \beta \quad , \quad \tan \alpha = -\tan \beta \quad , \quad \cot \alpha = -\cot \beta$$

بنابراین:

اگر دو زاویه مکمل باشند، مجموع کسینوس‌های آن، تانژانت‌های آن‌ها و کتانژانت‌های آن‌ها مساوی صفر است.

مثال ۴۳: حاصل  $\tan \frac{\pi}{5} + \tan \frac{6\pi}{5} + \cos \frac{\pi}{5} + \cos \frac{4\pi}{5}$  مساوی صفر است، زیرا:

$$\frac{\pi}{5} + \frac{6\pi}{5} = \pi \Rightarrow \tan \frac{\pi}{5} + \tan \frac{6\pi}{5} = 0 \quad , \quad \frac{\pi}{5} + \frac{4\pi}{5} = \pi \Rightarrow \cos \frac{\pi}{5} + \cos \frac{4\pi}{5} = 0$$


تست ۴۴: حاصل عبارت  $\cos \frac{\pi}{n} + \cos \frac{2\pi}{n} + \dots + \cos \frac{(n-1)\pi}{n}$  با فرض فرد بودن  $n$  کدام است؟

(۴) -n


(۳) n

(۲) صفر

(۱) ۱

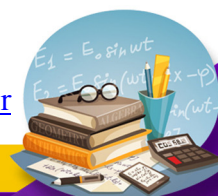
پاسخ: گزینه‌ی «۲»

$$\cos \frac{\pi}{n} + \cos \frac{2\pi}{n} + \dots + \cos \frac{(n-2)\pi}{n} + \cos \frac{(n-1)\pi}{n}$$

$$\cos \frac{\pi}{n} + \cos \frac{2\pi}{n} + \dots + \cos \frac{\pi}{n} + \cos \frac{2\pi}{n} + \dots + \cos \frac{\pi}{n} + \cos \frac{2\pi}{n} + \dots$$


توی این مدل از سؤالات اولی و آخری رو با هم بگیرید و به همین ترتیب دومی رو با یکی مونده به آخری و ... دقت کنید که اگر این زاویه‌ها را با هم جمع کنیم دو به دو جمعشان  $\pi$  می‌شود. یعنی مکمل هم هستند پس جمع کسینوس‌هایشان صفر می‌شود.

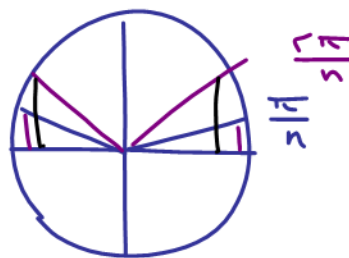
$$\frac{\pi}{n} + \frac{(n-1)\pi}{n} = \frac{\pi}{n} + \frac{n\pi - \pi}{n} = \frac{n\pi}{n} = \pi$$



$$\frac{2\pi}{n} + \frac{(n-2)\pi}{n} = \frac{2\pi}{n} + \frac{n\pi - 2\pi}{n} = \frac{n\pi}{n} = \pi$$

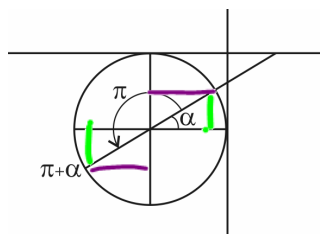
$$\frac{(n-2)\pi}{n} = \pi - \frac{2\pi}{n}$$

$$\frac{(n-1)\pi}{n} = \pi - \frac{\pi}{n}$$



پس جواب صفر است.

نسبت‌های مثلثاتی  $(\alpha, \pi + \alpha)$



$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha$$

$$\cot(\pi + \alpha) = \cot \alpha$$

یادت باشه: اگر به زاویه‌ای  $\pi$  رادیان اضافه شود، سینوس و کسینوس قرینه می‌شود، اما تانژانت و کتانژانت ثابت می‌مانند.

تذکر: در سینوس و کسینوس از علامت زنج  $\pi$  و در تانژانت و کتانژانت از علامت زنج  $\pi$  چه قدر چه زنج صاف نظری کنیم. مثال ۴۵:

$$\begin{cases} \sin(k\pi + \alpha) = \sin \alpha \\ \cos(k\pi + \alpha) = \cos \alpha \end{cases} \quad \begin{cases} \tan(k\pi + \alpha) = \tan \alpha \\ \cot(k\pi + \alpha) = \cot \alpha \end{cases}$$

مثال ۴۵:  $\sin(11\pi + \frac{\pi}{4}) = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$   $\tan(11\pi + \frac{\pi}{4}) = \tan \frac{\pi}{4} = 1$

مثال ۲۱:  $\sin 210^\circ = \sin(\pi + 30^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$

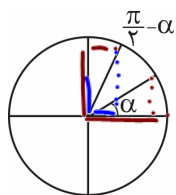


$\cos 210^\circ = \cos(\pi + 30^\circ) = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan 210^\circ = \tan(\pi + 30^\circ) = \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\cot 210^\circ = \cot(\pi + 30^\circ) = \cot 30^\circ = \sqrt{3}$

یادت درسی: در سینوس و کسینوس از علامت زنج  $\pi$  و در تانژانت و کتانژانت از علامت زنج  $\pi$  چه قدر چه زنج صاف نظری کنیم. نسبت‌های مثلثاتی دو زاویه متمم (جمع  $\frac{\pi}{2}$ )



$$\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos \alpha$$

$$\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin \alpha$$

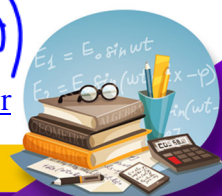
$$\tan(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cot \alpha$$

$$\cot(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \tan \alpha$$

یادت باشه: در مضارب فرد  $\frac{\pi}{2}$  نام نسبت عوض می‌شود.  $\tan \Leftrightarrow \cot$  و  $\sin \Leftrightarrow \cos$ .

$\sin(\frac{11\pi}{2} + \theta) = +\cos \theta$

$\sin(\frac{11\pi}{2} + \theta) = \frac{11\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \theta = \frac{12\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \theta = 6\pi + \frac{\pi}{2} + \theta$



$$\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = \cos \alpha$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = -\cot \alpha$$

یادت باشه:

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = -\sin \alpha$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = -\tan \alpha$$

تذکر: در تمامی حالات فوق،  $\alpha$  را زاویه‌ای حادّه در نظر گرفتیم.

یادت باشه: برای شما نحوه‌ی  $\cos\left(\frac{3\pi}{4} + \alpha\right)$  را توضیح می‌دم و بدانید که تمامی حالات فوق را باید با این روش بررسی کنید و حفظ

کردن آن‌ها کار خوبی نیست.  $\alpha$  زاویه‌ای حادّه است. یعنی در جهت مثبت مثلثاتی (خلاف جهت عقربه‌های ساعت) به

اندازه‌ی  $\frac{3\pi}{4}$  (۲۷۰ درجه) حرکت کنیم و سپس چون  $+\alpha$  داریم یعنی مقداری دیگر نیز در این جهت جلو برویم. پس انتهای کمان، ربع سوم

را رد کرد و در ربع چهارم قرار دارد. حالا می‌گوییم که در ربع چهارم، کسینوس مثبت است، پس خروجی حتماً مثبت است و ضمناً به دلیل

وجود فرد  $\frac{3\pi}{4}$  نام نسبت عوض شده و تبدیل به سینوس می‌شود. پس:

$$\cos\left(\frac{3\pi}{4} + \alpha\right) = +\sin \alpha$$

محاسبه‌ی سریع نسبت‌های مثلثاتی  $\frac{k\pi}{3}$  و  $\frac{k\pi}{4}$ ،  $\frac{k\pi}{6}$

ابتدا با استفاده از زاویه‌ی مربوطه علامت نسبت رو مشخص کرده، بعد  $k$  را ندید گرفته و حاصل نسبت  $\frac{\pi}{6}$  یا  $\frac{\pi}{4}$  یا  $\frac{\pi}{3}$  خواسته شده را قرار

می‌دهیم. به عنوان مثال ببینید:

$$\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \sin\left(7 \times \frac{\pi}{6}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$\cot\left(-\frac{5\pi}{3}\right) = -\cot\left(5 \times \frac{\pi}{3}\right) = -\left(-\cot\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = -\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

برای تشخیص ساده‌تر زاویه‌هایی مثل  $\frac{7\pi}{6}$  یا  $\frac{5\pi}{3}$ ، توصیه می‌کنم آن‌ها را در ذهن‌تان به درجه تبدیل کنید، یعنی:

$$7 \times \frac{\pi}{6} = 7 \times 30^\circ = 210^\circ \quad \text{یا} \quad 5 \times \frac{\pi}{3} = 5 \times 60^\circ = 300^\circ$$

تست ۴۶: حاصل عبارت  $\frac{\cos 285^\circ - \sin 255^\circ}{\sin 525^\circ - \sin 105^\circ}$  با فرض  $\tan 15^\circ = \frac{1}{2}$  کدما است؟ برای توییه  $15^\circ$  در  $30^\circ$  و  $45^\circ$  عملهای

صورت و مخرج را بر نسبت تقسیم کن

$$\frac{16}{9} \quad (3) \quad \frac{-9}{16} \quad (2) \quad \frac{-16}{9} \quad (1)$$

$$\cos(285^\circ = 270^\circ + 15^\circ) = \sin 15^\circ$$

$$\sin(255^\circ = 270^\circ - 15^\circ) = -\cos 15^\circ$$

$$\sin(525^\circ = 540^\circ - 15^\circ = 360^\circ - 15^\circ = 2\pi - 15^\circ) = \sin(-15^\circ) = -\sin 15^\circ$$

$$\sin(105^\circ = 90^\circ + 15^\circ) = \cos 15^\circ$$



$\tan \theta \cdot \cotan \theta = 1$

پای صحبت اوزاویه جمع ۹: تا نترانتم که نترانتم

$\tan 19^\circ = \cotan 1^\circ$   
 $\tan 11^\circ = \cotan 7^\circ$

تست ۴۷: حاصل عبارت  $A = \tan 1^\circ \cdot \tan 2^\circ \dots \tan 88^\circ \cdot \tan 89^\circ$  کدام است؟

(۱) تعریف نشده (۲) ۱ (۳) صفر (۴)  $\frac{1}{2}$

$A = \tan 1^\circ \cdot \tan 2^\circ \dots \tan 88^\circ \cdot \tan 89^\circ = 1$

چند نتیجه‌ی مهم از این سؤال: ۲ زاویه‌ای که متمم هستند، تانژانت و کتانژانت‌شان برابر است.  $\tan \alpha = \cot \beta$  این اتفاق برای سینوس و کسینوس نیز صادق است، یعنی:

$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} - \beta \Rightarrow \begin{cases} \sin \alpha = \cos \beta \\ \cos \alpha = \sin \beta \end{cases}$

به عنوان مثال:  $\cos 53^\circ = \sin 37^\circ$ ,  $\sin 15^\circ = \cos 75^\circ$  و ... ضمناً برای دو زاویه‌ای که متمم هستند، داریم:

$\tan \alpha \cdot \tan \beta = 1$

تست ۴۸: اگر  $\tan 15^\circ = a$  باشد، حاصل  $\frac{3 \cos 165^\circ - 2 \sin 285^\circ}{3 \sin 345^\circ - 4 \cos 255^\circ}$  کدام است؟



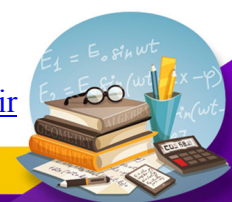
$\cos(165^\circ = 180^\circ - 15^\circ = \pi - 15^\circ) = -\cos 15^\circ$   
 $\sin(165^\circ = 180^\circ - 15^\circ = \pi - 15^\circ) = \sin 15^\circ$   
 $\cos(285^\circ = 360^\circ - 75^\circ = 2\pi - 75^\circ) = \cos 75^\circ = \sin 15^\circ$   
 $\sin(285^\circ = 360^\circ - 75^\circ = 2\pi - 75^\circ) = -\sin 75^\circ = -\cos 15^\circ$   
 $\cos(345^\circ = 360^\circ - 15^\circ = 2\pi - 15^\circ) = \cos 15^\circ$   
 $\sin(345^\circ = 360^\circ - 15^\circ = 2\pi - 15^\circ) = -\sin 15^\circ$

$\frac{3 \cos 165^\circ - 2 \sin 285^\circ}{3 \sin 345^\circ - 4 \cos 255^\circ} = \frac{-3 \cos 15^\circ + 2 \sin 15^\circ}{3 \sin 15^\circ - 4 \cos 15^\circ} = \frac{-\cos 15^\circ}{\sin 15^\circ} = -\cotan 15^\circ = \frac{1}{\tan 15^\circ} = \frac{1}{a}$

تست ۴۹: مقدار عبارت  $\cos(300^\circ) + \sin(330^\circ) + \cot(75^\circ) + \tan(-84^\circ)$  کدام است؟

(۱) ۱ (۲)  $2\sqrt{3}$  (۳) صفر (۴)  $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

$\cos(300^\circ = 360^\circ - 60^\circ = 2\pi - 60^\circ) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$   
 $\sin(330^\circ = 360^\circ - 30^\circ = 2\pi - 30^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$   
 $\cot(75^\circ = 90^\circ - 15^\circ = \frac{\pi}{2} - 15^\circ) = \tan 15^\circ = \sqrt{3}$   
 $\tan(-84^\circ) = -\tan(84^\circ = 90^\circ - 6^\circ) = -\cot 6^\circ = -\sqrt{3}$





تست ۵۰: حاصل عبارت  $\sin^2 \frac{\pi}{8} + \sin^2 \frac{3\pi}{8} + \sin^2 \frac{5\pi}{8} + \sin^2 \frac{7\pi}{8}$  کدام است؟

تبدیل  $\frac{\pi}{8} + \frac{7\pi}{8} = \pi \rightarrow \sin \frac{\pi}{8} = \sin \frac{7\pi}{8}$

تبدیل  $\frac{3\pi}{8} + \frac{5\pi}{8} = \pi \rightarrow \sin \frac{3\pi}{8} = \sin \frac{5\pi}{8}$

$2 \sin^2 \frac{\pi}{8} + 2 \sin^2 \frac{3\pi}{8} = 2 \left( \sin^2 \frac{\pi}{8} + \sin^2 \frac{3\pi}{8} \right) = 2 \left( \cos^2 \frac{3\pi}{8} + \sin^2 \frac{3\pi}{8} \right) = 2(1) = 2$

نتیجه  $\frac{\pi}{8} + \frac{3\pi}{8} = \frac{4\pi}{8} = \frac{\pi}{2}$   $\sin \frac{\pi}{8} = \cos \frac{3\pi}{8}$

(تقریبی ۹۸)

تست ۵۱: حاصل عبارت  $\sin\left(\frac{17\pi}{3}\right) \cos\left(-\frac{17\pi}{6}\right) + \tan\left(\frac{19\pi}{4}\right) \sin\left(-\frac{11\pi}{6}\right)$  کدام است؟

تبدیل  $\frac{17\pi}{3} = \frac{18\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = 2\pi - \frac{\pi}{3}$   $\sin\left(-\frac{17\pi}{3}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

تبدیل  $\frac{19\pi}{4} = \frac{20\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = 5\pi - \frac{\pi}{4} = \pi - \frac{\pi}{4}$   $\tan\left(\frac{19\pi}{4}\right) = -\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1$

تبدیل  $\frac{11\pi}{6} = \frac{12\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = 2\pi - \frac{\pi}{6}$   $\sin\left(-\frac{11\pi}{6}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$

تبدیل  $\frac{17\pi}{3} = \frac{18\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = 2\pi - \frac{\pi}{3}$   $\sin\left(-\frac{17\pi}{3}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

تبدیل  $\frac{19\pi}{4} = \frac{20\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = 5\pi - \frac{\pi}{4} = \pi - \frac{\pi}{4}$   $\tan\left(\frac{19\pi}{4}\right) = -\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1$

تبدیل  $\frac{11\pi}{6} = \frac{12\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = 2\pi - \frac{\pi}{6}$   $\sin\left(-\frac{11\pi}{6}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$

(فارج تقریبی ۹۹)

تست ۵۲: حاصل عبارت  $\tan(285^\circ) \tan(-165^\circ) - \sin(1095^\circ) \cos(255^\circ)$  کدام است؟

تبدیل  $285^\circ = 360^\circ - 75^\circ = -75^\circ$   $\tan(285^\circ) = -\tan(75^\circ)$

تبدیل  $-165^\circ = -180^\circ + 15^\circ = 15^\circ$   $\tan(-165^\circ) = \tan(15^\circ)$

تبدیل  $1095^\circ = 3 \times 365^\circ = 1095^\circ$   $\sin(1095^\circ) = \sin(15^\circ)$

تبدیل  $255^\circ = 270^\circ - 15^\circ = -15^\circ$   $\cos(255^\circ) = \cos(-15^\circ) = \cos(15^\circ)$

تبدیل  $285^\circ = 360^\circ - 75^\circ = -75^\circ$   $\tan(285^\circ) = -\tan(75^\circ)$

تبدیل  $-165^\circ = -180^\circ + 15^\circ = 15^\circ$   $\tan(-165^\circ) = \tan(15^\circ)$

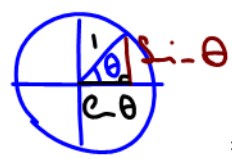
تبدیل  $1095^\circ = 3 \times 365^\circ = 1095^\circ$   $\sin(1095^\circ) = \sin(15^\circ)$

تبدیل  $255^\circ = 270^\circ - 15^\circ = -15^\circ$   $\cos(255^\circ) = \cos(-15^\circ) = \cos(15^\circ)$

نتیجه:  $(1) \sin^2(15^\circ) - \cos^2(15^\circ) = -1$

روابط بین نسبت‌های مثلثاتی

۱)  $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$



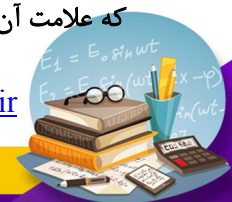
روابط مثلثاتی کتاب دهم عبارت‌اند از: اگر بخواهیم هر یک از نسبت‌های  $\sin \theta$  یا  $\cos \theta$  را بر حسب دیگری بیابیم، داریم:

$\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta \Rightarrow \sin \theta = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \theta}$

$\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta \Rightarrow \cos \theta = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \theta}$

نتیجه:

که علامت آن‌ها بر مبنای ناحیه‌ای که زاویه در آن قرار گرفته است، مشخص می‌شود.



$$\begin{aligned} \sin^2 \theta + \cos^2 \theta &= 1 \\ \div \cos^2 \theta & \rightarrow \tan^2 \theta + 1 = \frac{1}{\cos^2 \theta} \\ 1 + \cot^2 \theta &= \frac{1}{\sin^2 \theta} \end{aligned}$$

۲)  $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$

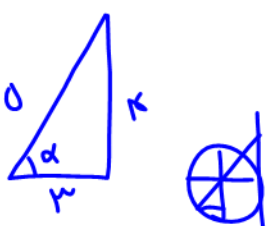
۴)  $\tan \theta = \frac{1}{\cot \theta}$

۶)  $\tan \theta \times \cot \theta = 1$  : *ثمنی کوئی بی ضربش یکہ*

۸)  $\frac{1}{\sin^2 \theta} = 1 + \cot^2 \theta$

۱۰)  $(\sin \theta + \cos \theta)^2 = 1 + 2 \sin \theta \cos \theta$

$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$

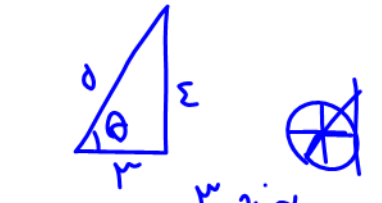


$\tan \alpha = \frac{4}{3}$   
 $\cot \alpha = \frac{3}{4}$   
 $\sin \alpha = \frac{4}{5}$

تست ۵۳: اگر  $\alpha$  در ناحیہ سوم بوده و  $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$  باشد، حاصل  $\frac{\cot \alpha}{\sin \alpha + \tan \alpha}$  کدام است؟  
 ۴)  $\frac{45}{31}$       ۳)  $\frac{31}{45}$       ۲)  $\frac{45}{32}$  ✓      ۱)  $\frac{32}{45}$

$$\frac{\frac{3}{4}}{\frac{4}{5} + \frac{4}{3}} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{12+20}{15}} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{32}{15}} = \frac{3(15)}{4(32)} = \frac{45}{128}$$

تست ۵۴: اگر  $\cos \theta = -\frac{3}{5}$  و انتهای کمان  $\theta$  در ناحیہ سوم مثلثاتی باشد، حاصل  $\frac{\tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}$  کدام است؟  
 ۴)  $\frac{3}{7}$       ۳)  $\frac{12}{7}$       ۲)  $-\frac{3}{7}$       ۱)  $-\frac{12}{7}$  (1)



$\tan \theta = \frac{4}{3}$

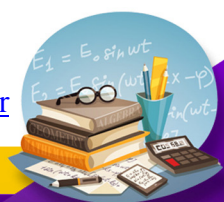
$$\frac{\frac{4}{3}}{1 - \left(\frac{4}{3}\right)^2} = \frac{\frac{4}{3}}{1 - \frac{16}{9}} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{9-16}{9}} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{-7}{9}} = \frac{4(9)}{3(-7)} = -\frac{12}{7}$$

$$\begin{aligned} \sin^2 \theta + \cos^2 \theta &= 1 \\ 1 + \cot^2 \theta &= \frac{1}{\sin^2 \theta} \\ \div \cos^2 \theta & \rightarrow \tan^2 \theta + 1 = \frac{1}{\cos^2 \theta} \\ \tan^2 \theta &= \frac{1}{\cos^2 \theta} - 1 \\ \tan^2 \theta &= \frac{1 - \cos^2 \theta}{\cos^2 \theta} \\ \tan^2 \theta &= \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} \end{aligned}$$

تست ۵۵: حاصل  $\frac{\cot^2 \alpha}{1 + \cot^2 \alpha} + \frac{\tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$  در صورت وجود کدام است؟  
 ۳) صفر      ۲)  $\cos^2 \alpha$       ۱)  $2 \sin^2 \alpha$

$$\frac{1 \cdot \cot^2 \alpha}{1 + \cot^2 \alpha} + \frac{1 \cdot \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha} + \frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha}{1} + \frac{\sin^2 \alpha}{1} = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$$

*ثمنی جلاوه کوئی بی  
 مینہ یک رو ضرب  
 سینوس کینوس*



$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$

تست ۵۶: اگر  $\tan \theta = \frac{3}{4}$  حاصل  $(\tan \theta - \cot \theta)^2 - \frac{1}{\cos^2 \theta}$  کدام است؟  
 (۱)  $\frac{11}{9} - \frac{4}{3}$  (۲)  $-\frac{12}{25}$  (۳)  $\frac{16}{25}$  (۴)  $\frac{16}{9}$

$\tan^2 \theta + \cot^2 \theta - 2 \tan \theta \cot \theta - (1 + \tan^2 \theta) = \cot^2 \theta - 3 = \left(\frac{4}{3}\right)^2 - 3 =$

$\frac{17}{9} - 3 = \frac{17 - 27}{9} = -\frac{10}{9}$

تست ۵۷: اگر  $\sin x + \cos x = \frac{1}{3}$  باشد، حاصل  $\tan x + \cot x$  کدام است؟

$\tan x + \cot x = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{1}{\sin x \cos x} = -\frac{8}{3}$

نکته: اگر  $\pm$  سینوس، کینوس را داشتیم  
 با به توان ۲ رساندن ۲ طرف می توان  
 ضرب سینوس، کینوس را هم یافت  
 و بر یکس.

$\sin x + \cos x = \frac{1}{3}$   
 طرفین به توان ۲

$\sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x = \frac{1}{9}$   
 $\sin x \cos x = -\frac{2}{9}$

تست ۵۸: اگر  $\sin x \cos x = \frac{1}{3}$  باشد، حاصل  $\sin^3 x - \cos^3 x$  کدام است؟

(۱)  $\frac{3}{5}$  (۲)  $\frac{\sqrt{3}}{3}$  (۳)  $\pm \frac{9}{4\sqrt{3}}$  (۴)  $\pm \frac{4\sqrt{3}}{9}$

پاسخ: گزینه ی «۴» را تجزیه می کنیم:

$\sin^3 x - \cos^3 x = (\sin x - \cos x)(\sin^2 x + \sin x \cos x + \cos^2 x) = (\sin x - \cos x)(1 + \frac{1}{3}) = \frac{4}{3}(\sin x - \cos x)$

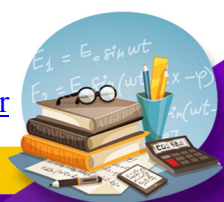
حالا داشته باش:

$(\sin x - \cos x)^2 = \sin^2 x + \cos^2 x - 2 \sin x \cos x = 1 - 2(\frac{1}{3}) = \frac{1}{3} \Rightarrow (\sin x - \cos x)^2 = \frac{1}{3} = A^2$

$\Rightarrow \sin x - \cos x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\sin^3 x - \cos^3 x = \frac{4}{3}(\pm \frac{1}{\sqrt{3}}) = \pm \frac{4}{3\sqrt{3}} = \pm \frac{4\sqrt{3}}{9}$

پس:



تست ۵۹: اگر  $\frac{\sin x + 2 \cos x}{\sin x - 3 \cos x} = 2$  باشد، حاصل  $\frac{1}{\sin x \cos x}$  کدام است؟

(۱)  $\frac{65}{8}$  (۲)  $-\frac{65}{8}$  (۳)  $\frac{17}{4}$  (۴)  $-\frac{17}{4}$

پاسخ: گزینه ی «۱» - طرفین وسطین می کنیم، یادتون باشه هر وقت صورت و مخرج یک کسر هم زمان هم  $\sin$  و هم  $\cos$  داشت، طرفین

$$\frac{\sin x + 2 \cos x}{\sin x - 3 \cos x} = 2 \Rightarrow \sin x + 2 \cos x = 2 \sin x - 6 \cos x$$

وسطین کنید و بعدش  $\tan$  بسازید:

$$\Rightarrow 8 \cos x = \sin x \xrightarrow{\text{تازانته سازی } \div \cos x} 8 = \tan x$$

$$\tan x + \cot x = \frac{1}{\sin x \cos x}$$

از طرفی همیشه داریم:

$$8 + \frac{1}{8} = \frac{1}{\sin x \cos x} \Rightarrow \frac{1}{\sin x \cos x} = \frac{65}{8}$$

تست ۶۰: اگر  $2 \sin \alpha = 3 \cos \alpha$  حاصل  $\frac{1 + \cot \alpha}{1 + \tan \alpha}$  کدام است؟

(۱)  $\frac{3}{2}$  (۲)  $\frac{2}{3}$  (۳)  $\frac{9}{4}$  (۴)  $\frac{3}{6}$

$$\frac{\sin(-\alpha)}{\cos \alpha} = \frac{3}{2} \rightarrow \tan \alpha = \frac{3}{2} \rightarrow \cot \alpha = \frac{2}{3}$$

$$\frac{1 + \frac{2}{3}}{1 + \frac{3}{2}} = \frac{\frac{5}{3}}{\frac{5}{2}} = \frac{2}{3}$$

تست ۶۱: مقدار عبارت  $\frac{1 - \sin \alpha}{\cos \alpha} - \frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha}$  به ازای  $\alpha = 15^\circ$  کدام است؟

(۱) صفر (۲)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  (۳)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  (۴)  $\frac{\sqrt{6}}{2}$

خرج مشترک

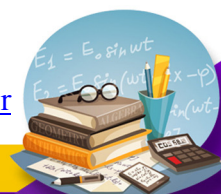
$$\frac{\cos^2 \alpha (1 - \sin^2 \alpha) - \cos^2 \alpha}{\cos \alpha (1 + \sin \alpha)} = \frac{\text{صفر}}{\text{عدد}}$$

تست ۶۲: حاصل  $\frac{1}{\sin^4 \theta} - \frac{1}{\sin^2 \theta} - \cot^4 \theta$  کدام است؟

(۱)  $\sin^2 \theta$  (۲)  $\cos^2 \theta$  (۳)  $\tan^2 \theta$  (۴)  $\cot^2 \theta$

$$\frac{1}{\sin^4 \theta} - \frac{1}{\sin^2 \theta} - \frac{\cos^4 \theta}{\sin^4 \theta} = \frac{(1 - \sin^2 \theta) - \cos^4 \theta}{\sin^4 \theta} = \frac{\cos^2 \theta - \cos^4 \theta}{\sin^4 \theta}$$

$$\frac{\cos^2 \theta (1 - \cos^2 \theta)}{\sin^4 \theta} = \frac{\cos^2 \theta}{\sin^4 \theta} = \cot^2 \theta$$



فرض کنیم  $t = \tan x$

تست ۶۳: اگر  $\frac{1 + \cot x}{\tan x + 1} = 2$  حاصل،  $\frac{2 \cos x - 3 \sin x}{\sin x + \cos^3 x}$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{2}{5}$  (۲)  $\frac{1}{10}$  (۳)  $\frac{2}{13}$  (۴)  $\frac{5}{13}$

برای تولید  $\tan x$  جزوت صورت رنج برابر  
 و با لقمه می کنیم:

$$\frac{1 + \frac{1}{t}}{t + 1} = \frac{\frac{t+1}{t}}{t+1} = \frac{1}{t} = 2 \rightarrow t = \frac{1}{2} \rightarrow \tan x = \frac{1}{2}$$

$$\frac{2 - 3 \tan x}{\tan x + (\cos^3 x = \frac{1}{1+t^2})} = \frac{2 - \frac{3}{2}}{\frac{1}{2} + (\frac{1}{1 + \frac{1}{4}} = \frac{4}{5})} = \frac{10}{2(13)} = \frac{5}{13}$$

فرض اول

تست ۶۴: حاصل  $\sqrt{1 + \cot^2 \alpha} \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$  اگر  $\alpha$  در ربع دوم دایره ی مثلثاتی باشد، کدام است؟

- (۱)  $\tan \alpha$  (۲)  $-\tan \alpha$  (۳)  $\cot \alpha$  (۴)  $-\cot \alpha$



$$\sqrt{1 + \cot^2 \theta} = \frac{1}{\sin \theta} \quad \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \cos \alpha = \frac{1}{|\sin \alpha|} \quad |\cot \alpha| = \frac{|\cos \alpha|}{|\sin \alpha|} = -\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = -\cot \alpha$$

تست ۶۵: حاصل  $\sqrt{1 + \cos x} \sqrt{(1 - \sin x)(1 + \sin x)}$  کدام است؟ (x در ربع سوم است.)

- (۱)  $\sin x$  (۲)  $-\sin x$  (۳)  $\cos x$  (۴)  $-\cos x$

پاسخ: گزینه «۲» - با استفاده از روابط  $1 - \sin^2 x = \cos^2 x$  و  $1 - \cos^2 x = \sin^2 x$  می توان نوشت:

$$\sqrt{1 + \cos x} \sqrt{(1 - \sin x)(1 + \sin x)} = \sqrt{1 + \cos x} \sqrt{1 - \sin^2 x} = \sqrt{1 + \cos x} \sqrt{\cos^2 x}$$

اتحاد مزدوج

$$= \sqrt{1 + \cos x} |\cos x| \stackrel{\pi < x < \frac{3\pi}{2}}{=} \sqrt{1 + \cos x} (-\cos x) = \sqrt{1 - \cos^2 x} = \sqrt{\sin^2 x} = |\sin x| \stackrel{\pi < x < \frac{3\pi}{2}}{=} -\sin x$$



تست ۶۶: در مثلث قائم الزاویه ABC که در رأس A قائم است، حاصل  $\frac{1}{\tan^2 \hat{C} + 1} + \sin^2(\frac{\pi}{2} - \hat{B})$  کدام است؟

$$\hat{B} + \hat{C} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin^2(\frac{\pi}{2} - \hat{B}) = \cos^2 \hat{B} = \frac{\hat{C}}{\hat{B}}$$

$$\frac{1}{\tan^2 \hat{C} + 1} = \frac{\hat{C}}{\hat{B}}$$

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) -۱ (۴) ۲

پاسخ: گزینه «۲» - روش اول: در مثلث ABC زاویه  $A = 90^\circ$  است. پس داریم:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow 90^\circ + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow \hat{B} + \hat{C} = 90^\circ$$

پس دو زاویه B و C متمم اند. از طرفی با توجه به این که  $\frac{1}{1 + \tan^2 \hat{C}} = \cos^2 \hat{C}$  و  $\sin^2(\frac{\pi}{2} - \hat{C}) = \cos^2 \hat{C}$  است، پس می توان

$$\frac{1}{1 + \tan^2 \hat{C}} + \sin^2(\frac{\pi}{2} - \hat{B}) = \cos^2 \hat{C} + \cos^2 \hat{B}$$

$$\cos^2 \hat{C} + \cos^2 \hat{B} = \sin^2 \hat{B} + \cos^2 \hat{B} = 1$$

نوشت:



از طرفی با توجه به این که دو زاویه B و C متمم‌اند، می‌توان گفت  $\cos \hat{C} = \sin \hat{B}$  و همچنین  $\sin \hat{C} = \cos \hat{B}$  است. پس با استفاده از رابطه  $\cos \hat{C} = \sin \hat{B}$  می‌توان نوشت:

$$\cos^2 \hat{C} + \cos^2 \hat{B} = \sin^2 \hat{B} + \cos^2 \hat{B} = 1$$

روش دوم: دو زاویه B و C متمم‌اند، یعنی  $\hat{B} + \hat{C} = \frac{\pi}{2}$ ، پس  $\frac{\pi}{2} - \hat{B} = \hat{C}$  است. در نتیجه داریم:

$$\frac{1}{1 + \tan^2 \hat{C}} + \sin^2 \left( \frac{\pi}{2} - \hat{B} \right) = \frac{1}{1 + \tan^2 \hat{C}} + \sin^2 \hat{C} = \cos^2 \hat{C} + \sin^2 \hat{C} = 1$$

تست ۶۷: با فرض  $2 \sin^2 x + 3 \cos^2 x = 5 \sin x \cos x$  مقدار  $\cos^2 x$  کدام است؟

$$\frac{4}{13} \quad (۴) \qquad 4 \quad (۳) \qquad \frac{13}{4} \quad (۲) \qquad \frac{1}{4} \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه «۴» - طرفین معادله داده‌شده را بر  $\cos^2 x$  تقسیم می‌کنیم:

$$2 \sin^2 x + 3 \cos^2 x = 5 \sin x \cos x \xrightarrow{\div \cos^2 x} 2 \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + 3 \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = 5 \frac{\sin x \cos x}{\cos^2 x}$$

$$\Rightarrow 2 \tan^2 x + 3 = 5 \tan x \Rightarrow 2 \tan^2 x - 5 \tan x + 3 = 0 \xrightarrow{a+b+c=0} \begin{cases} \tan x = 1 \\ \tan x = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

حالا با استفاده از رابطه  $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$  داریم:

حالت اول:  $\tan x = 1 \Rightarrow 1 + (1)^2 = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow 2 = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{2}$

حالت دوم:  $\tan x = \frac{3}{2} \Rightarrow 1 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow 1 + \frac{9}{4} = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow \frac{13}{4} = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow \cos^2 x = \frac{4}{13}$

که با توجه به گزینه‌ها پاسخ صحیح  $\cos^2 x = \frac{4}{13}$  است.

(سراسری تیرگی ۱۳۰۱)

تست ۶۸: اگر  $2 \sin^2 x + \cos^2 x = \frac{4}{3}$  باشد، حاصل  $\tan^2 x$  کدام است؟

$$\sin^2 x + \boxed{\sin^2 x + \cos^2 x} = \frac{4}{3} \xrightarrow{\text{یک}} \sin^2 x = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3}$$

$$\tan^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}$$

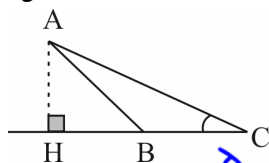
$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\frac{1}{3} + \cos^2 x = 1$$

$$\cos^2 x = \frac{2}{3}$$

(ریاضی ۹۹)

تست ۶۹: در شکل زیر، فرض کنید  $\sin \hat{C} = \frac{5}{13}$  و  $CH = 9$ . اندازه‌ی ارتفاع AH کدام است؟



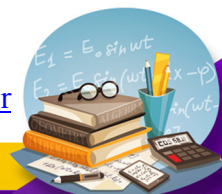
$\triangle AHC$ :

$$\frac{5}{13} = \tan \hat{C} = \frac{AH}{CH = 9}$$

$$AH = 9 \left( \frac{5}{13} \right) = \frac{45}{13} = 3, 1/13$$

$\frac{3}{5} \quad (۲)$   
 $\frac{3}{175} \quad (۴)$

اندازه‌ی اضلاع: ۱۳، ۱۲، ۵  
 $\tan \hat{C} = \frac{5}{12}$



فرمول‌های کمان  $2\alpha$  دوازدهم تجزیه و یازدهم ریاضی

سینوس کینوش

لطف سینوس دبلش  $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$

۱)  $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$

مثال:  $\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2}$ ,  $\sin 6x = 2 \sin 3x \cos 3x$

۲)  $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$

الف)  $\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$

ب)  $\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$

پ)  $1 + \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$

ت)  $1 - \cos 2\alpha = 2 \sin^2 \alpha \Rightarrow \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$

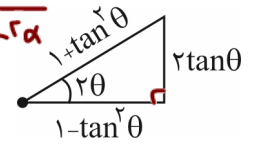
توان شدن

SAVE

«به شدت مهم»

نتیجه

$\frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}$



م

۳)  $\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$  اثبات  $\rightarrow \tan(\alpha + \alpha) = \frac{\tan \alpha + \tan \alpha}{1 - \tan \alpha \tan \alpha} = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$

۴)  $\sin 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$  اثبات  $\rightarrow \frac{2 \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}}{1 + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}} = 2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin 2\alpha$

۵)  $\cos 2\alpha = \frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$  اثبات  $\rightarrow \frac{1 - \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}}{1 + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}} = \frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos 2\alpha$

۶)  $\tan^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}$  اثبات  $\rightarrow \frac{1 - \cos 2\alpha = 2 \sin^2 \alpha}{1 + \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha} = \tan^2 \alpha$

۷)  $\tan \alpha + \cot \alpha = \frac{2}{\sin 2\alpha}$  اثبات  $\rightarrow \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} = \frac{1}{\frac{1}{2} \sin 2\alpha} = \frac{2}{\sin 2\alpha}$

۸)  $\cot \alpha - \tan \alpha = 2 \cot 2\alpha$  اثبات  $\rightarrow \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} = \frac{\cos 2\alpha}{\frac{1}{2} \sin 2\alpha} = \frac{2 \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = 2 \cot 2\alpha$

\*۹)  $\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$

\*۱۰)  $\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$

\*۱۱)  $\sin \alpha \sin(60^\circ - \alpha) \sin(60^\circ + \alpha) = \frac{1}{4} \sin 3\alpha$

\*۱۲)  $\cos \alpha \cos(60^\circ - \alpha) \cos(60^\circ + \alpha) = \frac{1}{4} \cos 3\alpha$

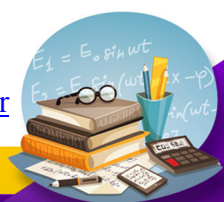
\*۱۳)  $\tan \alpha \tan(60^\circ - \alpha) \tan(60^\circ + \alpha) = \tan 3\alpha$

به کس شکل بالا  
این ۳ تا  
رابطه ذهن  
بیار!

برای  
حساب  
رشته ریاضی

۲ و سینوس دبلش

کوتیجی دتی جی  
کوتیجی منای تی جی  
۲ کاترانت دبلش



$$\sin \theta \cdot \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 2\theta$$

$$\sin(97 + \sqrt{5}) = \cos(\frac{\pi}{5} + \sqrt{5}) = \cos \sqrt{5}$$

تست ۷۰: حاصل عبارت  $\sin(\sqrt{5}/5) \sin(9\sqrt{5}/5) \cos(15^\circ)$  چه قدر است؟

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sin 15^\circ \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 15^\circ \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cos 15^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 15^\circ \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 15^\circ \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cos 15^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

(فراج ۹۲)

تست ۷۱: اگر  $f(x) = x - \sqrt{x}$  و  $g(x) = \sin^2 x$  باشند، ضابطه‌ی تابع fog کدام است؟

$\frac{1}{\sqrt{2}} \cos^2 2x$  (۴)     
  $\frac{1}{\sqrt{2}} \cos^2 2x$  (۳)     
  $-\frac{1}{\sqrt{2}} \sin^2 2x$  (۲)     
  $-\frac{1}{\sqrt{2}} \sin^2 2x$  (۱) ✓

$$y = f(g(x)) = g - \sqrt{g} = \sin^2 x - \sqrt{\sin^2 x} = \sin^2 x - \sin x = \sin x (\sin x - 1)$$

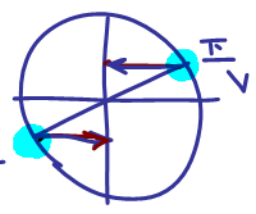
$$y = -\sin^2 x \cos^2 x = -(\sin x \cos x)^2 = -\left(\frac{1}{2} \sin 2x\right)^2 = -\frac{1}{4} \sin^2 2x$$

در  $\sin \frac{\pi}{\sqrt{2}}$  ضرب و تقسیم کن

تست ۷۲: حاصل عبارت  $\cos \frac{\pi}{\sqrt{2}} \cdot \cos \frac{2\pi}{\sqrt{2}} \cdot \cos \frac{4\pi}{\sqrt{2}}$  کدام است؟

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \left(\frac{2\pi}{\sqrt{2}}\right) \cos \frac{2\pi}{\sqrt{2}} \cos \frac{4\pi}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \frac{4\pi}{\sqrt{2}} \cos \frac{4\pi}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 8\pi = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

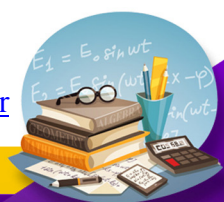


$$= \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} (-\sin \frac{\pi}{\sqrt{2}})}{\sin \frac{\pi}{\sqrt{2}}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

(ریاضی فراج ۱۴۰۰)

تست ۷۳: ساده‌شده عبارت  $\frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta} + \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta}$  کدام است؟

$$\frac{1 - \cos \theta = 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}{1 - \cos \theta = 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}} + \frac{1 + \cos \theta = 2 \cos^2 \frac{\theta}{2}}{\sin \theta = 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}} = \frac{2 \tan^2 \frac{\theta}{2}}{2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}} = \frac{\tan^2 \frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}} = 2 \cot^2 \frac{\theta}{2}$$





$$1 - \sin x = 4 + 4 \sin x \rightarrow 5 \sin x = -3 \quad \sin x = -\frac{3}{5}$$



ریاضی فارغ ۱۴۰۱

$$\tan x = \frac{3}{4} \quad \text{نوبت } x \quad \tan x = \frac{3}{4}$$

تست ۷۴: اگر انتهای کمان x در ربع سوم و  $\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x} = 4$  باشد، مقدار صحیح  $\tan \frac{x}{2}$  کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) -۲ (۳) ۳ (۴) -۳

$$\tan x = \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 - \tan^2 \frac{x}{2}} \quad \tan \frac{x}{2} = A \quad \frac{3}{4} = \frac{2A}{1 - A^2} \rightarrow 3A^2 = 1A$$

$$3A^2 + 1A - 3 = 0 \rightarrow A^2 + 1A - 9 = 0$$

- تست ۷۵: حاصل  $\sin x \cos x (\cos^2 x - \sin^2 x)$  به ازای  $x = 15^\circ$  کدام است؟
- (۱)  $\frac{1}{4}$  (۲)  $\frac{1}{8}$  (۳)  $\frac{\sqrt{3}}{4}$  (۴)  $\frac{\sqrt{3}}{8}$

$$A_1 = \frac{1}{3} = \tan \frac{x}{2}$$

$$A_2 = -\frac{9}{3} = -3 = \tan \frac{x}{2}$$

پاسخ: گزینه «۴» - با استفاده از روابط  $2 \sin \theta \cos \theta = \sin 2\theta$  و  $\cos^2 \theta - \sin^2 \theta = \cos 2\theta$  می توان نوشت:

$$\sin x \cos x (\cos^2 x - \sin^2 x) = \sin x \cos x (\cos^2 x - \sin^2 x) (\cos^2 x + \sin^2 x) = \frac{1}{2} \sin 2x \cos 2x = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \sin(4x) \right)$$

$$= \frac{1}{4} \sin(4x)$$

$$\frac{1}{4} \sin(4x) = \frac{1}{4} \sin(60^\circ) = \frac{1}{4} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{8}$$

حالا با جای گذاری  $x = 15^\circ$  خواهیم داشت:

تست ۷۶: با فرض  $\sin \alpha = \frac{1}{4}$  مقدار  $\cos 4\alpha$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{17}{64}$  (۲)  $\frac{17}{32}$  (۳)  $\frac{-17}{64}$  (۴)  $\frac{-17}{32}$

پاسخ: گزینه «۲» - ابتدا با استفاده از رابطه  $\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$  مقدار  $\cos 2\alpha$  را به دست می آوریم:

$$\cos 2\alpha = 1 - 2 \left( \frac{1}{4} \right)^2 = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

حالا با استفاده از رابطه  $\cos 4\alpha = 2 \cos^2(2\alpha) - 1$  برای محاسبه مقدار  $\cos 4\alpha$  می توان نوشت:

$$\cos 4\alpha = 2 \left( \frac{7}{8} \right)^2 - 1 = \frac{98}{64} - 1 = \frac{34}{64} = \frac{17}{32}$$

تست ۷۷: اگر زاویه  $\alpha$  در ناحیه سوم مثلثاتی و  $\tan \alpha = \frac{3}{4}$  باشد، مقدار  $\frac{\cos(2\alpha - \frac{\pi}{2}) + \cos(\alpha + \pi)}{\cot(2\alpha)}$  کدام است؟

- (۱)  $-\frac{96}{175}$  (۲)  $\frac{1056}{175}$  (۳)  $\frac{96}{175}$  (۴)  $-\frac{1056}{175}$



(سراسری تهرانی ۱۴۰۰)

$$\frac{\cos(\alpha - \frac{\pi}{2}) + \cos(\alpha + \pi)}{\cot(2\alpha)} = \frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}} = \frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\frac{\cos 2\alpha}{2 \sin \alpha \cos \alpha}} = \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha (\sin \alpha - \cos \alpha)}{\cos 2\alpha} = \frac{2 \left( -\frac{3}{4} \right) \left( -\frac{4}{5} \right)}{\frac{7}{8}} = \frac{24}{7}$$

$$\cos(\alpha + \pi) = -\cos \alpha$$

$$\cot 2\alpha = \frac{1}{\tan 2\alpha} = \frac{1}{\frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}} = \frac{1 - \tan^2 \alpha}{2 \tan \alpha} = \frac{1 - \frac{9}{16}}{2 \cdot \frac{3}{4}} = \frac{\frac{7}{16}}{\frac{3}{2}} = \frac{7}{24}$$



$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

(سراسری تهرمی ۱۴۰۰)

تست ۷۸: اگر  $f(x) = 16 \cos^2(3x) \cos^2(6x) \cos^2(12x) \cos^2(24x)$  مقدار  $f(\frac{\pi}{36})$  کدام است؟

$\frac{6+3\sqrt{3}}{16}$  (۴)       $\frac{6+\sqrt{3}}{16}$  (۳)       $\frac{6-\sqrt{3}}{16}$  (۲)       $\frac{6-3\sqrt{3}}{16}$  (۱)

$$f(x) = 16 \left( \frac{1 + \cos 6x}{2} \right) \left( \frac{1 + \cos 12x}{2} \right) \left( \frac{1 + \cos 24x}{2} \right) \left( \frac{1 + \cos 48x}{2} \right)$$

$$f\left(\frac{\pi}{36}\right) = \left(1 + \cos \frac{\pi}{6}\right) \left(1 + \cos \frac{\pi}{3}\right) \left(1 + \cos \frac{2\pi}{3}\right) \left(1 + \cos \frac{4\pi}{3}\right)$$

$$= \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \left(\frac{2+\sqrt{3}}{2}\right) \left(\frac{3}{2}\right) = \frac{2+3\sqrt{3}}{16}$$

تست ۷۹: اگر  $\cot x - \tan x = 3$  باشد، حاصل عبارت  $M = \frac{2 \cot 4x}{2 \cot 2x + 3 \tan 2x}$  کدام است؟

$-\frac{5}{6}$  (۴)       $-\frac{1}{6}$  (۳)       $\frac{1}{3}$  (۲)       $\frac{1}{6}$  (۱)

پاسخ: گزینه «۱» - می‌دانیم  $\cot 0 - \tan 0 = 2 \cot 20$  است، پس می‌توان نوشت:

$$2 \cot 2x = 3 \Rightarrow \cot 2x = \frac{3}{2} \Rightarrow \tan 2x = \frac{2}{3}$$

$$2 \cot 4x = \cot 2x - \tan 2x = \frac{3}{2} - \frac{2}{3} = \frac{9-4}{6} = \frac{5}{6}$$

از طرفی مطابق فرمول بالا داریم:

در نهایت با جای گذاری مقادیر به دست آمده در خواسته مسئله، مقدار  $M$  به دست می‌آید، یعنی:

$$M = \frac{2 \cot 4x}{2 \cot 2x + 3 \tan 2x} = \frac{\frac{5}{6}}{2\left(\frac{3}{2}\right) + 3\left(\frac{2}{3}\right)} = \frac{\frac{5}{6}}{3+2} = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{1}} = \frac{1}{6}$$

کافی است از دستورات سینوس و کسینوس بر حسب  
ناشرانت لطف آن استفاده کنید.

تست ۸۰: اگر  $\frac{\tan \alpha (1 - \tan^2 \alpha)}{(1 + \tan^2 \alpha)^2} = \frac{1}{8}$  حاصل  $\sin 4\alpha$  کدام است؟

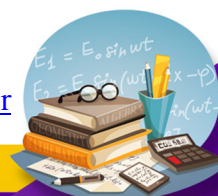
$\frac{3}{4}$  (۴)       $\frac{\sqrt{3}}{2}$  (۳)       $\frac{\sqrt{2}}{2}$  (۲)       $\frac{1}{2}$  (۱)

$$\sin 2\theta = \frac{2t\theta}{1+t^2\theta}$$

$$\cos 2\theta = \frac{1-t^2\theta}{1+t^2\theta}$$

$$\frac{t\alpha}{1+t^2\alpha} \cdot \frac{1-t^2\alpha}{1+t^2\alpha} = \frac{1}{8} \Rightarrow \sin 2\alpha \cos 2\alpha = \frac{1}{8} \Rightarrow \frac{1}{2} \sin 4\alpha = \frac{1}{8} \Rightarrow \sin 4\alpha = \frac{1}{4}$$

$$\sin 4\alpha = \frac{1}{4}$$



چند تا اتحاد مهم و کاربردی

۱)  $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$

اثبات:  $(\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x) = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$

۲)  $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 4x$  اثبات:  $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x$

$(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x = 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x = 1 - 2(\sin x \cos x)^2 = 1 - 2(\frac{1}{2} \sin 2x)^2$   
 $= 1 - 2 \times \frac{1}{4} \sin^2 2x = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x = 1 - \frac{1}{2} (\frac{1 - \cos 4x}{2}) = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cos 4x = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 4x$

توی اثبات این فرمول از اتحاد  $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$  استفاده کردیم که  $a = \sin^2 x$  و  $b = \cos^2 x$  بود.

۳)  $\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x = \frac{5}{8} + \frac{3}{8} \cos 4x$  اثبات:  $\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - 3\sin^2 x \cos^2 x$

اثبات:  $(\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - 3\sin^2 x \cos^2 x(\sin^2 x + \cos^2 x) = 1 - 3\sin^2 x \cos^2 x = 1 - 3(\sin x \cos x)^2$   
 $= 1 - 3(\frac{1}{2} \sin 2x)^2 = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x = 1 - \frac{3}{4} (\frac{1 - \cos 4x}{2}) = 1 - \frac{3}{8} + \frac{3}{8} \cos 4x = \frac{5}{8} + \frac{3}{8} \cos 4x$

توی اثبات این فرمول از اتحاد  $a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$  استفاده کردیم که  $a = \sin^2 x$  و  $b = \cos^2 x$  بود.

یادت باشه: فرمول‌های ۲ و ۳ در فصل مشتق کاربرد زیادی خواهند داشت.

۴)  $(\sin x + \cos x)^2 = 1 + \sin 2x$

$(\sin x - \cos x)^2 = 1 - \sin 2x$

اثبات:  $(\sin x \pm \cos x)^2$

$\sin^2 x + \cos^2 x \pm 2\sin x \cos x = 1 \pm \sin 2x$

یادت باشه: فرمول شماره ۴ در فصل حد، برای رفع ابهام کاربرد زیادی دارد.

تست ۸۱: حاصل  $\sqrt{1 + \sin 2x} - \sin x$  وقتی  $\frac{\pi}{3} < x < \frac{3\pi}{4}$  باشد، کدام است؟

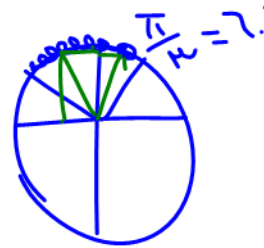
۴)  $2\sin x - \cos x$

۳)  $\cos x$

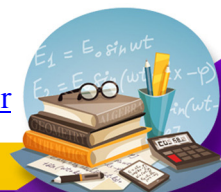
۲)  $-2\sin x$

۱) صفر

$\sqrt{1 + \sin 2x} = \sqrt{(\sin x + \cos x)^2} = |\sin x + \cos x| - \sin x$   
 $= \sin x + \cos x - \sin x = \cos x$



$\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 4x$   
 $\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - 3\sin^2 x \cos^2 x = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x = \frac{5}{8} + \frac{3}{8} \cos 4x$



(تقریبی ۹۵)

تست ۸۲: اگر  $\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{1}{4}$  باشد، مقدار  $\cos(\frac{3\pi}{4} - 2\alpha)$  کدام است؟



$\frac{3}{4}$  (۴)

$\frac{3}{8}$  (۳)

$-\frac{3}{8}$  (۲)

$-\frac{3}{4}$  (۱)

$\cos(\frac{3\pi}{4} - 2\alpha) = -\sin 2\alpha = -2\sin \alpha \cos \alpha = -\frac{3}{2}$

$\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{1}{4}$  طرفین به توان دو  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - 2\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{16} \rightarrow -2\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{16} - 1 = -\frac{15}{16}$

### معادلات مثلثاتی مال دوازدهم

به معادلاتی که مجهولشان نسبت‌های مثلثاتی باشد، معادلات مثلثاتی می‌گوییم و هدف از حل آن‌ها مشخص کردن همگی کمان‌هایی (زوایایی) است که در معادله صدق می‌کند.

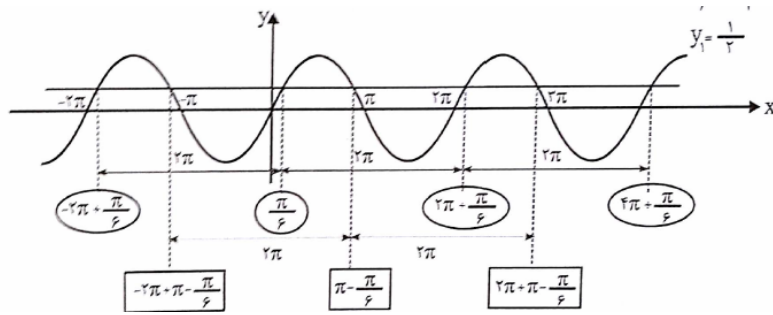
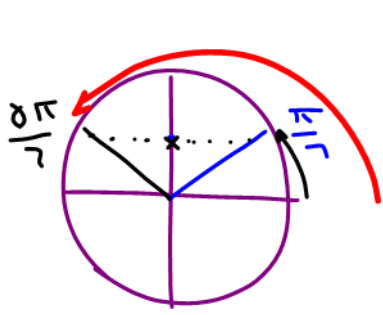
چون توابع مثلثاتی متناوب هستند، اگر خط  $y = k$  آن‌ها را قطع کند، برخورد در بیش از یک نقطه رخ می‌دهند و بی‌شمار جواب داریم که برای گزارش طول نقاط تلاقی به روش زیر عمل می‌کنیم:

به عنوان مثال: اگر از ما بپرسند چه  $x$ ‌هایی در معادله  $2 \sin x - 1 = 0$  صدق می‌کند، می‌توانیم از طریق زیر عمل کنیم:

$2 \sin x - 1 = 0 \Rightarrow \sin x = \frac{1}{2}$

برای حل یک معادله می‌توان آن را به تنگنای دو تابع تبدیل کرد هر دو تابع را در یک دستگاه کشید طول نقاط تلاقی (برخورد) آن‌ها را می‌توانست

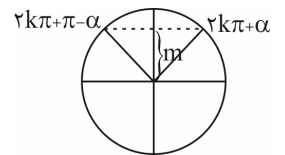
از روش رسم و تقاطع دو تابع  $y_1$  و  $y_2$  دقیقاً  $x$ ‌هایی را پیدا می‌کنیم که در معادله فوق صدق می‌کنند.



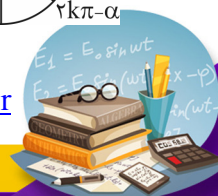
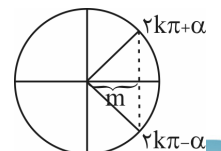
### حل معادله‌ی ساده‌ی مثلثاتی

برای این که هر بار مجبور به رسم و تقاطع دو تابع نشویم، به کمک اتحادها و روابط و یا نسبت زوایای متمم، معادله را ساده می‌کنیم به طوری که به تساوی دو نسبت هم‌نام برسیم و به کمک ۴ مسئله‌ی زیر، معادله حل می‌شود.

۱)  $\sin x = m \xrightarrow{m = \sin \alpha} \sin x = \sin \alpha \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \alpha \\ x = 2k\pi + \pi - \alpha \end{cases}$

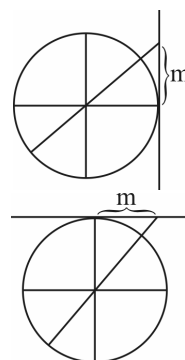


۲)  $\cos x = m \xrightarrow{m = \cos \alpha} \cos x = \cos \alpha \Rightarrow x = 2k\pi \pm \alpha$



$$۳) \tan x = m \xrightarrow{m=\tan \alpha} \tan x = \tan \alpha \Rightarrow x = k\pi + \alpha$$

$$۴) \cot x = m \xrightarrow{m=\cot \alpha} \cot x = \cot \alpha \Rightarrow x = k\pi + \alpha$$

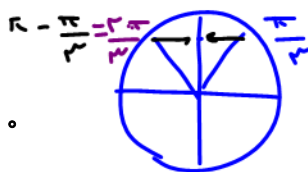


### حالات مختلف معادلات مثلثاتی

۱- حالت اول: در این حالت در معادله مثلثاتی فقط یک نسبت مثلثاتی با زاویه مجهول و از درجه اول وجود دارد که با کمک ۴ مسئله‌ای که گفته شد، جواب را می‌یابیم.

مثال ۸۳: معادلات زیر را حل کنید.

$$۱) ۲ \sin x - \sqrt{۳} = 0$$



$$۲ \sin x = \sqrt{۳} \Rightarrow \sin x = \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \sin \frac{\pi}{۳} \Rightarrow \begin{cases} x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۳} \\ x = ۲k\pi + \pi - \frac{\pi}{۳} \end{cases}$$

$$۲) ۲ \sin x + \sqrt{۳} = 0$$

$$۲ \sin x = -\sqrt{۳} \Rightarrow \sin x = \frac{-\sqrt{۳}}{۲} = \sin\left(\frac{-\pi}{۳}\right) \Rightarrow \begin{cases} x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۳} \\ x = ۲k\pi + \pi + \frac{\pi}{۳} \end{cases}$$



$$۳) ۲ \cos x - \sqrt{۳} = 0$$

$$۲ \cos x = \sqrt{۳} \Rightarrow \cos x = \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \cos \frac{\pi}{۶} \Rightarrow x = ۲k\pi \pm \frac{\pi}{۶}$$



$$۴) ۲ \cos x + \sqrt{۳} = 0$$

$$۲ \cos x = -\sqrt{۳} \Rightarrow \cos x = \frac{-\sqrt{۳}}{۲} = \cos\left(\frac{5\pi}{۶}\right) \Rightarrow x = ۲k\pi \pm \frac{5\pi}{۶}$$



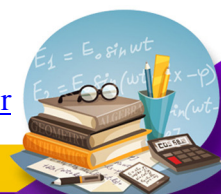
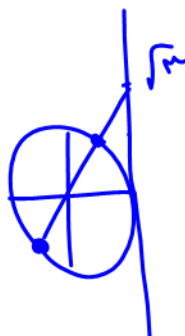
یادت باشه: چنانچه کسینوس یک کمان منفی را خواستند، کمان را از ربع دوم انتخاب کنید. اما در سایر نسبت‌های مثلثاتی برای کمان منفی، به ربع چهارم یا کمان قرینه رجوع می‌کنیم.

$$۵) \tan x - \sqrt{۳} = 0$$

$$\tan x = \sqrt{۳} = \tan \frac{\pi}{۳} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{۳}$$

$$۶) \tan x + \sqrt{۳} = 0$$

$$\tan x = -\sqrt{۳} = \tan\left(-\frac{\pi}{۳}\right) \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{۳}$$

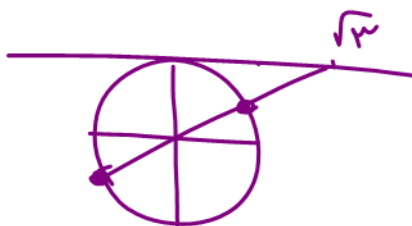


۷)  $\cot x - \sqrt{3} = 0$

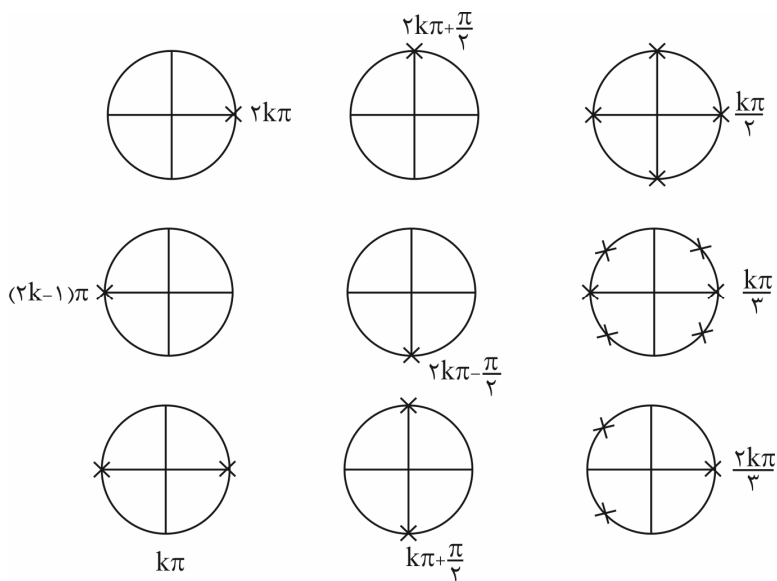
$\cot x = \sqrt{3} = \cot \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{6}$

۸)  $\cot x + \sqrt{3} = 0$

$\cot x = -\sqrt{3} = \cot(-\frac{\pi}{6}) \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{6}$



آدرس نقاط مهم روی دایره مثلثاتی



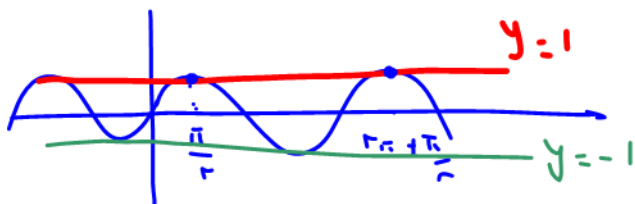
$\frac{k\pi}{n}$  زویر یک منظم

$\frac{2k\pi}{n}$  زویر یک منظم

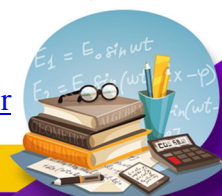
حل معادلات خاص مثلثاتی

برخی از معادلات هستند که جواب‌های آن‌ها به فرم ساده‌تری هم قابل نمایش است. این معادلات را در جدول زیر بررسی می‌کنیم.

معادله	جواب کلی	آدرس روی دایره	معادله	جواب کلی	آدرس روی دایره
$\sin x = 0$	$x = k\pi$		$\cos x = 0$	$x = k\pi + \frac{\pi}{2}$	
$\sin x = 1$	$x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$		$\cos x = 1$	$x = 2k\pi$	
$\sin x = -1$	$x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$		$\cos x = -1$	$x = (2k+1)\pi$	



یادت باشه:  $\sin x = \pm 1$  و  $\cos x = \pm 1$  ریشه مضاعف دارند. زیرا اگر  $\sin x = 1$  یا  $\cos x = 1$  را بگیریم و خط‌های  $y = \pm 1$  توابع برهم‌پاشی می‌شوند بی‌نهایت نقطه می‌دهند.



۲- حالت دوم: در این حالت فقط و فقط دو نسبت مثلثاتی با ضریب ۱ یا -۱ و توان ۱ وجود دارند که معادله را به تساوی دو نسبت هم‌نام تبدیل می‌کنیم (اگر هم‌نام نبودند از زوایای متمم استفاده می‌کنیم) و به کمک ۴ مسئله گفته‌شده، مسئله را حل می‌کنیم.  
به طور کلی کمان می‌تواند به جز  $x$ ، چیز دیگری هم باشد.  
مثلاً: فرض کنید  $u$  یک عبارت  $X$  دار است.

**SAVE**

$$\sin u = \sin \alpha \Rightarrow \begin{cases} u = 2k\pi + \alpha \\ u = 2k\pi + \pi - \alpha \end{cases}$$

$$\cos u = \cos \alpha \Rightarrow u = 2k\pi \pm \alpha$$

$$\tan u = \tan \alpha \Rightarrow u = k\pi + \alpha$$

$$\cot u = \cot \alpha \Rightarrow u = k\pi + \alpha$$

مثال ۸۴: معادله‌ی زیر را حل کنید.

۱)  $\sin 3x - \sin x = 0$

$\sin 3x = \sin x \Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi + x \Rightarrow 2x = 2k\pi \Rightarrow x = k\pi \\ 3x = 2k\pi + \pi - x \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \end{cases}$

این معادله چند جواب دارد:  $x = 0, \pi, 2\pi$  (از  $x = k\pi$ )  
 $x = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$  (از  $x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$ )

تساوی نسبت همنام

(فارج تهری ۹۳)

تست ۸۵: جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی  $\frac{\sin 3x}{\cos(\frac{3\pi}{2} + x)} = 1$ ، به کدام صورت است؟

- $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$  (۴) ✓     
  $2k\pi \pm \frac{3\pi}{4}$  (۳)     
  $2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$  (۲)     
  $k\pi + \frac{\pi}{4}$  (۱)

$\frac{\sin 3x}{\sin x} = 1 \rightarrow \sin 3x = \sin x$

$\sin 3x = \sin x \Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi + x \rightarrow 2x = 2k\pi \rightarrow x = k\pi \\ 3x = 2k\pi + \pi - x \rightarrow 4x = 2k\pi + \pi \rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \end{cases}$

مخرج را منفی کن و ع ق ق است

$x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$

۲)  $\sin 3x + \sin x = 0$

$\sin(-\theta) = -\sin \theta$

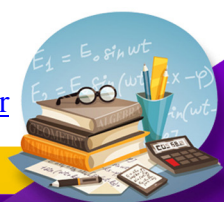
مثال ۸۶: معادله زیر را حل کنید.

$\sin 3x = -\sin x$

قرار شد چپ و راست مساوی یک نسبت همنام داشته باشیم (که این‌جا داریم) و هر دو، پشتشون علامت مثبت داشته باشه. این‌جا برای این که از شر منفی خلاص بشیم از خاصیت  $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$  استفاده می‌کنیم یعنی به جای  $-\sin x$  می‌نویسیم  $\sin(-x)$  پس:

$\sin 3x = \sin(-x) \Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi + (-x) \\ 3x = 2k\pi + \pi - (-x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x = 2k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} \\ 2x = 2k\pi + \pi \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2} \end{cases}$

$\sin u = \sin \alpha$



در معادله فرد  $\frac{\pi}{4}$  نام لبت عوض بینه و مینه  $\sin$  چون  $\frac{\pi}{4} - x$  ناصیه اوله  
 $\sin 2x + \cos(\frac{\pi}{4} - x) = 0$  در بازه  $[0, 2\pi]$  کدما است؟  $\sin 2x + \cos x$  می شود.

(فارج تهری ۹۶)

تست ۸۷: مجموع جواب‌های مثلثاتی  $\sin 2x + \cos(\frac{\pi}{4} - x) = 0$  در بازه  $[0, 2\pi]$  کدما است؟

$\frac{14\pi}{3}$  (۱)       $4\pi$  (۲)       $\frac{9\pi}{2}$  (۳)       $5\pi$  (۴)

$\sin(-2x) + \sin(-x) = \dots \rightarrow \sin(-2x) = -\sin(-x)$   
 $\sin(-2x) = \sin(-(-x))$   
 $\sin(-u) = \sin(-\alpha)$   
 $u = 2k\pi + \alpha$   
 $u = 2k\pi + \pi - \alpha$

$2x = 2k\pi + (-x)$   
 $2x = 2k\pi + \pi - (-x)$

$3x = 2k\pi \rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} \rightarrow x = 0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, 2\pi$   
 $x = 2k\pi + \pi \rightarrow x = \pi$

جمع  $\rightarrow 5\pi$

(سراسری تهری ۱۴۰۰)

تست ۸۸: تعداد جواب‌های معادله مثلثاتی  $\cos^2(x) - \sin^2(x) \cos(3x) = 1$  در فاصله  $[0, 2\pi]$  کدما است؟

$6$  (۴)       $5$  (۳)       $3$  (۲)       $1$  (۱)

$-\sin^2 x \cos 3x = 1 - \cos^2 x \rightarrow \sin^2 x + \sin^2 x \cos 3x = \dots \rightarrow \sin^2 x (1 + \cos 3x) = \dots$

$\sin^2 x = \dots \rightarrow \sin x = \dots \rightarrow x = k\pi \rightarrow x = 0, \pi, 2\pi$   
 $1 + \cos 3x = \dots \rightarrow \cos 3x = -1 \rightarrow 3x = 2k\pi + \pi \rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{3}$

$k \cdot 1 \ 2 \ 3$   
 $\frac{\pi}{3} \ \frac{2\pi}{3} \ \frac{4\pi}{3} \ \frac{5\pi}{3} \ \frac{7\pi}{3} \ \frac{8\pi}{3}$

(فارج ریاضی ۹۵)

تست ۸۹: مجموع جواب‌های معادله مثلثاتی  $\sin(x + \frac{\pi}{8}) + \cos(x - \frac{3\pi}{8}) = 1$  در بازه  $[0, 2\pi]$  برابر کدما است؟

$a - b = x + \frac{\pi}{8} - x + \frac{3\pi}{8} = \frac{\pi}{2}$        $\frac{7\pi}{4}$  (۴)       $\frac{3\pi}{2}$  (۳)       $\frac{5\pi}{4}$  (۲)       $\frac{3\pi}{4}$  (۱)

$\sin a + \cos b = 1 \rightarrow \sin(a = \frac{\pi}{8} + b) + \cos b = 1 \rightarrow \cos b + \cos b = 1 \rightarrow 2\cos b = 1 \rightarrow \cos b = \frac{1}{2}$   
 $\cos b = \cos \frac{\pi}{3} \rightarrow b = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$   
 $x - \frac{3\pi}{8} = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \rightarrow x = 2k\pi + \frac{17\pi}{24}$   
 $x - \frac{3\pi}{8} = 2k\pi - \frac{\pi}{3} \rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{24}$

$\frac{17\pi}{24}$        $\frac{\pi}{24}$

$\frac{17\pi}{24} + \frac{\pi}{24} = \frac{18\pi}{24} = \frac{3\pi}{4}$

تست ۹۰: فرض کنید A مجموعه جواب‌های معادله مثلثاتی  $(1 + \cos 2\alpha)(1 + \cos 4\alpha)(1 + \cos 8\alpha) = \frac{1}{8}$  در بازه  $[0, \pi]$  باشد،

(سراسری ریاضی ۱۴۰۰)

$1 + \cos \theta = 2\cos^2 \frac{\theta}{2}$

ماکزیم عضو مجموعه A کدما است؟

$\frac{8}{9}\pi$  (۴)       $\frac{7}{9}\pi$  (۳)       $\frac{6}{7}\pi$  (۲)       $\frac{5}{7}\pi$  (۱)

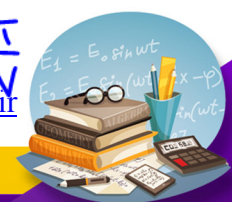
$(2\cos^2 \alpha)(2\cos^2 2\alpha)(2\cos^2 4\alpha) = \frac{1}{8} \rightarrow \cos^2 \alpha \cos^2 2\alpha \cos^2 4\alpha = \frac{1}{8}$

$\cos \alpha \cos 2\alpha \cos 4\alpha = \pm \frac{1}{8}$        $\sin \alpha \cos \alpha \cos 2\alpha \cos 4\alpha = \pm \frac{1}{8}$        $\sin \alpha \rightarrow \sin 2\alpha = \pm \sin \alpha$   
 ب.ا  $\sin \alpha \neq 0$  چون نمی توان ۲ طرف را صفر بزرگ کرد.  $\sin \alpha = \dots$

$\sin 2\alpha = \sin \alpha \rightarrow 2\alpha = 2k\pi + \alpha \rightarrow \alpha = 2k\pi$   
 $2\alpha = 2k\pi + \pi - \alpha \rightarrow \alpha = \frac{(2k+1)\pi}{3}$   
 $\sin 2\alpha = -\sin \alpha = \sin(-\alpha) \rightarrow 2\alpha = 2k\pi - \alpha \rightarrow \alpha = \frac{2k\pi}{3}$   
 $2\alpha = 2k\pi + \pi - (-\alpha) \rightarrow \alpha = \frac{(2k+1)\pi}{3}$

جواب‌های Max:  $\alpha = \frac{7\pi}{9}, \alpha = \frac{5\pi}{9}$   
 $\alpha = \frac{11\pi}{9}, \alpha = \frac{13\pi}{9}$

[www.samansalamian.ir](http://www.samansalamian.ir)





چاق و داغ  $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

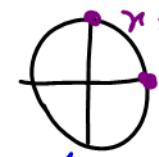
نکته: اگر ۲ طرف معادله را بر هم ضرب کنیم  
 کردیم ۲ طرف برابرت = صفر را بنویس  
 حل کنیم

تست ۹۱: مجموع جوابهای معادله مثلثاتی  $\sin^3 x + \cos^3 x = 1 - \frac{1}{4} \sin 2x$  در بازه  $[0, 2\pi]$  کدام است؟

~~$(\sin x + \cos x)(\sin^2 x + \cos^2 x - \sin x \cos x) = 1 - \frac{1}{4} \sin 2x$~~

$1 - \frac{1}{4} \sin 2x = 0$   
 $1 = \frac{1}{4} \sin 2x$   
 $4 = \sin 2x$   
 جواب ندارد  
 امکان ندارد هرگز نیست!

$\sin x + \cos x = 1$   
 روی دایره یکتا جواب  
 سینوس و کسینوس یکسان؟



مجموع  $x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} : \frac{\pi}{4}$   
 $x = 2k\pi : 0, 2\pi$   
 $\frac{\pi}{4} + 2\pi + 0 = \frac{5\pi}{4}$

تست ۹۲: مجموع جوابهای معادله مثلثاتی  $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{1}{2}$  در بازه  $[0, 2\pi]$  کدام است؟

~~$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\theta$~~   
 $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\theta = \frac{1}{2}$

$\cos 2\theta = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = -1 \rightarrow 2\theta = 2k\pi + \pi \rightarrow \theta = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{2}$

مجموع جوابها  $= \frac{\pi}{2} + (\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}) + (\pi + \frac{\pi}{2}) + (\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{2}) = 2\pi + \frac{3\pi}{2} + \pi = 4\pi$

تست ۹۳: جواب کلی معادله مثلثاتی  $2 \tan x \cdot \cos^2 x = 1$  به کدام صورت است؟

$2k\pi + \frac{\pi}{4}$      $2k\pi - \frac{\pi}{4}$      $k\pi + \frac{\pi}{4}$      $k\pi - \frac{\pi}{4}$

$2 \frac{\sin x}{\cos x} \cos^2 x = 1 \rightarrow 2 \sin x \cos x = 1 \rightarrow \sin 2x = 1 \rightarrow 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$

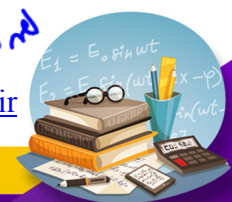
$x = k\pi + \frac{\pi}{4}$

۳)  $\cos 3x - \cos x = 0$

مثال ۹۴: معادله زیر را حل کنید.

$\cos 3x = \cos x \Rightarrow 3x = 2k\pi \pm x \Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi + x \Rightarrow 2x = 2k\pi \Rightarrow x = k\pi \\ 3x = 2k\pi - x \Rightarrow 4x = 2k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} \end{cases}$

$\cos u = \cos \alpha \rightarrow u = 2k\pi \pm \alpha$  پس جواب کلی  $x = \frac{k\pi}{2}$



فردرل  $\cos^2 \theta - \sin^2 \theta = \cos 2\theta$

(تجربی ۹۱)

تست ۹۵: جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی  $\sin^2 x - \cos^2 x = \sin(\frac{3\pi}{4} + x)$  به کدام صورت است؟

$2k\pi \pm \frac{3\pi}{4}$  (۴)

$2k\pi + \frac{\pi}{4}$  (۳)

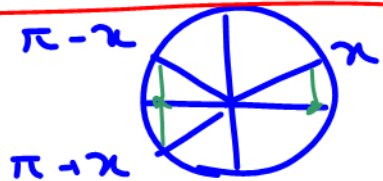
$\frac{2k\pi}{3}$  (۲)

$\frac{k\pi}{3}$  (۱)

$-\cos 2x = -\cos x \rightarrow \cos 2x = \cos x$   
 $\cos u = \cos \alpha$   
 $u = 2k\pi \pm \alpha$

$2x = 2k\pi \pm x$

$\begin{cases} 2x = 2k\pi + x \rightarrow x = 2k\pi \\ 2x = 2k\pi - x \rightarrow 3x = 2k\pi \rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} \end{cases}$



جواب  $x = \frac{2k\pi}{3}$   
 می‌تواند  $x = 2k\pi$  هم هست پس  $x = \frac{2k\pi}{3}$

۴)  $\cos 3x + \cos x = 0$

مثال ۹۶: معادله زیر را حل کنید.

$\cos 3x = -\cos x \rightarrow \cos(\pi + x) \text{ یا } \cos(\pi - x)$

الان چی کار کنم آقا؟ چطوری از شر منفی خلاص بشیم؟ آخه کسینوس که خاصیت  $\cos(-\alpha) = -\cos \alpha$  رو نداره ☹️  
 ایرادی نداره از یه خاصیت دیگه می‌تونیم واسش استفاده کنیم. کسینوسه دیگه! همیشه ساز مخالف میزنه. ببینید:

$\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$

پس به جای  $-\cos \alpha$  بذارید  $\cos(\pi - \alpha)$ . به همین راحتی ☺️

$\cos 3x = -\cos x \Rightarrow \cos 3x = \cos(\pi - x) \Rightarrow 3x = 2k\pi \pm (\pi - x)$

$\Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi + \pi - x \Rightarrow 4x = 2k\pi + \pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \\ 3x = 2k\pi - \pi + x \Rightarrow 2x = 2k\pi - \pi \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{2} \end{cases}$

(فارج تجربی ۹۳ و ۹۸)

تست ۹۷: جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی  $\cos 3x + \cos x = 0$  با شرط  $\cos x \neq 0$  کدام است؟

$k\pi + \frac{\pi}{4}$  (۴)

$k\pi - \frac{\pi}{4}$  (۳)

$\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$  (۲)

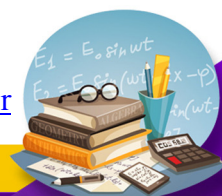
$\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$  (۱) ✓

$\cos 3x = -\cos x \rightarrow \cos(2x) = \cos(\pi - x) \rightarrow 2x = 2k\pi \pm (\pi - x)$

$\cos u = \cos \alpha$   
 $u = 2k\pi \pm \alpha$

$\begin{cases} 2x = 2k\pi + \pi - x \\ 2x = 2k\pi - \pi + x \end{cases} \rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$

$2x = 2k\pi - \pi$   
 $\cos x \neq 0$  در فرض سوال گفته.  $x = k\pi - \frac{\pi}{2}$  غلط



اگر دو طرف هم‌نسبت نباشن ولی توانشون (یک) باشد باید کاری کنیم که هم‌نسبت بشن. فقط کافیست از این روابط استفاده کنیم:

$$\sin \alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

$$\cos \theta = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$

$$\cos \alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

$$\sin \theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$

$$\tan \alpha = \cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

$$\cot \alpha = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

$$\Delta) \sin 3x - \cos 2x = 0$$

مثال ۹۸: معادله زیر را حل کنید.

$$\sin 3x = \cos 2x \Rightarrow \sin \underbrace{3x}_u = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) \Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} - 2x \Rightarrow 5x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{5} + \frac{\pi}{10} \\ 3x = 2k\pi + \pi - \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

تست ۹۹: جواب‌های معادله مثلثاتی  $\sin(2x - \frac{\pi}{4}) = \cos(x + \frac{\pi}{4})$  با شرط  $x \neq k\pi$  که در آن  $k$  یک عدد صحیح است، کدام است؟

(تهری ۹۹)

نکته: اگر جواب کلی  $2k\pi$  یا  $k\pi$  یا  $\frac{k\pi}{2}$  داشته باشی

$$\frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \quad (۴) \checkmark$$

$$\frac{2k\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \quad (۳)$$

$$\frac{2k\pi}{3} \quad (۲)$$

$$\frac{k\pi}{3} \quad (۱)$$

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \left(2x - \frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} - \left(2x - \frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$x + \frac{\pi}{4} = 2k\pi \pm \left(\frac{\pi}{4} - 2x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$x + \frac{\pi}{4} = 2k\pi \pm \left(\frac{3\pi}{4} - 2x\right)$$

$$\begin{cases} x + \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \frac{3\pi}{4} - 2x \\ 3x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \\ x + \frac{\pi}{4} = 2k\pi - \frac{3\pi}{4} + 2x \\ -x = 2k\pi - \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = -2k\pi + \pi \\ x = -2k\pi + \pi \end{cases}$$

نمودار مثبت سینوس در ربع دوم

$$\text{ع) } \sin 3x + \cos x = 0$$

این طور موقع‌ها که به دونه از این‌ها منفی داره کاری کن منفی بیاد پشت سینوس. اینطوری راحت‌تر از شرّ منفی خلاص می‌شی. ببین:

$$\sin 3x = -\cos x$$

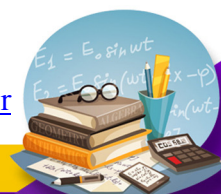
راه طولانی: چون اول باید منفی پشت کسینوس رو از بین ببری بعدش کسینوس رو تبدیل به سینوس کنی.

$$\cos x = -\sin 3x = \sin(-3x)$$

راه خوبتر:

$$\cos x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (-3x)\right) \Rightarrow \cos x = \cos\left(\frac{\pi}{2} + 3x\right) \Rightarrow x = 2k\pi \pm \left(\frac{\pi}{2} + 3x\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} + 3x \Rightarrow -2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = -k\pi - \frac{\pi}{4} \xrightarrow{\text{فرقی با } -k\pi \text{ نداره}} x = k\pi - \frac{\pi}{4} \\ x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} - 3x \Rightarrow 4x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8} \end{cases}$$



$\cos^2 \theta - \sin^2 \theta = \cos 2\theta$

$\cos^2 \theta - (1 - \cos^2 \theta) = \cos 2\theta \rightarrow 2\cos^2 \theta - 1 = \cos 2\theta$

(تجربی ۹۴)

تست ۱۰۱: جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی  $2\cos^2 x + 2\sin x \cos x = 1$ ، به کدام صورت است؟

$k\pi + \frac{\pi}{8}$  (۴)

$k\pi - \frac{\pi}{8}$  (۳)

$\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$  (۲)

$\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$  (۱)

$(2\cos^2 x - 1) + (2\sin x \cos x) = \dots \rightarrow \cos 2x + \sin 2x = \dots \rightarrow \cos 2x = -\sin 2x$

$\cos(2x) = \sin(-2x) \rightarrow \cos(2x) = \cos(\frac{\pi}{2} - (-2x)) \rightarrow \cos 2x = \cos(\frac{\pi}{2} + 2x)$

$\cos u = \cos \alpha$   
 $u = 2k\pi \pm \alpha$

~~$2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} + 2x$~~   
 ~~$2x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} - 2x$~~

$2x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \rightarrow x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{4}$

معادلات تانژانتی

مثال ۱۰۲: معادله زیر را حل کنید و تعداد جواب‌ها را در فاصله  $[0, 2\pi]$  مشخص کنید.

۷)  $\tan 3x - \tan x = 0$

$\tan 3x = \tan x \Rightarrow 3x = k\pi + x \Rightarrow 2x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2}$

k	۰	۱	۲	۳	۴
x	۰	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$	$2\pi$
		غ.ق.ق		غ.ق.ق	

چون  $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$  هر جا  $\cos x = 0$  باشد جواب نیست.

۸)  $\tan 3x + \tan x = 0 \Rightarrow \tan 3x = -\tan x$

واسه تانژانت هم مثل سینوس می‌تونیم از خاصیت  $\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$  استفاده کنیم:

$\tan 3x = \tan(-x) \Rightarrow 3x = k\pi + (-x) \Rightarrow 4x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{4}$

k	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸
x	۰	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\pi$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	$2\pi$
			غ.ق.ق				غ.ق.ق		

کتانژانت هم دقیقاً مثل تانژانت.

(تجربی ۹۷ و ریاضی ۹۹)

تست ۱۰۳: جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی  $\tan x \tan 3x = 1$ ، کدام است؟

$\frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{8}$  (۴)

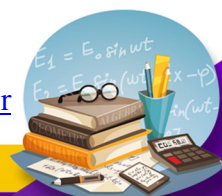
$\frac{k\pi}{2} + \frac{3\pi}{8}$  (۳)

$\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$  (۲)

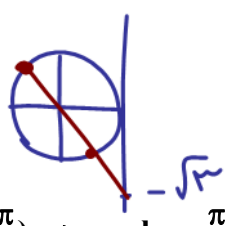
$\frac{k\pi}{4}$  (۱)

$\tan(3x) = \frac{1}{\tan x} \rightarrow \tan(3x) = \cot x \rightarrow \tan(3x) = \tan(\frac{\pi}{2} - x)$   
 $\tan u = \tan \alpha \rightarrow u = k\pi + \alpha$

$3x = k\pi + \frac{\pi}{2} - x \rightarrow 4x = k\pi + \frac{\pi}{2} \rightarrow x = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{8}$



مثال ۱۰۴: معادلات زیر را حل کنید.



۱)  $\sin x + \sqrt{3} \cos x = 0$

$\xrightarrow{+\cos x} \tan x + \sqrt{3} = 0 \Rightarrow \tan x = -\sqrt{3} = \tan(-\frac{\pi}{3}) \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{3}$

اگر سینوس و کسینوس توان دو داشتند، می‌تونیم از روش‌های حل معادله درجه ۲ استفاده کنیم.



تست ۵: از معادله  $2 \sin^2 2x - \sin 2x - 1 = 0$  برای  $x$  در فاصله صفر تا  $2\pi$  چند جواب به دست می‌آید؟

فرض کنید:  $\sin 2x = t$

۵ (۴)      ۴ (۳)      ۳ (۲)      ۶ (۱)

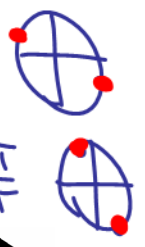
مجموع ضرایب صفر  $2t^2 - t - 1 = 0$

$$\begin{cases} t_1 = 1 = \sin 2x \rightarrow 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \\ t_2 = \frac{c}{a} = -\frac{1}{2} = \sin 2x \end{cases}$$



$\sin 2x = \sin(-\frac{\pi}{2})$

$$\begin{cases} 2x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{4} \\ 2x = 2k\pi + \pi - (-\frac{\pi}{2}) \rightarrow x = k\pi + \frac{3\pi}{4} \end{cases}$$



- (۱)  $\sin^2 u = \sin^2 \alpha$
  - (۲)  $\cos^2 u = \cos^2 \alpha$
  - (۳)  $\tan^2 u = \tan^2 \alpha$
  - (۴)  $\cot^2 u = \cot^2 \alpha$
- $\Rightarrow u = k\pi \pm \alpha$

$\sin^2 x = \frac{1}{4} = (\frac{\sqrt{2}}{2})^2 = \sin^2 \frac{\pi}{4} \rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{4}$

$\tan^2 x = 3 \rightarrow \tan^2 x = (\sqrt{3})^2 = \tan^2 \frac{\pi}{3} \rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$



(تجربی ۹۶)

تست ۱۰۶: جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی  $\cos 2x + 2 \cos^2 x = 0$  کدام است؟

$k\pi \pm \frac{\pi}{6}$  (۴)       $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$  (۳)       $2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$  (۲)       $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$  (۱)

$(\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x) + 2 \cos^2 x = 0$

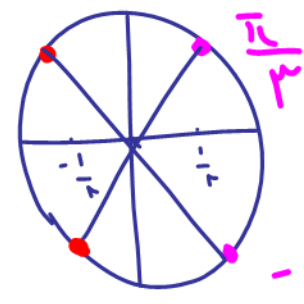
$\cos^2 x - (1 - \cos^2 x) + 2 \cos^2 x = 0 \rightarrow 4 \cos^2 x = 1 \rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{4}$

رابطه ۱)  $\cos^2 x = (\frac{1}{2})^2 = \cos^2 \frac{\pi}{3} \rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$

رابطه ۲)  $\cos^2 x = \frac{1}{4} \xrightarrow{\text{جدا}} \cos x = \pm \frac{1}{2}$



$x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$



یادت باشه: حواست به رادیکال فرجه زوج باشه.



تست ۱۰۷: تمام جواب‌های معادله  $\sqrt{\sin x} = \sqrt{\cos x}$  کدام است؟

$x = 2k\pi + \frac{\pi}{4}$  (۴)     
  $x = 2k\pi$  (۳)     
  $x = k\pi + \frac{\pi}{4}$  (۲)     
  $x = 2k\pi + \frac{\pi}{4}$  (۱) ✓

۲ طرف به توان ۲  $\sin x = \cos x$



$2k\pi + \frac{\pi}{4} = x$

غ. ق. ق. ن. زیرا  $\sin x < \cos x$  و  $\sin x > \cos x$  مستی می‌شود.

فرمول حسابان

(سراسری ریاضی ۹۳)

$\sin^3 x = 3\sin x - 4\sin^3 x$   
 $\cos^3 x = 4\cos^3 x - 3\cos x$

تست ۱۰۸: جواب کلی معادله  $\frac{\sin^3 x}{\sin x} = 2\cos^2 x$  مثلثاتی کدام است؟

$k\pi + \frac{\pi}{4}$  (۴)     
  $k\pi - \frac{\pi}{4}$  (۳)     
  $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$  (۲)     
  $\frac{k\pi}{2}$  (۱)

پاسخ: گزینه‌ی «۲»

از این جا به بعد را می‌توان به تجزیه هم‌اراد:

$\frac{3\sin x - 4\sin^3 x}{\sin x} = 2\cos^2 x$

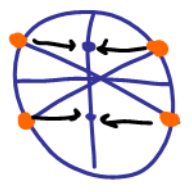
حالا تفکیک:

$3 - 4\sin^2 x = 2(1 - \sin^2 x)$

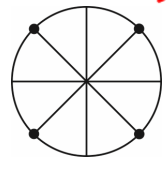
$3 - 4\sin^2 x = 2 - 2\sin^2 x \Rightarrow -2\sin^2 x = -1 \Rightarrow \sin^2 x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin^2 x = (\frac{\sqrt{2}}{2})^2$

$\Rightarrow \sin^2 x = (\sin \frac{\pi}{4})^2 \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{4}$

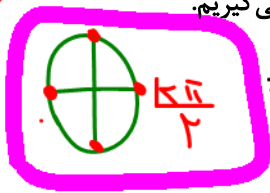
$\sin x = \pm \sqrt{\frac{1}{2}} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$



طراح جفتش رو توی گزینه‌ها گذاشته، ولی از روی دایره تصمیم می‌گیریم.

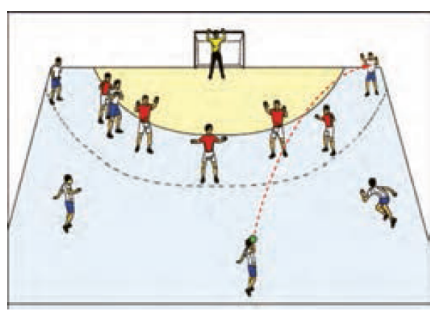


$x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$



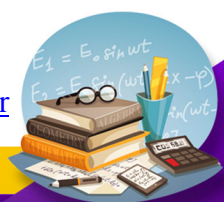
بدان:  $k\pi \pm \frac{\pi}{4}$  همان  $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$  است.

گزینه‌ی «۲» درسته. ضمناً چون این جواب‌ها منخرج کسر اصلی رو صفر نمی‌کنن پس اوکیه!



مثال ۱۰۹: یک بازیکن هندبال توپ را با سرعت  $16 \text{ m/s}$  برای هم‌تیمی خود که در  $12/8$  متری او قرار دارد پرتاب می‌کند. اگر رابطه بین سرعت توپ  $v$  (برحسب متر بر ثانیه)، مسافت طی شده افقی  $d$  (برحسب متر) و زاویه‌ی پرتاب  $\theta$  به صورت زیر باشد، آن‌گاه زاویه‌ی پرتاب توپ چه قدر بوده است؟

$d = \frac{v^2 \sin^2 \theta}{10 = g}$



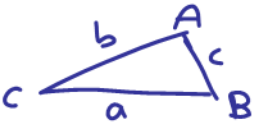
$\theta = 75^\circ \leftarrow 2\theta = 150^\circ$    $\rightarrow \theta = 15^\circ$

از رابطه‌ی داده شده به دست می‌آید:

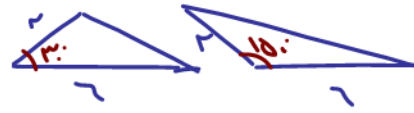
$$12/8 = \frac{(16)^2 \sin 2\theta}{10} \Rightarrow \sin 2\theta = \frac{12/8 \times 10}{256} \Rightarrow \sin 2\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} 2\theta = 2k\pi + \frac{\pi}{6} & k \in \mathbb{Z} \\ 2\theta = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{6} & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

با توجه به شکل، جواب  $\theta = \frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}$  قابل قبول می‌باشد.  $75^\circ$  و  $15^\circ = \theta$

مثال ۱۱۰: مثلثی با مساحت ۳ سانتی متر مربع مفروض است. اگر اندازه‌ی دو ضلع آن به ترتیب ۲ و ۶ سانتی متر باشند، آن گاه چند مثلث با این خاصیت‌ها می‌توان ساخت؟ **۲ مثلث**

$S = \frac{1}{2} ab \sin \hat{C}$  

$3 = \frac{1}{2} (2)(6) \sin \hat{C} \rightarrow \sin \hat{C} = \frac{1}{2}$



یادت باشه: حواست به ریشه‌ی منفرجه باشه.

مثال ۱۱۱: معادله‌ی زیر را حل کنید.

$\frac{1 + \sin x}{1 + \cos 2x} = \frac{1}{x}$  **طریقین دپین**  $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$   
 $x - \sin^2 x = 1 + \sin x$

$\sin^2 x + \sin x - \sin x = 1 + \sin x$   
 $\sin^2 x + \sin x = 1 + \sin x$   
 $\sin^2 x = 1$   
 $\sin x = 1$   
 $\sin x = -1$

$\sin x = 1 \rightarrow x = k\pi$   
 $\sin x = -1 \rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$

زیرا الحنج کمر اصغری کنه.

**دوره تناوب**

f متناوب است اگر با افزودن یک مقدار ناصفر به x عرض (y) تابع عوض نشود و دو شرط زیر داشته باشد:

- ۱)  $\forall x \in D_f \Rightarrow x + T \in D_f$
- ۲)  $f(x + T) = f(x) \quad T \neq 0$

مثلاً  $\sin \frac{\pi}{6}$  با  $\sin(\frac{\pi}{6} + 2\pi)$  برابر و هر دو  $\frac{1}{2}$  هستند. در حالی که به x ،  $2\pi = 6/28 \dots$  افزوده‌ایم.

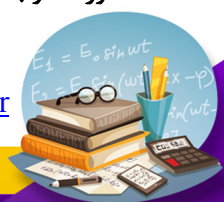
هر مضربی از دوره‌ی تناوب، خود دوره‌ی تناوب است که کوچک‌ترین مقدار مثبت دوره تناوب را، دوره تناوب اصلی می‌گوییم.  
 تذکر: تابع ثابت، متناوب است و دوره تناوبش هر عدد حقیقی است ولی چون کوچک‌ترین عدد حقیقی وجود ندارد، کوچک‌ترین دوره تناوب ندارد.

۱) دوره تناوب f(x) اگر T باشد، آن گاه دوره‌ی تناوب  $af(x+b)+k$  نیز همان T هست.

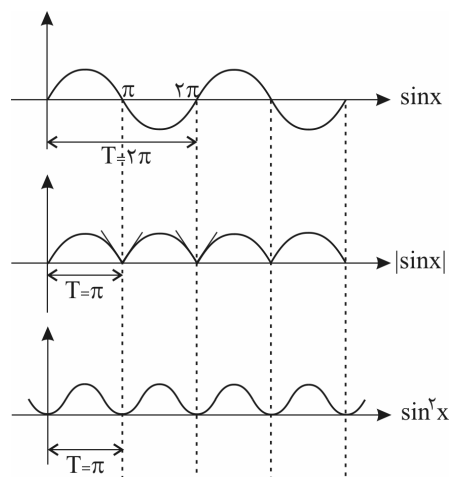
۲) تابع متناوب، یک به یک و معکوس پذیر نیست.

۳) دوره تناوب  $\sin^{2k+1} ax$  و  $\cos^{2k+1} ax$  برابر است با:  $T = \frac{2\pi}{|a|}$

دوره تناوب  $\tan ax$  و  $\cot ax$  به هر توان (چه زوج، چه فرد) و  $|\tan ax|$  و  $|\cot ax|$  به هر توان  $T = \frac{\pi}{|a|}$  است.



$$\left. \begin{array}{l} \sin^{2k} ax \\ \cos^{2k} ax \\ |\sin ax| \text{ (توان چه زوج و چه فرد باشد)} \\ |\cos ax| \text{ (توان چه زوج و چه فرد باشد)} \end{array} \right\} T = \frac{\pi}{|\alpha|}$$



تست ۱۱۲: اگر دوره تناوب تابع  $f(x) = 2 \cos(mx + \frac{m}{\pi})$  برابر  $\frac{4}{3}$  باشد، مقدار  $f(0)$  کدام است؟ ( $m > 0$ )

- (۱)  $-\sqrt{3}$       (۲)  $\sqrt{3}$       (۳)  $\sqrt{2}$       (۴)  $-\sqrt{2}$

$$T = \frac{2\pi}{|m|} = \frac{4}{3} \rightarrow m = \frac{3(2\pi)}{4} = \frac{3\pi}{2}$$

$$f(x) = 2 \cos\left(\frac{3\pi}{2}x + \frac{3\pi}{2}\right)$$

$$f(0) = 2 \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2}$$

تست ۱۱۳: دوره تناوب تابع  $f(x) = \frac{\cos 2x \cos 4x}{\tan x + \cot x}$  کدام است؟

- (۱)  $\pi$       (۲)  $\frac{\pi}{2}$       (۳)  $\frac{\pi}{4}$       (۴)  $\frac{\pi}{8}$

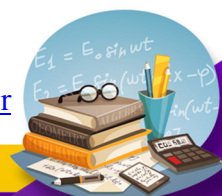
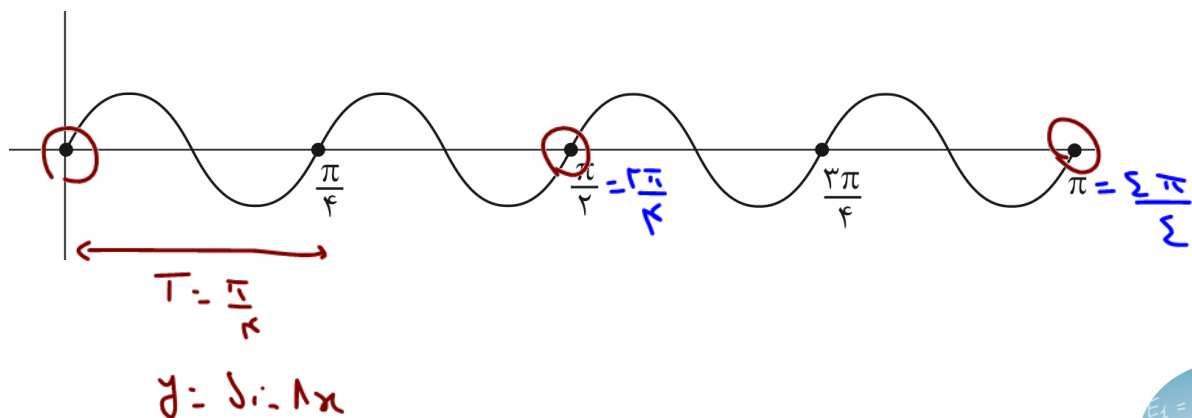
$$f(x) = \frac{\cos 2x \cos 4x}{\sin 2x} = \frac{\sin 2x \cos 2x \cos 4x}{2} = \frac{1}{2} \sin 4x \cos 4x = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \sin 8x = \frac{1}{4} \sin 8x$$

پاسخ:

$$T = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$$

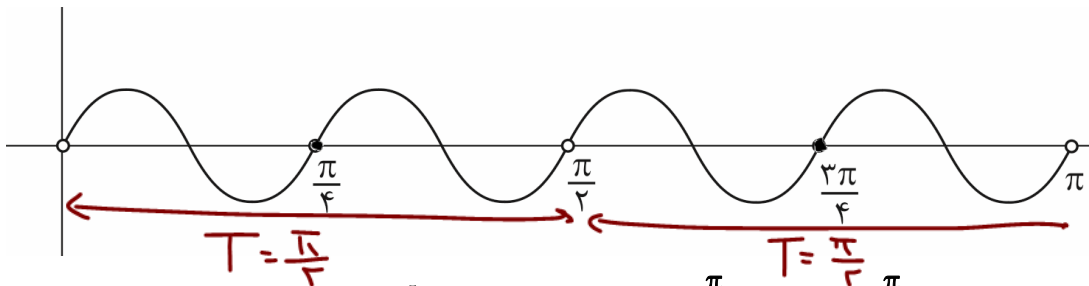
سجی تا ثبوت دوره تناوب

بنابراین به این شکل می‌رسیم:





ولی باید توجه کنید که به علت حضور  $\tan x$  و  $\cot x$  در مخرج کسر  $x \neq \frac{k\pi}{\pi}$  می باشد. پس باید این نقاط توخالی باشند:



اکنون از شکل مشخص است که  $T = \frac{\pi}{2}$  است نه  $\frac{\pi}{4}$ . جالب این است که در خود آزمون، این سوال به اشتباه پاسخ داده شده است. گزینه (۲) صحیح است.

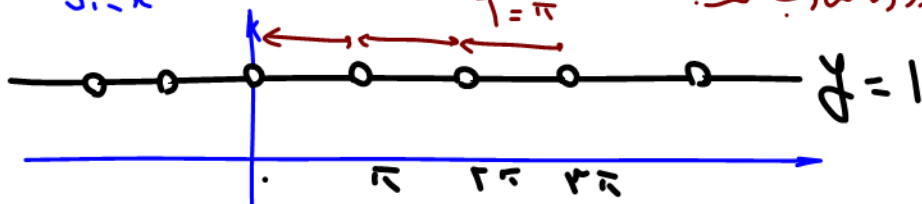
تست ۱۱۴: دوره تناوب  $f(x) = \frac{\sin x}{\sin x}$  کدام است؟

$y = \frac{\sin(-x)}{\sin x} = 1$   $\sin(-x) = 0 \Rightarrow x = k\pi$

$2\pi$  (۴)  $\frac{3\pi}{2}$  (۳)  $\pi$  (۲)  $\frac{\pi}{2}$  (۱)

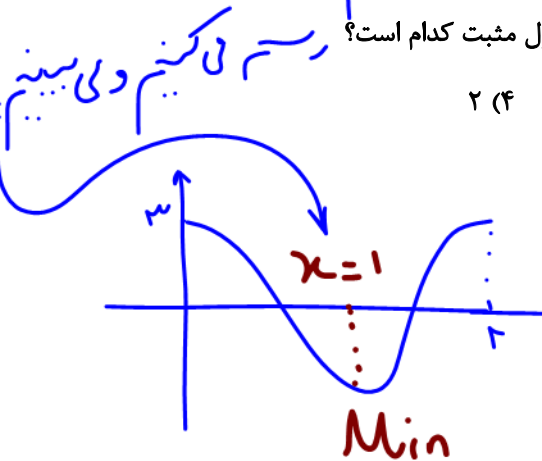
$T = \pi$

می بینیم فاصله ۲ حوزه متوالی دوره تناوب است.



تست ۱۱۵: اگر دوره تناوب تابع  $y = 3 \cos ax$  برابر ۲ باشد، اولین نقطه min این تابع با طول مثبت کدام است؟

- $2$  (۴)  $\frac{3}{2}$  (۳)  $\frac{1}{2}$  (۲) **۱** (۱)



تست ۱۱۶: تابع  $y = -\frac{1}{3} \sin(3\pi x)$  در بازه  $[-\frac{1}{3}, 1]$  چند بار بیشترین مقدار را دارد؟

$1 - (-\frac{1}{3}) = \frac{4}{3}$   $T = \frac{2\pi}{3\pi} = \frac{2}{3}$

$4$  (۴)  $3$  (۳) **۲** (۲)  $1$  (۱)

طول بازه: انتهای منهای ابتدا:

تابع سینوس در یک دوره تناوب خودش یک بار به Max می رسد:

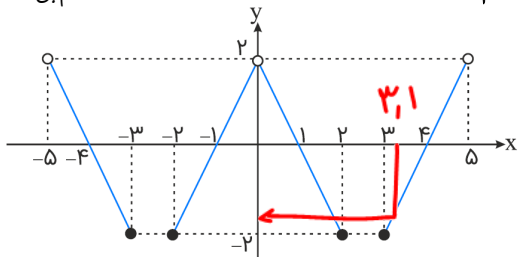
بایده در بازه  $[-\frac{1}{3}, 1]$  که  $\frac{3}{2}$  است تا  $\frac{2}{3}$  چندتا  $\frac{2}{3}$  است جا میشه؟

برای تابع کامل داریم  $\rightarrow \frac{4}{\frac{2}{3}} = 2 \times 2 = 4$



قلم پی ۹۸

تست ۱۱۷: قسمتی از نمودار تابع متناوب  $y = f(x)$  به شکل زیر است. کدام  $f(128/1)$  است؟



بیستم تابع هر ۵ سانتیه بار  
دوره تکرار میشه  $T=5$

- (۱) ۱/۸
- (۲) -۱/۸
- (۳) -۰/۲
- (۴) تعریف نشده

نکته: در توابع متناوب می توان از هر مغزبی از دوره تناوب صرف نظر کرد.

$f(x+nT) = f(x)$

$f(128,1) = 128 + 3,1 = 25(T=5) + 3,1 = f(3,1) = -1,1$

قلم ریاضی ۹۸

تست ۱۱۸: دوره تناوب تابع با ضابطه  $f(x) = \tan(\pi x) - \cot(\pi x)$  کدام است؟

- (۱) ۱/۲
- (۲) ۱
- (۳) -۱/۲
- (۴) -۱

$\cot \theta - \tan \theta = 2 \cot(2\theta)$

نکته: برای یافتن T تا حد امکان ساده کنید.

$f(x) = \tan(\pi x) - \cot(\pi x) = 2 \cot(2\pi x)$

$y = \cot(\pi x)$   
 $T = \frac{\pi}{|\pi|} = \frac{\pi}{1}$   
اندازه ایس

$T = \frac{\pi}{2\pi} = \frac{1}{2}$

قلم پی ریاضی ۹۹

تست ۱۱۹: دوره تناوب تابع  $y = \sin x \sqrt{1 + \cos 2x}$  کدام است؟ ساده کن.

- (۱)  $\pi$
- (۲)  $\frac{\pi}{2}$
- (۳)  $\frac{3\pi}{2}$
- (۴)  $2\pi$

$f(x) = \sin x \sqrt{2 \cos^2 x} = \sqrt{2} \sin x |\cos x|$

پاسخ: در همه گزینه ها چه می بینیم که یکی  $f(x) = f(x+\pi)$

(۱) گزینه:  $f(x+\pi) = -\sqrt{2} \sin x |\cos x| \neq f(x)$

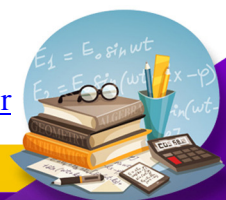
(۲) گزینه:  $f(x+\frac{\pi}{2}) = \sqrt{2} \cos x |\sin x| \neq f(x)$

(۳) گزینه:  $f(x+\frac{3\pi}{2}) = -\sqrt{2} \cos x |\sin x| \neq f(x)$

(۴) گزینه:  $f(x+2\pi) = \sqrt{2} \sin x |\cos x| = f(x)$

دقت کنید کوچکترین T که رابطه را برقرار کند در رشت است.

$f(x+2\pi) = \sqrt{2} \sin(x+2\pi) |\cos(x+2\pi)| = \sqrt{2} \sin x |\cos x| = f(x)$



توابع مثلثاتی

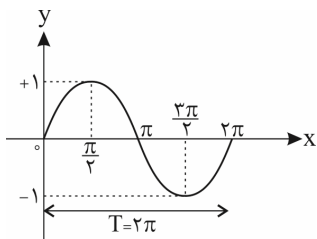
$y = \sin x$

(۱) دامنه‌ی این تابع  $\mathbb{R}$  است.  $(\sin x)$  به ازای هر  $x \in \mathbb{R}$  جواب دارد.

(۲) برد این تابع  $[-1, 1]$  است. (چون  $-1 \leq \sin x \leq 1$ )

(۳) از آن جایی که کمان  $(\frac{\gamma k \pi}{\gamma} + \alpha)$  از لحاظ موقعیت در دایره‌ی مثلثاتی با کمان  $\alpha$  تفاوتی ندارد، رفتار تابع  $y = \sin x$  را در  $[0, 2\pi]$  مضارب زوج  $\pi$

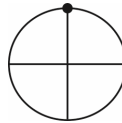
یعنی یک دور از دایره‌ی مثلثاتی بررسی و نمودار آن را رسم کرده، سپس  $2\pi$  تا  $2\pi$  تا تکرارش می‌کنیم. نمودار  $y = \sin x$  در  $[0, 2\pi]$  به کمک جدول زیر به صورتی که مشاهده می‌شود رسم می‌گردد:



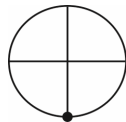
x	0	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$	$2\pi$
y	0	1	0	-1	0

(دوره‌ی تناوب اصلی این تابع  $T = 2\pi$  می‌باشد.)

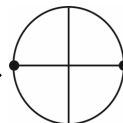
(۴) ماکزیمم (بیشینه) مقدار تابع  $y = \sin x$  برابر ۱ است که در  $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$  یعنی کمان  $(\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{9\pi}{2})$  یا  $(\frac{-7\pi}{2}, \frac{-3\pi}{2})$  رخ می‌دهد.



(۵) مینیمم (کمینه) مقدار تابع  $y = \sin x$  برابر -۱ است که در  $x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$  یعنی کمان  $(\frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{2})$  یا  $(\frac{-5\pi}{2}, \frac{-\pi}{2})$  رخ می‌دهد.



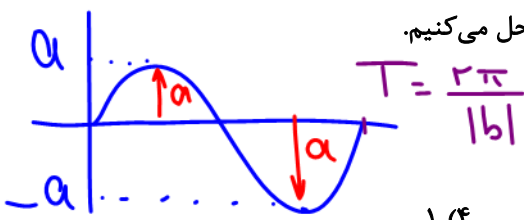
(۶) تابع  $y = \sin x$  در  $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$  (مثل  $0, \pm\pi, \pm 2\pi, \dots$ ) با محور طول‌ها برخورد می‌کند، یعنی مقدار آن صفر می‌شود.



در حالت کلی، در تابع  $y = a \sin(bx + c) + d$  :  $\alpha = \frac{T_{max} - T_{min}}{2} = \frac{Max - min}{2}$

(۱) مقدار ماکزیمم تابع برابر  $|a| + d$  و مقدار مینیمم آن  $-|a| + d$  می‌باشد.

(۲) برای یافتن نقطه‌ی برخورد نمودار با محور  $y$ ها، در ضابطه‌ی تابع  $x = 0$  قرار می‌دهیم و  $y$  را به دست می‌آوریم. برای یافتن نقاط برخورد نمودار با محور  $x$ ها نیز در ضابطه‌ی تابع  $y = 0$  قرار می‌دهیم و معادله‌ی مثلثاتی حاصل را حل می‌کنیم.



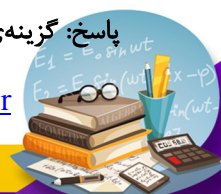
(۳) دوره‌ی تناوب برابر  $T = \frac{2\pi}{|b|}$  است.

تست ۱۲: اگر بیشترین مقدار تابع  $y = 2 \sin 5x - 3c$  برابر  $(-7)$  باشد،  $c$  کدام است؟

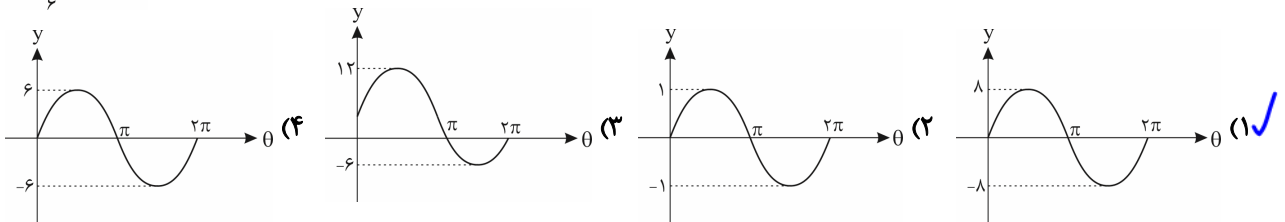
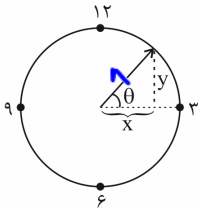
- ۱ (۴)
- ۲ (۲)
- ۳ (۱)
- ۴ (۳)
- ۵ (۵)

$y_{max} = 2 - 3c = -7 \Rightarrow -3c = -9 \Rightarrow c = 3$

پاسخ: گزینه‌ی «۱»



تست ۱۲۱: طول عقربه‌ی دقیقه‌شمار یک ساعت ۸ سانتی‌متر است و این عقربه با جهت مثبت محور افقی زاویه‌ی  $\theta$  می‌سازد. با توجه به شکل زیر، نمودار تابع  $y$  برحسب  $\theta$  کدام است؟ (  $\theta$  برحسب رادیان است.)



پاسخ: گزینه‌ی «۱» - طبق تعریف نسبت مثلثاتی سینوس در مثلث قائم‌الزاویه‌ی موجود داریم:

$$\sin \theta = \frac{y}{r} \Rightarrow \sin \theta = \frac{y}{8} \Rightarrow y = 8 \sin \theta \Rightarrow \begin{cases} T = 2\pi \\ y_{\max} = 8 \\ y_{\min} = -8 \end{cases}$$

مشخصه که بیشترین مقدار (max) تابع  $y = 8 \sin \theta$  برابر ۸ و کم‌ترین مقدار این تابع -۸ و دوره‌ی تناوبش هم  $T = 2\pi$  هست. پس گزینه‌ی «۱» درسته.

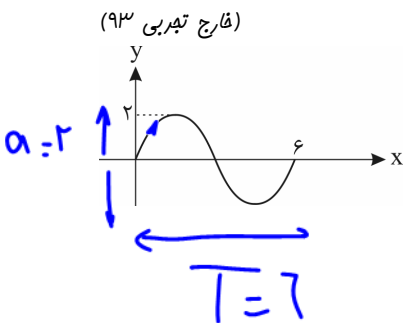
چیز مهم!

حالت ۱:  $y = a \sin(bx)$   $a \times b > 0$ . در عمل بر خورد با محورهای مخالفه. مثبت

حالت ۲:  $y = a \sin(bx)$   $a \times b < 0$ . در عمل بر خورد با محورهای نهمه. منی

Handwritten notes:  $y = a \sin(bx)$ ,  $a \times b$ , مثبت, منی, در عمل بر خورد با محورهای مخالفه, در عمل بر خورد با محورهای نهمه.

تست ۱۲۲: شکل روبه‌رو قسمتی از نمودار تابع  $y = a \sin(b\pi x)$  است.  $a + b$  کدام است؟

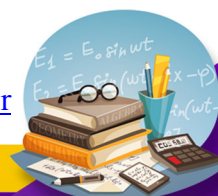


Handwritten solution:

$(a=2)(b\pi)$

$T = \frac{2\pi}{|b\pi|} = \frac{2}{|b|} = 7 \rightarrow b = \frac{1}{3} \rightarrow a+b = \frac{7}{3}$

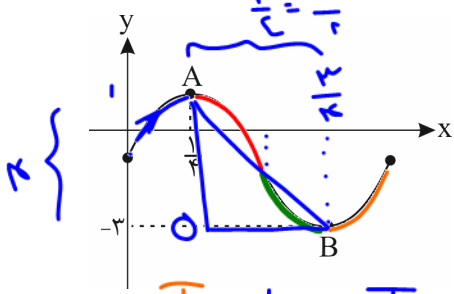
Other notes:  $\frac{5}{3}$  (2),  $\frac{8}{3}$  (24),  $\frac{4}{3}$  (1),  $\frac{7}{3}$  (3)



فینش عوارث :  $AB = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + (2)^2} = \frac{1}{2} + 4 = \frac{9}{2} = \frac{\sqrt{81}}{2}$

در  $\triangle OAB$

تست ۱۲۳: قسمتی از نمودار تابع  $f(x) = 2 \sin b\pi x + c$  به صورت زیر رسم شده است. طول پاره خط AB کدام است؟



می بینیم :  $y_{min} = -3 = -|2| + c$   
 $-1 = c$   
 $y = 2 \sin(b\pi x) - 1$

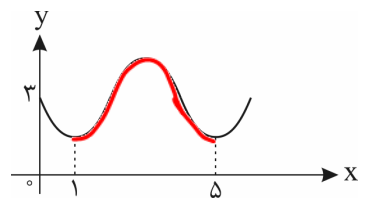
- (۱)  $\frac{\sqrt{17}}{2}$
- (۲)  $\frac{\sqrt{65}}{2}$
- (۳)  $\frac{\sqrt{17}}{4}$
- (۴)  $\frac{\sqrt{65}}{4}$

یا  $b = 2$  یا  $b = -2$   
 $\frac{1}{k} = \frac{1}{\pi} \rightarrow T = 1 = \frac{2\pi}{|b\pi|} = \frac{2}{|b|} \rightarrow |b| = 2 \rightarrow b = -2$

می بینیم نمودار در محل برخورد تابع با محور y ها معلومیه لذا  $y = 2 \sin(b\pi x) + c$   
 $A\left(\frac{1}{2}, 1\right)$   
 $B\left(\frac{3}{2}, -3\right)$   
 $b = 2 \rightarrow y = 2 \sin(2\pi x) - 1$

(تقریبی ۹۳)

تست ۱۲۴: شکل روبه رو قسمتی از نمودار تابع  $y = a + \sin(b\pi x)$  است. مقدار y در نقطه  $x = \frac{25}{3}$  کدام است؟



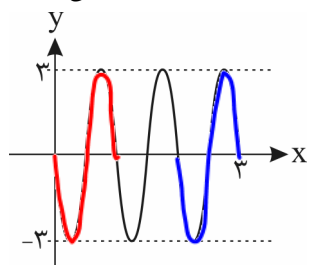
- (۱) ۲
- (۲) ۲/۵
- (۳) ۲
- (۴) ۲/۵

$f(1,0) = a + \sin(0) = a = 3$

$T = 8 = \frac{2\pi}{|b\pi|} = \frac{2}{|b|} \rightarrow |b| = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \rightarrow b = \frac{1}{4}$  یا  $b = -\frac{1}{4}$   
 نزدیکه :  $b < 0$   
 $b = -\frac{1}{4}$   
 $y = 3 + \sin\left(-\frac{\pi}{4}x\right) \rightarrow f\left(x = \frac{25}{3}\right) = 3 + \sin\left(-\frac{25\pi}{12}\right) = 3 - \sin\left(\frac{25\pi}{12} + \frac{\pi}{4}\right) = 3 - 1.5 = 1.5$

(فارج ریاضی ۹۲)

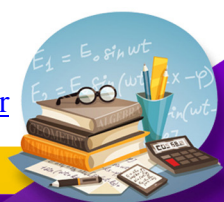
تست ۱۲۵: شکل روبه رو، قسمتی از نمودار تابع  $y = a \sin(b\pi x)$  است. کدام است a.b



- (۱) -۶
- (۲) -۳
- (۳) ۴/۵
- (۴) ۶

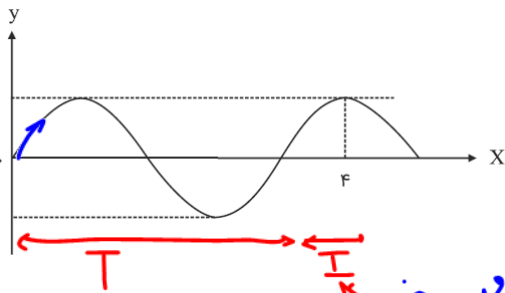
می بینیم شکل در محل برخورد با محور y ها نزولیه پس  $a(b\pi) < 0$  پس  $a = 3$  و  $ab < 0$

$3T = 3 \rightarrow T = 1 = \frac{2\pi}{|b\pi|} = \frac{2}{|b|} \rightarrow |b| = 2 \rightarrow b = -2$  یا  $b = 2$   
 $a = \frac{Max - Min}{2} = \frac{3 - (-3)}{2} = 3 = a$   
 $ab < 0$   
 $3(-2) = -6$



(تخمینی ۹۴)

تست ۱۲۶: قسمتی از نمودار تابع  $y = a \cos\left(\left(\frac{3}{4} + bx\right)\pi\right)$  به صورت زیر است. آن گاه کدام گزینه صحیح است؟



- (۱)  $a < 0, b = \frac{5}{8}$
- (۲)  $a < 0, b = -\frac{5}{8}$
- (۳)  $a > 0, b = -\frac{5}{16}$
- (۴)  $a > 0, b = \frac{5}{16}$

$y = a \cos\left(\frac{3\pi}{4} + b\pi x\right)$



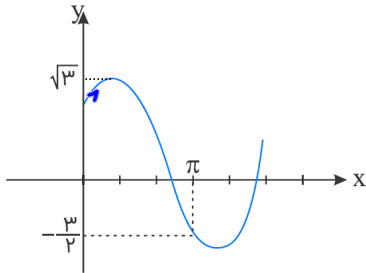
$y = a \sin(b\pi x)$  می بینیم در کل بر خورد با  $y$  ها معلومیه پس  $a(b\pi) >$

$ab >$   $T + \frac{T}{4} = \frac{5T}{4} = \pi \rightarrow T = \frac{4\pi}{5} = \frac{2\pi}{|b\pi|} = \frac{2}{|b|} \rightarrow |b| = \frac{10}{16} = \frac{5}{8}$

$\left\{ \begin{array}{l} b = \frac{5}{8} \text{ یا } -\frac{5}{8} \\ ab > \end{array} \right.$

(تقریبی ۹۸)

تست ۱۲۷: شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع  $y = a + b \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$  است. کدام است  $b$ ؟



می بینیم در  $x = \pi$  مقدار تابع  $-\frac{3}{2}$  شده:

$-\frac{3}{2} = a + b \sin\left(\pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}\right)$

$-\frac{3}{2} = a + b\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$



- (۱)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$
- (۲)  $\frac{3}{2}$
- (۳)  $\sqrt{3}$  ✓
- (۴)  $2$

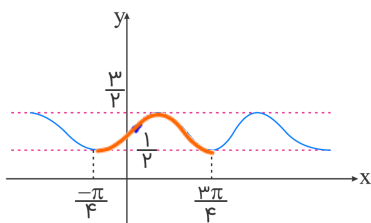
$\text{Max } x = a + |b| = \sqrt{3}$

$b(1) >$  در کل بر خورد با  $y$  ها معلومیه  $\left\{ \begin{array}{l} a + b = \sqrt{3} \\ a + b\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2} \end{array} \right.$

$b\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3}\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \rightarrow b = \sqrt{3}$

(ریاضی ۹۸)

تست ۱۲۸: شکل زیر، نمودار تابع  $y = 1 + a \sin bx \cos bx$  است. کدام است  $a + b$ ؟



$T = \frac{2\pi}{\pi} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \pi$

$y = 1 + \frac{1}{2} \sin(2bx)$

$T = \frac{2\pi}{|2b|} = \frac{\pi}{|b|} = \pi \rightarrow |b| = 1 \rightarrow b = 1 \text{ یا } -1$

$y = 1 + \left(\frac{a}{2}\right) \sin(2bx)$

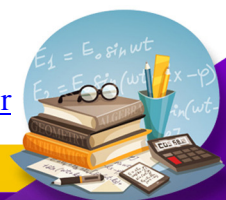
می بینیم در کل بر خورد با  $y$  ها معلومیه  $\left(\frac{a}{2}\right)(2b) >$

$ab >$   $\frac{\text{Max} - \text{Min}}{2} = \frac{a}{2} \rightarrow \frac{3}{2} - \left(\frac{1}{2}\right) = 1 = a$

$a + b = 2$

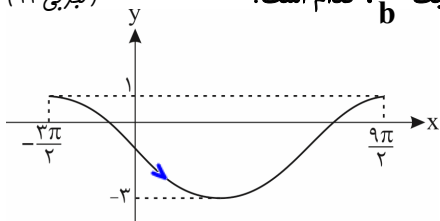
$\frac{ab >}{a = 1} b > \rightarrow b = 1$

- (۱)  $1$
- (۲)  $\frac{3}{2}$
- (۳)  $2$  ✓
- (۴)  $3$



(تجربی ۹۹)

تست ۱۲۹: شکل زیر، نمودار تابع  $y = a \sin(bx) + c$  را در یک تناوب، نشان می‌دهد. نسبت  $\frac{a}{b}$ ، کدام است؟



تابع در عمل بر ضرور با ی‌ها  
زدلبه‌ها  $a < b$

(۱) -۲

(۲) -۳

(۳) -۴

(۴) -۶

$$T = \frac{9\pi}{2} - (-\frac{3\pi}{2}) = \frac{12\pi}{2} = 6\pi = \frac{2\pi}{|b|} \rightarrow |b| = \frac{1}{3} \rightarrow b = \frac{1}{3} \text{ یا } -\frac{1}{3}$$

$$\frac{\text{Max} - \text{Min}}{2} = a \rightarrow \frac{1 - (-3)}{2} = 2 = a \quad a < b \quad 2(-\frac{1}{3}) < \frac{1}{3} = -\frac{2}{3} < \frac{1}{3}$$

**y = cos x**

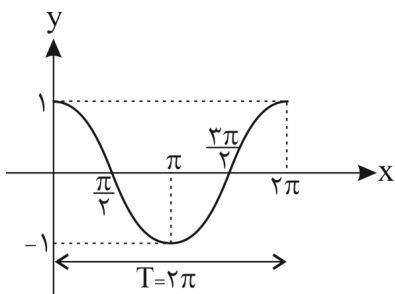
(۱) دامنه‌ی این تابع  $\mathbb{R}$  است ( $\cos x$  به ازای هر  $x \in \mathbb{R}$  جواب دارد).

(۲) برد این تابع  $[-1, 1]$  است (چون  $-1 \leq \cos x \leq 1$ ).

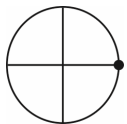
(۳) نمودار  $y = \cos x$  را نیز مانند  $y = \sin x$  در  $[0, 2\pi]$  به کمک جدول زیر رسم کرده، سپس با توجه به همان خاصیت کمان

( $2k\pi + \alpha$ ) و این که در واقع دوره‌ی تناوب اصلی  $y = \cos x$  هم  $T = 2\pi$  است، تا  $2\pi$  تا تکرارش می‌کنیم.

مضارب  
 $\pi$  زوج



x	0	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$	$2\pi$
y	1	0	-1	0	1

(۴) ماکزیمم (بیشینه) مقدار تابع  $y = \cos x$  برابر ۱ است که در  $x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$  یعنی کمان  (مثل  $0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots$ ) رخ می‌دهد.

(۵) مینیمم (کمینه) مقدار تابع  $y = \cos x$  برابر -۱ است که در  $x = (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}$  یعنی کمان  (مثل  $\pi, \pm 3\pi, \dots$ ) رخ می‌دهد.

(۶) تابع  $y = \cos x$  در  $x = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$  (مثل  $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \dots$ ) با محور طول‌ها برخورد می‌کند، یعنی مقدار آن صفر می‌شود.

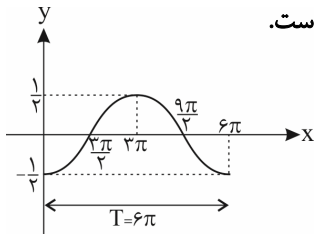
مقدار آن صفر می‌شود.



قوانین انتقال (مشابه آنچه در قسمت الف) گفته شد) در مورد  $y = \cos x$  نیز برقرار است.

تابع  $y = a \cos bx$  دارای دوره‌ی تناوب اصلی  $T = \frac{2\pi}{|b|}$ ، مقدار ماکزیمم  $|a|$  و مقدار مینیمم  $-|a|$  می‌باشد. مثلاً در

$y = -\frac{1}{3} \cos(-\frac{x}{3})$  دوره‌ی تناوب اصلی  $\frac{2\pi}{|-\frac{1}{3}|} = 6\pi$ ، ماکزیمم تابع برابر  $\frac{1}{3}$  و مینیمم تابع برابر  $-\frac{1}{3}$  است.



(از آنجایی که  $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$ ، همان  $y = -\frac{1}{3} \cos \frac{x}{3}$  می‌باشد.)

تذکر: در واقع در رسم  $y = a \cos bx$ ، نمودار  $y = \cos x$  با ضریب  $\frac{1}{|b|}$  دچار انقباض یا انبساط طولی (افقی) و با ضریب  $a$  دچار

انبساط یا انقباض عرضی (عمودی) می‌شود. (علامت  $b$  تأثیری روی رسم نمودار تابع کسینوس ندارد، چون کسینوس منفی خور است.)

$$a = \frac{\text{Max} - \text{Min}}{2}$$

حالت کلی، در تابع  $y = a \cos(bx + c) + d$

(۱) مقدار ماکزیمم تابع برابر  $|a| + d$  و مقدار مینیمم آن  $-|a| + d$  است.

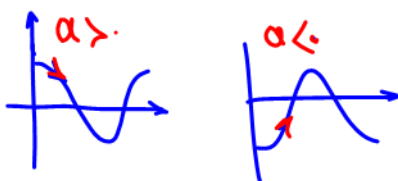
(۲) برای یافتن نقطه‌ی برخورد نمودار با محور  $y$ ها، در ضابطه‌ی تابع  $x = 0$  قرار می‌دهیم و  $y$  را به دست می‌آوریم. برای یافتن نقاط برخورد

$$y = a \cos(bx)$$

نمودار با محور  $x$ ها نیز در ضابطه‌ی تابع  $y = 0$  را قرار می‌دهیم و معادله‌ی مثلثاتی حاصل را حل می‌کنیم.

(۳) دوره‌ی تناوب برابر  $T = \frac{2\pi}{|b|}$  است.

چون کسینوس منحنی خوره طایفه  $\pm$  با - باشد:



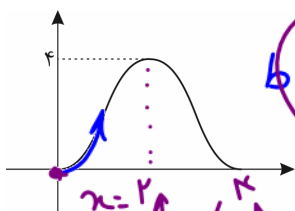
تست ۱۳: اگر کم‌ترین مقدار تابع  $h(x) = -a \cos \frac{\pi x}{3} + 1$  برابر  $\frac{2}{3}$  باشد، مقدار  $a$  کدام می‌تواند باشد؟

- (۱)  $\frac{2}{3}$       (۲)  $-\frac{3}{2}$       (۳)  $\frac{3}{2}$       (۴)  $-\frac{1}{3}$

پاسخ: گزینه‌ی «۴»

(در میان گزینه‌ها  $(-\frac{1}{3})$  وجود دارد.)  $a = \pm \frac{1}{3} \Rightarrow |a| = \frac{1}{3} \Rightarrow -|a| = -\frac{1}{3} \Rightarrow -|a| + 1 = \frac{2}{3} \Rightarrow -|a| = \frac{2}{3} - 1 \Rightarrow -|a| = -\frac{1}{3} \Rightarrow |a| = \frac{1}{3} \Rightarrow a = \pm \frac{1}{3}$

تست ۱۳۱: شکل زیر نمودار تابع  $y = a + b \cos(\frac{\pi}{4}x)$ ، در بازه‌ی  $(0, 4)$  است.  $b$  کدام است؟ (ریاضی ۹۷)



بی‌بیشتر در محل برخورد با  $y$ ها معادله‌ی پس  $b < 0$

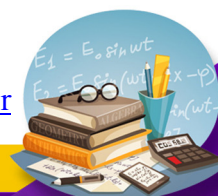
$$f(2) = 2 \rightarrow a + b \cos(\frac{\pi}{4}(2) = \pi) = 2$$

$$\boxed{a - b = 2}$$

$$f(0) = 0 \rightarrow a + b \cos(0) = 0 \rightarrow \boxed{a + b = 0}$$

$$\begin{cases} a = -b \\ a - b = 2 \end{cases} \rightarrow -b - b = 2 \rightarrow -2b = 2 \rightarrow b = -1$$

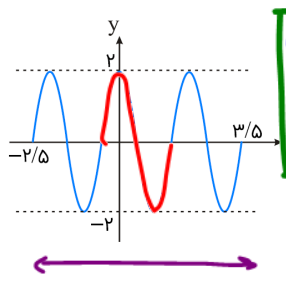
- (۱) -۲  
(۲) -۱  
(۳) ۱  
(۴) ۲





فردول توان شكن  $\begin{cases} \sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2} \\ \cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \end{cases}$

(ریاضی ۹۲، قلم‌چی ۹۸)



$a = \frac{\text{Max} - \text{Min}}{2}$   
 $a = \frac{2 - (-2)}{2} = 2$

$y = a \sin(\frac{\pi}{T} + \pi b x)$

$y = a \cos(b \pi x)$

$T = \frac{2\pi}{|b\pi|} = \frac{2}{|b|} = 2 \rightarrow |b| = 1$

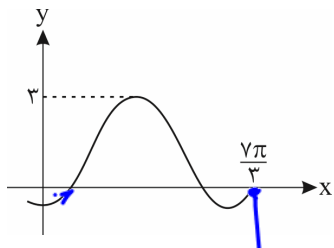
- ۲ (۱)
  - ۲/۵ (۲)
  - ۳ (۳)
  - ۳/۵ (۴)
- b = ± 1**  
 هم رو دارند چون کینوس سنی خواهد!

$3T = 2,5 - (-2,5) = 7 \rightarrow T = 2$

می بینم در محل برخورد با y ها نزدیکه پس  
 $ab = 2(+1) = \pm 2 \rightarrow$  نه اونقدره ها

تست ۱۳۳: شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع با ضابطه  $y = a + b \sin(\frac{\pi}{3} + x)$  است. مقدار b کدام است؟

(تجربی ۹۹)



$y = a + b \cos x$  می بینم Max تابع ۳ هست

$a + |b| = 3$   
 $a - b = 3$   
 می بینم در محل برخورد با y ها معکوبه پس  $b < 0$

- ۲ (۱)
- ۱ (۲)
- ۱ (۳)
- ۲ (۴)

$f(\frac{7\pi}{3}) = a + b \cos(\frac{7\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi + \pi}{3}) = a + \frac{b}{2} = 3$

$\begin{cases} a - b = 3 \\ a = -\frac{b}{2} \end{cases} \rightarrow -\frac{b}{2} - b = 3 \rightarrow -\frac{3}{2}b = 3 \rightarrow \boxed{b = -2}$

تست ۱۳۴: در تابع  $f(x) = -4a \sin^2 2x + \cos 4x + 2a + 3$  حدود a کدام باشد تا نمودار آن همواره زیر خط  $y = 7$  قرار گیرد؟

(قلم‌چی ریاضی ۹۹)

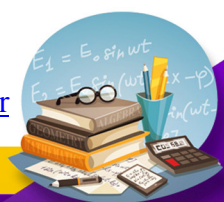
فردول توان شكن  $\sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$

- $\frac{3}{2} < a < \frac{5}{2}$  (۴)
- $-\frac{5}{2} < a < -\frac{3}{2}$  (۳)
- $-\frac{3}{2} < a < \frac{5}{2}$  (۲)
- $-\frac{5}{2} < a < \frac{3}{2}$  (۱)

$-4a(\frac{1 - \cos 4x}{2}) + \cos 4x + 2a + 3 < 7$

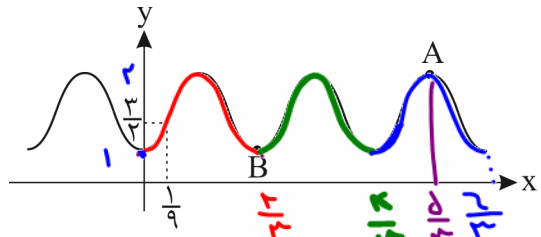
$2a \cos 4x - 2a + \cos 4x + 2a - 4 < 4 \rightarrow \cos 4x (2a + 1) < 4$

همه می دانیم:  $\cos x > -1$  یا  $\cos x < 1$  پس  $\begin{cases} 2a + 1 > 0 : \cos(4x) < \frac{4}{2a+1} = 1 \rightarrow 4 = 2a + 1 \rightarrow a = \frac{3}{2} \\ 2a + 1 < 0 : \cos(4x) > \frac{4}{2a+1} = -1 \rightarrow 4 = -2a - 1 \rightarrow a = -\frac{5}{2} \end{cases}$



فی رابنیم:  $1 \leq \sin^2(x) \leq 2$   
 $1 \leq 1 + \sin^2(x) \leq 2 = \text{Max}$

تست ۱۳۵: اگر نمودار تابع  $f(x) = 1 + a \sin^2(\frac{3\pi}{2}x)$  به صورت زیر باشد، شیب خط گذرنده از نقاط A و B کدام است؟



- (۱) ۱
- (۲) ۳/۲
- (۳) ۲
- (۴) ۵/۲

نکته: دوره تناوب  $y = \sin^2 ax$  به صورت  $\frac{\pi}{|a|}$  است.   
 بس بر دوره تناوب  $T = \frac{\pi}{3 \cdot \frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3}$

$f(0) = 1 \rightarrow B(\frac{2}{3}, 1)$   
 ← هم عرض با هم برخورد با هم

$m_{AB} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{2 - 1}{\frac{5}{3} - \frac{2}{3}} = 1$

**تانژانت**

در دایره مثلثاتی روبه‌رو خط  $TAT'$  در نقطه A بر محور کسینوس‌ها عمود است. الف) زاویه  $\alpha$  را در ربع اول دایره مثلثاتی در نظر می‌گیریم و پاره‌خط OM را امتداد می‌دهیم تا این خط را در نقطه  $M'$  قطع کند. نشان دهید:

$\tan \alpha = AM' = b$

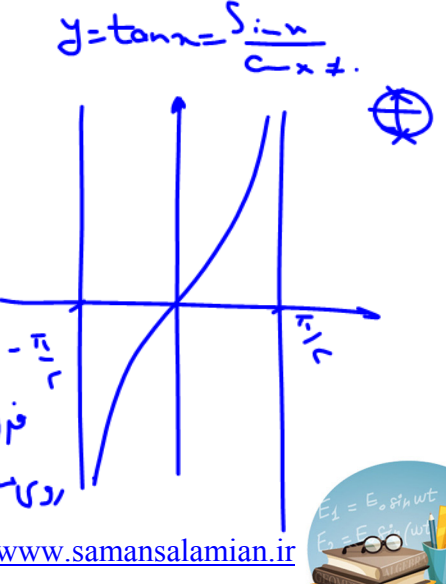
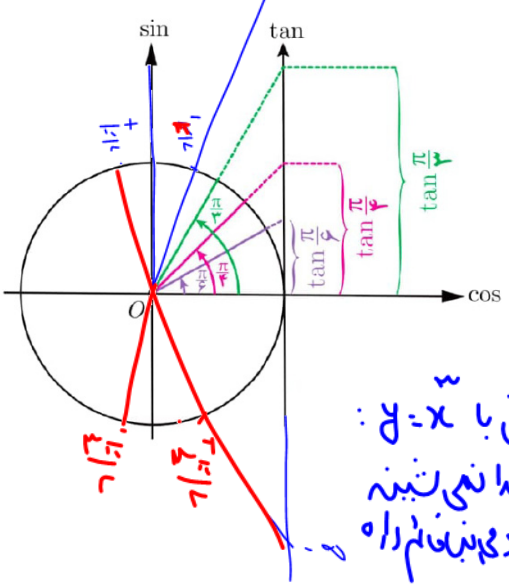
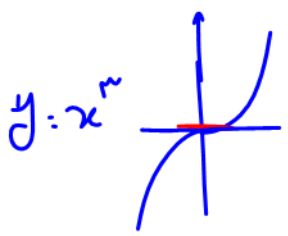
می‌توان دید که تانژانت هر زاویه دلخواه مانند  $\alpha$ ، به همین ترتیب از برخورد امتداد ضلع دوم آن زاویه با خط  $TAT'$  تعیین می‌شود. بنابراین خط  $TAT'$  محور تانژانت می‌نامیم. نقطه A مبدأ این محور است و جهت مثبت محور، از پایین به سمت بالا است.

ب) چرا تانژانت زوایایی که انتهای کمان آن‌ها در ربع اول و سوم قرار دارد مقداری مثبت و تانژانت زوایایی که انتهای کمان آن‌ها در ربع دوم و چهارم قرار دارد، مقداری منفی است؟

**تغییرات تانژانت**

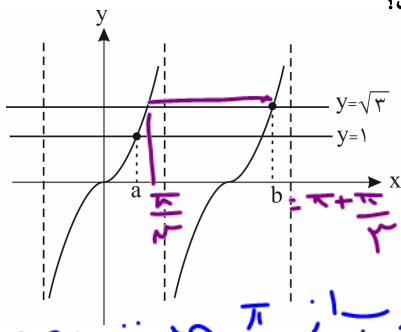
با تغییر زاویه  $\alpha$  مقادیر تانژانت آن نیز تغییر می‌کند. ابتدا این تغییرات را در ربع اول دایره مثلثاتی بررسی می‌کنیم. اگر  $\alpha = 0$ ، مقدار  $\tan \alpha$  نیز برابر صفر است و با افزایش اندازه  $\alpha$ ، مقدار  $\tan \alpha$  نیز افزایش می‌یابد.

$\tan(\frac{\pi}{4}) = \tan(\frac{3\pi}{4}) = +1$   
 $\tan(\frac{3\pi}{4}) = \tan(\frac{\pi}{4}) = -1$   
 $\tan(\frac{5\pi}{4}) = \tan(\frac{3\pi}{4}) = +1$   
 $\tan(\frac{7\pi}{4}) = \tan(\frac{\pi}{4}) = -1$





تست ۱۳۸: شکل زیر قسمتی از نمودار تابع  $y = \tan x$  را نشان می‌دهد. حاصل  $b - a$  کدام است؟



$x = a$  اولین برخورد  $y = \tan x$  با  $y = 1$   
یعنی  $a = \frac{\pi}{6}$  و  $b$  اولین برخورد

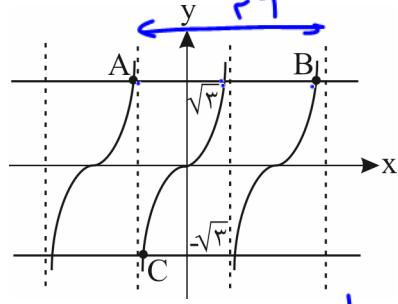
- (۱)  $\frac{\pi}{12}$
- (۲)  $\frac{5\pi}{12}$
- (۳)  $\frac{7\pi}{12}$
- (۴)  $\frac{13\pi}{12}$

$y = \tan x$ ؛  $y = \sqrt{3}$  است که به دوره‌ها باز  $\frac{\pi}{3}$  می‌تازد یعنی:

$$(b = \pi + \frac{\pi}{3}) - (a = \frac{\pi}{6}) = \frac{13\pi}{6}$$

از شکل  $k=$   $\alpha = \frac{\pi}{6}$   
 $\tan x = 1 = \tan \frac{\pi}{6} \rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{6}$   
 $\tan x = \sqrt{3} = \tan \frac{\pi}{3} \rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{3}$   
 $\left. \begin{matrix} a = \frac{\pi}{6} \\ b = \frac{\pi}{3} + \pi \end{matrix} \right\} a - b = \frac{13\pi}{6}$

تست ۱۳۹: شکل زیر نمودار تابع  $y = \tan ax$  است. اگر مساحت مثلث ABC برابر با  $8\sqrt{3}\pi$  باشد، مقدار  $a$  کدام است؟



$S = \frac{1}{2} (AB)(h)$  صغریه:  $(1)(a)$

AB: از  $A$  تا  $B$  دو برابر  $T$  است.

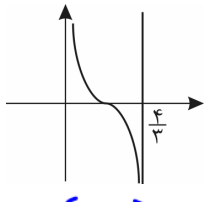
$$T = \frac{\pi}{|a|} \xrightarrow{a < 0} \frac{\pi}{a} \rightarrow AB = \frac{2\pi}{a}$$

ارتفاع خط‌های  $y = \pm \sqrt{3}$  است پس  $h = 2\sqrt{3}$

- (۱)  $\frac{1}{2}$
- (۲)  $\frac{1}{4}$
- (۳)  $\frac{2}{4}$
- (۴)  $\frac{5}{4}$

~~$S = 8\sqrt{3}\pi = \frac{1}{2} (\frac{2\pi}{a})(2\sqrt{3}) \rightarrow a = \frac{1}{\pi}$~~

تست ۱۴۰: قسمتی از نمودار  $f(x) = \tan(ax + \frac{1}{\pi})\pi$  به صورت شکل مقابل است.  $a$  کدام است؟



$y = \tan(\pi ax + \frac{\pi}{1})$   
 می‌بینیم نزدیکه:  
 $(\pi a) < \frac{\pi}{4}$   
 $a < 0$

- (۲)  $\pm \frac{2}{4}$
- (۴)  $\pm \frac{2}{2}$

- (۱)  $-\frac{2}{4}$
- (۳)  $\frac{2}{4}$

$$T = \frac{\pi}{\pi} = \frac{\pi}{|\pi a|}$$

$$\frac{\pi}{\pi} = \frac{1}{|a|} \rightarrow |a| = \frac{\pi}{\pi} \rightarrow a = -\frac{\pi}{\pi} \therefore \frac{\pi}{\pi} \xrightarrow{a < 0} \boxed{-\frac{\pi}{\pi} = a}$$

توفیق و رستگاری را از خدا بخواهید

