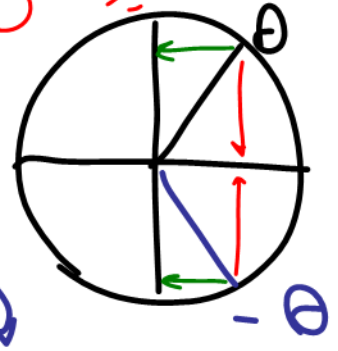


دو زاویه قریبہ
 ہمکسینوس و



فقطاً
 رابره
 رقت
 نین

قریبہ السایر البتینہا

سینوس متضامینہ
 $\sin(-\theta) = -\sin\theta$

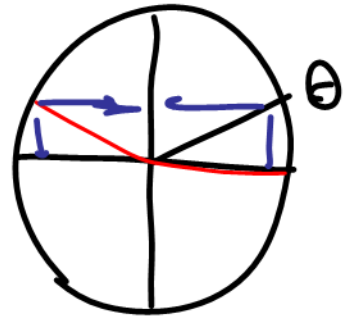
کسینوس متضامینہ
 $\cos(-\theta) = \cos\theta$

$\tan(-\theta) = -\tan\theta$

$\cotan(-\theta) = -\cotan\theta$

۱۰ ادیکمل
 ۱۶: ۳: ۱۵

$\pi - \theta$



$\sin(\pi - \theta) = \sin\theta$

$\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$

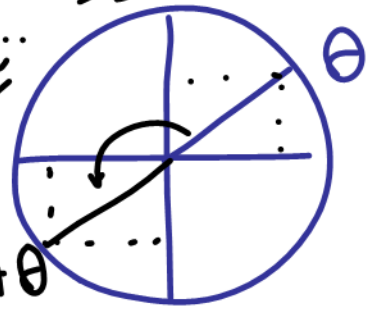
$\tan(\pi - \theta) = -\tan\theta$

$\cotan(\pi - \theta) = -\cotan\theta$

۲ زاویہ جمع: ۱۸ سینوس و
 قریبہ السایر البتینہا

اکثر زاویہ π را اریان اضافہ کن
 سینوس اکسینوس قریبہ و

تا نثرانت و
 کا نثرانت
 عوض نمیش

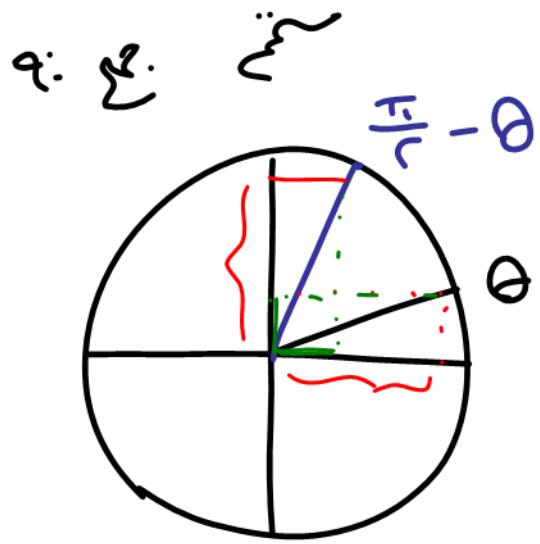


$\sin(\pi + \theta) = -\sin\theta$

$\cos(\pi + \theta) = -\cos\theta$

$\tan(\pi + \theta) = \tan\theta$

$\cotan(\pi + \theta) = \cotan\theta$



نکته: در حساب فزرد $\frac{\pi}{4}$ نام لبت عوض میشه

$$\sin \rightleftharpoons \cos$$

$$\tan \rightleftharpoons \cotan$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) = \cos \theta$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) = \sin \theta$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) = \cotan \theta$$

$$\cotan\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) = \tan \theta$$

با توجه به انتهای گان اولیه می بینیم که لبت
ایه مثبت یا منفی باشد

$$\sin(2k\pi + \theta) = \sin \theta$$

$$\cos(2k\pi + \theta) = \cos \theta$$

$$\tan(k\pi + \theta) = \tan \theta$$

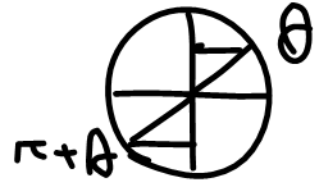
$$\cotan(k\pi + \theta) = \cotan \theta$$

در سینوس و کسینوس از
مغایب زوج π و در

تانژانت و کتانژانت

از همه مغایب π (چه فرد چه زوج)
صرف نظری کنیم.

$$\sin(11\pi + \theta) = \sin(\cancel{11\pi} + \pi + \theta) = \sin(\pi + \theta) = -\sin\theta$$



$$\sin\left(13\frac{\pi}{4} - \theta\right) = \cos\theta$$

$$\sin\left(\frac{12\pi}{4} + \frac{\pi}{4} - \theta\right) = \sin(\cancel{2\pi} + \frac{\pi}{4} - \theta)$$



Trigonometry
اندازه گیری مثلث
سه بر سنجی

متقابل برودند سینوس باشد
سینوس چو برودی کینوس نشید
تثانیات بدت اید و برعکس کتانیات
جواب برودند باشد کینوس

مثلثات پایه دوازدهم رشته تجربی

{ 5, 4, 3
{ 13, 12, 5

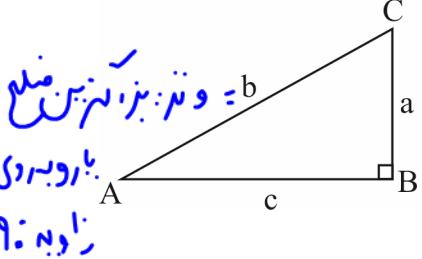
اعداد فیثاغورسی همان در $a^2 = b^2 + c^2$

نسبت های مثلثاتی

فرض می کنیم A یک زاویه حاده معلوم باشد، اگر مثلث قائم الزاویه ای را در نظر بگیریم که یکی از زاویه های غیر قائم آن A است، حاصل هر یک از کسرهای:

(1) $\frac{\text{طول ضلع مقابل به زاویه A}}{\text{طول ضلع مجاور به زاویه A}}$ (2) $\frac{\text{طول ضلع مجاور به زاویه A}}{\text{طول ضلع مقابل به زاویه A}}$ (3) $\frac{\text{طول ضلع مقابل به زاویه A}}{\text{وتر}}$ و (4) $\frac{\text{طول ضلع مجاور به زاویه A}}{\text{وتر}}$

همواره مقداری ثابت می باشند؛ یعنی فقط مقدار زاویه A مهم است و اندازه اضلاع مثلث قائم الزاویه ای که یک زاویه اش برابر A است تأثیری در این مقادیر ندارد. به دلیل ثابت بودن این مقادیر برای زاویه A، هر یک از آنها را به ترتیب (1) تانژانت زاویه A، (2) کتانژانت زاویه A، (3) سینوس زاویه A و (4) کسینوس زاویه A می نامیم.



$\sin \hat{A} = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{c}$

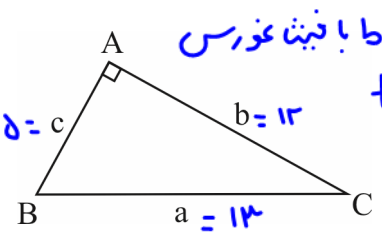
$\cos \hat{A} = \frac{AB}{AC} = \frac{b}{c}$

$\frac{\sin \hat{A} = \frac{a}{c}}{\cos \hat{A} = \frac{b}{c}} = \frac{a}{b} = \tan \hat{A}$
 $\frac{c}{a} = \cot \hat{A}$

$\tan \hat{A} = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{b}$

$\cot \hat{A} = \frac{AB}{BC} = \frac{b}{a}$

در یک مثلث قائم الزاویه، نسبت های سینوس، کسینوس، تانژانت و کتانژانت را نسبت های مثلثاتی می نامیم.



تست 1: در شکل مقابل $a + c = 18$ و $\cos \hat{B} = \frac{5}{13}$ مقدار $\tan \hat{C}$ کدام است؟

$\frac{\sin \hat{C} = \frac{5}{13}}{\cos \hat{C} = \frac{12}{13}} = \frac{5}{12}$

(2) $\frac{12}{5}$

$\frac{5}{13}$ مجاور
وتر

(1) $\frac{5}{12}$

(3) $\frac{13}{5}$

پاسخ: گزینه «1» - با توجه به تعریف کسینوس یک زاویه در مثلث قائم الزاویه، می توان نوشت:

$\cos \hat{B} = \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{5}{13} = \frac{c}{a} \xrightarrow{\times a} c = \frac{5}{13} a$

از رابطه $a + c = 18$ استفاده می کنیم:

$a + c = 18 \Rightarrow a + \frac{5}{13} a = 18 \Rightarrow \frac{18}{13} a = 18 \Rightarrow a = 13 \Rightarrow c = 5$

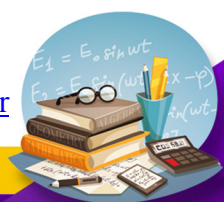
حال به کمک رابطه فیثاغورس اندازه b را محاسبه می کنیم:

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 13^2 = b^2 + 5^2 \Rightarrow b^2 = 169 - 25 = 144 \xrightarrow{\sqrt{\quad}} b = 12$

می دانیم که تانژانت یک زاویه، برابر نسبت ضلع مقابل به ضلع مجاور آن زاویه است.

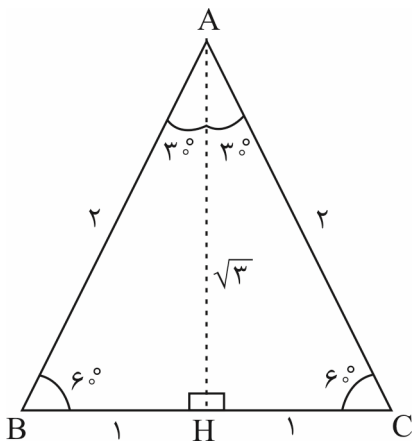
$\tan \hat{C} = \frac{c}{b} \Rightarrow \tan \hat{C} = \frac{5}{12}$

نکته: با در نظر گرفتن مثلث متساوی الاضلاع به ضلع 2 واحد، می توان نسبت های مثلثاتی زاویه های 30° و 60° را به صورت زیر محاسبه کرد. در مثلث متساوی الاضلاع، ارتفاع، میانه، نیمساز و عمود منصف وارد بر یک ضلع بر هم منطبق اند.



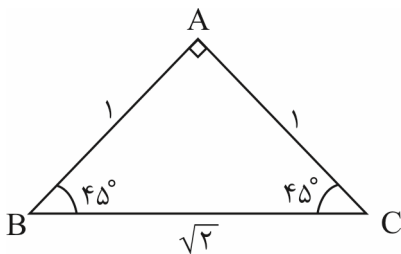
پای صحبت ۳ و ۶ (دو زاویه جمع ۹ یا متمم)

سینوس کینولته
کینوس کینولته
تانژانت کینولته
کوتانژانت کینولته



$$\Delta ABH : \begin{cases} \sin 30^\circ = \frac{BH}{AB} = \frac{1}{2} \\ \cos 30^\circ = \frac{AH}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \tan 30^\circ = \frac{BH}{AH} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \cot 30^\circ = \frac{AH}{BH} = \sqrt{3} \end{cases} \quad \begin{cases} \sin 60^\circ = \frac{AH}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos 60^\circ = \frac{BH}{AB} = \frac{1}{2} \\ \tan 60^\circ = \frac{AH}{BH} = \sqrt{3} \\ \cot 60^\circ = \frac{BH}{AH} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

با در نظر گرفتن مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین به اضلاع قائمه ۱ واحد می توان نسبت های مثلثاتی زاویه ۴۵° (به عنوان مثال B) را به صورت زیر محاسبه کرد:



$$\sin 45^\circ = \frac{AC}{BC} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan 45^\circ = \frac{AC}{AB} = 1$$

$$\cos 45^\circ = \frac{AB}{BC} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cot 45^\circ = \frac{AB}{AC} = 1$$

خلاصه نسبت های مثلثاتی زوایای معروف (۶۰°, ۴۵°, ۳۰°)

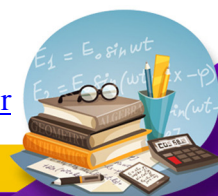
مقدار زاویه θ / مقدار نسبت مثلثاتی	۳۰°	۴۵°	۶۰°
$\sin \theta$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos \theta$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan \theta$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	۱	$\sqrt{3}$
$\cot \theta$	$\sqrt{3}$	۱	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

تست ۲: مقدار x در تساوی $\frac{\sqrt{3} \tan 60^\circ - 4 \sin 30^\circ}{2\sqrt{2} \cos 45^\circ + \cot 45^\circ} = x \cos 60^\circ$ کدام است؟

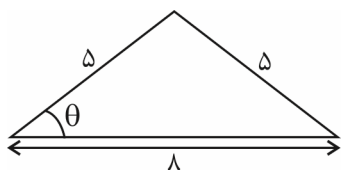
$\frac{3}{2}$ (۴) ۳ (۳) $\frac{2}{3}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۱)

پاسخ: گزینه «۲» - کافی است مقدار عددی هر یک از نسبت های مثلثاتی زوایای داده شده را جای گذاری کنیم:

$$x \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3} \times \sqrt{3} - 4 \times \frac{1}{2}}{2\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + 1} \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{3-2}{2+1} = \frac{1}{3} \xrightarrow{\times 2} x = \frac{2}{3}$$



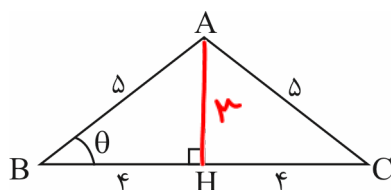
تست ۳: در مثلث مقابل، مقدار $2 \cos \theta + \sin \theta$ کدام است؟



(۲) $\frac{9}{5}$
(۴) $\frac{12}{5}$

(۱) $\frac{8}{5}$
(۳) $\frac{11}{5}$

پاسخ: گزینه «۳» - مثلث رسم شده، متساوی الساقین است. پس ارتفاع، میانه و نیمساز وارد بر قاعده بر هم منطبق اند. ارتفاع وارد بر قاعده را رسم می کنیم:



$$\Delta ABH : AB^2 = AH^2 + BH^2 \Rightarrow 25 = AH^2 + 16 \Rightarrow AH^2 = 9 \xrightarrow{\sqrt{\quad}} AH = 3$$

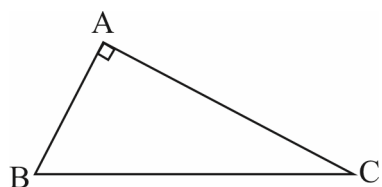
$$\sin \theta = \frac{AH}{AB} = \frac{3}{5}, \quad \cos \theta = \frac{BH}{AB} = \frac{4}{5}$$

در نتیجه مقدار خواسته شده برابر است با:

$$2 \cos \theta + \sin \theta = \frac{8}{5} + \frac{3}{5} = \frac{11}{5}$$

ارتباط بین نسبت های مثلثاتی زوایای متمم

اگر دو زاویه متمم هم باشند (مجموعشان 90° باشد)، آن گاه سینوس یکی با کسینوس دیگری برابر است و برعکس، تانژانت یکی با کتانژانت دیگری برابر است و برعکس. در شکل زیر داریم:



$$\hat{B} + \hat{C} = 90^\circ$$

$$\sin \hat{B} = \frac{AC}{BC} = \cos \hat{C}, \quad \sin \hat{C} = \frac{AB}{BC} = \cos \hat{B}$$

$$\tan \hat{B} = \frac{AC}{AB} = \cot \hat{C}, \quad \tan \hat{C} = \frac{AB}{AC} = \cot \hat{B}$$

تست ۴: حاصل عبارت $P = \frac{\Delta \sin 2^\circ \times \cot 83^\circ \times \tan 76^\circ}{8 \cot 14^\circ \times \cos 88^\circ \times \tan 7^\circ}$ کدام است؟

(۴) $-\frac{8}{5}$

(۳) $\frac{8}{5}$

(۲) $-\frac{5}{8}$

(۱) $\frac{5}{8}$

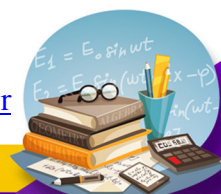
پاسخ: گزینه «۱» - از روابط نسبت های مثلثاتی زاویه های متمم استفاده می کنیم:

$$76^\circ + 14^\circ = 90^\circ \Rightarrow \tan 76^\circ = \cot 14^\circ$$

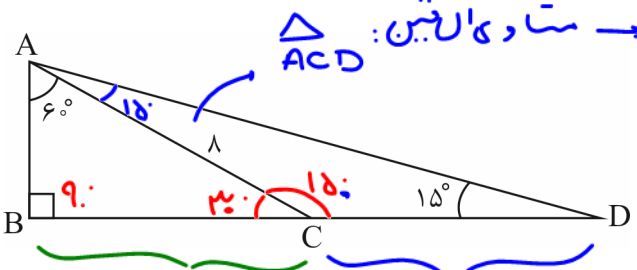
$$83^\circ + 7^\circ = 90^\circ \Rightarrow \cot 83^\circ = \tan 7^\circ$$

$$2^\circ + 88^\circ = 90^\circ \Rightarrow \sin 2^\circ = \cos 88^\circ$$

$$P = \frac{\Delta \sin 2^\circ \times \cot 83^\circ \times \tan 76^\circ}{8 \tan 76^\circ \times \sin 2^\circ \times \cot 83^\circ} = \frac{\Delta}{8}$$



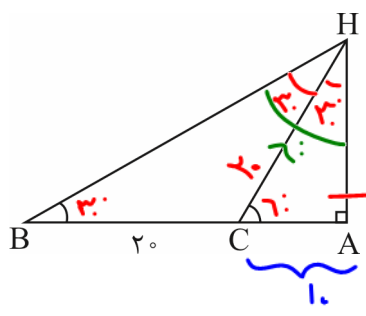
تست ۵: در شکل مقابل اندازه پاره خط BD برابر است با:



- ۴√۳ + ۴ (۱)
- ۴√۳ + ۸ (۲) ✓
- ۴√۳ + ۱۲ (۳)
- ۱۶ (۴)

$\triangle ABC: \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{BC}{1} \Rightarrow BC = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$
 $BD = 1 + 4\sqrt{3}$

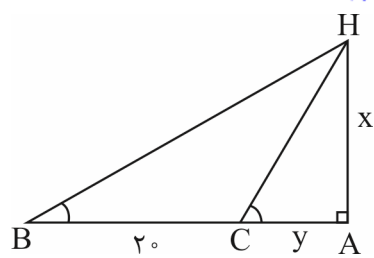
تست ۶: در شکل مقابل اگر $\hat{C} = 6^\circ$ و $\hat{B} = 3^\circ$ ، اندازه AH کدام است؟



$\triangle ACH: \cos 6^\circ = \frac{1}{AC} = \frac{AC}{1} \rightarrow AC = 1$
 $\triangle BAH: \tan 3^\circ = \frac{AH}{2+y} \Rightarrow AH = (2+y)\tan 3^\circ$
 $\triangle ACH: \tan 6^\circ = \frac{AH}{1} \Rightarrow AH = \tan 6^\circ$
 $(2+y)\tan 3^\circ = \tan 6^\circ$

- ۱۰ (۱)
- ۲۰√۳ (۲)
- ۱۰√۳ (۳ = AH)
- ۲۰ (۴)

پاسخ: گزینه «۳» - اگر فرض کنیم $AC = y$ و $AH = x$ ، آن گاه در شکل مقابل داریم:



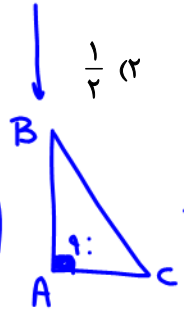
$$\begin{cases} \tan \hat{B} = \frac{AH}{AB} = \frac{x}{2+y} \Rightarrow \tan 3^\circ = \frac{x}{y+2} = \frac{\sqrt{3}}{3} (*) \\ \tan \hat{C} = \frac{AH}{AC} \Rightarrow \tan 6^\circ = \frac{x}{y} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{x}{y} \end{cases}$$

$x = y\sqrt{3} \xrightarrow{(*)} \frac{y\sqrt{3}}{y+2} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow 3y = y+2 \Rightarrow y=1 \Rightarrow x=1\sqrt{3} \Rightarrow AH=1\sqrt{3}$

تست ۷: در مثلث قائم الزاویه ABC که $\hat{A} = 90^\circ$ ، حاصل $\frac{1}{1+\tan \hat{B}} + \frac{1}{1+\tan \hat{C}}$ کدام است؟

- ۴ (۱)
- ۲ (۲)
- ۱ (۳)
- ۱ (۴)

$\frac{1}{1+\tan \hat{B}} + \left(\frac{1}{1+\frac{1}{\cot \hat{C}}} = \frac{\tan \hat{C}}{1+\tan \hat{C}} \right)$
 $\frac{1}{1+\tan \hat{B}} + \frac{\tan \hat{C}}{1+\tan \hat{C}} = \frac{\tan \hat{B} + 1}{1+\tan \hat{B}}$
 $= \frac{1+\tan \hat{B}}{1+\tan \hat{B}} = 1$

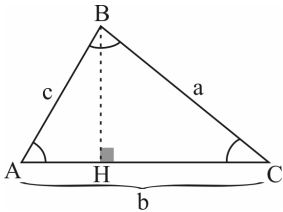


$\hat{B} + \hat{C} = 90^\circ$
 $\tan \hat{B} = \cot \hat{C}$



حل مثلث و کاربردهای آن

به شکل روبه‌رو و اطلاعات زیر در مورد مثلث توجه کنید.

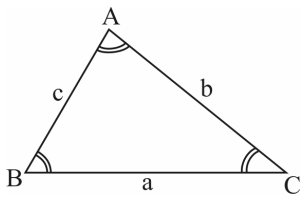


$$1) \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$$

$$2) \text{محیط} = a + b + c$$

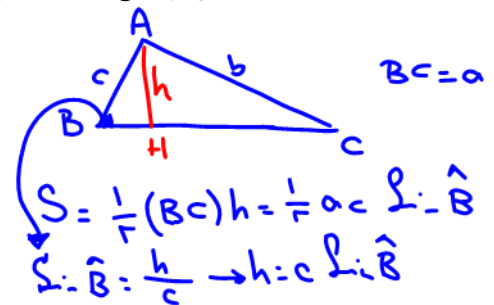
منظور از حل مثلث، یافتن تمامی زوایا و اضلاع آن است.

۱- مساحت مثلث: اگر دو ضلع یک مثلث و زاویه‌ی بین آن‌ها را داشته باشیم، آن‌گاه مساحت مثلث از رابطه‌ی زیر محاسبه می‌شود:

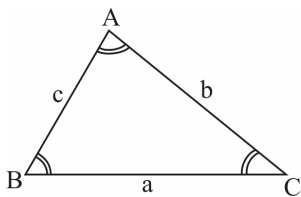


$$\text{مساحت} = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} ac \sin B$$

$$\frac{1}{2} abc \quad \frac{\sin C}{c} = \frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b}$$



۲- قانون سینوس‌ها: می‌دانیم مساحت یک مثلث برابر است با نصف حاصل ضرب دو ضلع در سینوس زاویه‌ی بین آن‌ها. پس:



$$S = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} ac \sin B = \frac{1}{2} bc \sin A$$

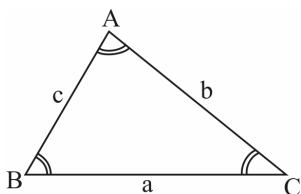
با تقسیم طرفین تساوی‌ها بر $\frac{1}{2} abc$ و معکوس کردن آن‌ها، داریم:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \quad (\text{قانون سینوس‌ها})$$

توجه: قانون سینوس‌ها، برای حل مثلث‌هایی که در آن یک ضلع و زاویه‌ی روبه‌روی آن را داریم، بسیار سودمند خواهد بود.

۳- قانون کسینوس‌ها: وقتی دو ضلع یک مثلث و زاویه‌ی بین آن‌ها را داشته باشیم، قانون سینوس‌ها برای یافتن اضلاع و زوایا قابل استفاده نیست. در این حالت از «قانون کسینوس‌ها» استفاده می‌کنیم.

(در زیر ضلع با اضلاع در) - مجموع مربعات دو ضلع دیگر = مربع هر ضلع



$$1) a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$$

$$2) b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \hat{B}$$

$$3) c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C}$$

تعمیم
فشارموزش
منفی



$$a^2 = b^2 + c^2$$



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}_1$$

$$\hat{A}_1 > \hat{A} = 90^\circ$$

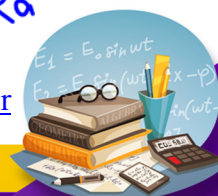
$$a_1 > a$$



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}_2$$

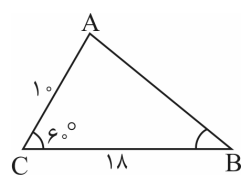
$$\hat{A}_2 < \hat{A} = 90^\circ$$

$$a_2 < a$$



$$(AB)^2 = (AC)^2 + (BC)^2 - 2(AC)(BC)\cos\gamma$$

مثال ۸: در شکل روبه‌رو، طول AB را بیابید.



$$AB^2 = 10^2 + 18^2 - 2(10)(18)\cos 60^\circ = 100 + 324 - 360 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 244 \Rightarrow AB = \sqrt{244}$$

پاسخ:

تست ۹: ناظری به فاصله‌ی ۳۵ متر از پای ستونی که بر روی آن مجسمه‌ای قرار دارد، ایستاده است. زاویه‌ی رؤیت انتها و ابتدای مجسمه با سطح افق ۴۵° و ۴۰° است. ارتفاع مجسمه کدام است؟ (tan ۴۰° = ۰/۸)

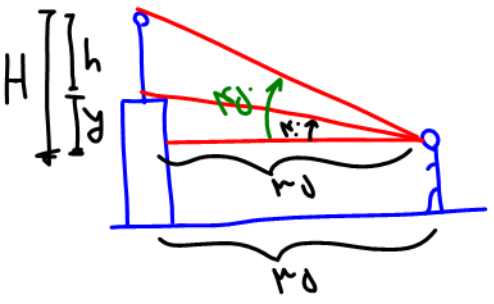
(فارج ریاضی ۹۴)

۷/۲ (۴)

۷ (۳)

۶/۴ (۲)

۶ (۱)



$$\tan 45^\circ = 1 = \frac{H}{35} \rightarrow H = 35$$

$$\tan 40^\circ = 0.8 = \frac{y}{35} \rightarrow y = 28$$

$$h = H - y = 35 - 28 = 7$$

تست ۱۰: در متوازی‌الاضلاعی اندازه‌ی دو قطر ۱۲ و ۸ واحد و زاویه‌ی بین دو قطر ۱۳۵ درجه است. مساحت متوازی‌الاضلاع چند برابر $\sqrt{2}$ است؟

(تجربی ۹۲ و تجربی فارج ۹۴)

۳۶ (۴)

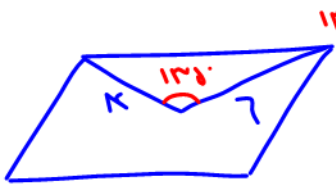
۳۲ (۳)

۲۴ (۲)

۱۸ (۱)



نکته: در هر متوازی‌الاضلاع، اقطار منصف یکدیگرند و شکل را به چهار مثلث هم‌سطح تقسیم می‌کنند.



$$S = \frac{1}{2} ab \sin \theta = \frac{1}{2} (12)(8) \sin 135^\circ = 24 \sqrt{2}$$

تست ۱۱: مساحت مثلثی با دو ضلع ۱۶ و ۹ واحد برابر $24\sqrt{5}$ واحد مربع است. بزرگ‌ترین ضلع این مثلث کدام است؟

(ریاضی ۹۴)

۲۴ (۴)

۲۳ (۳)

۲۲ (۲)

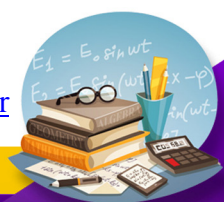
۲۱ (۱)

$$S = \frac{1}{2} ab \sin \theta = 24\sqrt{5} = \frac{1}{2} (9)(16) \sin \theta \rightarrow \sin \theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \rightarrow \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 + \cos^2 \theta = 1 \rightarrow \cos^2 \theta = 1 - \frac{5}{9} = \frac{4}{9} \rightarrow \cos \theta = \pm \frac{2}{3}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta = (16)^2 + (9)^2 - 2(16)(9) \left(-\frac{2}{3}\right) \rightarrow c = 23$$

برای ضلع بزرگ‌تر باید $\cos \theta$ باشد
منفی درستی بزرگ‌تر باشد در اینجا



تست ۱۲: مساحت مثلث به اضلاع ۷، ۹ و ۱۲ واحد کدام است؟

۱۴√۵ (۴)

۱۲√۵ (۳)

۱۴√۳ (۲)

۱۵√۲ (۱)

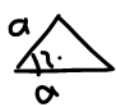
$P = \frac{a+b+c}{2}$ نصف محیط

نسبه مساحت مثلث با داشتن اضلاع (التورهدون)

$S = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)} = \sqrt{14(14-7)(14-9)(14-12)} = 14\sqrt{5}$

$P = \frac{12+9+7}{2} = 14$

$S = \frac{1}{2} a a \sin \alpha = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2}$
(قلم پی ۹۷)



مساحت مثلث متساوی الاضلاع

مسئله

حواستون به شش ضلعی منتظم هم باشه.



تست ۱۳: اگر قطر کوچک یک شش ضلعی منتظم برابر با $2\sqrt{3}$ باشد، مساحت شش ضلعی منتظم کدام است؟

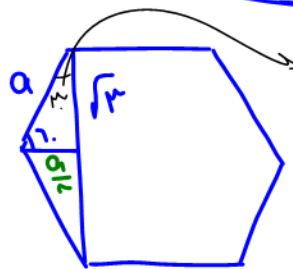
۱۲√۳ (۴)

۱۲ (۳)

۶√۳ (۲)

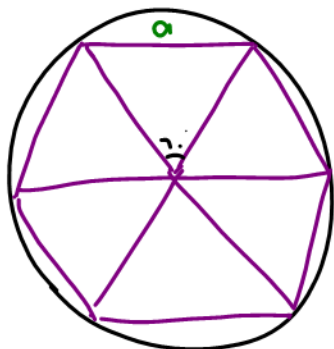
۶ (۱)

$S = 7 \left(\frac{a^2 \sqrt{3}}{2} \right)$
مساحت مس



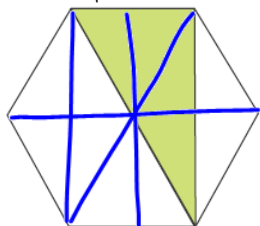
فیتاگورث
 $a^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + (\sqrt{3})^2$
 $a^2 - \frac{a^2}{4} = 3 - \frac{3a^2}{4} = 3$
 $a^2 = 4 \rightarrow a = 2$

$S = 7 \left(\frac{a^2 \sqrt{3}}{2} \right) = 7\sqrt{3}$



حل باررس کا شبقاری هشتم

(قلم پی ۹۷ و ۹۹)



تست ۱۴: مساحت شش ضلعی منتظم موجود در شکل زیر $18\sqrt{3}$ است. مساحت ناحیه رنگی چه قدر است؟

$12 \Delta = 18\sqrt{3}$

برابر ۱۲ تا مثلثی است:

۱۲ (۱)

۱۸ (۲)

۶√۳ (۳) ✓

۹√۳ (۴)

$\Delta = \frac{18\sqrt{3}}{12} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

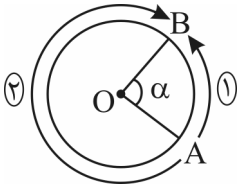
مساحت رنگی، نه برابر ۱۲ تا مثلثی است.

$4 \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} \right) = 6\sqrt{3}$



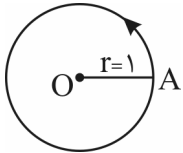
تعریف جهت مثلثاتی

شکل مقابل را در نظر بگیرید. اگر بخواهیم از نقطه‌ی A به B برویم، یکی از دو مسیر ۱ یا ۲ را می‌توانیم انتخاب کنیم. در مثلثات جهت شماره‌ی ۱ را که خلاف حرکت عقربه‌های ساعت است (پادساعتگرد)، جهت مثبت و جهت شماره‌ی ۲ را که موافق حرکت عقربه‌های ساعت است (ساعتگرد)، جهت منفی می‌گویند.



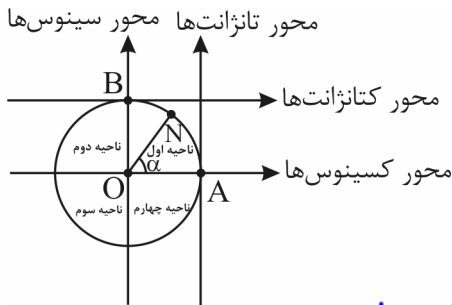
تعریف دایره‌ی مثلثاتی

دایره‌ای است به شعاع واحد که در آن، با توجه به شکل، نقطه‌ی A به عنوان مبدأ کمان‌ها در نظر گرفته می‌شود و جهت آن مثبت می‌باشد (پادساعتگرد).



محورهای مثلثاتی

- ۱- محور کسینوس‌ها: محوری که از مرکز دایره‌ی مثلثاتی و مبدأ کمان‌ها (نقطه‌ی A) می‌گذرد.
- ۲- محور سینوس‌ها: محوری که در مرکز دایره‌ی مثلثاتی بر محور کسینوس‌ها عمود است.
- ۳- محور تانژانت‌ها: محوری که در مبدأ کمان‌ها (نقطه‌ی A) بر دایره‌ی مثلثاتی مماس است و موازی محور سینوس‌هاست.
- ۴- محور کتانژانت‌ها: محوری است که در بالاترین نقطه‌ی دایره بر آن مماس است و با محور کسینوس‌ها موازی و بر محور تانژانت‌ها و سینوس‌ها عمود است.



این چهار محور مثلثاتی را در روبه‌رو می‌بینید:
 نقطه‌ی N: انتهای کمان روبه‌رو به زاویه‌ی α
 نقطه‌ی B: مبدأ محور \cot
 نقطه‌ی A: مبدأ محور \tan
 نقطه‌ی O: مبدأ محورهای \sin و \cos

رفت: ضلع اول زاویه A ثابت است و ضلع دوم OB

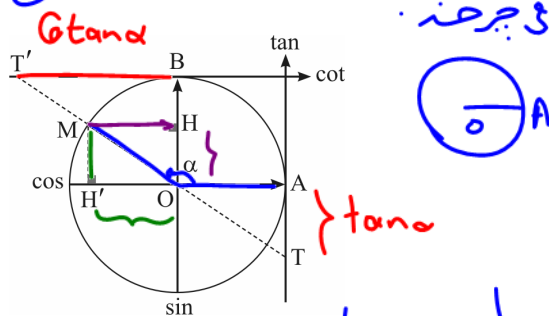
روش به دست آوردن مقدار یک نسبت مثلثاتی از روی دایره‌ی مثلثاتی

فرض کنید، مطابق شکل روبه‌رو زاویه‌ای به اندازه‌ی α انتخاب کرده‌ایم. در این صورت از انتهای کمان بر محور \sin و \cos عمود می‌کنیم. داریم:

$$OH = \sin \alpha, \quad OH' = -\cos \alpha$$

حال با امتداد OM به گونه‌ای که محور \tan و \cot قطع شود، داریم:

$$AT = -\tan \alpha, \quad BT' = -\cot \alpha$$

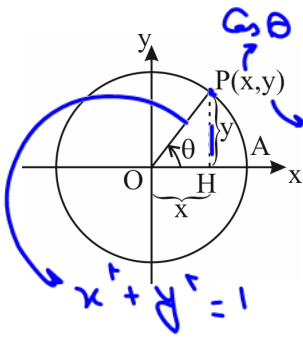


$\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1 \rightarrow \tan \alpha = \frac{1}{\cot \alpha}$

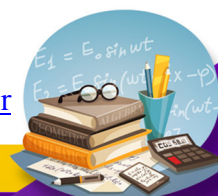
در دایره‌ی مثلثاتی، زاویه‌ی دلخواه θ را در نظر می‌گیریم. با توجه به مثلث قائم‌الزاویه، مختصات

نقطه‌ی $P(x, y)$ در این دایره برحسب زاویه‌ی θ برابر است با:

$$P(x, y) = P(\cos \theta, \sin \theta) \Rightarrow \begin{cases} x = \cos \theta \\ y = \sin \theta \end{cases}$$

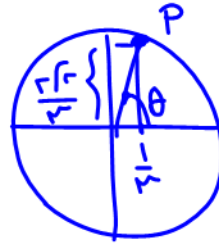


$\tan \alpha = \frac{y}{x}$
 $\cot \alpha = \frac{x}{y} = \frac{1}{\tan \alpha}$
 $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$



مثال ۱۵: اگر زاویه θ ، دایره‌ی مثلثاتی را در نقطه‌ی $P(\frac{1}{3}, \frac{2\sqrt{2}}{3})$ قطع کند، نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ی θ را بیابید.

پاسخ:



$$\tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{\frac{2\sqrt{2}}{3}}{\frac{1}{3}} = 2\sqrt{2}$$

پس:

از طرفی:

$$P(\frac{1}{3}, \frac{2\sqrt{2}}{3}) = P(\cos \theta, \sin \theta)$$

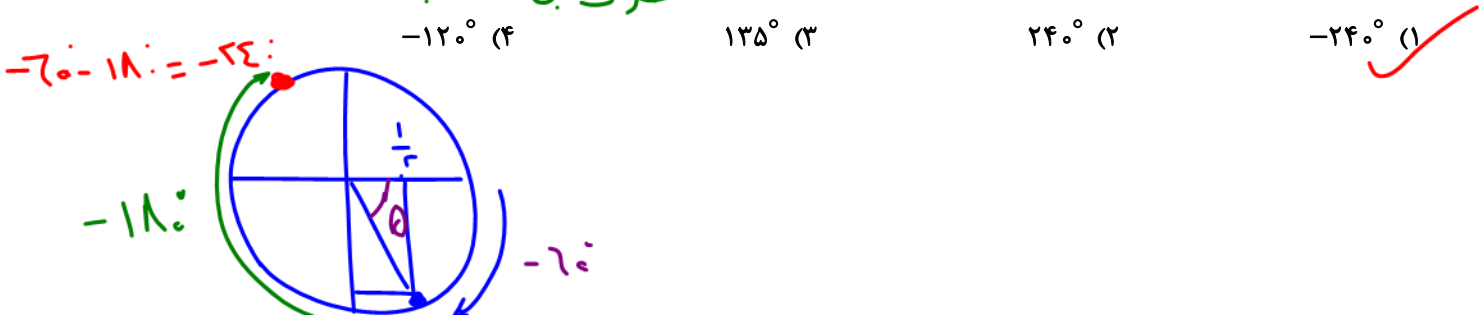
$$x = \cos \theta = \frac{1}{3}, \quad y = \sin \theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x} = 2\sqrt{2}, \quad \cot \theta = \frac{x}{y} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

تست ۱۶: نقطه‌ی $P(\frac{1}{4}, \frac{-\sqrt{3}}{4})$ روی دایره‌ی مثلثاتی را 180° در جهت حرکت عقربه‌های ساعت حول مبدأ مختصات دوران می‌دهیم.

حالت مثبت مثلثاتی

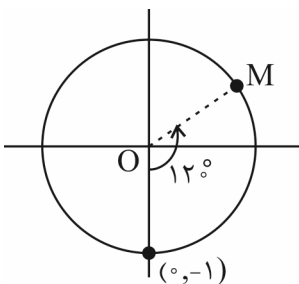
نقطه‌ی جدید چه زاویه‌ای بر روی دایره‌ی مثلثاتی به وجود می‌آورد؟



تست ۱۷: نقطه‌ی $(0, -1)$ روی دایره‌ی مثلثاتی را حول مبدأ مختصات به اندازه‌ی 120° در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت دوران می‌دهیم. مختصات نقطه‌ی جدید کدام است؟

- (۱) $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$ (۲) $(\frac{-\sqrt{3}}{2}, \frac{-1}{2})$ (۳) $(\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2})$ (۴) $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{-1}{2})$

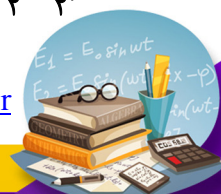
پاسخ: گزینه‌ی «۱» - نقطه‌ی $(0, -1)$ روی دایره‌ی مثلثاتی مطابق با شکل زیر است. اگر آن را 120° در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت دوران دهیم، به نقطه‌ی M در ناحیه‌ی اول می‌رسیم.



OM با محور طول‌ها، زاویه‌ی 30° می‌سازد، بنابراین:

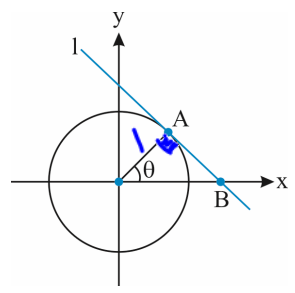
$$\begin{cases} x_M = \cos \theta \Rightarrow x_M = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ y_M = \sin \theta \Rightarrow y_M = \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \end{cases}$$

لذا $M(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$



نکته: در هر دایره ضلع مماس در نقطه تماس بر شعاع عمود است.

تست ۱۸: در دایره مثلثاتی زیر، اندازه AB کدام است؟ (خط l بر دایره مماس است).

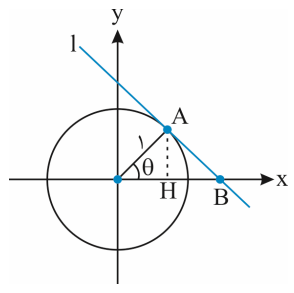


$\triangle OAB$ قائم الزامیه
 $\tan \theta = \frac{\text{مقابل}}{\text{جوار}} = \frac{AB}{1}$

- (۱) $\cos \theta$
- (۲) $\frac{1}{\cos \theta}$
- (۳) $\tan \theta$
- (۴) $\frac{1}{\tan \theta}$

را سریع و بهتر

پاسخ: گزینه «۳» - خط مماس بر دایره بر شعاع عمود است. حالا اگر از نقطه A عمود بر محور طولها رسم کنیم، طبق روابط طولی در مثلث قائم الزامیه داریم:



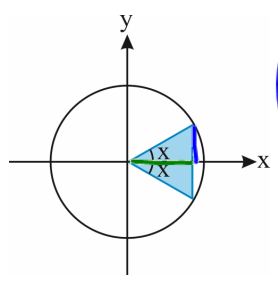
$$(1)^2 = OH \times OB \xrightarrow{OH = \cos \theta} 1 = \cos \theta \times OB \Rightarrow OB = \frac{1}{\cos \theta}$$

پس طبق قضیه فیثاغورس در مثلث OAB می توان نوشت:

$$OB^2 = (1)^2 + AB^2 \Rightarrow \frac{1}{\cos^2 \theta} = 1 + AB^2$$

$$\Rightarrow AB^2 = \frac{1}{\cos^2 \theta} - 1 = \frac{1 - \cos^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \tan^2 \theta \Rightarrow AB = \tan \theta$$

تست ۱۹: در دایره مثلثاتی زیر اگر مساحت ناحیه رنگی برابر با A باشد، کدام است $A \times (\tan x + \cot x)$ ؟



$A = S_{\Delta} = \frac{(\text{ارتفاع})(\text{فصل})}{2} = \frac{(2 \sin x) \cos x}{2} = \sin x \cos x$

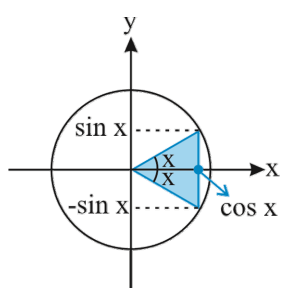
$A \times (\tan x + \cot x) = \sin x \cos x \left(\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} \right) = \sin x \cos x \left(\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos x \sin x} \right) = \sin x \cos x \left(\frac{1}{\sin x \cos x} \right) = 1$

- (۱) $\frac{1}{2}$
- (۲) $\frac{1}{3}$
- (۳) $\frac{1}{4}$
- (۴) ۱

پاسخ: گزینه «۴» - با توجه به شکل زیر، مساحت ناحیه رنگی، مساحت یک مثلث با ارتفاع $\cos x$ و قاعده $2 \sin x$ است. پس داریم:

$$A = \frac{1}{2} \times (2 \sin x) \cos x = \sin x \cos x$$

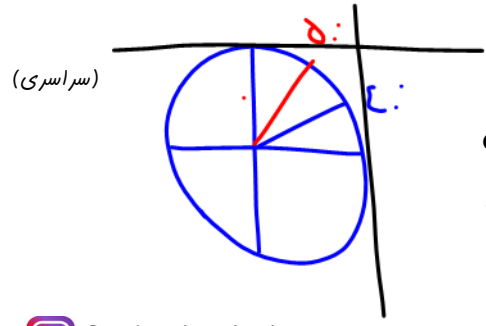
در نتیجه برای محاسبه $A(\tan x + \cot x)$ می توان نوشت:



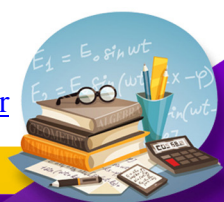
$$A(\tan x + \cot x) = \sin x \cos x \left(\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} \right) = \sin x \cos x \left(\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} \right)$$

$$= \sin x \cos x \left(\frac{1}{\sin x \cos x} \right) = 1$$

تست ۲۰: کدام یک از نامساوی‌های زیر بین زوایای ۴۰ و ۵۰ درجه برقرار است؟

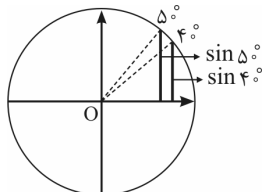


- (۱) $\sin 50^\circ < \sin 40^\circ$
- (۲) $\cos 50^\circ < \cos 40^\circ$
- (۳) $\tan 50^\circ < \tan 40^\circ$
- (۴) $\cot 40^\circ < \cot 50^\circ$

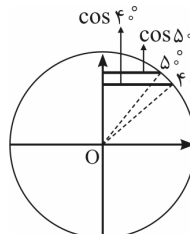


پاسخ: گزینه‌ی «۲»

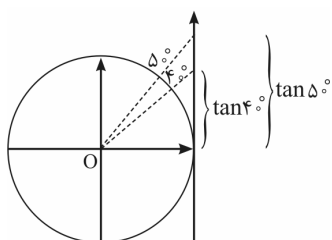
کافی است به دایره‌های مثلثاتی زیر خوب دقت کنید:



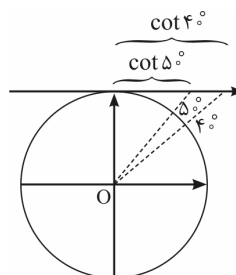
گزینه‌ی (۱) نادرست $\Rightarrow \sin 5^\circ > \sin 4^\circ$



گزینه‌ی (۲) درست $\Rightarrow \cos 5^\circ < \cos 4^\circ$



گزینه‌ی (۳) نادرست $\Rightarrow \tan 5^\circ > \tan 4^\circ$



گزینه‌ی (۴) نادرست $\Rightarrow \cot 5^\circ < \cot 4^\circ$

البته اگر به مفهوم صعود و نزول توابع نیز آشنا باشید، می‌توانید خیلی ساده‌تر پی به درستی گزینه‌ی (۲) ببرید.

$f(x) = \sin x$ در $(0, \frac{\pi}{2})$ صعودی است. $\Rightarrow 5^\circ > 4^\circ \Rightarrow \sin 5^\circ > \sin 4^\circ$

$f(x) = \cos x$ در $(0, \frac{\pi}{2})$ نزولی است. $\Rightarrow 5^\circ > 4^\circ \Rightarrow \cos 5^\circ < \cos 4^\circ$

$f(x) = \tan x$ در $(0, \frac{\pi}{2})$ صعودی است. $\Rightarrow 5^\circ > 4^\circ \Rightarrow \tan 5^\circ > \tan 4^\circ$

$f(x) = \cot x$ در $(0, \frac{\pi}{2})$ نزولی است. $\Rightarrow 5^\circ > 4^\circ \Rightarrow \cot 5^\circ < \cot 4^\circ$

تست ۲۱: اگر $\cos \alpha \cdot \sin \alpha > 0$ و $\cos \alpha \cdot \tan \alpha < 0$ آن‌گاه انتهای کمان α در کدام ناحیه‌ی مثلثاتی است؟

(۴) چهارم

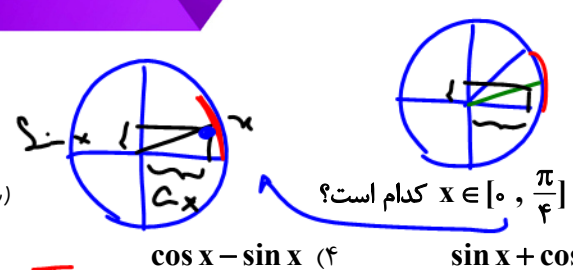
(۳) سوم

(۲) دوم

(۱) اول

Handwritten notes and diagrams for the test question. A unit circle is drawn with the second quadrant shaded in red. A red arrow points from the text 'پس یانه ۱ یا ۳' to the shaded area. Another red arrow points from the text 'هدر و هلاستنه' to the same area. The handwritten text says: 'پس یانه ۱ یا ۳' and 'هدر و هلاستنه'. Below this, the inequality $\sin \alpha < 0$ is written, with a red arrow pointing to the shaded area. Another inequality $\cos \alpha \cdot \tan \alpha < 0$ is written, with a red arrow pointing to the shaded area. A final handwritten note says: 'باید در ناحیه ۳ باشم تا $\sin \alpha < 0$ شود.'





تست ۲۲: حاصل عبارت $\frac{|\sin x - \cos x|}{2} + \frac{\sin x + \cos x}{2}$ که در آن $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$ کدام است؟

پاسخ: گزینه «۲»



رابطه قدرت:

گفتیم در $[0, \frac{\pi}{4}]$ (زیر خط $y = x$)، $\cos x > \sin x$

$$\frac{|\sin x - \cos x|}{2} + \frac{\sin x + \cos x}{2} = \frac{-(\sin x - \cos x) + (\sin x + \cos x)}{2} = \cos x$$

$P = \sqrt{Q}$
 $P \geq 0, Q \geq 0$

تست ۲۳: اگر $a \in \mathbb{R}$ و $\cos x = \sqrt{\frac{\cot x}{\cot x - a^2}}$ ، انتهای کمان x در کدام ناحیهی مثلثاتی است؟

- گزینه «۴» چهارم (۳) سوم (۲) دوم (۱) اول
- پاسخ: گزینه «۴»

انتهای کمان x در ناحیهی اول یا چهارم $\Rightarrow \cos x \geq 0 \Rightarrow \sqrt{\frac{\cot x}{\cot x - a^2}} \geq 0$

اما با انتخاب x در ناحیهی اول، $\cot x > 0$ و در نتیجه به ازای مقادیر بزرگ a^2 می‌تواند زیر رادیکال منفی شود و در نتیجه فرض مسئله که به ازای هر $a \in \mathbb{R}$ ، تساوی برقرار است از بین می‌رود. پس x باید در ناحیهی چهارم باشد که در این صورت همواره زیر رادیکال مثبت خواهد بود:

$$\begin{cases} \cot x \leq 0 \\ \cot x - a^2 < 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{\cot x}{\cot x - a^2} \geq 0$$

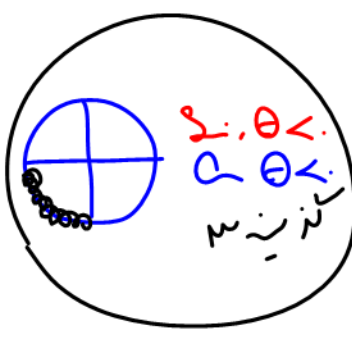
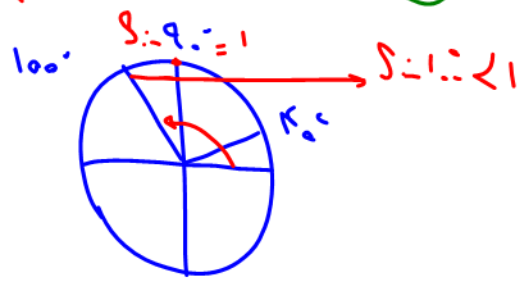
مثال ۲ در مثبت کمان منبسط می‌شود

$\cot x - a^2 < 0$

مثال ۱: $\cos 100^\circ < \cos 40^\circ < \cos 20^\circ$ (۲)
 مثال ۴: $\cos 100^\circ < \cos 70^\circ < \cos 40^\circ$ (۴)

تست ۲۴: کدام نامساوی زیر نادرست است؟

(۱) $\sin 20^\circ < \sin 40^\circ < \sin 100^\circ$
 (۳) $\sin 40^\circ < \sin 90^\circ < \sin 100^\circ$



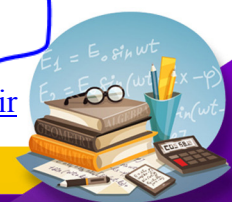
تست ۲۵: اگر $\sin \theta + \tan \theta > 0$ و $\frac{1}{\cos \theta} < \sin \theta \times \tan \theta$ باشند، انتهای کمان θ در کدام ناحیه قرار دارد؟

گزینه «۴» چهارم (۳) سوم (۲) دوم (۱) اول

$$\frac{1}{\cos \theta} < \sin \theta \cdot \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \Rightarrow \frac{1}{\cos \theta} < \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta}$$

$$\frac{1}{\cos \theta} - \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta} < 0 \Rightarrow \frac{1 - \sin^2 \theta}{\cos \theta} < 0 \Rightarrow \frac{\cos^2 \theta}{\cos \theta} < 0 \Rightarrow \cos \theta < 0$$

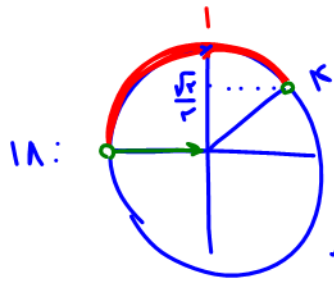
در اینجا: $\cos \theta < 0$
 $1 + \cos \theta \leq 1$



نکته: از طریق ناماری گمان نمی توان نسبت مثلثاتی گرفت باید همان راه را برده منتقل کنیم

تست ۲۶: اگر $45^\circ < \alpha < 135^\circ$ باشد و $\sin \alpha = \frac{\Delta m + 1}{3}$ ، آن گاه حدود m کدام است؟

- (۱) $(-\frac{1}{5}, \frac{2}{5})$
- (۲) $(-\frac{1}{5}, \frac{2}{5})$
- (۳) $(\frac{1}{5}, \frac{2}{5})$
- (۴) $(0, \frac{2}{5})$



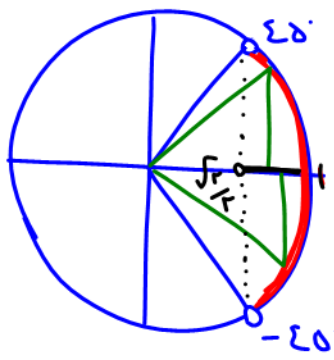
ضرب در ۳ $1 \leq \frac{\Delta m + 1}{3} \leq 1 \rightarrow 0 < \Delta m + 1 \leq 3$

کسر $-\frac{1}{5} < m \leq \frac{2}{5}$

برای همین امده ما ریش نداریم

تست ۲۷: اگر $-45^\circ < \alpha < 45^\circ$ و $\cos \alpha = \frac{3m + 2}{4}$ ، آن گاه بیشترین مقدار m برابر است با:

- (۱) $\frac{1}{3}$
- (۲) $\frac{2}{3}$
- (۳) ۱
- (۴) $\frac{4}{3}$



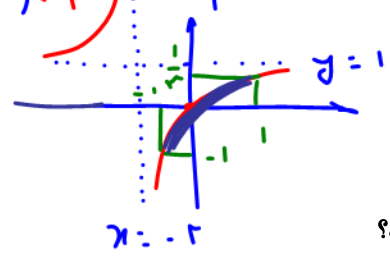
ضرب در ۴ $2\sqrt{2} < 3m + 2 \leq 4$

کسر $\frac{2\sqrt{2}-2}{3} < m \leq \frac{2}{3} = \text{Max}$

۷.I.P تست ۲۸: مجموع حداقل و حداکثر مقدار عبارت $\frac{\cos \alpha}{2 + \cos \alpha}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{3}$
- (۲) $-\frac{1}{3}$
- (۳) $-\frac{2}{3}$
- (۴) $\frac{2}{3}$

$y = f(g(x))$ where $-1 \leq g(x) = \cos \alpha \leq 1$ and $-\frac{1}{3} \leq f(x) \leq \frac{1}{3}$



Max = $\frac{1}{3}$
Min = -1

Max + Min = $-\frac{2}{3}$

تابع $f(x) = \frac{x}{2+x}$ با $g(x) = \cos \alpha$ ترکیب شده و برد g را می خواهیم
 ضربی α باید ورودی تابع f باشد
 $f(x)$ را بنویسید و x که همان $\cos \alpha$ است را بین ۱ و -۱ بنویسید

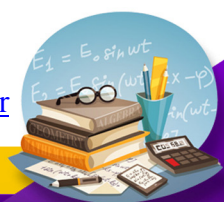
۷.I.P تست ۲۹: بیشترین مقدار عبارت $4 + \cos^2 x + 2 \cos x$ کدام است؟

- (۱) ۷
- (۲) ۵
- (۳) ۴
- (۴) ۳

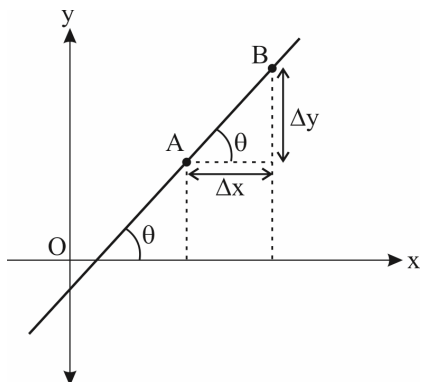
نکته: برای Max و Min عبارت درجه ۲ به شکل $y = ax^2 + bx + c$ یا $y = a \sin^2 x + b \sin x + c$ یا $y = a \cos^2 x + b \cos x + c$ باید بار به جای x یک بار \sin یا \cos بنویسیم
 البته باید $-\frac{b}{2a} \leq 1$ باشد. کمترین حد است
 $y = \cos^2 x + 2 \cos x + 4$

$\cos x = 1 \rightarrow y = 1 + 2 + 4 = 7 = \text{Max}$
 $\cos x = -1 \rightarrow y = 1 - 2 + 4 = 3$
 $\cos x = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2} = -1 \rightarrow y = 3$

$3 \leq y \leq 7$



رابطه شیب خط با تانژانت اولیه



می‌دانیم که شیب هر خط، برابر نسبت تفاضل عرض‌های دو نقطه واقع بر آن به تفاضل طول‌های همان دو نقطه است. حال اگر این خط محور Xها را قطع کند، شیب خط برابر تانژانت زاویه‌ای است که خط با جهت مثبت محور Xها می‌سازد، یعنی:

$$\tan \theta = \frac{\text{تفاضل عرض‌ها}}{\text{تفاضل طول‌ها}} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = m$$

به طور کلی می‌توان گفت:

(الف) اگر خطی موازی با محور Xها باشد، شیب آن صفر است.

(ب) اگر خطی عمود بر محور Xها باشد، شیب آن تعریف نشده است.

معادله خط

با داشتن یک نقطه از خط، مانند $A(x_0, y_0)$ و شیب خط از معادله مقابل استفاده می‌کنیم:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

تست ۳۰: معادله خطی که با قسمت مثبت محور Xها زاویه 45° می‌سازد و از نقطه $A(2, 3)$ می‌گذرد، کدام است؟

- (۱) $y = 2x - 1$ (۲) $y = 2x + 1$ (۳) $y = x - 1$ (۴) $y = x + 1$

پاسخ: گزینه «۴» - شیب این خط برابر $m = \tan 45^\circ = 1$ است، در نتیجه:

$$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - 3 = 1(x - 2) \Rightarrow y = x + 1$$

تست ۳۱: اگر خط $(5t - 3)x - 2\sqrt{3}y = 10$ با جهت مثبت محور Xها زاویه 30° بسازد، t کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

پاسخ: گزینه «۲»

یادآوری: شیب خط $ax + by = c$ برابر $-\frac{a}{b}$ است.

$y = mx + h$

$$\frac{(5t - 3)x - 10}{2\sqrt{3}} = y$$

$$m = \frac{-a}{b} \Rightarrow \begin{cases} a = 5t - 3 \\ b = -2\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow m = \frac{-(5t - 3)}{-2\sqrt{3}} = \frac{5t - 3}{2\sqrt{3}} = \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

شیب خط داده شده برابر $\frac{5t - 3}{2\sqrt{3}}$ است، در نتیجه:

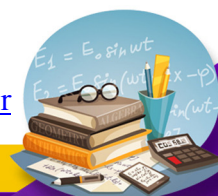
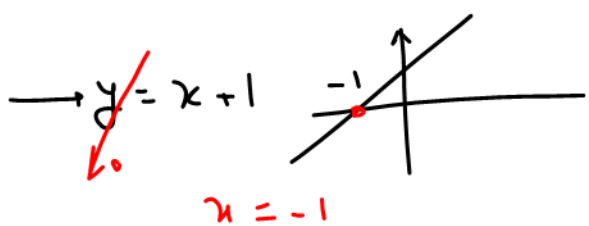
$$\tan 30^\circ = \frac{5t - 3}{2\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{5t - 3}{2\sqrt{3}} \Rightarrow 2\sqrt{3} \times \sqrt{3} = 3(5t - 3) \Rightarrow 6 = 15t - 9 \Rightarrow 15t = 15 \Rightarrow t = 1$$

تست ۳۲: خطی که از نقطه $A(2, 3)$ عبور کرده و با راستای مثبت محور Xها زاویه 45° می‌سازد، محور Xها را با چه طولی قطع می‌کند؟

- (۱) -۱ (۲) ۱ (۳) -۳ (۴) ۳

$\tan 45^\circ = 1 = m$

$y = mx + h$
 $\frac{3}{2} \in y = x + h$
 $3 = 2 + h$
 $h = 1$



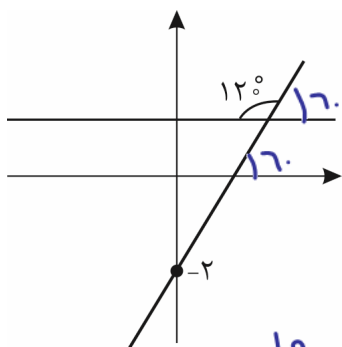
تست ۳۳: معادله خط مقابل کدام است؟

(۱) $y + \sqrt{3}x = 2$

(۲) $y = \sqrt{3}x - 2$ ✓

(۳) $y - \sqrt{3}x - 2 = 0$

(۴) $y = -\sqrt{3}x - 4$



$m = \tan 7^\circ = \sqrt{3}$
 $A(0, -2)$

$A \in y = mx + h$
 $A \in y = \sqrt{3}x + h$
 $-2 = \sqrt{3}(0) + h$
 $-2 = h$
 $y = \sqrt{3}x - 2$

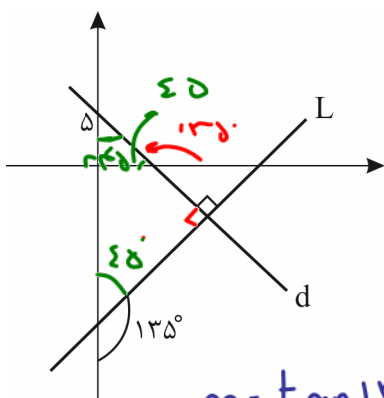
تست ۳۴: معادله خط d در شکل مقابل کدام است؟

(۱) $y = -x + 5$ ✓

(۲) $y = x + 5$

(۳) $y = \sqrt{3}x + 5$

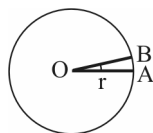
(۴) $y = -\sqrt{3}x + 5$



$m = \tan 135^\circ = -1$
 $d: y = mx + h$
 $y = -x + h$
 $A(0, 5) \in y = -x + h$
 $5 = 0 + h$
 $h = 5$

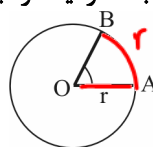
واحدهای کمان و زاویه

درجه: اگر محیط دایره را به ۳۶۰ قسمت مساوی تقسیم کنیم، هر قسمت کمانی به اندازه‌ی یک درجه است و زاویه‌ی مرکزی مقابل به آن مساوی ۱ درجه است. یعنی:



$\widehat{AB} = \frac{2\pi r}{360}$ $\widehat{AOB} = 1$ درجه

رادیان: زاویه‌ی مرکزی روبه‌رو به کمانی که طول آن با شعاع دایره مساوی باشد را یک رادین می‌نامیم. یعنی:



$\widehat{AB} = r$ $\widehat{AOB} = 1$ رادین

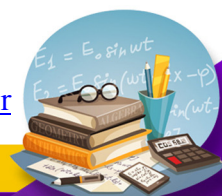
همچنین رادیه به این ترتیب با این فرمول

$P \approx 3.14 \cdot D = 7.28$
 $P = \pi \cdot D = 7.28 \dots$

همچنین رادیه به این ترتیب

محیط = $2\pi r$
 $= 2(3.14 \dots) r = 7.28 r$

Radian
 شعاع: Radius



و به همین ترتیب ۲ رادیان، زاویه‌ی روبه‌رو به کمانی است که طول آن ۲ برابر شعاع دایره باشد و 2π رادیان، زاویه‌ی مرکزی روبه‌رو به کمانی است که طول آن مساوی 2π برابر شعاع دایره (همان محیط دایره) باشد. جالب شد!

هر دایره با هر شعاعی، 360° درجه یا 2π رادیان است.

رابطه‌ی بین رادیان و درجه:

۱۸: $D = \frac{\pi}{180} R$
برای تبدیل زاویه بر حسب رادیان به درجه

$$\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi}$$

R اندازه‌ی زاویه بر حسب رادیان و D اندازه‌ی زاویه بر حسب درجه است، مثلاً اگر $R = 1$ فرض شود، داریم:

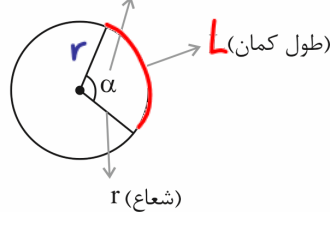
$$D = \frac{180}{\pi} \xrightarrow{\pi \approx 3.14} D \approx 57.3^\circ$$

بیب رادیان = 57.3°
بیب درجه = 1.73 رادیان



هر یک رادیان، تقریباً 57° است.

زاویه مرکزی بر حسب رادیان



2π	$2\pi r$
α	L

$$L = \frac{\alpha \cdot 2\pi r}{2\pi} \rightarrow L = r\alpha$$

رابطه

محل کمانی که روی دایره داریم و قسمتی از محیط دایره است.

اگر طول کمان روبه‌رو به زاویه را با نماد L، شعاع دایره را با r و اندازه‌ی زاویه را با α نشان دهیم، آن‌گاه رابطه‌ی بالا به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\alpha = \frac{L}{r}$$

تست ۳۵: اگر در یک دایره، اندازه‌ی کمان مقابل به زاویه‌ی مرکزی $\theta = 50^\circ$ برابر ۱۰ سانتی‌متر باشد، مساحت این دایره چند برابر محیط آن است؟

$$L = r\theta \rightarrow 10 = r \cdot \frac{50\pi}{180} \rightarrow r = \frac{1800}{50\pi} = \frac{180}{5\pi}$$

$$S = \frac{\pi r^2}{2} = \frac{\pi}{2} \left(\frac{180}{5\pi}\right)^2 = \frac{900}{5\pi} = \frac{180}{\pi}$$

دقت: همان برابری تبدیل به

تست ۳۶: دایره‌ای به مساحت 4π مفروض است. قطاعی به محیط $7/14$ از آن جدا کرده‌ایم. زاویه‌ای که توسط این قطاع از دایره جدا می‌شود، چند درجه است؟ ($\pi = 3.14$)

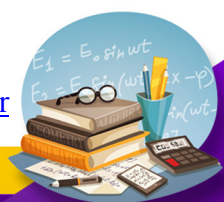
$$S = \pi r^2 = 4\pi \rightarrow r = 2$$

$$2r + (L = r\theta) = 7.14$$

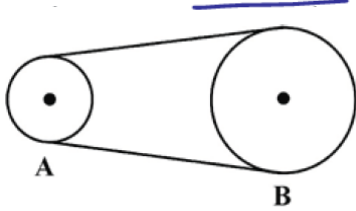
$$4 + 2\theta = 7.14$$

$$2\theta = 3.14$$

$$2\theta = \pi \rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} = 90^\circ$$



تست ۳۷: در شکل زیر چرخ‌دنده‌های A و B توسط نواری لاستیکی به هم وصل شده‌اند. شعاع چرخ‌دنده‌ی A، ۲۰ سانتی‌متر و شعاع چرخ‌دنده‌ی B برابر با ۱ متر است. اگر چرخ‌دنده‌ی B به اندازه‌ی $\frac{3\pi}{4}$ رادیان بچرخد، چرخ‌دنده‌ی A چند دور می‌زند؟



$$L_A = L_B$$

$$r_A \cdot \theta_A = r_B \cdot \theta_B$$

$$r_A \cdot \theta_A = 100 \left(\frac{3\pi}{4} \right)$$

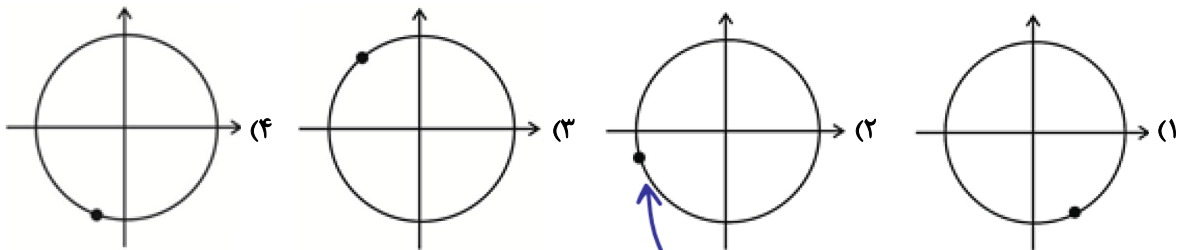
- ۱) ۲/۵
۲) ۵
۳) ۳/۷۵
۴) ۱۰

۲π	بدور راپره
$\frac{15\pi}{4}$?

$$\theta_A = 5 \left(\frac{3\pi}{4} \right) = \frac{15\pi}{4}$$

$$\frac{15\pi/4}{2\pi} = \frac{15}{8} = \frac{1.875}{1} = 1.875 \text{ دور}$$

تست ۳۸: مجموعه دو زاویه 72° و تفاضل آن دو زاویه $\frac{\pi}{15}$ رادیان است. اگر اندازه‌ی زاویه‌ی بزرگ‌تر برابر با x درجه باشد، زاویه‌ی $(5x - 10^\circ)$ به طور تقریبی روی دایره‌ی مثلثاتی کدام است؟



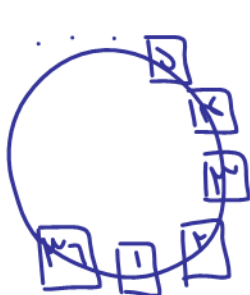
$$\begin{cases} x + y = 72^\circ \\ |x - y| = \frac{\pi}{15} = \frac{120}{15} = 8^\circ \end{cases}$$

$$2x = 80^\circ \rightarrow x = 40^\circ$$

$$5x - 10 = 5(40^\circ) - 10^\circ = 190^\circ$$

تست ۳۹: چرخ و فلکی دارای ۳۶ کابین است و شما در کابین شماره‌ی پنجم قرار دارید. اگر چرخ و فلک به اندازه‌ی $\frac{11\pi}{3}$ رادیان در جهت مثبت مثلثاتی حرکت کند، در موقعیت اولیه‌ی کدام کابین قرار می‌گیرید؟ (شماره‌گذاری کابین‌ها در جهت مثبت مثلثاتی و فاصله‌ی کابین‌ها یکسان است.)

- ۱) ۲۵ ۲) ۳۰ ۳) ۳۴ ۴) ۳۵



$$11 \left(\frac{\pi}{3} = 60^\circ \right) = 660^\circ$$

هر یک دور راپره ۳۶ است

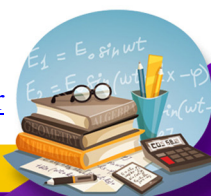
$$\frac{660^\circ}{36} = 18.33$$

۱۸ تا کابین
۰.۳۳ تا کابین

$$\frac{360^\circ}{180^\circ} = 2 \text{ تا کابین}$$

۱۸ + ۲ = ۲۰ تا کابین

درم جلوی اسمر به شماره ۳۵



نکات ساعت

- الف) عقربه دقیقه‌شمار به ازای هر یک دقیقه ۶ درجه طی می‌کند.
- ب) عقربه ساعت‌شمار به ازای هر یک ساعت ۳۰ درجه طی می‌کند.
- پ) عقربه ساعت‌شمار به ازای هر یک دقیقه ۰/۵ درجه طی می‌کند.

ت) زاویه بین عقربه ساعت‌شمار و دقیقه‌شمار از دستور زیر پیدا می‌شود:

نسبت : h
دقیقه : m

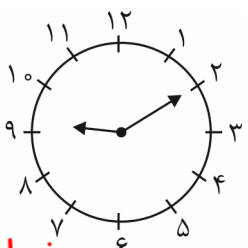
$$\theta = \left| \frac{11m}{2} - 30h \right|$$

تست ۴۰: چه مدت طول می‌کشد تا عقربه‌ی دقیقه‌شمار ساعت به اندازه‌ی $\frac{8\pi}{3}$ رادیان دوران کند؟

۲۳ رادیان	۶ دقیقه
$\frac{8\pi}{3}$?

- (۱) یک ساعت و ۲۰ دقیقه
- (۲) یک ساعت و ۱۰ دقیقه
- (۳) یک ساعت و ۳۰ دقیقه
- (۴) یک ساعت و ۲۰ دقیقه

یک ساعت و ۲۰ دقیقه = ۲۰ + ۶۰ = ۸۰ = ۲(۴۰) = $\frac{8\pi}{3}$ (۲۰) = ۲۳



تست ۴۱: زاویه بین عقربه‌های ساعت‌شمار و دقیقه‌شمار در ساعت ۹:۱۰ چند رادیان است؟

- (۱) $\frac{9\pi}{5}$
- (۲) $\frac{29\pi}{30}$
- (۳) $\frac{29\pi}{36}$
- (۴) $\frac{145\pi}{36}$

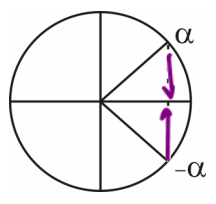


مغز بدل نم

$$\theta = \left| 30h - \frac{11}{2}m \right| = \left| 30(9) - \frac{11}{2}(10) \right| = \left| 270 - 55 \right| = 215 \text{ یا } 360 - 215 = 145$$

باید دید ۱۴۵ یا ۲۱۵ از کدوم کدوم است؟

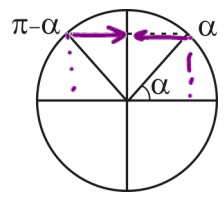
$$\frac{215}{180} = \frac{29\pi}{36}$$



نسبت‌های مثلثاتی α و $-\alpha$ (قرینه)

$$\begin{aligned} \sin(-\alpha) &= -\sin \alpha \\ \cos(-\alpha) &= \cos \alpha \\ \tan(-\alpha) &= -\tan \alpha \\ \cot(-\alpha) &= -\cot \alpha \end{aligned}$$

$\sin(-30^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$
 $\cos(-60^\circ) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$



نسبت‌های مثلثاتی زوایای مکمل $(\alpha, \pi - \alpha)$


$$\begin{aligned} \sin(\pi - \alpha) &= \sin \alpha \\ \cos(\pi - \alpha) &= -\cos \alpha \\ \tan(\pi - \alpha) &= -\tan \alpha \\ \cot(\pi - \alpha) &= -\cot \alpha \end{aligned}$$

$\sin 15^\circ = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$
 $\cos 120^\circ = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$

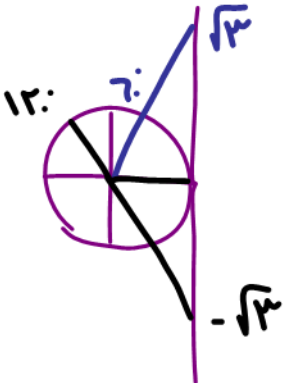


یادت باشه: دو زاویه‌ای که مکمل هستند (جمعشان 180° است) سینوس‌های مساوی دارند، اما کسینوس و تانژانت و کتانژانت قرینه دارند. یعنی به عنوان مثال جمع کسینوس‌های دو زاویه مکمل برابر صفر است. (برای تانژانت و کتانژانت نیز به همین صورت، البته به شرطی که هیچ یک از دو زاویه باعث بی‌معنی شدن تانژانت و کتانژانت نشود.)


۱۵:



۱۲:



۱۵:



$$\sin 150^\circ = \sin(\pi - 30^\circ) = \frac{3}{5}$$

$$\cos 150^\circ = \cos(\pi - 30^\circ) = -\frac{4}{5}$$

$$\tan 150^\circ = \tan(\pi - 30^\circ) = -\frac{3}{4}$$

$$\cot 150^\circ = \cot(\pi - 30^\circ) = -\frac{4}{3}$$

$$\sin 120^\circ = \sin(\pi - 60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 120^\circ = \cos(\pi - 60^\circ) = -\frac{1}{2}$$

$$\tan 120^\circ = \tan(\pi - 60^\circ) = -\sqrt{3}$$

$$\cot 120^\circ = \cot(\pi - 60^\circ) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

۱۵: $\cos 15^\circ + \cos 165^\circ = \text{صفر}$

مثال ۴۲:

۱۲: $\tan 120^\circ = -\sqrt{3}$

۷: $\tan 7^\circ = \sqrt{3}$

صفر

حفظ تجربی

زاویه‌های مکمل

اگر $\alpha + \beta = \pi$ ، پس $\alpha = \pi - \beta$ و در نتیجه:

$\sin \alpha = +\sin \beta$ ، $\cos \alpha = -\cos \beta$ ، $\tan \alpha = -\tan \beta$ ، $\cot \alpha = -\cot \beta$


بنابراین:

اگر دو زاویه مکمل باشند، مجموع کسینوس‌های آن، تانژانت‌های آن‌ها و کتانژانت‌های آن‌ها مساوی صفر است.

مثال ۴۳: حاصل $\tan \frac{\pi}{5} + \tan \frac{6\pi}{5} + \cos \frac{\pi}{5} + \cos \frac{4\pi}{5}$ مساوی صفر است، زیرا:

$\frac{\pi}{5} + \frac{6\pi}{5} = \pi \Rightarrow \tan \frac{\pi}{5} + \tan \frac{6\pi}{5} = 0$ ، $\frac{\pi}{5} + \frac{4\pi}{5} = \pi \Rightarrow \cos \frac{\pi}{5} + \cos \frac{4\pi}{5} = 0$

$\pi - \frac{\pi}{5} = \frac{4\pi}{5}$



تست ۴۴: حاصل عبارت $\cos \frac{\pi}{n} + \cos \frac{2\pi}{n} + \dots + \cos \frac{(n-1)\pi}{n}$ با فرض فرد بودن n کدام است؟

۱ (۱) پاسخ: گزینه‌ی «۲»

۲ (۲) صفر


۳ (۳) n

۴ (۴) $-n$

مثلاً $n=3$

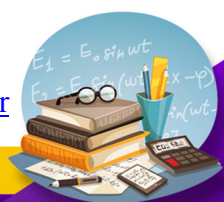
$\cos \frac{\pi}{3} + \cos \frac{2\pi}{3} = 1 - 1 = 0$

$\cos \frac{\pi}{n} + \cos \frac{2\pi}{n} + \dots + \cos \frac{(n-2)\pi}{n} + \cos \frac{(n-1)\pi}{n}$



توی این مدل از سؤالات اولی و آخری رو با هم بگیرید و به همین ترتیب دومی رو با یکی مونده به آخری و ... دقت کنید که اگر این زاویه‌ها را با هم جمع کنیم دو به دو جمعشان π می‌شود. یعنی مکمل هم هستند پس جمع کسینوس‌هایشان صفر می‌شود.

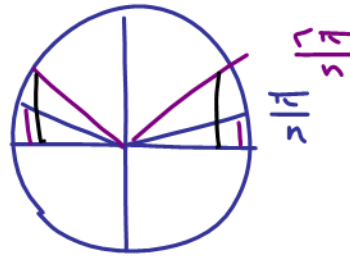
$\frac{\pi}{n} + \frac{(n-1)\pi}{n} = \frac{\pi}{n} + \frac{n\pi - \pi}{n} = \frac{n\pi}{n} = \pi$



$$\frac{2\pi}{n} + \frac{(n-2)\pi}{n} = \frac{2\pi}{n} + \frac{n\pi - 2\pi}{n} = \frac{n\pi}{n} = \pi$$

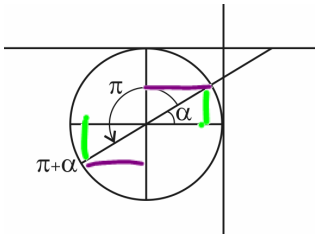
$$\frac{(n-2)\pi}{n} = \pi - \frac{2\pi}{n}$$

$$\frac{(n-1)\pi}{n} = \pi - \frac{\pi}{n}$$



پس جواب صفر است.

نسبت‌های مثلثاتی $(\alpha, \pi + \alpha)$



$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha$$

$$\cot(\pi + \alpha) = \cot \alpha$$

یادت باشه: اگر به زاویه‌ای π رادیان اضافه شود، سینوس و کسینوس قرینه می‌شود، اما تانژانت و کتانژانت ثابت می‌مانند.

تذکر: در سینوس و کسینوس از علامت زوج π و در تانژانت و کتانژانت از علامت فرد π چه قدر چه زوج صرف نظر می‌کنیم. مثال ۴۵:

$$\begin{cases} \sin(2k\pi + \alpha) = \sin \alpha \\ \cos(2k\pi + \alpha) = \cos \alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tan(k\pi + \alpha) = \tan \alpha \\ \cot(k\pi + \alpha) = \cot \alpha \end{cases}$$

$$\sin\left(1 \dots \pi + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{1}$$

$$\sin 21^\circ = \sin(\pi + 3^\circ) =$$

$$\tan\left(17/\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$$

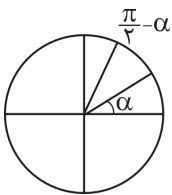
صورت ناقص

$$\cos 21^\circ = \cos(\pi + 3^\circ) =$$

$$\tan 21^\circ = \tan(\pi + 3^\circ) =$$

$$\cot 21^\circ = \cot(\pi + 3^\circ) =$$

نسبت‌های مثلثاتی دو زاویه متمم $(\frac{\pi}{2})$ جمع



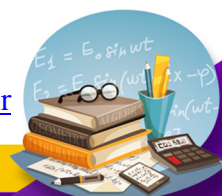
$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan \alpha$$

یادت باشه: در مضارب فرد $\frac{\pi}{2}$ نام نسبت عوض می‌شود. $\tan \Leftrightarrow \cot$ و $\sin \Leftrightarrow \cos$



$$\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = \cos \alpha$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = -\cot \alpha$$

یادت باشه:

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = -\sin \alpha$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = -\tan \alpha$$

تذکر: در تمامی حالات فوق، α را زاویه‌ای حادّه در نظر گرفتیم.

یادت باشه: برای شما نحوه‌ی $\cos\left(\frac{3\pi}{4} + \alpha\right)$ را توضیح می‌دم و بدانید که تمامی حالات فوق را باید با این روش بررسی کنید و حفظ

کردن آن‌ها کار خوبی نیست. α زاویه‌ای حادّه است. $\frac{3\pi}{4} + \alpha$ یعنی در جهت مثبت مثلثاتی (خلاف جهت عقربه‌های ساعت) به

اندازه‌ی $\frac{3\pi}{4}$ (۲۷۰ درجه) حرکت کنیم و سپس چون α داریم یعنی مقداری دیگر نیز در این جهت جلو برویم. پس انتهای کمان، ربع سوم

را رد کرد و در ربع چهارم قرار دارد. حالا می‌گوییم که در ربع چهارم، کسینوس مثبت است، پس خروجی حتماً مثبت است و ضمناً به دلیل

وجود فرد $\frac{3\pi}{4}$ نام نسبت عوض شده و تبدیل به سینوس می‌شود. پس:

$$\cos\left(\frac{3\pi}{4} + \alpha\right) = +\sin \alpha$$

محاسبه‌ی سریع نسبت‌های مثلثاتی $\frac{k\pi}{3}$ ، $\frac{k\pi}{4}$ ، $\frac{k\pi}{6}$ و $\frac{k\pi}{3}$

ابتدا با استفاده از زاویه‌ی مربوطه علامت نسبت رو مشخص کرده، بعد k را ندید گرفته و حاصل نسبت $\frac{\pi}{6}$ یا $\frac{\pi}{4}$ یا $\frac{\pi}{3}$ خواسته شده را قرار

می‌دهیم. به عنوان مثال ببینید:

$$\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \sin\left(7 \times \frac{\pi}{6}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$$

ربع سوم

$$\cot\left(-\frac{5\pi}{3}\right) = -\cot\left(5 \times \frac{\pi}{3}\right) = -\left(-\cot\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = -\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

ربع چهارم

برای تشخیص ساده‌تر زاویه‌هایی مثل $\frac{7\pi}{6}$ یا $\frac{5\pi}{3}$ ، توصیه می‌کنم آن‌ها را در ذهن‌تان به درجه تبدیل کنید، یعنی:

$$7 \times \frac{\pi}{6} = 7 \times 30^\circ = 210^\circ \quad \text{یا} \quad 5 \times \frac{\pi}{3} = 5 \times 60^\circ = 300^\circ$$

(تهری ۹۴)

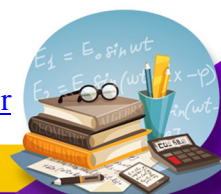
تست ۴۶: حاصل عبارت $\frac{\cos 285^\circ - \sin 255^\circ}{\sin 525^\circ - \sin 105^\circ}$ با فرض $\tan 15^\circ = \frac{1}{28}$ کدام است؟

$\frac{9}{16}$ (۴)

$\frac{16}{9}$ (۳)

$-\frac{9}{16}$ (۲)

$-\frac{16}{9}$ (۱)



تست ۴۷: حاصل عبارت $A = \tan 1^\circ \cdot \tan 2^\circ \dots \tan 88^\circ \cdot \tan 89^\circ$ کدام است؟

- (۱) تعریف نشده (۲) ۱ (۳) صفر (۴) $\frac{1}{2}$

چند نتیجه‌ی مهم از این سؤال: ۲ زاویه‌ای که متمم هستند، تانژانت و کتانژانت‌شان برابر است. $\tan \alpha = \cot \beta$ این اتفاق برای سینوس و

کسینوس نیز صادق است، یعنی:

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} - \beta \Rightarrow \begin{cases} \sin \alpha = \cos \beta \\ \cos \alpha = \sin \beta \end{cases}$$

به عنوان مثال: $\sin 15^\circ = \cos 75^\circ$ ، $\sin 37^\circ = \cos 53^\circ$ و ... ضمناً برای دو زاویه‌ای که متمم هستن، داریم:

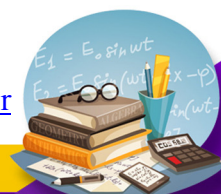
$$\tan \alpha \cdot \tan \beta = 1$$

تست ۴۸: اگر $\tan 15^\circ = a$ باشد، حاصل $\frac{3 \cos 165^\circ - 2 \sin 285^\circ}{3 \sin 345^\circ - 4 \cos 255^\circ}$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{1}{a}$ (۲) $-a$ (۳) $-\frac{2}{a}$ (۴) $-2a$

تست ۴۹: مقدار عبارت $\cos(300^\circ) + \sin(330^\circ) + \cot(75^\circ) + \tan(-84^\circ)$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) $2\sqrt{3}$ (۳) صفر (۴) $2\frac{\sqrt{3}}{3}$



تست ۵۰: حاصل عبارت $\sin^2 \frac{\pi}{8} + \sin^2 \frac{3\pi}{8} + \sin^2 \frac{5\pi}{8} + \sin^2 \frac{7\pi}{8}$ کدام است؟

- ۱) $\frac{5}{2}$ ۲) ۲ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) ۱

(تجزیه تهری ۹۸)

تست ۵۱: حاصل عبارت $\sin\left(\frac{17\pi}{3}\right)\cos\left(-\frac{17\pi}{6}\right) + \tan\left(\frac{19\pi}{4}\right)\sin\left(-\frac{11\pi}{6}\right)$ کدام است؟

- ۱) $-\frac{1}{4}$ ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{1}{2}$

(فارج تهری ۹۹)

تست ۵۲: حاصل عبارت $\tan(285^\circ)\tan(-165^\circ) - \sin(1095^\circ)\cos(255^\circ)$ کدام است؟

- ۱) $\sin^2(15^\circ)$ ۲) $\cos^2(15^\circ)$ ۳) $-\sin^2(15^\circ)$ ۴) $-\cos^2(15^\circ)$

روابط بین نسبت‌های مثلثاتی

$$1) \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

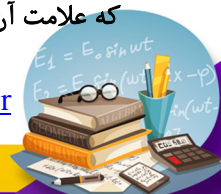
روابط مثلثاتی کتاب دهم عبارت‌اند از:

اگر بخواهیم هر یک از نسبت‌های $\sin \theta$ یا $\cos \theta$ را بر حسب دیگری بیابیم، داریم:

$$\begin{cases} \sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta \Rightarrow \sin \theta = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \theta} \\ \cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta \Rightarrow \cos \theta = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \theta} \end{cases}$$

نتیجه:

که علامت آن‌ها بر مبنای ناحیه‌ای که زاویه در آن قرار گرفته است، مشخص می‌شود.



۲) $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$

۳) $\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$

۴) $\tan \theta = \frac{1}{\cot \theta}$

۵) $\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}$

۶) $\tan \theta \times \cot \theta = 1$

۷) $\frac{1}{\cos^2 \theta} = 1 + \tan^2 \theta$

۸) $\frac{1}{\sin^2 \theta} = 1 + \cot^2 \theta$

۹) $\tan \theta + \cot \theta = \frac{1}{\sin \theta \cdot \cos \theta}$

۱۰) $(\sin \theta + \cos \theta)^2 = 1 + 2 \sin \theta \cos \theta$

تست ۵۳: اگر α در ناحیه سوم بوده و $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$ باشد، حاصل $\frac{\cot \alpha}{\sin \alpha + \tan \alpha}$ کدام است؟

$\frac{45}{31}$ (۴)

$\frac{31}{45}$ (۳)

$\frac{45}{32}$ (۲)

$\frac{32}{45}$ (۱)

تست ۵۴: اگر $\cos \theta = -\frac{3}{5}$ و انتهای کمان θ در ناحیه سوم مثلثاتی باشد، حاصل $\frac{\tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}$ کدام است؟

$\frac{3}{7}$ (۴)

$\frac{12}{7}$ (۳)

$-\frac{3}{7}$ (۲)

$-\frac{12}{7}$ (۱)

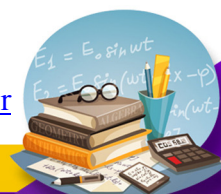
تست ۵۵: حاصل $\frac{\cot^2 \alpha}{1 + \cot^2 \alpha} + \frac{\tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$ در صورت وجود کدام است؟

۱ (۴)

صفر (۳)

$\cos^2 \alpha$ (۲)

$2 \sin^2 \alpha$ (۱)



تست ۵۶: اگر $\tan \theta = \frac{3}{4}$ ، حاصل $(\tan \theta - \cot \theta)^2 - \frac{1}{\cos^2 \theta}$ کدام است؟

$-\frac{11}{9}$ (۱) $-\frac{12}{25}$ (۲) $\frac{16}{25}$ (۳) $\frac{16}{9}$ (۴)

تست ۵۷: اگر $\sin x + \cos x = \frac{1}{3}$ باشد، حاصل $\tan x + \cot x$ کدام است؟

$\frac{3}{8}$ (۱) $-\frac{3}{8}$ (۲) $\frac{8}{3}$ (۳) $-\frac{8}{3}$ (۴)

تست ۵۸: اگر $\sin x \cos x = \frac{1}{3}$ باشد، حاصل $\sin^3 x - \cos^3 x$ کدام است؟

$\frac{3}{5}$ (۱) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (۲) $\pm \frac{9}{4\sqrt{3}}$ (۳) $\pm \frac{4\sqrt{3}}{9}$ (۴)

پاسخ: گزینه‌ی «۴» را تجزیه می‌کنیم:

$$\sin^3 x - \cos^3 x = (\sin x - \cos x)(\sin^2 x + \sin x \cos x + \cos^2 x) = (\sin x - \cos x)(1 + \frac{1}{3}) = \frac{4}{3}(\sin x - \cos x)$$

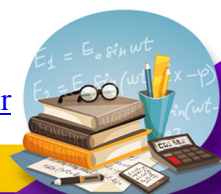
حالا داشته باش:

$$(\sin x - \cos x)^2 = \sin^2 x + \cos^2 x - 2 \sin x \cos x = 1 - 2(\frac{1}{3}) = \frac{1}{3} \Rightarrow (\sin x - \cos x)^2 = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \sin x - \cos x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\sin^3 x - \cos^3 x = \frac{4}{3}(\pm \frac{1}{\sqrt{3}}) = \pm \frac{4}{3\sqrt{3}} = \pm \frac{4\sqrt{3}}{9}$$

پس:



تست ۵۹: اگر $\frac{\sin x + 2 \cos x}{\sin x - 3 \cos x} = 2$ باشد، حاصل $\frac{1}{\sin x \cos x}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{65}{8}$ (۲) $-\frac{65}{8}$ (۳) $\frac{17}{4}$ (۴) $-\frac{17}{4}$

پاسخ: گزینه ی «۱» - طرفین وسطین می کنیم، یادتون باشه هر وقت صورت و مخرج یک کسر هم زمان هم \sin و هم \cos داشت، طرفین

$$\frac{\sin x + 2 \cos x}{\sin x - 3 \cos x} = 2 \Rightarrow \sin x + 2 \cos x = 2 \sin x - 6 \cos x$$

وسطین کنید و بعدش \tan بسازید:

$$\Rightarrow 8 \cos x = \sin x \xrightarrow{\text{تازانته سازی } \div \cos x} 8 = \tan x$$

$$\tan x + \cot x = \frac{1}{\sin x \cos x}$$

از طرفی همیشه داریم:

$$8 + \frac{1}{8} = \frac{1}{\sin x \cos x} \Rightarrow \frac{1}{\sin x \cos x} = \frac{65}{8}$$

تست ۶۰: اگر $2 \sin \alpha = 3 \cos \alpha$ حاصل $\frac{1 + \cot \alpha}{1 + \tan \alpha}$ کدام است؟

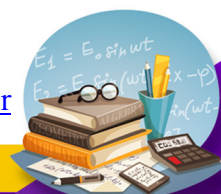
- (۱) $\frac{3}{2}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{9}{4}$ (۴) 6

تست ۶۱: مقدار عبارت $\frac{1 - \sin \alpha}{\cos \alpha} - \frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha}$ به ازای $\alpha = 15^\circ$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (۳) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۴) $\frac{\sqrt{6}}{2}$

تست ۶۲: حاصل $\frac{1}{\sin^4 \theta} - \frac{1}{\sin^2 \theta} - \cot^4 \theta$ کدام است؟

- (۱) $\sin^2 \theta$ (۲) $\cos^2 \theta$ (۳) $\tan^2 \theta$ (۴) $\cot^2 \theta$



تست ۶۳: اگر $\frac{1 + \cot x}{\tan x + 1} = 2$ ، حاصل $\frac{2 \cos x - 3 \sin x}{\sin x + \cos^3 x}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{2}{5}$ (۲) $\frac{1}{10}$ (۳) $\frac{2}{13}$ (۴) $\frac{5}{13}$

تست ۶۴: حاصل $\sqrt{1 + \cot^2 \alpha} \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$ اگر α در ربع دوم دایره‌ی مثلثاتی باشد، کدام است؟

(۱) $\tan \alpha$ (۲) $-\tan \alpha$ (۳) $\cot \alpha$ (۴) $-\cot \alpha$

تست ۶۵: حاصل $\sqrt{1 + \cos x} \sqrt{(1 - \sin x)(1 + \sin x)}$ کدام است؟ (x در ربع سوم است.)

- (۱) $\sin x$ (۲) $-\sin x$ (۳) $\cos x$ (۴) $-\cos x$

پاسخ: گزینه «۲» - با استفاده از روابط $1 - \sin^2 x = \cos^2 x$ و $1 - \cos^2 x = \sin^2 x$ می‌توان نوشت:

$$\sqrt{1 + \cos x} \sqrt{(1 - \sin x)(1 + \sin x)} = \sqrt{1 + \cos x} \sqrt{1 - \sin^2 x} = \sqrt{1 + \cos x} \sqrt{\cos^2 x}$$

اتحاد مزدوج

$$= \sqrt{1 + \cos x} |\cos x| \stackrel{\pi < x < \frac{3\pi}{2}}{=} \sqrt{1 + \cos x} (-\cos x) = \sqrt{1 - \cos^2 x} = \sqrt{\sin^2 x} = |\sin x| \stackrel{\pi < x < \frac{3\pi}{2}}{=} -\sin x$$

تست ۶۶: در مثلث قائم‌الزاویه ABC که در رأس A قائم است، حاصل $\frac{1}{\tan^2 \hat{C} + 1} + \sin^2(\frac{\pi}{2} - \hat{B})$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) -۱ (۴) ۲

پاسخ: گزینه «۲» - روش اول: در مثلث ABC زاویه $A = 90^\circ$ است، پس داریم:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow 90^\circ + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow \hat{B} + \hat{C} = 90^\circ$$

پس دو زاویه B و C متمم‌اند. از طرفی با توجه به این که $\frac{1}{1 + \tan^2 \hat{O}} = \cos^2 \hat{O}$ و $\sin^2(\frac{\pi}{2} - \hat{O}) = \cos^2 \hat{O}$ است، پس می‌توان

$$\frac{1}{1 + \tan^2 \hat{C}} + \sin^2(\frac{\pi}{2} - \hat{B}) = \cos^2 \hat{C} + \cos^2 \hat{B}$$

نوشت:



از طرفی با توجه به این که دو زاویه B و C متمم‌اند، می‌توان گفت $\cos \hat{C} = \sin \hat{B}$ و همچنین $\sin \hat{C} = \cos \hat{B}$ است. پس با استفاده از رابطه $\cos \hat{C} = \sin \hat{B}$ می‌توان نوشت:

$$\cos^2 \hat{C} + \cos^2 \hat{B} = \sin^2 \hat{B} + \cos^2 \hat{B} = 1$$

روش دوم: دو زاویه B و C متمم‌اند، یعنی $\hat{B} + \hat{C} = \frac{\pi}{2}$ ، پس $\hat{B} = \frac{\pi}{2} - \hat{C}$ است. در نتیجه داریم:

$$\frac{1}{1 + \tan^2 \hat{C}} + \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} - \hat{B} \right) = \frac{1}{1 + \tan^2 \hat{C}} + \sin^2 \hat{C} = \cos^2 \hat{C} + \sin^2 \hat{C} = 1$$

تست ۶۷: با فرض $2 \sin^2 x + 3 \cos^2 x = 5 \sin x \cos x$ مقدار $\cos^2 x$ کدام است؟

$$\frac{4}{13} \quad (۴) \qquad 4 \quad (۳) \qquad \frac{13}{4} \quad (۲) \qquad \frac{1}{4} \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه «۴» - طرفین معادله داده‌شده را بر $\cos^2 x$ تقسیم می‌کنیم:

$$2 \sin^2 x + 3 \cos^2 x = 5 \sin x \cos x \xrightarrow{\div \cos^2 x} 2 \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + 3 \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = 5 \frac{\sin x \cos x}{\cos^2 x}$$

$$\Rightarrow 2 \tan^2 x + 3 = 5 \tan x \Rightarrow 2 \tan^2 x - 5 \tan x + 3 = 0 \xrightarrow{a+b+c=0} \begin{cases} \tan x = 1 \\ \tan x = \frac{3}{2} \end{cases}$$

حالا با استفاده از رابطه $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ داریم:

$$\text{حالت اول: } \tan x = 1 \Rightarrow 1 + (1)^2 = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow 2 = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{2}$$

$$\text{حالت دوم: } \tan x = \frac{3}{2} \Rightarrow 1 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow 1 + \frac{9}{4} = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow \frac{13}{4} = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow \cos^2 x = \frac{4}{13}$$

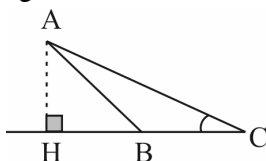
که با توجه به گزینه‌ها پاسخ صحیح $\cos^2 x = \frac{4}{13}$ است.

(سراسری تیرگی ۱۴۰۱)

تست ۶۸: اگر $2 \sin^2 x + \cos^2 x = \frac{4}{3}$ باشد، حاصل $\tan^2 x$ کدام است؟

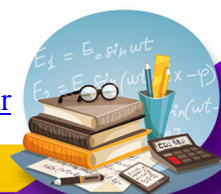
$$\frac{1}{4} \quad (۴) \qquad \frac{1}{2} \quad (۳) \qquad \frac{2}{3} \quad (۲) \qquad \frac{3}{2} \quad (۱)$$

(ریاضی ۹۹)



تست ۶۹: در شکل زیر، فرض کنید $\sin \hat{C} = \frac{5}{13}$ و $CH = 9$. اندازه‌ی ارتفاع AH کدام است؟

$$\frac{3}{5} \quad (۲) \qquad 3/25 \quad (۱) \\ \frac{3}{75} \quad (۴) \qquad 3/6 \quad (۳)$$



فرمول‌های کمان 2α

۱) $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$

مثال: $\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2}$, $\sin 6x = 2 \sin 3x \cos 3x$

۲) $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$

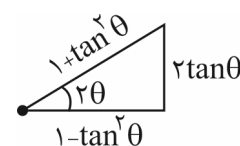
الف) $\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$

ب) $\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$

پ) $1 + \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$

ت) $1 - \cos 2\alpha = 2 \sin^2 \alpha \Rightarrow \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$

«به شدت مهم»



۳) $\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} \xrightarrow{\text{اثبات}} \tan(\alpha + \alpha) = \frac{\tan \alpha + \tan \alpha}{1 - \tan \alpha \tan \alpha} = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$

۴) $\sin 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} \xrightarrow{\text{اثبات}} \frac{2 \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}}{1 + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}} = 2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin 2\alpha$

۵) $\cos 2\alpha = \frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} \xrightarrow{\text{اثبات}} \frac{1 - \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}}{1 + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}} = \frac{\frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}}{\frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}} = \frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos 2\alpha$

۶) $\tan^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} \xrightarrow{\text{اثبات}} \frac{1 - \cos 2\alpha = 2 \sin^2 \alpha}{1 + \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha} = \tan^2 \alpha$

۷) $\tan \alpha + \cot \alpha = \frac{2}{\sin 2\alpha} \xrightarrow{\text{اثبات}} \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} = \frac{1}{\frac{1}{2} \sin 2\alpha} = \frac{2}{\sin 2\alpha}$

۸) $\cot \alpha - \tan \alpha = 2 \cot 2\alpha \xrightarrow{\text{اثبات}} \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} = \frac{\cos 2\alpha}{\frac{1}{2} \sin 2\alpha} = \frac{2 \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = 2 \cot 2\alpha$

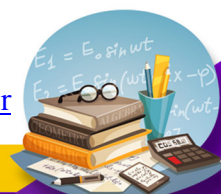
*۹) $\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$

*۱۰) $\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$

*۱۱) $\sin \alpha \sin(60^\circ - \alpha) \sin(60^\circ + \alpha) = \frac{1}{4} \sin 3\alpha$

*۱۲) $\cos \alpha \cos(60^\circ - \alpha) \cos(60^\circ + \alpha) = \frac{1}{4} \cos 3\alpha$

*۱۳) $\tan \alpha \tan(60^\circ - \alpha) \tan(60^\circ + \alpha) = \tan 3\alpha$



تست ۷۰: حاصل عبارت $\sin(7/5^\circ)\sin(97/5^\circ)\cos(15^\circ)$ چه قدر است؟

$-\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{1}{8}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۲) $-\frac{1}{8}$ (۱)

(فارح ۹۲)

تست ۷۱: اگر $f(x) = x - \sqrt{x}$ و $g(x) = \sin^2 x$ باشند، ضابطه‌ی تابع $f \circ g$ کدام است؟

$\frac{1}{2} \cos^2 2x$ (۴) $\frac{1}{4} \cos^2 2x$ (۳) $-\frac{1}{2} \sin^2 2x$ (۲) $-\frac{1}{4} \sin^2 2x$ (۱)

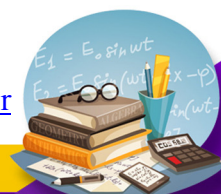
تست ۷۲: حاصل عبارت $\cos \frac{\pi}{7} \cdot \cos \frac{2\pi}{7} \cdot \cos \frac{4\pi}{7}$ کدام است؟

$-\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{1}{4}$ (۳) $-\frac{1}{8}$ (۲) $\frac{1}{8}$ (۱)

(ریاضی فارح ۱۴۰۰)

تست ۷۳: ساده‌شده عبارت $\frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta} + \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta}$ کدام است؟

$2 \tan \frac{\theta}{2}$ (۴) $2 \cot \frac{\theta}{2}$ (۳) $\sin \frac{\theta}{2}$ (۲) $\cos \frac{\theta}{2}$ (۱)



(ریاضی فارج ۱۴۰۱)

تست ۷۴: اگر انتهای کمان x در ربع سوم و $\frac{1-\sin x}{1+\sin x} = 4$ باشد، مقدار صحیح $\tan \frac{x}{2}$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) -۲ (۳) ۳ (۴) -۳

تست ۷۵: حاصل $\sin x \cos x (\cos^2 x - \sin^2 x)$ به ازای $x = 15^\circ$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{8}$ (۳) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ (۴) $\frac{\sqrt{3}}{8}$

پاسخ: گزینه «۴» - با استفاده از روابط $2 \sin \theta \cos \theta = \sin 2\theta$ و $\cos^2 \theta - \sin^2 \theta = \cos 2\theta$ می توان نوشت:

$$\begin{aligned} \sin x \cos x (\cos^2 x - \sin^2 x) &= \sin x \cos x (\cos^2 x - \sin^2 x) \underbrace{(\cos^2 x + \sin^2 x)}_1 = \frac{1}{2} \sin 2x \cos 2x = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \sin(4x) \right) \\ &= \frac{1}{4} \sin(4x) \end{aligned}$$

$$\frac{1}{4} \sin(4x) = \frac{1}{4} \sin(60^\circ) = \frac{1}{4} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{8}$$

حالا با جای گذاری $x = 15^\circ$ خواهیم داشت:

تست ۷۶: با فرض $\sin \alpha = \frac{1}{4}$ ، مقدار $\cos 4\alpha$ کدام است؟

- (۱) $\frac{17}{64}$ (۲) $\frac{17}{32}$ (۳) $\frac{-17}{64}$ (۴) $\frac{-17}{32}$

پاسخ: گزینه «۲» - ابتدا با استفاده از رابطه $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$ مقدار $\cos 2\alpha$ را به دست می آوریم:

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\left(\frac{1}{4}\right)^2 = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

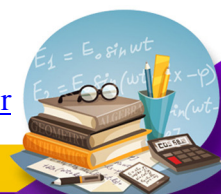
حالا با استفاده از رابطه $\cos 4\alpha = 2\cos^2(2\alpha) - 1$ برای محاسبه مقدار $\cos 4\alpha$ می توان نوشت:

$$\cos 4\alpha = 2\left(\frac{7}{8}\right)^2 - 1 = \frac{98}{64} - 1 = \frac{34}{64} = \frac{17}{32}$$

تست ۷۷: اگر زاویه α در ناحیه سوم مثلثاتی و $\tan \alpha = \frac{3}{4}$ باشد، مقدار $\frac{\cos(\alpha + \pi) + \cos(\alpha - \frac{\pi}{2})}{\cot(2\alpha)}$ کدام است؟

(سراسری تهرانی ۱۴۰۰)

- (۱) $-\frac{96}{175}$ (۲) $\frac{1056}{175}$ (۳) $\frac{96}{175}$ (۴) $-\frac{1056}{175}$



(سراسری تهرپی ۱۴۰۰)

تست ۷۸: اگر $f(x) = 16 \cos^2(3x) \cos^2(6x) \cos^2(12x) \cos^2(24x)$ مقدار $f\left(\frac{\pi}{36}\right)$ کدام است؟

$\frac{6+3\sqrt{3}}{16}$ (۴) $\frac{6+\sqrt{3}}{16}$ (۳) $\frac{6-\sqrt{3}}{16}$ (۲) $\frac{6-3\sqrt{3}}{16}$ (۱)

تست ۷۹: اگر $\cot x - \tan x = 3$ باشد، حاصل عبارت $M = \frac{2 \cot 4x}{2 \cot 2x + 3 \tan 2x}$ کدام است؟

$-\frac{5}{6}$ (۴) $-\frac{1}{6}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{1}{6}$ (۱)

پاسخ: گزینه «۱» - می‌دانیم $\cot \theta - \tan \theta = 2 \cot 2\theta$ است، پس می‌توان نوشت:

$$2 \cot 2x = 3 \Rightarrow \cot 2x = \frac{3}{2} \Rightarrow \tan 2x = \frac{2}{3}$$

$$2 \cot 4x = \cot 2x - \tan 2x = \frac{3}{2} - \frac{2}{3} = \frac{9-4}{6} = \frac{5}{6}$$

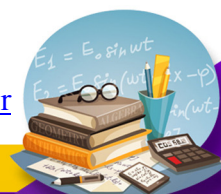
از طرفی مطابق فرمول بالا داریم:

در نهایت با جای‌گذاری مقادیر به‌دست‌آمده در خواسته مسئله، مقدار M به دست می‌آید، یعنی:

$$M = \frac{2 \cot 4x}{2 \cot 2x + 3 \tan 2x} = \frac{\frac{5}{6}}{2\left(\frac{3}{2}\right) + 3\left(\frac{2}{3}\right)} = \frac{\frac{5}{6}}{3+2} = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{1}} = \frac{1}{6}$$

تست ۸۰: اگر $\frac{\tan \alpha (1 - \tan^2 \alpha)}{(1 + \tan^2 \alpha)^2} = \frac{1}{8}$ ، حاصل $\sin 4\alpha$ کدام است؟

$\frac{3}{4}$ (۴) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۱)



چند تا اتحاد مهم و کاربردی

$$1) \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$$

اثبات: $(\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x) = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$

$$2) \sin^4 x + \cos^4 x = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 4x$$

اثبات: $\sin^4 x + \cos^4 x$

$$\begin{aligned} (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x &= 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x = 1 - 2(\sin x \cos x)^2 = 1 - 2\left(\frac{1}{2} \sin 2x\right)^2 \\ &= 1 - 2 \times \frac{1}{4} \sin^2 2x = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{1 - \cos 4x}{2}\right) = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cos 4x = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 4x \end{aligned}$$

توی اثبات این فرمول از اتحاد $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$ استفاده کردیم که $a = \sin^2 x$ و $b = \cos^2 x$ بود.

$$3) \sin^6 x + \cos^6 x = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x = \frac{5}{8} + \frac{3}{8} \cos 4x$$

اثبات: $\sin^6 x + \cos^6 x$

$$\begin{aligned} (\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - 3\sin^2 x \cos^2 x (\sin^2 x + \cos^2 x) &= 1 - 3\sin^2 x \cos^2 x = 1 - 3(\sin x \cos x)^2 \\ &= 1 - 3\left(\frac{1}{2} \sin 2x\right)^2 = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x = 1 - \frac{3}{4} \left(\frac{1 - \cos 4x}{2}\right) = 1 - \frac{3}{8} + \frac{3}{8} \cos 4x = \frac{5}{8} + \frac{3}{8} \cos 4x \end{aligned}$$

توی اثبات این فرمول از اتحاد $a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$ استفاده کردیم که $a = \sin^2 x$ و $b = \cos^2 x$ بود.
یادت باشه: فرمول‌های ۲ و ۳ در فصل مشتق کاربرد زیادی خواهند داشت.

$$4) (\sin x + \cos x)^2 = 1 + \sin 2x$$

$$(\sin x - \cos x)^2 = 1 - \sin 2x$$

اثبات: $(\sin x \pm \cos x)^2$

$$\sin^2 x + \cos^2 x \pm 2 \sin x \cos x = 1 \pm \sin 2x$$

یادت باشه: فرمول شماره ۴ در فصل حد، برای رفع ابهام کاربرد زیادی دارد.

تست ۸۱: حاصل $\sqrt{1 + \sin 2x} - \sin x$ وقتی $\frac{\pi}{3} < x < \frac{3\pi}{4}$ باشد، کدام است؟

۲ sin x - cos x (۴)

cos x (۳)

-۲ sin x (۲)

صفر (۱)



(تقریبی ۹۵)

تست ۸۲: اگر $\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{1}{4}$ باشد، مقدار $\cos(\frac{3\pi}{2} - 2\alpha)$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{3}{4}$ (۲) $-\frac{3}{8}$ (۳) $\frac{3}{8}$ (۴) $\frac{3}{4}$

معادلات مثلثاتی

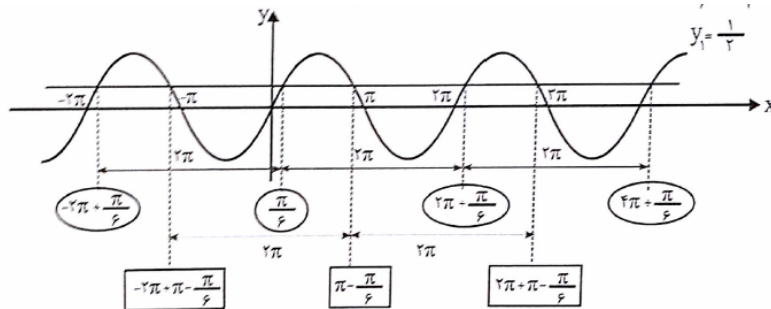
به معادلاتی که مجهولشان نسبت‌های مثلثاتی باشد، معادلات مثلثاتی می‌گوییم و هدف از حل آن‌ها مشخص کردن همه‌ی کمان‌هایی (زوایایی) است که در معادله صدق می‌کند.

چون توابع مثلثاتی متناوب هستند، اگر خط $y = k$ آن‌ها را قطع کند، برخورد در بیش از یک نقطه رخ می‌دهند و بی‌شمار جواب داریم که برای گزارش طول نقاط تلاقی به روش زیر عمل می‌کنیم:

به عنوان مثال: اگر از ما بپرسند چه x ‌هایی در معادله‌ی $2 \sin x - 1 = 0$ صدق می‌کند، می‌توانیم از طریق زیر عمل کنیم:

$$2 \sin x - 1 = 0 \Rightarrow \sin x = \frac{1}{2}$$

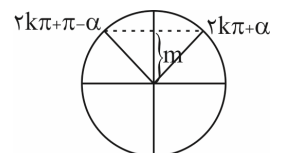
از روش رسم و تقاطع دو تابع y_1 و y_2 دقیقاً x ‌هایی را پیدا می‌کنیم که در معادله‌ی فوق صدق می‌کنند.



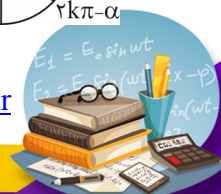
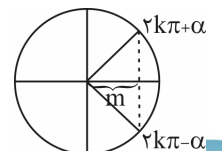
حل معادله‌ی ساده‌ی مثلثاتی

برای این که هر بار مجبور به رسم و تقاطع دو تابع نشویم، به کمک اتحادها و روابط و یا نسبت زوایای متمم، معادله را ساده می‌کنیم به طوری که به تساوی دو نسبت هم‌نام برسیم و به کمک ۴ مسئله‌ی زیر، معادله حل می‌شود.

$$1) \sin x = m \xrightarrow{m = \sin \alpha} \sin x = \sin \alpha \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \alpha \\ x = 2k\pi + \pi - \alpha \end{cases}$$

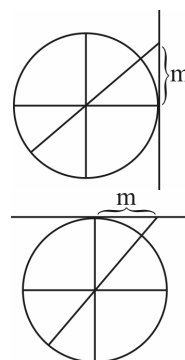


$$2) \cos x = m \xrightarrow{m = \cos \alpha} \cos x = \cos \alpha \Rightarrow x = 2k\pi \pm \alpha$$



$$۳) \tan x = m \xrightarrow{m=\tan \alpha} \tan x = \tan \alpha \Rightarrow x = k\pi + \alpha$$

$$۴) \cot x = m \xrightarrow{m=\cot \alpha} \cot x = \cot \alpha \Rightarrow x = k\pi + \alpha$$



حالات مختلف معادلات مثلثاتی

۱- حالت اول: در این حالت در معادله مثلثاتی فقط یک نسبت مثلثاتی با زاویه مجهول و از درجه اول وجود دارد که با کمک ۴ مسئله‌ای که گفته شد، جواب را می‌یابیم.
مثال ۸۳: معادلات زیر را حل کنید.

$$۱) ۲ \sin x - \sqrt{۳} = ۰$$

$$۲ \sin x = \sqrt{۳} \Rightarrow \sin x = \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \sin \frac{\pi}{۳} \Rightarrow \begin{cases} x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۳} \\ x = ۲k\pi + \pi - \frac{\pi}{۳} \end{cases}$$

$$۲) ۲ \sin x + \sqrt{۳} = ۰$$

$$۲ \sin x = -\sqrt{۳} \Rightarrow \sin x = \frac{-\sqrt{۳}}{۲} = \sin\left(\frac{-\pi}{۳}\right) \Rightarrow \begin{cases} x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۳} \\ x = ۲k\pi + \pi + \frac{\pi}{۳} \end{cases}$$

$$۳) ۲ \cos x - \sqrt{۳} = ۰$$

$$۲ \cos x = \sqrt{۳} \Rightarrow \cos x = \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \cos \frac{\pi}{۶} \Rightarrow x = ۲k\pi \pm \frac{\pi}{۶}$$

$$۴) ۲ \cos x + \sqrt{۳} = ۰$$

$$۲ \cos x = -\sqrt{۳} \Rightarrow \cos x = \frac{-\sqrt{۳}}{۲} = \cos\left(\frac{\Delta\pi}{۶}\right) \Rightarrow x = ۲k\pi \pm \frac{\Delta\pi}{۶}$$

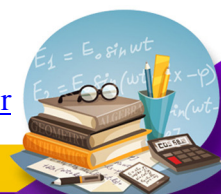
یادت باشه: چنانچه کسینوس یک کمان منفی را خواستند، کمان را از ربع دوم انتخاب کنید. اما در سایر نسبت‌های مثلثاتی برای کمان منفی، به ربع چهارم یا کمان قرینه رجوع می‌کنیم.

$$۵) \tan x - \sqrt{۳} = ۰$$

$$\tan x = \sqrt{۳} = \tan \frac{\pi}{۳} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{۳}$$

$$۶) \tan x + \sqrt{۳} = ۰$$

$$\tan x = -\sqrt{۳} = \tan\left(-\frac{\pi}{۳}\right) \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{۳}$$



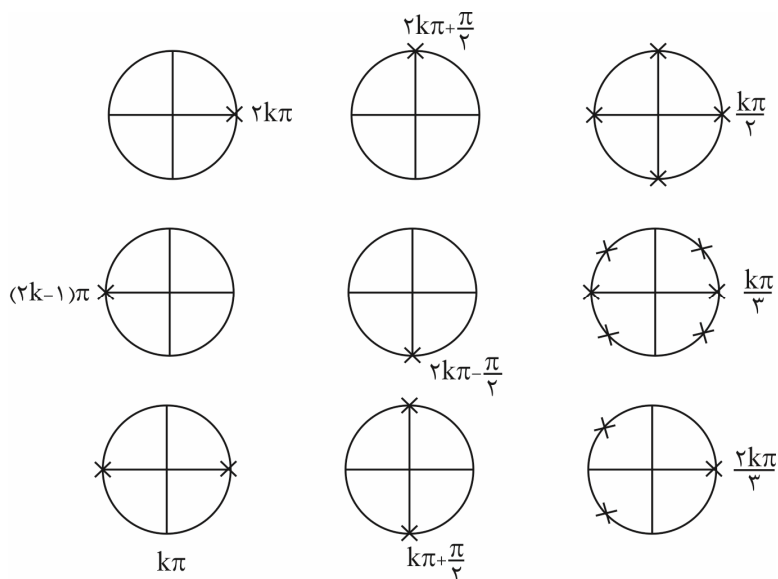
۷) $\cot x - \sqrt{3} = 0$

$\cot x = \sqrt{3} = \cot \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{6}$

۸) $\cot x + \sqrt{3} = 0$

$\cot x = -\sqrt{3} = \cot(-\frac{\pi}{6}) \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{6}$

آدرس نقاط مهم روی دایره مثلثاتی

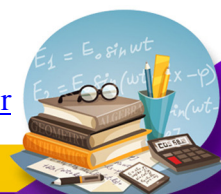


حل معادلات خاص مثلثاتی

برخی از معادلات هستند که جواب‌های آن‌ها به فرم ساده‌تری هم قابل نمایش است. این معادلات را در جدول زیر بررسی می‌کنیم.

معادله	جواب کلی	آدرس روی دایره	معادله	جواب کلی	آدرس روی دایره
$\sin x = 0$	$x = k\pi$		$\cos x = 0$	$x = k\pi + \frac{\pi}{2}$	
$\sin x = 1$	$x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$		$\cos x = 1$	$x = 2k\pi$	
$\sin x = -1$	$x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$		$\cos x = -1$	$x = (2k+1)\pi$	

یادت باشه: $\sin x = \pm 1$ و $\cos x = \pm 1$ ریشه مضاعف دارند.



۲- حالت دوم: در این حالت فقط و فقط دو نسبت مثلثاتی با ضریب ۱ یا -۱ و توان ۱ وجود دارند که معادله را به تساوی دو نسبت هم‌نام تبدیل می‌کنیم (اگر هم‌نام نبودند از زوایای متمم استفاده می‌کنیم) و به کمک ۴ مسئله گفته‌شده، مسئله را حل می‌کنیم. به طور کلی کمان می‌تواند به جز x ، چیز دیگری هم باشد. مثلاً: فرض کنید u یک عبارت X دار است.

$$\sin u = \sin \alpha \Rightarrow \begin{cases} u = 2k\pi + \alpha \\ u = 2k\pi + \pi - \alpha \end{cases}$$

$$\cos u = \cos \alpha \Rightarrow u = 2k\pi \pm \alpha$$

$$\tan u = \tan \alpha \Rightarrow u = k\pi + \alpha$$

$$\cot u = \cot \alpha \Rightarrow u = k\pi + \alpha$$

مثال ۸۴: معادله‌ی زیر را حل کنید.

۱) $\sin 3x - \sin x = 0$

$$\sin 3x = \sin x \Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi + x \Rightarrow 2x = 2k\pi \Rightarrow x = k\pi \\ 3x = 2k\pi + \pi - x \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

(فارج تهری ۹۳)

تست ۸۵: جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $\frac{\sin 3x}{\cos(\frac{3\pi}{2} + x)} = 1$ ، به کدام صورت است؟

$$\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \quad (۴)$$

$$2k\pi \pm \frac{3\pi}{4} \quad (۳)$$

$$2k\pi \pm \frac{\pi}{4} \quad (۲)$$

$$k\pi + \frac{\pi}{4} \quad (۱)$$

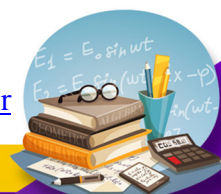
۲) $\sin 3x + \sin x = 0$

مثال ۸۶: معادله زیر را حل کنید.

$$\sin 3x = -\sin x$$

قرار شد چپ و راست مساوی یک نسبت همنام داشته باشیم (که این‌جا داریم) و هر دو، پشتشون علامت مثبت داشته باشه. این‌جا برای این که از شر منفی خلاص بشیم از خاصیت $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$ استفاده می‌کنیم یعنی به جای $-\sin x$ می‌نویسیم $\sin(-x)$ پس:

$$\sin \underset{u}{3x} = \sin \underset{\alpha}{(-x)} \Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi + (-x) \\ 3x = 2k\pi + \pi - (-x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x = 2k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} \\ 2x = 2k\pi + \pi \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2} \end{cases}$$



(فارج تهری ۹۶)

تست ۸۷: مجموع جواب‌های مثلثاتی $\sin 2x + \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 0$ در بازه $[0, 2\pi]$ کدام است؟

- $\frac{14\pi}{3}$ (۱) 4π (۲) $\frac{9\pi}{2}$ (۳) 5π (۴)

(سراسری تهری ۱۴۰۰)

تست ۸۸: تعداد جواب‌های معادله مثلثاتی $\cos^2(x) - \sin^2(x) \cos(3x) = 1$ در فاصله $[0, 2\pi]$ کدام است؟

- ۱ (۱) ۳ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴)

(فارج ریاضی ۹۵)

تست ۸۹: مجموع جواب‌های معادله مثلثاتی $\sin\left(x + \frac{\pi}{8}\right) + \cos\left(x - \frac{3\pi}{8}\right) = 1$ در بازه $[0, 2\pi]$ برابر کدام است؟

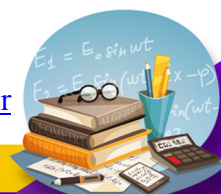
- $\frac{3\pi}{4}$ (۱) $\frac{5\pi}{4}$ (۲) $\frac{3\pi}{2}$ (۳) $\frac{7\pi}{4}$ (۴)

تست ۹۰: فرض کنید A مجموعه جواب‌های معادله مثلثاتی $(1 + \cos 2\alpha)(1 + \cos 4\alpha)(1 + \cos 8\alpha) = \frac{1}{8}$ در بازه $[0, \pi]$ باشد،

(سراسری ریاضی ۱۴۰۰)

ماکزیمم عضو مجموعه A کدام است؟

- $\frac{5}{7}\pi$ (۱) $\frac{6}{7}\pi$ (۲) $\frac{7}{9}\pi$ (۳) $\frac{8}{9}\pi$ (۴)



(ریاضی ۹۸)

تست ۹۱: مجموع جواب‌های معادله مثلثاتی $\sin^3 x + \cos^3 x = 1 - \frac{1}{3} \sin 2x$ در بازه $[0, 2\pi]$ کدام است؟

- $\frac{5\pi}{2}$ (۱) $\frac{7\pi}{2}$ (۲) 2π (۳) 3π (۴)

(فارج ریاضی ۹۸)

تست ۹۲: مجموع جواب‌های معادله مثلثاتی $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{1}{2}$ در بازه $[0, 2\pi]$ ، کدام است؟

- 4π (۴) $\frac{7\pi}{2}$ (۳) 3π (۲) $\frac{5\pi}{2}$ (۱)

(فارج تهری ۸۶)

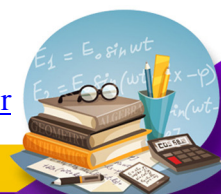
تست ۹۳: جواب کلی معادله مثلثاتی $2 \tan x \cdot \cos^2 x = 1$ به کدام صورت است؟

- $2k\pi + \frac{\pi}{4}$ (۴) $2k\pi - \frac{\pi}{4}$ (۳) $k\pi + \frac{\pi}{4}$ (۲) $k\pi - \frac{\pi}{4}$ (۱)

۳) $\cos 3x - \cos x = 0$.

مثال ۹۴: معادله زیر را حل کنید.

$$\cos \underbrace{3x}_u = \cos \underbrace{x}_\alpha \Rightarrow 3x = 2k\pi \pm x \Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi + x \Rightarrow 2x = 2k\pi \Rightarrow x = k\pi \\ 3x = 2k\pi - x \Rightarrow 4x = 2k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} \end{cases}$$



(تقریبی ۹۱)

تست ۹۵: جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $\sin^2 x - \cos^2 x = \sin\left(\frac{3\pi}{4} + x\right)$ به کدام صورت است؟

$2k\pi \pm \frac{3\pi}{4}$ (۴)
 $2k\pi + \frac{\pi}{3}$ (۳)
 $\frac{2k\pi}{3}$ (۲)
 $\frac{k\pi}{3}$ (۱)

۴) $\cos 3x + \cos x = 0$

مثال ۹۶: معادله زیر را حل کنید.

$\cos 3x = -\cos x$

الان چی کار کنم آقا؟ چطوری از شرط منفی خلاص بشیم؟ آخه کسینوس که خاصیت $\cos(-\alpha) = -\cos \alpha$ رو نداره ☹️
ایرادی نداره از یه خاصیت دیگه می‌تونیم واسش استفاده کنیم. کسینوسه دیگه! همیشه ساز مخالف میزنه. ببینید:

$\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$

پس به جای $-\cos \alpha$ بذارید $\cos(\pi - \alpha)$. به همین راحتی ☺️

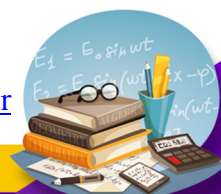
$\cos 3x = -\cos x \Rightarrow \cos 3x = \cos(\pi - x) \Rightarrow 3x = 2k\pi \pm (\pi - x)$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi + \pi - x \Rightarrow 4x = 2k\pi + \pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \\ 3x = 2k\pi - \pi + x \Rightarrow 2x = 2k\pi - \pi \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

(فارج تقریبی ۹۳ و ۹۸)

تست ۹۷: جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $\cos 3x + \cos x = 0$ با شرط $\cos x \neq 0$ کدام است؟

$k\pi + \frac{\pi}{4}$ (۴)
 $k\pi - \frac{\pi}{4}$ (۳)
 $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$ (۲)
 $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$ (۱)



اگر دو طرف هم‌نسبت نباشن ولی توانشون (یک) باشد باید کاری کنیم که هم‌نسبت بشن. فقط کافیه از این روابط استفاده کنیم:

$$\sin \alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

$$\cos \alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

$$\tan \alpha = \cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

$$\cot \alpha = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

۵) $\sin 3x - \cos 2x = 0$

مثال ۹۸: معادله زیر را حل کنید.

$$\sin 3x = \cos 2x \Rightarrow \sin \underbrace{3x}_u = \sin\left(\underbrace{\frac{\pi}{2} - 2x}_\alpha\right) \Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} - 2x \Rightarrow 5x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow \boxed{x = \frac{2k\pi}{5} + \frac{\pi}{10}} \\ 3x = 2k\pi + \pi - \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Rightarrow \boxed{x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}} \end{cases}$$

تست ۹۹: جواب‌های معادله مثلثاتی $\sin(2x - \frac{\pi}{4}) = \cos(x + \frac{\pi}{4})$ با شرط $x \neq k\pi$ که در آن k یک عدد صحیح است، کدام است؟

(تهری ۹۹)

$$\frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \quad (۴)$$

$$\frac{2k\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \quad (۳)$$

$$\frac{2k\pi}{3} \quad (۲)$$

$$\frac{k\pi}{3} \quad (۱)$$

۶) $\sin 3x + \cos x = 0$

مثال ۱۰۰: معادله زیر را حل کنید.

این‌طور موقع‌ها که یه دونه از این‌ها منفی داره کاری کن منفی بیاد پشت سینوس. اینطوری راحت‌تر از شرّ منفی خلاص می‌شی. ببین:

$$\sin 3x = -\cos x$$

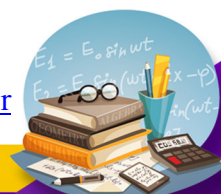
راه طولانی: چون اول باید منفی پشت کسینوس رو از بین ببری بعدش کسینوس رو تبدیل به سینوس کنی.

$$\cos x = -\sin 3x = \sin(-3x)$$

راه خوبتر:

$$\cos x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (-3x)\right) \Rightarrow \cos x = \cos\left(\frac{\pi}{2} + 3x\right) \Rightarrow x = 2k\pi \pm \left(\frac{\pi}{2} + 3x\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} + 3x \Rightarrow -2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = -k\pi - \frac{\pi}{4} \xrightarrow{\text{فرقی با } -k\pi \text{ نداره}} \boxed{x = k\pi - \frac{\pi}{4}} \\ x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} - 3x \Rightarrow 4x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \Rightarrow \boxed{x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8}} \end{cases}$$



(تجربی ۹۴)

تست ۱۰۱: جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $2 \cos^2 x + 2 \sin x \cos x = 1$ ، به کدام صورت است؟

(۴) $k\pi + \frac{\pi}{8}$

(۳) $k\pi - \frac{\pi}{8}$

(۲) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$

(۱) $\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$

معادلات تانژانتی

مثال ۱۰۲: معادله زیر را حل کنید و تعداد جواب‌ها را در فاصله $[0, 2\pi]$ مشخص کنید.

۷) $\tan 3x - \tan x = 0$

$$\tan \underbrace{3x}_u = \tan \underbrace{x}_\alpha \Rightarrow 3x = k\pi + x \Rightarrow 2x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2}$$

k	۰	۱	۲	۳	۴
x	۰	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
		↓		↓	
		غ.ق.ق		غ.ق.ق	

۸) $\tan 3x + \tan x = 0 \Rightarrow \tan 3x = -\tan x$

واسه تانژانت هم مثل سینوس می‌تونیم از خاصیت $\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$ استفاده کنیم:

$$\tan \underbrace{3x}_u = \tan \underbrace{(-x)}_\alpha \Rightarrow 3x = k\pi + (-x) \Rightarrow 4x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{4}$$

k	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸
x	۰	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
			↓				↓		
			غ.ق.ق				غ.ق.ق		

کتانژانت هم دقیقاً مثل تانژانت.

(تجربی ۹۷ و ریاضی ۹۹)

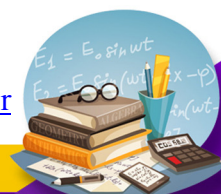
تست ۱۰۳: جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $\tan x \tan 3x = 1$ ، کدام است؟

(۴) $\frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{8}$

(۳) $\frac{k\pi}{2} + \frac{3\pi}{8}$

(۲) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$

(۱) $\frac{k\pi}{4}$



مثال ۱۰۴: معادلات زیر را حل کنید.

$$1) \sin x + \sqrt{3} \cos x = 0$$

$$\xrightarrow{\div \cos x} \tan x + \sqrt{3} = 0 \Rightarrow \tan x = -\sqrt{3} = \tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{3}$$

اگر سینوس و کسینوس توان دو داشتند، می‌تونیم از روش‌های حل معادله درجه ۲ استفاده کنیم.



تست ۱۰۵: از معادله $2 \sin^2 2x - \sin 2x - 1 = 0$ برای x در فاصله صفر تا 2π چند جواب به دست می‌آید؟

۵ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۶ (۱)

$$\begin{cases} (1) \sin^2 u = \sin^2 \alpha \\ (2) \cos^2 u = \cos^2 \alpha \\ (3) \tan^2 u = \tan^2 \alpha \\ (4) \cot^2 u = \cot^2 \alpha \end{cases} \Rightarrow \boxed{u = k\pi \pm \alpha}$$



(تجربی ۹۶)

تست ۱۰۶: جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $\cos 2x + 2 \cos^2 x = 0$ کدام است؟

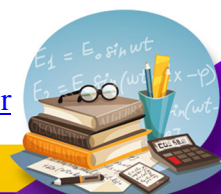
$$k\pi \pm \frac{\pi}{6} \quad (4)$$

$$k\pi \pm \frac{\pi}{3} \quad (3)$$

$$2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \quad (2)$$

$$2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \quad (1)$$

یادت باشه: حواست به رادیکال فرجه زوج باشه.



تست ۱۰۷: تمام جواب‌های معادله $\sqrt{\sin x} = \sqrt{\cos x}$ کدام است؟

$$x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \quad (۴)$$

$$x = 2k\pi \quad (۳)$$

$$x = k\pi + \frac{\pi}{4} \quad (۲)$$

$$x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \quad (۱)$$

(سراسری ریاضی ۹۳)

تست ۱۰۸: جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $\frac{\sin^3 x}{\sin x} = 2 \cos^2 x$ کدام است؟

$$k\pi + \frac{\pi}{4} \quad (۴)$$

$$k\pi - \frac{\pi}{4} \quad (۳)$$

$$\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \quad (۲)$$

$$\frac{k\pi}{2} \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه‌ی «۲»

$$\frac{3 \sin x - 4 \sin^3 x}{\sin x} = 2 \cos^2 x$$

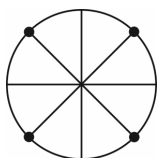
حالا تفکیک:

$$3 - 4 \sin^2 x = 2(1 - \sin^2 x)$$

$$3 - 4 \sin^2 x = 2 - 2 \sin^2 x \Rightarrow -2 \sin^2 x = -1 \Rightarrow \sin^2 x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin^2 x = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow \sin^2 x = \left(\sin \frac{\pi}{4}\right)^2 \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{4}$$

طراح جفتش رو توی گزینه‌ها گذاشته، ولی از روی دایره تصمیم می‌گیریم.

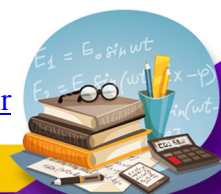
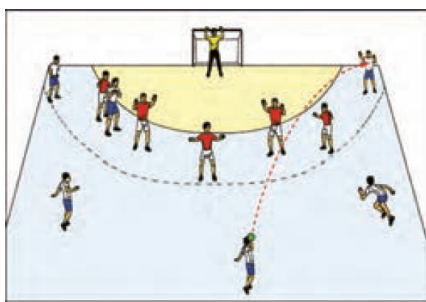


$$x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$$

گزینه‌ی «۲» درسته. ضمناً چون این جواب‌ها منجر کسر اصلی رو صفر نمی‌کنن پس اوکیه!

مثال ۱۰۹: یک بازیکن هندبال توپ را با سرعت 16 m/s برای هم‌تیمی خود که در $12/8$ متری او قرار دارد پرتاب می‌کند. اگر رابطه بین سرعت توپ v (برحسب متر بر ثانیه)، مسافت طی شده افقی d (برحسب متر) و زاویه‌ی پرتاب θ به صورت زیر باشد، آن‌گاه زاویه‌ی پرتاب توپ چه قدر بوده است؟

$$d = \frac{v^2 \sin 2\theta}{10}$$



از رابطه‌ی داده‌شده به دست می‌آید:

$$12/8 = \frac{(16)^2 \sin 2\theta}{10} \Rightarrow \sin 2\theta = \frac{12/8 \times 10}{256} \Rightarrow \sin 2\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} 2\theta = 2k\pi + \frac{\pi}{6} & k \in \mathbb{Z} \\ 2\theta = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{6} & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

با توجه به شکل، جواب $\theta = \frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}$ قابل قبول می‌باشد.

مثال ۱۱۰: مثلثی با مساحت ۳ سانتی‌متر مربع مفروض است. اگر اندازه‌ی دو ضلع آن به ترتیب ۲ و ۶ سانتی‌متر باشند، آن‌گاه چند مثلث با این خاصیت‌ها می‌توان ساخت؟

یادت باشه: حواست به ریشه‌ی مخرج باشه.

مثال ۱۱۱: معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$\frac{1 + \sin x}{1 + \cos 2x} = \frac{1}{2}$$

دوره تناوب

f متناوب است اگر با افزودن یک مقدار ناصفر به x عرض (y) تابع عوض نشود و دو شرط زیر داشته باشد:

$$1) \forall x \in D_f \Rightarrow x + T \in D_f \quad 2) f(x + T) = f(x) \quad T \neq 0$$

مثلاً $\sin \frac{\pi}{6}$ با $\sin(\pi + \frac{\pi}{6})$ برابر و هر دو $\frac{1}{2}$ هستند. در حالی که به x ، $2\pi = 6/28 \dots$ افزوده‌ایم.

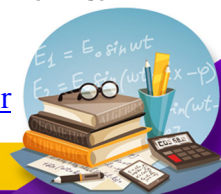
هر مضربی از دوره‌ی تناوب، خود دوره‌ی تناوب است که کوچک‌ترین مقدار مثبت دوره تناوب را، دوره تناوب اصلی می‌گوییم. تذکر: تابع ثابت، متناوب است و دوره تناوبش هر عدد حقیقی است ولی چون کوچک‌ترین عدد حقیقی وجود ندارد، کوچک‌ترین دوره تناوب ندارد.

۱) دوره تناوب $f(x)$ اگر T باشد، آن‌گاه دوره‌ی تناوب $af(x+b)+k$ نیز همان T هست.

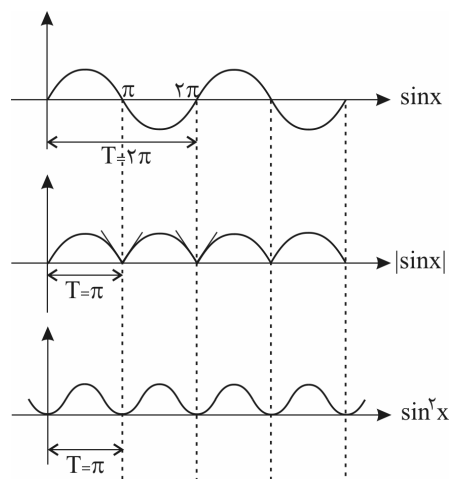
۲) تابع متناوب، یک به یک و معکوس‌پذیر نیست.

$$3) \text{ دوره تناوب } \sin^{2k+1} ax \text{ و } \cos^{2k+1} ax \text{ برابر است با: } T = \frac{2\pi}{|a|}$$

دوره تناوب $\tan ax$ و $\cot ax$ به هر توان (چه زوج، چه فرد) و $|\tan ax|$ و $|\cot ax|$ به هر توان $T = \frac{\pi}{|a|}$ است.



$$\begin{cases} \sin^{2k} ax \\ \cos^{2k} ax \\ |\sin ax| \text{ (توان چه زوج و چه فرد باشد)} \\ |\cos ax| \text{ (توان چه زوج و چه فرد باشد)} \end{cases}$$



تست ۱۱۲: اگر دوره تناوب تابع $f(x) = 2 \cos(mx + \frac{m}{y})$ برابر $\frac{4}{3}$ باشد، مقدار $f(0)$ کدام است؟ ($m > 0$)

- (۱) $-\sqrt{3}$ (۲) $\sqrt{3}$ (۳) $\sqrt{2}$ (۴) $-\sqrt{2}$

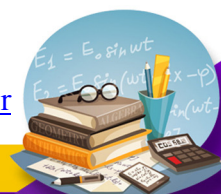
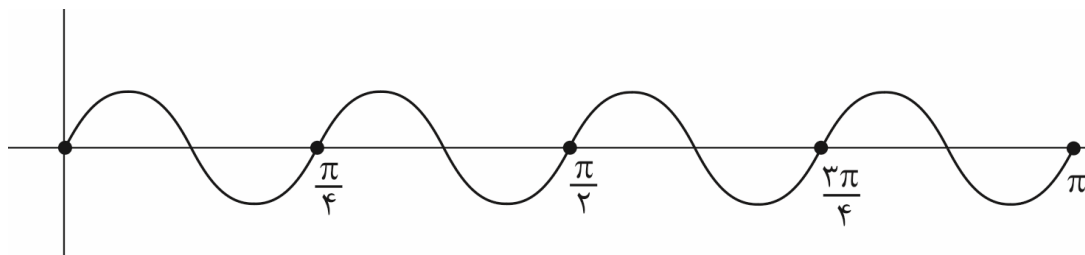
تست ۱۱۳: دوره تناوب تابع $f(x) = \frac{\cos 2x \cos 4x}{\tan x + \cot x}$ کدام است؟

- (۱) π (۲) $\frac{\pi}{2}$ (۳) $\frac{\pi}{4}$ (۴) $\frac{\pi}{8}$

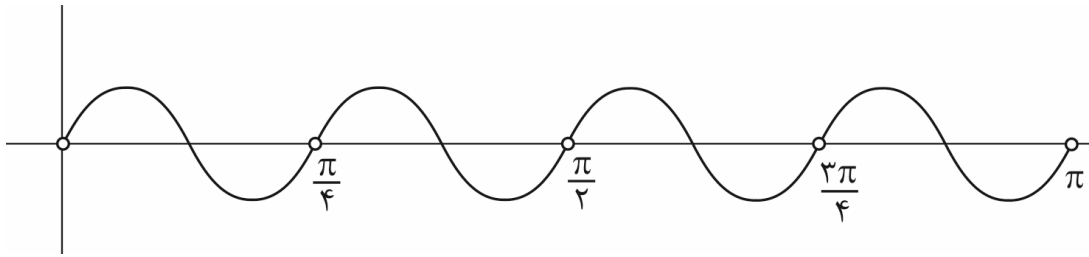
پاسخ: $f(x) = \frac{\cos 2x \cos 4x}{\tan x + \cot x} = \frac{\sin 2x \cos 2x \cos 4x}{2} = \frac{1}{2} \sin 4x \cos 4x = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \sin 8x = \frac{1}{4} \sin 8x$

در حالت معمول $T = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$

بنابراین به این شکل می‌رسیم:



ولی باید توجه کنید که به علت حضور $\tan x$ و $\cot x$ در مخرج کسر $\frac{k\pi}{4}$ می‌باشد. پس باید این نقاط توخالی باشند:



اکنون از شکل مشخص است که $T = \frac{\pi}{4}$ است نه $\frac{\pi}{2}$. جالب این است که در خود آزمون، این سوال به اشتباه پاسخ داده شده است. گزینه (۲) صحیح است.

تست ۱۱۴: دوره تناوب $f(x) = \frac{\sin x}{\sin x}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\pi}{2}$ (۲) π (۳) $\frac{3\pi}{2}$ (۴) 2π

تست ۱۱۵: اگر دوره تناوب تابع $y = 3 \cos ax$ برابر ۲ باشد، اولین نقطه \min این تابع با طول مثبت کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) ۲

(قلم پی ۹۸)

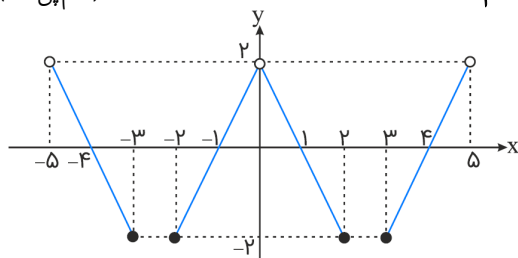
تست ۱۱۶: تابع $y = -\frac{1}{4} \sin(3\pi x)$ در بازه $[-\frac{1}{4}, 1]$ چند بار بیشترین مقدار را دارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴



(قلم‌پی ۹۸)

تست ۱۱۷: قسمتی از نمودار تابع متناوب $y = f(x)$ به شکل زیر است. $f(128/1)$ کدام است؟



(۱) $1/8$

(۲) $-1/8$

(۳) $-5/2$

(۴) تعریف‌نشده

(فارج ریاضی ۹۸)

تست ۱۱۸: دوره تناوب تابع با ضابطه $f(x) = \tan(\pi x) - \cot(\pi x)$ کدام است؟

(۴) -1

(۳) $-\frac{1}{2}$

(۲) 1

(۱) $\frac{1}{2}$

(قلم‌پی ریاضی ۹۹)

تست ۱۱۹: دوره تناوب تابع $y = \sin x \sqrt{1 + \cos 2x}$ کدام است؟

(۴) 2π

(۳) $\frac{3\pi}{2}$

(۲) $\frac{\pi}{2}$

(۱) π

$f(x) = \sin x \sqrt{1 + \cos 2x} = \sqrt{2} \sin x |\cos x|$

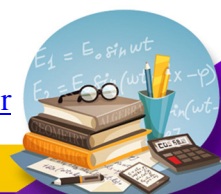
پاسخ:

(۱) گزینه: $f(x + \pi) = -\sqrt{2} \sin x |\cos x| \neq f(x)$

(۲) گزینه: $f(x + \frac{\pi}{2}) = \sqrt{2} \cos x |\sin x| \neq f(x)$

(۳) گزینه: $f(x + \frac{3\pi}{2}) = -\sqrt{2} \cos x |\sin x| \neq f(x)$

(۴) گزینه: $f(x + 2\pi) = \sqrt{2} \sin x |\cos x| = f(x)$



توابع مثلثاتی

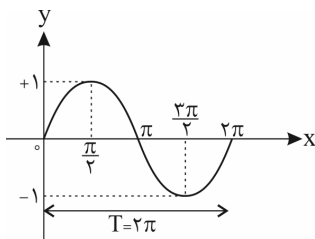
$y = \sin x$

(۱) دامنه‌ی این تابع \mathbb{R} است. ($\sin x$ به ازای هر $x \in \mathbb{R}$ جواب دارد).

(۲) برد این تابع $[-1, 1]$ است. (چون $-1 \leq \sin x \leq 1$)

(۳) از آن جایی که کمان $(\frac{2k\pi}{\pi} + \alpha)$ از لحاظ موقعیت در دایره‌ی مثلثاتی با کمان α تفاوتی ندارد، رفتار تابع $y = \sin x$ را در $[0, 2\pi]$ مضارب زوج π

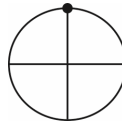
یعنی یک دور از دایره‌ی مثلثاتی بررسی و نمودار آن را رسم کرده، سپس 2π تا 2π تا تکرارش می‌کنیم. نمودار $y = \sin x$ در $[0, 2\pi]$ به کمک جدول زیر به صورتی که مشاهده می‌شود رسم می‌گردد:



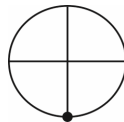
x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
y	0	1	0	-1	0

(دوره‌ی تناوب اصلی این تابع $T = 2\pi$ می‌باشد).

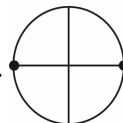
(۴) ماکزیمم (بیشینه) مقدار تابع $y = \sin x$ برابر ۱ است که در $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ یعنی کمان $(\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{9\pi}{2})$ یا $(\frac{-7\pi}{2}, \frac{-3\pi}{2})$ رخ می‌دهد.



(۵) مینیمم (کمینه) مقدار تابع $y = \sin x$ برابر -۱ است که در $x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ یعنی کمان $(\frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{2})$ یا $(\frac{-5\pi}{2}, \frac{-\pi}{2})$ رخ می‌دهد.



(۶) تابع $y = \sin x$ در $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ (مثل $0, \pm\pi, \pm 2\pi, \dots$) با محور طول‌ها برخورد می‌کند، یعنی مقدار آن صفر می‌شود.



در حالت کلی، در تابع $y = a \sin(bx + c) + d$

(۱) مقدار ماکزیمم تابع برابر $|a| + d$ و مقدار مینیمم آن $-|a| + d$ می‌باشد.

(۲) برای یافتن نقطه‌ی برخورد نمودار با محور y ها، در ضابطه‌ی تابع $x = 0$ قرار می‌دهیم و y را به دست می‌آوریم. برای یافتن نقاط برخورد نمودار با محور x ها نیز در ضابطه‌ی تابع $y = 0$ قرار می‌دهیم و معادله‌ی مثلثاتی حاصل را حل می‌کنیم.

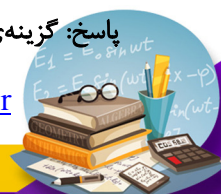
(۳) دوره‌ی تناوب برابر $T = \frac{2\pi}{|b|}$ است.

تست ۱۲: اگر بیشترین مقدار تابع $y = 2 \sin 5x - 3c$ برابر (-7) باشد، c کدام است؟

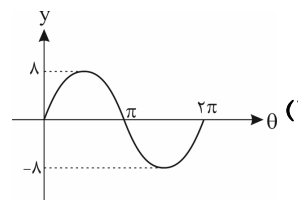
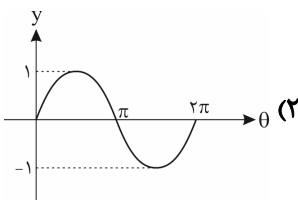
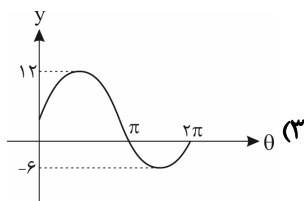
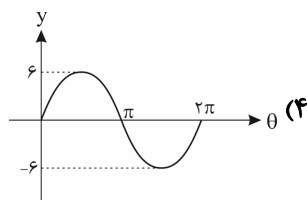
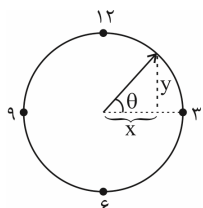
- ۱ (۴)
- ۲ (-۲)
- ۳ (۱)
- ۴ (-۵)

$y_{\max} = 2 - 3c = -7 \Rightarrow -3c = -9 \Rightarrow c = 3$

پاسخ: گزینه‌ی «۱»



تست ۱۲۱: طول عقربه‌ی دقیقه‌شمار یک ساعت ۸ سانتی‌متر است و این عقربه با جهت مثبت محور افقی زاویه‌ی θ می‌سازد. با توجه به شکل زیر، نمودار تابع y برحسب θ کدام است؟ (θ برحسب رادیان است.)



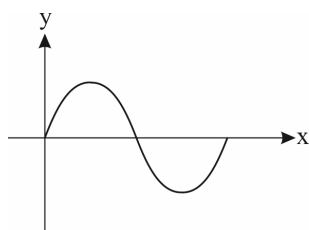
پاسخ: گزینه‌ی «۱» - طبق تعریف مثلثاتی سینوس در مثلث قائم‌الزاویه‌ی موجود داریم:

$$\sin \theta = \frac{y}{r} \Rightarrow \sin \theta = \frac{y}{8} \Rightarrow y = 8 \sin \theta \Rightarrow \begin{cases} T = 2\pi \\ y_{\max} = 8 \\ y_{\min} = -8 \end{cases}$$

مشخصه که بیشترین مقدار (max) تابع $y = 8 \sin \theta$ برابر ۸ و کم‌ترین مقدار این تابع -۸ و دوره‌ی تناوبش هم $T = 2\pi$ هست. پس گزینه‌ی «۱» درسته.

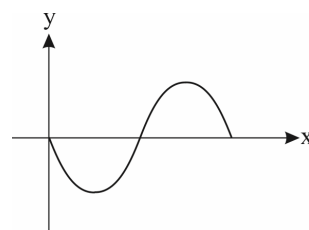


حالت ۱



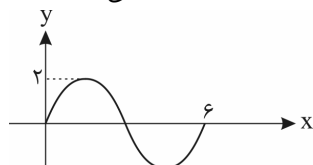
$$y = a \sin bx \\ a \times b > 0$$

حالت ۲



$$y = a \sin bx \\ a \times b < 0$$

(فارج تیربی ۹۳)



تست ۱۲۲: شکل روبه‌رو قسمتی از نمودار تابع $y = a \sin(b\pi x)$ است. $a + b$ کدام است؟

۵/۳ (۲)

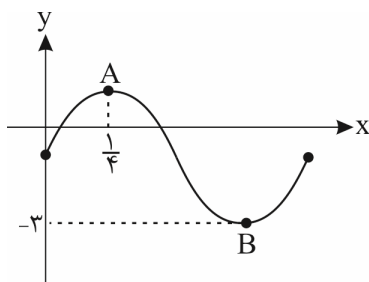
۸/۳ (۴)

۴/۳ (۱)

۷/۳ (۳)

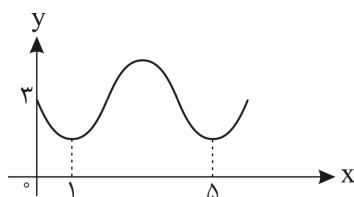


تست ۱۲۳: قسمتی از نمودار تابع $f(x) = 2 \sin b\pi x + c$ به صورت زیر رسم شده است. طول پاره خط AB کدام است؟



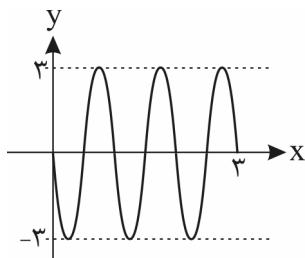
- (۱) $\frac{\sqrt{17}}{2}$
- (۲) $\frac{\sqrt{65}}{2}$
- (۳) $\frac{\sqrt{17}}{4}$
- (۴) $\frac{\sqrt{65}}{4}$

تست ۱۲۴: شکل روبه‌رو قسمتی از نمودار تابع $y = a + \sin(b\pi x)$ است. مقدار y در نقطه‌ی $x = \frac{25}{3}$ ، کدام است؟ (تیربی ۹۳)



- (۱) ۲
- (۲) ۲/۵
- (۳) ۳
- (۴) ۳/۵

تست ۱۲۵: شکل روبه‌رو، قسمتی از نمودار تابع $y = a \sin(b\pi x)$ است. $a \cdot b$ کدام است؟ (شارج ریاضی ۹۲)

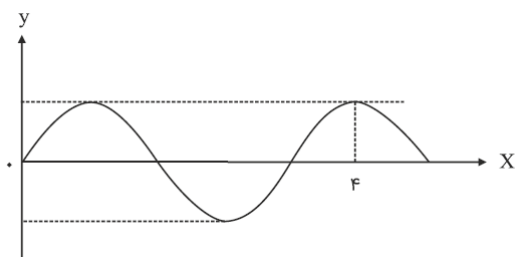


- (۱) -۶
- (۲) -۳
- (۳) ۴/۵
- (۴) ۶



(تخمینی ۹۴)

تست ۱۲۶: قسمتی از نمودار تابع $y = a \cos\left(\left(\frac{\pi}{4} + bx\right)\pi\right)$ به صورت زیر است. آن گاه کدام گزینه صحیح است؟



(۲) $a < 0, b = -\frac{5}{8}$

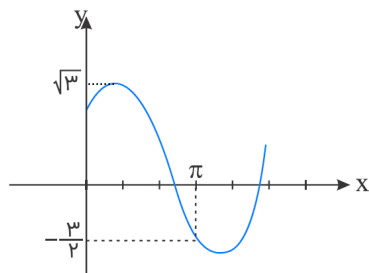
(۱) $a < 0, b = \frac{5}{8}$

(۴) $a > 0, b = -\frac{5}{16}$

(۳) $a > 0, b = \frac{5}{16}$

(تجربی ۹۸)

تست ۱۲۷: شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع $y = a + b \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ است. کدام است b ؟



(۱) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

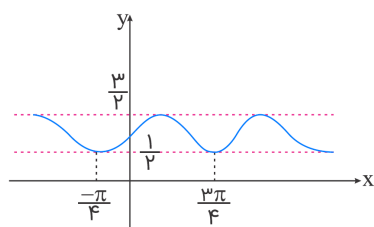
(۲) $\frac{3}{2}$

(۳) $\sqrt{3}$

(۴) ۲

(ریاضی ۹۸)

تست ۱۲۸: شکل زیر، نمودار تابع $y = 1 + a \sin bx \cos bx$ است. کدام است $a + b$ ؟

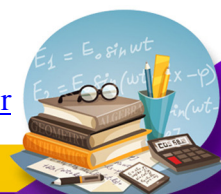


(۱) ۱

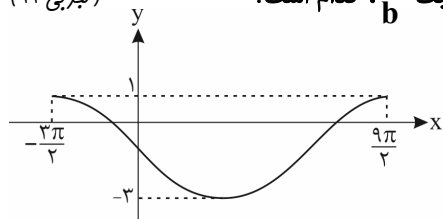
(۲) $\frac{3}{2}$

(۳) ۲

(۴) ۳



تست ۱۲۹: شکل زیر، نمودار تابع $y = a \sin(bx) + c$ را در یک بازه تناوب، نشان می‌دهد. نسبت $\frac{a}{b}$ ، کدام است؟ (تقریبی ۹۹)



- (۱) -۲
- (۲) -۳
- (۳) -۴
- (۴) -۶

y = cos x

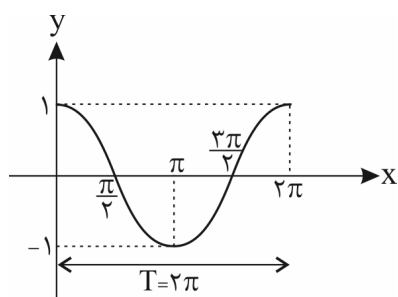
(۱) دامنه‌ی این تابع \mathbb{R} است ($\cos x$ به ازای هر $x \in \mathbb{R}$ جواب دارد).

(۲) برد این تابع $[-1, 1]$ است (چون $-1 \leq \cos x \leq 1$).

(۳) نمودار $y = \cos x$ را نیز مانند $y = \sin x$ در $[0, 2\pi]$ به کمک جدول زیر رسم کرده، سپس با توجه به همان خاصیت کمان

($2k\pi + \alpha$) و این که در واقع دوره‌ی تناوب اصلی $y = \cos x$ هم $T = 2\pi$ است، تا 2π تکرارش می‌کنیم.

مضارب
 π زوج



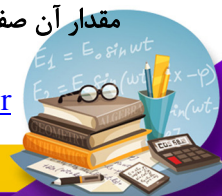
x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
y	1	0	-1	0	1

(۴) ماکزیمم (بیشینه) مقدار تابع $y = \cos x$ برابر ۱ است که در $x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ یعنی کمان  (مثل $0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots$) رخ می‌دهد.

(۵) مینیمم (کمینه) مقدار تابع $y = \cos x$ برابر -۱ است که در $x = (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}$ یعنی کمان  (مثل $\pm \pi, \pm 3\pi, \dots$) رخ می‌دهد.

(۶) تابع $y = \cos x$ در $x = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ (مثل $\pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{3\pi}{2}, \dots$) با محور طول‌ها برخورد می‌کند، یعنی مقدار آن صفر می‌شود.

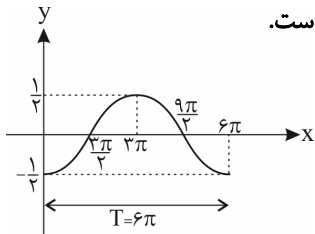
مقدار آن صفر می‌شود.



قوانین انتقال (مشابه آنچه در قسمت الف) گفته شد) در مورد $y = \cos x$ نیز برقرار است.

تابع $y = a \cos bx$ دارای دوره‌ی تناوب اصلی $T = \frac{2\pi}{|b|}$ ، مقدار ماکزیمم $|a|$ و مقدار مینیمم $-|a|$ می‌باشد. مثلاً در

$y = -\frac{1}{3} \cos(-\frac{x}{3})$ دوره‌ی تناوب اصلی $\frac{2\pi}{|-\frac{1}{3}|} = 6\pi$ ، ماکزیمم تابع برابر $\frac{1}{3}$ و مینیمم تابع برابر $-\frac{1}{3}$ است.



(از آنجایی که $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$ ، همان $y = -\frac{1}{3} \cos \frac{x}{3}$ می‌باشد.)

تذکر: در واقع در رسم $y = a \cos bx$ ، نمودار $y = \cos x$ با ضریب $\frac{1}{|b|}$ دچار انقباض یا انبساط طولی (افقی) و با ضریب a دچار

انبساط یا انقباض عرضی (عمودی) می‌شود. (علامت b تأثیری روی رسم نمودار تابع کسینوس ندارد، چون کسینوس منفی خور است.)

حالت کلی، در تابع $y = a \cos(bx + c) + d$

(۱) مقدار ماکزیمم تابع برابر $|a| + d$ و مقدار مینیمم آن $-|a| + d$ است.

(۲) برای یافتن نقطه‌ی برخورد نمودار با محور y ، در ضابطه‌ی تابع $x = 0$ قرار می‌دهیم و y را به دست می‌آوریم. برای یافتن نقاط برخورد نمودار با محور x نیز در ضابطه‌ی تابع $y = 0$ را قرار می‌دهیم و معادله‌ی مثلثاتی حاصل را حل می‌کنیم.

(۳) دوره‌ی تناوب برابر $T = \frac{2\pi}{|b|}$ است.

تست ۱۳۰: اگر کم‌ترین مقدار تابع $h(x) = -a \cos \frac{\pi x}{3} + 1$ برابر $\frac{2}{3}$ باشد، مقدار a کدام می‌تواند باشد؟

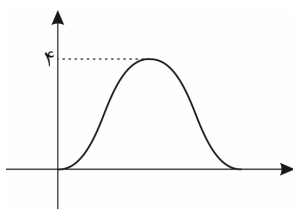
- (۱) $\frac{2}{3}$ (۲) $-\frac{3}{2}$ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) $-\frac{1}{3}$

پاسخ: گزینه‌ی «۴»

(در میان گزینه‌ها $(-\frac{1}{3})$ وجود دارد.) $a = \pm \frac{1}{3} \Rightarrow |a| = \frac{1}{3} \Rightarrow -|a| = -\frac{1}{3} \Rightarrow -|a| + 1 = \frac{2}{3} \Rightarrow -|a| = \frac{2}{3} - 1 \Rightarrow -|a| = -\frac{1}{3}$

(ریاضی ۹۷)

تست ۱۳۱: شکل زیر نمودار تابع $y = a + b \cos(\frac{\pi}{4}x)$ ، در بازه‌ی $(0, 4)$ است. b کدام است؟

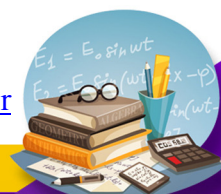


(۱) -۲

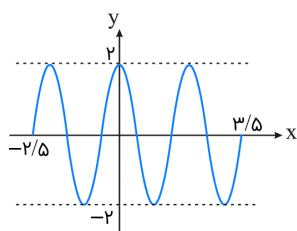
(۲) -۱

(۳) ۱

(۴) ۲



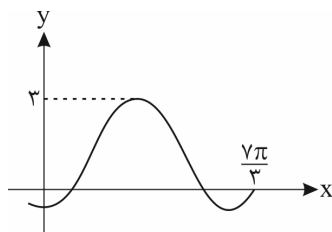
(ریاضی ۹۲، قلم‌پی ۹۸)



تست ۱۳۲: شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع $y = a \sin \pi(\frac{1}{5} + bx)$ است. کدام a, b است؟

- (۱) ۲
- (۲) ۲/۵
- (۳) ۳
- (۴) ۳/۵

(تجربی ۹۹)



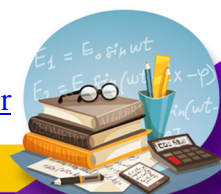
تست ۱۳۳: شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع با ضابطه $y = a + b \sin(\frac{\pi}{3} + x)$ است. مقدار b کدام است؟

- (۱) ۲
- (۲) ۱
- (۳) -۱
- (۴) -۲

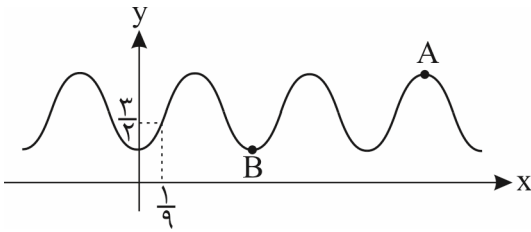
تست ۱۳۴: در تابع $f(x) = -4a \sin^2 2x + \cos 4x + 2a + 3$ حدود a کدام باشد تا نمودار آن همواره زیر خط $y = 7$ قرار گیرد؟

(قلم‌پی ریاضی ۹۹)

- (۱) $-\frac{5}{2} < a < \frac{3}{2}$
- (۲) $-\frac{3}{2} < a < \frac{5}{2}$
- (۳) $-\frac{5}{2} < a < -\frac{3}{2}$
- (۴) $\frac{3}{2} < a < \frac{5}{2}$



تست ۱۳۵: اگر نمودار تابع $f(x) = 1 + a \sin^2\left(\frac{3\pi}{4}x\right)$ به صورت زیر باشد، شیب خط گذرنده از نقاط A و B کدام است؟



- (۱) ۱
 (۲) $\frac{3}{2}$
 (۳) ۲
 (۴) $\frac{5}{2}$

تانژانت

در دایره مثلثاتی روبه‌رو خط TAT' در نقطه A بر محور کسینوس‌ها عمود است. الف) زاویه α را در ربع اول دایره مثلثاتی در نظر می‌گیریم و پاره‌خط OM را امتداد می‌دهیم تا این خط را در نقطه M' قطع کند. نشان دهید:

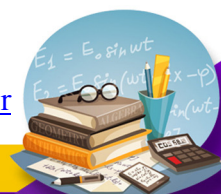
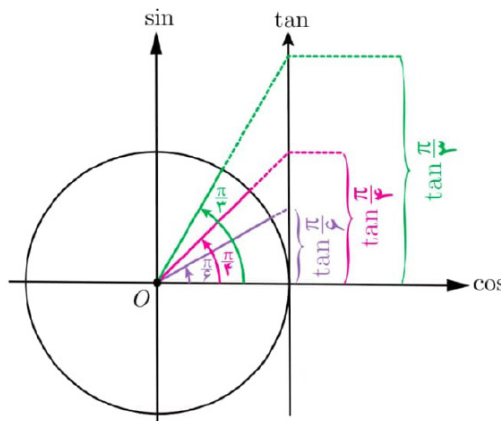
$$\tan \alpha = AM' = b$$

می‌توان دید که تانژانت هر زاویه دلخواه مانند α ، به همین ترتیب از برخورد امتداد ضلع دوم آن زاویه با خط TAT' تعیین می‌شود. بنابراین خط TAT' را محور تانژانت می‌نامیم. نقطه A مبدأ این محور است و جهت مثبت محور، از پایین به سمت بالا است.

ب) چرا تانژانت زوایایی که انتهای کمان آن‌ها در ربع اول و سوم قرار دارد مقداری مثبت و تانژانت زوایایی که انتهای کمان آن‌ها در ربع دوم و چهارم قرار دارد، مقداری منفی است؟

تغییرات تانژانت

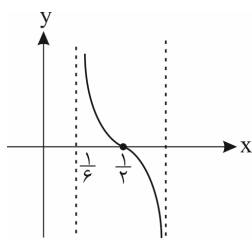
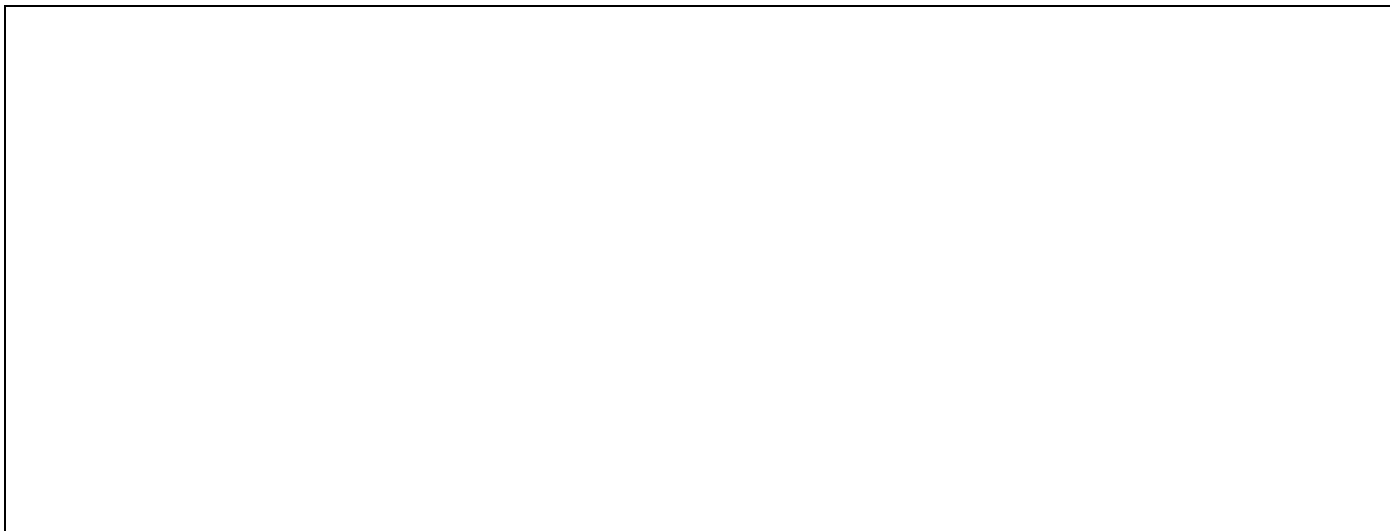
با تغییر زاویه α مقادیر تانژانت آن نیز تغییر می‌کند. ابتدا این تغییرات را در ربع اول دایره مثلثاتی بررسی می‌کنیم. اگر $\alpha = 0$ ، مقدار $\tan \alpha$ نیز برابر صفر است و با افزایش اندازه α ، مقدار $\tan \alpha$ نیز افزایش می‌یابد.



تابع تانژانت

همان طور که می بینیم به ازای هر زاویه دلخواه در دایره مثلثاتی (به جز $x = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$)، عددی حقیقی به عنوان $\tan \alpha$ داریم و تابعی با ضابطه $y = \tan \alpha$ مشخص می کند. دامنه این تابع مجموعه $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$ است و برد آن مجموعه اعداد حقیقی است. به سادگی می توان دید تابع $y = \tan \alpha$ ، تابعی متناوب است و دوره تناوب آن π است، زیرا: $\tan(\pi + x) = \tan x$

رسم تابع $y = \tan \alpha$



تست ۱۳۶: نمودار $f(x) = \tan(a + bx)$ به صورت مقابل است. b کدام است؟

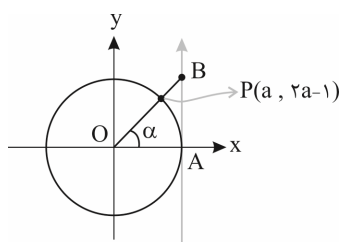
$\frac{3\pi}{2}$ (۲)

$-\frac{3\pi}{2}$ (۱)

$\frac{\pi}{2}$ (۴)

$-\frac{\pi}{2}$ (۳)

تست ۱۳۷: با توجه به دایره مثلثاتی زیر، مساحت مثلث AOB چه قدر است؟ ($0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$)

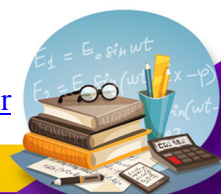


$\frac{3}{4}$ (۲)

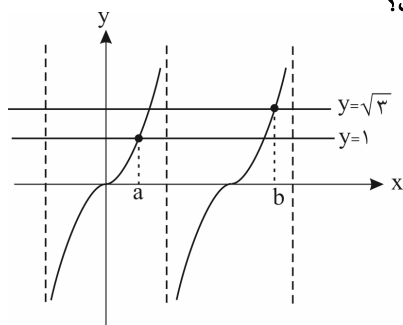
$\frac{2}{3}$ (۱)

$\frac{1}{2}$ (۴)

$\frac{3}{8}$ (۳)

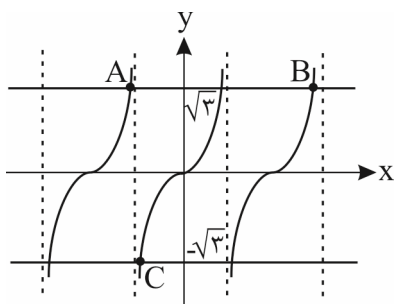


تست ۱۳۸: شکل زیر قسمتی از نمودار تابع $y = \tan x$ را نشان می‌دهد. حاصل $b - a$ کدام است؟



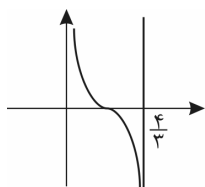
- (۱) $\frac{\pi}{12}$
- (۲) $\frac{5\pi}{12}$
- (۳) $\frac{7\pi}{12}$
- (۴) $\frac{13\pi}{12}$

تست ۱۳۹: شکل زیر نمودار تابع $y = \tan ax$ است. اگر مساحت مثلث ABC برابر با $8\sqrt{3}\pi$ باشد، مقدار a کدام است؟



- (۱) $\frac{1}{2}$
- (۲) $\frac{1}{4}$
- (۳) $\frac{3}{4}$
- (۴) $\frac{5}{4}$

تست ۱۴۰: قسمتی از نمودار $f(x) = \tan(ax + \frac{1}{4})\pi$ به صورت شکل مقابل است. a کدام است؟



- (۱) $-\frac{3}{4}$
- (۲) $\pm \frac{3}{4}$
- (۳) $\frac{3}{4}$
- (۴) $\pm \frac{3}{2}$

توفیق و رستگاری را از خدا بخواهید

