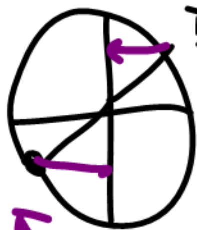
$$\begin{cases} \sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta & \sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} \\ \cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 1 - 2\sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 \\ \tan 2\theta = \dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} \end{cases}$$

حاصل $\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}$ ؟

کافی است در $\sin\frac{\pi}{7}$ ضرب و تقسیم کنیم:

$$\frac{\boxed{\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}}{\sin\frac{\pi}{7}} = \frac{\frac{1}{2}\boxed{\sin\frac{2\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}}\cos\frac{4\pi}{7}}{\sin\frac{\pi}{7}} = \frac{\frac{1}{2}\boxed{\left(\frac{1}{2}\sin\frac{4\pi}{7}\right)\cos\frac{4\pi}{7}}}{\sin\frac{\pi}{7}}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\sin\frac{8\pi}{7}\right)}{\sin\frac{\pi}{7}} = \frac{\frac{1}{8}\left(-\cancel{\sin\frac{\pi}{7}}\right)}{\cancel{\sin\frac{\pi}{7}}} = -\frac{1}{8}$$



$\frac{\pi}{7}$

$\pi + \frac{\pi}{7}$

Trigonometry
اندازه‌گیری مثلث
سه بر سنجی

مقابل بر وتر سینوس باشد
مجاور بر وتر باشد کسینوس
سینوس چو بر روی کسینوس افتد
تانژانت بدست آید و برعکس کتانژانت

مثلثات پایهٔ دوازدهم رشتهٔ تجربی

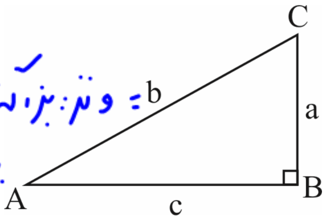
اعداد فیثاغورسی صادق در $a^2=b^2+c^2$
۳، ۴، ۵
۵، ۱۲، ۱۳

نسبت‌های مثلثاتی

فرض می‌کنیم A یک زاویهٔ حادهٔ معلوم باشد، اگر مثلث قائم‌الزاویه‌ای را در نظر بگیریم که یکی از زاویه‌های غیرقائم آن A است، حاصل هر یک از کسرهای:

۱) $\frac{\text{طول ضلع مقابل به زاویهٔ A}}{\text{طول ضلع مجاور به زاویهٔ A}}$، ۲) $\frac{\text{طول ضلع مجاور به زاویهٔ A}}{\text{طول ضلع مقابل به زاویهٔ A}}$، ۳) $\frac{\text{طول ضلع مقابل به زاویهٔ A}}{\text{وتر}}$ و ۴) $\frac{\text{طول ضلع مجاور به زاویهٔ A}}{\text{وتر}}$

همواره مقداری ثابت می‌باشند؛ یعنی فقط مقدار زاویهٔ A مهم است و اندازهٔ اضلاع مثلث قائم‌الزاویه‌ای که یک زاویه‌اش برابر $\hat{A}$ است تأثیری در این مقادیر ندارد. به دلیل ثابت بودن این مقادیر برای زاویهٔ A، هر یک از آن‌ها را به ترتیب ۱) تانژانت زاویهٔ A، ۲) کتانژانت زاویهٔ A، ۳) سینوس زاویهٔ A و ۴) کسینوس زاویهٔ A می‌نامیم.



وتر: بزرگترین ضلع
روبروی زاویه ۹۰

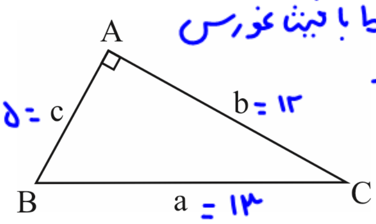
$$\sin\hat{A}=\frac{BC}{AC}=\frac{a}{b} \qquad \cos\hat{A}=\frac{AB}{AC}=\frac{c}{b}$$

$$\tan\hat{A}=\frac{BC}{AB}=\frac{a}{c}=tg\hat{A}=t\hat{g}\hat{A} \qquad \cot\hat{A}=\frac{AB}{BC}=\frac{c}{a}=Cotg\hat{A}=Cotg A$$

$$\frac{\sin\hat{A}=\frac{a}{b}}{\cos\hat{A}=\frac{c}{b}}=\frac{a}{c}=\tan\hat{A} \qquad \frac{c}{a}=Cotan\hat{A}$$

در یک مثلث قائم‌الزاویه، نسبت‌های سینوس، کسینوس، تانژانت و کتانژانت را نسبت‌های مثلثاتی می‌نامیم.

تست ۱: در شکل مقابل $a+c=۱۸$ و $\cos\hat{B}=\frac{۵}{۱۳}$، مقدار $\tan\hat{C}$ کدام است؟



b = ۱۲ با فیثاغورس

۱) $\frac{۵}{۱۲}$ ۲) $\frac{۱۲}{۵}$ ۳) $\frac{۱۳}{۵}$ ۴) $\frac{۵}{۱۳}$

$tg\hat{C}=\frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}}=\frac{۵}{۱۲}$

$\frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}}=\frac{۵}{۱۳}$

پاسخ: گزینهٔ «۱» ـ با توجه به تعریف کسینوس یک زاویه در مثلث قائم‌الزاویه، می‌توان نوشت:

$$\cos\hat{B}=\frac{c}{a} \Rightarrow \frac{۵}{۱۳}=\frac{c}{a} \xrightarrow{\times a} c=\frac{۵}{۱۳}a$$

از رابطهٔ $a+c=۱۸$ استفاده می‌کنیم:

$$a+c=۱۸ \Rightarrow a+\frac{۵}{۱۳}a=۱۸ \Rightarrow \frac{۱۸}{۱۳}a=۱۸ \Rightarrow a=۱۳ \Rightarrow c=۵$$

حال به کمک رابطهٔ فیثاغورس اندازهٔ b را محاسبه می‌کنیم:

$$a^۲=b^۲+c^۲ \Rightarrow ۱۳^۲=b^۲+۵^۲ \Rightarrow b^۲=۱۶۹-۲۵=۱۴۴ \xrightarrow{\sqrt{}} b=۱۲$$

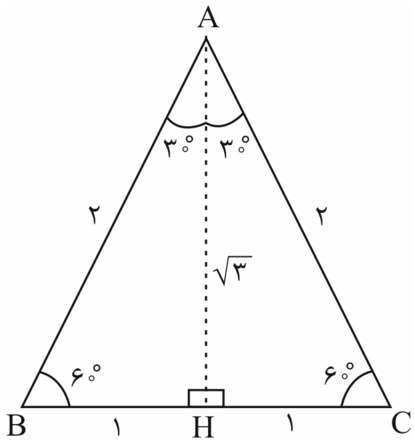
می‌دانیم که تانژانت یک زاویه، برابر نسبت ضلع مقابل به ضلع مجاور آن زاویه است.

$$\tan\hat{C}=\frac{c}{b} \Rightarrow \tan\hat{C}=\frac{۵}{۱۲}$$

نکته: با در نظر گرفتن مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۲ واحد، می‌توان نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های ۳۰° و ۶۰° را به صورت زیر محاسبه کرد. در مثلث متساوی‌الاضلاع، ارتفاع، میانه، نیمساز و عمودمنصف وارد بر یک ضلع بر هم منطبق‌اند.

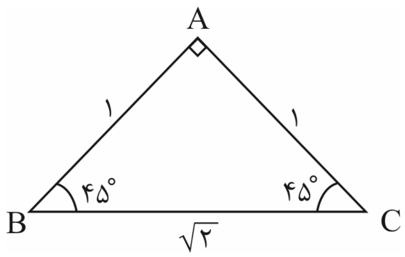
برای همین ۳۰ و ۶۰ (دو زاویه جمع ۹۰ باشند)

سینوس کسینوسه   کسینوس سینوسه
تانژانت کتانژانته   کتانژانت تانژانته



$$\overset{\Delta}{ABH}:\begin{cases}\sin ۳۰^\circ = \dfrac{BH}{AB} = \dfrac{۱}{۲}\\ \cos ۳۰^\circ = \dfrac{AH}{AB} = \dfrac{\sqrt{۳}}{۲}\\ \tan ۳۰^\circ = \dfrac{BH}{AH} = \dfrac{۱}{\sqrt{۳}} = \dfrac{\sqrt{۳}}{۳}\\ \cot ۳۰^\circ = \dfrac{AH}{BH} = \sqrt{۳}\end{cases} , \begin{cases}\sin ۶۰^\circ = \dfrac{AH}{AB} = \dfrac{\sqrt{۳}}{۲}\\ \cos ۶۰^\circ = \dfrac{BH}{AB} = \dfrac{۱}{۲}\\ \tan ۶۰^\circ = \dfrac{AH}{BH} = \sqrt{۳}\\ \cot ۶۰^\circ = \dfrac{BH}{AH} = \dfrac{۱}{\sqrt{۳}} = \dfrac{\sqrt{۳}}{۳}\end{cases}$$

با در نظر گرفتن مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین به اضلاع قائمه ۱ واحد می‌توان نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ ۴۵° (به عنوان مثال **B**) را به صورت زیر محاسبه کرد:



$$\sin ۴۵^\circ = \frac{AC}{BC} = \frac{۱}{\sqrt{۲}} = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \qquad \cos ۴۵^\circ = \frac{AB}{BC} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\tan ۴۵^\circ = \frac{AC}{AB} = ۱ \qquad \cot ۴۵^\circ = \frac{AB}{AC} = ۱$$

خلاصهٔ نسبت‌های مثلثاتی زوایای معروف $(۶۰^\circ, ۴۵^\circ, ۳۰^\circ)$

مقدار زاویهٔ θ / مقدار نسبت مثلثاتی	۳۰°	۴۵°	۶۰°
$\sin\theta$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$
$\cos\theta$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$
$\tan\theta$	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۱	$\sqrt{۳}$
$\cot\theta$	$\sqrt{۳}$	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$

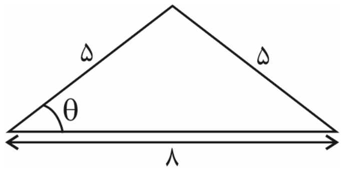
تست ۲: مقدار **x** در تساوی $\dfrac{\sqrt{۳}\tan ۶۰^\circ - ۴\sin ۳۰^\circ}{۲\sqrt{۲}\cos ۴۵^\circ + \cot ۴۵^\circ} = x\cos ۶۰^\circ$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) ۳   ۴) $\frac{۳}{۲}$

پاسخ: گزینهٔ «۲» ـ کافی است مقدار عددی هر یک از نسبت‌های مثلثاتی زوایای داده‌شده را جای‌گذاری کنیم:

$$x \times \frac{۱}{۲} = \frac{\sqrt{۳}\times\sqrt{۳} - ۴\times\frac{۱}{۲}}{۲\sqrt{۲}\times\frac{\sqrt{۲}}{۲} + ۱} \Rightarrow \frac{x}{۲} = \frac{۳-۲}{۲+۱} = \frac{۱}{۳} \xrightarrow{\times ۲} x = \frac{۲}{۳}$$

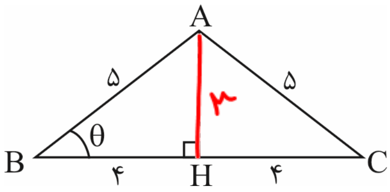
تست ۳: در مثلث مقابل، مقدار $۲\cos\theta+\sin\theta$ کدام است؟



۱) $\frac{۸}{۵}$ ۲) $\frac{۹}{۵}$

۳) $\frac{۱۱}{۵}$ ۴) $\frac{۱۲}{۵}$

پاسخ: گزینهٔ «۳» ـ مثلث رسم‌شده، متساوی‌الساقین است. پس ارتفاع، میانه و نیمساز وارد بر قاعده بر هم منطبق‌اند. ارتفاع وارد بر قاعـده را رسم می‌کنیم:



$$\overset{\Delta}{ABH}: AB^۲=AH^۲+BH^۲ \Rightarrow ۲۵=AH^۲+۱۶ \Rightarrow AH^۲=۹ \xrightarrow{\sqrt{\ }} AH=۳$$

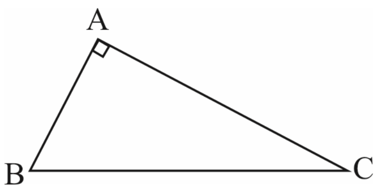
$$\sin\theta=\frac{AH}{AB}=\frac{۳}{۵}\ ,\ \cos\theta=\frac{BH}{AB}=\frac{۴}{۵}$$

در نتیجه مقدار خواسته‌شده برابر است با:

$$۲\cos\theta+\sin\theta=\frac{۸}{۵}+\frac{۳}{۵}=\frac{۱۱}{۵}$$

ارتباط بین نسبت‌های مثلثاتی زوایای متمم

اگر دو زاویه متمم هم باشند (مجموعشان ۹۰° باشد)، آن‌گاه سینوس یکی با کسینوس دیگری برابر است و برعکس، تانژانت یکی با کتانژانت دیگری برابر است و برعکس. در شکل زیر داریم:



$$\hat{B}+\hat{C}=۹۰^\circ$$

$$\sin\hat{B}=\frac{AC}{BC}=\cos\hat{C}\ ,\ \sin\hat{C}=\frac{AB}{BC}=\cos\hat{B}$$

$$\tan\hat{B}=\frac{AC}{AB}=\cot\hat{C}\ ,\ \tan\hat{C}=\frac{AB}{AC}=\cot\hat{B}$$

تست ۴: حاصل عبارت $P=\frac{۵\sin ۲^\circ\times\cot ۸۳^\circ\times\tan ۷۶^\circ}{۸\cot ۱۴^\circ\times\cos ۸۸^\circ\times\tan ۷^\circ}$ کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۸}$ ۲) $-\frac{۵}{۸}$ ۳) $\frac{۸}{۵}$ ۴) $-\frac{۸}{۵}$

پاسخ: گزینهٔ «۱» ـ از روابط نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های متمم استفاده می‌کنیم:

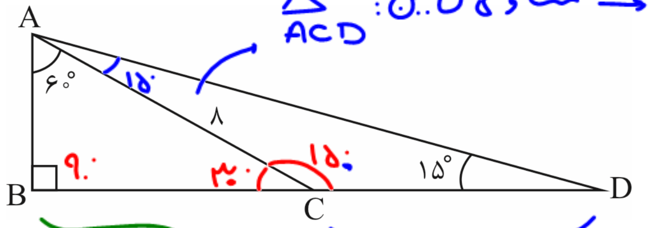
$$۷۶^\circ+۱۴^\circ=۹۰^\circ \Rightarrow \tan ۷۶^\circ=\cot ۱۴^\circ$$

$$۸۳^\circ+۷^\circ=۹۰^\circ \Rightarrow \cot ۸۳^\circ=\tan ۷^\circ$$

$$۲^\circ+۸۸^\circ=۹۰^\circ \Rightarrow \sin ۲^\circ=\cos ۸۸^\circ$$

$$P=\frac{۵\sin ۲^\circ\times\cot ۸۳^\circ\times\tan ۷۶^\circ}{۸\tan ۷۶^\circ\times\sin ۲^\circ\times\cot ۸۳^\circ}=\frac{۵}{۸}$$

تست ۵: در شکل مقابل اندازهٔ پاره‌خط **BD** برابر است با:



$\triangle ACD$: متساوی‌الساقین $\rightarrow CD = CA = 8$

۱) $۴\sqrt{۳}+۴$

۲) $۴\sqrt{۳}+۸$ ✓

۳) $۴\sqrt{۳}+۱۲$

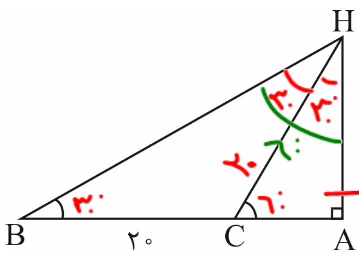
۴) ۱۶

$\triangle ABC: \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{BC}{8}$

$BC = 4\sqrt{3}$

$BD = 8 + 4\sqrt{3}$

تست ۶: در شکل مقابل اگر $\hat{B} = ۳۰^\circ$ و $\hat{C} = ۶۰^\circ$، اندازهٔ **AH** کدام است؟



۱) ۱۰

۲) $۲۰\sqrt{۳}$

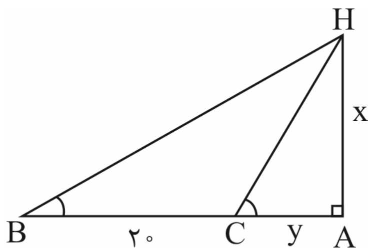
$\triangle ACH: \cos 60^\circ = \frac{1}{2} = \frac{AC}{20} \rightarrow AC = 10$

فیثاغورث: $(20)^2 = (10)^2 + (AH)^2 \rightarrow AH^2 = 300$

۳) $۱۰\sqrt{۳}$ $= AH$

۴) ۲۰

پاسخ: گزینهٔ «۳» ـ اگر فرض کنیم $AH = x$ و $AC = y$، آن‌گاه در شکل مقابل داریم:

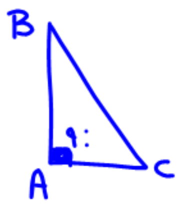


$$\begin{cases} \tan\hat{B} = \frac{AH}{AB} = \frac{x}{۲۰+y} \Rightarrow \tan ۳۰^\circ = \frac{x}{y+۲۰} = \frac{\sqrt{۳}}{۳} \quad (*) \\ \tan\hat{C} = \frac{AH}{AC} \Rightarrow \tan ۶۰^\circ = \frac{x}{y} \Rightarrow \sqrt{۳} = \frac{x}{y} \end{cases}$$

$$x = y\sqrt{۳} \xrightarrow{(*)} \frac{y\sqrt{۳}}{y+۲۰} = \frac{\sqrt{۳}}{۳} \Rightarrow ۳y = y + ۲۰ \Rightarrow y = ۱۰ \Rightarrow x = ۱۰\sqrt{۳} \Rightarrow AH = ۱۰\sqrt{۳}$$

تست ۷: در مثلث قائم‌الزاویهٔ **ABC** که $\hat{A} = ۹۰^\circ$، حاصل $\frac{۱}{۱+\tan\hat{B}} + \frac{۱}{۱+\tan\hat{C}}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) ۲ ۴) ۴



$\hat{B} + \hat{C} = 90^\circ$

$\hat{C}$ و $\hat{B}$ متمم یکدیگرند

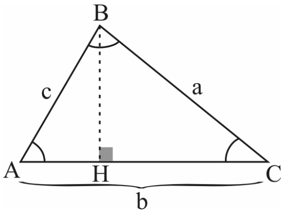
$\tan\hat{B} = \text{Cotan}\,\hat{C}$

$$\frac{1}{1+\tan\hat{B}} + \left(\frac{1}{1+\frac{1}{\underbrace{\text{Cotan}\,\hat{C}}_{=\tan\hat{B}}}} = \frac{1}{\frac{\tan\hat{B}+1}{\tan\hat{B}}} = \frac{\tan\hat{B}}{1+\tan\hat{B}}\right)$$

$$= \frac{1+\tan\hat{B}}{1+\tan\hat{B}} =$$ یک

حل مثلث و کاربردهای آن

به شکل روبه‌رو و اطلاعات زیر در مورد مثلث توجه کنید.

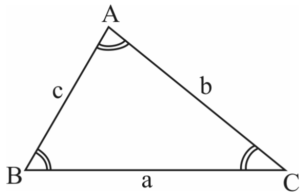


۱) $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180^\circ$

۲) محیط $= a+b+c$

منظور از حل مثلث، یافتن همه‌ی زوایا و اضلاع آن است.

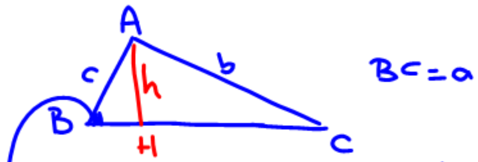
۱- مساحت مثلث: اگر دو ضلع یک مثلث و زاویه‌ی بین آن‌ها را داشته باشیم، آن‌گاه مساحت مثلث از رابطه‌ی زیر محاسبه می‌شود:



مساحت $=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ac\sin B$

$\div \frac{1}{2}abc$

$\frac{\sin \hat{C}}{c}=\frac{\sin \hat{A}}{a}=\frac{\sin \hat{B}}{b}$

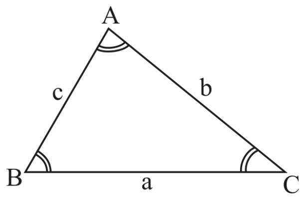


$BC=a$

$S=\frac{1}{2}(BC)h=\frac{1}{2}ac\sin \hat{B}$

$\sin \hat{B}=\frac{h}{c} \to h=c\sin \hat{B}$

۲- قانون سینوس‌ها: می‌دانیم مساحت یک مثلث برابر است با نصف حاصل‌ضرب دو ضلع در سینوس زاویه‌ی بین آن‌ها. پس:



$$S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}bc\sin A$$

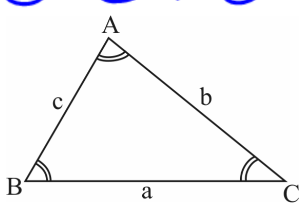
با تقسیم طرفین تساوی‌ها بر $\frac{1}{2}abc$ و معکوس کردن آن‌ها، داریم:

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$ (قانون سینوس‌ها)

توجه: قانون سینوس‌ها، برای حل مثلث‌هایی که در آن یک ضلع و زاویه‌ی روبه‌روی آن را داریم، بسیار سودمند خواهد بود.

۳- قانون کسینوس‌ها: وقتی دو ضلع یک مثلث و زاویه‌ی بین آن‌ها را داشته باشیم، قانون سینوس‌ها برای یافتن اضلاع و زوایا قابل استفاده نیست. در این حالت از «قانون کسینوس‌ها» استفاده می‌کنیم

مربع هر ضلع = مجموع مربعات دو ضلع دیگر – (دو برابر ضرب اضلاع در کسینوس بین اضلاع)



۱) $a^2=b^2+c^2-2bc\cos\hat{A}$

۲) $b^2=a^2+c^2-2ac\cos\hat{B}$

۳) $c^2=a^2+b^2-2ab\cos\hat{C}$

تعمیم فیثاغورث

منفی

مثبت

$a^2=b^2+c^2$

$a_1^2=b^2+c^2-2bc\cos\hat{A}_1$

$\hat{A}_1>\hat{A}=90$

$a_1>a$

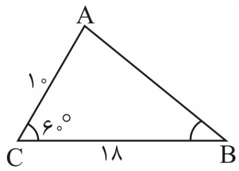
$a_2^2=b^2+c^2-2bc\cos\hat{A}_2$

$\hat{A}_2<\hat{A}=90$

$a_2<a$

$$(AB)^2=(AC)^2+(BC)^2-2(AC)(BC)\cos 60^\circ$$

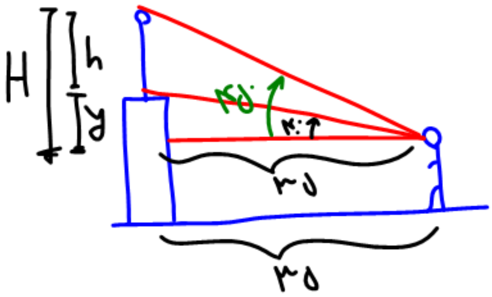
مثال ۸: در شکل روبه‌رو، طول **AB** را بیابید.



پاسخ: $AB^2=10^2+18^2-2(10)(18)\cos 60^\circ=100+324-360(-\frac{1}{2})=244 \Rightarrow AB=\sqrt{244}$

تست ۹: ناظری به فاصله‌ی ۳۵ متر از پای ستونی که بر روی آن مجسمه‌ای قرار دارد، ایستاده است. زاویه‌ی رؤیت انتها و ابتدای مجسمه با سطح افق 45° و 40° است. ارتفاع مجسمه کدام است؟ $(\tan 40^\circ = 0/8)$ (خارج ریاضی ۹۴)

۱) ۶ ۲) ۶/۴ ۳) ۷ ۴) ۷/۲



$$\tan 45^\circ = 1 = \frac{H}{35} \longrightarrow H=35$$

$$\tan 40^\circ = 0/8 = \frac{y}{35} \longrightarrow y=28$$

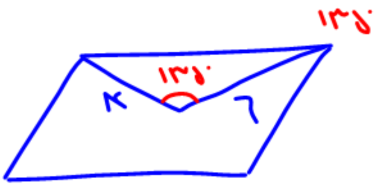
$$h=H-y=35-28=7$$

ت ۳

تست ۱۰: در متوازی‌الاضلاعی اندازه‌ی دو قطر ۱۲ و ۸ واحد و زاویه‌ی بین دو قطر ۱۳۵ درجه است. مساحت متوازی‌الاضلاع چند برابر $\sqrt{2}$ است؟ (تجربی ۹۲ و تجربی خارج ۹۶)

۱) ۱۸ ۲) ۲۴ ۳) ۳۲ ۴) ۳۶

نکته: در هر متوازی الاضلاع، اقطار منصف یکدیگرند و شکل را به چهار مثلث هم سطح تقسیم می‌کنند.



$$\sin 135^\circ = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$S_{\text{متوازی الاضلاع}} = 4\left(S_\Delta = \frac{1}{2}(a=4)(b=6)\left(\sin 135^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) = 24\sqrt{2}$$

تست ۱۱: مساحت مثلثی با دو ضلع ۱۶ و ۹ واحد برابر $24\sqrt{5}$ واحد مربع است. بزرگ‌ترین ضلع این مثلث کدام است؟ (ریاضی ۹۴)

۱) ۲۱ ۲) ۲۲ ۳) ۲۳ ۴) ۲۴

$$S=\frac{1}{2}ab\sin\theta \longrightarrow 24\sqrt{5}=\frac{1}{2}(9)(16)\sin\theta \longrightarrow \sin\theta=\frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1 \longrightarrow \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2+\cos^2\theta=1 \longrightarrow \cos^2\theta=1-\frac{5}{9}=\frac{4}{9} \longrightarrow \cos\theta=\pm\frac{2}{3}$$

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\theta=(16)^2+(9)^2-2(9)(16)\left(-\frac{2}{3}\right) \longrightarrow c=23$$

برای ضلع بزرگتر باید $\cos\theta$ باشد تا منفی در منفی بزرگتر بشه دربیاد

تست ۱۲: مساحت مثلث به اضلاع ۷، ۹ و ۱۲ واحد کدام است؟ (ریاضی ۹۳)

۱) $15\sqrt{2}$ ۲) $14\sqrt{3}$ ۳) $12\sqrt{5}$ ۴) $14\sqrt{5}$

محاسبه مساحت مثلث با داشتن ۳ ضلع: دستور هرون

$P=\frac{a+b+c}{2}=$ نصف محیط

$$S=\sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}=\sqrt{14(\underbrace{14-7}_{7})(\underbrace{14-9}_{5})(\underbrace{14-12}_{2})}=14\sqrt{5}$$

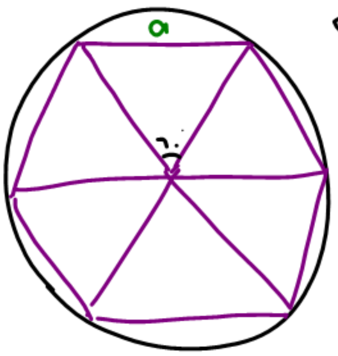
$$P=\frac{12+9+7}{2}=14$$

$S=\frac{1}{2}aa\sin 60=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ مساحت Δ متساوی‌الاضلاع

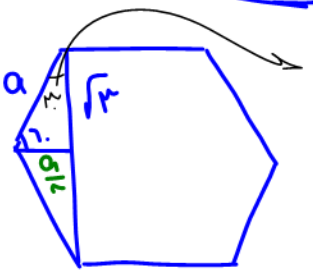
هشدار
حواستون به شش‌ضلعی منتظم هم باشه.

تست ۱۳: اگر قطر کوچک یک شش‌ضلعی منتظم برابر با $2\sqrt{3}$ باشد، مساحت شش‌ضلعی منتظم کدام است؟ (قلم‌چی ۹۷)

۱) ۶ ۲) $6\sqrt{3}$ ۳) ۱۲ ۴) $12\sqrt{3}$



$S=6(a^2\frac{\sqrt{3}}{4})$ مساحت مسدس



فیثاغورث:

$a^2=(\frac{a}{2})^2+(\sqrt{3})^2$

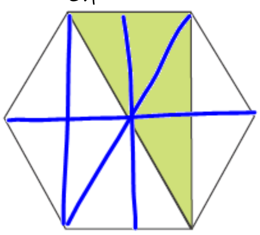
$a^2-\frac{a^2}{4}=3 \rightarrow \frac{3a^2}{4}=3$

$a^2=4 \rightarrow a=2$

$S_{\text{۶ضلعی}}=6(a^2\frac{\sqrt{3}}{4})=6\sqrt{3}$

حل با درس کاشیکاری هشتم

تست ۱۴: مساحت شش‌ضلعی منتظم موجود در شکل زیر $18\sqrt{3}$ است. مساحت ناحیهٔ رنگی چه‌قدر است؟ (قلم‌چی ۹۷ و ۹۹)



۱) ۱۲
۲) ۱۸
۳) $6\sqrt{3}$
۴) $9\sqrt{3}$

برابر ۱۲ تا کاشی Δ است:

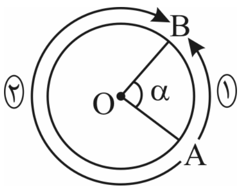
$12\,\Delta=18\sqrt{3}$

$\Delta=\frac{18\sqrt{3}}{12}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$

قسمت رنگی برابر ۴ تا کاشی است:

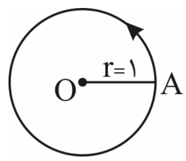
$4(\frac{3\sqrt{3}}{2})=6\sqrt{3}$

تعریف جهت مثلثاتی



شکل مقابل را در نظر بگیرید. اگر بخواهیم از نقطه‌ی A به B برویم، یکی از دو مسیر ۱ یا ۲ را می‌توانیم انتخاب کنیم. در مثلثات جهت شماره‌ی ۱ را که خلاف حرکت عقربه‌های ساعت است (پادساعتگرد)، جهت مثبت و جهت شماره‌ی ۲ را که موافق حرکت عقربه‌های ساعت است (ساعتگرد)، جهت منفی می‌گویند.

تعریف دایره‌ی مثلثاتی



دایره‌ای است به شعاع واحد که در آن، با توجه به شکل، نقطه‌ی A به عنوان مبدأ کمان‌ها در نظر گرفته می‌شود و جهت آن مثبت می‌باشد (پادساعتگرد).

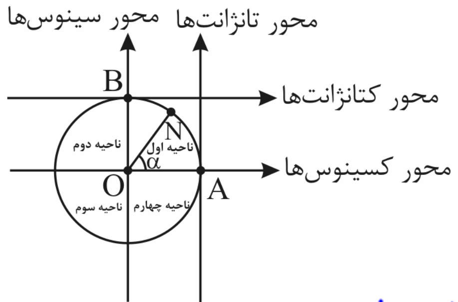
محورهای مثلثاتی

۱- محور کسینوس‌ها: محوری که از مرکز دایره‌ی مثلثاتی و مبدأ کمان‌ها (نقطه‌ی A) می‌گذرد.

۲- محور سینوس‌ها: محوری که در مرکز دایره‌ی مثلثاتی بر محور کسینوس‌ها عمود است.

۳- محور تانژانت‌ها: محوری که در مبدأ کمان‌ها (نقطه‌ی A) بر دایره‌ی مثلثاتی مماس است و موازی محور سینوس‌هاست.

۴- محور کتانژانت‌ها: محوری است که در بالاترین نقطه‌ی دایره بر آن مماس است و با محور کسینوس‌ها موازی و بر محور تانژانت‌ها و سینوس‌ها عمود است.



این چهار محور مثلثاتی را در روبه‌رو می‌بینید:

نقطه‌ی N : انتهای کمان روبه‌رو به زاویه‌ی α

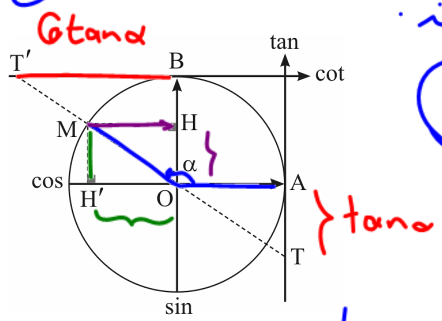
نقطه‌ی B : مبدأ محور cot

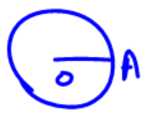
نقطه‌ی A : مبدأ محور tan

نقطه‌ی O : مبدأ محورهای sin و cos

رفت : ضلع اول زاویه OA ثابت است و ضلع دوم OB می‌چرخد.

روش به دست آوردن مقدار یک نسبت مثلثاتی از روی دایره‌ی مثلثاتی





فرض کنید، مطابق شکل روبه‌رو زاویه‌ای به اندازه‌ی α انتخاب کرده‌ایم.

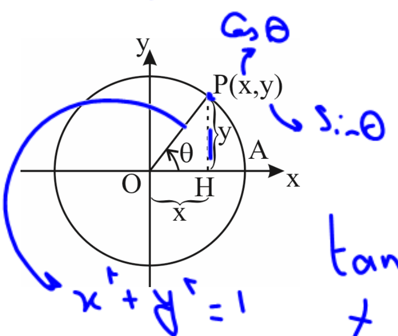
در این صورت از انتهای کمان بر محور sin و cos عمود می‌کنیم. داریم:

$$\boxed{OH = \sin\alpha \quad , \quad OH' = -\cos\alpha}$$

حال با امتداد OM به گونه‌ای که محور tan و cot قطع شود، داریم:

$$\boxed{AT = -\tan\alpha \quad , \quad BT' = -\cot\alpha}$$

$\tan\alpha \cdot \text{Cotan}\alpha = 1 \longrightarrow \tan\alpha = \frac{1}{\text{Cotan}\alpha}$



در دایره‌ی مثلثاتی، زاویه‌ی دلخواه θ را در نظر می‌گیریم. با توجه به مثلث قائم‌الزاویه، مختصات نقطه‌ی $P(x,y)$ در این دایره برحسب زاویه‌ی θ برابر است با:

$$P(x,y) = P(\cos\theta, \sin\theta) \Rightarrow \begin{cases} x = \cos\theta \\ y = \sin\theta \end{cases}$$

$\tan\alpha = \frac{y}{x}$

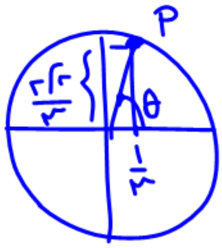
$\tan\alpha = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{y}{x}$

$x^2 + y^2 = 1$

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

مثال ۱۵: اگر زاویه‌ی θ، دایره‌ی مثلثاتی را در نقطه‌ی $P(\frac{1}{3},\frac{2\sqrt{2}}{3})$ قطع کند، نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ی θ را بیابید.

پاسخ:



$$\tan\theta=\frac{y}{x}=\frac{\frac{2\sqrt{2}}{3}}{\frac{1}{3}}=2\sqrt{2}$$

$$P(\frac{1}{3},\frac{2\sqrt{2}}{3})=P(\cos\theta,\sin\theta)$$

پس:

$$x=\cos\theta=\frac{1}{3}\ ,\ y=\sin\theta=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

از طرفی:

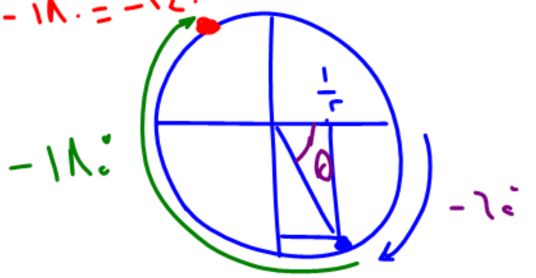
$$\tan\theta=\frac{y}{x}=2\sqrt{2}\ ,\ \cot\theta=\frac{x}{y}=\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

تست ۱۶: نقطه‌ی $P(\frac{1}{2},\frac{-\sqrt{3}}{2})$ روی دایره‌ی مثلثاتی را 180° در جهت حرکت عقربه‌های ساعت حول مبدأ مختصات دوران می‌دهیم. نقطه‌ی جدید چه زاویه‌ای بر روی دایره‌ی مثلثاتی به وجود می‌آورد؟

خلاف جهت مثلثاتی

۱) -240° ۲) 240° ۳) 135° ۴) -120°

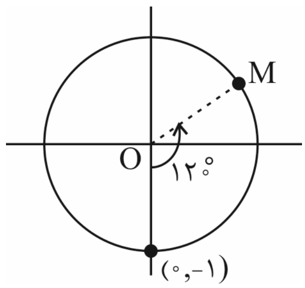
$-60-180=-240$



تست ۱۷: نقطه‌ی $(0,-1)$ روی دایره‌ی مثلثاتی را حول مبدأ مختصات به اندازه‌ی 120° در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت دوران می‌دهیم. مختصات نقطه‌ی جدید کدام است؟

۱) $(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2})$ ۲) $(\frac{-\sqrt{3}}{2},\frac{-1}{2})$ ۳) $(\frac{-\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2})$ ۴) $(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{-1}{2})$

پاسخ: گزینه‌ی «۱» ـ نقطه‌ی $(0,-1)$ روی دایره‌ی مثلثاتی مطابق با شکل زیر است. اگر آن را 120° در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت دوران دهیم، به نقطه‌ی M در ناحیه‌ی اول می‌رسیم.



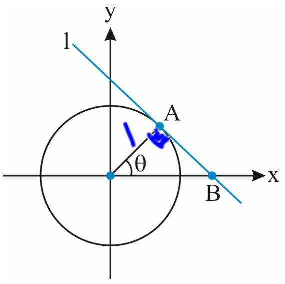
OM با محور طول‌ها، زاویه‌ی 30° می‌سازد، بنابراین:

$$\begin{cases}x_M=\cos\theta\Rightarrow x_M=\cos30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}\\ y_M=\sin\theta\Rightarrow y_M=\sin30^\circ=\frac{1}{2}\end{cases}$$

لذا $M(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2})$.

نکته: در هر دایره خط مماس در نقطه تماس بر شعاع عمود است.

تست ۱۸: در دایرهٔ مثلثاتی زیر، اندازهٔ AB کدام است؟ (خط l بر دایره مماس است.)



$\triangle OAB$: قائم‌الزاویه

$\tan\theta = \frac{\text{مقابل} = AB}{\text{مجاور} = \text{شعاع دایره} = 1}$

۱) $\cos\theta$

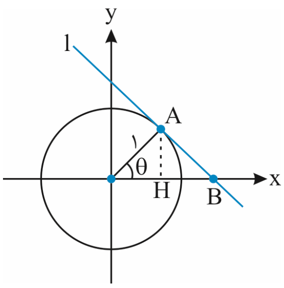
۲) $\frac{۱}{\cos\theta}$

۳) $\tan\theta$

۴) $\frac{۱}{\tan\theta}$

راه سریع و باحال

پاسخ: گزینهٔ «۳» ـ خط مماس بر دایره بر شعاع عمود است. حالا اگر از نقطهٔ A عمود بر محور طول‌ها رسم کنیم، طبق روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه داریم:



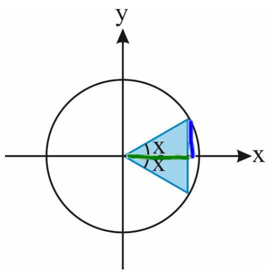
$$(۱)^۲ = OH\times OB \xrightarrow{OH=\cos\theta} ۱=\cos\theta\times OB \Rightarrow OB=\frac{۱}{\cos\theta}$$

پس طبق قضیهٔ فیثاغورس در مثلث OAB می‌توان نوشت:

$$OB^۲ = (۱)^۲ + AB^۲ \Rightarrow \frac{۱}{\cos^۲\theta} = ۱ + AB^۲$$

$$\Rightarrow AB^۲ = \frac{۱}{\cos^۲\theta} - ۱ = \frac{۱-\cos^۲\theta}{\cos^۲\theta} = \frac{\sin^۲\theta}{\cos^۲\theta} = \tan^۲\theta \Rightarrow AB = \tan\theta$$

تست ۱۹: در دایرهٔ مثلثاتی زیر اگر مساحت ناحیهٔ رنگی برابر با A باشد، $A\times(\tan x+\cot x)$ کدام است؟



$A = S_\triangle = \frac{(\text{ارتفاع})(\text{قاعده})}{2} = \frac{(2\sin x)\cos x}{2} = \sin x\cos x$

$A\times(\tan x + \cot x) = \sin x\cos x\left(\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}\right)$
$= \sin^2 x + \cos^2 x = 1$

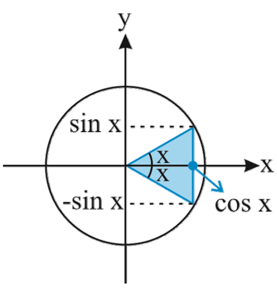
۱) $\frac{۱}{۲}$

۲) $\frac{۱}{۳}$

۳) $\frac{۱}{۴}$

۴) ۱

پاسخ: گزینهٔ «۴» ـ با توجه به شکل زیر، مساحت ناحیهٔ رنگی، مساحت یک مثلث با ارتفاع $\cos x$ و قاعدهٔ $۲\sin x$ است. پس داریم:



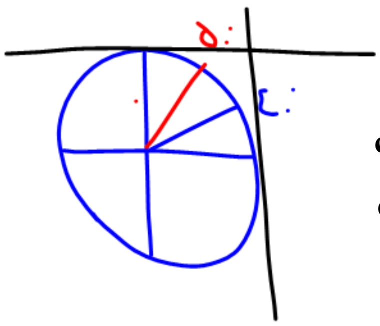
$$A = \frac{۱}{۲}\times(۲\sin x)\cos x = \sin x\cos x$$

در نتیجه برای محاسبهٔ $A(\tan x+\cot x)$ می‌توان نوشت:

$$A(\tan x+\cot x) = \sin x\cos x\left(\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}\right) = \sin x\cos x\left(\frac{\overbrace{\sin^۲ x+\cos^۲ x}^{۱}}{\sin x\cos x}\right)$$

$$= \sin x\cos x\left(\frac{۱}{\sin x\cos x}\right) = ۱$$

تست ۲۰: کدام یک از نامساوی‌های زیر بین زوایای ۴۰ و ۵۰ درجه برقرار است؟ (سراسری)



۱) $\sin ۵۰^\circ < \sin ۴۰^\circ$

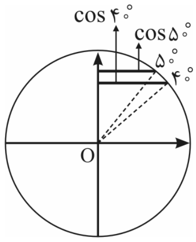
۲) $\cos ۵۰^\circ < \cos ۴۰^\circ$

۳) $\tan ۵۰^\circ < \tan ۴۰^\circ$

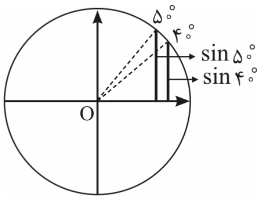
۴) $\cot ۴۰^\circ < \cot ۵۰^\circ$

پاسخ: گزینه‌ی «۲»

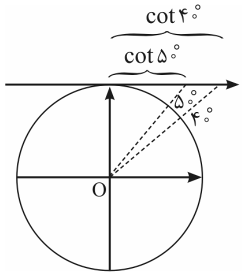
کافی است به دایره‌های مثلثاتی زیر خوب دقّت کنید:



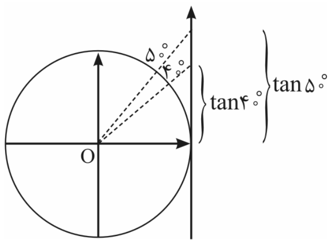
$\cos 50^\circ < \cos 40^\circ \Rightarrow$ گزینه‌ی (۲) درست



$\sin 50^\circ > \sin 40^\circ \Rightarrow$ گزینه‌ی (۱) نادرست



$\cot 40^\circ > \cot 50^\circ \Rightarrow$ گزینه‌ی (۴) نادرست



$\tan 50^\circ > \tan 40^\circ \Rightarrow$ گزینه‌ی (۳) نادرست

البته اگر به مفهوم صعود و نزول توابع نیز آشنا باشید، می‌توانید خیلی ساده‌تر پی به درستی گزینه‌ی (۲) ببرید.

$\sin 50^\circ > \sin 40^\circ \Leftarrow 50^\circ > 40^\circ \Leftarrow f(x) = \sin x$ در $(0, \frac{\pi}{2})$ صعودی است.

$\cos 50^\circ < \cos 40^\circ \Leftarrow 50^\circ > 40^\circ \Leftarrow f(x) = \cos x$ در $(0, \frac{\pi}{2})$ نزولی است.

$\tan 50^\circ > \tan 40^\circ \Leftarrow 50^\circ > 40^\circ \Leftarrow f(x) = \tan x$ در $(0, \frac{\pi}{2})$ صعودی است.

$\cot 50^\circ < \cot 40^\circ \Leftarrow 50^\circ > 40^\circ \Leftarrow f(x) = \cot x$ در $(0, \frac{\pi}{2})$ نزولی است.

تست ۲۱: اگر $\cos\alpha . \sin\alpha > 0$ و $\cos\alpha . \tan\alpha < 0$ آن‌گاه انتهای کمان α در کدام ناحیه‌ی مثلثاتی است؟

۱) اول ۲) دوم ۳) سوم ۴) چهارم

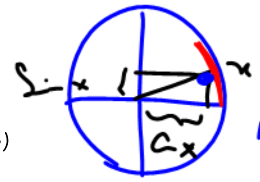
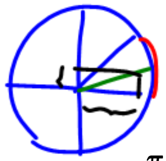
هر دو هم‌علامتند

پس یا ناحیه ۱ یا ۳

$\cos\alpha . \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} < 0$

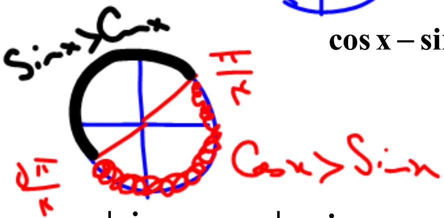
$\sin\alpha < 0$

باید ناحیه ۳ باشد تا $\sin\alpha < 0$ شود.

تست ۲۲: حاصل عبارت $\frac{\sin x+\cos x}{۲}+\frac{|\sin x-\cos x|}{۲}$ که در آن $x\in[۰\,,\,\frac{\pi}{۴}]$ کدام است؟ (سراسری)

۱) $\sin x$ ۲) $\cos x$ ۳) $\sin x+\cos x$ ۴) $\cos x-\sin x$



دایره قدرت :

پاسخ: گزینه‌ی «۲»

گفتیم در $[۰\,,\,\frac{\pi}{۴}]$ (زیر خط $y=x$)، $\cos x>\sin x$:

$$\frac{|\sin x-\cos x|}{۲}+\frac{\sin x+\cos x}{۲}=\frac{-(\sin x-\cos x)+(\sin x+\cos x)}{۲}=\cos x$$

مهم

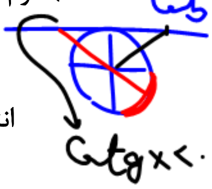
تست ۲۳: اگر $a\in\mathbb{R}$ و $\cos x=\sqrt{\frac{\cot x}{\cot x-a^۲}}$، انتهای کمان x در کدام ناحیه‌ی مثلثاتی است؟

$P=\sqrt{Q}$

$P\geq 0\ ,\ Q\geq 0$

۱) اول   ۲) دوم   ۳) سوم   ۴) چهارم

$Cosx\geq 0$ $Cotx>0$

پاسخ: گزینه‌ی «۴»

$Cotx<0$

$$\cos x=\sqrt{\frac{\cot x}{\cot x-a^۲}}\geq ۰\quad\Rightarrow\quad\cos x\geq ۰\quad\Rightarrow$$ انتهای کمان x در ناحیه‌ی اوّل یا چهارم

اما با انتخاب x در ناحیه‌ی اول، $\cot x>۰$ و در نتیجه به ازای مقادیر بزرگ $a^۲$ می‌تواند زیر رادیکال منفی شود ودر نتیجه فرض مسئله که به ازای هر $a\in\mathbb{R}$ ، تساوی برقرار است از بین می‌رود. پس x باید در ناحیه‌ی چهارم باشد که در این صورت همواره زیر رادیکال مثبت خواهد بود:

$$\begin{cases}\cot x\leq ۰\\ \cot x-a^۲<۰\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\frac{\cot x}{\cot x-a^۲}\geq ۰$$

تا حاصل ۲تا مثبت کنن زیر رادیکال

$Cotx - a^2$ منفی<0

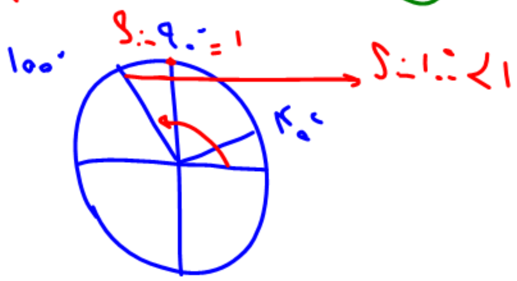
$1-1\cdot 2<0$

تست ۲۴: کدام نامساوی زیر نادرست است؟

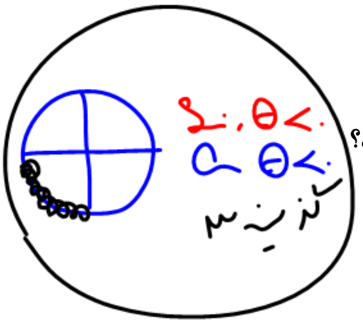
۱) $\sin ۲۰^\circ<\sin ۴۰^\circ<\sin ۱۰۰^\circ$ ۲) $\cos ۱۰۰^\circ<\cos ۴۰^\circ<\cos ۲۰^\circ$

۳) $\sin ۴۰^\circ<\sin ۹۰^\circ<\sin ۱۰۰^\circ$ ۴) $\cos ۱۰۰^\circ<\cos ۷۰^\circ<\cos ۴۰^\circ$

$Sin90=1$ $Sin100<1$



خیلی مهم



$Sin\theta<0$ $Cos\theta<0$ ناحیه سوم

تست ۲۵: اگر $\sin\theta+\tan\theta>۰$ و $\sin\theta\times\tan\theta<\frac{۱}{\cos\theta}$ باشند، انتهای کمان θ در کدام ناحیه قرار دارد؟

۱) اول   ۲) دوم   ۳) سوم   ۴) چهارم

$$\frac{1}{C\theta}<S\theta\cdot\frac{S\theta}{C\theta}=\frac{S^2\theta}{C\theta}$$

$$\frac{1}{C\theta}-\frac{S^2\theta}{C\theta}<0\qquad\frac{1-S^2\theta=C^2\theta}{C\theta}<0$$

$$S\theta+\frac{S\theta}{C\theta}>0\qquad\frac{S\theta C\theta+S\theta}{\boxed{C\theta}}>0\qquad S\theta(C\theta+1)$$

در دایره: $-1\leq C\theta\leq 0$

$0\leq \underbrace{1+C\theta}_{\text{مثبت}}<1$ $+1$

$\boxed{Cos\theta<0}$

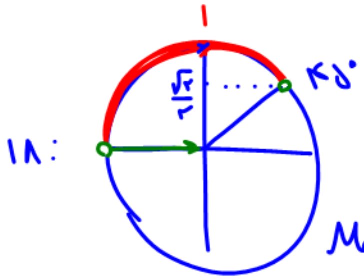
$S\theta(Cos\theta+1)<0$: چون کسر ⊕ در خرج ⊖ پس صورت ⊖ باشه:

پس $S\theta<0$

نکته: از طرفین نامساوی‌ها نمی‌توان نسبت مثلثاتی گرفت باید آن را به دایره منتقل کنیم.

تست ۲۶: اگر $۴۵^\circ < \alpha < ۱۸۰^\circ$ باشد و $\sin\alpha = \frac{۵m+۱}{۳}$، آن‌گاه حدود **m** کدام است؟

۱) $(-\frac{۱}{۵},\frac{۲}{۵})$ ۲) $(-\frac{۱}{۵},\frac{۲}{۵}]$ ۳) $(\frac{۱}{۵},\frac{۲}{۵})$ ۴) $[۰,\frac{۲}{۵}]$



$0<\sin\alpha\le 1 \rightarrow 0<\sin\alpha=\frac{5m+1}{3}\le 1$ ضرب در ۳

$0<5m+1\le 3 \rightarrow -1<5m\le 2 \rightarrow -\frac{1}{5}<m\le\frac{2}{5}$

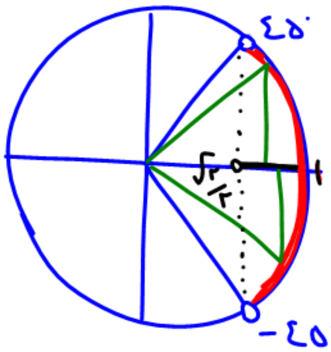
گزینه ۲

Max و Min نه $\sin 45=\frac{\sqrt2}{2}$

برای همین اصلاً کاربُرد نداریم.

تست ۲۷: اگر $-۴۵^\circ < \alpha < ۴۵^\circ$ و $\cos\alpha = \frac{۳m+۲}{۴}$، آن‌گاه بیشترین مقدار **m** برابر است با:

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{۴}{۳}$



$\frac{\sqrt2}{2}<\cos\alpha=\frac{3m+2}{4}\le 1$ ضرب در ۴ $2\sqrt2<3m+2\le 4$

$2\sqrt2-2<3m\le 2 \rightarrow \frac{2\sqrt2-2}{3}<m\le\frac{2}{3}=Max$

V.I.P تست ۲۸: مجموع حداقل و حداکثر مقدار عبارت $\frac{\cos\alpha}{۲+\cos\alpha}$ کدام است؟

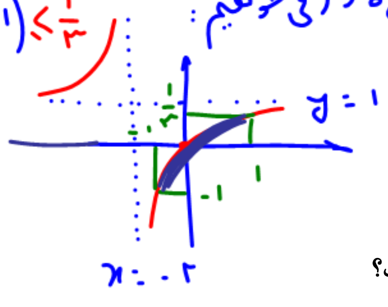
۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $-\frac{۱}{۳}$ ۳) $-\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

تابع $f(x)=\frac{x}{2+x}$ و $g(x)=\cos x$ ترکیب شده و برد $f\circ g$ را می‌خواهیم:

ضریب $\cos$ باید ورودی تابع f باشد.

$f(x)$ را رسم کنید و x که همان $\cos$ است را بین ۱ و ۱- بگذارید.

$-1\le y=f(-1\le g(x)=\cos x\le 1)\le\frac{1}{3}$



$Max=\frac{1}{3}$

$Min=-1$

$Max+Min=-\frac{2}{3}$

V.I.P تست ۲۹: بیشترین مقدار عبارت $۴+\cos^۲ x+۲\cos x$ کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۵ ۳) ۴ ۴) ۳

نکته: برای Max و min عبارت درجه ۲ برحسب $\sin$ یا $\cos$ یعنی $y=a\sin^2x+b\sin x+c$ یا $y=a\cos^2x+b\cos x+c$ الف) باید یک بار به‌جای آن ۱ یک بار (۱-) و یک بار $\frac{-b}{2a}$ می‌گذاریم اگر $-1\le\frac{-b}{2a}\le 1$ باشد. کمترین اعداد به دست آمده Min و بیشترین Max است.

$y=\cos^2x+2\cos x+4$

$\cos x=1 \longrightarrow y=1+2+4=7=Max$

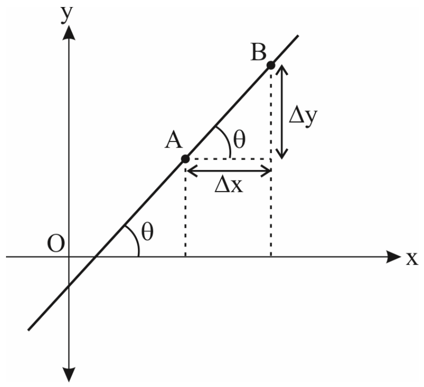
$\cos x=-1 \longrightarrow y=1-2+4=3$

$\cos x=-\frac{b}{2a}=-\frac{2}{2}=-1 \longrightarrow y=3$

$\Big\}$ Min

$3\le y\le 7$ برد

رابطهٔ شیب خط با تانژانت اولیه



می‌دانیم که شیب هر خط، برابر نسبت تفاضل عرض‌های دو نقطهٔ واقع بر آن به تفاضل طول‌های همان دو نقطه است. حال اگر این خط محور xها را قطع کند، شیب خط برابر تانژانت زاویه‌ای است که خط با جهت مثبت محور xها می‌سازد، یعنی:

$$\tan\theta = \frac{\text{تفاضل عرض‌ها}}{\text{تفاضل طول‌ها}} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = m$$

به طور کلی می‌توان گفت:

الف) اگر خطی موازی با محور xها باشد، شیب آن صفر است.

ب) اگر خطی عمود بر محور xها باشد، شیب آن تعریف نشده است.

معادلهٔ خط

با داشتن یک نقطه از خط، مانند $A(x_۰, y_۰)$ و شیب خط از معادلهٔ مقابل استفاده می‌کنیم: $y - y_۰ = m(x - x_۰)$

تست ۳۰: معادلهٔ خطی که با قسمت مثبت محور xها زاویهٔ ۴۵° می‌سازد و از نقطهٔ $A(۲,۳)$ می‌گذرد، کدام است؟

۱) $y = ۲x - ۱$ ۲) $y = ۲x + ۱$ ۳) $y = x - ۱$ ۴) $y = x + ۱$

پاسخ: گزینهٔ «۴» ـ شیب این خط برابر $m = \tan ۴۵^\circ = ۱$ است، در نتیجه:

$$y - y_۰ = m(x - x_۰) \Rightarrow y - ۳ = ۱(x - ۲) \Rightarrow y = x + ۱$$

تست ۳۱: اگر خط $(۵t - ۳)x - ۲\sqrt{۳}y = ۱۰$ با جهت مثبت محور xها زاویهٔ ۳۰° بسازد، t کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

$y = mx + h$

$\frac{(۵t-۳)x}{۲\sqrt{۳}} - \frac{۱۰}{۲\sqrt{۳}} = y$

پاسخ: گزینهٔ «۲»

یادآوری: شیب خط $ax + by = c$ برابر $-\frac{a}{b}$ است.

$$m = \frac{-a}{b} \Rightarrow \begin{cases} a = ۵t - ۳ \\ b = -۲\sqrt{۳} \end{cases} \Rightarrow m = \frac{-(۵t - ۳)}{-۲\sqrt{۳}} = \frac{۵t - ۳}{۲\sqrt{۳}} = \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

شیب خط داده شده برابر $\frac{۵t - ۳}{۲\sqrt{۳}}$ است، در نتیجه:

$$\tan ۳۰^\circ = \frac{۵t - ۳}{۲\sqrt{۳}} \Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۳} = \frac{۵t - ۳}{۲\sqrt{۳}} \Rightarrow ۲\sqrt{۳} \times \sqrt{۳} = ۳(۵t - ۳) \Rightarrow ۶ = ۱۵t - ۹ \Rightarrow ۱۵t = ۱۵ \Rightarrow t = ۱$$

تست ۳۲: خطی که از نقطهٔ $A(۲,۳)$ عبور کرده و با راستای مثبت محور xها زاویهٔ ۴۵° می‌سازد، محور xها را با چه طولی قطع می‌کند؟

۱) -۱ ۲) ۱ ۳) -۳ ۴) ۳

$\tan 45^\circ = 1 = m$

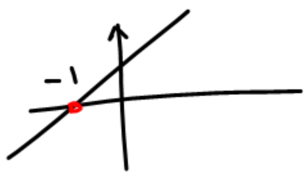
$y = mx + h$

$A\begin{vmatrix} ۲ \\ ۳ \end{vmatrix} \in y = x + h$

$۳ = ۲ + h$

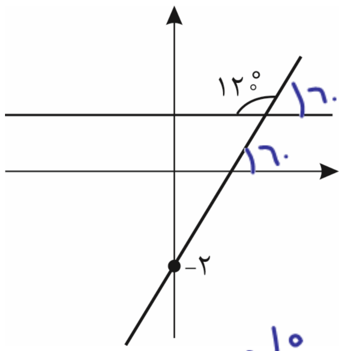
$\boxed{1 = h}$

$\rightarrow \cancel{y} = x + 1$, $y \rightarrow 0$



$x = -1$

تست ۳۳: معادلهٔ خط مقابل کدام است؟



۱) $y+\sqrt{۳}x=۲$

۲) $y=\sqrt{۳}x-۲$ ✓

۳) $y-\sqrt{۳}x-۲=۰$

۴) $y=-\sqrt{۳}x-۴$

$m = \tan 60 = \sqrt{3}$

$A(0,-2)$

$y = mx + h$

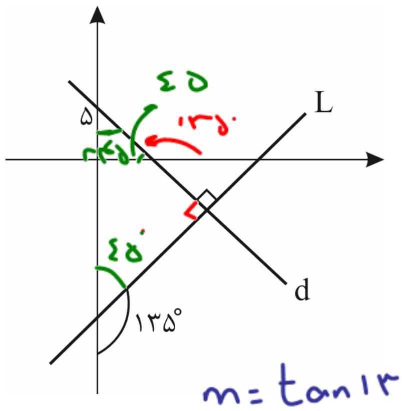
$A\begin{vmatrix} 0 \\ -2 \end{vmatrix} \in y = \sqrt{3}x + h$

$-2 = \sqrt{3}(0) + h$

$-2 = h$

$y = \sqrt{3}x - 2$

تست ۳۴: معادلهٔ خط **d** در شکل مقابل کدام است؟



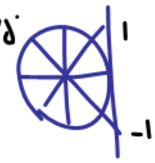
۱) $y=-x+۵$ ✓

۲) $y=x+۵$

۳) $y=\sqrt{۳}x+۵$

۴) $y=-\sqrt{۳}x+۵$

$m_d = \tan 135 = -1$



$y = mx + h$

$y = -x + h$

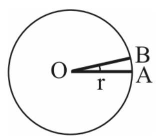
$A(0,5) \in y = -x + h$

$5 = 0 + h$

$\boxed{5 = h}$

واحدهای کمان و زاویه

درجه: اگر محیط دایره را به ۳۶۰ قسمت مساوی تقسیم کنیم، هر قسمت کمانی به اندازه‌ی یک درجه است و زاویه‌ی مرکزی مقابل بـه آن مساوی ۱ درجه است. یعنی:



$\overset{\frown}{AB} = \frac{۲\pi r}{۳۶۰}$ $\quad$ $A\hat{O}B$ = ۱ درجه

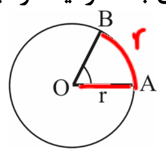
رادیان: زاویه‌ی مرکزی روبه‌رو به کمانی که طول آن با شعاع دایره مساوی باشد را یک رادیان می‌نامیم. یعنی:

محیط دایره ≈ ۶ برابر شعاع یا ۳ برابر قطر

$P \approx 3D = 6r$

$P = \pi D = 2\pi r$

۶٫۲۸...



محیط دایره ۶٫۲۸... برابر شعاع

محیط = $2\pi r$

$= 2(3{,}14\ldots)r = 6{,}28\, r$

Radian

شعاع : Radius

$\overset{\frown}{AB} = r$ $\quad$ $A\hat{O}B$ = ۱ رادیان

و به همین ترتیب ۲ رادیان، زاویه‌ی مرکزی روبه‌رو به کمانی است که طول آن ۲ برابر شعاع دایره باشد و ۲π رادیان، زاویه‌ی مرکزی روبه‌رو به کمانی است که طول آن مساوی ۲π برابر شعاع دایره (همان محیط دایره) باشد. جالب شد!

پس:

هر دایره با هر شعاعی، ۳۶۰ درجه یا ۲π رادیان است.

رابطه‌ی بین رادیان و درجه:

رادیان $= D\,\dfrac{\pi}{180}$

برای تبدیل رادیان به درجه‌ای آ... ۱۸۰:

$$\boxed{\frac{D}{۱۸۰}=\frac{R}{\pi}}$$

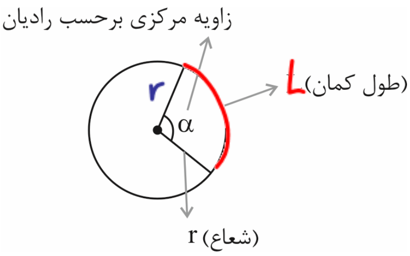
R اندازه‌ی زاویه برحسب رادیان و **D** اندازه‌ی زاویه برحسب درجه است، مثلاً اگر $R=۱$ فرض شود، داریم:

$$D=\frac{۱۸۰}{\pi}\xrightarrow{\pi\simeq ۳/۱۴} D\simeq ۵۷^\circ$$

یک رادیان $= ۵۷,۳^\circ$

یک درجه $۰/۰۱۷$ رادیان

هر یک رادیان، تقریباً ۵۷° است.



۲π	۲πr
α	L

$L=\dfrac{\alpha\, ۲\pi r}{۲\pi}\rightarrow L=r\alpha$ رادیان

طول کمانی که روی دایره داریم و قسمتی از محیط دایره است.

اگر طول کمان روبه‌رو به زاویه را با نماد **L** ، شعاع دایره را با **r** و اندازه‌ی زاویه را با α نشان دهیم، آن‌گاه رابطه‌ی بالا به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\alpha=\frac{L}{r}$$

تست ۳۵: اگر در یک دایره، اندازه‌ی کمان مقابل به زاویه‌ی مرکزی $\theta=۵۰^\circ$ برابر ۱۰ سانتی‌متر باشد، مساحت این دایره چند برابر محیط آن است؟

۱) $\frac{۱}{۵۰}$ ۲) $\frac{۱}{۱۰}$ ۳) $\frac{۱۸}{\pi}$ ۴) $\frac{۳۶}{\pi}$

رادیان $L=r\theta \longrightarrow ۱۰=r\,\dfrac{۵۰\pi}{۱۸۰}\longrightarrow r=\dfrac{۱۸۰۰}{۵۰\pi}=\dfrac{۱۸۰}{۵\pi}$

رادیان $\theta=۵۰\,\dfrac{\pi}{۱۸۰}$

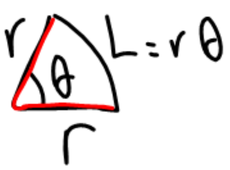
دقت: اول به رادیان تبدیل کن

$\dfrac{S}{P}=\dfrac{\pi r^۲}{۲\pi r}=\dfrac{۱}{۲}r=\dfrac{۹۰}{۵\pi}=\dfrac{۱۸}{\pi}$

تست ۳۶: دایره‌ای به مساحت ۴π مفروض است. قطاعی به محیط ۷/۱۴ از آن جدا کرده‌ایم. زاویه‌ای که توسط این قطاع از دایره جدا می‌شود، چند درجه است؟ $(\pi\simeq ۳/۱۴)$

۱) ۱۸۰ ۲) ۹۰ ۳) ۴۵ ۴) ۱۲۰

$S=\pi r^۲=۴\pi\longrightarrow r=۲$



$۲r+(L=r\theta)=۷,۱۴$

$۴+۲\theta=۷,۱۴$

$۲\theta=۳,۱۴$

$۲\theta=\pi \longrightarrow \theta=\dfrac{\pi}{۲}=۹۰^\circ$

$L=r\theta=r(\frac{\pi}{۲})$

تست ۳۷: در شکل زیر چرخ‌دنده‌های **A** و **B** توسط نواری لاستیکی به هم وصل شده‌اند. شعاع چرخ‌دنده‌ی **A**، ۲۰ سانتی‌متر و شعاع چرخ‌دنده‌ی **B** برابر با ۱ متر است. اگر چرخ‌دنده‌ی **B** به اندازه‌ی $\frac{3\pi}{2}$ رادیان بچرخد، چرخ‌دنده‌ی **A** چند دور می‌زند؟

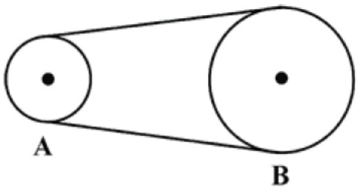
۱۰۰ سانتی‌متر

۱) ۲/۵

۲) ۵

۳) ۳/۷۵

۴) ۱۰



$L_A = L_B$

$r_A \cdot \theta_A = r_B \cdot \theta_B$

$20\,\theta_A = 100\left(\frac{3\pi}{2}\right)$

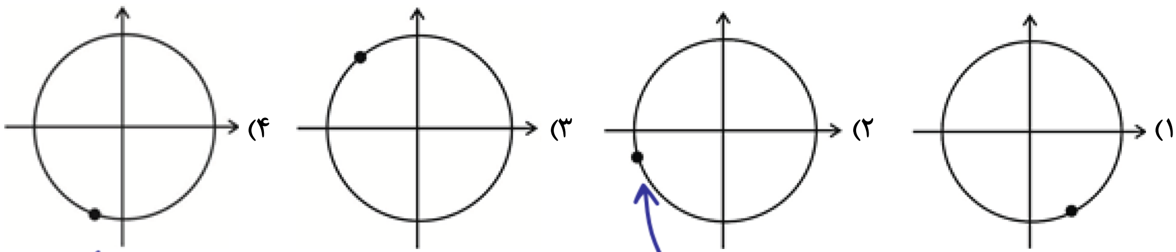
$\theta_A = 5\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \frac{15\pi}{2}$

یک دور دایره	2π
?	$\frac{15\pi}{2}$

$\frac{\frac{15\pi}{2}}{2\pi} = \frac{15}{4} = \frac{7.5}{2} = 3.75$ دور

۳ ر

تست ۳۸: مجموع دو زاویه 72° و تفاضل آن دو زاویه $\frac{\pi}{15}$ رادیان است. اگر اندازه‌ی زاویه‌ی بزرگ‌تر برابر با **x** درجه باشد، زاویه‌ی $(5x - 10^\circ)$ به طور تقریبی روی دایره‌ی مثلثاتی کدام است؟



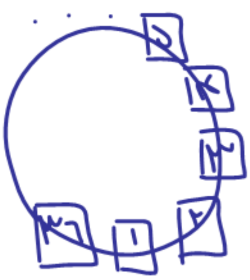
$$\begin{cases} x + y = 72^\circ \\ x - y = \frac{\pi}{15} = \frac{180}{15} = 12 \end{cases}$$

$2x = 84^\circ \rightarrow x = 42^\circ$

$5x - 10 = 5(42^\circ) - 10^\circ = 200^\circ$

تست ۳۹: چرخ و فلکی دارای ۳۶ کابین است و شما در کابین شماره‌ی پنجم قرار دارید. اگر چرخ و فلک به اندازه‌ی $\frac{11\pi}{3}$ رادیان در جهت مثبت مثلثاتی حرکت کند، در موقعیت اولیه‌ی کدام کابین قرار می‌گیرید؟ (شماره‌گذاری کابین‌ها در جهت مثبت مثلثاتی و فاصله‌ی کابین‌ها یکسان است.)

۱) ۲۵ ۲) ۳۰ ۳) ۳۴ ۴) ۳۵



$11\left(\frac{\pi}{3} = 60^\circ\right) = 660^\circ \xrightarrow[\text{هر یک دور دایره } 360^\circ \text{ است}]{-360^\circ} 300^\circ$

$\frac{360^\circ}{36 \text{ کابین}} = 10^\circ$ فاصله بین دو کابین متوالی

$\frac{300^\circ}{10^\circ} = 30$ تا کابین

می‌رم جلو و می‌رسم به شماره ۳۵

نکات ساعت

الف) عقربهٔ دقیقه‌شمار به ازای هر یک دقیقه ۶ درجه طی می‌کند.

ب) عقربهٔ ساعت‌شمار به ازای هر یک ساعت ۳۰ درجه طی می‌کند.

پ) عقربهٔ ساعت‌شمار به ازای هر یک دقیقه ۰/۵ درجه طی می‌کند.

ت) زاویهٔ بین عقربهٔ ساعت‌شمار و دقیقه‌شمار از دستور زیر پیدا می‌شود:

h : ساعت
m : دقیقه

$$\theta = \left|\frac{11m}{2} - 30h\right|$$

تست ۴۰: چه مدت طول می‌کشد تا عقربه‌ی دقیقه‌شمار ساعت به اندازه‌ی $\frac{8\pi}{3}$ رادیان دوران کند؟

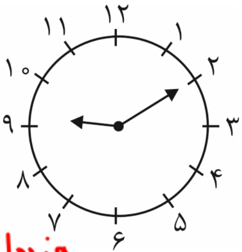
۱) یک ساعت
۲) یک ساعت و ۱۰ دقیقه
۳) یک ساعت و ۲۰ دقیقه
۴) یک ساعت و ۳۰ دقیقه

۶۰ دقیقه :	۲π رادیان
?	$\frac{8\pi}{3}$

$$? = \frac{\frac{8\pi}{3}(60)}{2\pi} = 4(20) = 80 = 60 + 20$$

دقیقه ۸۰ = دقیقه ۶۰ + دقیقه ۲۰ = یک ساعت و ۲۰ دقیقه

تست ۴۱: زاویه بین عقربه‌های ساعت‌شمار و دقیقه‌شمار در ساعت $9:10'$ چند رادیان است؟



۱) $\frac{9\pi}{5}$
۲) $\frac{29\pi}{30}$
۳) $\frac{29\pi}{36}$
۴) $\frac{145\pi}{36}$

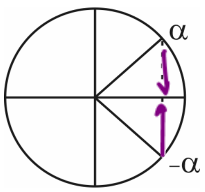
فرمول مهم

$$\theta = \left|30h - \frac{11}{2}m\right| = \left|30(9) - \frac{11}{2}(10)\right| = |270 - 55| = 215°$$ یا $360° - 215° = 145°$

باید دید ۱۴۵ یا ۲۱۵ در گزینه‌ها هست:

$$\text{رادیان} = \text{درجه}\ \frac{\pi}{180} = 215\frac{\pi}{180} = \frac{29\pi}{36}$$

نسبت‌های مثلثاتی α و $-\alpha$ (قرینه)



$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$

$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$

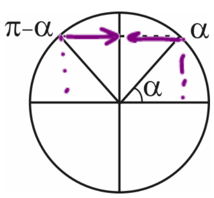
$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$

$\cot(-\alpha) = -\cot\alpha$

$\sin(-30°) = -\sin 30° = -\frac{1}{2}$

$\cos(-60°) = \cos 60° = \frac{1}{2}$

نسبت‌های مثلثاتی زوایای مکمل $(\alpha, \pi - \alpha)$



$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$

$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$

$\tan(\pi - \alpha) = -\tan\alpha$

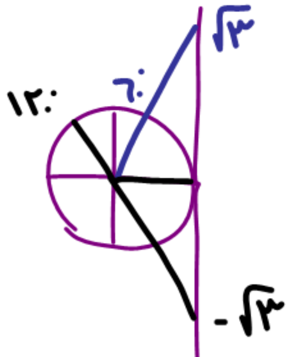
$\cot(\pi - \alpha) = -\cot\alpha$

$\sin 150° = \sin 30° = \frac{1}{2}$

$\cos 120° = -\cos 60° = -\frac{1}{2}$

یادت باشه: دو زاویه‌ای که مکمل هستند (جمعشان 180° است) سینوس‌های مساوی دارند، اما کسینوس و تانژانت و کتانژانت قرینه دارند. یعنی به عنوان مثال جمع کسینوس‌های دو زاویه مکمل برابر صفر است. (برای تانژانت و کتانژانت نیز به همین صورت، البته بـه شـرطی کـه هیچ‌یک از دو زاویه باعث بی‌معنی شدن تانژانت و کتانژانت نشود.)

مثال ۴۲:



$\tan 120^\circ = -\tan 60^\circ = -\sqrt{3}$

$\sin 150 = \sin(\pi - 30) = \sin 30 = \frac{1}{2}$

$\cos 150 = \cos(\pi - 30) = -\cos 30 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan 150 = \tan(\pi - 30) = -\tan 30 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\cot 150 = \cot(\pi - 30) = -\cot 30 = -\sqrt{3}$

$\sin 120 = \sin(\pi - 60) = \sin 60 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos 120 = \cos(\pi - 60) = -\cos 60 = -\frac{1}{2}$

$\tan 120 = \tan(\pi - 60) = -\tan 60 = -\sqrt{3}$

$\cot 120 = \cot(\pi - 60) = -\cot 60 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\tan 120^\circ + \tan 60^\circ =$ صفر

$\tan\theta = tg\,\theta = tg\,\theta$ خط تحریری ماشین حساب کتاب درسی

$\cos 30 + \cos 150 =$ صفر

زاویه‌های مکمل

اگر $\alpha + \beta = \pi$ ، پس $\alpha = \pi - \beta$ و در نتیجه:

$$\boxed{\sin\alpha = +\sin\beta \quad , \quad \cos\alpha = -\cos\beta \quad , \quad \tan\alpha = -\tan\beta \quad , \quad \cot\alpha = -\cot\beta}$$

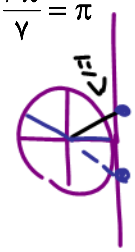
بنابراین:

> اگر دو زاویه مکمل باشند، مجموع کسینوس‌های آن، تانژانت‌های آن‌ها و کتانژانت‌های آن‌ها مساوی صفر است.

مثال ۴۳: حاصل $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + \tan\left(\frac{6\pi}{7}\right) + \tan\left(\frac{\pi}{7}\right)$ مساوی صفر است، زیرا: (π جمع) (π جمع)

$$\frac{\pi}{7} + \frac{6\pi}{7} = \pi \Rightarrow \tan\frac{\pi}{7} + \tan\frac{6\pi}{7} = 0 \quad , \quad \frac{\pi}{5} + \frac{4\pi}{5} = \pi \Rightarrow \cos\frac{\pi}{5} + \cos\frac{4\pi}{5} = 0$$

$\pi - \frac{\pi}{7} = \frac{6\pi}{7}$



تست ۴۴: حاصل عبارت $\cos\frac{\pi}{n} + \cos\frac{2\pi}{n} + \cdots + \cos\frac{n-1}{n}\pi$ با فرض فردبودن n کدام است؟

۱) ۱ ۲) صفر ۳) n ۴) $-n$

پاسخ: گزینه‌ی «۲»

مثلاً $n = 3$

$\cos\frac{\pi}{3} + \cos\frac{2\pi}{3} = 0$

$$\cos\boxed{\frac{\pi}{n}} + \cos\boxed{\frac{2\pi}{n}} + \cdots + \cos\boxed{\frac{(n-2)\pi}{n}} + \cos\boxed{\frac{(n-1)\pi}{n}}$$

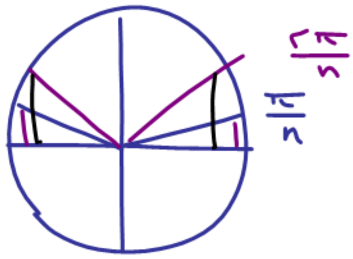
توی این مدل از سؤالات اولی و آخری رو با هم بگیرید و به همین ترتیب دومی رو با یکی مونده به آخری و ... . دقت کنید که اگر این زاویه‌ها را با هم جمع کنیم دو به دو جمعشان π می‌شود. یعنی مکمل هم هستند پس جمع کسینوس‌هایشان صفر می‌شود.

$$\frac{\pi}{n} + \frac{(n-1)\pi}{n} = \frac{\pi}{n} + \frac{n\pi - \pi}{n} = \frac{n\pi}{n} = \pi$$

$$\frac{2\pi}{n}+\frac{(n-2)\pi}{n}=\frac{2\pi}{n}+\frac{n\pi-2\pi}{n}=\frac{n\pi}{n}=\pi$$

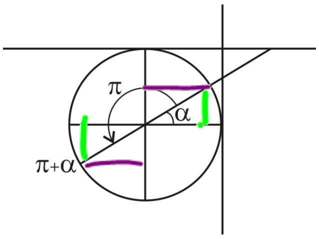
$\frac{(n-2)\pi}{n} = \pi - \frac{2\pi}{n}$

$\frac{(n-1)\pi}{n} = \pi - \frac{\pi}{n}$



پس جواب صفر است.

نسبت‌های مثلثاتی $(\alpha, \pi+\alpha)$



$$\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha$$
$$\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha$$
$$\tan(\pi+\alpha)=\tan\alpha$$
$$\cot(\pi+\alpha)=\cot\alpha$$

یادت باشه: اگر به زاویه‌ای π رادیان اضافه شود، سینوس و کسینوس قرینه می‌شود، اما تانژانت و کتانژانت ثابت می‌مانند.

تذکر: در سینوس و کسینوس از مضارب زوج π و در تانژانت و کتانژانت از هر مضارب π چه فرد چه زوج صرف نظر می‌کنیم.

$$\begin{cases}\sin(2k\pi+\alpha)=\sin\alpha\\ \cos(2k\pi+\alpha)=\cos\alpha\end{cases}\qquad \begin{cases}\tan(k\pi+\alpha)=\tan\alpha\\ \cot(k\pi+\alpha)=\cot\alpha\end{cases}$$

مثال ۴۵:

$\sin(100\pi+\frac{\pi}{6})=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$ $\qquad$ $\tan(\cancel{17\pi}+\frac{\pi}{3})=\sqrt{3}$ صرف نظر

$\sin 210^\circ = \sin(\pi+30^\circ) = -\sin 30 = -\frac{1}{2}$

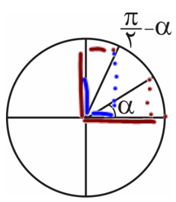
$\cos 210^\circ = \cos(\pi+30^\circ) = -\cos 30 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan 210^\circ = \tan(\pi+30^\circ) = \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\cot 210^\circ = \cot(\pi+30^\circ) = \cot 30^\circ = \sqrt{3}$

یادآوری: در سینوس و کسینوس از مضارب زوج π و در تانژانت و کتانژانت از هر مضارب π (چه فرد چه زوج) صرف نظر می‌کنیم.

نسبت‌های مثلثاتی دو زاویه متمم (جمع $\frac{\pi}{2}$)



$$\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\cos\alpha$$
$$\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\sin\alpha$$
$$\tan(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\cot\alpha$$
$$\cot(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\tan\alpha$$

یادت باشه: در مضارب فرد $\frac{\pi}{2}$ نام نسبت عوض می‌شود. $\sin \rightleftarrows \cos$ و $\tan \rightleftarrows \cot$

$\sin(\frac{117\pi}{2}+\theta) = +\cos\theta$

$\sin(\frac{117\pi}{2}+\theta = \frac{116\pi}{2}+\frac{\pi}{2}+\theta = \cancel{58\pi}+\frac{\pi}{2}+\theta)$ صرف نظر

یادت باشه:

$$\sin(\frac{\pi}{2}+\alpha)=\cos\alpha \qquad \tan(\frac{\pi}{2}+\alpha)=-\cot\alpha$$

$$\cos(\frac{\pi}{2}+\alpha)=-\sin\alpha \qquad \cot(\frac{\pi}{2}+\alpha)=-\tan\alpha$$

تذکر: در تمامی حالات فوق، α را زاویه‌ای حادّه در نظر گرفتیم.

یادت باشـه: برای شما نحوه‌ی $\cos(\frac{3\pi}{2}+\alpha)$ را توضیح می‌دم و بدانید که تمامی حالات فوق را باید با این روش بررسـی کنیـد و حفظ کردن آن‌ها کار خوبی نیست. α زاویه‌ای حادّه اسـت. $\frac{3\pi}{2}+\alpha$ یعنـی در جهـت مثبـت مثلثـاتی (خـلاف جهـت عقربـه‌هـای سـاعت) بـه اندازه‌ی $\frac{3\pi}{2}$ (۲۷۰ درجه) حرکت کنیم و سپس چون $+\alpha$ داریم یعنی مقداری دیگر نیز در این جهت جلو برویم. پس انتهای کمان، ربع سوم را رد کرد و در ربع چهارم قرار دارد. حالا می‌گوییم که در ربع چهارم، کسینوس مثبت است، پس خروجی حتماً مثبت است و ضمناً به دلیـل وجود فرد $\frac{\pi}{2}$ $(\frac{3\pi}{2})$ نام نسبت عوض شده و تبدیل به سینوس می‌شود. پس:

$$\cos(\frac{3\pi}{2}+\alpha)=+\sin\alpha$$

محاسبه‌ی سریع نسبت‌های مثلثاتی $\frac{k\pi}{6}$، $\frac{k\pi}{4}$ و $\frac{k\pi}{3}$

ابتدا با استفاده از زاویه‌ی مربوطه علامت نسبت رو مشخص کرده، بعد k را ندید گرفته و حاصل نسبت $\frac{\pi}{6}$ یا $\frac{\pi}{4}$ یا $\frac{\pi}{3}$ خواسته شده را قرار می‌دهیم. به عنوان مثال ببینید:

$$\sin(\frac{7\pi}{6})=\sin(\underbrace{7\times\frac{\pi}{6}}_{\text{ربع سوم}})=-\sin(\frac{\pi}{6})=-\frac{1}{2}$$

$$\cot(-\frac{5\pi}{3})=-\cot(\underbrace{5\times\frac{\pi}{3}}_{\text{ربع چهارم}})=-\left(-\cot(\frac{\pi}{3})\right)=-(-\frac{\sqrt{3}}{3})=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

برای تشخیص ساده‌تر زاویه‌هایی مثل $\frac{7\pi}{6}$ یا $\frac{5\pi}{3}$ ، توصیه می‌کنم آن‌ها را در ذهنتان به درجه تبدیل کنید، یعنی:

$$7\times\frac{\pi}{6}=7\times30^\circ=210^\circ \qquad \text{یا} \qquad 5\times\frac{\pi}{3}=5\times60^\circ=300^\circ$$

تست ۴۶: حاصل عبارت $\frac{\cos 285^\circ-\sin 255^\circ}{\sin 525^\circ-\sin 105^\circ}$، با فرض $\tan 15^\circ=0/28$ کدام است؟ (تجربی ۹۴)

۱) $-\frac{16}{9}$ ✓ ۲) $-\frac{9}{16}$ ۳) $\frac{16}{9}$ ۴) $\frac{9}{16}$

برای تولید $tg15°$ در * همه جمله‌های صورت و مخرج را بر $Cos15°$ تقسیم کن

$Cos(285° = 270°+15° = \frac{3\pi}{2}+15°) = Sin15°$

$Sin(255° = 270°-15° = \frac{3\pi}{2}-15°) = -Cos15°$

صرف نظر

$Sin(525° = 540°-15° = 3\pi-15° = \cancel{2\pi}+\pi-15°) = Sin(\pi-15°) = Sin15°$

$\pi-15°$ $15°$

$Sin(105° = 90°+15° = \frac{\pi}{2}+15°) = Cos15°$

$$* \quad \frac{\frac{Sin15°}{Cos15°}+\frac{Cos15°}{Cos15°}}{\frac{Sin15°}{Cos15°}-\frac{Cos15°}{Cos15°}} = \frac{\overset{0/28}{\cancel{tg15°}}+1}{\underset{0/28}{\cancel{tg15°}}-1} = \frac{1/28}{-0/72}$$

$\tan\theta . \text{Cotan}\,\theta = 1$

برای صحبت روزاویه چ ۹: تانژانتم کتانژانتند

$\tan 89^\circ = \text{Cotan}\,1^\circ$
$\tan 88^\circ = \text{Cotan}\,2^\circ$

تست ۴۷: حاصل عبارت $A = \tan ۱^\circ . \tan ۲^\circ .....\tan ۸۸^\circ . \tan ۸۹^\circ$ کدام است؟

۱) تعریف‌نشده ۲) ۱ ۳) صفر ۴) $\frac{۱}{۲}$

$$A = \underbrace{\tan 1^\circ . \underbrace{\tan 2^\circ .. \underbrace{\tan 45^\circ}_{\text{یک}}\ \text{Cotan}\,2^\circ}_{\text{یک}}\ \text{Cotan}\,1^\circ}_{\text{یک}} = 1$$

چند نتیجه‌ی مهم از این سؤال: ۲ زاویه‌ای که متمم هستند، تانژانت و کتانژانت‌شان برابر است. $\tan\alpha = \cot\beta$ این اتفاق برای سینوس و کسینوس نیز صادق است، یعنی:

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{۲} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{۲} - \beta \Rightarrow \begin{cases} \sin\alpha = \cos\beta \\ \cos\alpha = \sin\beta \end{cases}$$

به عنوان مثال: $\sin ۱۵^\circ = \cos ۷۵^\circ$ ، $\cos ۵۳^\circ = \sin ۳۷^\circ$ و ... ضمناً برای دو زاویه‌ای که متمم هستن، داریم:

$\tan\alpha . \tan\beta = ۱$

تست ۴۸: اگر $\tan ۱۵^\circ = a$ باشد، حاصل $\dfrac{۳\cos ۱۶۵^\circ - ۲\sin ۲۸۵^\circ}{۳\sin ۳۴۵^\circ - ۴\cos ۲۵۵^\circ}$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{a}$ ۲) $-a$ ۳) $-\frac{۲}{a}$ ۴) $-۲a$

$\pi - 15$  15

$\text{Cos}(165 = 180 - 15 = \pi - 15) = -\text{Cos}\,15$

$\text{Sin}(285 = 270 + 15 = \frac{3\pi}{2} + 15) = -\text{Cos}\,15$

$\text{Sin}(345 = 360 - 15 = \cancel{2\pi} - 15) = \text{Sin}(-15) = -\text{Sin}\,15$

$\text{Cos}(255 = 270 - 15 = \frac{3\pi}{2} - 15) = -\text{Sin}\,15$

$$\frac{-3\,\text{Cos}\,15 + 2\,\text{Cos}\,15}{-3\,\text{Sin}\,15 + 4\,\text{Sin}\,15} = \frac{-\text{Cos}\,15}{\text{Sin}\,15} = -\text{Cotan}\,15 = \frac{-1}{\tan 15} = \frac{-1}{a}$$

تست ۴۹: مقدار عبارت $\underbrace{\boxed{\cot(۷۵۰^\circ) + \tan(-۸۴۰^\circ)}}_{}$ + $\boxed{\cos(۳۰۰^\circ) + \sin(۳۳۰^\circ)}$ کدام است؟

$\sqrt{3} + \sqrt{3}$ صفر

۱) ۱ ۲) $۲\sqrt{۳}$ ۳) صفر ۴) $۲\frac{\sqrt{۳}}{۳}$

کسینوس منفی خورد

$\text{Cos}(300 = 360 - 60 = \cancel{2\pi} - 60) = \text{Cos}(-60) = \text{Cos}\,60 = \frac{1}{2}$

$\text{Sin}(330 = 360 - 30 = \cancel{2\pi} - 30) = \text{Sin}(-30) = -\text{Sin}\,30 = -\frac{1}{2}$

$\text{Cot}(750 = 720 + 30 = \cancel{4\pi} + 30) = \text{Cotan}\,30 = \sqrt{3}$

$\tan(-840) = -\tan(840 = 900 - 60 = \cancel{5\pi} - 60) = -\tan(-60) = \tan 60 = \sqrt{3}$

$\frac{\pi}{۸}+\frac{۷\pi}{۸}=\pi \xrightarrow{\text{مکمل}} \sin\frac{\pi}{۸}=\sin\frac{۷\pi}{۸}$ ، $\pi-\frac{\pi}{۸}=\frac{۷\pi}{۸}$

$\frac{۳\pi}{۸}+\frac{۵\pi}{۸}=\pi \xrightarrow{\text{مکمل}} \sin\frac{۳\pi}{۸}=\sin\frac{۵\pi}{۸}$

تست ۵۰: حاصل عبارت $\sin^{۲}\frac{\pi}{۸}+\sin^{۲}\frac{۳\pi}{۸}+\sin^{۲}\frac{۵\pi}{۸}+\sin^{۲}\frac{۷\pi}{۸}$ کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۲}$ ۲) ۲ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) ۱

$۲\sin^{۲}\frac{\pi}{۸}+۲\sin^{۲}\frac{۳\pi}{۸}=۲\left(\sin^{۲}\frac{\pi}{۸}+\sin^{۲}\frac{۳\pi}{۸}=\cos^{۲}\frac{۳\pi}{۸}+\sin^{۲}\frac{۳\pi}{۸}=۱\right)=۲(۱)=۲$

$\frac{\pi}{۸}+\frac{۳\pi}{۸}=\frac{۴\pi}{۸}=\frac{\pi}{۲}$ متمم $\sin\frac{\pi}{۸}=\cos\frac{۳\pi}{۸}$

$-\frac{۱}{۲}=\frac{۳}{۴}-\frac{۲}{۴}=\frac{۱}{۴}$

تست ۵۱: حاصل عبارت $\boxed{\sin(\frac{۱۷\pi}{۳})\cos(-\frac{۱۷\pi}{۶})}^{\frac{۳}{۴}}+\boxed{\tan(\frac{۱۹\pi}{۴})\sin(-\frac{۱۱\pi}{۶})}^{-\frac{۱}{۲}}$ کدام است؟ (تجربی ۹۸)

۱) $-\frac{۱}{۴}$ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

صرف نظر $\cancel{۶\pi}$

$\sin\left(\frac{۱۷\pi}{۳}=\frac{۱۸\pi}{۳}-\frac{\pi}{۳}\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{۳}\right)=-\sin\frac{\pi}{۳}=-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

$\pi-\frac{\pi}{۶}$ ، $\frac{\pi}{۶}$

$\cos\left(-\frac{۱۷\pi}{۶}\right)=\cos\left(\frac{۱۷\pi}{۶}=\frac{۱۸\pi}{۶}-\frac{\pi}{۶}=۳\pi-\frac{\pi}{۶}=\cancel{۲\pi}+\pi-\frac{\pi}{۶}\right)=-\cos\frac{\pi}{۶}=-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

$\tan\left(\frac{۱۹\pi}{۴}=\frac{۲۰\pi}{۴}-\frac{\pi}{۴}=\cancel{۵\pi}-\frac{\pi}{۴}\right)=\tan\left(-\frac{\pi}{۴}\right)=-\tan\left(\frac{\pi}{۴}\right)=-۱$

$\sin\left(-\frac{۱۱\pi}{۶}\right)=-\sin\left(\frac{۱۲\pi}{۶}-\frac{\pi}{۶}=\cancel{۲\pi}-\frac{\pi}{۶}\right)=\sin\frac{\pi}{۶}=\frac{۱}{۲}$

تست ۵۲: حاصل عبارت $\underbrace{\tan(۲۸۵^\circ)\tan(-۱۶۵^\circ)}_{\text{الف}}-\underbrace{\sin(۱۰۹۵^\circ)\cos(۲۵۵^\circ)}_{\text{ب}}$ کدام است؟ (خارج تجربی ۹۹)

۱) $\sin^{۲}(۱۵^\circ)$ ۲) $\cos^{۲}(۱۵^\circ)$ ۳) $-\sin^{۲}(۱۵^\circ)$ ۴) $-\cos^{۲}(۱۵^\circ)$

$\tan(۲۸۵^\circ=۲۷۰^\circ+۱۵^\circ=\frac{۳\pi}{۲}+۱۵^\circ)=-\cot ۱۵^\circ$

$\tan(-۱۶۵^\circ)=-\tan(۱۸۰-۱۵^\circ=\cancel{\pi}-۱۵^\circ)=\tan ۱۵^\circ$

$\xrightarrow{\text{ضرب}} (-۱)$

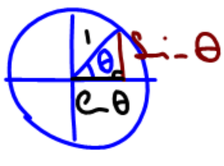
$\sin(۱۰۹۵^\circ=\cancel{۶\pi}+۱۵^\circ)=\sin ۱۵^\circ$

$\cos(۲۵۵^\circ=۲۷۰^\circ-۱۵^\circ=\frac{۳\pi}{۲}-۱۵^\circ)=-\sin ۱۵^\circ$

$\xrightarrow{\text{ضرب}} -\sin^{۲}۱۵^\circ$

$(\text{الف})-(\text{ب})=-۱+\sin^{۲}۱۵^\circ=-(۱-\sin^{۲}۱۵^\circ)=-\cos^{۲}۱۵^\circ$

روابط بین نسبت‌های مثلثاتی



روابط مثلثاتی کتاب دهم عبارت‌اند از:

۱) $\sin^{۲}\theta+\cos^{۲}\theta=۱$

اگر بخواهیم هر یک از نسبت‌های $\sin\theta$ یا $\cos\theta$ را برحسب دیگری بیابیم، داریم:

نتیجه:

$$\begin{cases}\sin^{۲}\theta=۱-\cos^{۲}\theta \Rightarrow \sin\theta=\pm\sqrt{۱-\cos^{۲}\theta}\\ \cos^{۲}\theta=۱-\sin^{۲}\theta \Rightarrow \cos\theta=\pm\sqrt{۱-\sin^{۲}\theta}\end{cases}$$

که علامت آن‌ها بر مبنای ناحیه‌ای که زاویه در آن قرار گرفته است، مشخص می‌شود.

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$) $\div\cos^2\theta$

$\div\sin^2\theta$

$\tan^2\theta+1=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$

$1+\text{cotan}^2\theta=\dfrac{1}{\sin^2\theta}$

۲) $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ ۳) $\cot\theta=\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$

۴) $\tan\theta=\dfrac{1}{\cot\theta}$ ۵) $\cot\theta=\dfrac{1}{\tan\theta}$

۶) $\tan\theta\times\cot\theta=1$: تی جی کوتی جی ضربش یکه ۷) $\dfrac{1}{\cos^2\theta}=1+\tan^2\theta$

۸) $\dfrac{1}{\sin^2\theta}=1+\cot^2\theta$ ۹) $\tan\theta+\cot\theta=\dfrac{1}{\sin\theta.\cos\theta}$

تی جی بعلاوه کوتی جی میشه یک روی ضرب سینوس کسینوس

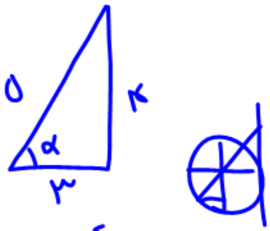
$\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}+\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}=\dfrac{\sin^2\theta+\cos^2\theta=1}{\sin\theta\cos\theta}$

۱۰) $(\sin\theta+\cos\theta)^2=1+2\sin\theta\cos\theta$

$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$

تست ۵۳: اگر α در ناحیهٔ سوم بوده و $\cos\alpha=-\dfrac{3}{5}$ باشد، حاصل $\dfrac{\cot\alpha}{\sin\alpha+\tan\alpha}$ کدام است؟

۱) $\dfrac{32}{45}$ ۲) $\dfrac{45}{32}$ ✓ ۳) $\dfrac{31}{45}$ ۴) $\dfrac{45}{31}$

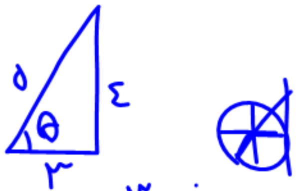


$\tan\alpha=\dfrac{4}{3}$ ، $\text{Cotan}\,\alpha=\dfrac{3}{4}$ ، $\sin\alpha=-\dfrac{4}{5}$ (ناحیه سوم α)

$$\dfrac{\frac{3}{4}}{-\frac{4}{5}+\frac{4}{3}=\frac{-12+20}{15}=\frac{8}{15}}=\dfrac{3(15)}{4(8)}=\dfrac{45}{32}$$

تست ۵۴: اگر $\cos\theta=-\dfrac{3}{5}$ و انتهای کمان θ در ناحیه‌ی سوم مثلثاتی باشد، حاصل $\dfrac{\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$ کدام است؟

۱) $-\dfrac{12}{7}$ ۲) $-\dfrac{3}{7}$ ۳) $\dfrac{12}{7}$ ۴) $\dfrac{3}{7}$



$t\theta=\dfrac{4}{3}\xrightarrow{\text{ناحیه ۳}}\dfrac{4}{3}$

$$\dfrac{t\theta}{1-t^2\theta}=\dfrac{\frac{4}{3}}{1-\left(\frac{16}{9}\right)=\frac{9-16}{9}=\frac{-7}{9}}=\dfrac{4(\cancel{9}^{3})}{\cancel{3}_{1}(-7)}=-\dfrac{12}{7}$$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

$1+\text{Cot}^2\theta=\dfrac{1}{\sin^2\theta}$

$t^2\theta+1=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$

$\sin^2\theta=\dfrac{1}{1+\text{Cot}^2\theta}$

$\cos^2\theta=\dfrac{1}{1+t^2\theta}$

تست ۵۵: حاصل $\dfrac{\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}+\dfrac{\cot^2\alpha}{1+\cot^2\alpha}$ در صورت وجود کدام است؟

۱) $2\sin^2\alpha$ ۲) $\cos^2\alpha$ ۳) صفر ۴) ۱ ✓

$$\dfrac{1}{1+\text{Cot}^2\theta}\,\text{Cot}^2\theta+\dfrac{1}{1+t^2\theta}\,t^2\theta=\cancel{\sin^2\theta}\,\dfrac{\cos^2\theta}{\cancel{\sin^2\theta}}+\cancel{\cos^2\theta}\,\dfrac{\sin^2\theta}{\cancel{\cos^2\theta}}$$

$$=\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$$

$(a-b)^2 = a^2+b^2-2ab$

تست ۵۶: اگر $\tan\theta = \frac{۳}{۴}$، حاصل $(\tan\theta - \cot\theta)^{۲} - \frac{۱}{\cos^{۲}\theta}$ کدام است؟

$\cot\theta = \frac{4}{3}$

۱) $-\frac{۱۱}{۹}$ ✓ ۲) $-\frac{۱۲}{۲۵}$ ۳) $\frac{۱۶}{۲۵}$ ۴) $\frac{۱۶}{۹}$

یک

$\tan^2\theta + \cot^2\theta - 2\boxed{\tan\theta\cot\theta} - (1+\tan^2\theta) = \cot^2\theta - 3 = \left(\frac{4}{3}\right)^2 - 3 =$

$\frac{16}{9} - 3 = \frac{16-27}{9} = -\frac{11}{9}$

تست ۵۷: اگر $\sin x + \cos x = \frac{۱}{۲}$ باشد، حاصل $\tan x + \cot x$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۸}$ ۲) $-\frac{۳}{۸}$ ۳) $\frac{۸}{۳}$ ۴) $-\frac{۸}{۳}$ ✓

$\tan x + \cot x = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x = 1}{\sin x\cos x = -\frac{3}{8}} = -\frac{8}{3}$

نکته: اگر ± سینوس، کسینوس را داشتیم با به توان ۲ رساندن ۲ طرف می‌توان ضرب سینوس، کسینوس را هم یافت و برعکس.

$\sin x + \cos x = \frac{1}{2}$

طرفین به توان ۲

$\underbrace{\boxed{\sin^2 x + \cos^2 x}}_{\text{یک}} + 2\sin x\cos x = \frac{1}{4}$

$\sin x\cos x = -\frac{3}{8}$

تست ۵۸: اگر $\sin x\cos x = \frac{۱}{۳}$ باشد، حاصل $\sin^{۳} x - \cos^{۳} x$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۵}$ ۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ ۳) $\pm\frac{۹}{۴\sqrt{۳}}$ ۴) $\pm\frac{۴\sqrt{۳}}{۹}$

پاسخ: گزینه‌ی «۴» ـ $\sin^{۳} x - \cos^{۳} x$ را تجزیه می‌کنیم:

یک

$$\sin^{۳} x - \cos^{۳} x = (\sin x - \cos x)(\sin^{۲} x + \underbrace{\sin x\cos x}_{\frac{1}{3}} + \cos^{۲} x) = \underbrace{(\sin x - \cos x)}_{\text{برابر A فرض کنیم و}}(۱+\frac{۱}{۳}) = \frac{۴}{۳}(\sin x - \cos x)$$

حالا داشته باش:

$$(\sin x - \cos x)^{۲} = \sin^{۲} x + \cos^{۲} x - ۲\sin x\cos x = ۱ - ۲(\frac{۱}{۳}) = \frac{۱}{۳} \Rightarrow (\sin x - \cos x)^{۲} = \frac{۱}{۳} = A^2$$

$\pm\frac{\sqrt{3}}{3} = A$

$$\Rightarrow \sin x - \cos x = \pm\frac{۱}{\sqrt{۳}}$$

پس:

$$\sin^{۳} x - \cos^{۳} x = \frac{۴}{۳}(\pm\frac{۱}{\sqrt{۳}}) = \pm\frac{۴}{۳\sqrt{۳}} = \pm\frac{۴\sqrt{۳}}{۹}$$

تست ۵۹: اگر $\dfrac{\sin x + ۲\cos x}{\sin x - ۳\cos x} = ۲$ باشد، حاصل $\dfrac{۱}{\sin x \cos x}$ کدام است؟

۱) $\dfrac{۶۵}{۸}$ ۲) $-\dfrac{۶۵}{۸}$ ۳) $\dfrac{۱۷}{۴}$ ۴) $-\dfrac{۱۷}{۴}$

پاسخ: گزینه‌ی «۱» ـ طرفین وسطین می‌کنیم، یادتون باشه هروقت صورت و مخرج یک کسر هم‌زمان هم **sin** و هم **cos** داشت، طرفین وسطین کنید و بعدش **tan** بسازید:

$$\frac{\sin x + ۲\cos x}{\sin x - ۳\cos x} = ۲ \Rightarrow \sin x + ۲\cos x = ۲\sin x - ۶\cos x$$

$$\Rightarrow ۸\cos x = \sin x \xrightarrow[\text{تانژانت‌سازی}]{\div \cos x} ۸ = \tan x$$

از طرفی همیشه داریم:

$$\tan x + \cot x = \frac{۱}{\sin x \cos x}$$

$$۸ + \frac{۱}{۸} = \frac{۱}{\sin x \cos x} \Rightarrow \frac{۱}{\sin x \cos x} = \frac{۶۵}{۸}$$

تست ۶۰: اگر $۲\sin\alpha = ۳\cos\alpha$، حاصل $\dfrac{۱+\cot\alpha}{۱+\tan\alpha}$ کدام است؟

۱) $\dfrac{۳}{۲}$ ۲) $\dfrac{۲}{۳}$ ✓ ۳) $\dfrac{۹}{۴}$ ۴) ۶

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{۳}{۲} \to \tan\alpha = \frac{۳}{۲} \to \cot\alpha = \frac{۲}{۳}$$

$$\frac{۱+\frac{۲}{۳}}{۱+\frac{۳}{۲}} = \frac{\frac{۵}{۳}}{\frac{۵}{۲}} = \frac{۲}{۳}$$

تست ۶۱: مقدار عبارت $\dfrac{\cos\alpha}{۱+\sin\alpha} - \dfrac{۱-\sin\alpha}{\cos\alpha}$ به ازای $\alpha = ۱۵^\circ$ کدام است؟

۱) صفر ✓ ۲) $\dfrac{\sqrt{۳}}{۳}$ ۳) $\dfrac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۴) $\dfrac{\sqrt{۶}}{۲}$

مخرج مشترک

$$\frac{\overbrace{(۱-\sin^۲\alpha)}^{\cos^۲\alpha} - \cos^۲\alpha}{\cos\alpha(۱+\sin\alpha)} = \frac{\text{صفر}}{\text{عدد}} = ۰$$

تست ۶۲: حاصل $\dfrac{۱}{\sin^۴\theta} - \dfrac{۱}{\sin^۲\theta} - \cot^۴\theta$ کدام است؟

۱) $\sin^۲\theta$ ۲) $\cos^۲\theta$ ۳) $\tan^۲\theta$ ۴) $\cot^۲\theta$

$$\frac{۱}{\sin^۴\theta} - \frac{۱}{\sin^۲\theta} - \frac{\cos^۴\theta}{\sin^۴\theta} = \frac{(۱-\sin^۲\theta) - \cos^۴\theta}{\sin^۴\theta} = \frac{\cos^۲\theta - \cos^۴\theta}{\sin^۴\theta}$$

$$\frac{\cos^۲\theta\,(\overbrace{\cancel{۱-\cos^۲\theta}}^{\cancel{\sin^۲\theta}})}{\underbrace{\cancel{\sin^۴\theta}}_{=\sin^۲\theta}} = \frac{\cos^۲\theta}{\sin^۲\theta} = \cot^۲\theta$$

تست ۶۳: اگر $\frac{1+\cot x}{\tan x+1}=2$، حاصل $\frac{2\cos x-3\sin x}{\sin x+\cos^3 x}$ کدام است؟ $t=\tan x$ فرض کنیم

۱) $\frac{2}{5}$ ۲) $\frac{1}{10}$ ۳) $\frac{2}{13}$ ۴) $\frac{5}{13}$ ✓

$$\frac{1+\frac{1}{t}}{t+1}=\frac{\frac{t+1}{t}}{t+1}=\frac{1}{t}=2\longrightarrow t=\frac{1}{2}\longrightarrow \tan x=\frac{1}{2}$$

برای تولید $\tan x$ جز صورت و مخرج را بر $\cos x$ تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{2-3\tan x}{\tan x+\left(\cos^2 x=\frac{1}{1+\tan^2 x}\right)}=\frac{2-\frac{3}{2}=\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{1+\frac{1}{4}}=\frac{4}{5}\right)=\frac{13}{10}}=\frac{10}{2(13)}=\frac{5}{13}$$

فرمول

تست ۶۴: حاصل $\sqrt{1-\sin^2\alpha}\sqrt{1+\cot^2\alpha}$، اگر α در ربع دوم دایره‌ی مثلثاتی باشد، کدام است؟

۱) $\tan\alpha$ ۲) $-\tan\alpha$ ۳) $\cot\alpha$ ۴) $-\cot\alpha$ ✓

$$\sqrt{1+\cot^2\theta}=\frac{1}{\sin^2\alpha}\qquad \sqrt{1-\sin^2\alpha=\cos^2\alpha}=\frac{1}{|\underset{+}{\sin\alpha}|}\,|\underset{-}{\cos\alpha}|=-\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$=-\cot\alpha$$

تست ۶۵: حاصل $\sqrt{1+\cos x\sqrt{(1-\sin x)(1+\sin x)}}$ کدام است؟ (x در ربع سوم است.)

۱) $\sin x$ ۲) $-\sin x$ ۳) $\cos x$ ۴) $-\cos x$

پاسخ: گزینهٔ «۲» ـ با استفاده از روابط $1-\sin^2 x=\cos^2 x$ و $1-\cos^2 x=\sin^2 x$ می‌توان نوشت:

$$\sqrt{1+\cos x\sqrt{\underbrace{(1-\sin x)(1+\sin x)}_{\text{اتحاد مزدوج}}}}=\sqrt{1+\cos x\sqrt{1-\sin^2 x}}=\sqrt{1+\cos x\sqrt{\cos^2 x}}$$

$$=\sqrt{1+\cos x|\cos x|}\overset{\pi<x<\frac{3\pi}{2}}{=\!=\!=}\sqrt{1+\cos x(-\cos x)}=\sqrt{1-\cos^2 x}=\sqrt{\sin^2 x}=|\sin x|\overset{\pi<x<\frac{3\pi}{2}}{=\!=\!=}-\sin x$$

$$\hat{B}+\hat{C}=\frac{\pi}{2}$$
$$\sin^2(\frac{\pi}{2}-\hat{B})=\sin^2\hat{C}=\cos^2\hat{B}$$

تست ۶۶: در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC که در رأس $\hat{A}$ قائم است، حاصل $\sin^2(\frac{\pi}{2}-\hat{B})+\frac{1}{\tan^2\hat{C}+1}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۱- ۴) ۲

پاسخ: گزینهٔ «۲» ـ روش اول: در مثلث ABC زاویهٔ $A=90^\circ$ است، پس داریم:

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180^\circ\ \Rightarrow\ 90^\circ+\hat{B}+\hat{C}=180^\circ\ \Rightarrow\ \hat{B}+\hat{C}=90^\circ$$

پس دو زاویهٔ B و C متمم‌اند. از طرفی با توجه به این کـه $\frac{1}{1+\tan^2\bigcirc}=\cos^2\bigcirc$ و $\sin^2(\frac{\pi}{2}-\bigcirc)=\cos^2\bigcirc$ اسـت، پس مـی‌تـوان نوشت:

$$\frac{1}{1+\tan^2\hat{C}}+\sin^2(\frac{\pi}{2}-\hat{B})=\cos^2\hat{C}+\cos^2\hat{B}$$

$$\cos^2\hat{C}+\cos^2\hat{B}=\sin^2\hat{B}+\cos^2\hat{B}=1$$

از طرفی با توجه به این که دو زاویهٔ $\mathbf{B}$ و $\mathbf{C}$ متممّ‌اند، می‌توان گفت $\cos\hat{C}=\sin\hat{B}$ و هم‌چنین $\sin\hat{C}=\cos\hat{B}$ است. پس با استفاده از رابطهٔ $\cos\hat{C}=\sin\hat{B}$ می‌توان نوشت: $\cos^2\hat{C}+\cos^2\hat{B}=\sin^2\hat{B}+\cos^2\hat{B}=1$

روش دوم: دو زاویهٔ $\mathbf{B}$ و $\mathbf{C}$ متممّ‌اند، یعنی $\hat{B}+\hat{C}=\frac{\pi}{2}$، پس $\frac{\pi}{2}-\hat{B}=\hat{C}$ است. در نتیجه داریم:

$$\frac{1}{1+\tan^2\hat{C}}+\sin^2(\frac{\pi}{2}-\hat{B})=\frac{1}{1+\tan^2\hat{C}}+\sin^2\hat{C}=\cos^2\hat{C}+\sin^2\hat{C}=1$$

مهم

تست ۶۷: با فرض $2\sin^2 x+3\cos^2 x=5\sin x\cos x$، مقدار $\cos^2 x$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{4}$　　۲) $\frac{13}{4}$　　۳) ۴　　۴) $\frac{4}{13}$

پاسخ: گزینهٔ «۴» ـ طرفین معادلهٔ داده‌شده را بر $\cos^2 x$ تقسیم می‌کنیم:

$$2\sin^2 x+3\cos^2 x=5\sin x\cos x\xrightarrow{\div\cos^2 x}2\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}+3\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x}=5\frac{\sin x\cos x}{\cos^2 x}$$

$$\Rightarrow 2\tan^2 x+3=5\tan x\Rightarrow 2\tan^2 x-5\tan x+3=0\xrightarrow{a+b+c=0}\begin{cases}\tan x=1\\ \tan x=\frac{3}{2}\end{cases}$$

حالا با استفاده از رابطهٔ $1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$ داریم:

$$1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$$

حالت اول: $\tan x=1\Rightarrow 1+(1)^2=\frac{1}{\cos^2 x}\Rightarrow 2=\frac{1}{\cos^2 x}\Rightarrow\cos^2 x=\frac{1}{2}$

حالت دوم: $\tan x=\frac{3}{2}\Rightarrow 1+(\frac{3}{2})^2=\frac{1}{\cos^2 x}\Rightarrow 1+\frac{9}{4}=\frac{1}{\cos^2 x}\Rightarrow\frac{13}{4}=\frac{1}{\cos^2 x}\Rightarrow\cos^2 x=\frac{4}{13}$

که با توجه به گزینه‌ها پاسخ صحیح $\cos^2 x=\frac{4}{13}$ است.

تست ۶۸: اگر $2\sin^2 x+\cos^2 x=\frac{4}{3}$ باشد، حاصل $\tan^2 x$ کدام است؟ *(سراسری تجربی ۱۴۰۱)*

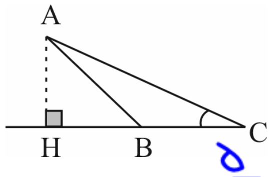
۱) $\frac{3}{2}$　　۲) $\frac{2}{3}$　　۳) $\frac{1}{2}$ ✓　　۴) $\frac{1}{4}$

$$\sin^2 x+\underbrace{\boxed{\sin^2 x+\cos^2 x}}_{\text{یک}}=\frac{4}{3}\;\text{—}\;\sin^2 x=\frac{4}{3}-1=\frac{1}{3}$$

$$\sin^2 x+\cos^2 x=1$$
$$\frac{1}{3}+\cos^2 x=1$$
$$\cos^2 x=\frac{2}{3}$$

$$\tan^2 x=\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}}=\frac{1}{2}$$

تست ۶۹: در شکل زیر، فرض کنید $\sin\hat{C}=\frac{5}{13}$ و $CH=9$. اندازه‌ی ارتفاع AH کدام است؟ *(ریاضی ۹۹)*



۱) ۳/۲۵　　۲) ۳/۵　　۳) ۳/۶　　۴) ۳/۷۵ ✓

اعداد فیثاغورثی: $\left.\begin{matrix}5,4,3\\13,12,5\end{matrix}\right\}$

$\tan\hat{C}=\frac{5}{12}$

$\triangle AHC$:

$$\frac{5}{12}=\tan\hat{C}=\frac{AH}{CH=9}$$

$$AH=9\left(\frac{5}{12}\right)=\frac{45}{12}=3/75$$

فرمول‌های کمان 2α

دوازدهم تجربی و یازدهم ریاضی

سینوس کسینوس نصف سینوس دوبلش $\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{2}\sin 2\alpha$

۱) $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

مثال : $\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}$ ، $\sin 6x = 2\sin 3x\cos 3x$

۲) $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

الف) $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

ب) $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$

توان شکن

پ) $1+\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha \Rightarrow \boxed{\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}}$

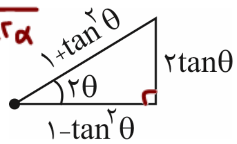
ت) $1-\cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha \Rightarrow \boxed{\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}}$

SAVE

«به شدت مهم»

تقسیم

$$\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$$



مهم

۳) $\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} \xrightarrow{\text{اثبات}} \tan(\alpha+\alpha) = \frac{\tan\alpha+\tan\alpha}{1-\tan\alpha\tan\alpha} = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

به کمک شکل بالا این ۳ تا را به ذهن بسپار!

۴) $\sin 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha} \xrightarrow{\text{اثبات}} \frac{2\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{1+\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = 2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha$

سینوس، کسینوس برحسب تانژانت نصف توس

۵) $\cos 2\alpha = \frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha} \xrightarrow{\text{اثبات}} \frac{1-\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{1+\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = \frac{\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{\frac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos 2\alpha$

۶) $\tan^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha} \xrightarrow{\text{اثبات}} \frac{1-\cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha}{1+\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha} = \tan^2\alpha$

۷) $\tan\alpha + \cot\alpha = \frac{2}{\sin 2\alpha} \xrightarrow{\text{اثبات}} \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{1}{\frac{1}{2}\sin 2\alpha} = \frac{2}{\sin 2\alpha}$

کوتی جی و تی جی

۲ رو سینوس دوبلش

۸) $\cot\alpha - \tan\alpha = 2\cot 2\alpha \xrightarrow{\text{اثبات}} \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{\cos 2\alpha}{\frac{1}{2}\sin 2\alpha} = \frac{2\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = 2\cot 2\alpha$

کوتی جی منهای تی جی ۲ تا کتانژانت دوبلش

*۹) $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$

*۱۰) $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$

*۱۱) $\sin\alpha\sin(60^\circ-\alpha)\sin(60^\circ+\alpha) = \frac{1}{4}\sin 3\alpha$

*۱۲) $\cos\alpha\cos(60^\circ-\alpha)\cos(60^\circ+\alpha) = \frac{1}{4}\cos 3\alpha$

*۱۳) $\tan\alpha\tan(60^\circ-\alpha)\tan(60^\circ+\alpha) = \tan 3\alpha$

برای حسابان رشته ریاضی

$\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{2}\sin 2\theta$

$\sin(90° + 7/5° = \frac{\pi}{2} + 7/5°) = \cos 7/5°$

تست ۷۰: حاصل عبارت $\sin(7/5^\circ)\sin(97/5^\circ)\cos(15^\circ)$ چقدر است؟

۱) $-\frac{1}{8}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{8}$ ۴) $-\frac{1}{4}$

$\frac{1}{2}\sin 15°$

$\boxed{\sin 7/5° \cos 7/5°}\cos 15° = \frac{1}{2}\underbrace{\sin 15° \cos 15°}_{\frac{1}{2}\sin 30°} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin 30° = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8}$

تست ۷۱: اگر $f(x) = x - \sqrt{x}$ و $g(x) = \sin^4 x$ باشند، ضابطه‌ی تابع fog کدام است؟ (خارج ۹۲)

۱) $-\frac{1}{4}\sin^2 2x$ ۲) $-\frac{1}{2}\sin^2 2x$ ۳) $\frac{1}{4}\cos^2 2x$ ۴) $\frac{1}{2}\cos^2 2x$

$y = f(g(x)) = g - \sqrt{g} = \sin^4 x - \sqrt{\sin^4 x} = \sin^4 x - \sin^2 x = \sin^2 x(\underbrace{\sin^2 x - 1}_{-\cos^2 x})$

$y = -\sin^2 x\cos^2 x = -(\sin x\cos x)^2 = -\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)^2 = -\frac{1}{4}\sin^2 2x$

تست ۷۲: حاصل عبارت $\cos\frac{\pi}{7}\cdot\cos\frac{2\pi}{7}\cdot\cos\frac{4\pi}{7}$ کدام است؟

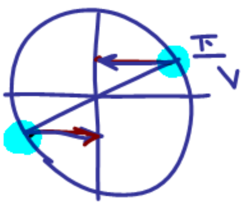
در $\sin\frac{\pi}{7}$ ضرب و تقسیم کن

۱) $\frac{1}{8}$ ۲) $-\frac{1}{8}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $-\frac{1}{4}$

$\frac{1}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right)$

$\boxed{\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\boxed{\sin\frac{4\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin\frac{8\pi}{7}$

$\sin\frac{\pi}{7}$



$\pi + \frac{\pi}{7} = \frac{8\pi}{7}$

$= \frac{\frac{1}{8}\left(-\sin\frac{\pi}{7}\right)}{\sin\frac{\pi}{7}} = -\frac{1}{8}$

تست ۷۳: ساده‌شدهٔ عبارت $\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta} + \frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}$ کدام است؟ (ریاضی خارج ۱۴۰۰)

۱) $\cos\frac{\theta}{2}$ ۲) $\sin\frac{\theta}{2}$ ۳) $2\cot\frac{\theta}{2}$ ۴) $2\tan\frac{\theta}{2}$

$\boxed{\begin{array}{l} 1-\cos\theta = 2\sin^2\frac{\theta}{2} \\ 1+\cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2} \end{array}}$

$= \frac{\sin\theta = \cancel{2}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{1-\cos\theta = \cancel{2}\sin^2\frac{\theta}{2}} + \frac{1+\cos\theta = \cancel{2}\cos^2\frac{\theta}{2}}{\sin\theta = \cancel{2}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}} =$

$= \cot\frac{\theta}{2} + \cot\frac{\theta}{2} = 2\cot\frac{\theta}{2}$

$1-\sin x = 4+4\sin x \longrightarrow 5\sin x = -3 \quad \sin x = -\frac{3}{5}$

$\tan x = \frac{3}{4}$ ربع ۳ $\quad \tan x = \frac{3}{4}$

تست ۷۴: اگر انتهای کمان x در ربع سوّم و $\frac{1-\sin x}{1+\sin x} = 4$ باشد، مقدار صحیح $\tan\frac{x}{2}$ کدام است؟ *(ریاضی خارج ۱۴۰۱)*

۱) ۲ ۲) ۲- ۳) ۳ ۴) ۳-

$\tan x = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1-\tan^2\frac{x}{2}} \xrightarrow{\tan\frac{x}{2}=A} \frac{3}{4} = \frac{2A}{1-A^2} \longrightarrow 3-3A^2 = 8A$

ضرب ۳

$3A^2+8A-3=0 \longrightarrow A^2+8A-9=0$

$A_1=1 \quad A_2=-9$

$A_1 = \frac{1}{3} = \tan\frac{x}{2}$

$A_2 = -\frac{9}{3} = -3 = \tan\frac{x}{2}$

تست ۷۵: حاصل $\sin x\cos x(\cos^4 x-\sin^4 x)$ به ازای $x=15^\circ$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{8}$ ۳) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ۴) $\frac{\sqrt{3}}{8}$

پاسخ: گزینهٔ «۴» ـ با استفاده از روابط $2\sin\bigcirc\cos\bigcirc = \sin 2\bigcirc$ و $\cos^2\bigcirc - \sin^2\bigcirc = \cos 2\bigcirc$ می‌توان نوشت:

$$\sin x\cos x(\cos^4 x-\sin^4 x) = \sin x\cos x(\cos^2 x-\sin^2 x)\underbrace{(\cos^2 x+\sin^2 x)}_{1} = \frac{1}{2}\sin 2x\cos 2x = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sin(4x)\right)$$

$$=\frac{1}{4}\sin(4x)$$

حالا با جای‌گذاری $x=15^\circ$ خواهیم داشت:

$$\frac{1}{4}\sin(4x) = \frac{1}{4}\sin(60^\circ) = \frac{1}{4}\times\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{8}$$

تست ۷۶: با فرض $\sin\alpha = \frac{1}{4}$، مقدار $\cos 4\alpha$ کدام است؟

۱) $\frac{17}{64}$ ۲) $\frac{17}{32}$ ۳) $\frac{-17}{64}$ ۴) $\frac{-17}{32}$

پاسخ: گزینهٔ «۲» ـ ابتدا با استفاده از رابطهٔ $\cos 2\alpha = 1-2\sin^2\alpha$ مقدار $\cos 2\alpha$ را به دست می‌آوریم:

$$\cos 2\alpha = 1-2\left(\frac{1}{16}\right) = 1-\frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

حالا با استفاده از رابطهٔ $\cos 4\alpha = 2\cos^2(2\alpha)-1$ برای محاسبهٔ مقدار $\cos 4\alpha$ می‌توان نوشت:

$$\cos 4\alpha = 2\left(\frac{49}{64}\right)-1 = \frac{98}{64}-1 = \frac{34}{64} = \frac{17}{32}$$

$\frac{24}{25}+\frac{4}{5} = \frac{24+20}{25} = \frac{44}{25}$

$= \frac{24(44)}{7(25)} = \frac{1056}{175}$

تست ۷۷: اگر زاویهٔ α در ناحیهٔ سوم مثلثاتی و $\tan\alpha = \frac{3}{4}$ باشد، مقدار $\frac{\cos(2\alpha-\frac{\pi}{2})+\cos(\alpha+\pi)}{\cot(2\alpha)}$ کدام است؟ *(سراسری تجربی ۱۴۰۰)*

$= \frac{7}{24}$

$\sin\alpha = -\frac{3}{5} \quad \cos\alpha = -\frac{4}{5}$

۱) $-\frac{96}{175}$ ۲) $\frac{1056}{175}$ ۳) $\frac{96}{175}$ ۴) $-\frac{1056}{175}$

$\cos(2\alpha-\frac{\pi}{2}) = \cos(-(\frac{\pi}{2}-2\alpha)) = \cos(\frac{\pi}{2}-2\alpha) = \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2(-\frac{3}{5})(-\frac{4}{5}) = \frac{24}{25}$

$\cos(\alpha+\pi) = -\cos\alpha$

$\pi+\alpha$

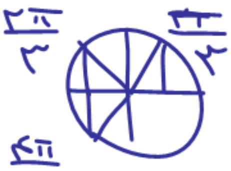
$\cot 2\alpha = \frac{1}{\tan 2\alpha} = \frac{1}{\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}} = \frac{1-\tan^2\alpha}{2\tan\alpha} = \frac{1-\frac{9}{16}}{2(\frac{3}{4})} = \frac{\frac{7}{16}}{\frac{3}{2}} = \frac{7}{24}$

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$$

تست ۷۸: اگر $f(x)=16\cos^2(3x)\cos^2(6x)\cos^2(12x)\cos^2(24x)$ مقدار $f(\frac{\pi}{36})$ کدام است؟ (سراسری تجربی ۱۴۰۰)

۱) $\frac{6-3\sqrt{3}}{16}$ ۲) $\frac{6-\sqrt{3}}{16}$ ۳) $\frac{6+\sqrt{3}}{16}$ ۴) $\frac{6+3\sqrt{3}}{16}$

$$f(x)=\cancel{16}\left(\frac{1+\cos 6x}{\cancel{2}}\right)\left(\frac{1+\cos 12x}{\cancel{2}}\right)\left(\frac{1+\cos 24x}{\cancel{2}}\right)\left(\frac{1+\cos 48x}{\cancel{2}}\right)$$



$$f(\frac{\pi}{36})=(1+\cos\frac{\pi}{6})(1+\cos\frac{\pi}{3})(1+\cos\frac{2\pi}{3})(1+\cos\frac{4\pi}{3})$$

$$=(1+\frac{\sqrt{3}}{2})(1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2})(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{2})=\frac{1}{4}(\frac{2+\sqrt{3}}{2})(\frac{3}{2})=\frac{6+3\sqrt{3}}{16}$$

تست ۷۹: اگر $\cot x-\tan x=3$ باشد، حاصل عبارت $M=\frac{2\cot 4x}{2\cot 2x+3\tan 2x}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{6}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $-\frac{1}{6}$ ۴) $-\frac{5}{6}$

پاسخ: گزینهٔ «۱» ـ می‌دانیم $\cot\bigcirc-\tan\bigcirc=2\cot 2\bigcirc$ است، پس می‌توان نوشت:

$$2\cot 2x=3 \Rightarrow \cot 2x=\frac{3}{2} \Rightarrow \tan 2x=\frac{2}{3}$$

از طرفی مطابق فرمول بالا داریم:

$$2\cot 4x=\cot 2x-\tan 2x=\frac{3}{2}-\frac{2}{3}=\frac{9-4}{6}=\frac{5}{6}$$

در نهایت با جای‌گذاری مقادیر به‌دست‌آمده در خواستهٔ مسئله، مقدار M به دست می‌آید، یعنی:

$$M=\frac{2\cot 4x}{2\cot 2x+3\tan 2x}=\frac{\frac{5}{6}}{2(\frac{3}{2})+3(\frac{2}{3})}=\frac{\frac{5}{6}}{3+2}=\frac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{1}}=\frac{1}{6}$$

تست ۸۰: اگر $\frac{1}{8}=\frac{\tan\alpha(1-\tan^2\alpha)}{(1+\tan^2\alpha)^2}$، حاصل $\sin 4\alpha$ کدام است؟

کافی است از دستورات سینوس و کسینوس برحسب تانژانت نصف کمان استفاده کنید

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۳) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۴) $\frac{3}{4}$

$$\sin 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta} \qquad \cos 2\theta=\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$$

$$\frac{\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}\cdot\frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}=\frac{1}{2}\boxed{\sin 2\alpha\cos 2\alpha}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin 4\alpha=\frac{1}{4}\sin 4\alpha=\frac{1}{8}$$

$$\sin 4\alpha=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$$

چند تا اتّحاد مهمّ و کاربردی

$$۱)\ \cos^۴ x-\sin^۴ x=\cos ۲x$$

اثبات: $(\cos^۲ x-\sin^۲ x)\underbrace{(\cos^۲ x+\sin^۲ x)}_{۱}=\cos^۲ x-\sin^۲ x=\cos ۲x$

$$۲)\ \sin^۴ x+\cos^۴ x=۱-\frac{۱}{۲}\sin^۲ ۲x=\frac{۳}{۴}+\frac{۱}{۴}\cos ۴x$$

اثبات: $\sin^۴ x+\cos^۴ x$

$$(\sin^۲ x+\cos^۲ x)^۲-۲\sin^۲ x\cos^۲ x=۱-۲\sin^۲ x\cos^۲ x=۱-۲(\sin x\cos x)^۲=۱-۲(\frac{۱}{۲}\sin ۲x)^۲$$

$$=۱-۲\times\frac{۱}{۴}\sin^۲ ۲x=۱-\frac{۱}{۲}\sin^۲ ۲x=۱-\frac{۱}{۲}(\frac{۱-\cos ۴x}{۲})=۱-\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۴}\cos ۴x=\frac{۳}{۴}+\frac{۱}{۴}\cos ۴x$$

توی اثبات این فرمول از اتحاد $a^۲+b^۲=(a+b)^۲-۲ab$ استفاده کردیم که $a=\sin^۲ x$ و $b=\cos^۲ x$ بود.

$$۳)\ \sin^۶ x+\cos^۶ x=۱-\frac{۳}{۴}\sin^۲ ۲x=\frac{۵}{۸}+\frac{۳}{۸}\cos ۴x$$

اثبات: $\sin^۶ x+\cos^۶ x$

اثبات: $\underbrace{(\sin^۲ x+\cos^۲ x)}_{۱}{}^۳-۳\sin^۲ x\cos^۲ x\underbrace{(\sin^۲ x+\cos^۲ x)}_{۱}=۱-۳\sin^۲ x\cos^۲ x=۱-۳(\sin x\cos x)^۲$

$$=۱-۳(\frac{۱}{۲}\sin ۲x)^۲=۱-\frac{۳}{۴}\sin^۲ ۲x=۱-\frac{۳}{۴}(\frac{۱-\cos ۴x}{۲})=۱-\frac{۳}{۸}+\frac{۳}{۸}\cos ۴x=\frac{۵}{۸}+\frac{۳}{۸}\cos ۴x$$

توی اثبات این فرمول از اتحاد $a^۳+b^۳=(a+b)^۳-۳ab(a+b)$ استفاده کردیم که $a=\sin^۲ x$ و $b=\cos^۲ x$ بود.

یادت باشه: فرمول‌های ۲ و ۳ در فصل مشتق کاربرد زیادی خواهند داشت.

$$۴)\ (\sin x+\cos x)^۲=۱+\sin ۲x$$
$$(\sin x-\cos x)^۲=۱-\sin ۲x$$

اثبات: $(\sin x\pm\cos x)^۲$

$$\underbrace{\sin^۲ x+\cos^۲ x}_{۱}\pm\underbrace{۲\sin x\cos x}_{\sin ۲x}=۱\pm\sin ۲x$$

یادت باشه: فرمول شماره ۴ در فصل حد، برای رفع ابهام کاربرد زیادی دارد.

تست ۸۱: حاصل $\sqrt{۱+\sin ۲x}-\sin x$ وقتی $\frac{\pi}{۳}<x<\frac{۳\pi}{۴}$ باشد، کدام است؟

۱) صفر　　۲) $-۲\sin x$　　۳) $\cos x$　　۴) $۲\sin x-\cos x$

تست ۸۲: اگر $\sin\alpha - \cos\alpha = \frac{۱}{۲}$ باشد، مقدار $\cos(\frac{۳\pi}{۲} - ۲\alpha)$ کدام است؟ (تجربی ۹۵)

۱) $-\frac{۳}{۴}$ ۲) $-\frac{۳}{۸}$ ۳) $\frac{۳}{۸}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

معادلات مثلثاتی

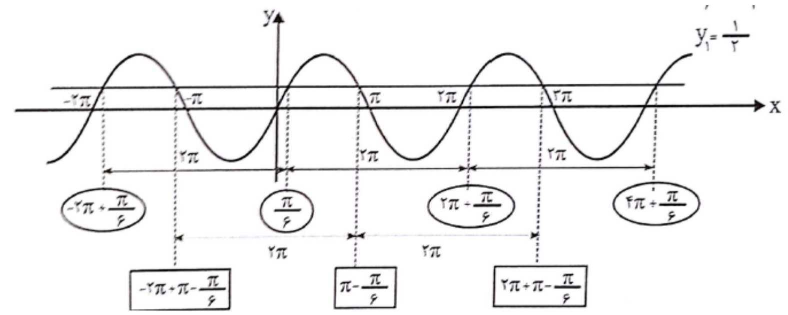
به معادلاتی که مجهولشان نسبت‌های مثلثاتی باشد، معادلات مثلثاتی می‌گوییم و هدف از حل آن‌ها مشخص کردن همه‌ی کمان‌هایی (زوایایی) است که در معادله صدق می‌کند.

چون توابع مثلثاتی متناوب هستند، اگر خط $y = k$ آن‌ها را قطع کند، برخورد در بیش از یک نقطه رخ می‌دهند و بی‌شمار جواب داریم که برای گزارش طول نقاط تلاقی به روش زیر عمل می‌کنیم:

به عنوان مثال: اگر از ما بپرسند چه xهایی در معادله‌ی $۲\sin x - ۱ = ۰$ صدق می‌کند، می‌توانیم از طریق زیر عمل کنیم:

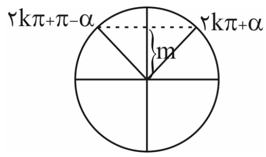
$$۲\sin x - ۱ = ۰ \Rightarrow \underbrace{\sin x}_{y_۱} = \underbrace{\frac{۱}{۲}}_{y_۲}$$

از روش رسم و تقاطع دو تابع $y_۱$ و $y_۲$ دقیقاً xهایی را پیدا می‌کنیم که در معادله‌ی فوق صدق می‌کنند.

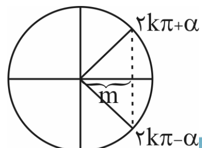


حل معادله‌ی ساده‌ی مثلثاتی

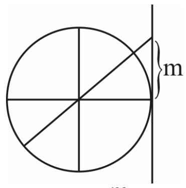
برای این که هر بار مجبور به رسم و تقاطع دو تابع نشویم، به کمک اتحادها و روابط و یا نسبت زوایای متمم، معادله را ساده می‌کنیم به طوری که به تساوی دو نسبت هم‌نام برسیم و به کمک ۴ مسئله‌ی زیر، معادله حل می‌شود.



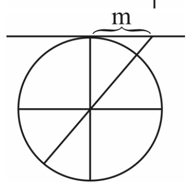
$$۱)\ \sin x = m \xrightarrow{m=\sin\alpha} \sin x = \sin\alpha \Rightarrow \begin{cases} x = ۲k\pi + \alpha \\ x = ۲k\pi + \pi - \alpha \end{cases}$$



$$۲)\ \cos x = m \xrightarrow{m=\cos\alpha} \cos x = \cos\alpha \Rightarrow x = ۲k\pi \pm \alpha$$



$$3)\ \tan x = m \xrightarrow{m=\tan\alpha} \tan x = \tan\alpha \Rightarrow x = k\pi + \alpha$$



$$4)\ \cot x = m \xrightarrow{m=\cot\alpha} \cot x = \cot\alpha \Rightarrow x = k\pi + \alpha$$

حالات مختلف معادلات مثلثاتی

۱- حالت اول: در این حالت در معادله مثلثاتی فقط یک نسبت مثلثاتی با زاویه مجهول و از درجه اول وجود دارد که با کمک ۴ مسئله‌ای که گفته شد، جواب را می‌یابیم.

مثال ۸۳: معادلات زیر را حل کنید.

$1)\ 2\sin x - \sqrt{3} = 0$

$$2\sin x = \sqrt{3} \Rightarrow \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\frac{\pi}{3} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

$2)\ 2\sin x + \sqrt{3} = 0$

$$2\sin x = -\sqrt{3} \Rightarrow \sin x = \frac{-\sqrt{3}}{2} = \sin(\frac{-\pi}{3}) \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi - \frac{\pi}{3} \\ x = 2k\pi + \pi + \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

$3)\ 2\cos x - \sqrt{3} = 0$

$$2\cos x = \sqrt{3} \Rightarrow \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{6} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$$

$4)\ 2\cos x + \sqrt{3} = 0$

$$2\cos x = -\sqrt{3} \Rightarrow \cos x = \frac{-\sqrt{3}}{2} = \cos(\frac{5\pi}{6}) \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{5\pi}{6}$$

یادت باشه: چنان‌چه کسینوس یک کمان منفی را خواستند، کمان را از ربع دوم انتخاب کنید. اما در سایر نسبت‌های مثلثاتی برای کمان منفی، به ربع چهارم با کمان قرینه رجوع می‌کنیم.

$5)\ \tan x - \sqrt{3} = 0$

$$\tan x = \sqrt{3} = \tan\frac{\pi}{3} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{3}$$

$6)\ \tan x + \sqrt{3} = 0$

$$\tan x = -\sqrt{3} = \tan(-\frac{\pi}{3}) \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{3}$$

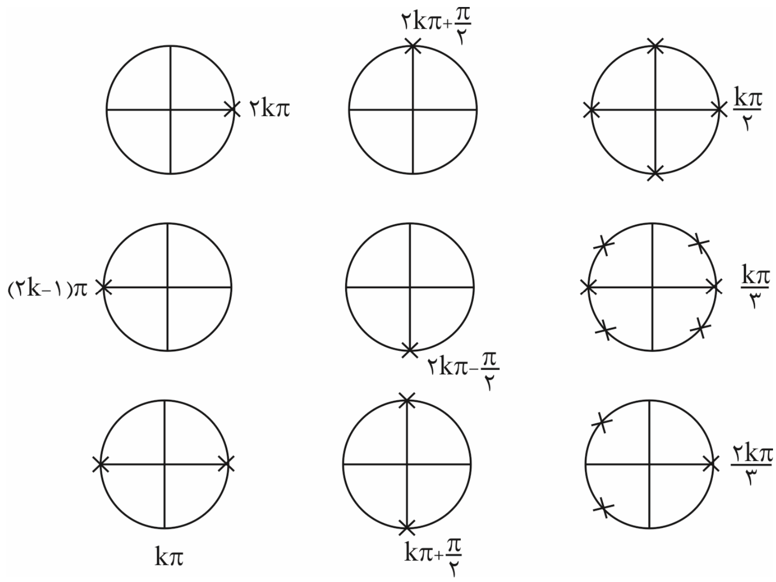
۷) $\cot x-\sqrt{3}=0$

$$\cot x=\sqrt{3}=\cot\frac{\pi}{6}\ \Rightarrow\ x=k\pi+\frac{\pi}{6}$$

۸) $\cot x+\sqrt{3}=0$

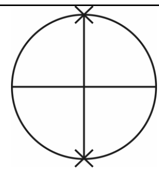
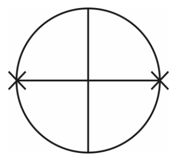
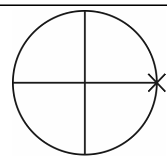
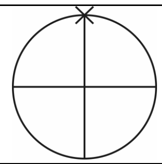
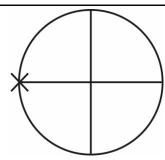
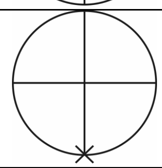
$$\cot x=-\sqrt{3}=\cot(-\frac{\pi}{6})\ \Rightarrow\ x=k\pi-\frac{\pi}{6}$$

آدرس نقاط مهم روی دایره مثلثاتی



حل معادلات خاص مثلثاتی

برخی از معادلات هستند که جواب‌های آن‌ها به فرم ساده‌تری هم قابل نمایش است. این معادلات رادر جدول زیر بررسی می‌کنیم.

آدرس روی دایره	جواب کلی	معادله	آدرس روی دایره	جواب کلی	معادله
	$x=k\pi+\frac{\pi}{2}$	$\cos x=0$		$x=k\pi$	$\sin x=0$
	$x=2k\pi$	$\cos x=1$		$x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$	$\sin x=1$
	$x=(2k+1)\pi$	$\cos x=-1$		$x=2k\pi-\frac{\pi}{2}$	$\sin x=-1$

یادت باشه: $\sin x=\pm 1$ و $\cos x=\pm 1$ ریشه مضاعف دارند.

۲- حالت دوم: در این حالت فقط و فقط دو نسبت مثلثاتی با ضریب ۱ یا ۱- و توان ۱ وجود دارند که معادله را به تساوی دو نسبت هم‌نام تبدیل می‌کنیم (اگر هم‌نام نبودند از زوایای متمم استفاده می‌کنیم) و به کمک ۴ مسئله گفته‌شده، مسئله را حل می‌کنیم.

به طور کلی کمان می‌تواند به جز x ، چیز دیگری هم باشد.

مثلاً: فرض کنید u یک عبارتِ xدار است.

$$\sin u=\sin\alpha \Rightarrow \begin{cases} u=۲k\pi+\alpha \\ u=۲k\pi+\pi-\alpha \end{cases}$$

$$\cos u=\cos\alpha \Rightarrow u=۲k\pi\pm\alpha$$

$$\tan u=\tan\alpha \Rightarrow u=k\pi+\alpha$$

$$\cot u=\cot\alpha \Rightarrow u=k\pi+\alpha$$

مثال ۸۴: معادله‌ی زیر را حل کنید.

۱) $\sin ۳x-\sin x=۰$

$$\sin ۳x=\sin x \Rightarrow \begin{cases} ۳x=۲k\pi+x \Rightarrow ۲x=۲k\pi \Rightarrow x=k\pi \\ ۳x=۲k\pi+\pi-x \Rightarrow x=\frac{k\pi}{۲}+\frac{\pi}{۴} \end{cases}$$

تست ۸۵: جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $\frac{\sin ۳x}{\cos(\frac{۳\pi}{۲}+x)}=۱$ ، به کدام صورت است؟ (خارج تجربی ۹۳)

۱) $k\pi+\frac{\pi}{۴}$ ۲) $۲k\pi\pm\frac{\pi}{۴}$ ۳) $۲k\pi\pm\frac{۳\pi}{۴}$ ۴) $\frac{k\pi}{۲}+\frac{\pi}{۴}$

مثال ۸۶: معادله زیر را حل کنید.

۲) $\sin ۳x+\sin x=۰$

$$\sin ۳x=-\sin x$$

قرار شد چپ و راست مساوی یک نسبت همنام داشته باشیم (که این‌جا داریم) و هر دو، پشتشون علامت مثبت داشته باشه. این‌جا برای این که از شرّ منفی خلاص بشیم از خاصیت $\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$ استفاده می‌کنیم یعنی به جای $-\sin x$ می‌نویسیم $\sin(-x)$ پس:

$$\sin \underbrace{۳x}_{u}=\sin(\underbrace{-x}_{\alpha}) \Rightarrow \begin{cases} ۳x=۲k\pi+(-x) \\ , \\ ۳x=۲k\pi+\pi-(-x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۴x=۲k\pi \Rightarrow \boxed{x=\frac{k\pi}{۲}} \\ ۲x=۲k\pi+\pi \Rightarrow \boxed{x=k\pi+\frac{\pi}{۲}} \end{cases}$$

تست ۸۷: مجموعهٔ جواب‌های مثلثاتی $\sin ۲x+\cos(\frac{\pi}{۲}-x)=۰$، در بازه‌ی $[۰,۲\pi]$ کدام است؟ (خارج تجربی ۹۶)

۱) $\frac{۱۴\pi}{۳}$ ۲) ۴π ۳) $\frac{۹\pi}{۲}$ ۴) ۵π

تست ۸۸: تعداد جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\cos^۲(x)-\sin^۲(x)\cos(۳x)=۱$ در فاصلهٔ $[۰,۲\pi]$ کدام است؟ (سراسری تجربی ۱۴۰۰)

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۶

تست ۸۹: مجموع جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\sin(x+\frac{\pi}{۸})+\cos(x-\frac{۳\pi}{۸})=۱$، در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ برابر کدام است؟ (خارج ریاضی ۹۵)

۱) $\frac{۳\pi}{۴}$ ۲) $\frac{۵\pi}{۴}$ ۳) $\frac{۳\pi}{۲}$ ۴) $\frac{۷\pi}{۴}$

تست ۹۰: فرض کنید A مجموعهٔ جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $(۱+\cos ۲\alpha)(۱+\cos ۴\alpha)(۱+\cos ۸\alpha)=\frac{۱}{۸}$ در بازهٔ $[۰,\pi]$ باشد، ماکزیمم عضو مجموعهٔ A کدام است؟ (سراسری ریاضی ۱۴۰۰)

۱) $\frac{۵}{۷}\pi$ ۲) $\frac{۶}{۷}\pi$ ۳) $\frac{۷}{۹}\pi$ ۴) $\frac{۸}{۹}\pi$

تست ۹۱: مجموع جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\sin^۳ x+\cos^۳ x=۱-\frac{۱}{۲}\sin ۲x$، در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ کدام است؟ *(ریاضی ۹۸)*

۱) $\frac{۵\pi}{۲}$
۲) $\frac{۷\pi}{۲}$
۳) ۲π
۴) ۳π

تست ۹۲: مجموع جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\sin^۴ x+\cos^۴ x=\frac{۱}{۲}$، در بازهٔ $[۰,۲\pi]$، کدام است؟ *(خارج ریاضی ۹۸)*

۱) $\frac{۵\pi}{۲}$
۲) ۳π
۳) $\frac{۷\pi}{۲}$
۴) ۴π

تست ۹۳: جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $۲\tan x.\cos^۲ x=۱$ به کدام صورت است؟ *(خارج تجربی ۸۶)*

۱) $k\pi-\frac{\pi}{۴}$
۲) $k\pi+\frac{\pi}{۴}$
۳) $۲k\pi-\frac{\pi}{۴}$
۴) $۲k\pi+\frac{\pi}{۴}$

مثال ۹۴: معادله زیر را حل کنید.

۳) $\cos ۳x-\cos x=۰$

$$\cos \underbrace{۳x}_{u}=\cos \underbrace{x}_{\alpha} \Rightarrow ۳x=۲k\pi \pm x \Rightarrow \begin{cases} ۳x=۲k\pi+x \Rightarrow ۲x=۲k\pi \Rightarrow x=k\pi \\ ۳x=۲k\pi-x \Rightarrow ۴x=۲k\pi \Rightarrow x=\frac{k\pi}{۲} \end{cases}$$

تست ۹۵: جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $\sin^۲ x - \cos^۲ x = \sin(\frac{۳\pi}{۲} + x)$ به کدام صورت است؟ (تجربی ۹۱)

۱) $\frac{k\pi}{۳}$ ۲) $\frac{۲k\pi}{۳}$ ۳) $۲k\pi + \frac{\pi}{۳}$ ۴) $۲k\pi \pm \frac{۲\pi}{۳}$

مثال ۹۶: معادله زیر را حل کنید. ۴) $\cos ۳x + \cos x = ۰$

$\cos ۳x = -\cos x$

الان چی‌کار کنم آقا؟ چطوری از شرّ منفی خلاص بشیم؟ آخه کسینوس که خاصیت $\cos(-\alpha) = -\cos\alpha$ رو نداره ☹

ایرادی نداره از یه خاصیت دیگه می‌توانیم واسش استفاده کنیم. کسینوسه دیگه! همیشه ساز مخالف میزنه. ببینید:

$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$

پس به جای $-\cos\alpha$ بذارید $\cos(\pi - \alpha)$. به همین راحتی ☺

$$\cos ۳x = -\cos x \Rightarrow \cos ۳x = \cos(\pi - x) \Rightarrow ۳x = ۲k\pi \pm (\pi - x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۳x = ۲k\pi + \pi - x \Rightarrow ۴x = ۲k\pi + \pi \Rightarrow \boxed{x = \frac{k\pi}{۲} + \frac{\pi}{۴}} \\ ۳x = ۲k\pi - \pi + x \Rightarrow ۲x = ۲k\pi - \pi \Rightarrow \boxed{x = k\pi - \frac{\pi}{۲}} \end{cases}$$

تست ۹۷: جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $\cos ۳x + \cos x = ۰$ با شرط $\cos x \neq ۰$ کدام است؟ (خارج تجربی ۹۳ و ۹۸)

۱) $\frac{k\pi}{۲} + \frac{\pi}{۴}$ ۲) $\frac{k\pi}{۲} + \frac{\pi}{۸}$ ۳) $k\pi - \frac{\pi}{۴}$ ۴) $k\pi + \frac{\pi}{۴}$

اگر دو طرف هم‌نسبت نباشن ولی توانشون (یک) باشد باید کاری کنیم که هم‌نسبت بشن. فقط کافیه از این روابط استفاده کنیم:

$$\sin\alpha = \cos(\frac{\pi}{۲}-\alpha)$$

$$\cos\alpha = \sin(\frac{\pi}{۲}-\alpha)$$

$$\tan\alpha = \cot(\frac{\pi}{۲}-\alpha)$$

$$\cot\alpha = \tan(\frac{\pi}{۲}-\alpha)$$

مثال ۹۸: معادله زیر را حل کنید. $۵)\ \sin ۳x - \cos ۲x = ۰$

$$\sin ۳x = \cos ۲x \Rightarrow \sin \underbrace{۳x}_{u} = \sin(\underbrace{\frac{\pi}{۲}-۲x}_{\alpha}) \Rightarrow \begin{cases} ۳x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲} - ۲x \Rightarrow ۵x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲} \Rightarrow \boxed{x = \frac{۲k\pi}{۵} + \frac{\pi}{۱۰}} \\ ۳x = ۲k\pi + \pi - (\frac{\pi}{۲} - x) \Rightarrow \boxed{x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲}} \end{cases}$$

تست ۹۹: جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\sin(۲x-\frac{\pi}{۴}) = \cos(x+\frac{\pi}{۴})$ با شرط $x \neq k\pi$ که در آن k یک عدد صحیح است، کدام است؟

(تجربی ۹۹)

۱) $\frac{k\pi}{۳}$ ۲) $\frac{۲k\pi}{۳}$ ۳) $\frac{۲k\pi}{۳} - \frac{\pi}{۶}$ ۴) $\frac{۲k\pi}{۳} + \frac{\pi}{۶}$

مثال ۱۰۰: معادله زیر را حل کنید. $۶)\ \sin ۳x + \cos x = ۰$

این‌طور موقع‌ها که یه دونه از این‌ها منفی داره کاری کن منفی بیاد پشت سینوس. اینطوری راحت‌تر از شرّ منفی خلاص می‌شی. ببین:

$$\sin ۳x = -\cos x$$

راه طولانی: چون اول باید منفیِ پشت کسینوس رو از بین ببری بعدش کسینوس رو تبدیل به سینوس کنی. $\Rightarrow$

راه خوبتر: $\cos x = -\sin ۳x = \sin(-۳x)$

$$\cos x = \cos(\frac{\pi}{۲} - (-۳x)) \Rightarrow \cos x = \cos(\frac{\pi}{۲} + ۳x) \Rightarrow x = ۲k\pi \pm (\frac{\pi}{۲} + ۳x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲} + ۳x \Rightarrow -۲x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲} \Rightarrow x = -k\pi - \frac{\pi}{۴} \xrightarrow{k\pi \text{ فرقی با } -k\pi \text{ نداره}} \boxed{x = k\pi - \frac{\pi}{۴}} \\ x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۲} - ۳x \Rightarrow ۴x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۲} \Rightarrow \boxed{x = \frac{k\pi}{۲} - \frac{\pi}{۸}} \end{cases}$$

تست ۱۰۱: جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $\mathbf{2\cos^2 x + 2\sin x\cos x = 1}$، به کدام صورت است؟ (تجربی ۹۴)

۱) $\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{8}$ ۲) $\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{8}$ ۳) $k\pi-\frac{\pi}{8}$ ۴) $k\pi+\frac{\pi}{8}$

معادلات تانژانتی

مثال ۱۰۲: معادله زیر را حل کنید و تعداد جواب‌ها را در فاصلهٔ $[0,2\pi]$ مشخص کنید.

۷) $\tan 3x - \tan x = 0$

$$\tan \underbrace{3x}_{u} = \tan \underbrace{x}_{\alpha} \Rightarrow 3x = k\pi + x \Rightarrow 2x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2}$$

k	۰	۱	۲	۳	۴
x	۰	$\boxed{\frac{\pi}{2}}$	π	$\boxed{\frac{3\pi}{2}}$	2π
		غ.ق.ق		غ.ق.ق	

۸) $\tan 3x + \tan x = 0 \Rightarrow \tan 3x = -\tan x$

واسه تانژانت هم مثل سینوس می‌تونی از خاصیت $\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$ استفاده کنی:

$$\tan \underbrace{3x}_{u} = \tan(\underbrace{-x}_{\alpha}) \Rightarrow 3x = k\pi + (-x) \Rightarrow 4x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{4}$$

k	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸
x	۰	$\frac{\pi}{4}$	$\boxed{\frac{\pi}{2}}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\boxed{\frac{3\pi}{2}}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
			غ.ق.ق				غ.ق.ق		

کتانژانت هم دقیقاً مثل تانژانتِ.

تست ۱۰۳: جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $\mathbf{\tan x\tan 3x = 1}$، کدام است؟ (تجربی ۹۷ و ریاضی ۹۹)

۱) $\frac{k\pi}{4}$ ۲) $\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{8}$ ۳) $\frac{k\pi}{2}+\frac{3\pi}{8}$ ۴) $\frac{k\pi}{4}+\frac{\pi}{8}$

مثال ۱۰۴: معادلات زیر را حل کنید.

$$1)\ \sin x+\sqrt{3}\cos x=0$$

$$\xrightarrow{\div \cos x} \tan x+\sqrt{3}=0 \Rightarrow \tan x=-\sqrt{3}=\tan(-\frac{\pi}{3}) \Rightarrow x=k\pi-\frac{\pi}{3}$$

اگر سینوس و کسینوس توان دو داشتند، می‌تونیم از روش‌های حل معادله درجه ۲ استفاده کنیم.

تست ۱۰۵: از معادلهٔ $2\sin^2 2x-\sin 2x-1=0$ برای x در فاصلهٔ صفر تا 2π چند جواب به‌دست می‌آید؟

۱) ۶ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

$$\begin{cases} (1)\sin^2 u=\sin^2\alpha \\ (2)\cos^2 u=\cos^2\alpha \\ (3)\tan^2 u=\tan^2\alpha \\ (4)\cot^2 u=\cot^2\alpha \end{cases} \Rightarrow \boxed{u=k\pi\pm\alpha}$$

تست ۱۰۶: جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $\cos 2x+2\cos^2 x=0$ کدام است؟ (تجربی ۹۶)

۱) $2k\pi\pm\frac{\pi}{3}$ ۲) $2k\pi\pm\frac{2\pi}{3}$ ۳) $k\pi\pm\frac{\pi}{3}$ ۴) $k\pi\pm\frac{\pi}{6}$

یادت باشه: حواست به رادیکال فرجه زوج باشه.

تست ۱۰۷: تمام جواب‌های معادله‌ی $\sqrt{\sin x} = \sqrt{\cos x}$ کدام است؟

۱) $x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۴}$ ۲) $x = k\pi + \frac{\pi}{۴}$ ۳) $x = ۲k\pi$ ۴) $x = \frac{k\pi}{۲} + \frac{\pi}{۴}$

تست ۱۰۸: جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $\frac{\sin ۳x}{\sin x} = ۲\cos^۲ x$ کدام است؟ *(سراسری ریاضی ۹۳)*

۱) $\frac{k\pi}{۲}$ ۲) $\frac{k\pi}{۲} + \frac{\pi}{۴}$ ۳) $k\pi - \frac{\pi}{۴}$ ۴) $k\pi + \frac{\pi}{۴}$

پاسخ: گزینه‌ی «۲»

$$\frac{۳\sin x - ۴\sin^۳ x}{\sin x} = ۲\underbrace{\cos^۲ x}$$

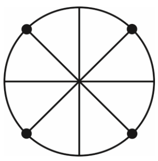
حالا تفکیک:

$$۳ - ۴\sin^۲ x = ۲(۱ - \sin^۲ x)$$

$$۳ - ۴\sin^۲ x = ۲ - ۲\sin^۲ x \Rightarrow -۲\sin^۲ x = -۱ \Rightarrow \sin^۲ x = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \sin^۲ x = (\frac{\sqrt{۲}}{۲})^۲$$

$$\Rightarrow \sin^۲ x = (\sin\frac{\pi}{۴})^۲ \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{۴}$$

طراح جفتش رو توی گزینه‌ها گذاشته، ولی از روی دایره تصمیم می‌گیریم.

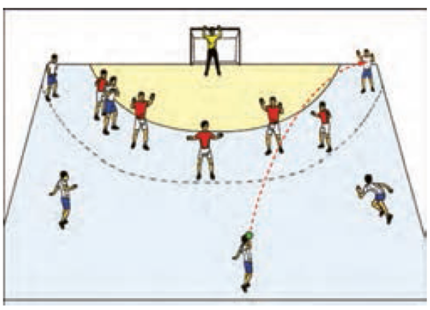


$$\boxed{x = \frac{k\pi}{۲} + \frac{\pi}{۴}}$$

گزینه‌ی «۲» درسته. ضمناً چون این جواب‌ها مخرج کسر اصلی رو صفر نمی‌کنن پس اوکیه!

مثال ۱۰۹: یک بازیکن هندبال توپ را با سرعت $۱۶\ m/s$ برای هم‌تیمی خود که در ۱۲/۸ متری او قرار دارد پرتاب می‌کند. اگر رابطه بین سرعت توپ v (برحسب متر بر ثانیه)، مسافت طی‌شده افقی d (برحسب متر) و زاویه‌ی پرتاب θ به صورت زیر باشد، آن‌گاه زاویه‌ی پرتاب توپ چه‌قدر بوده است؟

$$d = \frac{v^۲ \sin ۲\theta}{۱۰}$$



از رابطه‌ی داده‌شده به دست می‌آید:

$$۱۲/۸=\frac{(۱۶)^۲\sin ۲\theta}{۱۰}\Rightarrow \sin ۲\theta=\frac{۱۲/۸\times ۱۰}{۲۵۶}\Rightarrow \sin ۲\theta=\frac{۱}{۲}\Rightarrow \begin{cases} ۲\theta=۲k\pi+\frac{\pi}{۶} & k\in\mathbb{Z}\\ ۲\theta=(۲k+۱)\pi-\frac{\pi}{۶} & k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

با توجه به شکل، جواب $\theta=\frac{\pi}{۱۲},\frac{۵\pi}{۱۲}$ قابل قبول می‌باشد.

مثال ۱۱۰: مثلثی با مساحت ۳ سانتی‌متر مربع مفروض است. اگر اندازه‌ی دو ضلع آن به ترتیب ۲ و ۶ سانتی‌متر باشند، آن‌گاه چند مثلث بـا این خاصیت‌ها می‌توان ساخت؟

یادت باشه: حواست به ریشه‌ی مخرج باشه.

مثال ۱۱۱: معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$\frac{۱+\sin x}{۱+\cos ۲x}=\frac{۱}{۲}$$

دوره تناوب

f متناوب است اگر با افزودن یک مقدار ناصفر به x عرض (y) تابع عوض نشود و دو شرط زیر داشته باشد:

$۱)\ \forall x\in D_f \Rightarrow x+T\in D_f$ $\qquad$ $۲)\ f(x+T)=f(x) \quad T\neq ۰$

مثلاً $\sin\frac{\pi}{۶}$ با $\sin(۲\pi+\frac{\pi}{۶})$ برابر و هر دو $\frac{۱}{۲}$ هستند. در حالی که به x، $۲\pi=۶/۲۸...$ افزوده‌ایم.

هر مضربی از دوره‌ی تناوب، خود دوره‌ی تناوب است که کوچک‌ترین مقدار مثبت دوره تناوب را، دوره تناوب اصلی می‌گوییم.

تذکر: تابع ثابت، متناوب است و دوره تناوبش هر عدد حقیقی است ولی چون کوچک‌ترین عدد حقیقی وجود ندارد، کوچک‌ترین دوره تناوب ندارد.

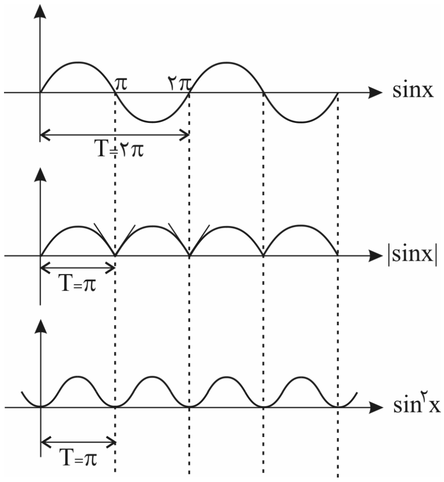
۱) دوره تناوب $f(x)$ اگر T باشد، آن‌گاه دوره‌ی تناوب $af(x+b)+k$ نیز همان T هست.

۲) تابع متناوب، یک به یک و معکوس‌پذیر نیست.

۳) دوره تناوب $\sin^{۲k+۱}ax$ و $\cos^{۲k+۱}ax$ برابر است با: $T=\frac{۲\pi}{|a|}$

دوره تناوب $\tan ax$ و $\cot ax$ به هر توان (چه زوج، چه فرد) و $|\tan ax|$ و $|\cot ax|$ به هر توان $T=\frac{\pi}{|a|}$ است.

$$\begin{cases} \sin^{۲k} ax \\ \cos^{۲k} ax \\ |\sin ax| \ \text{(توان چه زوج و چه فرد باشد)} \\ |\cos ax| \ \text{(توان چه زوج و چه فرد باشد)} \end{cases}$$



تست ۱۱۲: اگر دورهٔ تناوب تابع $f(x)=۲\cos(mx+\frac{m}{۲})$ برابر $\frac{۴}{۳}$ باشد، مقدار $f(۰)$ کدام است؟ $(m>۰)$

۱) $-\sqrt{۳}$　　۲) $\sqrt{۳}$　　۳) $\sqrt{۲}$　　۴) $-\sqrt{۲}$

تست ۱۱۳: دورهٔ تناوب تابع $f(x)=\frac{\cos ۲x \cos ۴x}{\tan x+\cot x}$ کدام است؟

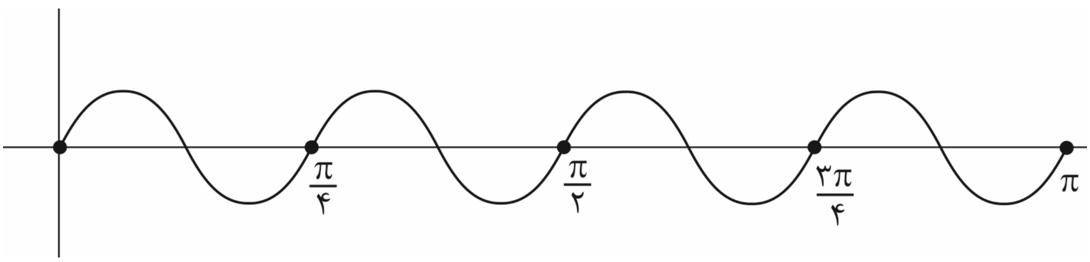
۱) π　　۲) $\frac{\pi}{۲}$　　۳) $\frac{\pi}{۴}$　　۴) $\frac{\pi}{۸}$

پاسخ:

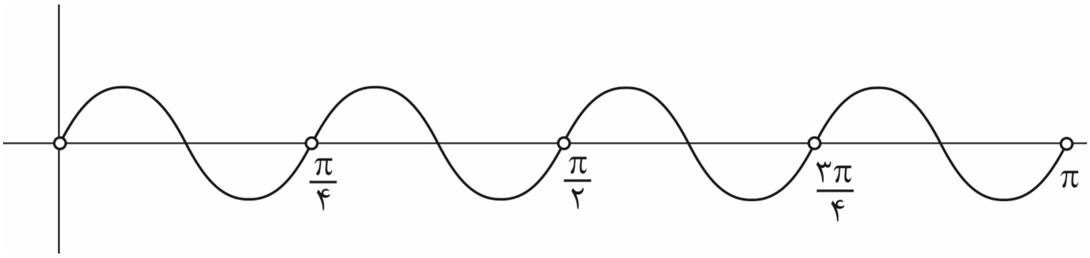
$$f(x)=\frac{\cos ۲x \cos ۴x}{\frac{۲}{\sin ۲x}}=\frac{\sin ۲x \cos ۲x \cos ۴x}{۲}=\frac{\frac{۱}{۲}\sin ۴x \cos ۴x}{۲}=\frac{\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\sin ۸x}{۲}=\frac{۱}{۸}\sin ۸x$$

در حالت معمول $T=\frac{۲\pi}{۸}=\frac{\pi}{۴}$

بنابراین به این شکل می‌رسیم:



ولی باید توجه کنید که به علت حضور $\tan x$ و $\cot x$ در مخرج کسر $x \neq \frac{k\pi}{۲}$ می‌باشد. پس باید این نقاط توخالی باشند:



اکنون از شکل مشخص است که $T = \frac{\pi}{۲}$ است نه $\frac{\pi}{۴}$. جالب این است که در خود آزمون، این سوال به اشتباه پاسخ داده شده است. گزینـهٔ (۲) صحیح است.

تست ۱۱۴: دورهٔ تناوب $f(x) = \frac{\sin x}{\sin x}$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{۲}$　　۲) π　　۳) $\frac{۳\pi}{۲}$　　۴) ۲π

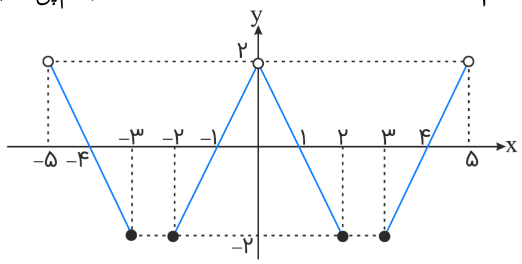
تست ۱۱۵: اگر دورهٔ تناوب تابع $y = ۳\cos ax$ برابر ۲ باشد، اولین نقطه **min** این تابع با طول مثبت کدام است؟

۱) ۱　　۲) $\frac{۱}{۲}$　　۳) $\frac{۳}{۲}$　　۴) ۲

تست ۱۱۶: تابع $y = -\frac{۱}{۲}\sin(۳\pi x)$ در بازهٔ $[-\frac{۱}{۲}, ۱]$ چند بار بیشترین مقدار را دارد؟ (قلم‌چی ۹۸)

۱) ۱　　۲) ۲　　۳) ۳　　۴) ۴

تست ۱۱۷: قسمتی از نمودار تابع متناوب $y = f(x)$ به شکل زیر است. $f(۱۲۸/۱)$ کدام است؟ (قلم‌چی ۹۸)



۱) $۱/۸$

۲) $-۱/۸$

۳) $-۰/۲$

۴) تعریف‌نشده

تست ۱۱۸: دورهٔ تناوب تابع با ضابطهٔ $f(x) = \tan(\pi x) - \cot(\pi x)$ کدام است؟ (خارج ریاضی ۹۸)

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۱ ۳) $-\frac{۱}{۲}$ ۴) -۱

تست ۱۱۹: دورهٔ تناوب تابع $y = \sin x\sqrt{۱+\cos ۲x}$ کدام است؟ (قلم‌چی ریاضی ۹۹)

۱) π ۲) $\frac{\pi}{۲}$ ۳) $\frac{۳\pi}{۲}$ ۴) ۲π

پاسخ:

$$f(x) = \sin x\sqrt{۲\cos^۲ x} = \sqrt{۲}\sin x\,|\cos x|$$

گزینهٔ (۱): $f(x+\pi) = -\sqrt{۲}\sin x\,|\cos x| \neq f(x)$

گزینهٔ (۲): $f(x+\frac{\pi}{۲}) = \sqrt{۲}\cos x\,|\sin x| \neq f(x)$

گزینهٔ (۳): $f(x+\frac{۳\pi}{۲}) = -\sqrt{۲}\cos x\,|\sin x| \neq f(x)$

گزینهٔ (۴): $f(x+۲\pi) = \sqrt{۲}\sin x\,|\cos x| = f(x)$

توابع مثلثاتی

$\boxed{y=\sin x}$

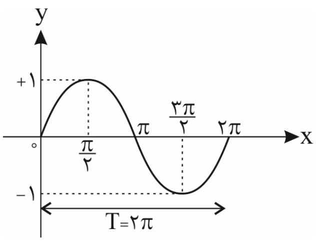
۱) دامنه‌ی این تابع $\mathbb{R}$ است. ($\sin x$ به ازای هر $x\in\mathbb{R}$ جواب دارد.)

۲) برد این تابع $[-۱,۱]$ است. (چون $-۱\le \sin x\le ۱$)

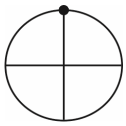
۳) از آن‌جایی که کمان $(\underbrace{۲k\pi}_{\text{مضارب زوج } \pi}+\alpha)$ از لحاظ موقعیت در دایره‌ی مثلثاتی با کمان α تفاوتی ندارد، رفتار تابع $y=\sin x$ را در $[۰,۲\pi]$ یعنی یک دور از دایره‌ی مثلثاتی بررسی و نمودار آن را رسم کرده، سپس ۲π تا ۲π تا تکرارش می‌کنیم.

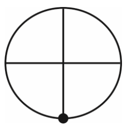
نمودار $y=\sin x$ در $[۰,۲\pi]$ به کمک جدول زیر به صورتی که مشاهده می‌شود رسم می‌گردد:

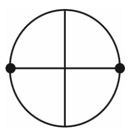
x	۰	$\frac{\pi}{۲}$	π	$\frac{۳\pi}{۲}$	۲π
y	۰	۱	۰	-۱	۰



(دوره‌ی تناوب اصلی این تابع $T=۲\pi$ می‌باشد.)

۴) ماکزیمم (بیشینه) مقدار تابع $y=\sin x$ برابر ۱ است که در  یعنی کمان $x=۲k\pi+\frac{\pi}{۲},k\in\mathbb{Z}$ (مثل $\frac{\pi}{۲}$، $\frac{۵\pi}{۲}$، $\frac{۹\pi}{۲}$ یا $\frac{-۳\pi}{۲}$، $\frac{-۷\pi}{۲}$ و ...) رخ می‌دهد.

۵) مینیمم (کمینه) مقدار تابع $y=\sin x$ برابر -۱ است که در  یعنی کمان $x=۲k\pi-\frac{\pi}{۲},k\in\mathbb{Z}$ (مثل $\frac{۳\pi}{۲}$، $\frac{۷\pi}{۲}$ یا $\frac{-\pi}{۲}$، $\frac{-۵\pi}{۲}$ و ...) رخ می‌دهد.

۶) تابع $y=\sin x$ در  یعنی کمان $x=k\pi,k\in\mathbb{Z}$ (مثل ۰، $\pm\pi$، $\pm۲\pi$ و ...) با محور طول‌ها برخورد می‌کند، یعنی مقدار آن صفر می‌شود.

در حالت کلی، در تابع $y=a\sin(bx+c)+d$:

۱) مقدار ماکزیمم تابع برابر $|a|+d$ و مقدار مینیمم آن $-|a|+d$ می‌باشد.

۲) برای یافتن نقطه‌ی برخورد نمودار با محور yها، در ضابطه‌ی تابع $x=۰$ قرار می‌دهیم و y را به دست می‌آوریم. برای یافتن نقاط برخورد نمودار با محور xها نیز در ضابطه‌ی تابع $y=۰$ قرار می‌دهیم و معادله‌ی مثلثاتی حاصل را حل می‌کنیم.

۳) دوره‌ی تناوب برابر $T=\frac{۲\pi}{|b|}$ است.

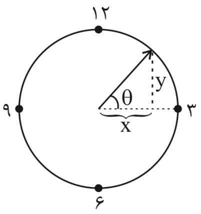
تست ۱۲۰: اگر بیشترین مقدار تابع $y=۲\sin ۵x-۳c$ برابر (-۷) باشد، c کدام است؟

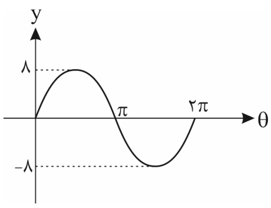
۱) ۳ ۲) -۲ ۳) -۵ ۴) ۱

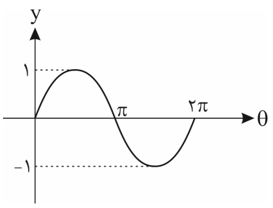
پاسخ: گزینه‌ی «۱»

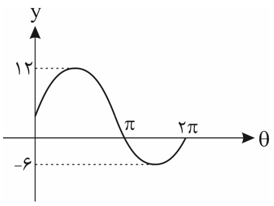
$y_{max}=۲-۳c=-۷ \Rightarrow -۳c=-۹ \Rightarrow c=۳$

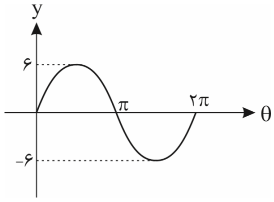
تست ۱۲۱: طول عقربه‌ی دقیقه‌شمار یک ساعت ۸ سانتی‌متر است و این عقربه با جهت مثبت محور افقی زاویه‌ی θ می‌سازد. با توجه به شکل زیر، نمودار تابع y برحسب θ کدام است؟ (θ برحسب رادیان است.)



۱)


۲)


۳)


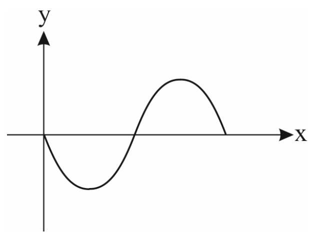
۴)


پاسخ: گزینه‌ی «۱» ـ طبق تعریف نسبت مثلثاتی سینوس در مثلث قائم‌الزاویه‌ی موجود داریم:

$$\sin\theta=\frac{y}{r}\Rightarrow \sin\theta=\frac{y}{۸}\Rightarrow y=۸\sin\theta\Rightarrow\begin{cases}T=۲\pi\\ y_{max}=۸\\ y_{min}=-۸\end{cases}$$

مشخصه که بیشترین مقدار (max) تابع $y=۸\sin\theta$ برابر ۸ و کم‌ترین مقدار این تابع ۸- و دوره‌ی تناوبش هم $T=۲\pi$ هست. پس گزینه‌ی «۱» درسته.

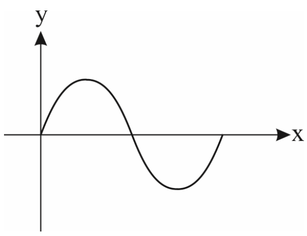
حالت ۲



$y=a\sin bx$

$a\times b<۰$

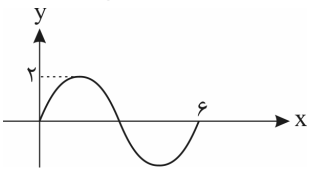
حالت ۱



$y=a\sin bx$

$a\times b>۰$

تست ۱۲۲: شکل روبه‌رو قسمتی از نمودار تابع $y=a\sin(b\pi x)$ است. $a+b$ کدام است؟ (خارج تجربی ۹۳)



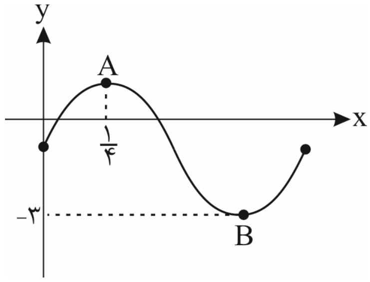
۱) $\frac{۴}{۳}$

۲) $\frac{۵}{۳}$

۳) $\frac{۷}{۳}$

۴) $\frac{۸}{۳}$

تست ۱۲۳: قسمتی از نمودار تابع $f(x) = ۲\sin b\pi x + c$ به صورت زیر رسم شده است. طول پاره‌خط AB کدام است؟



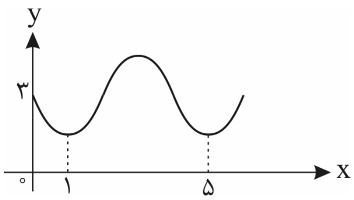
۱) $\frac{\sqrt{۱۷}}{۲}$

۲) $\frac{\sqrt{۶۵}}{۲}$

۳) $\frac{\sqrt{۱۷}}{۴}$

۴) $\frac{\sqrt{۶۵}}{۴}$

تست ۱۲۴: شکل روبه‌رو قسمتی از نمودار تابع $y = a + \sin(b\pi x)$ است. مقدار y در نقطه‌ی $x = \frac{۲۵}{۳}$، کدام است؟ (تجربی ۹۳)



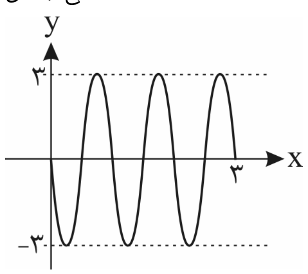
۱) ۲

۲) ۲/۵

۳) ۳

۴) ۳/۵

تست ۱۲۵: شکل روبه‌رو، قسمتی از نمودار تابع $y = a\sin(b\pi x)$ است. $a.b$ کدام است؟ (خارج ریاضی ۹۲)



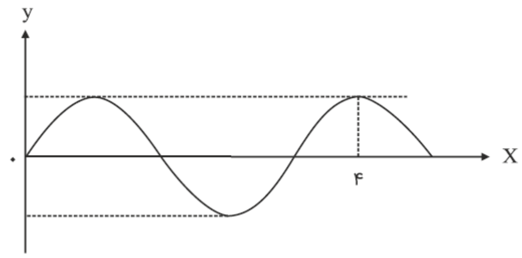
۱) -۶

۲) -۳

۳) ۴/۵

۴) ۶

تست ۱۲۶: قسمتی از نمودار تابع $y = a\cos((\frac{۳}{۲} + bx)\pi)$ به صورت زیر است. آن‌گاه کدام گزینه صحیح است؟ (قلم‌چی ۹۴)



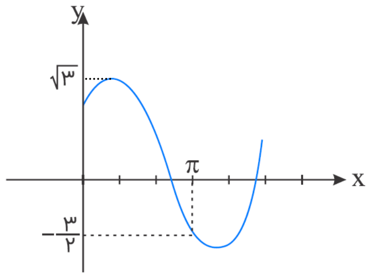
۱) $a < ۰ , b = \frac{۵}{۸}$

۲) $a < ۰ , b = -\frac{۵}{۸}$

۳) $a > ۰ , b = \frac{۵}{۱۶}$

۴) $a > ۰ , b = -\frac{۵}{۱۶}$

تست ۱۲۷: شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع $y = a + b\sin(x + \frac{\pi}{۳})$ است. b کدام است؟ (تجربی ۹۸)



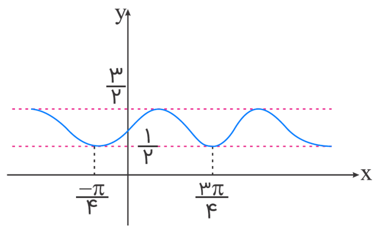
۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

۲) $\frac{۳}{۲}$

۳) $\sqrt{۳}$

۴) ۲

تست ۱۲۸: شکل زیر، نمودار تابع $y = ۱ + a\sin bx\cos bx$ است. $a + b$ کدام است؟ (ریاضی ۹۸)



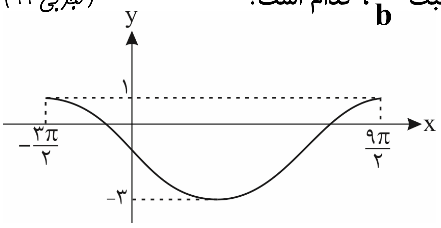
۱) ۱

۲) $\frac{۳}{۲}$

۳) ۲

۴) ۳

تست ۱۲۹: شکل زیر، نمودار تابع $y = a\sin(bx) + c$ را در یک بازهٔ تناوب، نشان می‌دهد. نسبت $\frac{a}{b}$، کدام است؟ (تجربی ۹۹)



۱) -۲

۲) -۳

۳) -۴

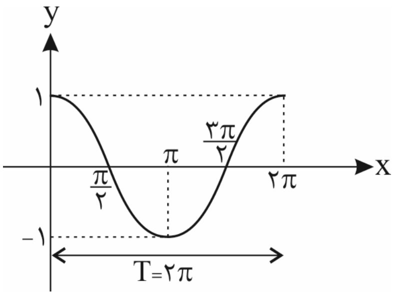
۴) -۶

$\boxed{y = \cos x}$

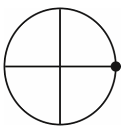
۱) دامنه‌ی این تابع $\mathbb{R}$ است ($\cos x$ به ازای هر $x \in \mathbb{R}$ جواب دارد).

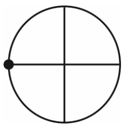
۲) برد این تابع $[-۱,۱]$ است (چون $-۱ \le \cos x \le ۱$).

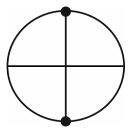
۳) نمودار $y = \cos x$ را نیز مانند $y = \sin x$ در $[۰,۲\pi]$ به کمک جدول زیر رسم کرده، سپس با توجه به همان خاصیت کمان $(\underbrace{۲k\pi}_{\text{مضارب زوج } \pi} + \alpha)$ و این که در واقع دوره‌ی تناوب اصلی $y = \cos x$ هم $T = ۲\pi$ است، ۲π تا ۲π تا تکرارش می‌کنیم.



x	۰	$\frac{\pi}{۲}$	π	$\frac{۳\pi}{۲}$	۲π
y	۱	۰	-۱	۰	۱

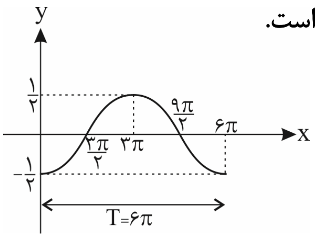
۴) ماکزیمم (بیشینه) مقدار تابع $y = \cos x$ برابر ۱ است که در  یعنی کمان $x = ۲k\pi, k \in \mathbb{Z}$ (مثل ۰ ، $\pm ۲\pi$، $\pm ۴\pi$ و ...) رخ می‌دهد.

۵) مینیمم (کمینه) مقدار تابع $y = \cos x$ برابر -۱ است که در  یعنی کمان $x = (۲k+۱)\pi, k \in \mathbb{Z}$ (مثل $\pm\pi$، $\pm ۳\pi$ و ...) رخ می‌دهد.

۶) تابع $y = \cos x$ در  یعنی کمان $x = k\pi + \frac{\pi}{۲}, k \in \mathbb{Z}$ (مثل $\pm\frac{\pi}{۲}$، $\pm\frac{۳\pi}{۲}$ و ...) با محور طول‌ها برخورد می‌کند، یعنی مقدار آن صفر می‌شود.

قوانین انتقال (مشابه آن‌چه در قسمت الف) گفته شد) در مورد $y=\cos x$ نیز برقرار است.

تابع $y=a\cos bx$ دارای دوره‌ی تناوب اصلی $T=\frac{۲\pi}{|b|}$، مقدار ماکزیمم $|a|$ و مقدار مینیمم $-|a|$ می‌باشد. مثلاً در $y=-\frac{۱}{۲}\cos(-\frac{x}{۳})$ دوره‌ی تناوب اصلی $\frac{۲\pi}{|-\frac{۱}{۳}|}=۶\pi$، ماکزیمم تابع برابر $\frac{۱}{۲}$ و مینیمم تابع برابر $-\frac{۱}{۲}$ است.



(از آن‌جایی که $\cos(-\alpha)=\cos\alpha$، $y=-\frac{۱}{۲}\cos(-\frac{x}{۳})$ همان $y=-\frac{۱}{۲}\cos\frac{x}{۳}$ می‌باشد.)

تذکر: در واقع در رسم $y=a\cos bx$، نمودار $y=\cos x$ با ضریب $\frac{۱}{|b|}$ دچار انقباض یا انبساط طولی (افقی) و با ضریب a دچار انبساط یا انقباض عرضی (عمودی) می‌شود. (علامت b تأثیری روی رسم نمودار تابع کسینوس ندارد، چون کسینوس منفی‌خور است.)

حالت کلی، در تابع $y=a\cos(bx+c)+d$

۱) مقدار ماکزیمم تابع برابر $|a|+d$ و مقدار مینیمم آن $-|a|+d$ است.

۲) برای یافتن نقطه‌ی برخورد نمودار با محور yها، در ضابطه‌ی تابع $x=۰$ قرار می‌دهیم و y را به دست می‌آوریم. برای یافتن نقاط برخورد نمودار با محور xها نیز در ضابطه‌ی تابع $y=۰$ را قرار می‌دهیم و معادله‌ی مثلثاتی حاصل را حل می‌کنیم.

۳) دوره‌ی تناوب برابر $T=\frac{۲\pi}{|b|}$ است.

تست ۱۳۰: اگر کم‌ترین مقدار تابع $h(x)=-a\cos\frac{\pi x}{۳}+۱$ برابر $\frac{۲}{۳}$ باشد، مقدار a کدام می‌تواند باشد؟

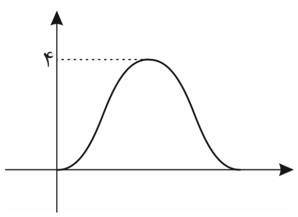
۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $-\frac{۳}{۲}$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $-\frac{۱}{۳}$

پاسخ: گزینه‌ی «۴»

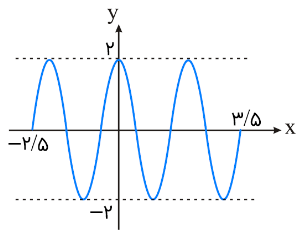
$$-|-a|+۱=\frac{۲}{۳}\Rightarrow -|a|=\frac{۲}{۳}-۱\Rightarrow -|a|=-\frac{۱}{۳}\Rightarrow |a|=\frac{۱}{۳}\Rightarrow a=\pm\frac{۱}{۳}$$ (در میان گزینه‌ها $(-\frac{۱}{۳})$ وجود دارد.)

تست ۱۳۱: شکل زیر نمودار تابع $y=a+b\cos(\frac{\pi}{۲}x)$، در بازه‌ی $(۰,۴)$ است. b کدام است؟ *(ریاضی ۹۷)*

۱) ۲-
۲) ۱-
۳) ۱
۴) ۲



تست ۱۳۲: شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع $y = a\sin\pi(\frac{۱}{۲} + bx)$ است. $a.b$ کدام است؟ (ریاضی ۹۲، قلم‌چی ۹۸)



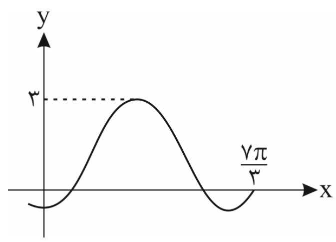
۱) ۲

۲) ۲/۵

۳) ۳

۴) ۳/۵

تست ۱۳۳: شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع با ضابطهٔ $y = a + b\sin(\frac{\pi}{۲} + x)$ است. مقدار b کدام است؟ (تجربی ۹۹)



۱) ۲

۲) ۱

۳) −۱

۴) −۲

تست ۱۳۴: در تابع $f(x) = -۴a\sin^{۲} ۲x + \cos ۴x + ۲a + ۳$ حدود a کدام باشد تا نمودار آن همواره زیر خط $y = ۷$ قرار گیرد؟ (قلم‌چی ریاضی ۹۹)

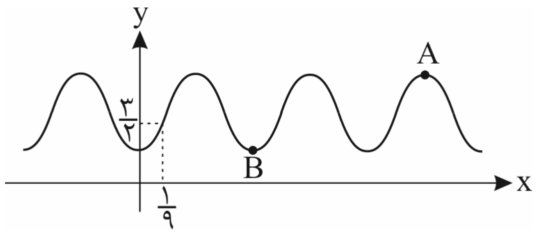
۱) $-\frac{۵}{۲} < a < \frac{۳}{۲}$

۲) $-\frac{۳}{۲} < a < \frac{۵}{۲}$

۳) $-\frac{۵}{۲} < a < -\frac{۳}{۲}$

۴) $\frac{۳}{۲} < a < \frac{۵}{۲}$

تست ۱۳۵: اگر نمودار تابع $f(x)=1+a\sin^{2}(\frac{3\pi}{2}x)$ به صورت زیر باشد، شیب خط گذرنده از نقاط **A** و **B** کدام است؟



۱) ۱
۲) $\frac{3}{2}$
۳) ۲
۴) $\frac{5}{2}$

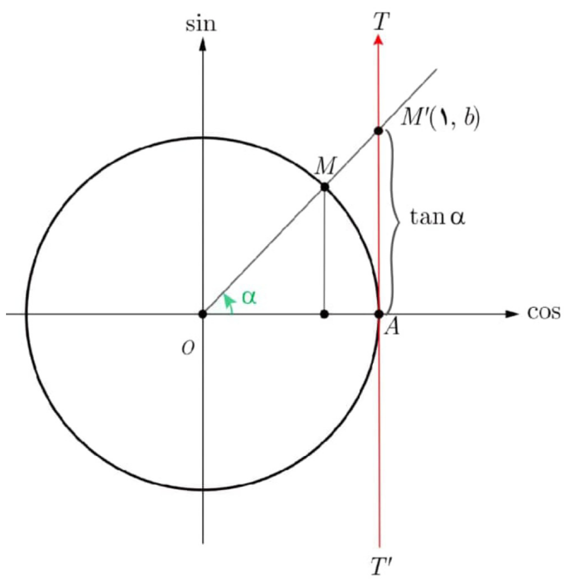
تانژانت

در دایرهٔ مثلثاتی روبه‌رو خط TAT' در نقطهٔ **A** بر محور کسینوس‌ها عمود است.

الف) زاویهٔ α را در ربع اول دایره مثلثاتی در نظر می‌گیریم و پاره‌خط **OM** را امتداد می‌دهیم تا این خط را در نقطهٔ M' قطع کند. نشان دهید:

$$\tan\alpha = AM' = b$$

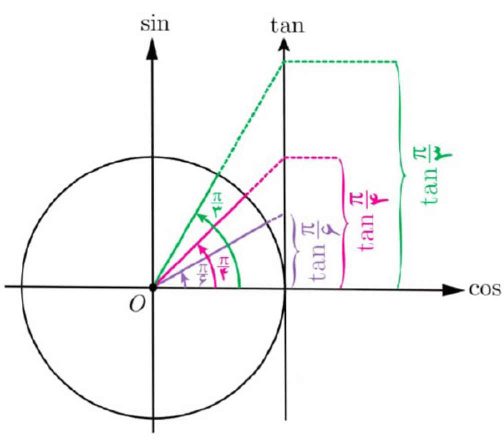
می‌توان دید که تانژانت هر زاویهٔ دلخواه مانند α، به همین ترتیب از برخورد امتداد ضلع دوم آن زاویه با خط TAT' تعیین می‌شود. بنابراین خط TAT' را محور تانژانت می‌نامیم. نقطهٔ **A** مبدأ این محور است و جهت مثبت محور، از پایین به سمت بالا است.



ب) چرا تانژانت زوایایی که انتهای کمان آن‌ها در ربع اول و سوم قرار دارد مقداری مثبت و تانژانت زوایایی که انتهای کمان آن‌ها در ربع دوم و چهارم قرار دارد، مقداری منفی است؟

تغییرات تانژانت

با تغییر زاویهٔ α مقادیر تانژانت آن نیز تغییر می‌کند. ابتدا این تغییرات را در ربع اول دایرهٔ مثلثاتی بررسی می‌کنیم. اگر $\alpha = 0$، مقدار $\tan\alpha$ نیز برابر صفر است و با افزایش اندازهٔ α، مقدار $\tan\alpha$ نیز افزایش می‌یابد.

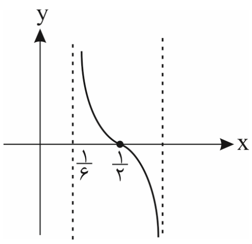


تابع تانژانت

همان‌طور که می‌بینیم به ازای هر زاویهٔ دلخواه در دایرهٔ مثلثاتی (به‌جز $x = k\pi + \frac{\pi}{۲}, k \in \mathbb{Z}$)، عددی حقیقی به عنوان $\tan\alpha$ داریم و تابعی با ضابطهٔ $y = \tan\alpha$ مشخص می‌کند. دامنهٔ این تابع مجموعهٔ $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi + \frac{\pi}{۲}, k \in \mathbb{Z}\}$ است و برد آن مجموعه اعداد حقیقی است. به سادگی می‌توان دید تابع $y = \tan\alpha$، تابعی متناوب است و دوره تناوب آن π است، زیرا: $\tan(\pi + x) = \tan x$

رسم تابع $y = \tan\alpha$

تست ۱۳۶: نمودار $f(x) = \tan(a + bx)$ به صورت مقابل است. b کدام است؟



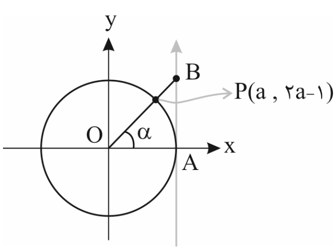
۱) $-\frac{۳\pi}{۲}$

۲) $\frac{۳\pi}{۲}$

۳) $-\frac{\pi}{۲}$

۴) $\frac{\pi}{۲}$

تست ۱۳۷: با توجه به دایرهٔ مثلثاتی زیر، مساحت مثلث AOB چه‌قدر است؟ $(۰ < \alpha < \frac{\pi}{۲})$



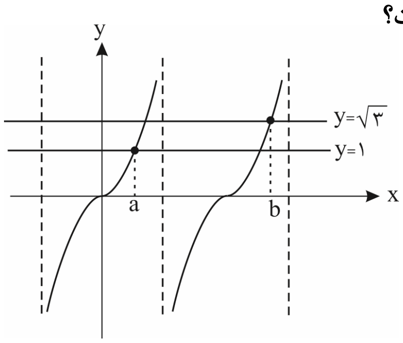
۱) $\frac{۲}{۳}$

۲) $\frac{۳}{۴}$

۳) $\frac{۳}{۸}$

۴) $\frac{۱}{۲}$

تست ۱۳۸: شکل زیر قسمتی از نمودار تابع $y = \tan x$ را نشان می‌دهد. حاصل $b - a$ کدام است؟



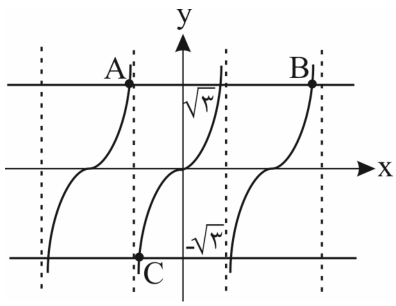
۱) $\frac{\pi}{۱۲}$

۲) $\frac{۵\pi}{۱۲}$

۳) $\frac{۷\pi}{۱۲}$

۴) $\frac{۱۳\pi}{۱۲}$

تست ۱۳۹: شکل زیر نمودار تابع $y = \tan ax$ است. اگر مساحت مثلث ABC برابر با $۸\sqrt{۳}\pi$ باشد، مقدار a کدام است؟



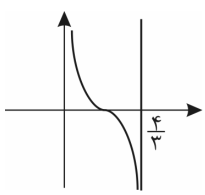
۱) $\frac{۱}{۲}$

۲) $\frac{۱}{۴}$

۳) $\frac{۳}{۴}$

۴) $\frac{۵}{۴}$

تست ۱۴۰: قسمتی از نمودار $f(x) = \tan(ax + \frac{۱}{۲})\pi$ به صورت شکل مقابل است. a کدام است؟



۱) $-\frac{۳}{۴}$

۲) $\pm\frac{۳}{۴}$

۳) $\frac{۳}{۴}$

۴) $\pm\frac{۳}{۲}$