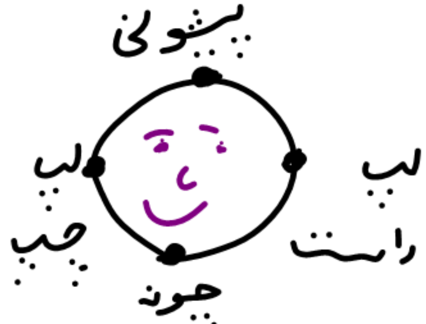
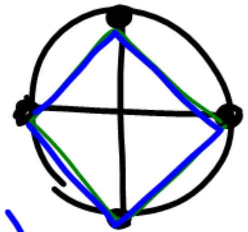
معادله مثلثاتی

آدرس نقاط مهم روی دایره



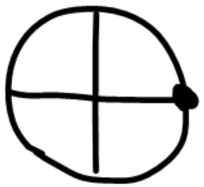
$k \in \mathbb{Z}$

$k = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3$



k	0	1	2	3	4
$x = \frac{k\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

رئوس یک مربع (۴ ضلعی منتظم)

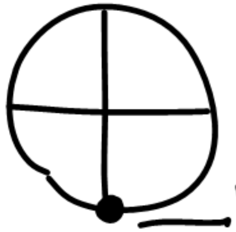


$2k\pi$ مضارب زوج π

π مضارب فرد

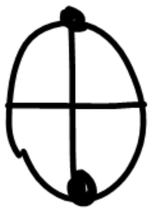
$(2k+1)\pi = 2k\pi + \pi$

$k\pi$: مضارب پی

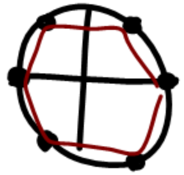


$2k\pi - \frac{\pi}{2}$

$2k\pi + \frac{\pi}{2}$



$k\pi + \frac{\pi}{2}$



۶ ضلعی منتظم (شش ضلعی)

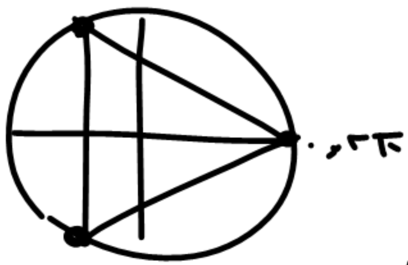
k	0	1	2	3	4	5	6
$x = \frac{k\pi}{3}$	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	2π

در بازه $[0, 2\pi]$ ۷ جواب دارد (تش $0 \neq 2\pi$)

در حالت کلی $x = \frac{k\pi}{n}$ رئوس یک $2n$ ضلعی منتظم روی دایره است.

$x=\frac{2k\pi}{3}$ روی دایره چه چیزی را نشان می‌دهد؟

k	۰	۱	۲	۳
$x=\frac{2k\pi}{3}$	۰	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{4\pi}{3}$	2π



رئوس یک مثلث متساوی الاضلاع

$x=\frac{2k\pi}{3}$ در بازه $[0, 2\pi]$ دارای ۴ جواب است. (دقت: صفر و 2π برابرند.)

در حالت کلی $x=\frac{2k\pi}{n}$ رئوس یک n ضلعی منتظم است.

اگر رادیان داشتی به درجه تبدیل کن. هر رادیان $57{,}3^\circ$

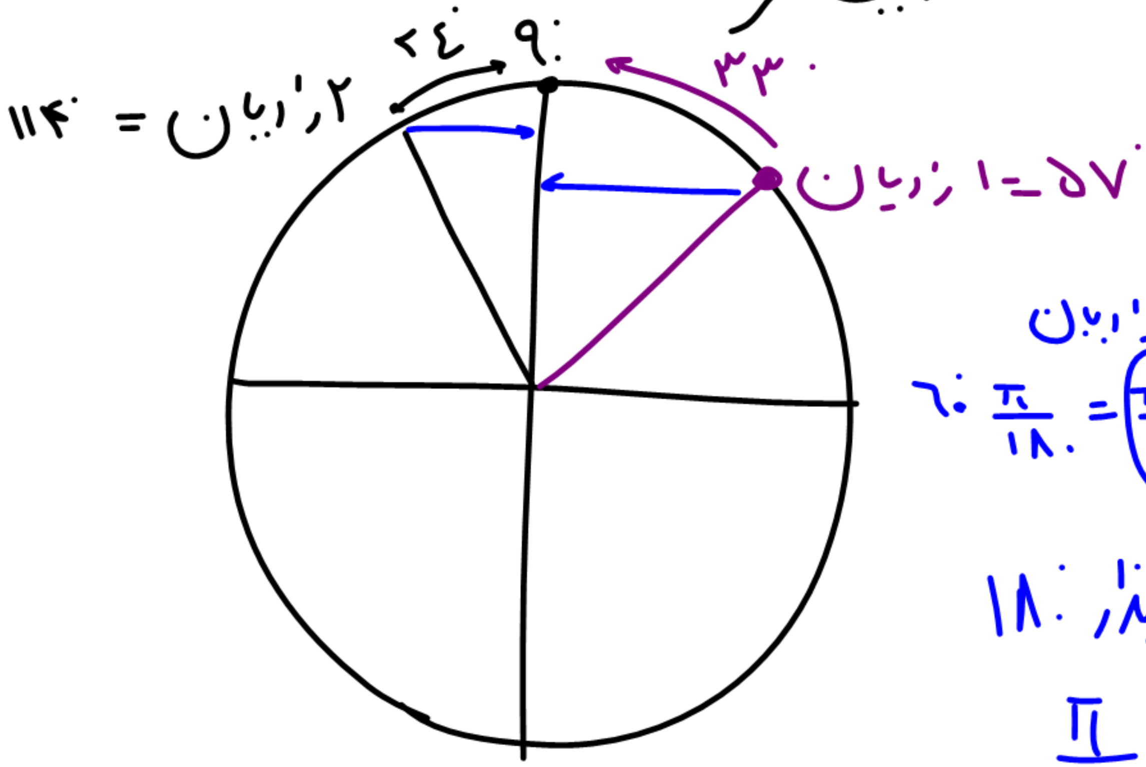
کدام گزینه از بقیه بیشتر است؟ ۱) $\sin 1$ ۲) $\sin 2$ ۳) $\sin 3$ ۴) $\sin 4$

$\sin 2 > \sin 1 > \sin 3 > \sin 4$

کلاً منفی

دقت کنید ۲ رادیان $= 114^\circ$ به 90° نزدیکتر و سینوس آن نسبت به

$\sin(1 = 57^\circ)$ بیشتر است



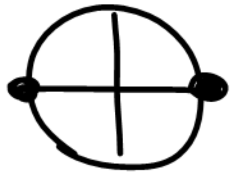
نکته: $\text{رادیان} = \text{درجه} \times \frac{\pi}{180}$

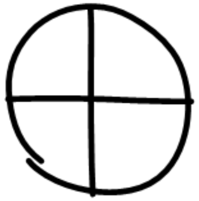
رادیان: $60^\circ \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{3}$

اگر خواستی رادیان رو درجه کنی، جای π بذار 180°

$$\frac{\pi}{3} \longrightarrow \frac{180}{3} = 60^\circ$$

معادلات خاص: هدف از حل معادله پیدا کردن انتهای همه زاویه‌هایی است که نسبت مثلثاتی آن عدد ثابتی است.

$\sin\theta = 0$  $x = k\pi : 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \dots$
مضارب π

$\cos\theta = 1$  $x = 2k\pi : 0, 2\pi, 4\pi, \dots$
مضارب زوج π

$\sin\theta = 1$  $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$

$\sin\theta = -1$  $x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$

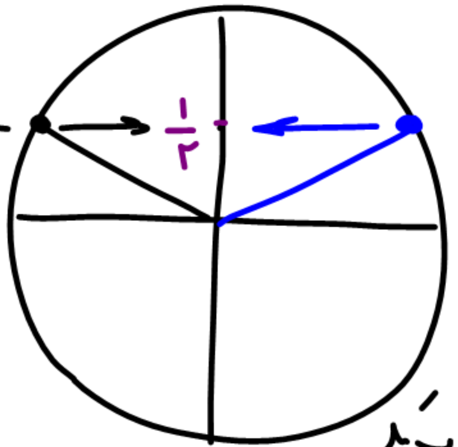
$\cos\theta = 0$  $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$

$\cos\theta = -1$  $x = 2k\pi + \pi = (2k+1)\pi$

$\tan\theta = 0 \longrightarrow \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = 0 \longrightarrow \sin\theta = 0$  $x = k\pi : 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \dots$

$\sin\theta = \frac{1}{2}$

$\sin\theta = \sin\frac{\pi}{6}$



$$\sin \overset{\text{این}}{u} = \sin \overset{\text{اون}}{\alpha}$$

$$u = 2k\pi + \alpha \qquad \text{این} = 2k\pi + \text{اون}$$

$$u = 2k\pi + \pi - \alpha \qquad \text{این} = 2k\pi + \pi - \text{اون}$$

۲ زاویه مکمل هم سینوسند

جواب کلی $x = 2k\pi + \frac{\pi}{6}$:

k	0	1	2	3
	$\frac{\pi}{6}$	$2\pi + \frac{\pi}{6}$	$4\pi + \frac{\pi}{6}$	$6\pi + \frac{\pi}{6}$

$x = 2k\pi + \left(\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}\right)$

جواب کلی

k	0	1
	$\frac{5\pi}{6}$	$2\pi + \frac{5\pi}{6}$

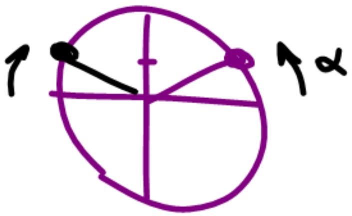
مثال)

$$\sin(3x) = \sin(2x)$$

$$\sin u = \sin \alpha$$

$$u = 2k\pi + \alpha \longrightarrow 3x = 2k\pi + 2x$$

جواب عمومی یا کلی $\boxed{x = 2k\pi}$



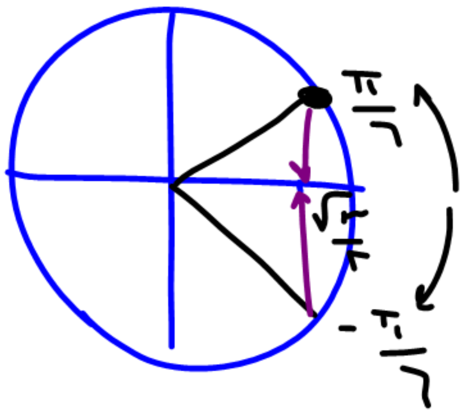
$$u = 2k\pi + \pi - \alpha \longrightarrow 3x = 2k\pi + \pi - 2x$$

$$5x = 2k\pi + \pi$$

جواب عمومی یا کلی $\boxed{x = \frac{2k\pi}{5} + \frac{\pi}{5}}$

$\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos\theta = \cos\frac{\pi}{6}$



$x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$

جواب عمومی یا
جواب کلی

$$\begin{cases} \cos u = \cos\alpha \\ u = 2k\pi \pm \alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos \text{این} = \cos \text{اون} \\ \text{این} = 2k\pi \pm \text{اون} \end{cases}$$

دو زاویه قرینه هم‌کسینوسند

جواب های بازه
را بنویسید $[0, 2\pi]$

k	0	1
$x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{6}$	$2\pi + \frac{\pi}{6} \notin [0, 2\pi]$ $2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$

۲ جواب در $[0, 2\pi]$ دارد:

$x = \frac{\pi}{6}$ و $\frac{11\pi}{6}$

جواب کلی معادله $\cos(5x) - \cos(3x) = 0$ کدام است؟ جواب های بازه $[0, 2\pi]$ را بنویسید. در این بازه چند جواب دارد؟ ۹ تا

$$\cos(5x) = \cos(3x)$$

$$\cos u = \cos \alpha$$

$$u = 2k\pi \pm \alpha$$

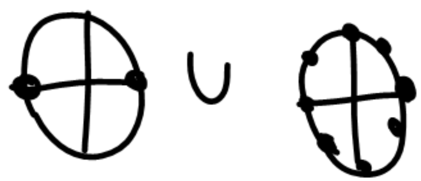
$$5x = 2k\pi \pm 3x \quad \begin{cases} 5x = 2k\pi + 3x \longrightarrow 2x = 2k\pi \\ 5x = 2k\pi - 3x \longrightarrow 8x = 2k\pi \end{cases}$$

(الف) $\boxed{x = k\pi}$

اجتماع $\cup$ یا

(ب) $\boxed{x = \frac{2k\pi}{8} = \frac{k\pi}{4}}$

(الف) $\cup$ (ب) یا $= \left(k\pi \text{ یا } \frac{k\pi}{4} \right) =$

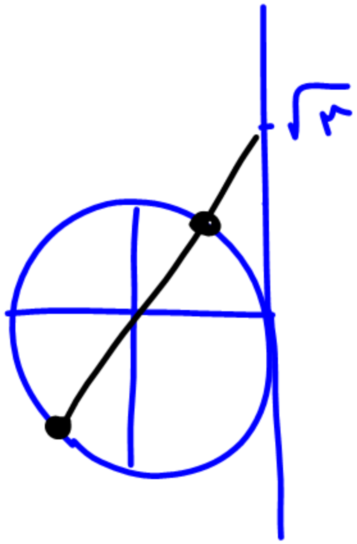


$$x = \frac{k\pi}{4} : 0, \frac{\pi}{4}, \frac{2\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{4\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{6\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, \frac{8\pi}{4} = 2\pi$$

۹ جواب در بازه $[0, 2\pi]$ دارد.

$$\tan x = \sqrt{3}$$

$$\tan x = \tan \frac{\pi}{3}$$



$$\begin{cases} \tan U = \tan \alpha \\ U = k\pi + \alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tan(\text{این}) = \tan(\text{اون}) \\ \text{این} = k\pi + (\text{اون}) \end{cases}$$

$$x = k\pi + \frac{\pi}{3}$$

دو لپ دایره که $\frac{\pi}{3}$ در جهت
مثلثاتی چرخید،

$$\tan(5x) = \tan x$$

$$\tan U = \tan \alpha$$

$$U = k\pi + \alpha$$

$$5x = k\pi + x$$

$$4x = k\pi$$

$x = \frac{k\pi}{4}$ جواب کلی

نقاط باید $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$ باشند

چون تعریف $\tan x$ نمی‌شود و مخرج آن صفر می‌شود

$\tan(5x) - \tan x = 0$ در بازه

$[0, 2\pi]$ جواب های باز

را بنویسید.

k	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸
$x = \frac{k\pi}{4}$	۰	$\frac{\pi}{4}$	$\cancel{\frac{2\pi}{4}} = \frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\cancel{\frac{6\pi}{4}}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{8\pi}{4}$

نکته $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ پس

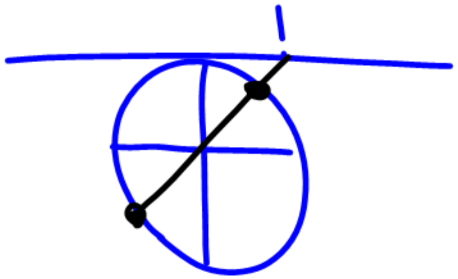
$\cos x \neq 0$

$x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$

$$\cot\theta = 1$$

$$\cot\theta = \cot\frac{\pi}{4}$$

$$\theta = k\pi + \frac{\pi}{4}$$

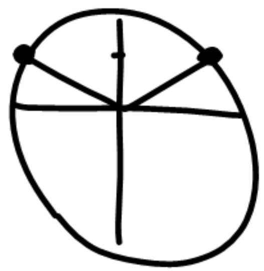
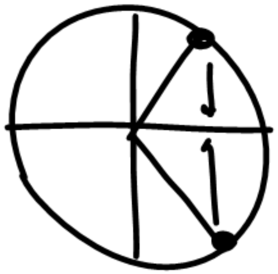
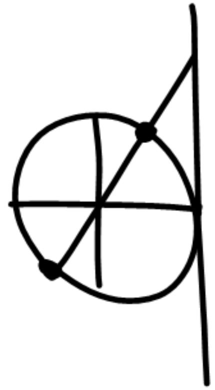
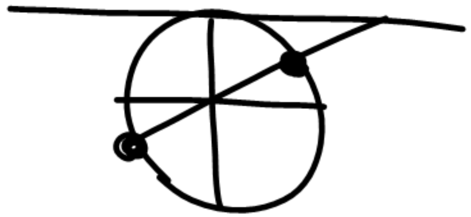


$$\begin{cases} \cot u = \cot\alpha \\ u = k\pi + \alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cot(\text{این}) = \cot(\text{اون}) \\ \text{این} = k\pi + \text{اون} \end{cases}$$

۴ مسئله اصلی :

معادله مثلثاتی را به تساوی اولتا همنام تبدیل می‌کنیم و از α مثل زیر جواب کلی معادله بدست می‌آید

$\sin u = \sin \alpha$	$\cos u = \cos \alpha$	$\tan u = \tan \alpha$	$\cot u = \cot \alpha$
$u = 2k\pi + \alpha$ $u = 2k\pi + \pi - \alpha$	$u = 2k\pi \pm \alpha$	$u = k\pi + \alpha$	$u = k\pi + \alpha$
			

ابتدا جواب کلی را پیدا کن به جای k اعداد ۰ و ۱± و ۲± و ... بگذار تا جواب های بازه خاص بدست بیاید.

حل تمرینات ۹۰

۲ اسفند ۱۴۰۰

$1+\cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2}$

بزرگترین جواب معادله زیر در بازه $[0, 2\pi]$:

$$\underbrace{(1+\cos 2\alpha)}_{2\cos^2\alpha}\underbrace{(1+\cos 4\alpha)}_{2\cos^2 2\alpha}\underbrace{(1+\cos 8\alpha)}_{2\cos^2 4\alpha} = \frac{1}{8}$$

$$2\cos^2\alpha \quad 2\cos^2 2\alpha \quad 2\cos^2 4\alpha = \frac{1}{8} \longrightarrow \cos^2\alpha\cos^2 2\alpha\cos^2 4\alpha = \frac{1}{64}$$

$$\xrightarrow{\text{جذر}} \cos\alpha\cos 2\alpha\cos 4\alpha = \pm\frac{1}{8} \xrightarrow[\alpha\neq k\pi \text{ و } \sin\alpha\neq 0]{\text{۲ طرف ضرب در}}$$

$$\underbrace{\sin\alpha\cos\alpha}\cos 2\alpha\cos 4\alpha = \pm\frac{1}{8}\sin\alpha$$

$$\frac{1}{2}\underbrace{\sin 2\alpha\cos 2\alpha}\cos 4\alpha$$

$$\frac{1}{2}\;\frac{1}{2}\underbrace{\sin 4\alpha\cos 4\alpha}$$

$$\frac{1}{2}\;\frac{1}{2}\;\frac{1}{2}\sin 8\alpha = \pm\frac{1}{8}\sin\alpha$$

$$\sin 8\alpha = \pm\sin\alpha \longrightarrow \sin 8\alpha = \sin\alpha$$

$$8\alpha = 2k\pi + \alpha \longrightarrow \alpha = \frac{2k\pi}{7}$$

$$8\alpha = 2k\pi + \pi - \alpha \rightarrow \alpha = \frac{(2k+1)\pi}{9}$$

$$\sin 8\alpha = -\sin\alpha = \sin(-\alpha)$$

$$8\alpha = 2k\pi - \alpha \longrightarrow \alpha = \frac{2k\pi}{9}$$

$$8\alpha = 2k\pi + \pi - (-\alpha)$$

$$\alpha = \frac{(2k+1)\pi}{7}$$

$$\alpha = \frac{2k\pi}{7} \xrightarrow{\text{Max جواب } [0,\pi]} \alpha = \frac{6\pi}{7} \rightsquigarrow$$

$$\alpha = \frac{(2k+1)\pi}{9} \xrightarrow[\alpha \neq 0,\pi]{\text{یعنی } \alpha \neq 0} \alpha = \frac{7\pi}{9} \qquad \frac{6\pi}{7} < \frac{8\pi}{9}$$

$$\alpha = \frac{2k\pi}{9} \longrightarrow \alpha = \frac{8\pi}{9} \rightsquigarrow \frac{54\pi}{63} < \frac{56\pi}{63}$$

$$\alpha = \frac{(2k+1)\pi}{7} \xrightarrow{\alpha \neq 0,\pi} \alpha = \frac{5\pi}{7}$$

$$\alpha_{Max} = \frac{8\pi}{9}$$

Trigonometry
اندازه‌گیری مثلث
سه‌بر سنجی

مقابل برو تو سینوس باشد — مجاور برو تو بانه کسینوس
سینوس چو برو دی کسینوس شد — تانژانت بدست آید و برعکس کتانژانت

مثلثات پایهٔ دوازدهم رشتهٔ تجربی

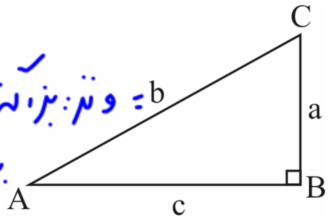
اعداد فیثاغورسی صادق در $a^2=b^2+c^2$: ۳، ۴، ۵ و ۵، ۱۲، ۱۳

نسبت‌های مثلثاتی

فرض می‌کنیم A یک زاویهٔ حادهٔ معلوم باشد، اگر مثلث قائم‌الزاویه‌ای را در نظر بگیریم که یکی از زاویه‌های غیرقائم آن A است، حاصل هر یک از کسرهای:

۱) $\dfrac{\text{طول ضلع مقابل به زاویهٔ } A}{\text{طول ضلع مجاور به زاویهٔ } A}$، ۲) $\dfrac{\text{طول ضلع مجاور به زاویهٔ } A}{\text{طول ضلع مقابل به زاویهٔ } A}$، ۳) $\dfrac{\text{طول ضلع مقابل به زاویهٔ } A}{\text{وتر}}$ و ۴) $\dfrac{\text{طول ضلع مجاور به زاویهٔ } A}{\text{وتر}}$

همواره مقداری ثابت می‌باشند؛ یعنی فقط مقدار زاویهٔ A مهم است و اندازهٔ اضلاع مثلث قائم‌الزاویه‌ای که یک زاویه‌اش برابر $\hat{A}$ است تأثیری در این مقادیر ندارد. به دلیل ثابت بودن این مقادیر برای زاویهٔ A، هر یک از آن‌ها را به ترتیب ۱) تانژانت زاویهٔ A، ۲) کتانژانت زاویهٔ A، ۳) سینوس زاویهٔ A و ۴) کسینوس زاویهٔ A می‌نامیم.



وتر: بزرگترین ضلع
بارو به روی زاویهٔ ۹۰

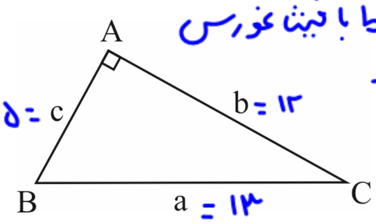
$$\sin\hat{A}=\frac{BC}{AC}=\frac{a}{b} \qquad \cos\hat{A}=\frac{AB}{AC}=\frac{c}{b}$$

$$\tan\hat{A}=\frac{BC}{AB}=\frac{a}{c}=tg\hat{A}=t\hat{g}\hat{A} \qquad \cot\hat{A}=\frac{AB}{BC}=\frac{c}{a}=Cotg\hat{A}=Cotg\hat{A}$$

$$\frac{Sin\hat{A}=\frac{a}{b}}{Cos\hat{A}=\frac{c}{b}}=\frac{a}{c}=tan\hat{A} \qquad \frac{c}{a}=Cotan\hat{A}$$

در یک مثلث قائم‌الزاویه، نسبت‌های سینوس، کسینوس، تانژانت و کتانژانت را نسبت‌های مثلثاتی می‌نامیم.

تست ۱: در شکل مقابل $a+c=18$ و $\cos\hat{B}=\frac{5}{13}$، مقدار $\tan\hat{C}$ کدام است؟



$b=13$ با فیثاغورس

۱) $\frac{5}{12}$ ۲) $\frac{12}{5}$ ۳) $\frac{13}{5}$ ۴) $\frac{5}{13}$

$tg\hat{C}=\frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}}=\frac{5}{12}$ — $\frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}}=\frac{5}{13}$

پاسخ: گزینهٔ «۱» ـ با توجه به تعریف کسینوس یک زاویه در مثلث قائم‌الزاویه، می‌توان نوشت:

$$\cos\hat{B}=\frac{c}{a} \Rightarrow \frac{5}{13}=\frac{c}{a} \xrightarrow{\times a} c=\frac{5}{13}a$$

از رابطهٔ $a+c=18$ استفاده می‌کنیم:

$$a+c=18 \Rightarrow a+\frac{5}{13}a=18 \Rightarrow \frac{18}{13}a=18 \Rightarrow a=13 \Rightarrow c=5$$

حال به کمک رابطهٔ فیثاغورس اندازهٔ b را محاسبه می‌کنیم:

$$a^2=b^2+c^2 \Rightarrow 13^2=b^2+5^2 \Rightarrow b^2=169-25=144 \xrightarrow{\sqrt{}} b=12$$

می‌دانیم که تانژانت یک زاویه، برابر نسبت ضلع مقابل به ضلع مجاور آن زاویه است.

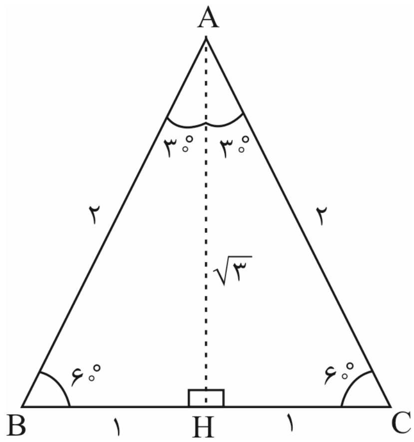
$$\tan\hat{C}=\frac{c}{b} \Rightarrow \tan\hat{C}=\frac{5}{12}$$

نکته: با در نظر گرفتن مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۲ واحد، می‌توان نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های 30° و 60° را به صورت زیر محاسبه کرد. در مثلث متساوی‌الاضلاع، ارتفاع، میانه، نیمساز و عمودمنصف وارد بر یک ضلع بر هم منطبق‌اند.

برای متمم ۳۰ و ۶۰ (دو زاویه جمع ۹۰ باشند)

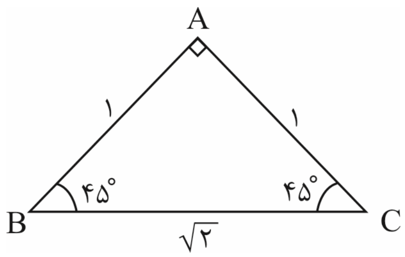
سینوسم کسینوسته   کسینوسم سینوسته

تانژانتم کتانژانته   کتانژانتم تانژانته



$$\overset{\Delta}{ABH}:\begin{cases}\sin ۳۰^\circ=\dfrac{BH}{AB}=\dfrac{۱}{۲}\\[2mm] \cos ۳۰^\circ=\dfrac{AH}{AB}=\dfrac{\sqrt{۳}}{۲}\\[2mm] \tan ۳۰^\circ=\dfrac{BH}{AH}=\dfrac{۱}{\sqrt{۳}}=\dfrac{\sqrt{۳}}{۳}\\[2mm] \cot ۳۰^\circ=\dfrac{AH}{BH}=\sqrt{۳}\end{cases},\quad \begin{cases}\sin ۶۰^\circ=\dfrac{AH}{AB}=\dfrac{\sqrt{۳}}{۲}\\[2mm] \cos ۶۰^\circ=\dfrac{BH}{AB}=\dfrac{۱}{۲}\\[2mm] \tan ۶۰^\circ=\dfrac{AH}{BH}=\sqrt{۳}\\[2mm] \cot ۶۰^\circ=\dfrac{BH}{AH}=\dfrac{۱}{\sqrt{۳}}=\dfrac{\sqrt{۳}}{۳}\end{cases}$$

با در نظر گرفتن مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین به اضلاع قائمه ۱ واحد می‌توان نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ ۴۵° (به عنوان مثال B) را به صورت زیر محاسبه کرد:



$$\sin ۴۵^\circ=\frac{AC}{BC}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\qquad \cos ۴۵^\circ=\frac{AB}{BC}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\tan ۴۵^\circ=\frac{AC}{AB}=۱\qquad \cot ۴۵^\circ=\frac{AB}{AC}=۱$$

خلاصهٔ نسبت‌های مثلثاتی زوایای معروف $(۶۰^\circ, ۴۵^\circ, ۳۰^\circ)$

مقدار زاویهٔ θ / مقدار نسبت مثلثاتی	۳۰°	۴۵°	۶۰°
$\sin\theta$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$
$\cos\theta$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$
$\tan\theta$	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۱	$\sqrt{۳}$
$\cot\theta$	$\sqrt{۳}$	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$

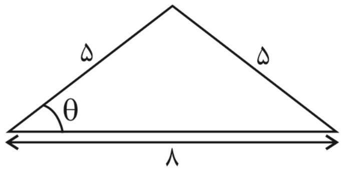
تست ۲: مقدار x در تساوی $\dfrac{\sqrt{۳}\tan ۶۰^\circ-۴\sin ۳۰^\circ}{۲\sqrt{۲}\cos ۴۵^\circ+\cot ۴۵^\circ}=x\cos ۶۰^\circ$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) ۳   ۴) $\frac{۳}{۲}$

پاسخ: گزینهٔ «۲» ـ کافی است مقدار عددی هر یک از نسبت‌های مثلثاتی زوایای داده‌شده را جای‌گذاری کنیم:

$$x\times\frac{۱}{۲}=\frac{\sqrt{۳}\times\sqrt{۳}-۴\times\frac{۱}{۲}}{۲\sqrt{۲}\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}+۱}\Rightarrow \frac{x}{۲}=\frac{۳-۲}{۲+۱}=\frac{۱}{۳}\xrightarrow{\times ۲} x=\frac{۲}{۳}$$

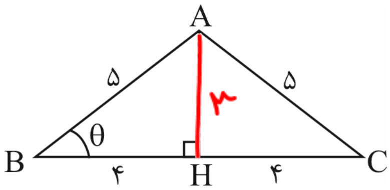
تست ۳: در مثلث مقابل، مقدار $۲\cos\theta+\sin\theta$ کدام است؟



۱) $\frac{۸}{۵}$ ۲) $\frac{۹}{۵}$

۳) $\frac{۱۱}{۵}$ ۴) $\frac{۱۲}{۵}$

پاسخ: گزینهٔ «۳» ـ مثلث رسم‌شده، متساوی‌الساقین است. پس ارتفاع، میانه و نیمساز وارد بر قاعده بر هم منطبق‌اند. ارتفاع وارد بر قاعـده را رسم می‌کنیم:



$$\overset{\Delta}{ABH}: AB^۲=AH^۲+BH^۲ \Rightarrow ۲۵=AH^۲+۱۶ \Rightarrow AH^۲=۹ \xrightarrow{\sqrt{\ }} AH=۳$$

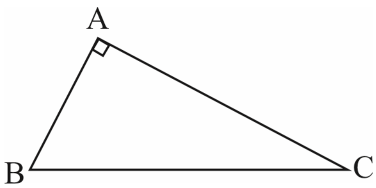
$$\sin\theta=\frac{AH}{AB}=\frac{۳}{۵}\ ,\ \cos\theta=\frac{BH}{AB}=\frac{۴}{۵}$$

در نتیجه مقدار خواسته‌شده برابر است با:

$$۲\cos\theta+\sin\theta=\frac{۸}{۵}+\frac{۳}{۵}=\frac{۱۱}{۵}$$

ارتباط بین نسبت‌های مثلثاتی زوایای متمم

اگر دو زاویه متمم هم باشند (مجموعشان ۹۰° باشد)، آن‌گاه سینوس یکی با کسینوس دیگری برابر است و برعکس، تانژانت یکی با کتانژانت دیگری برابر است و برعکس. در شکل زیر داریم:



$$\hat{B}+\hat{C}=۹۰^\circ$$

$$\sin\hat{B}=\frac{AC}{BC}=\cos\hat{C}\ ,\ \sin\hat{C}=\frac{AB}{BC}=\cos\hat{B}$$

$$\tan\hat{B}=\frac{AC}{AB}=\cot\hat{C}\ ,\ \tan\hat{C}=\frac{AB}{AC}=\cot\hat{B}$$

تست ۴: حاصل عبارت $P=\frac{۵\sin۲^\circ\times\cot۸۳^\circ\times\tan۷۶^\circ}{۸\cot۱۴^\circ\times\cos۸۸^\circ\times\tan۷^\circ}$ کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۸}$ ۲) $-\frac{۵}{۸}$ ۳) $\frac{۸}{۵}$ ۴) $-\frac{۸}{۵}$

پاسخ: گزینهٔ «۱» ـ از روابط نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های متمم استفاده می‌کنیم:

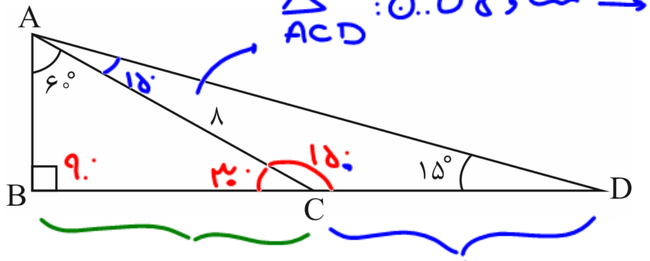
$$۷۶^\circ+۱۴^\circ=۹۰^\circ \Rightarrow \tan۷۶^\circ=\cot۱۴^\circ$$

$$۸۳^\circ+۷^\circ=۹۰^\circ \Rightarrow \cot۸۳^\circ=\tan۷^\circ$$

$$۲^\circ+۸۸^\circ=۹۰^\circ \Rightarrow \sin۲^\circ=\cos۸۸^\circ$$

$$P=\frac{۵\sin۲^\circ\times\cot۸۳^\circ\times\tan۷۶^\circ}{۸\tan۷۶^\circ\times\sin۲^\circ\times\cot۸۳^\circ}=\frac{۵}{۸}$$

تست ۵: در شکل مقابل اندازهٔ پاره‌خط **BD** برابر است با:



$\triangle ACD$: متساوی‌الساقین $\to CD = CA = ۸$

۱) $۴\sqrt{۳}+۴$

۲) $۴\sqrt{۳}+۸$ ✓

۳) $۴\sqrt{۳}+۱۲$

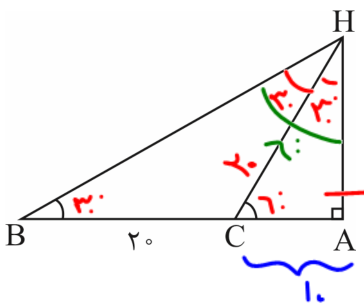
۴) ۱۶

$\triangle ABC: \cos ۳۰^\circ = \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{BC}{۸}$

$BC = ۴\sqrt{۳}$

$BD = ۸ + ۴\sqrt{۳}$

تست ۶: در شکل مقابل اگر $\hat{B} = ۳۰^\circ$ و $\hat{C} = ۶۰^\circ$، اندازهٔ **AH** کدام است؟



۱) ۱۰

۲) $۲۰\sqrt{۳}$

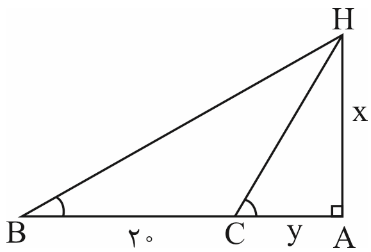
۳) $۱۰\sqrt{۳} = AH$

۴) ۲۰

$\triangle ACH: \cos ۶۰^\circ = \frac{۱}{۲} = \frac{AC}{۲۰} \to AC = ۱۰$

فیثاغورث: $(۲۰)^۲ = (۱۰)^۲ + (AH)^۲ \to AH^۲ = ۳۰۰$

پاسخ: گزینهٔ «۳» ـ اگر فرض کنیم $AH = x$ و $AC = y$، آن‌گاه در شکل مقابل داریم:

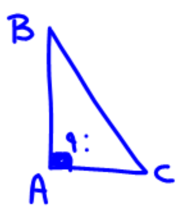


$$\begin{cases} \tan\hat{B} = \dfrac{AH}{AB} = \dfrac{x}{۲۰+y} \Rightarrow \tan ۳۰^\circ = \dfrac{x}{y+۲۰} = \dfrac{\sqrt{۳}}{۳} \quad (*) \\ \tan\hat{C} = \dfrac{AH}{AC} \Rightarrow \tan ۶۰^\circ = \dfrac{x}{y} \Rightarrow \sqrt{۳} = \dfrac{x}{y} \end{cases}$$

$$x = y\sqrt{۳} \xrightarrow{(*)} \frac{y\sqrt{۳}}{y+۲۰} = \frac{\sqrt{۳}}{۳} \Rightarrow ۳y = y+۲۰ \Rightarrow y = ۱۰ \Rightarrow x = ۱۰\sqrt{۳} \Rightarrow AH = ۱۰\sqrt{۳}$$

تست ۷: در مثلث قائم‌الزاویهٔ **ABC** که $\hat{A} = ۹۰^\circ$، حاصل $\frac{۱}{۱+\tan\hat{B}} + \frac{۱}{۱+\tan\hat{C}}$ کدام است؟

۱) ۱　　۲) $\frac{۱}{۲}$　　۳) ۲　　۴) ۴



$\hat{B} + \hat{C} = ۹۰^\circ$

$\hat{C}$ و $\hat{B}$ متمم یکدیگرند

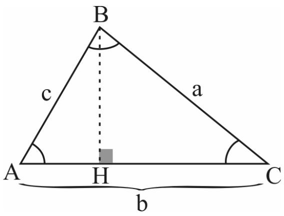
$\tan\hat{B} = \cot\hat{C}$

$$\frac{۱}{۱+\tan\hat{B}} + \left(\frac{۱}{۱+\frac{۱}{\cot\hat{C} = \tan\hat{B}}} = \frac{\tan\hat{B}}{\tan\hat{B}+۱}\right) = \frac{\tan\hat{B}}{۱+\tan\hat{B}}$$

$$= \frac{۱+\tan\hat{B}}{۱+\tan\hat{B}} =$$ یک

حل مثلث و کاربردهای آن

به شکل روبه‌رو و اطلاعات زیر در مورد مثلث توجه کنید.

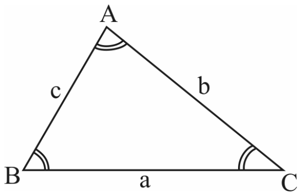


$$1)\ \hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180^\circ$$

$$2)\ \text{محیط}=a+b+c$$

منظور از حل مثلث، یافتن همه‌ی زوایا و اضلاع آن است.

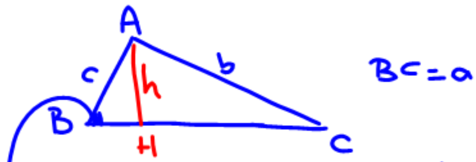
۱- مساحت مثلث: اگر دو ضلع یک مثلث و زاویه‌ی بین آن‌ها را داشته باشیم، آن‌گاه مساحت مثلث از رابطه‌ی زیر محاسبه می‌شود:



$$\text{مساحت}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ac\sin B$$

$\div\frac{1}{2}abc$

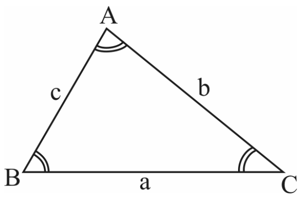
$\frac{\sin\hat{C}}{c}=\frac{\sin\hat{A}}{a}=\frac{\sin\hat{B}}{b}$



$S=\frac{1}{2}(BC)h=\frac{1}{2}ac\sin\hat{B}$

$\sin\hat{B}=\frac{h}{c}\rightarrow h=c\sin\hat{B}$

۲- قانون سینوس‌ها: می‌دانیم مساحت یک مثلث برابر است با نصف حاصل‌ضرب دو ضلع در سینوس زاویه‌ی بین آن‌ها. پس:



$$S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}bc\sin A$$

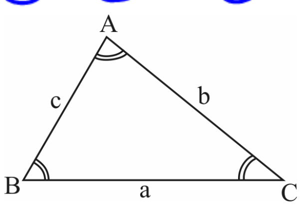
با تقسیم طرفین تساوی‌ها بر $\frac{1}{2}abc$ و معکوس کردن آن‌ها، داریم:

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$ (قانون سینوس‌ها)

توجه: قانون سینوس‌ها، برای حل مثلث‌هایی که در آن یک ضلع و زاویه‌ی روبه‌روی آن را داریم، بسیار سودمند خواهد بود.

۳- قانون کسینوس‌ها: وقتی دو ضلع یک مثلث و زاویه‌ی بین آن‌ها را داشته باشیم، قانون سینوس‌ها برای یافتن اضلاع و زوایا قابل استفاده نیست. در این حالت از «قانون کسینوس‌ها» استفاده می‌کنیم

مربع هر ضلع = مجموع مربعات دو ضلع دیگر − (دو برابر ضرب اضلاع در کسینوس بین اضلاع)



$$1)\ a^2=b^2+c^2-2bc\cos\hat{A}$$

$$2)\ b^2=a^2+c^2-2ac\cos\hat{B}$$

$$3)\ c^2=a^2+b^2-2ab\cos\hat{C}$$

تعمیم فیثاغورث

منفی

مثبت

$a^2=b^2+c^2$

$a_1^2=b^2+c^2-2bc\cos\hat{A}_1$

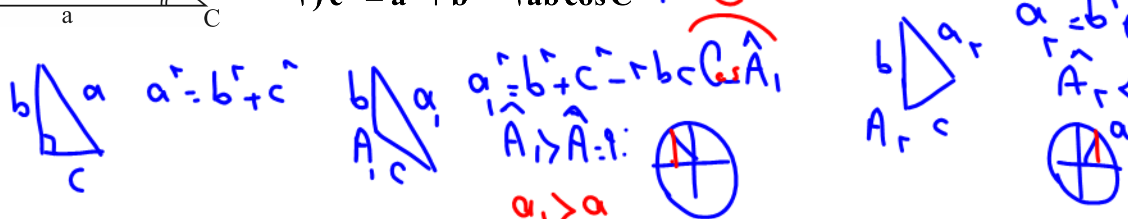
$\hat{A}_1>\hat{A}=90^\circ$

$a_1>a$

$a_2^2=b^2+c^2-2bc\cos\hat{A}_2$

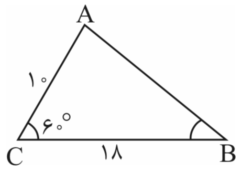
$\hat{A}_2<\hat{A}=90^\circ$

$a_2<a$



$$(AB)^2=(AC)^2+(BC)^2-2(AC)(BC)\cos 60^\circ$$

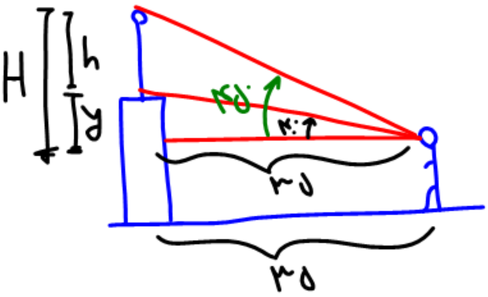
مثال ۸: در شکل روبه‌رو، طول **AB** را بیابید.



پاسخ: $AB^2=10^2+18^2-2(10)(18)\cos 60^\circ=100+324-360(-\frac{1}{2})=244 \Rightarrow AB=\sqrt{244}$

تست ۹: ناظری به فاصله‌ی ۳۵ متر از پای ستونی که بر روی آن مجسمه‌ای قرار دارد، ایستاده است. زاویه‌ی رؤیت انتها و ابتدای مجسمه با سطح افق 45° و 40° است. ارتفاع مجسمه کدام است؟ $(\tan 40^\circ=0/8)$ *(خارج ریاضی ۹۴)*

۱) ۶ ۲) ۶/۴ ۳) ۷ ۴) ۷/۲



$\tan 45^\circ = 1 = \frac{H}{35} \longrightarrow H=35$

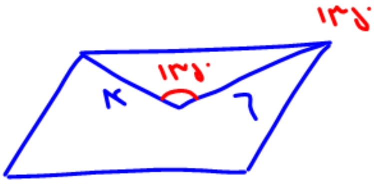
$\tan 40^\circ = 0/8 = \frac{y}{35} \longrightarrow y=28$

$h=H-y=35-28=7$ گ۳

تست ۱۰: در متوازی‌الاضلاعی اندازه‌ی دو قطر ۱۲ و ۸ واحد و زاویه‌ی بین دو قطر ۱۳۵ درجه است. مساحت متوازی‌الاضلاع چند برابر $\sqrt{2}$ است؟ *(تجربی ۹۲ و تجربی خارج ۹۶)*

۱) ۱۸ ۲) ۲۴ ۳) ۳۲ ۴) ۳۶

نکته: در هر متوازی‌الاضلاع، اقطار منصف یکدیگرند و شکل را به چهار مثلث هم‌سطح تقسیم می‌کنند.



$\sin 135^\circ = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$S_{\text{متوازی‌الاضلاع}} = 4\left(S_\Delta = \frac{1}{2}(a=4)(b=6)\left(\sin 135^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) = 24\sqrt{2}$

تست ۱۱: مساحت مثلثی با دو ضلع ۱۶ و ۹ واحد برابر $24\sqrt{5}$ واحد مربع است. بزرگ‌ترین ضلع این مثلث کدام است؟ *(ریاضی ۹۴)*

۱) ۲۱ ۲) ۲۲ ۳) ۲۳ ۴) ۲۴

$S=\frac{1}{2}ab\sin\theta \longrightarrow 24\sqrt{5}=\frac{1}{2}(9)(16)\sin\theta \longrightarrow \sin\theta=\frac{\sqrt{5}}{3}$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1 \longrightarrow \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2+\cos^2\theta=1 \longrightarrow \cos^2\theta=1-\frac{5}{9}=\frac{4}{9} \longrightarrow \cos\theta=\pm\frac{2}{3}$

$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\theta = (16)^2+(9)^2-2(9)(16)\left(-\frac{2}{3}\right) \longrightarrow c=23$

برای ضلع بزرگتر باید $\cos\theta <$ باشد

یعنی در مقابل بزرگتر زاویه باز دربیاید

تست ۱۲: مساحت مثلث به اضلاع ۷، ۹ و ۱۲ واحد کدام است؟ (ریاضی ۹۳)

۱) $15\sqrt{2}$ ۲) $14\sqrt{3}$ ۳) $12\sqrt{5}$ ۴) $14\sqrt{5}$

محاسبه مساحت مثلث با داشتن ۳ ضلع: فرمول هرون

$P = \frac{a+b+c}{2} =$ نصف محیط

$$S = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)} = \sqrt{14\underbrace{(14-7)}_{7}\underbrace{(14-9)}_{5}\underbrace{(14-12)}_{2}} = 14\sqrt{5}$$

$$P = \frac{12+9+7}{2} = 14$$

نکته

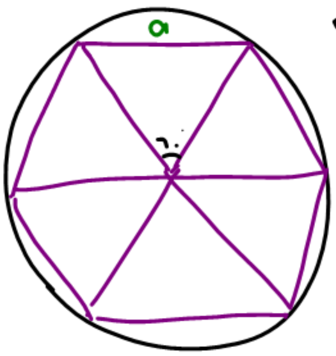
حواستون به شش‌ضلعی منتظم هم باشه.

مساحت Δ متساوی‌الاضلاع

$S = \frac{1}{2} a a \sin 60 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

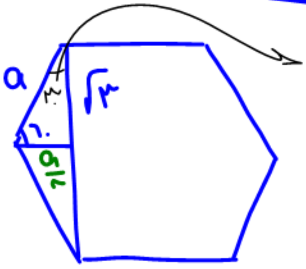
تست ۱۳: اگر قطر کوچک یک شش‌ضلعی منتظم برابر با $2\sqrt{3}$ باشد، مساحت شش‌ضلعی منتظم کدام است؟ (قلم‌چی ۹۷)

۱) ۶ ۲) $6\sqrt{3}$ ۳) ۱۲ ۴) $12\sqrt{3}$



$S = 6\left(a^2 \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$

مساحت مسدس



فیثاغورث:

$a^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + (\sqrt{3})^2$

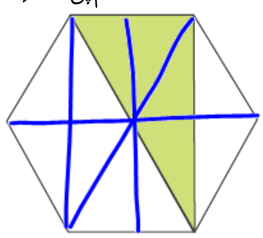
$a^2 - \frac{a^2}{4} = 3 \rightarrow \frac{3a^2}{4} = 3$

$a^2 = 4 \rightarrow a = 2$

$S_{\text{۶ضلعی}} = 6\left(a^2 \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = 6\sqrt{3}$

حل با درس کاشیکاری هشتم

تست ۱۴: مساحت شش‌ضلعی منتظم موجود در شکل زیر $18\sqrt{3}$ است. مساحت ناحیهٔ رنگی چه‌قدر است؟ (قلم‌چی ۹۷ و ۹۹)



۱) ۱۲
۲) ۱۸
۳) $6\sqrt{3}$
۴) $9\sqrt{3}$

برابر ۱۲ تا مثلث است:

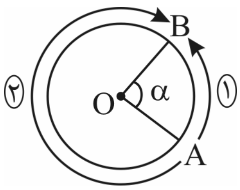
$12\Delta = 18\sqrt{3}$

$\Delta = \frac{18\sqrt{3}}{12} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

مساحت قسمت رنگی برابر ۴ تا مثلث است:

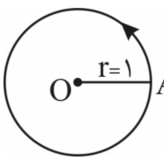
$4\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right) = 6\sqrt{3}$

تعریف جهت مثلثاتی



شکل مقابل را در نظر بگیرید. اگر بخواهیم از نقطه‌ی A به B برویم، یکی از دو مسیر ۱ یا ۲ را می‌توانیم انتخاب کنیم. در مثلثات جهت شماره‌ی ۱ را که خلاف حرکت عقربه‌های ساعت است (پادساعتگرد)، جهت مثبت و جهت شماره‌ی ۲ را که موافق حرکت عقربه‌های ساعت است (ساعتگرد)، جهت منفی می‌گویند.

تعریف دایره‌ی مثلثاتی



دایره‌ای است به شعاع واحد که در آن، با توجه به شکل، نقطه‌ی A به عنوان مبدأ کمان‌ها در نظر گرفته می‌شود و جهت آن مثبت می‌باشد (پادساعتگرد).

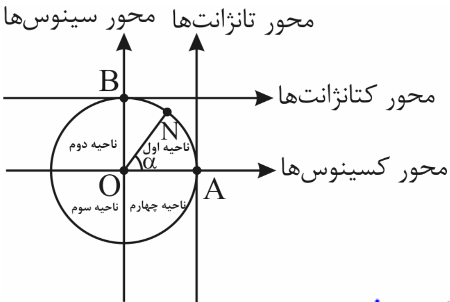
محورهای مثلثاتی

۱- محور کسینوس‌ها: محوری که از مرکز دایره‌ی مثلثاتی و مبدأ کمان‌ها (نقطه‌ی A) می‌گذرد.

۲- محور سینوس‌ها: محوری که در مرکز دایره‌ی مثلثاتی بر محور کسینوس‌ها عمود است.

۳- محور تانژانت‌ها: محوری که در مبدأ کمان‌ها (نقطه‌ی A) بر دایره‌ی مثلثاتی مماس است و موازی محور سینوس‌هاست.

۴- محور کتانژانت‌ها: محوری است که در بالاترین نقطه‌ی دایره بر آن مماس است و با محور کسینوس‌ها موازی و بر محور تانژانت‌ها و سینوس‌ها عمود است.



این چهار محور مثلثاتی را در روبه‌رو می‌بینید:

نقطه‌ی N : انتهای کمان روبه‌رو به زاویه‌ی α

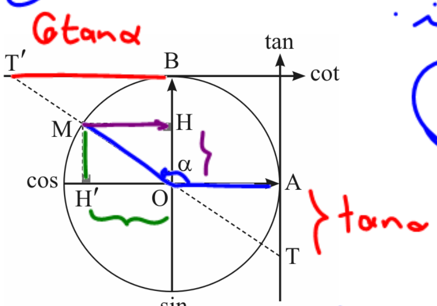
نقطه‌ی B : مبدأ محور $\cot$

نقطه‌ی A : مبدأ محور $\tan$

نقطه‌ی O : مبدأ محورهای $\sin$ و $\cos$

رفتن: ضلع اول زاویه OA ثابت است و ضلع دوم OB می‌چرخد.

روش به دست آوردن مقدار یک نسبت مثلثاتی از روی دایره‌ی مثلثاتی



فرض کنید، مطابق شکل روبه‌رو زاویه‌ای به اندازه‌ی α انتخاب کرده‌ایم.

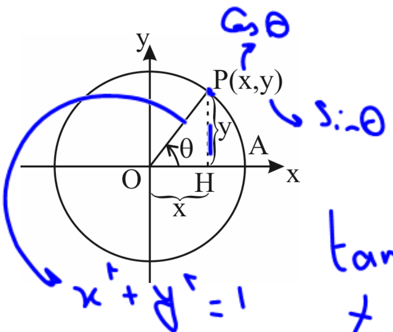
در این صورت از انتهای کمان بر محور $\sin$ و $\cos$ عمود می‌کنیم. داریم:

$$\boxed{OH = \sin\alpha \quad , \quad OH' = -\cos\alpha}$$

حال با امتداد OM به گونه‌ای که محور $\tan$ و $\cot$ قطع شود، داریم:

$$\boxed{AT = -\tan\alpha \quad , \quad BT' = -\cot\alpha}$$

$\tan\alpha . \text{Cotan}\alpha = 1 \longrightarrow \tan\alpha = \frac{1}{\text{Cotan}\alpha}$



در دایره‌ی مثلثاتی، زاویه‌ی دلخواه θ را در نظر می‌گیریم. با توجه به مثلث قائم‌الزاویه، مختصات نقطه‌ی $P(x,y)$ در این دایره برحسب زاویه‌ی θ برابر است با:

$$P(x,y) = P(\cos\theta, \sin\theta) \Rightarrow \begin{cases} x = \cos\theta \\ y = \sin\theta \end{cases}$$

$\tan\alpha = \frac{y}{x}$

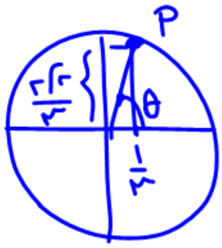
$\tan\alpha = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{y}{x}$

$x^2 + y^2 = 1$

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

مثال ۱۵: اگر زاویه‌ی θ، دایره‌ی مثلثاتی را در نقطه‌ی $P(\frac{۱}{۳},\frac{۲\sqrt{۲}}{۳})$ قطع کند، نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ی θ را بیابید.

پاسخ:



$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{\frac{2\sqrt{2}}{3}}{\frac{1}{3}} = 2\sqrt{2}$

$$P(\frac{۱}{۳},\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}) = P(\cos\theta,\sin\theta)$$

پس:

$$x=\cos\theta=\frac{۱}{۳}\ ,\ y=\sin\theta=\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}$$

از طرفی:

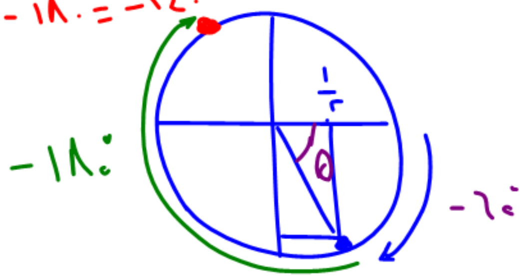
$$\tan\theta=\frac{y}{x}=۲\sqrt{۲}\ ,\ \cot\theta=\frac{x}{y}=\frac{۱}{۲\sqrt{۲}}$$

تست ۱۶: نقطه‌ی $P(\frac{۱}{۲},\frac{-\sqrt{۳}}{۲})$ روی دایره‌ی مثلثاتی را ۱۸۰° در جهت حرکت عقربه‌های ساعت حول مبدأ مختصات دوران می‌دهیم. نقطه‌ی جدید چه زاویه‌ای بر روی دایره‌ی مثلثاتی به وجود می‌آورد؟

خلاف جهت مثلثاتی

۱) -۲۴۰° ۲) ۲۴۰° ۳) ۱۳۵° ۴) -۱۲۰°

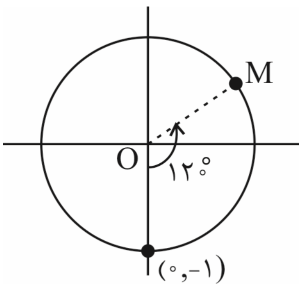
$-60-180=-240$



تست ۱۷: نقطه‌ی $(۰,-۱)$ روی دایره‌ی مثلثاتی را حول مبدأ مختصات به اندازه‌ی ۱۲۰° در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت دوران می‌دهیم. مختصات نقطه‌ی جدید کدام است؟

۱) $(\frac{\sqrt{۳}}{۲},\frac{۱}{۲})$ ۲) $(\frac{-\sqrt{۳}}{۲},\frac{-۱}{۲})$ ۳) $(\frac{-\sqrt{۲}}{۲},\frac{۱}{۲})$ ۴) $(\frac{\sqrt{۳}}{۲},\frac{-۱}{۲})$

پاسخ: گزینه‌ی «۱» ـ نقطه‌ی $(۰,-۱)$ روی دایره‌ی مثلثاتی مطابق با شکل زیر است. اگر آن را ۱۲۰° در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت دوران دهیم، به نقطه‌ی M در ناحیه‌ی اول می‌رسیم.



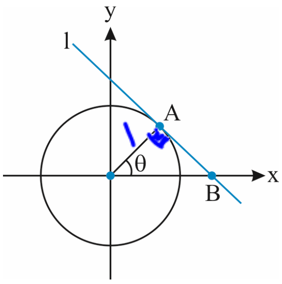
OM با محور طول‌ها، زاویه‌ی ۳۰° می‌سازد، بنابراین:

$$\begin{cases} x_M=\cos\theta \Rightarrow x_M=\cos ۳۰^\circ=\frac{\sqrt{۳}}{۲} \\ y_M=\sin\theta \Rightarrow y_M=\sin ۳۰^\circ=\frac{۱}{۲} \end{cases}$$

لذا $M(\frac{\sqrt{۳}}{۲},\frac{۱}{۲})$.

نکته: در هر دایره خط مماس در نقطهٔ تماس بر شعاع عمود است.

تست ۱۸: در دایرهٔ مثلثاتی زیر، اندازهٔ AB کدام است؟ (خط l بر دایره مماس است.)



مثلث OAB: قائم‌الزاویه

$\tan\theta = \dfrac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}} = \dfrac{AB}{\text{شعاع دایره} = 1}$

۱) $\cos\theta$

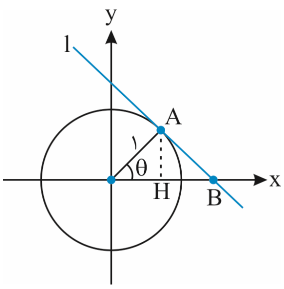
۲) $\dfrac{1}{\cos\theta}$

۳) $\tan\theta$

۴) $\dfrac{1}{\tan\theta}$

سریع و باهم

پاسخ: گزینهٔ «۳» ـ خط مماس بر دایره بر شعاع عمود است. حالا اگر از نقطهٔ A عمود بر محور طول‌ها رسم کنیم، طبق روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه داریم:



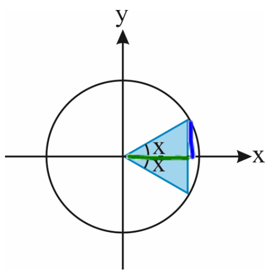
$$(1)^2 = OH \times OB \xrightarrow{OH=\cos\theta} 1 = \cos\theta \times OB \Rightarrow OB = \frac{1}{\cos\theta}$$

پس طبق قضیهٔ فیثاغورس در مثلث OAB می‌توان نوشت:

$$OB^2 = (1)^2 + AB^2 \Rightarrow \frac{1}{\cos^2\theta} = 1 + AB^2$$

$$\Rightarrow AB^2 = \frac{1}{\cos^2\theta} - 1 = \frac{1-\cos^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} = \tan^2\theta \Rightarrow AB = \tan\theta$$

تست ۱۹: در دایرهٔ مثلثاتی زیر اگر مساحت ناحیهٔ رنگی برابر با A باشد، $A \times (\tan x + \cot x)$ کدام است؟



$A = S_\Delta = \dfrac{(\text{قاعده})(\text{ارتفاع})}{2} = \dfrac{(2\sin x)\cos x}{2} = \sin x\cos x$

$A \times (\tan x + \cot x) = \sin x\cos x\left(\dfrac{\sin x}{\cos x} + \dfrac{\cos x}{\sin x}\right) = \sin^2 x + \cos^2 x = 1$

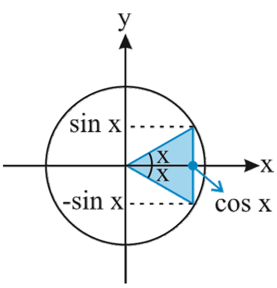
۱) $\frac{1}{2}$

۲) $\frac{1}{3}$

۳) $\frac{1}{4}$

۴) ۱

پاسخ: گزینهٔ «۴» ـ با توجه به شکل زیر، مساحت ناحیهٔ رنگی، مساحت یک مثلث با ارتفاع $\cos x$ و قاعدهٔ $2\sin x$ است. پس داریم:



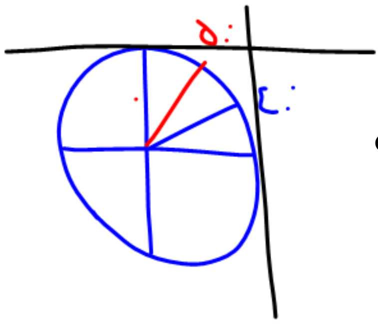
$$A = \frac{1}{2} \times (2\sin x)\cos x = \sin x\cos x$$

در نتیجه برای محاسبهٔ $A(\tan x + \cot x)$ می‌توان نوشت:

$$A(\tan x + \cot x) = \sin x\cos x\left(\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x}\right) = \sin x\cos x\left(\frac{\overbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}^{1}}{\sin x\cos x}\right)$$

$$= \sin x\cos x\left(\frac{1}{\sin x\cos x}\right) = 1$$

تست ۲۰: کدام یک از نامساوی‌های زیر بین زوایای ۴۰ و ۵۰ درجه برقرار است؟ (سراسری)



۱) $\sin 50^\circ < \sin 40^\circ$

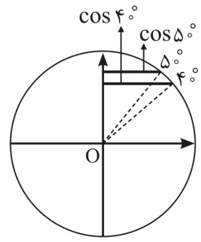
۲) $\cos 50^\circ < \cos 40^\circ$

۳) $\tan 50^\circ < \tan 40^\circ$

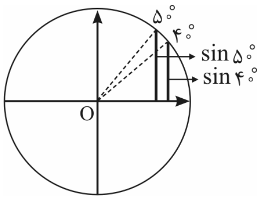
۴) $\cot 40^\circ < \cot 50^\circ$

پاسخ: گزینه‌ی «۲»

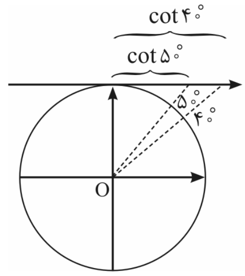
کافی است به دایره‌های مثلثاتی زیر خوب دقّت کنید:



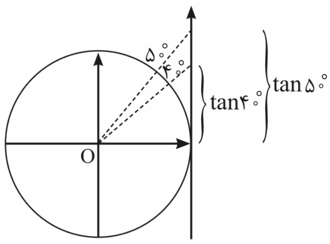
گزینه‌ی (۲) درست $\Rightarrow$ $\cos ۵۰^\circ < \cos ۴۰^\circ$



گزینه‌ی (۱) نادرست $\Rightarrow$ $\sin ۵۰^\circ > \sin ۴۰^\circ$



گزینه‌ی (۴) نادرست $\Rightarrow$ $\cot ۴۰^\circ > \cot ۵۰^\circ$



گزینه‌ی (۳) نادرست $\Rightarrow$ $\tan ۵۰^\circ > \tan ۴۰^\circ$

البته اگر به مفهوم صعود و نزول توابع نیز آشنا باشید، می‌توانید خیلی ساده‌تر پی به درستی گزینه‌ی (۲) ببرید.

$\sin ۵۰^\circ > \sin ۴۰^\circ \quad \Leftarrow \quad ۵۰^\circ > ۴۰^\circ \quad \Leftarrow \quad f(x) = \sin x$ در $(۰ , \frac{\pi}{۲})$ صعودی است.

$\cos ۵۰^\circ < \cos ۴۰^\circ \quad \Leftarrow \quad ۵۰^\circ > ۴۰^\circ \quad \Leftarrow \quad f(x) = \cos x$ در $(۰ , \frac{\pi}{۲})$ نزولی است.

$\tan ۵۰^\circ > \tan ۴۰^\circ \quad \Leftarrow \quad ۵۰^\circ > ۴۰^\circ \quad \Leftarrow \quad f(x) = \tan x$ در $(۰ , \frac{\pi}{۲})$ صعودی است.

$\cot ۵۰^\circ < \cot ۴۰^\circ \quad \Leftarrow \quad ۵۰^\circ > ۴۰^\circ \quad \Leftarrow \quad f(x) = \cot x$ در $(۰ , \frac{\pi}{۲})$ نزولی است.

تست ۲۱: اگر $\cos\alpha . \sin\alpha > ۰$ و $\cos\alpha . \tan\alpha < ۰$ آن‌گاه انتهای کمان α در کدام ناحیه‌ی مثلثاتی است؟

۱) اول ۲) دوم ۳) سوم ۴) چهارم

هر دو هم‌علامتند
پس یا ناحیه ۱ یا ۳

$\cos\alpha \cdot \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} < ۰$

$\sin\alpha < ۰$

باید در ناحیه ۳ باشد تا $\sin\alpha < ۰$ شود

تست ۲۲: حاصل عبارت $\dfrac{\sin x + \cos x}{۲} + \dfrac{|\sin x - \cos x|}{۲}$ که در آن $x \in [\circ , \frac{\pi}{۴}]$ کدام است؟ (سراسری)

۱) $\sin x$ ۲) $\cos x$ ۳) $\sin x + \cos x$ ۴) $\cos x - \sin x$

دایره قدرت :

پاسخ: گزینه‌ی «۲»

گفتیم در $[\circ , \frac{\pi}{۴}]$ (زیر خط $y = x$)، $\cos x > \sin x$:

$$\frac{|\sin x - \cos x|}{۲} + \frac{\sin x + \cos x}{۲} = \frac{-(\sin x - \cos x) + (\sin x + \cos x)}{۲} = \cos x$$

تست ۲۳: اگر $a \in \mathbb{R}$ و $\cos x = \sqrt{\dfrac{\cot x}{\cot x - a^۲}}$، انتهای کمان x در کدام ناحیه‌ی مثلثاتی است؟ مهم

$P = \sqrt{Q}$

$P \geq \circ \ , \ Q \geq \circ$

۱) اول ۲) دوم ۳) سوم ۴) چهارم

پاسخ: گزینه‌ی «۴»

$$\cos x = \sqrt{\frac{\cot x}{\cot x - a^۲}} \geq \circ \quad \Rightarrow \quad \cos x \geq \circ \quad \Rightarrow$$ انتهای کمان x در ناحیه‌ی اوّل یا چهارم

اما با انتخاب x در ناحیه‌ی اول، $\cot x > \circ$ و در نتیجه به ازای مقادیر بزرگ $a^۲$ می‌تواند زیر رادیکال منفی شود ودر نتیجه فرض مسئله که به ازای هر $a \in \mathbb{R}$ ، تساوی برقرار است از بین می‌رود. پس x باید در ناحیه‌ی چهارم باشد که در این صورت همواره زیر رادیکال مثبت خواهد بود:

$$\begin{cases} \cot x \leq \circ \\ \cot x - a^۲ < \circ \end{cases} \Rightarrow \quad \frac{\cot x}{\cot x - a^۲} \geq \circ$$

تست ۲۴: کدام نامساوی زیر نادرست است؟

۱) $\sin ۲\circ^\circ < \sin ۴\circ^\circ < \sin ۱\circ\circ^\circ$ ۲) $\cos ۱\circ\circ^\circ < \cos ۴\circ^\circ < \cos ۲\circ^\circ$

۳) $\sin ۴\circ^\circ < \sin ۹\circ^\circ < \sin ۱\circ\circ^\circ$ ۴) $\cos ۱\circ\circ^\circ < \cos ۷\circ^\circ < \cos ۴\circ^\circ$

$\sin ۹\circ = ۱$

$\sin ۱\circ\circ < ۱$

تست ۲۵: اگر $\sin\theta + \tan\theta > \circ$ و $\sin\theta \times \tan\theta < \dfrac{۱}{\cos\theta}$ باشند، انتهای کمان θ در کدام ناحیه قرار دارد؟ خیلی مهم

۱) اول ۲) دوم ۳) سوم ۴) چهارم

$\sin\theta < \circ$
$\cos\theta < \circ$
ناحیه سوم

$$\sin\theta + \frac{\sin\theta}{\cos\theta} > \circ$$
$$\frac{\sin\theta(\cos\theta + ۱)}{\cos\theta} > \circ$$

$$\frac{۱}{\cos\theta} < \sin\theta \cdot \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\sin^۲\theta}{\cos\theta}$$
$$\frac{۱}{\cos\theta} - \frac{\sin^۲\theta}{\cos\theta} < \circ \qquad \frac{۱ - \sin^۲\theta = \cos^۲\theta}{\cos\theta} < \circ$$

$-۱ \leq \cos\theta \leq \circ$ در راین

$\circ \leq ۱ + \cos\theta < ۱$

$\boxed{\cos\theta < \circ}$

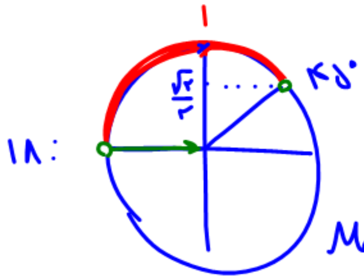
$\sin\theta(\cos\theta + ۱) < \circ$

$\sin\theta < \circ$ پس

نکته: از طریق نامساوی‌ها نمی‌توان نسبت مثلثاتی گرفت باید آن را به دایره منتقل کنیم.

تست ۲۶: اگر $45^\circ < \alpha < 180^\circ$ باشد و $\sin\alpha = \frac{5m+1}{3}$، آن‌گاه حدود m کدام است؟

۱) $(-\frac{1}{5},\frac{2}{5})$ ۲) $(-\frac{1}{5},\frac{2}{5}]$ ۳) $(\frac{1}{5},\frac{2}{5})$ ۴) $[0,\frac{2}{5}]$



$0<\sin\alpha\le 1 \rightarrow 0<\sin\alpha=\frac{5m+1}{3}\le 1$ ضرب در ۳

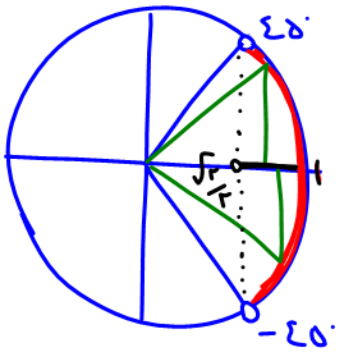
$0<5m+1\le 3 \rightarrow -1<5m\le 2 \rightarrow -\frac{1}{5}<m\le\frac{2}{5}$ گزینه ۲

Max و Min نه $\sin 45 = \frac{\sqrt2}{2}$

برای همین اصلاً کاریش نداریم.

تست ۲۷: اگر $-45^\circ < \alpha < 45^\circ$ و $\cos\alpha = \frac{3m+2}{4}$، آن‌گاه بیشترین مقدار m برابر است با:

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{4}{3}$



$\frac{\sqrt2}{2}<\cos\alpha=\frac{3m+2}{4}\le 1$ ضرب در ۴ $2\sqrt2<3m+2\le 4$

$2\sqrt2-2<3m\le 2 \rightarrow \frac{2\sqrt2-2}{3}<m\le\frac{2}{3}=Max$

V.I.P تست ۲۸: مجموع حداقل و حداکثر مقدار عبارت $\frac{\cos\alpha}{2+\cos\alpha}$ کدام است؟

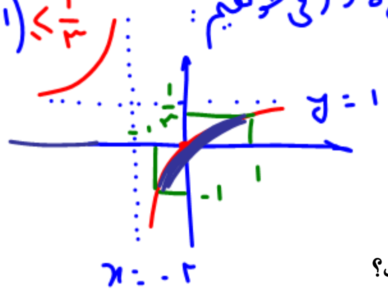
۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $-\frac{1}{3}$ ۳) $-\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{2}{3}$

تابع $f(x)=\frac{x}{2+x}$ و $g(x)=\cos x$ ترکیب شده و برد fog را می‌خواهیم:

ضریب $\cos$ باید ورودی تابع f باشد.

$f(x)$ را رسم کنید و x هایی که $\cos$ است را بین ۱ و ۱- نگه دارید.

$-1\le y=f(-1\le g(x)=\cos x\le 1)\le\frac{1}{3}$



$Max=\frac{1}{3}$

$Min=-1$

$Max+Min=-\frac{2}{3}$

V.I.P تست ۲۹: بیشترین مقدار عبارت $4+\cos^2 x+2\cos x$ کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۵ ۳) ۴ ۴) ۳

نکته: برای Max و min عبارت درجه ۲ برحسب sin یا cos یک بار به جای آن ۱ یک بار ۱- و یک بار $-\frac{b}{2a}$ می‌گذاریم

$y=a\sin^2x+b\sin x+c$ یا $y=a\cos^2x+b\cos x+c$ البته باید $-1\le-\frac{b}{2a}\le 1$ باشد. کمترین عدد به دست آمده Min و بیشترین Max است.

$y=\cos^2x+2\cos x+4$

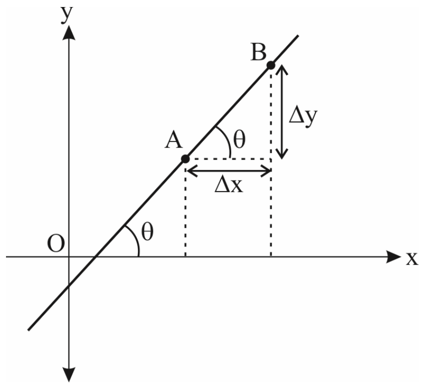
$\cos x=1 \rightarrow y=1+2+4=7=Max$

$\cos x=-1 \rightarrow y=1-2+4=3$ } Min

$\cos x=-\frac{b}{2a}=-\frac{2}{2}=-1 \rightarrow y=3$

$3\le y\le 7$ برد

رابطهٔ شیب خط با تانژانت اولیه



می‌دانیم که شیب هر خط، برابر نسبت تفاضل عرض‌های دو نقطهٔ واقع بر آن به تفاضل طول‌های همان دو نقطه است. حال اگر این خط محور xها را قطع کند، شیب خط برابر تانژانت زاویه‌ای است که خط با جهت مثبت محور xها می‌سازد، یعنی:

$$\tan\theta = \frac{\text{تفاضل عرض‌ها}}{\text{تفاضل طول‌ها}} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = m$$

به طور کلی می‌توان گفت:

الف) اگر خطی موازی با محور xها باشد، شیب آن صفر است.

ب) اگر خطی عمود بر محور xها باشد، شیب آن تعریف نشده است.

معادلهٔ خط

با داشتن یک نقطه از خط، مانند $A(x_\circ , y_\circ)$ و شیب خط از معادلهٔ مقابل استفاده می‌کنیم: $y - y_\circ = m(x - x_\circ)$

تست ۳۰: معادلهٔ خطی که با قسمت مثبت محور xها زاویهٔ ۴۵° می‌سازد و از نقطهٔ $A(۲,۳)$ می‌گذرد، کدام است؟

۱) $y = ۲x - ۱$ ۲) $y = ۲x + ۱$ ۳) $y = x - ۱$ ۴) $y = x + ۱$

پاسخ: گزینهٔ «۴» ـ شیب این خط برابر $m = \tan ۴۵^\circ = ۱$ است، در نتیجه:

$$y - y_\circ = m(x - x_\circ) \Rightarrow y - ۳ = ۱(x - ۲) \Rightarrow y = x + ۱$$

تست ۳۱: اگر خط $(۵t - ۳)x - ۲\sqrt{۳}y = ۱۰$ با جهت مثبت محور xها زاویهٔ ۳۰° بسازد، t کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

$y = mx + h$

$\frac{(۵t-۳)x}{۲\sqrt{۴}} - \frac{۱۰}{۲\sqrt{۴}} = y$

پاسخ: گزینهٔ «۲»

یادآوری: شیب خط $ax + by = c$ برابر $-\frac{a}{b}$ است.

$$m = \frac{-a}{b} \Rightarrow \begin{cases} a = ۵t - ۳ \\ b = -۲\sqrt{۳} \end{cases} \Rightarrow m = \frac{-(۵t-۳)}{-۲\sqrt{۳}} = \frac{۵t-۳}{۲\sqrt{۳}} = \tan ۳۰^\circ = \frac{\sqrt{۳}}{۳} = \frac{۱}{\sqrt{۳}}$$

شیب خط داده شده برابر $\frac{۵t-۳}{۲\sqrt{۳}}$ است، در نتیجه:

$$\tan ۳۰^\circ = \frac{۵t-۳}{۲\sqrt{۳}} \Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۳} = \frac{۵t-۳}{۲\sqrt{۳}} \Rightarrow ۲\sqrt{۳} \times \sqrt{۳} = ۳(۵t-۳) \Rightarrow ۶ = ۱۵t - ۹ \Rightarrow ۱۵t = ۱۵ \Rightarrow t = ۱$$

تست ۳۲: خطی که از نقطهٔ $A(۲,۳)$ عبور کرده و با راستای مثبت محور xها زاویهٔ ۴۵° می‌سازد، محور xها را با چه طولی قطع می‌کند؟

۱) ۱- ۲) ۱ ۳) ۳- ۴) ۳

$\tan ۴۵^\circ = ۱ = m$

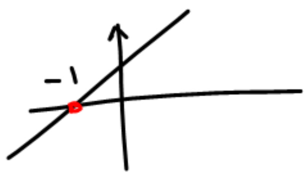
$y = mx + h$

$A\left|{}^{۲}_{۳}\right. \in y = x + h$

$۳ = ۲ + h$

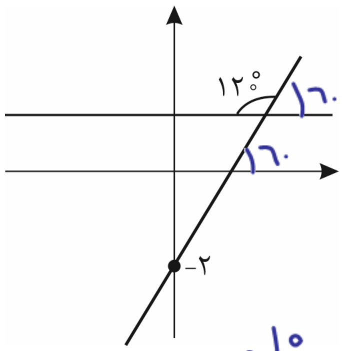
$\boxed{۱ = h}$

$\rightarrow \cancel{y} = x + ۱$ ، ۰



$x = -۱$

تست ۳۳: معادلهٔ خط مقابل کدام است؟



۱) $y+\sqrt{۳}x=۲$

۲) $y=\sqrt{۳}x-۲$ ✓

۳) $y-\sqrt{۳}x-۲=۰$

۴) $y=-\sqrt{۳}x-۴$

$m=\tan 60=\sqrt{3}$

$A(0,-2)$

$y=mx+h$

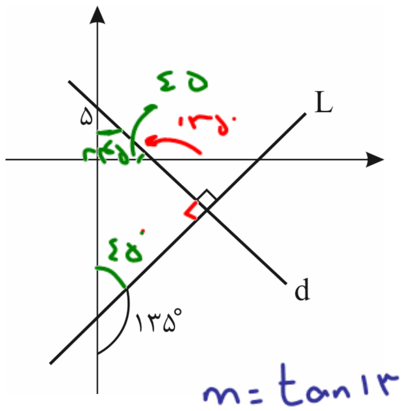
$A\begin{vmatrix}0\\-2\end{vmatrix}\in y=\sqrt{3}x+h$

$-2=\sqrt{3}(0)+h$

$-2=h$

$y=\sqrt{3}x-2$

تست ۳۴: معادلهٔ خط **d** در شکل مقابل کدام است؟



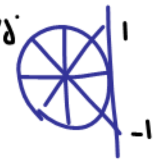
۱) $y=-x+۵$ ✓

۲) $y=x+۵$

۳) $y=\sqrt{۳}x+۵$

۴) $y=-\sqrt{۳}x+۵$

$m_d=\tan 135=-1$



$y=mx+h$

$y=-x+h$

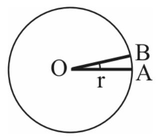
$A(0,5)\in y=-x+h$

$5=0+h$

$\boxed{5=h}$

واحدهای کمان و زاویه

درجه: اگر محیط دایره را به ۳۶۰ قسمت مساوی تقسیم کنیم، هر قسمت کمانی به اندازه‌ی یک درجه است و زاویه‌ی مرکزی مقابل بـه آن مساوی ۱ درجه است. یعنی:



$\overset{\frown}{AB}=\frac{۲\pi r}{۳۶۰}$ $\qquad$ $A\hat{O}B$ = ۱ درجه

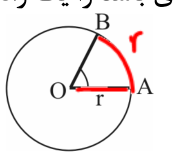
رادیان: زاویه‌ی مرکزی روبه‌رو به کمانی که طول آن با شعاع دایره مساوی باشد را یک رادیان می‌نامیم. یعنی:

محیط دایره ≈ ۶برابر شعاع یا ۳برابر قطر

$P\approx 3D=6r$

$P=\pi D=(2\pi)r$

۶٫۲۸...



محیط دایره ...۶٫۲۸ برابر شعاع

محیط $=2\pi r$

$=2(3.14...)r=6.28r$

Radian

شعاع :Radius

$\overset{\frown}{AB}=r$ $\qquad$ $A\hat{O}B$ = ۱ رادیان

و به همین ترتیب ۲ رادیان، زاویه‌ی مرکزی روبه‌رو به کمانی است که طول آن ۲ برابر شعاع دایره باشد و ۲π رادیان، زاویه‌ی مرکزی روبه‌رو به کمانی است که طول آن مساوی ۲π برابر شعاع دایره (همان محیط دایره) باشد. جالب شد!

پس:

هر دایره با هر شعاعی، ۳۶۰ درجه یا ۲π رادیان است.

رابطه‌ی بین رادیان و درجه:

$$\boxed{\frac{D}{۱۸۰}=\frac{R}{\pi}}$$

رادیان $= D\,\frac{\pi}{۱۸۰}$

۱۸۰: برای تبدیل رادیان به درجه جای π بزار

R اندازه‌ی زاویه برحسب رادیان و **D** اندازه‌ی زاویه برحسب درجه است، مثلاً اگر $R=۱$ فرض شود، داریم:

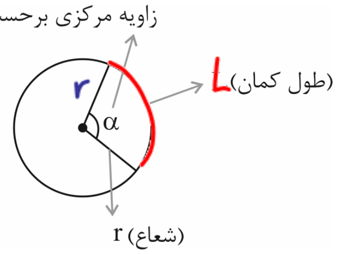
$$D=\frac{۱۸۰}{\pi}\xrightarrow{\pi\simeq ۳/۱۴}D\simeq ۵۷^\circ$$

یک رادیان $= ۵۷٫۳۰$

یک درجه ۰٫۰۱۷ رادیان

یک رادیان

هر یک رادیان، تقریباً ۵۷° است.



$۲\pi r$	۲π
L	α

$L=\frac{\alpha\, ۲\pi r}{۲\pi}\rightarrow L=r\alpha$

رادیان

طول کمانی که روی دایره داریم و قسمتی از محیط دایره است.

اگر طول کمان روبه‌رو به زاویه را با نماد **L** ، شعاع دایره را با **r** و اندازه‌ی زاویه را با α نشان دهیم، آن‌گاه رابطه‌ی بالا به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\alpha=\frac{L}{r}$$

تست ۳۵: اگر در یک دایره، اندازه‌ی کمان مقابل به زاویه‌ی مرکزی $\theta=۵۰^\circ$ برابر ۱۰ سانتی‌متر باشد، مساحت این دایره چند برابر محیط آن است؟

۱) $\frac{۱}{۵۰}$ ۲) $\frac{۱}{۱۰}$ ۳) $\frac{۱۸}{\pi}$ ۴) $\frac{۳۶}{\pi}$

رادیان

$L=r\theta \longrightarrow ۱۰=r\,\frac{۵۰\pi}{۱۸۰}\longrightarrow r=\frac{۱۸۰۰}{۵۰\pi}=\frac{۱۸۰}{۵\pi}$

رادیان $\theta=۵۰\,\frac{\pi}{۱۸۰}$

دقت: الان به رادیان تبدیل شد

$\frac{S}{P}=\frac{\pi r^2}{۲\pi r}=\frac{۱}{۲}r=\frac{۹۰}{۵\pi}=\frac{۱۸}{\pi}$

۲ تست ۳۶: دایره‌ای به مساحت ۴π مفروض است. قطاعی به محیط ۷/۱۴ از آن جدا کرده‌ایم. زاویه‌ای که توسط این قطاع از دایره جدا می‌شود، چند درجه است؟ $(\pi\simeq ۳/۱۴)$

۱) ۱۸۰ ۲) ۹۰ ۳) ۴۵ ۴) ۱۲۰

$S=\pi r^2=۴\pi\longrightarrow r=۲$

$L=r\theta$

$۲r+(L=r\theta)=۷٫۱۴$

$۴+۲\theta=۷٫۱۴$

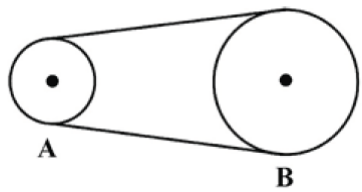
$۲\theta=۳٫۱۴$

$۲\theta=\pi\longrightarrow \theta=\frac{\pi}{۲}=۹۰^\circ$

$L=r\theta=r(\frac{\pi}{۲})$

تست ۳۷: در شکل زیر چرخ‌دنده‌های **A** و **B** توسط نواری لاستیکی به هم وصل شده‌اند. شعاع چرخ‌دنده‌ی **A**، ۲۰ سانتی‌متر و شعاع چرخ‌دنده‌ی **B** برابر با ۱ متر است. اگر چرخ‌دنده‌ی **B** به اندازه‌ی $\frac{3\pi}{2}$ رادیان بچرخد، چرخ‌دنده‌ی **A** چند دور می‌زند؟

۱۰۰ سانتی‌متر



۱) ۲/۵
۲) ۵
۳) ۳/۷۵
۴) ۱۰

$L_A = L_B$

$r_A \cdot \theta_A = r_B \cdot \theta_B$

$۲۰\ \theta_A = ۱۰۰\left(\frac{۳\pi}{۲}\right)$

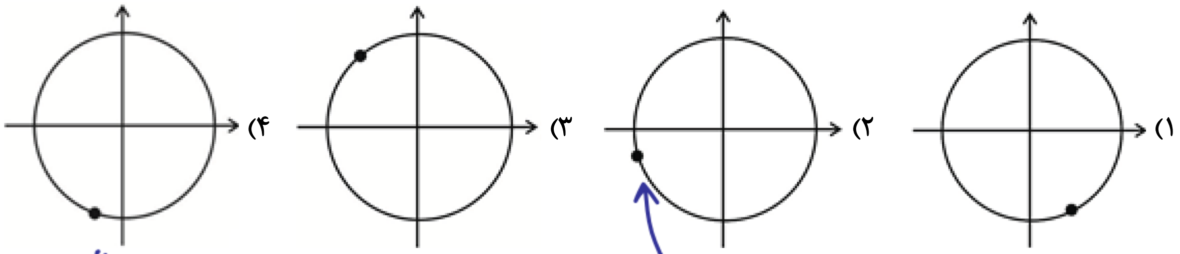
$\theta_A = ۵\left(\frac{۳\pi}{۲}\right) = \frac{۱۵\pi}{۲}$

۲π	یک دور دایره
$\frac{۱۵\pi}{۲}$	?

$\frac{\frac{۱۵\pi}{۲}}{۲\pi} = \frac{۱۵}{۴} = \frac{۷/۵}{۲} = ۳/۷۵$ دور

۳

تست ۳۸: مجموع دو زاویه ۷۲° و تفاضل آن دو زاویه $\frac{\pi}{۱۵}$ رادیان است. اگر اندازه‌ی زاویه‌ی بزرگ‌تر برابر با **x** درجه باشد، زاویه‌ی $(۵x - ۱۰^\circ)$ به طور تقریبی روی دایره‌ی مثلثاتی کدام است؟



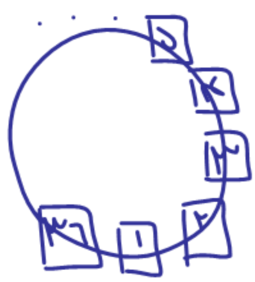
$$\begin{cases} x + y = ۷۲^\circ \\ x - y = \frac{\pi}{۱۵} = \frac{۱۸۰}{۱۵} = ۱۲ \end{cases}$$

$۲x = ۸۴^\circ \longrightarrow x = ۴۲^\circ$

$۵x - ۱۰ = ۵(۴۲^\circ) - ۱۰^\circ = ۲۰۰^\circ$

تست ۳۹: چرخ و فلکی دارای ۳۶ کابین است و شما در کابین شماره‌ی پنجم قرار دارید. اگر چرخ و فلک به اندازه‌ی $\frac{۱۱\pi}{۳}$ رادیان در جهت مثبت مثلثاتی حرکت کند، در موقعیت اولیه‌ی کدام کابین قرار می‌گیرید؟ (شماره‌گذاری کابین‌ها در جهت مثبت مثلثاتی و فاصله‌ی کابین‌ها یکسان است.)

۱) ۲۵
۲) ۳۰
۳) ۳۴
۴) ۳۵



$۱۱\left(\frac{\pi}{۳} = ۶۰^\circ\right) = ۶۶۰^\circ \xrightarrow[\text{هر یک دور دایره } ۳۶۰^\circ \text{ است}]{-۳۶۰^\circ} ۳۰۰^\circ$

$\frac{۳۶۰^\circ}{۳۶ \text{ کابین}} = ۱۰^\circ$ فاصله بین دو کابین متوالی

$\frac{۳۰۰^\circ}{۱۰^\circ} = ۳۰$ تا کابین

کدام جلو می‌آییم به شماره ۳۵

نکات ساعت

الف) عقربهٔ دقیقه‌شمار به ازای هر یک دقیقه ۶ درجه طی می‌کند.

ب) عقربهٔ ساعت‌شمار به ازای هر یک ساعت ۳۰ درجه طی می‌کند.

پ) عقربهٔ ساعت‌شمار به ازای هر یک دقیقه ۰/۵ درجه طی می‌کند.

ت) زاویهٔ بین عقربهٔ ساعت‌شمار و دقیقه‌شمار از دستور زیر پیدا می‌شود:

$$\theta = \left|\frac{11m}{2} - 30h\right|$$

h : ساعت
m : دقیقه

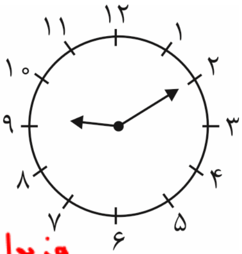
تست ۴۰: چه مدت طول می‌کشد تا عقربه‌ی دقیقه‌شمار ساعت به اندازه‌ی $\frac{8\pi}{3}$ رادیان دوران کند؟

۱) یک ساعت
۲) یک ساعت و ۱۰ دقیقه
۳) یک ساعت و ۲۰ دقیقه
۴) یک ساعت و ۳۰ دقیقه

۶۰ دقیقه	۲π رادیان
?	$\frac{8\pi}{3}$

$? = \frac{\frac{8\pi}{3}(60)}{2\pi} = 4(20) = 80 = 60$ دقیقه $+ 20$ دقیقه $=$ یک ساعت و ۲۰ دقیقه

تست ۴۱: زاویه بین عقربه‌های ساعت‌شمار و دقیقه‌شمار در ساعت $9:10'$ چند رادیان است؟



۱) $\frac{9\pi}{5}$
۲) $\frac{29\pi}{30}$
۳) $\frac{29\pi}{36}$
۴) $\frac{145\pi}{36}$

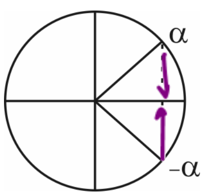
فرمول هم

$\theta = |30h - \frac{11}{2}m| = |30(9) - \frac{11}{2}(10)| = |270 - 55| = 215°$ یا $360° - 215° = 145°$

باید دید ۱۴۵ یا ۲۱۵ را در گزینه‌ها:

رادیان = درجه $\frac{\pi}{180} = 215\frac{\pi}{180} = \frac{29\pi}{36}$ ۳ ✓

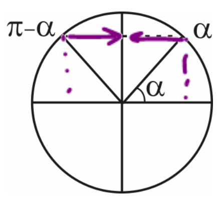
نسبت‌های مثلثاتی α و $-\alpha$ (قرینه)



$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$
$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$
$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$
$\cot(-\alpha) = -\cot\alpha$

$\sin(-30°) = -\sin 30° = -\frac{1}{2}$
$\cos(-60°) = \cos 60° = \frac{1}{2}$

نسبت‌های مثلثاتی زوایای مکمل $(\alpha, \pi - \alpha)$



$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$
$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$
$\tan(\pi - \alpha) = -\tan\alpha$
$\cot(\pi - \alpha) = -\cot\alpha$

$\sin 150° = \sin 30° = \frac{1}{2}$
$\cos 120° = -\cos 60° = -\frac{1}{2}$

یادت باشه: دو زاویه‌ای که مکمل هستند (جمعشان 180° است) سینوس‌های مساوی دارند، اما کسینوس و تانژانت و کتانژانت قرینه دارند. یعنی به عنوان مثال جمع کسینوس‌های دو زاویه مکمل برابر صفر است. (برای تانژانت و کتانژانت نیز به همین صورت، البته به شرطی که هیچ‌یک از دو زاویه باعث بی‌معنی شدن تانژانت و کتانژانت نشود.)

مثال ۴۲:

$\sin 150 = \sin(\pi - 30) = \sin 30 = \frac{1}{2}$

$\cos 150 = \cos(\pi - 30) = -\cos 30 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan 150 = \tan(\pi - 30) = -\tan 30 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

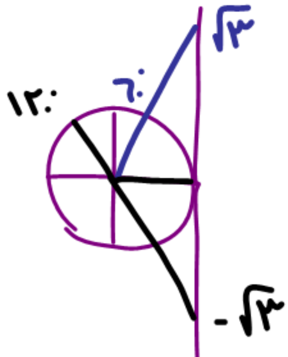
$\cot 150 = \cot(\pi - 30) = -\cot 30 = -\sqrt{3}$

$\sin 120 = \sin(\pi - 60) = \sin 60 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos 120 = \cos(\pi - 60) = -\cos 60 = -\frac{1}{2}$

$\tan 120 = \tan(\pi - 60) = -tg 60 = -\sqrt{3}$

$\cot 120 = \cot(\pi - 60) = -\cot 60 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$



$t\,120 = -tg\,60 = -\sqrt{3}$

$\tan 120 + \tan 60 =$ صفر

$\tan\theta = tg\,\theta = t\,\theta$ خطا تحریری ماشین حساب کتاب درسی

$\cos 30 + \cos 150 =$ صفر

زاویه‌های مکمل

اگر $\alpha + \beta = \pi$ ، پس $\alpha = \pi - \beta$ و در نتیجه:

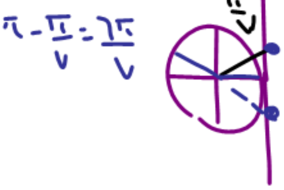
$$\boxed{\sin\alpha = +\sin\beta \quad , \quad \cos\alpha = -\cos\beta \quad , \quad \tan\alpha = -\tan\beta \quad , \quad \cot\alpha = -\cot\beta}$$

بنابراین:

اگر دو زاویه مکمل باشند، مجموع کسینوس‌های آن، تانژانت‌های آن‌ها و کتانژانت‌های آن‌ها مساوی صفر است.

مثال ۴۳: حاصل $\tan\left(\frac{\pi}{7}\right) + \tan\left(\frac{6\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$ مساوی صفر است، زیرا:

$$\frac{\pi}{7} + \frac{6\pi}{7} = \pi \Rightarrow \tan\frac{\pi}{7} + \tan\frac{6\pi}{7} = 0 \quad , \quad \frac{\pi}{5} + \frac{4\pi}{5} = \pi \Rightarrow \cos\frac{\pi}{5} + \cos\frac{4\pi}{5} = 0$$



تست ۴۴: حاصل عبارت $\cos\frac{\pi}{n} + \cos\frac{2\pi}{n} + \cdots + \cos\frac{n-1}{n}\pi$ با فرض فردبودن **n** کدام است؟

۱) ۱ ۲) صفر ۳) n ۴) $-n$

مثلاً $n=3$

$\cos\frac{\pi}{3} + \cos\frac{2\pi}{3} = 0$

پاسخ: گزینه‌ی «۲»

$$\cos\boxed{\frac{\pi}{n}} + \cos\boxed{\frac{2\pi}{n}} + \cdots + \cos\boxed{\frac{(n-2)\pi}{n}} + \cos\boxed{\frac{(n-1)\pi}{n}}$$

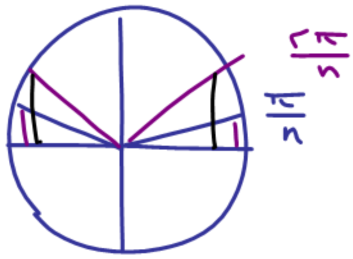
توی این مدل از سؤالات اولی و آخری رو با هم بگیرید و به همین ترتیب دومی رو با یکی مونده به آخری و ... . دقت کنید که اگر این زاویه‌ها را با هم جمع کنیم دو به دو جمعشان π می‌شود. یعنی مکمل هم هستند پس جمع کسینوس‌هایشان صفر می‌شود.

$$\frac{\pi}{n} + \frac{(n-1)\pi}{n} = \frac{\pi}{n} + \frac{n\pi - \pi}{n} = \frac{n\pi}{n} = \pi$$

$$\frac{۲\pi}{n}+\frac{(n-۲)\pi}{n}=\frac{۲\pi}{n}+\frac{n\pi-۲\pi}{n}=\frac{n\pi}{n}=\pi$$

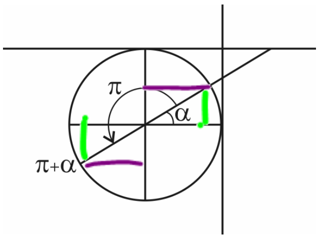
$\frac{(n-۲)\pi}{n}=\pi-\frac{۲\pi}{n}$

$\frac{(n-۱)\pi}{n}=\pi-\frac{\pi}{n}$



پس جواب صفر است.

نسبت‌های مثلثاتی $(\alpha, \pi+\alpha)$



$\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha$

$\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha$

$\tan(\pi+\alpha)=\tan\alpha$

$\cot(\pi+\alpha)=\cot\alpha$

یادت باشه: اگر به زاویه‌ای π رادیان اضافه شود، سینوس و کسینوس قرینه می‌شود، اما تانژانت و کتانژانت ثابت می‌مانند.

تذکر: در سینوس و کسینوس از مضارب زوج π و در تانژانت و کتانژانت از هر مضرب π هر چه فرد و چه زوج صرف نظر می‌کنیم

$$\begin{cases}\sin(۲k\pi+\alpha)=\sin\alpha\\ \cos(۲k\pi+\alpha)=\cos\alpha\end{cases}\qquad \begin{cases}\tan(k\pi+\alpha)=\tan\alpha\\ \cot(k\pi+\alpha)=\cot\alpha\end{cases}$$

$\sin(۱۰۰\pi+\frac{\pi}{۶})=\sin\frac{\pi}{۶}=\frac{۱}{۲}$ $\quad \tan(\cancel{۱۷\pi}+\frac{\pi}{۳})=\sqrt{۳}$ صرف نظر

مثال ۴۵:

$\sin ۲۱۰^\circ=\sin(\pi+۳۰^\circ)=-\sin ۳۰=-\frac{۱}{۲}$

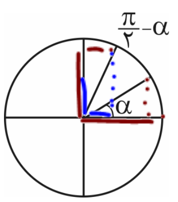
$\cos ۲۱۰^\circ=\cos(\pi+۳۰^\circ)=-\cos ۳۰=-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

$\tan ۲۱۰^\circ=\tan(\pi+۳۰^\circ)=\tan ۳۰^\circ=\frac{\sqrt{۳}}{۳}$

$\cot ۲۱۰^\circ=\cot(\pi+۳۰^\circ)=\cot ۳۰^\circ=\sqrt{۳}$

یادآوری: در سینوس، کسینوس از مضارب زوج π و در تانژانت و کتانژانت از هر مضرب π (چه فرد چه زوج) صرف نظر می‌کنیم.

نسبت‌های مثلثاتی دو زاویه متمم (جمع $\frac{\pi}{۲}$)



$\sin(\frac{\pi}{۲}-\alpha)=\cos\alpha$

$\cos(\frac{\pi}{۲}-\alpha)=\sin\alpha$

$\tan(\frac{\pi}{۲}-\alpha)=\cot\alpha$

$\cot(\frac{\pi}{۲}-\alpha)=\tan\alpha$

یادت باشه: در مضارب فرد $\frac{\pi}{۲}$ نام نسبت عوض می‌شود. $\sin \rightleftarrows \cos$ و $\tan \rightleftarrows \cot$

$\sin(\frac{۱۱۷\pi}{۲}+\theta)=+\cos\theta$

$\sin(\frac{۱۱۷\pi}{۲}+\theta)=\frac{۱۱۶\pi}{۲}+\frac{\pi}{۲}+\theta=\cancel{۵۸\pi}+\frac{\pi}{۲}+\theta$ صرف نظر

یادت باشه:

$$\sin(\frac{\pi}{۲}+\alpha)=\cos\alpha \qquad \tan(\frac{\pi}{۲}+\alpha)=-\cot\alpha$$

$$\cos(\frac{\pi}{۲}+\alpha)=-\sin\alpha \qquad \cot(\frac{\pi}{۲}+\alpha)=-\tan\alpha$$

تذکر: در تمامی حالات فوق، α را زاویه‌ای حادّه در نظر گرفتیم.

یادت باشـه: برای شما نحوه‌ی $\cos(\frac{۳\pi}{۲}+\alpha)$ را توضیح می‌دم و بدانید که تمامی حالات فوق را باید با این روش بررسی کنیـد و حفظ کردن آن‌ها کار خوبی نیست. α زاویه‌ای حادّه اسـت. $\frac{۳\pi}{۲}+\alpha$ یعنـی در جهـت مثبـت مثلثـاتی (خـلاف جهـت عقربـه‌هـای سـاعت) بـه اندازه‌ی $\frac{۳\pi}{۲}$ (۲۷۰ درجه) حرکت کنیم و سپس چون $+\alpha$ داریم یعنی مقداری دیگر نیز در این جهت جلو برویم. پس انتهای کمان، ربع سوم را رد کرد و در ربع چهارم قرار دارد. حالا می‌گوییم که در ربع چهارم، کسینوس مثبت است، پس خروجی حتماً مثبت است و ضمناً به دلیل وجود فرد $\frac{\pi}{۲}$ $(\frac{۳\pi}{۲})$ نام نسبت عوض شده و تبدیل به سینوس می‌شود. پس:

$$\cos(\frac{۳\pi}{۲}+\alpha)=+\sin\alpha$$

محاسبه‌ی سریع نسبت‌های مثلثاتی $\frac{k\pi}{۶}$، $\frac{k\pi}{۴}$ و $\frac{k\pi}{۳}$

ابتدا با استفاده از زاویه‌ی مربوطه علامت نسبت رو مشخص کرده، بعد k را ندید گرفته و حاصل نسبت $\frac{\pi}{۶}$ یا $\frac{\pi}{۴}$ یا $\frac{\pi}{۳}$ خواسته شده را قرار می‌دهیم. به عنوان مثال ببینید:

$$\sin(\frac{۷\pi}{۶})=\sin\underbrace{(۷\times\frac{\pi}{۶})}_{\text{ربع سوم}}=-\sin(\frac{\pi}{۶})=-\frac{۱}{۲}$$

$$\cot(-\frac{۵\pi}{۳})=-\cot\underbrace{(۵\times\frac{\pi}{۳})}_{\text{ربع چهارم}}=-\left(-\cot(\frac{\pi}{۳})\right)=-(-\frac{\sqrt{۳}}{۳})=\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

برای تشخیص ساده‌تر زاویه‌هایی مثل $\frac{۷\pi}{۶}$ یا $\frac{۵\pi}{۳}$، توصیه می‌کنم آن‌ها را در ذهنتان به درجه تبدیل کنید، یعنی:

$$۷\times\frac{\pi}{۶}=۷\times۳۰^\circ=۲۱۰^\circ \qquad \text{یا} \qquad ۵\times\frac{\pi}{۳}=۵\times۶۰^\circ=۳۰۰^\circ$$

تست ۴۶: حاصل عبارت $\frac{\cos۲۸۵^\circ-\sin۲۵۵^\circ}{\sin۵۲۵^\circ-\sin۱۰۵^\circ}$، با فرض $\tan۱۵^\circ=۰/۲۸$ کدام است؟ (تجربی ۹۴)

۱) $-\frac{۱۶}{۹}$ ✓ ۲) $-\frac{۹}{۱۶}$ ۳) $\frac{۱۶}{۹}$ ۴) $\frac{۹}{۱۶}$

برای تولید $tg۱۵$ در * هر جمله‌های صورت و مخرج را بر $C۱۵$ تقسیم کن

$Cos(۲۸۵^\circ=۲۷۰^\circ+۱۵^\circ=\frac{۳\pi}{۲}+۱۵^\circ)=Sin۱۵^\circ$ 

$Sin(۲۵۵^\circ=۲۷۰^\circ-۱۵^\circ=\frac{۳\pi}{۲}-۱۵^\circ)=-Cos۱۵^\circ$ 

صرف نظر

$Sin(۵۲۵^\circ=۵۴۰^\circ-۱۵^\circ=۳\pi-۱۵^\circ=\cancel{۲\pi}+\pi-۱۵^\circ)=Sin(\pi-۱۵)=Sin۱۵^\circ$ 

$Sin(۱۰۵^\circ=۹۰^\circ+۱۵^\circ=\frac{\pi}{۲}+۱۵^\circ)=Cos۱۵^\circ$ 

$$* \quad \frac{\frac{Sin۱۵}{Cos۱۵}+\frac{Cos۱۵}{Cos۱۵}}{\frac{Sin۱۵}{Cos۱۵}-\frac{Cos۱۵}{Cos۱۵}}=\frac{\cancel{tg۱۵}^{۰/۲۸}+۱}{\cancel{tg۱۵}_{۰/۲۸}-۱}=\frac{۱/۲۸}{-۰/۷۲}$$

$\tan\theta . Cotan\theta = 1$

برای صحبت از زاویه ۸۹: تانژانتم کتانژانتند

$\tan 89^\circ = Cotan 1^\circ$
$\tan 88^\circ = Cotan 2^\circ$

تست ۴۷: حاصل عبارت $A = \tan 1^\circ . \tan 2^\circ .... \tan 88^\circ . \tan 89^\circ$ کدام است؟

۱) تعریف‌نشده ۲) ۱ ۳) صفر ۴) $\frac{1}{2}$

$A = \tan 1^\circ . \tan 2^\circ .. \tan 45^\circ \; Cotan 2^\circ \; Cotan 1^\circ = 1$

یک یک یک

چند نتیجه‌ی مهم از این سؤال: ۲ زاویه‌ای که متمم هستند، تانژانت و کتانژانت‌شان برابر است. $\tan\alpha = \cot\beta$ این اتفاق برای سینوس و کسینوس نیز صادق است، یعنی:

$$\alpha+\beta=\frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha=\frac{\pi}{2}-\beta \Rightarrow \begin{cases}\sin\alpha=\cos\beta\\ \cos\alpha=\sin\beta\end{cases}$$

به عنوان مثال: $\sin 15^\circ = \cos 75^\circ$، $\cos 53^\circ = \sin 37^\circ$ و ... ضمناً برای دو زاویه‌ای که متمم هستن، داریم:

$$\tan\alpha . \tan\beta = 1$$

تست ۴۸: اگر $\tan 15^\circ = a$ باشد، حاصل $\frac{3\cos 165^\circ - 2\sin 285^\circ}{3\sin 345^\circ - 4\cos 255^\circ}$ کدام است؟

۱) $-\frac{1}{a}$ ۲) $-a$ ۳) $-\frac{2}{a}$ ۴) $-2a$

$\pi - 15^\circ$ 15°

$Cos(165^\circ = 180^\circ - 15^\circ = \pi - 15^\circ) = -Cos 15^\circ$

$Sin(285^\circ = 270^\circ + 15^\circ = \frac{3\pi}{2} + 15^\circ) = -Cos 15^\circ$

$Sin(345^\circ = 360^\circ - 15^\circ = \cancel{2\pi} - 15^\circ) = Sin(-15^\circ) = -Sin 15^\circ$

$Cos(255^\circ = 270^\circ - 15^\circ = \frac{3\pi}{2} - 15^\circ) = -Sin 15^\circ$

$\frac{-3Cos 15^\circ + 2Cos 15^\circ}{-3Sin 15^\circ + 4Sin 15^\circ} = \frac{-Cos 15^\circ}{Sin 15^\circ} = -Cotan 15^\circ = \frac{-1}{\tan 15^\circ} = \frac{-1}{a}$

تست ۴۹: مقدار عبارت $\boxed{\cot(750^\circ) + \tan(-840^\circ)} + \boxed{\cos(300^\circ) + \sin(330^\circ)}$ کدام است؟

$\sqrt{3} + \sqrt{3}$ صفر

۱) ۱ ۲) $2\sqrt{3}$ ۳) صفر ۴) $2\frac{\sqrt{3}}{3}$

کسینوس منفی خورده

$Cos(300^\circ = 360^\circ - 60^\circ = \cancel{2\pi} - 60^\circ) = Cos(-60^\circ) = Cos 60^\circ = \frac{1}{2}$

$Sin(330^\circ = 360^\circ - 30^\circ = \cancel{2\pi} - 30^\circ) = Sin(-30^\circ) = -Sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$

$Cot(750^\circ = 720^\circ + 30^\circ = \cancel{4\pi} + 30^\circ) = Cotan 30^\circ = \sqrt{3}$

$\tan(-840^\circ) = -\tan(840^\circ = \cancel{5\pi} - 60^\circ) = -\tan(-60^\circ) = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$

$\pi-\frac{\pi}{8}=\frac{7\pi}{8}$  $\frac{\pi}{8}$

$\frac{\pi}{8}+\frac{7\pi}{8}=\pi \xrightarrow{\text{مکمل}} \sin\frac{\pi}{8}=\sin\frac{7\pi}{8}$ $\quad \sin^2\frac{3\pi}{8} \quad \sin^2\frac{\pi}{8}$

$\frac{3\pi}{8}+\frac{5\pi}{8}=\pi \xrightarrow{\text{مکمل}} \sin\frac{3\pi}{8}=\sin\frac{5\pi}{8}$ 

تست ۵۰: حاصل عبارت $\sin^2\frac{\pi}{8}+\sin^2\frac{3\pi}{8}+\sin^2\frac{5\pi}{8}+\sin^2\frac{7\pi}{8}$ کدام است؟

۱) $\frac{5}{2}$ ۲) ۲ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) ۱

$2\sin^2\frac{\pi}{8}+2\sin^2\frac{3\pi}{8}=2\left(\sin^2\frac{\pi}{8}+\sin^2\frac{3\pi}{8}=\cos^2\frac{3\pi}{8}+\sin^2\frac{3\pi}{8}=1\right)=2(1)=2$

$\frac{\pi}{8}+\frac{3\pi}{8}=\frac{4\pi}{8}=\frac{\pi}{2}$ متمم $\sin\frac{\pi}{8}=\cos\frac{3\pi}{8}$

$\frac{3}{4}$ $\quad -\frac{1}{2}=\frac{3}{4}-\frac{2}{4}=\frac{1}{4}$

تست ۵۱: حاصل عبارت $\boxed{\tan(\frac{19\pi}{4})\sin(-\frac{11\pi}{6})}+\boxed{\sin(\frac{17\pi}{3})\cos(-\frac{17\pi}{6})}$ کدام است؟ (تجربی ۹۸)

۱) $-\frac{1}{4}$ ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{1}{2}$

صرف نظر

$\sin(\frac{17\pi}{3}=\frac{18\pi}{3}-\frac{\pi}{3})=\sin(-\frac{\pi}{3})=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\pi-\frac{\pi}{6}$  $\frac{\pi}{6}$

$\cos(-\frac{17\pi}{6})=\cos(\frac{17\pi}{6}=\frac{18\pi}{6}-\frac{\pi}{6}=3\pi-\frac{\pi}{6}=\cancel{2\pi}+\pi-\frac{\pi}{6})=-\cos\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan(\frac{19\pi}{4}=\frac{20\pi}{4}-\frac{\pi}{4}=\cancel{5\pi}-\frac{\pi}{4})=\tan(-\frac{\pi}{4})=-\tan(\frac{\pi}{4})=-1$

$\sin(-\frac{11\pi}{6})=-\sin(\frac{12\pi}{6}-\frac{\pi}{6}=\cancel{2\pi}-\frac{\pi}{6})=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$

تست ۵۲: حاصل عبارت $\underbrace{\tan(285^\circ)\tan(-165^\circ)}_{\text{الف}}-\underbrace{\sin(1095^\circ)\cos(255^\circ)}_{\text{ب}}$ کدام است؟ (خارج تجربی ۹۹)

۱) $\sin^2(15^\circ)$ ۲) $\cos^2(15^\circ)$ ۳) $-\sin^2(15^\circ)$ ۴) $-\cos^2(15^\circ)$

$\tan(285^\circ=270^\circ+15^\circ=\frac{3\pi}{2}+15^\circ)=-\cot 15^\circ$

$\tan(-165^\circ)=-\tan(180^\circ-15^\circ=\cancel{\pi}-15^\circ)=\tan 15^\circ$

$\xrightarrow{\text{ضرب}} (-1)$

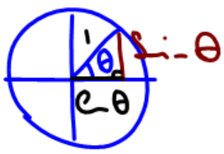
$\sin(1095^\circ=\cancel{6\pi}+15^\circ)=\sin 15^\circ$

$\cos(255^\circ=270^\circ-15^\circ=\frac{3\pi}{2}-15^\circ)=-\sin 15^\circ$

$\xrightarrow{\text{ضرب}} -\sin^2 15^\circ$

$(\text{الف})-(\text{ب})=-1+\sin^2 15^\circ=-(1-\sin^2 15^\circ)=-\cos^2 15^\circ$

روابط بین نسبت‌های مثلثاتی



روابط مثلثاتی کتاب دهم عبارت‌اند از:

۱) $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

اگر بخواهیم هر یک از نسبت‌های $\sin\theta$ یا $\cos\theta$ را برحسب دیگری بیابیم، داریم:

نتیجه:

$$\begin{cases}\sin^2\theta=1-\cos^2\theta \Rightarrow \sin\theta=\pm\sqrt{1-\cos^2\theta}\\ \cos^2\theta=1-\sin^2\theta \Rightarrow \cos\theta=\pm\sqrt{1-\sin^2\theta}\end{cases}$$

که علامت آن‌ها بر مبنای ناحیه‌ای که زاویه در آن قرار گرفته است، مشخص می‌شود.

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1 \quad \div\cos^2\theta$

$\tan^2\theta+1=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$

$\div\sin^2\theta \quad 1+\text{Cotan}^2\theta=\dfrac{1}{\sin^2\theta}$

۲) $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ ۳) $\cot\theta=\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$

۴) $\tan\theta=\dfrac{1}{\cot\theta}$ ۵) $\cot\theta=\dfrac{1}{\tan\theta}$

۶) $\tan\theta\times\cot\theta=1$: تی جی کوتی جی ضربش یکه ۷) $\dfrac{1}{\cos^2\theta}=1+\tan^2\theta$

۸) $\dfrac{1}{\sin^2\theta}=1+\cot^2\theta$ ۹) $\tan\theta+\cot\theta=\dfrac{1}{\sin\theta.\cos\theta}$

تی جی بعلاوه کوتی جی میشه یک روی ضرب سینوس کسینوس

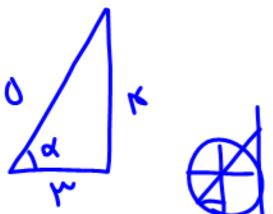
$\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}+\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}=\dfrac{\sin^2\theta+\cos^2\theta=1}{\sin\theta\cos\theta}$

۱۰) $(\sin\theta+\cos\theta)^2=1+2\sin\theta\cos\theta$

$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$

تست ۵۳: اگر α در ناحیهٔ سوم بوده و $\cos\alpha=-\dfrac{3}{5}$ باشد، حاصل $\dfrac{\cot\alpha}{\sin\alpha+\tan\alpha}$ کدام است؟

۱) $\dfrac{32}{45}$ ۲) $\dfrac{45}{32}$ ✓ ۳) $\dfrac{31}{45}$ ۴) $\dfrac{45}{31}$



$\tan\alpha=\dfrac{4}{3}$ ، $\text{Cotan}\,\alpha=\dfrac{3}{4}$ ، $\sin\alpha=-\dfrac{4}{5}$ (سوم α)

$$\dfrac{\frac{3}{4}}{-\frac{4}{5}+\frac{4}{3}=\frac{-12+20}{15}=\frac{8}{15}}=\dfrac{3(15)}{4(8)}=\dfrac{45}{32}$$

تست ۵۴: اگر $\cos\theta=-\dfrac{3}{5}$ و انتهای کمان θ در ناحیه‌ی سوم مثلثاتی باشد، حاصل $\dfrac{\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$ کدام است؟

۱) $-\dfrac{12}{7}$ ۲) $-\dfrac{3}{7}$ ۳) $\dfrac{12}{7}$ ۴) $\dfrac{3}{7}$

$\tan\theta=\dfrac{4}{3}\xrightarrow{\text{سوم}\ \alpha}\dfrac{4}{3}$

$$\dfrac{\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\dfrac{\frac{4}{3}}{1-\left(\frac{16}{9}\right)=\frac{9-16}{9}=\frac{-7}{9}}=\dfrac{4(\cancel{9}^{3})}{\cancel{3}_{1}(-7)}=-\dfrac{12}{7}$$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

$1+\cot^2\theta=\dfrac{1}{\sin^2\theta}$

$\tan^2\theta+1=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$

$\sin^2\theta=\dfrac{1}{1+\cot^2\theta}$

$\cos^2\theta=\dfrac{1}{1+\tan^2\theta}$

تست ۵۵: حاصل $\dfrac{\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}+\dfrac{\cot^2\alpha}{1+\cot^2\alpha}$ در صورت وجود کدام است؟

۱) $2\sin^2\alpha$ ۲) $\cos^2\alpha$ ۳) صفر ۴) ۱ ✓

$$\boxed{\dfrac{1}{1+\cot^2\theta}}\cot^2\theta+\boxed{\dfrac{1}{1+\tan^2\theta}}\tan^2\theta=\cancel{\sin^2\theta}\dfrac{\cos^2\theta}{\cancel{\sin^2\theta}}+\cancel{\cos^2\theta}\dfrac{\sin^2\theta}{\cancel{\cos^2\theta}}$$

$=\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$

$(a-b)^2=a^2+b^2-2ab$

تست ۵۶: اگر $\tan\theta=\frac{۳}{۴}$، حاصل $(\tan\theta-\cot\theta)^۲-\frac{۱}{\cos^۲\theta}$ کدام است؟

$\cot\theta=\frac{4}{3}$

۱) $-\frac{۱۱}{۹}$ ✓ ۲) $-\frac{۱۲}{۲۵}$ ۳) $\frac{۱۶}{۲۵}$ ۴) $\frac{۱۶}{۹}$

یک

$$\tan^2\theta+\cot^2\theta-2\boxed{\tan\theta\cot\theta}-(1+\tan^2\theta)=\cot^2\theta-3=\left(\frac{4}{3}\right)^2-3=$$

$$\frac{16}{9}-3=\frac{16-27}{9}=\frac{-11}{9}$$

تست ۵۷: اگر $\sin x+\cos x=\frac{۱}{۲}$ باشد، حاصل $\tan x+\cot x$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۸}$ ۲) $-\frac{۳}{۸}$ ۳) $\frac{۸}{۳}$ ۴) $-\frac{۸}{۳}$ ✓

$$\tan x+\cot x=\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}=\frac{\sin^2x+\cos^2x=1}{\sin x\cos x=-\frac{3}{8}}=\frac{-8}{3}$$

نکته: اگر ± سینوس، کسینوس را داشتیم
با به توان ۲ رساندن ۲ طرف می‌توان
ضرب سینوس، کسینوس را هم یافت
و برعکس.

$\sin x+\cos x=\frac{1}{2}$

طرفین به توان ۲

$\boxed{\sin^2x+\cos^2x}+2\sin x\cos x=\frac{1}{4}$

یک

$\sin x\cos x=-\frac{3}{8}$

تست ۵۸: اگر $\sin x\cos x=\frac{۱}{۳}$ باشد، حاصل $\sin^۳x-\cos^۳x$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۵}$ ۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ ۳) $\pm\frac{۹}{۴\sqrt{۳}}$ ۴) $\pm\frac{۴\sqrt{۳}}{۹}$

پاسخ: گزینه‌ی «۴» ـ $\sin^۳x-\cos^۳x$ را تجزیه می‌کنیم:

یک

$$\sin^۳x-\cos^۳x=(\sin x-\cos x)(\sin^۲x+\underbrace{\sin x\cos x}_{\frac{1}{3}}+\cos^۲x)=(\sin x-\cos x)(۱+\frac{۱}{۳})=\frac{۴}{۳}(\sin x-\cos x)$$

برابر A فرض کنیم و :

حالا داشته باش:

$$(\sin x-\cos x)^۲=\sin^۲x+\cos^۲x-۲\sin x\cos x=۱-۲(\frac{۱}{۳})=\frac{۱}{۳}\Rightarrow(\sin x-\cos x)^۲=\frac{۱}{۳}=A^2$$

$\pm\frac{\sqrt{3}}{3}=A$

$$\Rightarrow\sin x-\cos x=\pm\frac{۱}{\sqrt{۳}}$$

پس:

$$\sin^۳x-\cos^۳x=\frac{۴}{۳}(\pm\frac{۱}{\sqrt{۳}})=\pm\frac{۴}{۳\sqrt{۳}}=\pm\frac{۴\sqrt{۳}}{۹}$$

تست ۵۹: اگر $\frac{\sin x + ۲\cos x}{\sin x - ۳\cos x} = ۲$ باشد، حاصل $\frac{۱}{\sin x \cos x}$ کدام است؟

۱) $\frac{۶۵}{۸}$ ۲) $-\frac{۶۵}{۸}$ ۳) $\frac{۱۷}{۴}$ ۴) $-\frac{۱۷}{۴}$

پاسخ: گزینه‌ی «۱» ـ طرفین وسطین می‌کنیم، یادتون باشه هروقت صورت و مخرج یک کسر هم‌زمان هم sin و هم cos داشت، طرفین وسطین کنید و بعدش tan بسازید:

$$\frac{\sin x + ۲\cos x}{\sin x - ۳\cos x} = ۲ \Rightarrow \sin x + ۲\cos x = ۲\sin x - ۶\cos x$$

$$\Rightarrow ۸\cos x = \sin x \xrightarrow[\text{تانژانت‌سازی}]{\div \cos x} ۸ = \tan x$$

از طرفی همیشه داریم:

$$\tan x + \cot x = \frac{۱}{\sin x \cos x}$$

$$۸ + \frac{۱}{۸} = \frac{۱}{\sin x \cos x} \Rightarrow \frac{۱}{\sin x \cos x} = \frac{۶۵}{۸}$$

تست ۶۰: اگر $۲\sin\alpha = ۳\cos\alpha$، حاصل $\frac{۱+\cot\alpha}{۱+\tan\alpha}$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۹}{۴}$ ۴) ۶

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{۳}{۲} \rightarrow \tan\alpha = \frac{۳}{۲} \rightarrow \cot\alpha = \frac{۲}{۳}$$

$$\frac{۱+\frac{۲}{۳}}{۱+\frac{۳}{۲}} = \frac{\frac{۵}{۳}}{\frac{۵}{۲}} = \frac{۲}{۳}$$

تست ۶۱: مقدار عبارت $\frac{\cos\alpha}{۱+\sin\alpha} - \frac{۱-\sin\alpha}{\cos\alpha}$ به ازای $\alpha = ۱۵^\circ$ کدام است؟

۱) صفر ۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ ۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۴) $\frac{\sqrt{۶}}{۲}$

مخرج مشترک

$$\frac{\overbrace{(۱-\sin^۲\alpha)}^{\cos^۲\alpha}-\cos^۲\alpha}{\cos\alpha(۱+\sin\alpha)} = \frac{\text{صفر}}{\text{عدد}} = ۰$$

تست ۶۲: حاصل $\cot^۴\theta - \frac{۱}{\sin^۲\theta} - \frac{۱}{\sin^۴\theta}$ کدام است؟

۱) $\sin^۲\theta$ ۲) $\cos^۲\theta$ ۳) $\tan^۲\theta$ ۴) $\cot^۲\theta$

$$\frac{۱}{\sin^۴\theta} - \frac{۱}{\sin^۲\theta} - \frac{\cos^۴\theta}{\sin^۴\theta} = \frac{(۱-\sin^۲\theta)-\cos^۴\theta}{\sin^۴\theta} = \frac{\cos^۲\theta - \cos^۴\theta}{\sin^۴\theta}$$

$$\frac{\cos^۲\theta(\overbrace{۱-\cos^۲\theta}^{\sin^۲\theta})}{\sin^۴\theta = \sin^۲\theta} = \frac{\cos^۲\theta}{\sin^۲\theta} = \cot an^۲\theta$$

تست ۶۳: اگر $\frac{1+\cot x}{\tan x+1}=2$، حاصل $\frac{2\cos x-3\sin x}{\sin x+\cos^3 x}$ کدام است؟ فرض کنیم $t=\tan x$

۱) $\frac{2}{5}$ ۲) $\frac{1}{10}$ ۳) $\frac{2}{13}$ ۴) $\frac{5}{13}$ ✓

برای تولید $\tan x$ جز صورت، مخرج را بر $\cos x$ تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{1+\frac{1}{t}}{t+1}=\frac{\frac{t+1}{t}}{t+1}=\frac{1}{t}=2\longrightarrow t=\frac{1}{2}\longrightarrow \tan x=\frac{1}{2}$$

$$\frac{2-3\tan x}{\tan x+(\cos^2 x=\frac{1}{1+\tan^2 x})}=\frac{2-\frac{3}{2}=\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+(\frac{1}{1+\frac{1}{4}}=\frac{4}{5})=\frac{13}{10}}=\frac{10}{2(13)}=\frac{5}{13}$$

فرمول

تست ۶۴: حاصل $\sqrt{1+\cot^2\alpha}\sqrt{1-\sin^2\alpha}$، اگر α در ربع دوم دایره‌ی مثلثاتی باشد، کدام است؟

۱) $\tan\alpha$ ۲) $-\tan\alpha$ ۳) $\cot\alpha$ ۴) $-\cot\alpha$ ✓

$$\sqrt{1+\cot^2\theta}=\frac{1}{\sin^2\alpha}\qquad \sqrt{1-\sin^2\alpha=\cos^2\alpha}=\frac{1}{\underbrace{|\sin\alpha|}_{+}}\underbrace{|\cos\alpha|}_{-}=-\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$=-\cot\alpha$$

تست ۶۵: حاصل $\sqrt{1+\cos x\sqrt{(1-\sin x)(1+\sin x)}}$ کدام است؟ (x در ربع سوم است.)

۱) $\sin x$ ۲) $-\sin x$ ۳) $\cos x$ ۴) $-\cos x$

پاسخ: گزینهٔ «۲» ـ با استفاده از روابط $1-\sin^2 x=\cos^2 x$ و $1-\cos^2 x=\sin^2 x$ می‌توان نوشت:

$$\sqrt{1+\cos x\sqrt{\underbrace{(1-\sin x)(1+\sin x)}_{\text{اتحاد مزدوج}}}}=\sqrt{1+\cos x\sqrt{1-\sin^2 x}}=\sqrt{1+\cos x\sqrt{\cos^2 x}}$$

$$=\sqrt{1+\cos x\,|\cos x|}\overset{\pi<x<\frac{3\pi}{2}}{=\!=\!=}\sqrt{1+\cos x(-\cos x)}=\sqrt{1-\cos^2 x}=\sqrt{\sin^2 x}=|\sin x|\overset{\pi<x<\frac{3\pi}{2}}{=\!=\!=}-\sin x$$

تست ۶۶: در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC که در رأس $\hat{A}$ قائم است، حاصل $\sin^2(\frac{\pi}{2}-\hat{B})+\frac{1}{\tan^2\hat{C}+1}$ کدام است؟

$$\hat{B}+\hat{C}=\frac{\pi}{2}$$

$$\sin^2(\frac{\pi}{2}-\hat{B})=\sin^2\hat{C}=\cos^2\hat{B}$$

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۱- ۴) ۲

پاسخ: گزینهٔ «۲» ـ روش اول: در مثلث ABC زاویهٔ $A=90^\circ$ است، پس داریم:

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180^\circ\Rightarrow 90^\circ+\hat{B}+\hat{C}=180^\circ\Rightarrow \hat{B}+\hat{C}=90^\circ$$

پس دو زاویهٔ B و C متمم‌اند. از طرفی با توجه به این که $\frac{1}{1+\tan^2\bigcirc}=\cos^2\bigcirc$ و $\sin^2(\frac{\pi}{2}-\bigcirc)=\cos^2\bigcirc$ است، پس می‌توان نوشت:

$$\frac{1}{1+\tan^2\hat{C}}+\sin^2(\frac{\pi}{2}-\hat{B})=\cos^2\hat{C}+\cos^2\hat{B}$$

$$\cos^2\hat{C}+\cos^2\hat{B}=\sin^2\hat{B}+\cos^2\hat{B}=1$$

از طرفی با توجه به این که دو زاویهٔ B و C متمم‌اند، می‌توان گفت $\cos\hat{C}=\sin\hat{B}$ و همچنین $\sin\hat{C}=\cos\hat{B}$ است. پس با استفاده از رابطهٔ $\cos\hat{C}=\sin\hat{B}$ می‌توان نوشت: $\cos^۲\hat{C}+\cos^۲\hat{B}=\sin^۲\hat{B}+\cos^۲\hat{B}=۱$

روش دوم: دو زاویهٔ B و C متمم‌اند، یعنی $\hat{B}+\hat{C}=\frac{\pi}{۲}$، پس $\frac{\pi}{۲}-\hat{B}=\hat{C}$ است. در نتیجه داریم:

$$\frac{۱}{۱+\tan^۲\hat{C}}+\sin^۲(\frac{\pi}{۲}-\hat{B})=\frac{۱}{۱+\tan^۲\hat{C}}+\sin^۲\hat{C}=\cos^۲\hat{C}+\sin^۲\hat{C}=۱$$

مهم

تست ۶۷: با فرض $۲\sin^۲x+۳\cos^۲x=۵\sin x\cos x$، مقدار $\cos^۲x$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱۳}{۴}$ ۳) ۴ ۴) $\frac{۴}{۱۳}$

پاسخ: گزینهٔ «۴» ـ طرفین معادلهٔ داده‌شده را بر $\cos^۲x$ تقسیم می‌کنیم:

$$۲\sin^۲x+۳\cos^۲x=۵\sin x\cos x\xrightarrow{\div\cos^۲x}۲\frac{\sin^۲x}{\cos^۲x}+۳\frac{\cos^۲x}{\cos^۲x}=۵\frac{\sin x\cos x}{\cos^۲x}$$

$$\Rightarrow ۲\tan^۲x+۳=۵\tan x\Rightarrow ۲\tan^۲x-۵\tan x+۳=۰\xrightarrow{a+b+c=۰}\begin{cases}\tan x=۱\\ \tan x=\frac{۳}{۲}\end{cases}$$

$1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$

حالا با استفاده از رابطهٔ $۱+\tan^۲x=\frac{۱}{\cos^۲x}$ داریم:

حالت اول: $\tan x=۱\Rightarrow ۱+(۱)^۲=\frac{۱}{\cos^۲x}\Rightarrow ۲=\frac{۱}{\cos^۲x}\Rightarrow\cos^۲x=\frac{۱}{۲}$

حالت دوم: $\tan x=\frac{۳}{۲}\Rightarrow ۱+(\frac{۳}{۲})^۲=\frac{۱}{\cos^۲x}\Rightarrow ۱+\frac{۹}{۴}=\frac{۱}{\cos^۲x}\Rightarrow\frac{۱۳}{۴}=\frac{۱}{\cos^۲x}\Rightarrow\cos^۲x=\frac{۴}{۱۳}$

که با توجه به گزینه‌ها پاسخ صحیح $\cos^۲x=\frac{۴}{۱۳}$ است.

تست ۶۸: اگر $۲\sin^۲x+\cos^۲x=\frac{۴}{۳}$ باشد، حاصل $\tan^۲x$ کدام است؟ *(سراسری تجربی ۱۴۰۱)*

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ✓ ۴) $\frac{۱}{۴}$

یک

$\sin^2x+\boxed{\sin^2x+\cos^2x}=\frac{4}{3}$ — $\sin^2x=\frac{4}{3}-1=\frac{1}{3}$

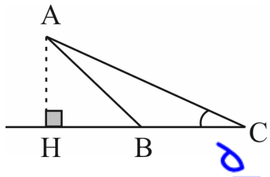
$\sin^2x+\cos^2x=1$

$\frac{1}{3}+\cos^2x=1$

$\cos^2x=\frac{2}{3}$

$\tan^2x=\frac{\sin^2x}{\cos^2x}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}}=\frac{1}{2}$

تست ۶۹: در شکل زیر، فرض کنید $\sin\hat{C}=\frac{۵}{۱۳}$ و $CH=۹$. اندازه‌ی ارتفاع AH کدام است؟ *(ریاضی ۹۹)*



۱) ۳/۲۵ ۲) ۳/۵ ۳) ۳/۶ ۴) ۳/۷۵ ✓

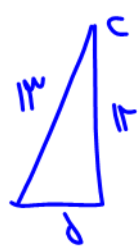
$\overset{\triangle}{AHC}$:

$\frac{5}{12}=\tan\hat{C}=\frac{AH}{CH=9}$

$AH=9(\frac{5}{12})=\frac{45}{12}=3,75$

اعداد فیثاغورثی: $5,4,3$ / $13,12,5$

$\tan\hat{C}=\frac{5}{12}$



فرمول‌های کمان 2α

دوازدهم تجربی و یازدهم ریاضی

سینوس کسینوس نصف سینوس دوبلش $\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{2}\sin 2\alpha$

۱) $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

مثال : $\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}$ ، $\sin 6x = 2\sin 3x\cos 3x$

۲) $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

الف) $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

ب) $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$

توان شکن

پ) $1+\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha \Rightarrow \boxed{\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}}$

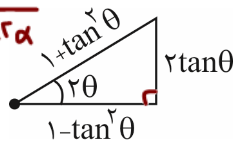
ت) $1-\cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha \Rightarrow \boxed{\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}}$

SAVE

«به شدت مهم»

نتیجه

$\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$



مهم

۳) $\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} \xrightarrow{\text{اثبات}} \tan(\alpha+\alpha) = \frac{\tan\alpha+\tan\alpha}{1-\tan\alpha\tan\alpha} = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

به کمک شکل بالا این ۳ تا را به ذهن بسپار!

۴) $\sin 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha} \xrightarrow{\text{اثبات}} \frac{2\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{1+\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = 2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha$

سینوس، کسینوس برحسب تانژانت نصف قوس

۵) $\cos 2\alpha = \frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha} \xrightarrow{\text{اثبات}} \frac{1-\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{1+\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = \frac{\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{\frac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos 2\alpha$

۶) $\tan^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha} \xrightarrow{\text{اثبات}} \frac{1-\cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha}{1+\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha} = \tan^2\alpha$

۷) $\tan\alpha + \cot\alpha = \frac{2}{\sin 2\alpha} \xrightarrow{\text{اثبات}} \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{1}{\frac{1}{2}\sin 2\alpha} = \frac{2}{\sin 2\alpha}$

۲ رو سینوس دوبلش

کوتی جی وتی جی

۸) $\cot\alpha - \tan\alpha = 2\cot 2\alpha \xrightarrow{\text{اثبات}} \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{\cos 2\alpha}{\frac{1}{2}\sin 2\alpha} = \frac{2\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = 2\cot 2\alpha$

کوتی جی منهای تی جی ۲ تانژانت دوبلش

*۹) $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$

*۱۰) $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$

*۱۱) $\sin\alpha\sin(60^\circ-\alpha)\sin(60^\circ+\alpha) = \frac{1}{4}\sin 3\alpha$

*۱۲) $\cos\alpha\cos(60^\circ-\alpha)\cos(60^\circ+\alpha) = \frac{1}{4}\cos 3\alpha$

*۱۳) $\tan\alpha\tan(60^\circ-\alpha)\tan(60^\circ+\alpha) = \tan 3\alpha$

برای حسابان رشته ریاضی

$\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{2}\sin 2\theta$

$\sin(90^\circ+7/5^\circ=\frac{\pi}{2}+7/5^\circ)=\cos 7/5^\circ$

تست ۷۰: حاصل عبارت $\sin(7/5^\circ)\sin(97/5^\circ)\cos(15^\circ)$ چقدر است؟

۱) $-\frac{1}{8}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{8}$ ۴) $-\frac{1}{4}$

$\frac{1}{2}\sin 15^\circ$

$\boxed{\sin 7/5^\circ\cos 7/5^\circ}\cos 15^\circ=\frac{1}{2}\underbrace{\sin 15^\circ\cos 15^\circ}_{\frac{1}{2}\sin 30^\circ}=\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\sin 30^\circ=\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{8}$

تست ۷۱: اگر $f(x)=x-\sqrt{x}$ و $g(x)=\sin^4 x$ باشند، ضابطه‌ی تابع fog کدام است؟ (خارج ۹۲)

۱) $-\frac{1}{4}\sin^2 2x$ ۲) $-\frac{1}{2}\sin^2 2x$ ۳) $\frac{1}{4}\cos^2 2x$ ۴) $\frac{1}{2}\cos^2 2x$

$y=f(g(x))=g-\sqrt{g}=\sin^4 x-\sqrt{\sin^4 x}=\sin^4 x-\sin^2 x=\sin^2 x(\underbrace{\sin^2 x-1}_{-\cos^2 x})$

$y=-\sin^2 x\cos^2 x=-(\sin x\cos x)^2=-\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)^2=-\frac{1}{4}\sin^2 2x$

تست ۷۲: حاصل عبارت $\cos\frac{\pi}{7}\cdot\cos\frac{2\pi}{7}\cdot\cos\frac{4\pi}{7}$ کدام است؟

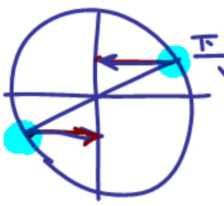
در $\sin\frac{\pi}{7}$ ضرب و تقسیم کن

۱) $\frac{1}{8}$ ۲) $-\frac{1}{8}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $-\frac{1}{4}$

$\frac{1}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right)$

$\boxed{\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}=\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\boxed{\sin\frac{4\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}}=\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\sin\frac{8\pi}{7}$

$\sin\frac{\pi}{7}$



$=\frac{\frac{1}{8}\left(-\sin\frac{\pi}{7}\right)}{\sin\frac{\pi}{7}}=-\frac{1}{8}$

تست ۷۳: ساده‌شدهٔ عبارت $\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}+\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}$ کدام است؟ (ریاضی خارج ۱۴۰۰)

۱) $\cos\frac{\theta}{2}$ ۲) $\sin\frac{\theta}{2}$ ۳) $2\cot\frac{\theta}{2}$ ۴) $2\tan\frac{\theta}{2}$

$\boxed{\begin{array}{l}1-\cos\theta=2\sin^2\frac{\theta}{2}\\ 1+\cos\theta=2\cos^2\frac{\theta}{2}\end{array}}$

$=\frac{\sin\theta=\cancel{2}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{1-\cos\theta=\cancel{2}\sin^2\frac{\theta}{2}}+\frac{1+\cos\theta=\cancel{2}\cos^2\frac{\theta}{2}}{\sin\theta=\cancel{2}\sin\frac{\theta}{2}\cancel{\cos\frac{\theta}{2}}}=$

$=\cot\frac{\theta}{2}+\cot\frac{\theta}{2}=2\cot\frac{\theta}{2}$

$1-\sin x = 4+4\sin x \longrightarrow 5\sin x = -3 \quad \sin x = -\frac{3}{5}$

$\tan x = \frac{3}{4}$ ربع ۳ ام x $\quad \tan x = \frac{3}{4}$

تست ۷۴: اگر انتهای کمان x در ربع سوّم و $\frac{1-\sin x}{1+\sin x} = 4$ باشد، مقدار صحیح $\tan\frac{x}{2}$ کدام است؟ (ریاضی خارج ۱۴۰۱)

۱) ۲ ۲) ۲- ۳) ۳ ۴) ۳-

$\tan x = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1-\tan^2\frac{x}{2}} \xrightarrow{\tan\frac{x}{2}=A} \frac{3}{4} = \frac{2A}{1-A^2} \longrightarrow 3-3A^2 = 8A$

ضرب

$3A^2+8A-3=0 \longrightarrow A^2+8A-9=0$

$A_1 = 1 \quad A_2 = -9$

$A_1 = \frac{1}{3} = \tan\frac{x}{2}$

$A_2 = -\frac{9}{3} = -3 = \tan\frac{x}{2}$

تست ۷۵: حاصل $\sin x\cos x(\cos^4 x - \sin^4 x)$ به ازای $x = 15^\circ$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{8}$ ۳) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ۴) $\frac{\sqrt{3}}{8}$

پاسخ: گزینهٔ «۴» ـ با استفاده از روابط $2\sin\bigcirc\cos\bigcirc = \sin 2\bigcirc$ و $\cos^2\bigcirc - \sin^2\bigcirc = \cos 2\bigcirc$ می‌توان نوشت:

$$\sin x\cos x(\cos^4 x - \sin^4 x) = \sin x\cos x(\cos^2 x - \sin^2 x)\underbrace{(\cos^2 x + \sin^2 x)}_{1} = \frac{1}{2}\sin 2x\cos 2x = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}\sin(4x))$$

$$= \frac{1}{4}\sin(4x)$$

حالا با جای‌گذاری $x = 15^\circ$ خواهیم داشت:

$$\frac{1}{4}\sin(4x) = \frac{1}{4}\sin(60^\circ) = \frac{1}{4}\times\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{8}$$

تست ۷۶: با فرض $\sin\alpha = \frac{1}{4}$، مقدار $\cos 4\alpha$ کدام است؟

۱) $\frac{17}{64}$ ۲) $\frac{17}{32}$ ۳) $\frac{-17}{64}$ ۴) $\frac{-17}{32}$

پاسخ: گزینهٔ «۲» ـ ابتدا با استفاده از رابطهٔ $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$ مقدار $\cos 2\alpha$ را به دست می‌آوریم:

$$\cos 2\alpha = 1 - 2(\frac{1}{16}) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

حالا با استفاده از رابطهٔ $\cos 4\alpha = 2\cos^2(2\alpha) - 1$ برای محاسبهٔ مقدار $\cos 4\alpha$ می‌توان نوشت:

$$\cos 4\alpha = 2(\frac{49}{64}) - 1 = \frac{98}{64} - 1 = \frac{34}{64} = \frac{17}{32}$$

$\frac{24}{25} + \frac{4}{5} = \frac{24+20=44}{25} \qquad = \frac{24(44)}{7(25)} = \frac{1056}{175}$

تست ۷۷: اگر زاویهٔ α در ناحیهٔ سوم مثلثاتی و $\tan\alpha = \frac{3}{4}$ باشد، مقدار $\frac{\cos(2\alpha - \frac{\pi}{2}) + \cos(\alpha+\pi)}{\cot(2\alpha)}$ کدام است؟ (سراسری تجربی ۱۴۰۰)

$= \frac{7}{24}$

$\sin\alpha = -\frac{3}{5} \quad \cos\alpha = -\frac{4}{5}$

۱) $-\frac{96}{175}$ ۲) $\frac{1056}{175}$ ۳) $\frac{96}{175}$ ۴) $-\frac{1056}{175}$

$\cos(2\alpha - \frac{\pi}{2} = -(\frac{\pi}{2} - 2\alpha)) = \cos(\frac{\pi}{2} - 2\alpha) = \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2(-\frac{3}{5})(-\frac{4}{5}) = \frac{24}{25}$

$\cos(\alpha+\pi) = -\cos\alpha$

$\pi + \alpha$

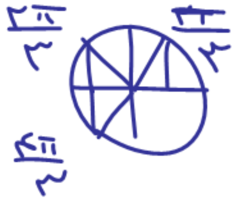
$\cot 2\alpha = \frac{1}{\tan 2\alpha} = \frac{1}{\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}} = \frac{1-\tan^2\alpha}{2\tan\alpha} = \frac{1-\frac{9}{16}}{2(\frac{3}{4})} = \frac{\frac{7}{16}}{\frac{3}{2}} = \frac{7}{24}$

$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$

تست ۷۸: اگر $f(x)=16\cos^2(3x)\cos^2(6x)\cos^2(12x)\cos^2(24x)$ مقدار $f(\frac{\pi}{36})$ کدام است؟ (سراسری تجربی ۱۴۰۰)

۱) $\frac{6-3\sqrt{3}}{16}$ ۲) $\frac{6-\sqrt{3}}{16}$ ۳) $\frac{6+\sqrt{3}}{16}$ ۴) $\frac{6+3\sqrt{3}}{16}$

$f(x)=\cancel{16}\left(\frac{1+\cos 6x}{\cancel{2}}\right)\left(\frac{1+\cos 12x}{\cancel{2}}\right)\left(\frac{1+\cos 24x}{\cancel{2}}\right)\left(\frac{1+\cos 48x}{\cancel{2}}\right)$



$f(\frac{\pi}{36})=\left(1+\cos\frac{\pi}{6}\right)\left(1+\cos\frac{\pi}{3}\right)\left(1+\cos\frac{2\pi}{3}\right)\left(1+\cos\frac{4\pi}{3}\right)$

$=\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\right)\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{2+\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{6+3\sqrt{3}}{16}$

تست ۷۹: اگر $\cot x-\tan x=3$ باشد، حاصل عبارت $M=\frac{2\cot 4x}{2\cot 2x+3\tan 2x}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{6}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $-\frac{1}{6}$ ۴) $-\frac{5}{6}$

پاسخ: گزینهٔ «۱» ـ می‌دانیم $\cot\bigcirc-\tan\bigcirc=2\cot 2\bigcirc$ است، پس می‌توان نوشت:

$$2\cot 2x=3 \Rightarrow \cot 2x=\frac{3}{2} \Rightarrow \tan 2x=\frac{2}{3}$$

از طرفی مطابق فرمول بالا داریم:

$$2\cot 4x=\cot 2x-\tan 2x=\frac{3}{2}-\frac{2}{3}=\frac{9-4}{6}=\frac{5}{6}$$

در نهایت با جای‌گذاری مقادیر به‌دست‌آمده در خواستهٔ مسئله، مقدار M به دست می‌آید، یعنی:

$$M=\frac{2\cot 4x}{2\cot 2x+3\tan 2x}=\frac{\frac{5}{6}}{2(\frac{3}{2})+3(\frac{2}{3})}=\frac{\frac{5}{6}}{3+2}=\frac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{1}}=\frac{1}{6}$$

تست ۸۰: اگر $\frac{\tan\alpha(1-\tan^2\alpha)}{(1+\tan^2\alpha)^2}=\frac{1}{8}$، حاصل $\sin 4\alpha$ کدام است؟

کافی است از دستورات سینوس و کسینوس برحسب تانژانت نصف کمان استفاده کنید

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۳) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۴) $\frac{3}{4}$

$\sin 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}$ $\qquad$ $\cos 2\theta=\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$

$\frac{\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}\cdot\frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}=\frac{1}{2}\boxed{\sin 2\alpha\cos 2\alpha}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin 4\alpha=\frac{1}{4}\sin 4\alpha=\frac{1}{8}$

$\sin 4\alpha=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$

چند تا اتّحاد مهمّ و کاربردی

$$1)\ \cos^4 x - \sin^4 x = \cos 2x$$

اثبات : $(\cos^2 x - \sin^2 x)(\underbrace{\cos^2 x + \sin^2 x}_{1}) = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$

$$2)\ \sin^4 x + \cos^4 x = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos 4x$$

اثبات: $\sin^4 x + \cos^4 x$ $= 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x$

$(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x\cos^2 x = 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x = 1 - 2(\sin x \cos x)^2 = 1 - 2(\frac{1}{2}\sin 2x)^2$

$= 1 - 2\times\frac{1}{4}\sin^2 2x = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x = 1 - \frac{1}{2}(\frac{1-\cos 4x}{2}) = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cos 4x = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos 4x$

توی اثبات این فرمول از اتحاد $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$ استفاده کردیم که $a = \sin^2 x$ و $b = \cos^2 x$ بود.

$$\boxed{3)\ \sin^6 x + \cos^6 x = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x = \frac{5}{8} + \frac{3}{8}\cos 4x = 1 - 3\sin^2 x\cos^2 x}$$

اثبات: $\sin^6 x + \cos^6 x$

اثبات : $(\underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_{1})^3 - 3\sin^2 x\cos^2 x(\underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_{1}) = 1 - 3\sin^2 x \cos^2 x = 1 - 3(\sin x \cos x)^2$

$= 1 - 3(\frac{1}{2}\sin 2x)^2 = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x = 1 - \frac{3}{4}(\frac{1-\cos 4x}{2}) = 1 - \frac{3}{8} + \frac{3}{8}\cos 4x = \frac{5}{8} + \frac{3}{8}\cos 4x$

توی اثبات این فرمول از اتحاد $a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$ استفاده کردیم که $a = \sin^2 x$ و $b = \cos^2 x$ بود.

یادت باشه: فرمول‌های ۲ و ۳ در فصل مشتق کاربرد زیادی خواهند داشت.

$$4)\ (\sin x + \cos x)^2 = 1 + \sin 2x$$
$$(\sin x - \cos x)^2 = 1 - \sin 2x$$

اثبات: $(\sin x \pm \cos x)^2$

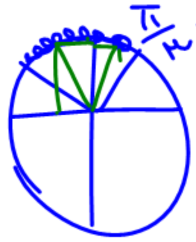
$\underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_{1} \pm \underbrace{2\sin x \cos x}_{\sin 2x} = 1 \pm \sin 2x$

یادت باشه: فرمول شماره ۴ در فصل حد، برای رفع ابهام کاربرد زیادی دارد.

تست ۸۱: حاصل $\sqrt{1+\sin 2x} - \sin x$ وقتی $\frac{\pi}{3} < x < \frac{3\pi}{4}$ باشد، کدام است؟

۱) صفر ۲) $-2\sin x$ ۳) $\cos x$ ۴) $2\sin x - \cos x$

$135° = \frac{3\pi}{4}$ $\frac{\pi}{3} = 60°$



$\sqrt{1+\sin 2x = (\sin^2 x + \cos^2 x) + 2\sin x \cos x = (\sin x + \cos x)^2} - \sin x$

$= |\underbrace{\sin x + \cos x}_{+}| - \sin x$

$= \sin x + \cos x - \sin x = \cos x$

$\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2\sin^2 x\cos^2 x = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos 4x$

$\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - 3\sin^2 x \cos^2 x = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x = \frac{5}{8} + \frac{3}{8}\cos 4x$

تست ۸۲: اگر $\sin\alpha - \cos\alpha = \frac{۱}{۲}$ باشد، مقدار $\cos(\frac{۳\pi}{۲} - ۲\alpha)$ کدام است؟ (تجربی ۹۵)

۱) $-\frac{۳}{۴}$ ۲) $-\frac{۳}{۸}$ ۳) $\frac{۳}{۸}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

$\cos(\frac{3\pi}{2} - 2\alpha) = -\sin 2\alpha = -2\sin\alpha\cos\alpha = -\frac{3}{4}$

$\sin\alpha - \cos\alpha = \frac{1}{2} \xrightarrow[\text{به توان ۲}]{\text{طرفین}} \underbrace{\boxed{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}}_{\text{یک}} - 2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{4} \rightarrow -2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4}$

معادلات مثلثاتی سال دوازدهم

به معادلاتی که مجهولشان نسبت‌های مثلثاتی باشد، معادلات مثلثاتی می‌گوییم و هدف از حل آن‌ها مشخص کردن همه‌ی کمان‌هایی (زوایایی) است که در معادله صدق می‌کند.

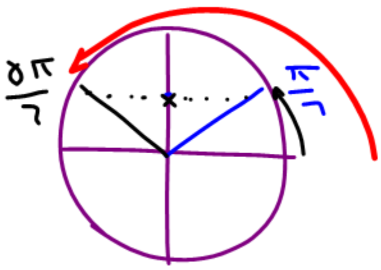
چون توابع مثلثاتی متناوب هستند، اگر خط $y = k$ آن‌ها را قطع کند، برخورد در بیش از یک نقطه رخ می‌دهند و بی‌شمار جواب داریم که برای گزارش طول نقاط تلاقی به روش زیر عمل می‌کنیم:

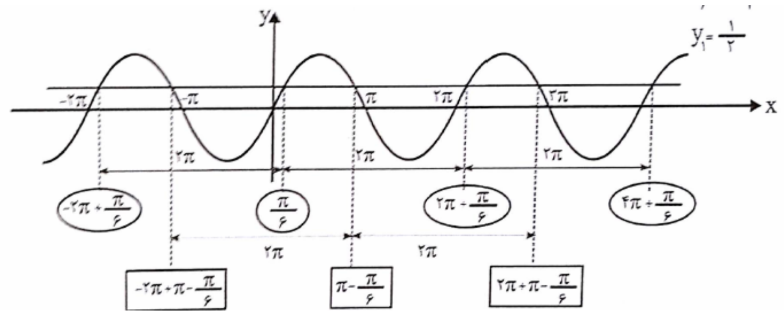
به عنوان مثال: اگر از ما بپرسند چه xهایی در معادله‌ی $۲\sin x - ۱ = ۰$ صدق می‌کند، می‌توانیم از طریق زیر عمل کنیم:

$۲\sin x - ۱ = ۰ \Rightarrow \underbrace{\sin x}_{y_۱} = \underbrace{\frac{۱}{۲}}_{y_۲}$

برای حل یک معادله می‌توان آن را به تساوی دو تابع قابل رسم تبدیل کرد
هر دو تابع را در یک دستگاه بکشید طول نقاط تلاقی (برخورد) همان ریشه‌ها هستند.

از روش رسم و تقاطع دو تابع $y_۱$ و $y_۲$ دقیقاً xهایی را پیدا می‌کنیم که در معادله‌ی فوق صدق می‌کنند.

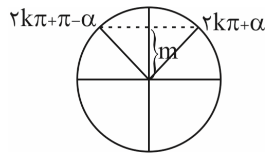




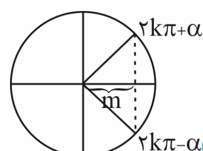
حل معادله‌ی ساده‌ی مثلثاتی

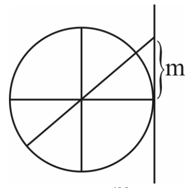
برای این که هر بار مجبور به رسم و تقاطع دو تابع نشویم، به کمک اتحادها و روابط و یا نسبت زوایای متمم، معادله را ساده می‌کنیم به طوری که به تساوی دو نسبت هم‌نام برسیم و به کمک ۴ مسئله‌ی زیر، معادله حل می‌شود.

۱) $\sin x = m \xrightarrow{m=\sin\alpha} \sin x = \sin\alpha \Rightarrow \begin{cases} x = ۲k\pi + \alpha \\ x = ۲k\pi + \pi - \alpha \end{cases}$

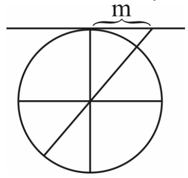


۲) $\cos x = m \xrightarrow{m=\cos\alpha} \cos x = \cos\alpha \Rightarrow x = ۲k\pi \pm \alpha$





۳) $\tan x = m \xrightarrow{m=\tan\alpha} \tan x = \tan\alpha \Rightarrow x = k\pi + \alpha$

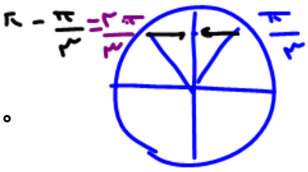


۴) $\cot x = m \xrightarrow{m=\cot\alpha} \cot x = \cot\alpha \Rightarrow x = k\pi + \alpha$

حالات مختلف معادلات مثلثاتی

۱- حالت اول: در این حالت در معادله مثلثاتی فقط یک نسبت مثلثاتی با زاویه مجهول و از درجه اول وجود دارد که با کمک ۴ مسئله‌ای که گفته شد، جواب را می‌یابیم.

مثال ۸۳: معادلات زیر را حل کنید.



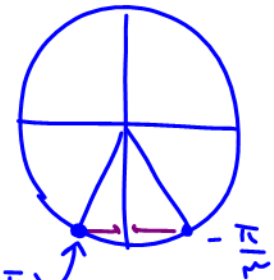
۱) $۲\sin x - \sqrt{۳} = ۰$

$$۲\sin x = \sqrt{۳} \Rightarrow \sin x = \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \sin\frac{\pi}{۳} \Rightarrow \begin{cases} x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۳} \\ x = ۲k\pi + \pi - \frac{\pi}{۳} \end{cases}$$

۲) $۲\sin x + \sqrt{۳} = ۰$

$$۲\sin x = -\sqrt{۳} \Rightarrow \sin x = \frac{-\sqrt{۳}}{۲} = \sin(\frac{-\pi}{۳}) \Rightarrow \begin{cases} x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۳} \\ x = ۲k\pi + \pi + \frac{\pi}{۳} \end{cases}$$

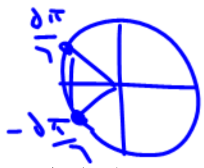
$X = ۲k\pi + \pi - (-\frac{\pi}{۳})$



۳) $۲\cos x - \sqrt{۳} = ۰$

$$۲\cos x = \sqrt{۳} \Rightarrow \cos x = \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \cos\frac{\pi}{۶} \Rightarrow x = ۲k\pi \pm \frac{\pi}{۶}$$

۴) $۲\cos x + \sqrt{۳} = ۰$



$$۲\cos x = -\sqrt{۳} \Rightarrow \cos x = \frac{-\sqrt{۳}}{۲} = \cos(\frac{۵\pi}{۶}) \Rightarrow x = ۲k\pi \pm \frac{۵\pi}{۶}$$

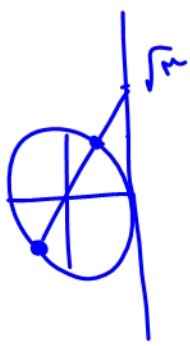
یادت باشه: چنانچه کسینوس یک کمان منفی را خواستند، کمان را از ربع دوم انتخاب کنید. اما در سایر نسبت‌های مثلثاتی برای کمان منفی، به ربع چهارم با کمان قرینه رجوع می‌کنیم.

۵) $\tan x - \sqrt{۳} = ۰$

$$\tan x = \sqrt{۳} = \tan\frac{\pi}{۳} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{۳}$$

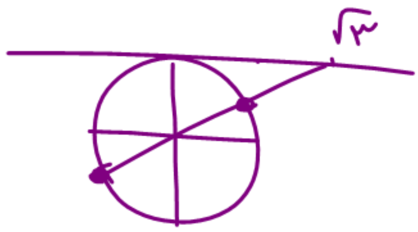
۶) $\tan x + \sqrt{۳} = ۰$

$$\tan x = -\sqrt{۳} = \tan(-\frac{\pi}{۳}) \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{۳}$$



۷) $\cot x - \sqrt{۳} = ۰$

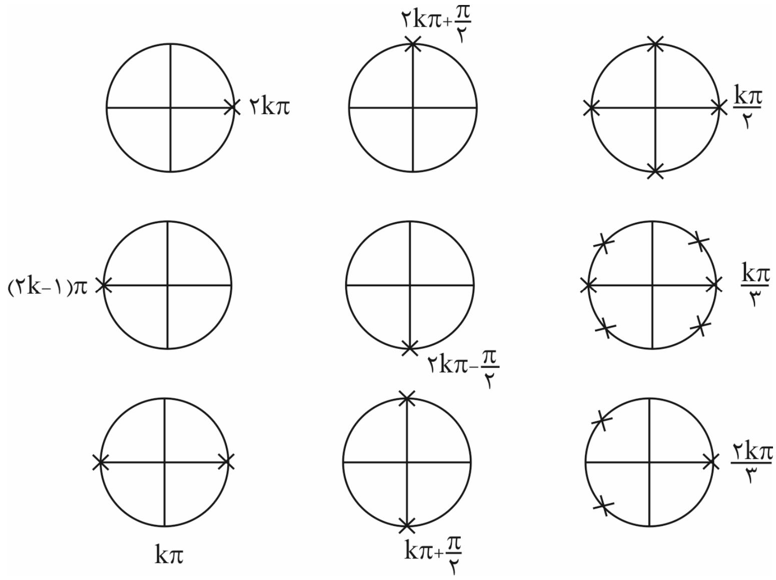
$\cot x = \sqrt{۳} = \cot\frac{\pi}{۶} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{۶}$



۸) $\cot x + \sqrt{۳} = ۰$

$\cot x = -\sqrt{۳} = \cot(-\frac{\pi}{۶}) \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{۶}$

آدرس نقاط مهم روی دایره مثلثاتی

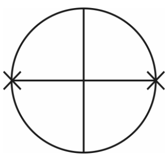
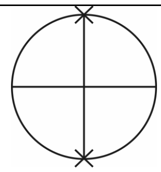
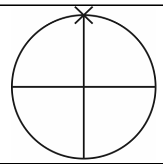
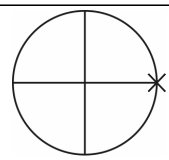
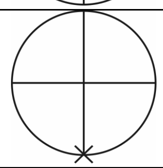
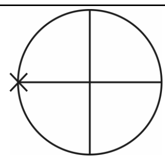


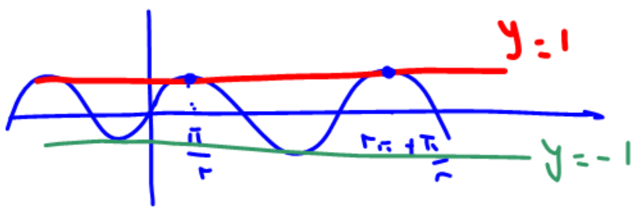
$\frac{k\pi}{n}$ رئوس یک ۲n ضلعی منتظم

$\frac{۲k\pi}{n}$ رئوس یک n ضلعی منتظم

حل معادلات خاص مثلثاتی

برخی از معادلات هستند که جواب‌های آن‌ها به فرم ساده‌تری هم قابل نمایش است. این معادلات رادر جدول زیر بررسی می‌کنیم.

معادله	جواب کلی	آدرس روی دایره	معادله	جواب کلی	آدرس روی دایره
$\sin x = ۰$	$x = k\pi$		$\cos x = ۰$	$x = k\pi + \frac{\pi}{۲}$	
$\sin x = ۱$	$x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲}$		$\cos x = ۱$	$x = ۲k\pi$	
$\sin x = -۱$	$x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۲}$		$\cos x = -۱$	$x = (۲k+۱)\pi$	



یادت باشه: $\sin x = \pm ۱$ و $\cos x = \pm ۱$ ریشه مضاعف دارند. زیرا اگر

Sin x و Cos x را بکشیم و خط های y = ±۱ و توابع به هم مماس می‌شوند یعنی ریشه مضاعف می‌دهند.

۲- حالت دوم: در این حالت فقط و فقط دو نسبت مثلثاتی با ضریب ۱ یا ۱- و توان ۱ وجود دارند که معادله را به تساوی دو نسبت هم‌نام تبدیل می‌کنیم (اگر هم‌نام نبودند از زوایای متمم استفاده می‌کنیم) و به کمک ۴ مسئله گفته‌شده، مسئله را حل می‌کنیم.

به طور کلی کمان می‌تواند به جز x ، چیز دیگری هم باشد.

مثلاً: فرض کنید u یک عبارتِ xدار است.

SAVE

$$\begin{cases} \sin u = \sin\alpha \Rightarrow \begin{cases} u = 2k\pi + \alpha \\ u = 2k\pi + \pi - \alpha \end{cases} \\ \cos u = \cos\alpha \Rightarrow u = 2k\pi \pm \alpha \\ \tan u = \tan\alpha \Rightarrow u = k\pi + \alpha \\ \cot u = \cot\alpha \Rightarrow u = k\pi + \alpha \end{cases}$$

مثال ۸۴: معادله‌ی زیر را حل کنید.

۱) $\sin 3x - \sin x = 0$

$$\underbrace{\sin 3x = \sin x}_{\text{تساوی ۲ نسبت همنام}} \Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi + x \Rightarrow 2x = 2k\pi \Rightarrow x = k\pi \\ 3x = 2k\pi + \pi - x \Rightarrow x = \dfrac{k\pi}{2} + \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$$

(۰۷) این معادله چند جواب در بازه‌ی $[0, 2\pi]$ دارد؟

$x = 0 , \pi , 2\pi$

$x = \frac{\pi}{4} , \frac{3\pi}{4} , \frac{5\pi}{4} , \frac{7\pi}{4}$

تست ۸۵: جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $\dfrac{\sin 3x}{\cos(\frac{3\pi}{2} + x)} = 1$ ، به کدام صورت است؟ (خارج تجربی ۹۳)

$\cos(\frac{3\pi}{2} + x) = \sin x$

۱) $k\pi + \frac{\pi}{4}$ ۲) $2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$ ۳) $2k\pi \pm \frac{3\pi}{4}$ ۴) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$ ✓

$\dfrac{\sin 3x}{\sin x} = 1 \longrightarrow \sin 3x = \sin x \longrightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi + x \longrightarrow 2x = 2k\pi \longrightarrow x = k\pi \\ 3x = 2k\pi + \pi - x \longrightarrow 4x = 2k\pi + \pi \end{cases}$

$\sin(u) = \sin\alpha$

$u = 2k\pi + \alpha$

$u = 2k\pi + \pi - \alpha$

مخرج را صفر می‌کند و غیر قابل قبول است

$\boxed{x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}}$

مثال ۸۶: معادله زیر را حل کنید.

۲) $\sin 3x + \sin x = 0$

$\sin(-\theta) = -\sin\theta$

$\sin 3x = -\sin x$

قرار شد چپ و راست مساوی یک نسبت همنام داشته باشیم (که این‌جا داریم) و هر دو، پشتشون علامت مثبت داشته باشه. این‌جا برای این که از شرّ منفی خلاص بشیم از خاصیت $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ استفاده می‌کنیم یعنی به جای $-\sin x$ می‌نویسیم $\sin(-x)$ پس:

$$\sin\underbrace{3x}_{u} = \sin(\underbrace{-x}_{\alpha}) \Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi + (-x) \\ 3x = 2k\pi + \pi - (-x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x = 2k\pi \Rightarrow \boxed{x = \dfrac{k\pi}{2}} \\ 2x = 2k\pi + \pi \Rightarrow \boxed{x = k\pi + \dfrac{\pi}{2}} \end{cases}$$

$u = 2k\pi + \alpha$

$u = 2k\pi + \pi - \alpha$

$\sin u = \sin\alpha$

در مضارب فرد $\frac{\pi}{2}$ نام لنت عوض میشه و میشه sin چون $\frac{\pi}{2}-x$ ناحیه اوله +sin می شود.

تست ۸۷: مجموع جواب‌های مثلثاتی $\sin 2x + \cos(\frac{\pi}{2} - x) = 0$، در بازه‌ی $[0, 2\pi]$ کدام است؟ (خارج تجربی ۹۶)

۱) $\frac{14\pi}{3}$ ۲) 4π ۳) $\frac{9\pi}{2}$ ۴) 5π

$\sin(2x) + \sin x = 0 \longrightarrow \sin 2x = -\sin x$ $\quad \sin(2x) = \sin(-x)$

$\begin{cases} \sin u = \sin\alpha \\ u = 2k\pi + \alpha \\ u = 2k\pi + \pi - \alpha \end{cases}$ $\quad \begin{cases} 2x = 2k\pi + (-x) \\ 2x = 2k\pi + \pi - (-x) \end{cases}$

$3x = 2k\pi \longrightarrow x = \frac{2k\pi}{3} \longrightarrow x = 0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, 2\pi$

$x = 2k\pi + \pi \longrightarrow x = \pi$

جمع $\longrightarrow 5\pi$

تست ۸۸: تعداد جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\cos^2(x) - \sin^2(x)\cos(3x) = 1$ در فاصلهٔ $[0, 2\pi]$ کدام است؟ (سراسری تجربی ۱۴۰۰)

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۶

$-\sin^2 x \cos 3x = \underbrace{1 - \cos^2 x}_{\sin^2 x} \longrightarrow \sin^2 x + \sin^2 x \cos 3x = 0 \longrightarrow \sin^2 x(1 + \cos 3x) = 0$

$\sin^2 x = 0 \longrightarrow \sin x = 0 \quad x = k\pi \longrightarrow x = 0, \pi, 2\pi$

$1 + \cos 3x = 0 \longrightarrow \cos 3x = -1 \quad 3x = 2k\pi + \pi \longrightarrow x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{3}$

k	۰	۱	۲	۳
	$\frac{\pi}{3}$	π تکراری	$\frac{5\pi}{3}$	$\cancel{2\pi + \frac{\pi}{3}}$

تست ۸۹: مجموع جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\sin(x + \frac{\pi}{8}) + \cos(x - \frac{3\pi}{8}) = 1$، در بازهٔ $[0, 2\pi]$ برابر کدام است؟ (خارج ریاضی ۹۵)

۱) $\frac{3\pi}{4}$ ۲) $\frac{5\pi}{4}$ ۳) $\frac{3\pi}{2}$ ۴) $\frac{7\pi}{4}$

بین a و b رابطه برقرار کنیم

$a - b = x + \frac{\pi}{8} - x + \frac{3\pi}{8} = \frac{\pi}{2}$

$\sin a + \cos b = 1 \longrightarrow \sin(a = \frac{\pi}{2} + b) + \cos b = 1 \longrightarrow \cos b + \cos b = 1 \longrightarrow 2\cos b = 1 \longrightarrow \cos b = \frac{1}{2}$

$\cos b = \cos\frac{\pi}{3} \longrightarrow b = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \longrightarrow \begin{cases} x - \frac{3\pi}{8} = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \longrightarrow x = 2k\pi + (\frac{\pi}{3} + \frac{3\pi}{8} = \frac{17\pi}{24}) \\ x - \frac{3\pi}{8} = 2k\pi - \frac{\pi}{3} \longrightarrow x = 2k\pi + (\frac{3\pi}{8} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{24}) \end{cases}$

$\frac{17\pi}{24}$ ، $\frac{\pi}{24}$

جواب‌ها جمع: $= \frac{\pi}{24} + \frac{17\pi}{24} = \frac{18\pi}{24} = \frac{3\pi}{4}$ جواب

تست ۹۰: فرض کنید A مجموعهٔ جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $(1 + \cos 2\alpha)(1 + \cos 4\alpha)(1 + \cos 8\alpha) = \frac{1}{8}$ در بازهٔ $[0, \pi]$ باشد، ماکزیمم عضو مجموعهٔ A کدام است؟ (سراسری ریاضی ۱۴۰۰)

$1 + \cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2}$

۱) $\frac{5}{7}\pi$ ۲) $\frac{6}{7}\pi$ ۳) $\frac{7}{9}\pi$ ۴) $\frac{8}{9}\pi$

$(2\cos^2\alpha)(2\cos^2 2\alpha)(2\cos^2 4\alpha) = \frac{1}{8} \longrightarrow \cos^2\alpha\cos^2 2\alpha\cos^2 4\alpha = \frac{1}{64} \xrightarrow{\text{جذر}}$

$\cos\alpha\cos 2\alpha\cos 4\alpha = \pm\frac{1}{8}$ $\quad$ $\sin\alpha$ را دو طرف ضرب کن $\quad 8\sin\alpha\cos\alpha\cos 2\alpha\cos 4\alpha = \pm\sin\alpha \longrightarrow \sin 8\alpha = \pm\sin\alpha$

$\sin\alpha \neq 0$ چون نمی‌توان ۲ طرف را در صفر ضرب کرد $\alpha \neq k\pi$. بای

$\sin 8\alpha = \sin\alpha \longrightarrow 8\alpha = 2k\pi + \alpha \longrightarrow \alpha = \frac{2k\pi}{7}$

$8\alpha = 2k\pi + \pi - \alpha \longrightarrow \alpha = \frac{(2k+1)\pi}{9}$

جواب‌های Max: $\alpha = \frac{6\pi}{7}, \alpha = \frac{7\pi}{9}$

$\sin 8\alpha = -\sin\alpha = \sin(-\alpha) \longrightarrow 8\alpha = 2k\pi - \alpha \longrightarrow \alpha = \frac{2k\pi}{9}$

$8\alpha = 2k\pi + \pi - (-\alpha) \longrightarrow \alpha = \frac{(2k+1)\pi}{7}$

$\boxed{\alpha = \frac{8\pi}{9}}, \alpha = \frac{5\pi}{7}$

تست ۹۱: مجموع جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\sin^{۳} x + \cos^{۳} x = ۱ - \frac{۱}{۲}\sin ۲x$، در بازهٔ $[۰, ۲\pi]$ کدام است؟ *(ریاضی ۹۸)*

۱) $\frac{۵\pi}{۲}$ ۲) $\frac{۷\pi}{۲}$ ۳) ۲π ۴) ۳π

تست ۹۲: مجموع جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\sin^{۴} x + \cos^{۴} x = \frac{۱}{۲}$، در بازهٔ $[۰, ۲\pi]$، کدام است؟ *(خارج ریاضی ۹۸)*

۱) $\frac{۵\pi}{۲}$ ۲) ۳π ۳) $\frac{۷\pi}{۲}$ ۴) ۴π

تست ۹۳: جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $۲\tan x . \cos^{۲} x = ۱$ به کدام صورت است؟ *(خارج تجربی ۸۶)*

۱) $k\pi - \frac{\pi}{۴}$ ۲) $k\pi + \frac{\pi}{۴}$ ۳) $۲k\pi - \frac{\pi}{۴}$ ۴) $۲k\pi + \frac{\pi}{۴}$

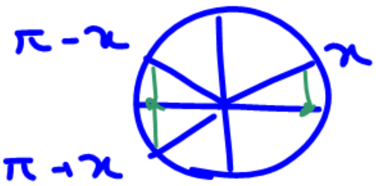
مثال ۹۴: معادله زیر را حل کنید.

۳) $\cos ۳x - \cos x = ۰$

$$\cos \underbrace{۳x}_{u} = \cos \underbrace{x}_{\alpha} \Rightarrow ۳x = ۲k\pi \pm x \Rightarrow \begin{cases} ۳x = ۲k\pi + x \Rightarrow ۲x = ۲k\pi \Rightarrow x = k\pi \\ ۳x = ۲k\pi - x \Rightarrow ۴x = ۲k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{۲} \end{cases}$$

تست ۹۵: جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $\sin^{۲} x - \cos^{۲} x = \sin(\frac{۳\pi}{۲} + x)$ به کدام صورت است؟ (تجربی ۹۱)

۱) $\frac{k\pi}{۳}$ ۲) $\frac{۲k\pi}{۳}$ ۳) $۲k\pi + \frac{\pi}{۳}$ ۴) $۲k\pi \pm \frac{۲\pi}{۳}$



مثال ۹۶: معادله زیر را حل کنید.

$$\cos ۳x + \cos x = ۰$$

$$\cos ۳x = -\cos x$$ ⟵ $\cos(\pi + x)$ یا $\cos(\pi - x)$

الان چی‌کار کنم آقا؟ چطوری از شرّ منفی خلاص بشیم؟ آخه کسینوس که خاصیت $\cos(-\alpha) = -\cos\alpha$ رو نداره ☹

ایرادی نداره از یه خاصیت دیگه می‌توانیم واسش استفاده کنیم. کسینوسه دیگه! همیشه ساز مخالف میزنه. ببینید:

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$$

پس به جای $-\cos\alpha$ بذارید $\cos(\pi - \alpha)$. به همین راحتی ☺

$$\cos ۳x = -\cos x \Rightarrow \cos ۳x = \cos(\pi - x) \Rightarrow ۳x = ۲k\pi \pm (\pi - x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۳x = ۲k\pi + \pi - x \Rightarrow ۴x = ۲k\pi + \pi \Rightarrow \boxed{x = \frac{k\pi}{۲} + \frac{\pi}{۴}} \\ ۳x = ۲k\pi - \pi + x \Rightarrow ۲x = ۲k\pi - \pi \Rightarrow \boxed{x = k\pi - \frac{\pi}{۲}} \end{cases}$$

تست ۹۷: جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $\cos ۳x + \cos x = ۰$ با شرط $\cos x \neq ۰$ کدام است؟ (خارج تجربی ۹۳ و ۹۸)

۱) $\frac{k\pi}{۲} + \frac{\pi}{۴}$ ✓ ۲) $\frac{k\pi}{۲} + \frac{\pi}{۸}$ ۳) $k\pi - \frac{\pi}{۴}$ ۴) $k\pi + \frac{\pi}{۴}$

$$\cos ۳x = -\cos x \longrightarrow \cos(۳x) = \cos(\pi - x) \longrightarrow ۳x = ۲k\pi \pm (\pi - x)$$

$$\cos u = \cos \alpha$$
$$u = ۲k\pi \pm \alpha$$

$$\begin{cases} ۳x = ۲k\pi + \pi - x \\ ۴x = ۲k\pi + \pi \longrightarrow \boxed{x = \frac{k\pi}{۲} + \frac{\pi}{۴}} \\ ۳x = ۲k\pi - \pi + x \end{cases}$$

$$۲x = ۲k\pi - \pi$$

$x = k\pi - \frac{\pi}{۲}$ غلط — در فرض سؤال گفته $\cos x \neq ۰$.

اگر دو طرف هم‌نسبت نباشن ولی توانشون (یک) باشد باید کاری کنیم که هم‌نسبت بشن. فقط کافیه از این روابط استفاده کنیم:

$$\sin\alpha = \cos(\frac{\pi}{۲}-\alpha)$$

$$\cos\alpha = \sin(\frac{\pi}{۲}-\alpha)$$

$$\tan\alpha = \cot(\frac{\pi}{۲}-\alpha)$$

$$\cot\alpha = \tan(\frac{\pi}{۲}-\alpha)$$

$\cos\theta = \sin(\frac{\pi}{2}-\theta)$

$\sin\theta = \cos(\frac{\pi}{2}-\theta)$

مثال ۹۸: معادله زیر را حل کنید. $۵)\ \sin ۳x - \cos ۲x = ۰$

$$\sin ۳x = \cos ۲x \Rightarrow \sin \underbrace{۳x}_{u} = \sin(\underbrace{\frac{\pi}{۲}-۲x}_{\alpha}) \Rightarrow \begin{cases} ۳x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲} - ۲x \Rightarrow ۵x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲} \Rightarrow \boxed{x = \frac{۲k\pi}{۵} + \frac{\pi}{۱۰}} \\ ۳x = ۲k\pi + \pi - (\frac{\pi}{۲} - x) \Rightarrow \boxed{x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲}} \end{cases}$$

تست ۹۹: جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\sin(۲x-\frac{\pi}{۴}) = \cos(x+\frac{\pi}{۴})$ با شرط $\boxed{x \neq k\pi}$ که در آن k یک عدد صحیح است، کدام است؟ (تجربی ۹۹)

نکته: اگر دو جواب کلی با $-2k\pi$ یا $-k\pi$ یا $-\frac{k\pi}{2}$ داشتی، علامت رو مثبت بنویس منفی نداره

۱) $\frac{k\pi}{۳}$ ۲) $\frac{۲k\pi}{۳}$ ۳) $\frac{۲k\pi}{۳} - \frac{\pi}{۶}$ ۴) $\frac{۲k\pi}{۳} + \frac{\pi}{۶}$ ✓

$\cos(x+\frac{\pi}{4}) = \sin(2x-\frac{\pi}{4})$

$\cos(x+\frac{\pi}{4}) = \cos(\frac{\pi}{2}-(2x-\frac{\pi}{4}))$

$x+\frac{\pi}{4} = 2k\pi \pm (\frac{\pi}{2} - 2x + \frac{\pi}{4})$

$x+\frac{\pi}{4} = 2k\pi \pm (\frac{3\pi}{4} - 2x)$

$x+\frac{\pi}{4} = 2k\pi + \frac{3\pi}{4} - 2x$

$3x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \rightarrow \boxed{x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6}}$

$x+\frac{\pi}{4} = 2k\pi - \frac{3\pi}{4} + 2x$

$-x = 2k\pi \underbrace{- \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4}}_{-\pi} \rightarrow x = -2k\pi + \pi$

$x = 2k\pi + \pi$ غ ق ق

مثال ۱۰۰: معادله زیر را حل کنید. $۶)\ \sin ۳x + \cos x = ۰$

این‌طور موقع‌ها که یه دونه از این‌ها منفی داره کاری کن منفی بیاد پشت سینوس. اینطوری راحت‌تر از شرّ منفی خلاص می‌شی. ببین:

$$\sin ۳x = -\cos x$$

راه طولانی: چون اول باید منفیِ پشت کسینوس رو از بین ببری بعدش کسینوس رو تبدیل به سینوس کنی. $\Rightarrow$

راه خوبتر: $\cos x = -\sin ۳x = \sin(-۳x)$

$$\cos x = \cos(\frac{\pi}{۲}-(-۳x)) \Rightarrow \cos x = \cos(\frac{\pi}{۲}+۳x) \Rightarrow x = ۲k\pi \pm (\frac{\pi}{۲}+۳x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲} + ۳x \Rightarrow -۲x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲} \Rightarrow x = -k\pi - \frac{\pi}{۴} \xrightarrow{\text{فرقی با } -k\pi \text{ ندارد } k\pi} \boxed{x = k\pi - \frac{\pi}{۴}} \\ x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۲} - ۳x \Rightarrow ۴x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۲} \Rightarrow \boxed{x = \frac{k\pi}{۲} - \frac{\pi}{۸}} \end{cases}$$

تست ۱۰۱: جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $۲\cos^{۲} x + ۲\sin x \cos x = ۱$، به کدام صورت است؟ (تجربی ۹۴)

۱) $\frac{k\pi}{۲} - \frac{\pi}{۸}$ ۲) $\frac{k\pi}{۲} + \frac{\pi}{۸}$ ۳) $k\pi - \frac{\pi}{۸}$ ۴) $k\pi + \frac{\pi}{۸}$

معادلات تانژانتی

مثال ۱۰۲: معادله زیر را حل کنید و تعداد جواب‌ها را در فاصلهٔ $[۰,۲\pi]$ مشخص کنید.

۷) $\tan ۳x - \tan x = ۰$

$$\tan \underbrace{۳x}_{u} = \tan \underbrace{x}_{\alpha} \Rightarrow ۳x = k\pi + x \Rightarrow ۲x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{۲}$$

k	۰	۱	۲	۳	۴
x	۰	$\boxed{\frac{\pi}{۲}}$ ↓ غ.ق.ق	π	$\boxed{\frac{۳\pi}{۲}}$ ↓ غ.ق.ق	۲π

۸) $\tan ۳x + \tan x = ۰ \Rightarrow \tan ۳x = -\tan x$

واسه تانژانت هم مثل سینوس می‌تونی از خاصیت $\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$ استفاده کنی:

$$\tan \underbrace{۳x}_{u} = \tan(\underbrace{-x}_{\alpha}) \Rightarrow ۳x = k\pi + (-x) \Rightarrow ۴x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{۴}$$

k	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸
x	۰	$\frac{\pi}{۴}$	$\boxed{\frac{\pi}{۲}}$ ↓ غ.ق.ق	$\frac{۳\pi}{۴}$	π	$\frac{۵\pi}{۴}$	$\boxed{\frac{۳\pi}{۲}}$ ↓ غ.ق.ق	$\frac{۷\pi}{۴}$	۲π

کتانژانت هم دقیقاً مثل تانژانتِ.

تست ۱۰۳: جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $\tan x \tan ۳x = ۱$، کدام است؟ (تجربی ۹۷ و ریاضی ۹۹)

۱) $\frac{k\pi}{۴}$ ۲) $\frac{k\pi}{۲} + \frac{\pi}{۸}$ ۳) $\frac{k\pi}{۲} + \frac{۳\pi}{۸}$ ۴) $\frac{k\pi}{۴} + \frac{\pi}{۸}$

مثال ۱۰۴: معادلات زیر را حل کنید.

۱) $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 0$

$$\xrightarrow{\div \cos x} \tan x + \sqrt{3} = 0 \Rightarrow \tan x = -\sqrt{3} = \tan(-\frac{\pi}{3}) \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{3}$$

اگر سینوس و کسینوس توان دو داشتند، می‌تونیم از روش‌های حل معادله درجه ۲ استفاده کنیم.

تست ۱۰۵: از معادلهٔ $2\sin^2 2x - \sin 2x - 1 = 0$ برای x در فاصلهٔ صفر تا 2π چند جواب به‌دست می‌آید؟

۱) ۶ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

$$\begin{cases} (1)\sin^2 u = \sin^2 \alpha \\ (2)\cos^2 u = \cos^2 \alpha \\ (3)\tan^2 u = \tan^2 \alpha \\ (4)\cot^2 u = \cot^2 \alpha \end{cases} \Rightarrow \boxed{u = k\pi \pm \alpha}$$

تست ۱۰۶: جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $\cos 2x + 2\cos^2 x = 0$ کدام است؟ (تجربی ۹۶)

۱) $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ ۲) $2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$ ۳) $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ ۴) $k\pi \pm \frac{\pi}{6}$

یادت باشه: حواست به رادیکال فرجه زوج باشه.

تست ۱۰۷: تمام جواب‌های معادله‌ی $\sqrt{\sin x} = \sqrt{\cos x}$ کدام است؟

۱) $x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۴}$ ۲) $x = k\pi + \frac{\pi}{۴}$ ۳) $x = ۲k\pi$ ۴) $x = \frac{k\pi}{۲} + \frac{\pi}{۴}$

تست ۱۰۸: جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $\frac{\sin ۳x}{\sin x} = ۲\cos^۲ x$ کدام است؟ *(سراسری ریاضی ۹۳)*

۱) $\frac{k\pi}{۲}$ ۲) $\frac{k\pi}{۲} + \frac{\pi}{۴}$ ۳) $k\pi - \frac{\pi}{۴}$ ۴) $k\pi + \frac{\pi}{۴}$

پاسخ: گزینه‌ی «۲»

$$\frac{۳\sin x - ۴\sin^۳ x}{\sin x} = ۲\underbrace{\cos^۲ x}$$

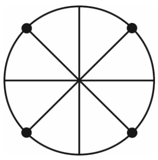
حالا تفکیک:

$$۳ - ۴\sin^۲ x = ۲(۱ - \sin^۲ x)$$

$$۳ - ۴\sin^۲ x = ۲ - ۲\sin^۲ x \Rightarrow -۲\sin^۲ x = -۱ \Rightarrow \sin^۲ x = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \sin^۲ x = (\frac{\sqrt{۲}}{۲})^۲$$

$$\Rightarrow \sin^۲ x = (\sin\frac{\pi}{۴})^۲ \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{۴}$$

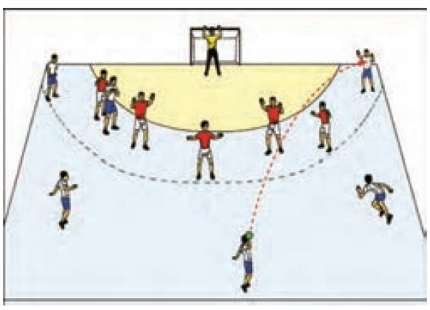
طراح جفتش رو توی گزینه‌ها گذاشته، ولی از روی دایره تصمیم می‌گیریم.



$$\boxed{x = \frac{k\pi}{۲} + \frac{\pi}{۴}}$$

گزینه‌ی «۲» درسته. ضمناً چون این جواب‌ها مخرج کسر اصلی رو صفر نمی‌کنن پس اوکیه!

مثال ۱۰۹: یک بازیکن هندبال توپ را با سرعت $۱۶\ m/s$ برای هم‌تیمی خود که در ۱۲/۸ متری او قرار دارد پرتاب می‌کند. اگر رابطه بین سرعت توپ v (برحسب متر بر ثانیه)، مسافت طی‌شده افقی d (برحسب متر) و زاویه‌ی پرتاب θ به صورت زیر باشد، آن‌گاه زاویه‌ی پرتاب توپ چه‌قدر بوده است؟



$$d = \frac{v^۲ \sin ۲\theta}{۱۰}$$

از رابطه‌ی داده‌شده به دست می‌آید:

$$۱۲/۸=\frac{(۱۶)^۲\sin ۲\theta}{۱۰}\Rightarrow \sin ۲\theta=\frac{۱۲/۸\times ۱۰}{۲۵۶}\Rightarrow \sin ۲\theta=\frac{۱}{۲}\Rightarrow \begin{cases} ۲\theta=۲k\pi+\frac{\pi}{۶} & k\in\mathbb{Z}\\ ۲\theta=(۲k+۱)\pi-\frac{\pi}{۶} & k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

با توجه به شکل، جواب $\theta=\frac{\pi}{۱۲},\frac{۵\pi}{۱۲}$ قابل قبول می‌باشد.

مثال ۱۱۰: مثلثی با مساحت ۳ سانتی‌متر مربع مفروض است. اگر اندازه‌ی دو ضلع آن به ترتیب ۲ و ۶ سانتی‌متر باشند، آن‌گاه چند مثلث بـا این خاصیت‌ها می‌توان ساخت؟

یادت باشه: حواست به ریشه‌ی مخرج باشه.

مثال ۱۱۱: معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$\frac{۱+\sin x}{۱+\cos ۲x}=\frac{۱}{۲}$$

دوره تناوب

f متناوب است اگر با افزودن یک مقدار ناصفر به x عرض (y) تابع عوض نشود و دو شرط زیر داشته باشد:

$۱)\ \forall x\in D_f \Rightarrow x+T\in D_f \qquad ۲)\ f(x+T)=f(x) \quad T\neq ۰$

مثلاً $\sin\frac{\pi}{۶}$ با $\sin(۲\pi+\frac{\pi}{۶})$ برابر و هر دو $\frac{۱}{۲}$ هستند. در حالی که به x ، $۲\pi=۶/۲۸...$ افزوده‌ایم.

هر مضربی از دوره‌ی تناوب، خود دوره‌ی تناوب است که کوچک‌ترین مقدار مثبت دوره تناوب را، دوره تناوب اصلی می‌گوییم.

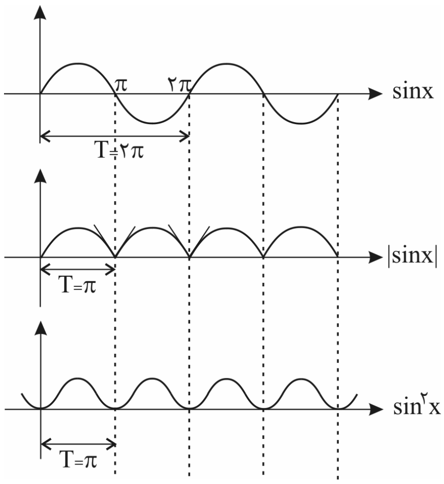
تذکر: تابع ثابت، متناوب است و دوره تناوبش هر عدد حقیقی است ولی چون کوچک‌ترین عدد حقیقی وجود ندارد، کوچک‌ترین دوره تناوب ندارد.

۱) دوره تناوب $f(x)$ اگر T باشد، آن‌گاه دوره‌ی تناوب $af(x+b)+k$ نیز همان T هست.

۲) تابع متناوب، یک به یک و معکوس‌پذیر نیست.

۳) دوره تناوب $\sin^{۲k+۱} ax$ و $\cos^{۲k+۱} ax$ برابر است با: $T=\frac{۲\pi}{|a|}$

دوره تناوب $\tan ax$ و $\cot ax$ به هر توان (چه زوج، چه فرد) و $|\tan ax|$ و $|\cot ax|$ به هر توان $T=\frac{\pi}{|a|}$ است.



$$\begin{cases} \sin^{2k} ax \\ \cos^{2k} ax \\ |\sin ax| \text{ (توان چه زوج و چه فرد باشد)} \\ |\cos ax| \text{ (توان چه زوج و چه فرد باشد)} \end{cases}$$

تست ۱۱۲: اگر دورهٔ تناوب تابع $f(x) = 2\cos(mx + \frac{m}{2})$ برابر $\frac{4}{3}$ باشد، مقدار $f(0)$ کدام است؟ $(m > 0)$

۱) $-\sqrt{3}$ ۲) $\sqrt{3}$ ۳) $\sqrt{2}$ ۴) $-\sqrt{2}$

تست ۱۱۳: دورهٔ تناوب تابع $f(x) = \dfrac{\cos 2x \cos 4x}{\tan x + \cot x}$ کدام است؟

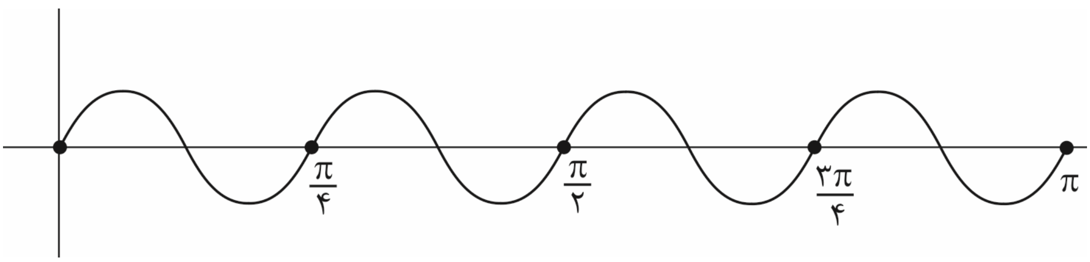
۱) π ۲) $\frac{\pi}{2}$ ۳) $\frac{\pi}{4}$ ۴) $\frac{\pi}{8}$

پاسخ:

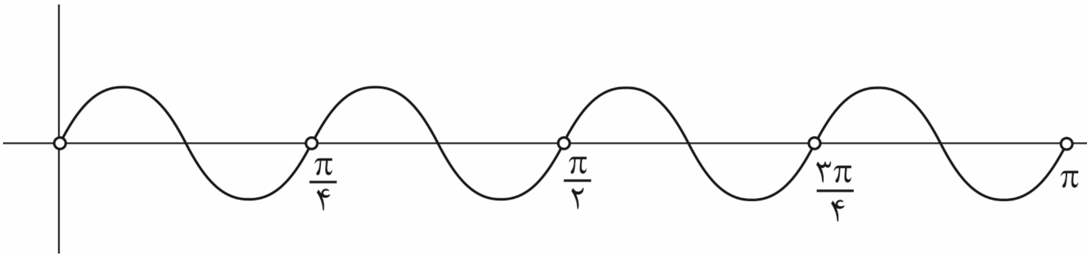
$$f(x) = \frac{\cos 2x \cos 4x}{\frac{2}{\sin 2x}} = \frac{\sin 2x \cos 2x \cos 4x}{2} = \frac{\frac{1}{2}\sin 4x \cos 4x}{2} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\sin 8x}{2} = \frac{1}{8}\sin 8x$$

$T = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$ در حالت معمول

بنابراین به این شکل می‌رسیم:



ولی باید توجه کنید که به علت حضور $\tan x$ و $\cot x$ در مخرج کسر $x \neq \frac{k\pi}{۲}$ می‌باشد. پس باید این نقاط توخالی باشند:



اکنون از شکل مشخص است که $T = \frac{\pi}{۲}$ است نه $\frac{\pi}{۴}$. جالب این است که در خود آزمون، این سوال به اشتباه پاسخ داده شده است. گزینهٔ (۲) صحیح است.

تست ۱۱۴: دورهٔ تناوب $f(x) = \frac{\sin x}{\sin x}$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{۲}$ ۲) π ۳) $\frac{۳\pi}{۲}$ ۴) ۲π

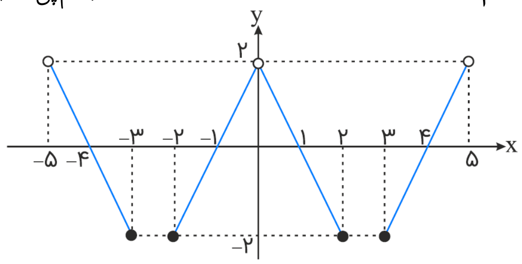
تست ۱۱۵: اگر دورهٔ تناوب تابع $y = ۳\cos ax$ برابر ۲ باشد، اولین نقطه min این تابع با طول مثبت کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) ۲

تست ۱۱۶: تابع $y = -\frac{۱}{۲}\sin(۳\pi x)$ در بازهٔ $[-\frac{۱}{۲}, ۱]$ چند بار بیشترین مقدار را دارد؟ (قلم‌چی ۹۸)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

تست ۱۱۷: قسمتی از نمودار تابع متناوب $y=f(x)$ به شکل زیر است. $f(۱۲۸/۱)$ کدام است؟ (قلم‌چی ۹۸)



۱) $۱/۸$

۲) $-۱/۸$

۳) $-۰/۲$

۴) تعریف‌نشده

تست ۱۱۸: دورهٔ تناوب تابع با ضابطهٔ $f(x)=\tan(\pi x)-\cot(\pi x)$ کدام است؟ (خارج ریاضی ۹۸)

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۱ ۳) $-\frac{۱}{۲}$ ۴) -۱

تست ۱۱۹: دورهٔ تناوب تابع $y=\sin x\sqrt{۱+\cos ۲x}$ کدام است؟ (قلم‌چی ریاضی ۹۹)

۱) π ۲) $\frac{\pi}{۲}$ ۳) $\frac{۳\pi}{۲}$ ۴) ۲π

پاسخ:

$$f(x)=\sin x\sqrt{۲\cos^۲ x}=\sqrt{۲}\sin x\,|\cos x|$$

گزینهٔ (۱): $f(x+\pi)=-\sqrt{۲}\sin x\,|\cos x|\neq f(x)$

گزینهٔ (۲): $f(x+\frac{\pi}{۲})=\sqrt{۲}\cos x\,|\sin x|\neq f(x)$

گزینهٔ (۳): $f(x+\frac{۳\pi}{۲})=-\sqrt{۲}\cos x\,|\sin x|\neq f(x)$

گزینهٔ (۴): $f(x+۲\pi)=\sqrt{۲}\sin x\,|\cos x|=f(x)$

توابع مثلثاتی

$\boxed{y=\sin x}$

۱) دامنه‌ی این تابع $\mathbb{R}$ است. ($\sin x$ به ازای هر $x\in\mathbb{R}$ جواب دارد.)

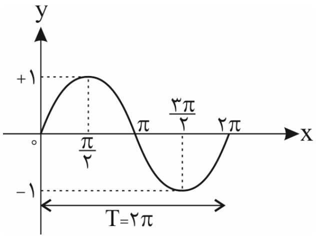
۲) برد این تابع $[-۱,۱]$ است. (چون $-۱\le \sin x\le ۱$)

۳) از آن‌جایی که کمان $(\underbrace{۲k\pi}_{\text{مضارب زوج } \pi}+\alpha)$ از لحاظ موقعیت در دایره‌ی مثلثاتی با کمان α تفاوتی ندارد، رفتار تابع $y=\sin x$ را در $[۰,۲\pi]$

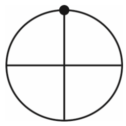
یعنی یک دور از دایره‌ی مثلثاتی بررسی و نمودار آن را رسم کرده، سپس ۲π تا ۲π تا تکرارش می‌کنیم.

نمودار $y=\sin x$ در $[۰,۲\pi]$ به کمک جدول زیر به صورتی که مشاهده می‌شود رسم می‌گردد:

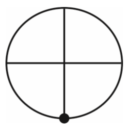
x	۰	$\frac{\pi}{۲}$	π	$\frac{۳\pi}{۲}$	۲π
y	۰	۱	۰	-۱	۰



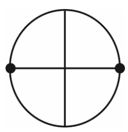
(دوره‌ی تناوب اصلی این تابع $T=۲\pi$ می‌باشد.)

۴) ماکزیمم (بیشینه) مقدار تابع $y=\sin x$ برابر ۱ است که در  یعنی کمان $x=۲k\pi+\frac{\pi}{۲},k\in\mathbb{Z}$ (مثل $\frac{\pi}{۲}$، $\frac{۵\pi}{۲}$، $\frac{۹\pi}{۲}$

یا $\frac{-۳\pi}{۲}$، $\frac{-۷\pi}{۲}$ و ...) رخ می‌دهد.

۵) مینیمم (کمینه) مقدار تابع $y=\sin x$ برابر -۱ است که در  یعنی کمان $x=۲k\pi-\frac{\pi}{۲},k\in\mathbb{Z}$ (مثل $\frac{۳\pi}{۲}$، $\frac{۷\pi}{۲}$ یا

$\frac{-\pi}{۲}$، $\frac{-۵\pi}{۲}$ و ...) رخ می‌دهد.

۶) تابع $y=\sin x$ در  یعنی کمان $x=k\pi,k\in\mathbb{Z}$ (مثل ۰، $\pm\pi$، $\pm۲\pi$ و ...) با محور طول‌ها برخورد می‌کند، یعنی مقدار آن صفر می‌شود.

در حالت کلی، در تابع $y=a\sin(bx+c)+d$:

۱) مقدار ماکزیمم تابع برابر $|a|+d$ و مقدار مینیمم آن $-|a|+d$ می‌باشد.

۲) برای یافتن نقطه‌ی برخورد نمودار با محور yها، در ضابطه‌ی تابع $x=۰$ قرار می‌دهیم و y را به دست می‌آوریم. برای یافتن نقاط برخورد نمودار با محور xها نیز در ضابطه‌ی تابع $y=۰$ قرار می‌دهیم و معادله‌ی مثلثاتی حاصل را حل می‌کنیم.

۳) دوره‌ی تناوب برابر $T=\frac{۲\pi}{|b|}$ است.

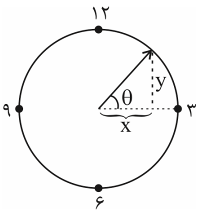
تست ۱۲۰: اگر بیشترین مقدار تابع $y=۲\sin ۵x-۳c$ برابر (-۷) باشد، c کدام است؟

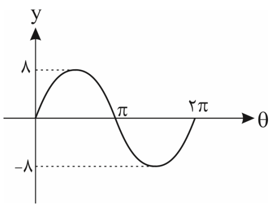
۱) ۳   ۲) -۲ ۳) -۵ ۴) ۱

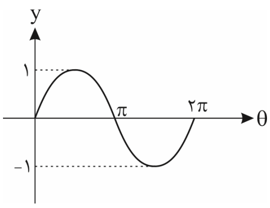
پاسخ: گزینه‌ی «۱»

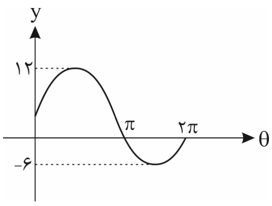
$$y_{max}=۲-۳c=-۷ \Rightarrow -۳c=-۹ \Rightarrow c=۳$$

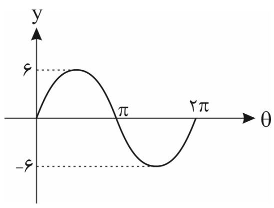
تست ۱۲۱: طول عقربه‌ی دقیقه‌شمار یک ساعت ۸ سانتی‌متر است و این عقربه با جهت مثبت محور افقی زاویه‌ی θ می‌سازد. با توجه به شکل زیر، نمودار تابع y برحسب θ کدام است؟ (θ برحسب رادیان است.)



۱)


۲)


۳)


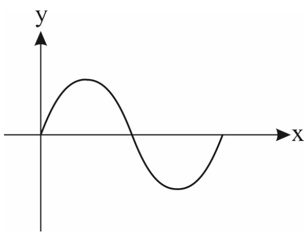
۴)


پاسخ: گزینه‌ی «۱» ـ طبق تعریف نسبت مثلثاتی سینوس در مثلث قائم‌الزاویه‌ی موجود داریم:

$$\sin\theta = \frac{y}{r} \Rightarrow \sin\theta = \frac{y}{۸} \Rightarrow y = ۸\sin\theta \Rightarrow \begin{cases} T = ۲\pi \\ y_{max} = ۸ \\ y_{min} = -۸ \end{cases}$$

مشخصه که بیشترین مقدار (max) تابع $y = ۸\sin\theta$ برابر ۸ و کم‌ترین مقدار این تابع ۸- و دوره‌ی تناوبش هم $T = ۲\pi$ هست. پس گزینه‌ی «۱» درسته.

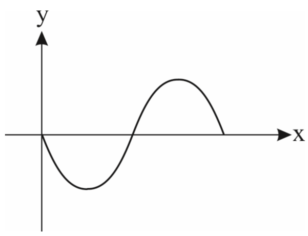
حالت ۱



$y = a\sin bx$

$a \times b > ۰$

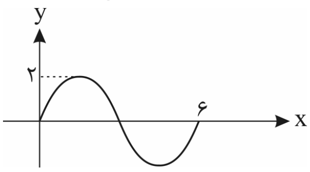
حالت ۲



$y = a\sin bx$

$a \times b < ۰$

تست ۱۲۲: شکل روبه‌رو قسمتی از نمودار تابع $y = a\sin(b\pi x)$ است. $a + b$ کدام است؟ (خارج تجربی ۹۳)



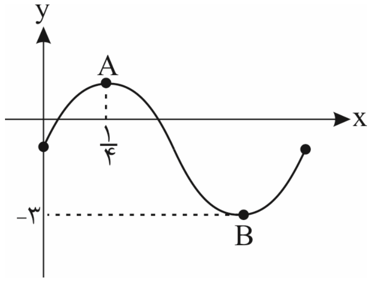
۱) $\frac{۴}{۳}$

۲) $\frac{۵}{۳}$

۳) $\frac{۷}{۳}$

۴) $\frac{۸}{۳}$

تست ۱۲۳: قسمتی از نمودار تابع $f(x)=2\sin b\pi x+c$ به صورت زیر رسم شده است. طول پاره‌خط AB کدام است؟



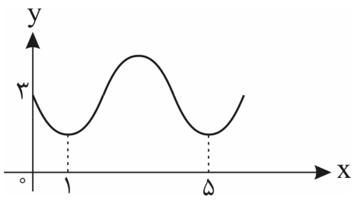
۱) $\frac{\sqrt{17}}{2}$

۲) $\frac{\sqrt{65}}{2}$

۳) $\frac{\sqrt{17}}{4}$

۴) $\frac{\sqrt{65}}{4}$

تست ۱۲۴: شکل روبه‌رو قسمتی از نمودار تابع $y=a+\sin(b\pi x)$ است. مقدار y در نقطه‌ی $x=\frac{25}{3}$، کدام است؟ (تجربی ۹۳)



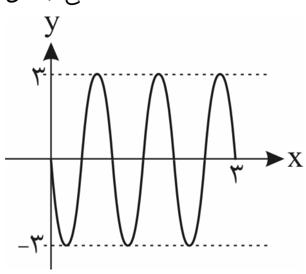
۱) ۲

۲) ۲/۵

۳) ۳

۴) ۳/۵

تست ۱۲۵: شکل روبه‌رو، قسمتی از نمودار تابع $y=a\sin(b\pi x)$ است. $a.b$ کدام است؟ (خارج ریاضی ۹۲)



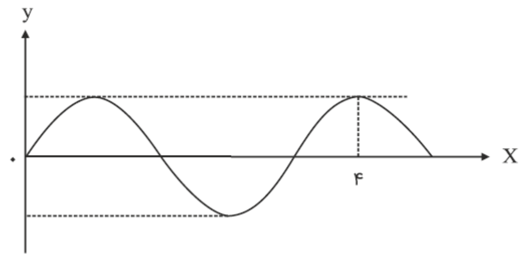
۱) -۶

۲) -۳

۳) ۴/۵

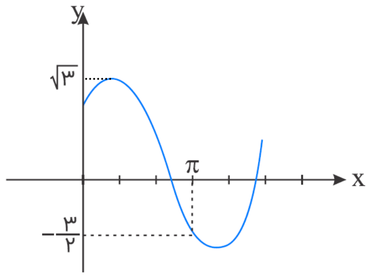
۴) ۶

تست ۱۲۶: قسمتی از نمودار تابع $y = a\cos((\frac{۳}{۲} + bx)\pi)$ به صورت زیر است. آن‌گاه کدام گزینه صحیح است؟ (قلم‌چی ۹۴)



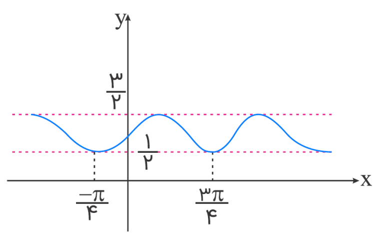
۱) $a < ۰ , b = \frac{۵}{۸}$
۲) $a < ۰ , b = -\frac{۵}{۸}$
۳) $a > ۰ , b = \frac{۵}{۱۶}$
۴) $a > ۰ , b = -\frac{۵}{۱۶}$

تست ۱۲۷: شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع $y = a + b\sin(x + \frac{\pi}{۳})$ است. b کدام است؟ (تجربی ۹۸)



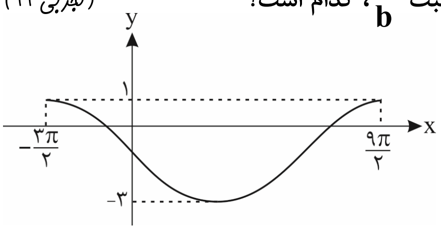
۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$
۲) $\frac{۳}{۲}$
۳) $\sqrt{۳}$
۴) ۲

تست ۱۲۸: شکل زیر، نمودار تابع $y = ۱ + a\sin bx\cos bx$ است. $a + b$ کدام است؟ (ریاضی ۹۸)



۱) ۱
۲) $\frac{۳}{۲}$
۳) ۲
۴) ۳

تست ۱۲۹: شکل زیر، نمودار تابع $y=a\sin(bx)+c$ را در یک بازهٔ تناوب، نشان می‌دهد. نسبت $\frac{a}{b}$، کدام است؟ (تجربی ۹۹)



۱) -۲

۲) -۳

۳) -۴

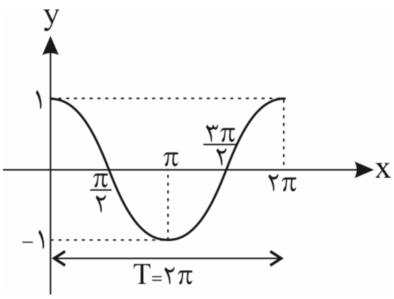
۴) -۶

$\boxed{y=\cos x}$

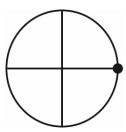
۱) دامنه‌ی این تابع $\mathbb{R}$ است ($\cos x$ به ازای هر $x\in\mathbb{R}$ جواب دارد).

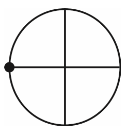
۲) برد این تابع $[-۱,۱]$ است (چون $-۱\le\cos x\le۱$).

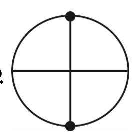
۳) نمودار $y=\cos x$ را نیز مانند $y=\sin x$ در $[۰,۲\pi]$ به کمک جدول زیر رسم کرده، سپس با توجه به همان خاصیت کمان $(\underbrace{۲k\pi}_{\text{مضارب زوج }\pi}+\alpha)$ و این که در واقع دوره‌ی تناوب اصلی $y=\cos x$ هم $T=۲\pi$ است، ۲π تا ۲π تا تکرار می‌کنیم.



x	۰	$\frac{\pi}{۲}$	π	$\frac{۳\pi}{۲}$	۲π
y	۱	۰	-۱	۰	۱

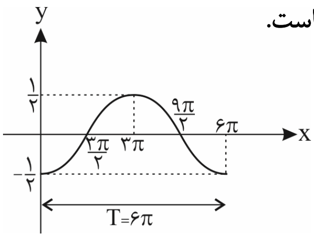
۴) ماکزیمم (بیشینه) مقدار تابع $y=\cos x$ برابر ۱ است که در  یعنی کمان $x=۲k\pi,k\in\mathbb{Z}$ (مثل ۰ ، $\pm۲\pi$، $\pm۴\pi$ و ...) رخ می‌دهد.

۵) مینیمم (کمینه) مقدار تابع $y=\cos x$ برابر -۱ است که در  یعنی کمان $x=(۲k+۱)\pi,k\in\mathbb{Z}$ (مثل $\pm\pi$، $\pm۳\pi$ و ...) رخ می‌دهد.

۶) تابع $y=\cos x$ در  یعنی کمان $x=k\pi+\frac{\pi}{۲},k\in\mathbb{Z}$ (مثل $\pm\frac{\pi}{۲}$، $\pm\frac{۳\pi}{۲}$ و ...) با محور طول‌ها برخورد می‌کند، یعنی مقدار آن صفر می‌شود.

قوانین انتقال (مشابه آن‌چه در قسمت الف) گفته شد) در مورد $y=\cos x$ نیز برقرار است.

تابع $y=a\cos bx$ دارای دوره‌ی تناوب اصلی $T=\frac{2\pi}{|b|}$، مقدار ماکزیمم $|a|$ و مقدار مینیمم $-|a|$ می‌باشد. مثلاً در $y=-\frac{1}{2}\cos(-\frac{x}{3})$ دوره‌ی تناوب اصلی $\frac{2\pi}{|-\frac{1}{3}|}=6\pi$، ماکزیمم تابع برابر $\frac{1}{2}$ و مینیمم تابع برابر $-\frac{1}{2}$ است.



(از آن‌جایی که $\cos(-\alpha)=\cos\alpha$، $y=-\frac{1}{2}\cos(-\frac{x}{3})$ همان $y=-\frac{1}{2}\cos\frac{x}{3}$ می‌باشد.)

تذکر: در واقع در رسم $y=a\cos bx$، نمودار $y=\cos x$ با ضریب $\frac{1}{|b|}$ دچار انقباض یا انبساط طولی (افقی) و با ضریب a دچار انبساط یا انقباض عرضی (عمودی) می‌شود. (علامت b تأثیری روی رسم نمودار تابع کسینوس ندارد، چون کسینوس منفی‌خور است.)

حالت کلی، در تابع $y=a\cos(bx+c)+d$

۱) مقدار ماکزیمم تابع برابر $|a|+d$ و مقدار مینیمم آن $-|a|+d$ است.

۲) برای یافتن نقطه‌ی برخورد نمودار با محور yها، در ضابطه‌ی تابع $x=0$ قرار می‌دهیم و y را به دست می‌آوریم. برای یافتن نقاط برخورد نمودار با محور xها نیز در ضابطه‌ی تابع $y=0$ را قرار می‌دهیم و معادله‌ی مثلثاتی حاصل را حل می‌کنیم.

۳) دوره‌ی تناوب برابر $T=\frac{2\pi}{|b|}$ است.

تست ۱۳۰: اگر کم‌ترین مقدار تابع $h(x)=-a\cos\frac{\pi x}{3}+1$ برابر $\frac{2}{3}$ باشد، مقدار a کدام می‌تواند باشد؟

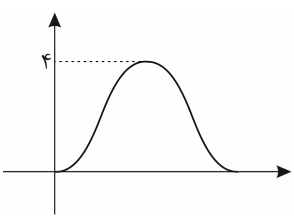
۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $-\frac{3}{2}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $-\frac{1}{3}$

پاسخ: گزینه‌ی «۴»

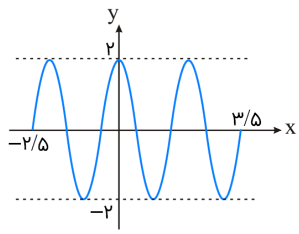
$$-|-a|+1=\frac{2}{3} \Rightarrow -|a|=\frac{2}{3}-1 \Rightarrow -|a|=-\frac{1}{3} \Rightarrow |a|=\frac{1}{3} \Rightarrow a=\pm\frac{1}{3}$$ (در میان گزینه‌ها $(-\frac{1}{3})$ وجود دارد.)

تست ۱۳۱: شکل زیر نمودار تابع $y=a+b\cos(\frac{\pi}{2}x)$، در بازه‌ی $(0,4)$ است. b کدام است؟ *(ریاضی ۹۷)*

۱) -2
۲) -1
۳) 1
۴) 2



تست ۱۳۲: شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع $y = a\sin \pi(\frac{۱}{۲} + bx)$ است. $a.b$ کدام است؟ (ریاضی ۹۲، قلم‌چی ۹۸)



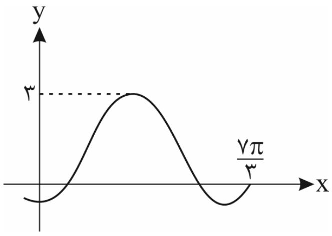
۱) ۲

۲) ۲/۵

۳) ۳

۴) ۳/۵

تست ۱۳۳: شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع با ضابطهٔ $y = a + b\sin(\frac{\pi}{۲} + x)$ است. مقدار b کدام است؟ (تجربی ۹۹)



۱) ۲

۲) ۱

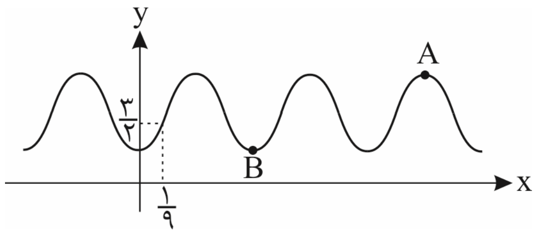
۳) ۱−

۴) ۲−

تست ۱۳۴: در تابع $f(x) = -۴a\sin^۲ ۲x + \cos ۴x + ۲a + ۳$ حدود a کدام باشد تا نمودار آن همواره زیر خط $y = ۷$ قرار گیرد؟ (قلم‌چی ریاضی ۹۹)

۱) $-\frac{۵}{۲} < a < \frac{۳}{۲}$ ۲) $-\frac{۳}{۲} < a < \frac{۵}{۲}$ ۳) $-\frac{۵}{۲} < a < -\frac{۳}{۲}$ ۴) $\frac{۳}{۲} < a < \frac{۵}{۲}$

تست ۱۳۵: اگر نمودار تابع $f(x)=۱+a\sin^۲(\frac{۳\pi}{۲}x)$ به صورت زیر باشد، شیب خط گذرنده از نقاط A و B کدام است؟



۱) ۱
۲) $\frac{۳}{۲}$
۳) ۲
۴) $\frac{۵}{۲}$

تانژانت

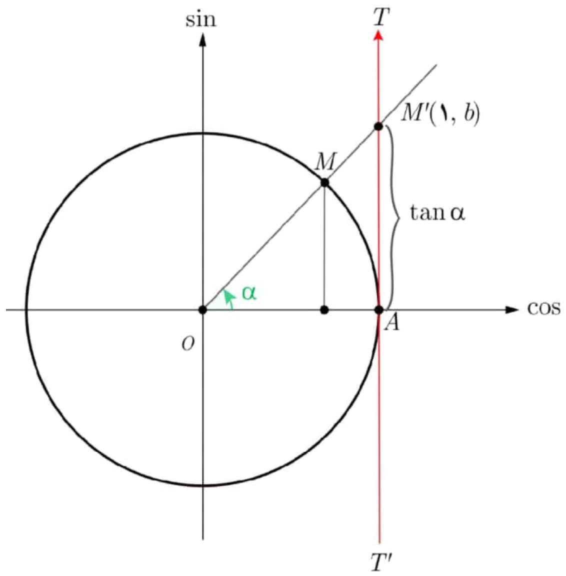
در دایرهٔ مثلثاتی روبه‌رو خط TAT' در نقطهٔ A بر محور کسینوس‌ها عمود است.

الف) زاویهٔ α را در ربع اول دایره مثلثاتی در نظر می‌گیریم و پاره‌خط OM را امتداد می‌دهیم تا این خط را در نقطهٔ M' قطع کند. نشان دهید:

$$\tan\alpha = AM' = b$$

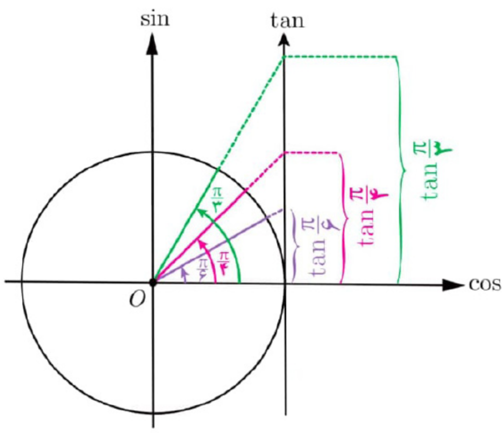
می‌توان دید که تانژانت هر زاویهٔ دلخواه مانند α، به همین ترتیب از برخورد امتداد ضلع دوم آن زاویه با خط TAT' تعیین می‌شود. بنابراین خط TAT' را محور تانژانت می‌نامیم. نقطهٔ A مبدأ این محور است و جهت مثبت محور، از پایین به سمت بالا است.

ب) چرا تانژانت زوایایی که انتهای کمان آن‌ها در ربع اول و سوم قرار دارد مقداری مثبت و تانژانت زوایایی که انتهای کمان آن‌ها در ربع دوم و چهارم قرار دارد، مقداری منفی است؟



تغییرات تانژانت

با تغییر زاویهٔ α مقادیر تانژانت آن نیز تغییر می‌کند. ابتدا این تغییرات را در ربع اول دایرهٔ مثلثاتی بررسی می‌کنیم. اگر $\alpha=۰$، مقدار $\tan\alpha$ نیز برابر صفر است و با افزایش اندازهٔ α، مقدار $\tan\alpha$ نیز افزایش می‌یابد.

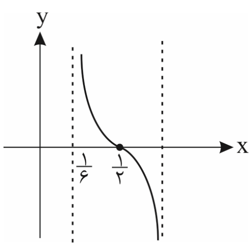


تابع تانژانت

همان‌طور که می‌بینیم به ازای هر زاویهٔ دلخواه در دایرهٔ مثلثاتی (به‌جز $x = k\pi + \frac{\pi}{۲}, k \in \mathbb{Z}$)، عددی حقیقی به عنوان $\tan\alpha$ داریم و تابعی با ضابطهٔ $y = \tan\alpha$ مشخص می‌کند. دامنهٔ این تابع مجموعهٔ $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi + \frac{\pi}{۲}, k \in \mathbb{Z}\}$ است و برد آن مجموعه اعداد حقیقی است. به سادگی می‌توان دید تابع $y = \tan\alpha$، تابعی متناوب است و دوره تناوب آن π است، زیرا: $\tan(\pi + x) = \tan x$

رسم تابع $y = \tan\alpha$

تست ۱۳۶: نمودار $f(x) = \tan(a + bx)$ به صورت مقابل است. b کدام است؟



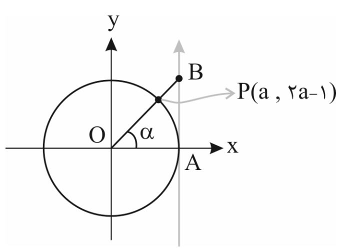
۱) $-\frac{۳\pi}{۲}$

۲) $\frac{۳\pi}{۲}$

۳) $-\frac{\pi}{۲}$

۴) $\frac{\pi}{۲}$

تست ۱۳۷: با توجه به دایرهٔ مثلثاتی زیر، مساحت مثلث AOB چه‌قدر است؟ $(۰ < \alpha < \frac{\pi}{۲})$



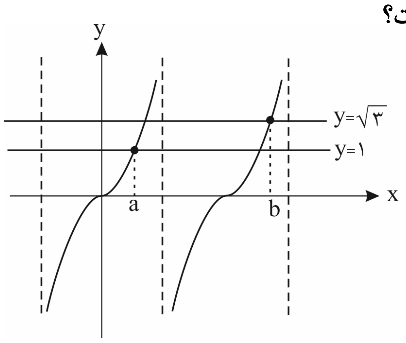
۱) $\frac{۲}{۳}$

۲) $\frac{۳}{۴}$

۳) $\frac{۳}{۸}$

۴) $\frac{۱}{۲}$

تست ۱۳۸: شکل زیر قسمتی از نمودار تابع $y = \tan x$ را نشان می‌دهد. حاصل $b - a$ کدام است؟



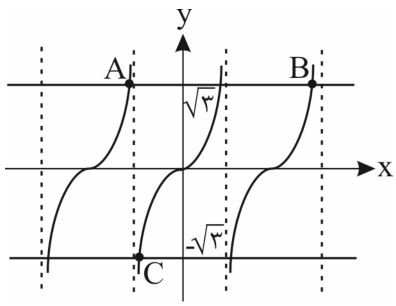
۱) $\frac{\pi}{۱۲}$

۲) $\frac{۵\pi}{۱۲}$

۳) $\frac{۷\pi}{۱۲}$

۴) $\frac{۱۳\pi}{۱۲}$

تست ۱۳۹: شکل زیر نمودار تابع $y = \tan ax$ است. اگر مساحت مثلث ABC برابر با $۸\sqrt{۳}\pi$ باشد، مقدار a کدام است؟



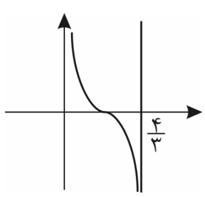
۱) $\frac{۱}{۲}$

۲) $\frac{۱}{۴}$

۳) $\frac{۳}{۴}$

۴) $\frac{۵}{۴}$

تست ۱۴۰: قسمتی از نمودار $f(x) = \tan(ax + \frac{۱}{۲})\pi$ به صورت شکل مقابل است. a کدام است؟



۱) $-\frac{۳}{۴}$
۲) $\pm\frac{۳}{۴}$
۳) $\frac{۳}{۴}$
۴) $\pm\frac{۳}{۲}$

توفیق و رستگاری را از خدا بخواهید