نکته VIP تابع:

نکته ①

۱) $\left(-\frac{m}{h} , \frac{1}{m}\right)$

۲) $\left(-\frac{h}{m} , m\right)$

۳) $\left(-\frac{h}{m} , \frac{1}{m}\right)$ ✓

۴) $\left(\frac{m}{h} , \frac{1}{m}\right)$

$f(x) = \overset{\tan\alpha}{m}x + h \longrightarrow (a , \cot\alpha)$

عرض از مبدأ

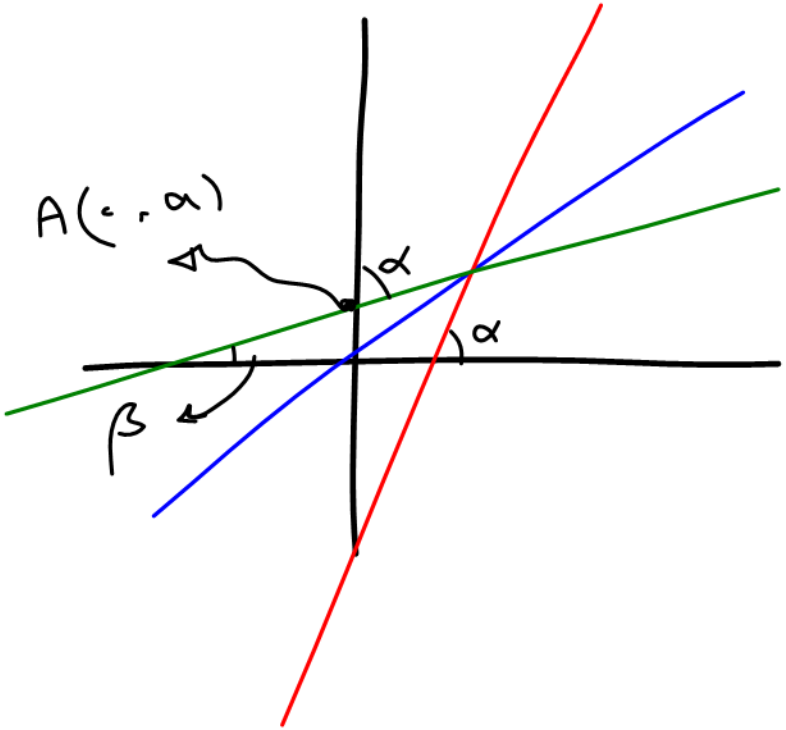
f' ت در f

$y = 0$ کن

$\cancel{y} = mx + h$

$-\frac{h}{m} = x$

$\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha = m}$



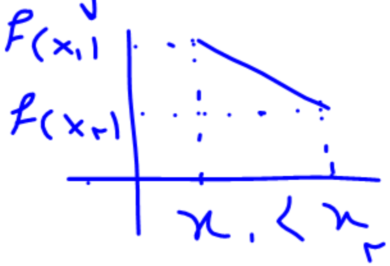
۲) اگر $D_f(-\infty,6]$ و برای هر $x\in D_f$: $x_1<x_2 \longrightarrow f(x_1)>f(x_2)$

$x\leq 6$

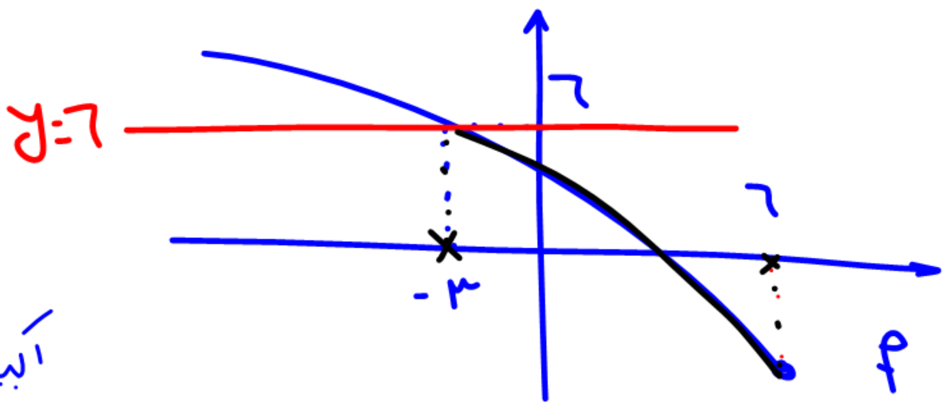
و $f^{-1}(6)=-3$ باشد fof به صورت $[a,b]$ است. $b-a$ ؟

$f(-3)=6$

6	3
12	9



اکیدا نزولی



$a \quad b \quad b-a=6-(-3)=9$

$D_{f(f(x))}=\{x\in D_f \;,\; f(x)\in D_f\}=[-3,6]$

$x\leq 6 \qquad f(x)\leq 6$

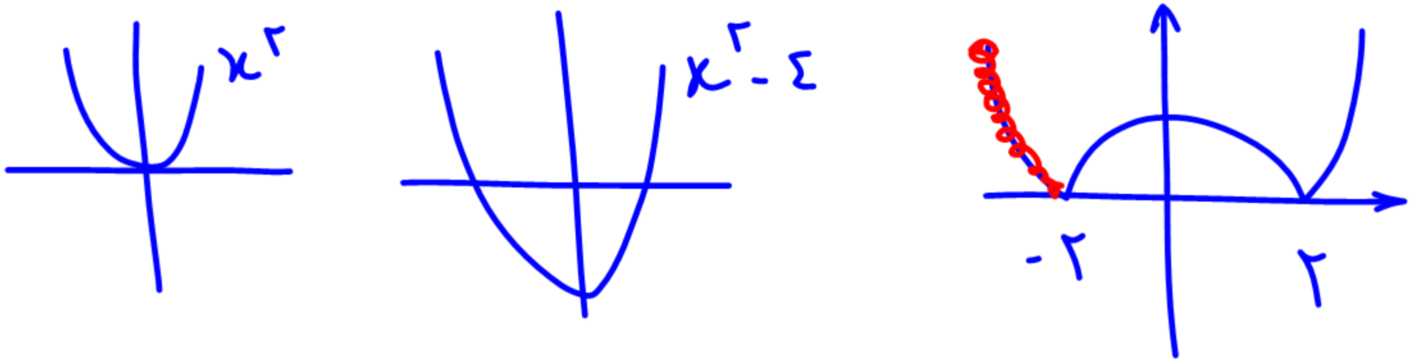
$-3\leq x\leq 6$

یعنی کجاها (در کدام x ها) تابع $f(x)$ زیر خط $y=6$ است؟

۳) تابع $f(x) = |x+2||x-2|$ در کدام بازه "اکیداً" نزولی است؟

۱) $(-\infty, -2)$ ۲) $(-2, +\infty)$ ۳) $(-2, 2)$ ۴) $(-\infty, 0)$

$$|a||b| = |a \cdot b| \longrightarrow y = |x+2||x-2| = |x^2 - 4|$$



٤) تابع $f(x)=x|x-3|$ در کدام بازه اکیداً نزولی است؟

جبری قدرمطلقی را طراح خیلی دوست می‌دارد.

۱) $[0,3]$

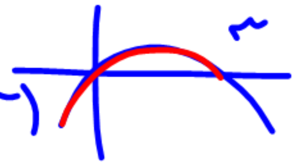
۲) $(-\infty,0]$

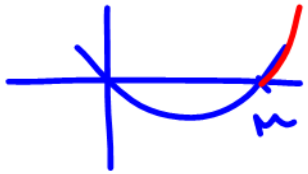
۳) $[0,1/5]$

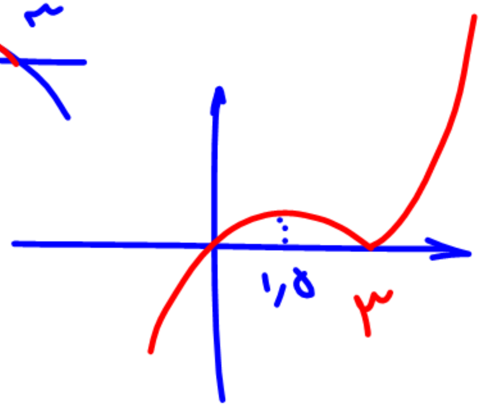
۴) $[1/5,3]$

$$y=x|x-3|=\begin{cases} x\le 3 & y=-x(x-3) \\ x\ge 3 & y=x(x-3)\end{cases}$$

$x=3$ ریشه







۵) اگر $f(x)=\log_2^x$ ، $g(x)=2\sin^3(4x)+6$ و برد fog به صورت $m\leqslant y\leqslant n$ باشد، $?=n-m$

۱	۲
۳	۴

$y=f(g(x))$

$y=\log_2^{g(x)}$

می‌دانیم: $-1\leqslant \sin^{2k+1}\bigcirc \leqslant 1$

$$-1\leqslant \sin^3(4x)\leqslant 1$$

ضرب ۲ ↓

$$-2\leqslant 2\sin^3(4x)\leqslant 2$$

$+6$ ↓

$$4\leqslant \underbrace{2\sin^3(4x)+6}_{g(x)}\leqslant 8$$

از طرفین لگاریتم بگیریم // در پایه ۲ بگیریم

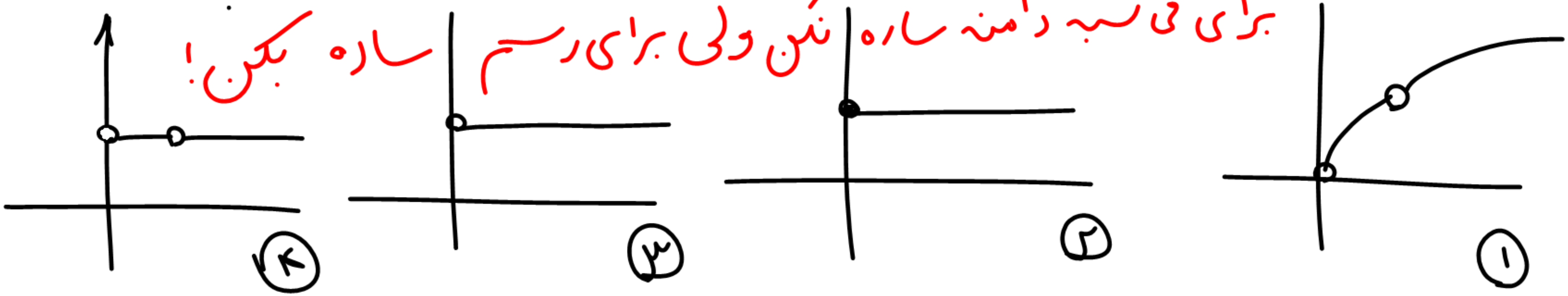
$$\log_2^4\leqslant \log_2^{g(x)}\leqslant \log_2^8=3$$

$$y=f(g(x))=\log_2^{g(x)}$$

$$m=2\leqslant y\leqslant 3=n$$

تست ۲ کدام گزینه نمایش هندسی تابع $f(x) = (\sqrt{x})^{\frac{1}{\log_2^x}}$ است؟

برای تعیین دامنه ساده نکن ولی برای رسم ساده بکن!



$x \geq 0$

$$y = (\sqrt{x})^{\boxed{\frac{1}{\log_2^x}}} \qquad \log_2^x \neq 0$$

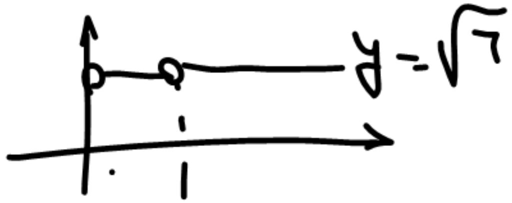
$$\frac{1}{\log_2^x} = \log_x^2 \quad x > 0$$

$$\log_x^{\sqrt{x}} = \frac{1}{2}$$

$$= 2 \qquad = \sqrt{2}$$

$$\boxed{a^{\log_b^x} = x^{\log_b^a}}$$

$\boxed{4}$ همون گزینه $x \neq 1$ را تابع ثابت $y=2$ است که در $x>0$ تعریف میشه



$\boxed{\log 1 = 0}$

۷) برد $y = [x]^{\sqrt{\log \sin x}}$ شامل چند عضو است؟

۲	۱
بی‌شمار	۳

باید $\log \sin x \geq 0$

۱۰ به توان

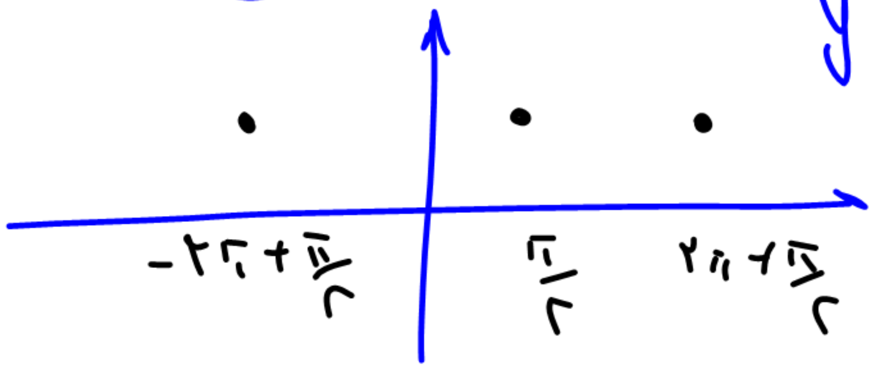
$\sin x \geq 10^0 = 1$

$$\begin{cases} \sin x \ngtr 1 \\ \sin x = 1 \end{cases}$$

دامنه: $\boxed{x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}}$

$y = \left[2k\pi + \frac{\pi}{2}\right]^{\sqrt{\log(\sin x = 1)} = \text{صفر} = 0}$

$y = (\text{عدد})^0 = 1 \qquad R_f\{1\}$



۸) اگر $f(x)=\cos x$ و $g(x)=\frac{\pi}{3}\sin x$ ، برد $y=f\circ g$:

۱) $[-1,1]$

۲) $[0,1]$

۳) $[\frac{1}{2},1]$

۴) $[-\frac{1}{2},1]$

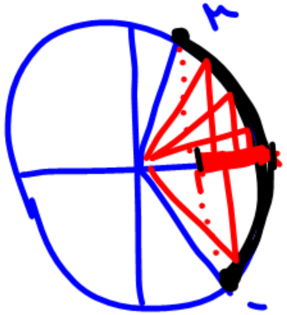
بازنویسی: $y=f(g(x))=\cos(g(x))=\cos(\frac{\pi}{3}\sin x)$

می‌دانیم برد (خروجی) تابع داخلی، دامنه (ورودی) تابع خارجی است.

می‌دانیم $-1\leq \sin x\leq 1$

ضرب در $\frac{\pi}{3}$: $-\frac{\pi}{3}\leq \frac{\pi}{3}\sin x\leq \frac{\pi}{3}$

حال باید دید کسینوس کمان‌هایی که در این بازه‌اند در چه yهایی تغییر می‌کنند؟



$\frac{1}{2}\leq \cos(\frac{\pi}{3}\sin x)\leq 1 \rightarrow \frac{1}{2}\leq y=f(g(x))\leq 1$

۹) وارون تابع $f(x)=\dfrac{1}{3^x+2}$ درباره (a,b) زیر محور xها ($y<0$) است. بیشترین مقدار $b-a$ ؟

$f(x)>0$ و $y>0$ $R_f(0,+\infty)$

$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$

① ۰/۱، وارون تابع را می‌یابیم:

$$y=\frac{1}{3^x+2}$$

هرگاه متغیر در نما باشد، از دو طرف به همان پایه لگاریتم می‌گیریم:

$$3^x+2=\frac{1}{y}\rightarrow 3^x=\frac{1}{y}-2$$

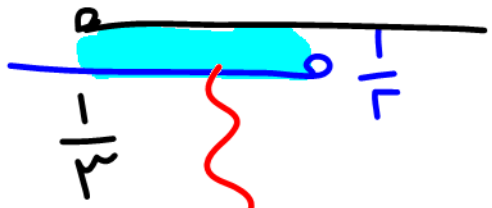
$$\log_3 3^x=\log_3\left(\frac{1}{y}-2\right)\rightsquigarrow x=\log_3\left(\frac{1}{y}-2\right)\rightsquigarrow y=\log_3\left(\frac{1}{x}-2\right)=f^{-1}(x)$$

$\frac{1}{x}-2>0$: $\frac{1}{x}>2\rightarrow \boxed{x<\frac{1}{2}}$ شرط الف

$$f^{-1}(x)<0\rightsquigarrow \log_3\left(\frac{1}{x}-2\right)<0$$

نکته: $\log_b x=y\rightarrow b^y=x$: تعریف لگاریتم را در حالت نامساوی هم می‌توان به کار برد اگر مبنا بین صفر و یک باشد جهت نامساوی را عوض می‌کنیم.

$$\frac{1}{x}-2<3^0=1\rightarrow\frac{1}{x}<3\rightarrow\boxed{x>\frac{1}{3}}$$ شرط ب



$a = \frac{1}{3} < x < \frac{1}{2} = b$

$b - a = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{3-2}{6} = \frac{1}{6}$ جواب تست:

$y = -2$ جنب

راه دوم : به کمک ترسیم

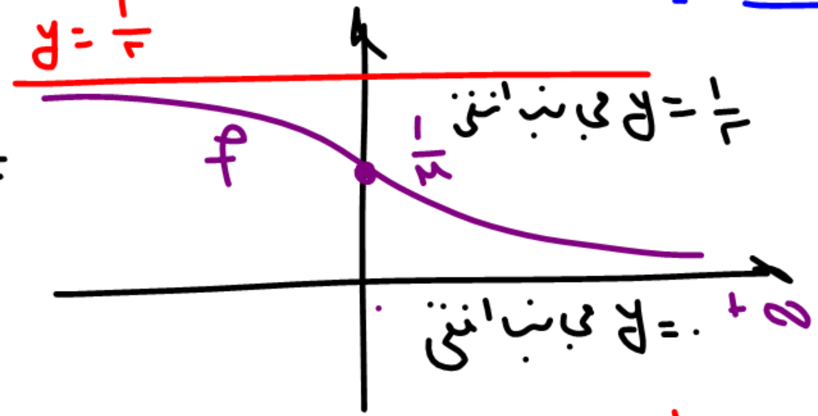
$y = \frac{1}{3^x + 2}$ → $3^x = -2$ جواب ندارد

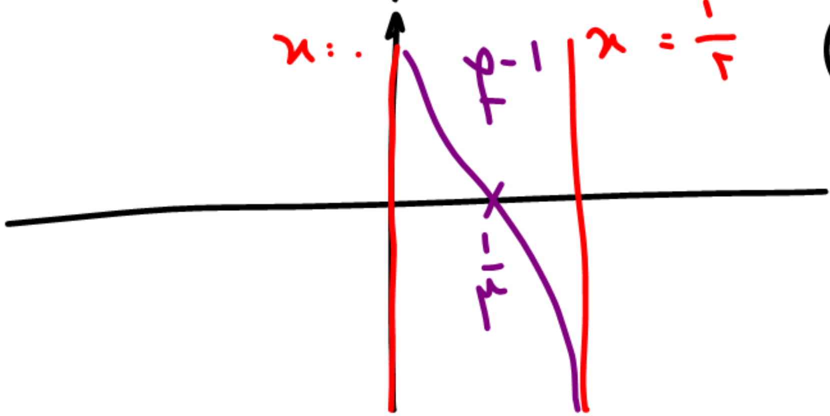
مخرج ریشه ندارد پس:

$D_f : \mathbb{R} : (-\infty, +\infty)$

$$\begin{cases} x \to -\infty & y = \frac{1}{0+2} = \frac{1}{2} \\ x \to +\infty & y = \frac{1}{\infty + 2} = 0 \end{cases}$$

$y = \frac{1}{2}$





می‌بینیم که f^{-1} در بازه $(\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$ زیر محور x هاست.

نکته: اگر $y=b$ مجانب افقی f باشد، $x=b$ مجانب قائم f^{-1} است و برعکس.

نکته: f و f^{-1} از نظر رفتار صعودی یا نزولی مانند یکدیگرند.

Trigonometry
اندازه‌گیری مثلث
سه بر سنجی

مقابل بر وتر سینوس باشد — مجاور بر وتر باشد کسینوس
سینوس چو بر روی کسینوس لغزند — تانژانت بدست آید و برعکس کتانژانت

مثلثات پایهٔ دوازدهم رشتهٔ تجربی

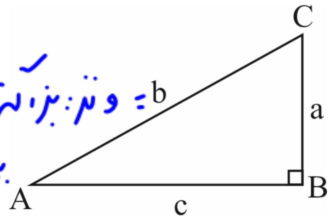
اعداد فیثاغورسی صادق در $a^2=b^2+c^2$
۳، ۴، ۵
۵، ۱۲، ۱۳

نسبت‌های مثلثاتی

فرض می‌کنیم A یک زاویهٔ حادهٔ معلوم باشد، اگر مثلث قائم‌الزاویه‌ای را در نظر بگیریم که یکی از زاویه‌های غیرقائم آن A است، حاصل هر یک از کسرهای:

۱) $\frac{\text{طول ضلع مقابل به زاویهٔ } A}{\text{طول ضلع مجاور به زاویهٔ } A}$، ۲) $\frac{\text{طول ضلع مجاور به زاویهٔ } A}{\text{طول ضلع مقابل به زاویهٔ } A}$، ۳) $\frac{\text{طول ضلع مقابل به زاویهٔ } A}{\text{وتر}}$ و ۴) $\frac{\text{طول ضلع مجاور به زاویهٔ } A}{\text{وتر}}$

همواره مقداری ثابت می‌باشند؛ یعنی فقط مقدار زاویهٔ A مهم است و اندازهٔ اضلاع مثلث قائم‌الزاویه‌ای که یک زاویه‌اش برابر $\hat{A}$ است تأثیری در این مقادیر ندارد. به دلیل ثابت بودن این مقادیر برای زاویهٔ A، هر یک از آن‌ها را به ترتیب ۱) تانژانت زاویهٔ A، ۲) کتانژانت زاویهٔ A، ۳) سینوس زاویهٔ A و ۴) کسینوس زاویهٔ A می‌نامیم.



وتر: بزرگترین ضلع روبروی زاویهٔ ۹۰

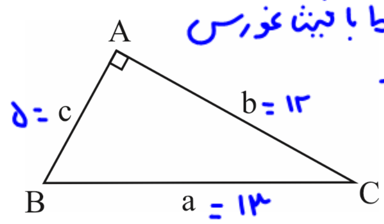
$$\sin\hat{A}=\frac{BC}{AC}=\frac{a}{b} \qquad \cos\hat{A}=\frac{AB}{AC}=\frac{c}{b}$$

$$\tan\hat{A}=\frac{BC}{AB}=\frac{a}{c}=tg\hat{A}=t\hat{g}A \qquad \cot\hat{A}=\frac{AB}{BC}=\frac{c}{a}=Cotg\hat{A}=Ctg A$$

$$\frac{\sin\hat{A}=\frac{a}{b}}{\cos\hat{A}=\frac{c}{b}}=\frac{a}{c}=\tan\hat{A} \qquad \frac{c}{a}=Cotan\hat{A}$$

در یک مثلث قائم‌الزاویه، نسبت‌های سینوس، کسینوس، تانژانت و کتانژانت را نسبت‌های مثلثاتی می‌نامیم.

تست ۱: در شکل مقابل $a+c=18$ و $\cos\hat{B}=\frac{5}{13}$، مقدار $\tan\hat{C}$ کدام است؟



b = ۱۲ با فیثاغورس

$tg\hat{C}=\frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}}=\frac{5}{12}$ $\qquad$ $\frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}}=\frac{5}{13}$

۱) $\frac{5}{12}$ ۲) $\frac{12}{5}$ ۳) $\frac{13}{5}$ ۴) $\frac{5}{13}$

پاسخ: گزینهٔ «۱» ـ با توجه به تعریف کسینوس یک زاویه در مثلث قائم‌الزاویه، می‌توان نوشت:

$$\cos\hat{B}=\frac{c}{a} \Rightarrow \frac{5}{13}=\frac{c}{a} \xrightarrow{\times a} c=\frac{5}{13}a$$

از رابطهٔ $a+c=18$ استفاده می‌کنیم:

$$a+c=18 \Rightarrow a+\frac{5}{13}a=18 \Rightarrow \frac{18}{13}a=18 \Rightarrow a=13 \Rightarrow c=5$$

حال به کمک رابطهٔ فیثاغورس اندازهٔ b را محاسبه می‌کنیم:

$$a^2=b^2+c^2 \Rightarrow 13^2=b^2+5^2 \Rightarrow b^2=169-25=144 \xrightarrow{\sqrt{}} b=12$$

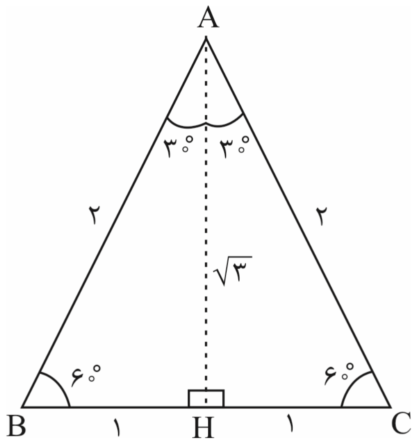
می‌دانیم که تانژانت یک زاویه، برابر نسبت ضلع مقابل به ضلع مجاور آن زاویه است.

$$\tan\hat{C}=\frac{c}{b} \Rightarrow \tan\hat{C}=\frac{5}{12}$$

نکته: با در نظر گرفتن مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۲ واحد، می‌توان نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های 30° و 60° را به صورت زیر محاسبه کرد. در مثلث متساوی‌الاضلاع، ارتفاع، میانه، نیمساز و عمودمنصف وارد بر یک ضلع بر هم منطبق‌اند.

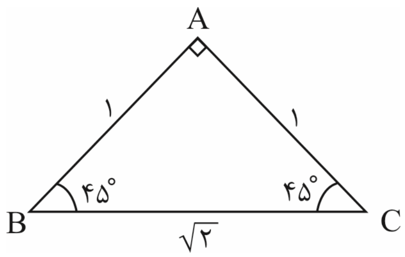
برای متمم ۳۰ و ۶۰ (دو زاویه جمع ۹۰ با هم)

سینوس کسینوس   کسینوس سینوس
تانژانت کتانژانت   کتانژانت تانژانت



$$\overset{\Delta}{ABH}:\begin{cases}\sin ۳۰^\circ=\dfrac{BH}{AB}=\dfrac{۱}{۲}\\ \cos ۳۰^\circ=\dfrac{AH}{AB}=\dfrac{\sqrt{۳}}{۲}\\ \tan ۳۰^\circ=\dfrac{BH}{AH}=\dfrac{۱}{\sqrt{۳}}=\dfrac{\sqrt{۳}}{۳}\\ \cot ۳۰^\circ=\dfrac{AH}{BH}=\sqrt{۳}\end{cases},\quad \begin{cases}\sin ۶۰^\circ=\dfrac{AH}{AB}=\dfrac{\sqrt{۳}}{۲}\\ \cos ۶۰^\circ=\dfrac{BH}{AB}=\dfrac{۱}{۲}\\ \tan ۶۰^\circ=\dfrac{AH}{BH}=\sqrt{۳}\\ \cot ۶۰^\circ=\dfrac{BH}{AH}=\dfrac{۱}{\sqrt{۳}}=\dfrac{\sqrt{۳}}{۳}\end{cases}$$

با در نظر گرفتن مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین به اضلاع قائمه ۱ واحد می‌توان نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ ۴۵° (به عنوان مثال **B**) را به صورت زیر محاسبه کرد:



$$\sin ۴۵^\circ=\frac{AC}{BC}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\qquad \cos ۴۵^\circ=\frac{AB}{BC}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\tan ۴۵^\circ=\frac{AC}{AB}=۱\qquad \cot ۴۵^\circ=\frac{AB}{AC}=۱$$

خلاصهٔ نسبت‌های مثلثاتی زوایای معروف $(۶۰^\circ, ۴۵^\circ, ۳۰^\circ)$

مقدار زاویهٔ θ / مقدار نسبت مثلثاتی	۳۰°	۴۵°	۶۰°
$\sin\theta$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$
$\cos\theta$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$
$\tan\theta$	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۱	$\sqrt{۳}$
$\cot\theta$	$\sqrt{۳}$	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$

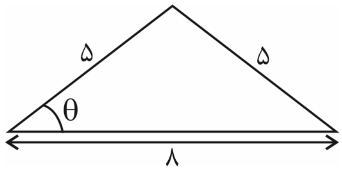
تست ۲: مقدار x در تساوی $x\cos ۶۰^\circ=\dfrac{\sqrt{۳}\tan ۶۰^\circ-۴\sin ۳۰^\circ}{۲\sqrt{۲}\cos ۴۵^\circ+\cot ۴۵^\circ}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) ۳ ۴) $\frac{۳}{۲}$

پاسخ: گزینهٔ «۲» ـ کافی است مقدار عددی هر یک از نسبت‌های مثلثاتی زوایای داده‌شده را جای‌گذاری کنیم:

$$x\times\frac{۱}{۲}=\frac{\sqrt{۳}\times\sqrt{۳}-۴\times\frac{۱}{۲}}{۲\sqrt{۲}\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}+۱}\Rightarrow \frac{x}{۲}=\frac{۳-۲}{۲+۱}=\frac{۱}{۳}\xrightarrow{\times ۲}x=\frac{۲}{۳}$$

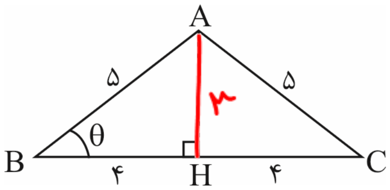
تست ۳: در مثلث مقابل، مقدار $۲\cos\theta+\sin\theta$ کدام است؟



۱) $\frac{۸}{۵}$ ۲) $\frac{۹}{۵}$

۳) $\frac{۱۱}{۵}$ ۴) $\frac{۱۲}{۵}$

پاسخ: گزینهٔ «۳» ـ مثلث رسم‌شده، متساوی‌الساقین است. پس ارتفاع، میانه و نیمساز وارد بر قاعده بر هم منطبق‌اند. ارتفاع وارد بر قاعـده را رسم می‌کنیم:



$$\overset{\Delta}{ABH}: AB^{۲}=AH^{۲}+BH^{۲} \Rightarrow ۲۵=AH^{۲}+۱۶ \Rightarrow AH^{۲}=۹ \xrightarrow{\sqrt{\ }} AH=۳$$

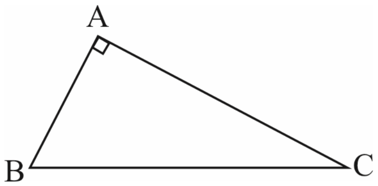
$$\sin\theta=\frac{AH}{AB}=\frac{۳}{۵}\ ,\ \cos\theta=\frac{BH}{AB}=\frac{۴}{۵}$$

در نتیجه مقدار خواسته‌شده برابر است با:

$$۲\cos\theta+\sin\theta=\frac{۸}{۵}+\frac{۳}{۵}=\frac{۱۱}{۵}$$

ارتباط بین نسبت‌های مثلثاتی زوایای متمم

اگر دو زاویه متمم هم باشند (مجموعشان ۹۰° باشد)، آن‌گاه سینوس یکی با کسینوس دیگری برابر است و برعکس، تانژانت یکی با کتانژانت دیگری برابر است و برعکس. در شکل زیر داریم:



$$\hat{B}+\hat{C}=۹۰^\circ$$

$$\sin\hat{B}=\frac{AC}{BC}=\cos\hat{C}\ ,\ \sin\hat{C}=\frac{AB}{BC}=\cos\hat{B}$$

$$\tan\hat{B}=\frac{AC}{AB}=\cot\hat{C}\ ,\ \tan\hat{C}=\frac{AB}{AC}=\cot\hat{B}$$

تست ۴: حاصل عبارت $P=\frac{۵\sin ۲^\circ\times\cot ۸۳^\circ\times\tan ۷۶^\circ}{۸\cot ۱۴^\circ\times\cos ۸۸^\circ\times\tan ۷^\circ}$ کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۸}$ ۲) $-\frac{۵}{۸}$ ۳) $\frac{۸}{۵}$ ۴) $-\frac{۸}{۵}$

پاسخ: گزینهٔ «۱» ـ از روابط نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های متمم استفاده می‌کنیم:

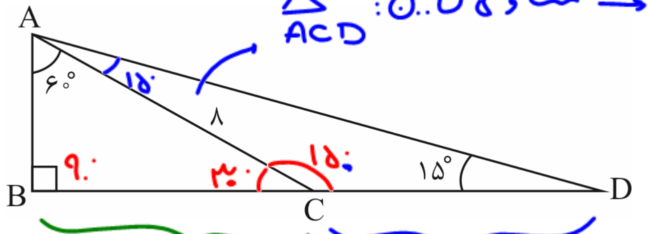
$$۷۶^\circ+۱۴^\circ=۹۰^\circ \Rightarrow \tan ۷۶^\circ=\cot ۱۴^\circ$$

$$۸۳^\circ+۷^\circ=۹۰^\circ \Rightarrow \cot ۸۳^\circ=\tan ۷^\circ$$

$$۲^\circ+۸۸^\circ=۹۰^\circ \Rightarrow \sin ۲^\circ=\cos ۸۸^\circ$$

$$P=\frac{۵\sin ۲^\circ\times\cot ۸۳^\circ\times\tan ۷۶^\circ}{۸\tan ۷۶^\circ\times\sin ۲^\circ\times\cot ۸۳^\circ}=\frac{۵}{۸}$$

تست ۵: در شکل مقابل اندازهٔ پاره‌خط **BD** برابر است با:



$\triangle ACD$: متساوی‌الساقین $\rightarrow CD = CA = ۸$

۱) $۴\sqrt{۳}+۴$

۲) $۴\sqrt{۳}+۸$ ✓

۳) $۴\sqrt{۳}+۱۲$

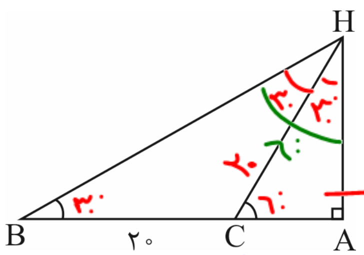
۴) ۱۶

$\triangle ABC: \cos ۳۰^\circ = \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{BC}{۸}$

$BC = ۴\sqrt{۳}$

$BD = ۸ + ۴\sqrt{۳}$

تست ۶: در شکل مقابل اگر $\hat{B} = ۳۰^\circ$ و $\hat{C} = ۶۰^\circ$، اندازهٔ **AH** کدام است؟



$\triangle ACH: \cos ۶۰^\circ = \frac{۱}{۲} = \frac{AC}{۲۰} \rightarrow AC = ۱۰$

فیثاغورث: $(۲۰)^۲ = (۱۰)^۲ + (AH)^۲ \rightarrow AH^۲ = ۳۰۰$

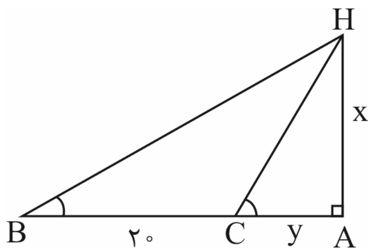
۱) ۱۰

۲) $۲۰\sqrt{۳}$

۳) $۱۰\sqrt{۳} = AH$

۴) ۲۰

پاسخ: گزینهٔ «۳» ـ اگر فرض کنیم $AH = x$ و $AC = y$، آن‌گاه در شکل مقابل داریم:

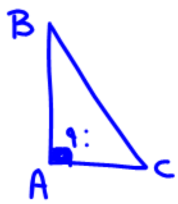


$$\begin{cases} \tan\hat{B} = \frac{AH}{AB} = \frac{x}{۲۰+y} \Rightarrow \tan ۳۰^\circ = \frac{x}{y+۲۰} = \frac{\sqrt{۳}}{۳} \quad (*) \\ \tan\hat{C} = \frac{AH}{AC} \Rightarrow \tan ۶۰^\circ = \frac{x}{y} \Rightarrow \sqrt{۳} = \frac{x}{y} \end{cases}$$

$$x = y\sqrt{۳} \xrightarrow{(*)} \frac{y\sqrt{۳}}{y+۲۰} = \frac{\sqrt{۳}}{۳} \Rightarrow ۳y = y+۲۰ \Rightarrow y = ۱۰ \Rightarrow x = ۱۰\sqrt{۳} \Rightarrow AH = ۱۰\sqrt{۳}$$

تست ۷: در مثلث قائم‌الزاویهٔ **ABC** که $\hat{A} = ۹۰^\circ$، حاصل $\frac{۱}{۱+\tan\hat{B}} + \frac{۱}{۱+\tan\hat{C}}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) ۲ ۴) ۴



$\hat{B} + \hat{C} = ۹۰^\circ$

$\hat{C}$ ـ $\hat{B}$ متمم یکدیگرند

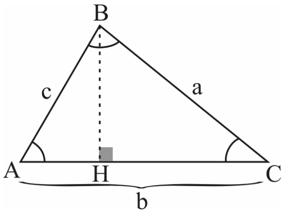
$\tan\hat{B} = \text{Cotan}\,\hat{C}$

$$\frac{۱}{۱+\tan\hat{B}} + \left(\frac{۱}{۱+\frac{۱}{\underbrace{\text{Cotan}\,\hat{C}}_{=\tan\hat{B}}}} = \frac{۱}{\frac{\tan\hat{B}+۱}{\tan\hat{B}}} = \frac{\tan\hat{B}}{۱+\tan\hat{B}}\right)$$

$$= \frac{۱+\tan\hat{B}}{۱+\tan\hat{B}} =$$ یک

حل مثلث و کاربردهای آن

به شکل روبه‌رو و اطلاعات زیر در مورد مثلث توجه کنید.

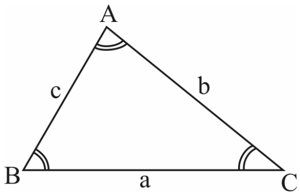


$$۱)\ \hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=۱۸۰^\circ$$

$$۲)\ \text{محیط}=a+b+c$$

منظور از حل مثلث، یافتن همه‌ی زوایا و اضلاع آن است.

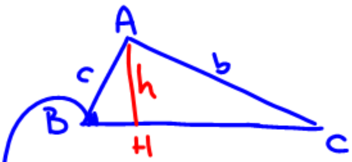
۱- مساحت مثلث: اگر دو ضلع یک مثلث و زاویه‌ی بین آن‌ها را داشته باشیم، آن‌گاه مساحت مثلث از رابطه‌ی زیر محاسبه می‌شود:



$$\text{مساحت}=\frac{۱}{۲}ab\sin C=\frac{۱}{۲}bc\sin A=\frac{۱}{۲}ac\sin B$$

$\div \frac{1}{2}abc$

$$\frac{\sin\hat{C}}{c}=\frac{\sin\hat{A}}{a}=\frac{\sin\hat{B}}{b}$$

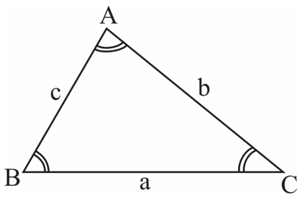


$BC=a$

$S=\frac{1}{2}(BC)h=\frac{1}{2}ac\sin\hat{B}$

$\sin\hat{B}=\frac{h}{c}\rightarrow h=c\sin\hat{B}$

۲- قانون سینوس‌ها: می‌دانیم مساحت یک مثلث برابر است با نصف حاصل‌ضرب دو ضلع در سینوس زاویه‌ی بین آن‌ها. پس:



$$S=\frac{۱}{۲}ab\sin C=\frac{۱}{۲}ac\sin B=\frac{۱}{۲}bc\sin A$$

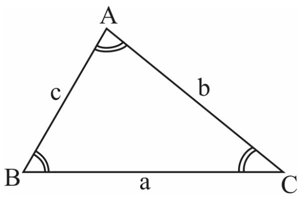
با تقسیم طرفین تساوی‌ها بر $\frac{۱}{۲}abc$ و معکوس کردن آن‌ها، داریم:

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}\quad \text{(قانون سینوس‌ها)}$$

توجه: قانون سینوس‌ها، برای حل مثلث‌هایی که در آن یک ضلع و زاویه‌ی روبه‌روی آن را داریم، بسیار سودمند خواهد بود.

۳- قانون کسینوس‌ها: وقتی دو ضلع یک مثلث و زاویه‌ی بین آن‌ها را داشته باشیم، قانون سینوس‌ها برای یافتن اضلاع و زوایا قابل استفاده نیست. در این حالت از «قانون کسینوس‌ها» استفاده می‌کنیم

مربع هر ضلع = مجموع مربعات دو ضلع دیگر – (دو برابر ضرب اضلاع در کسینوس بین اضلاع)



$$۱)\ a^۲=b^۲+c^۲-۲bc\cos\hat{A}$$

$$۲)\ b^۲=a^۲+c^۲-۲ac\cos\hat{B}$$

$$۳)\ c^۲=a^۲+b^۲-۲ab\cos\hat{C}$$

تعمیم فیثاغورث

منفی

مثبت

$a^2=b^2+c^2$

$a_1^2=b^2+c^2-2bc\cos\hat{A}_1$

$\hat{A}_1>\hat{A}=90^\circ$

$a_1>a$

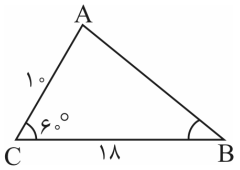
$a_2^2=b^2+c^2-2bc\cos\hat{A}_2$

$\hat{A}_2<\hat{A}=90^\circ$

$a_2<a$

$(AB)^2=(AC)^2+(BC)^2-2(AC)(BC)\cos 60^\circ$

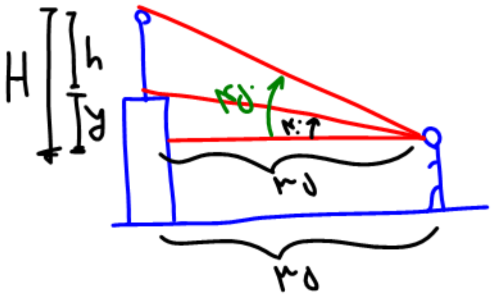
مثال ۸: در شکل روبه‌رو، طول **AB** را بیابید.



پاسخ: $AB^2 = 10^2 + 18^2 - 2(10)(18)\cos 60^\circ = 100 + 324 - 360\,(-\frac{1}{2}) = 244 \;\Rightarrow\; AB = \sqrt{244}$

تست ۹: ناظری به فاصله‌ی ۳۵ متر از پای ستونی که بر روی آن مجسمه‌ای قرار دارد، ایستاده است. زاویه‌ی رؤیت انتها و ابتدای مجسمه با سطح افق 45° و 40° است. ارتفاع مجسمه کدام است؟ $(\tan 40^\circ = 0/8)$ *(خارج ریاضی ۹۴)*

۱) ۶ ۲) ۶/۴ ۳) ۷ ۴) ۷/۲



$\tan 45^\circ = 1 = \frac{H}{35} \longrightarrow H = 35$

$\tan 40^\circ = 0/8 = \frac{y}{35} \longrightarrow y = 28$

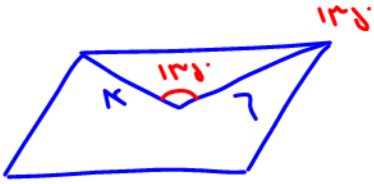
$h = H - y = 35 - 28 = 7$

۳

تست ۱۰: در متوازی‌الاضلاعی اندازه‌ی دو قطر ۱۲ و ۸ واحد و زاویه‌ی بین دو قطر ۱۳۵ درجه است. مساحت متوازی‌الاضلاع چند برابر $\sqrt{2}$ است؟ *(تجربی ۹۲ و تجربی خارج ۹۶)*

۱) ۱۸ ۲) ۲۴ ۳) ۳۲ ۴) ۳۶

نکته: در هر متوازی‌الاضلاع، اقطار منصف یکدیگرند و شکل را به چهار مثلث هم‌سطح تقسیم می‌کنند.



$\sin 135^\circ = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$S_{\text{متوازی‌الاضلاع}} = 4\left(S_\triangle = \frac{1}{2}(a=4)(b=6)\left(\sin 135^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) = 24\sqrt{2}$

تست ۱۱: مساحت مثلثی با دو ضلع ۱۶ و ۹ واحد برابر $24\sqrt{5}$ واحد مربع است. بزرگ‌ترین ضلع این مثلث کدام است؟ *(ریاضی ۹۴)*

۱) ۲۱ ۲) ۲۲ ۳) ۲۳ ۴) ۲۴

$S = \frac{1}{2}ab\sin\theta \longrightarrow 24\sqrt{5} = \frac{1}{2}(9)(16)\sin\theta \longrightarrow \sin\theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \longrightarrow \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 + \cos^2\theta = 1 \longrightarrow \cos^2\theta = 1 - \frac{5}{9} = \frac{4}{9} \longrightarrow \cos\theta = \pm\frac{2}{3}$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta = (16)^2 + (9)^2 - 2(9)(16)\left(-\frac{2}{3}\right) \longrightarrow c = 23$

برای ضلع بزرگ‌تر باید $\cos\theta < 0$ باشد

منفی در منفی بزرگ‌تر بشه درمیاد

تست ۱۲: مساحت مثلث به اضلاع ۷، ۹ و ۱۲ واحد کدام است؟ (ریاضی ۹۳)

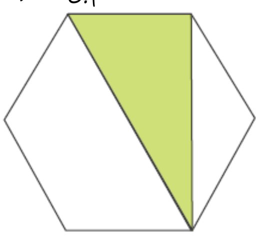
۱) $۱۵\sqrt{۲}$ ۲) $۱۴\sqrt{۳}$ ۳) $۱۲\sqrt{۵}$ ۴) $۱۴\sqrt{۵}$

حواستون به شش‌ضلعی منتظم هم باشه.

تست ۱۳: اگر قطر کوچک یک شش‌ضلعی منتظم برابر با $۲\sqrt{۳}$ باشد، مساحت شش‌ضلعی منتظم کدام است؟ (قلم‌چی ۹۷)

۱) ۶ ۲) $۶\sqrt{۳}$ ۳) ۱۲ ۴) $۱۲\sqrt{۳}$

تست ۱۴: مساحت شش‌ضلعی منتظم موجود در شکل زیر $۱۸\sqrt{۳}$ است. مساحت ناحیهٔ رنگی چه‌قدر است؟ (قلم‌چی ۹۷ و ۹۹)



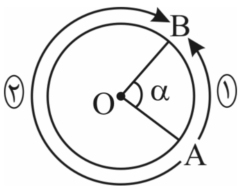
۱) ۱۲

۲) ۱۸

۳) $۶\sqrt{۳}$

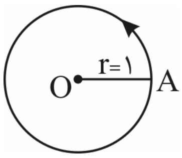
۴) $۹\sqrt{۳}$

تعریف جهت مثلثاتی



شکل مقابل را در نظر بگیرید. اگر بخواهیم از نقطه‌ی **A** به **B** برویم، یکی از دو مسیر ۱ یا ۲ را می‌توانیم انتخاب کنیم. در مثلثات جهت شماره‌ی ۱ را که خلاف حرکت عقربه‌های ساعت است (پادساعتگرد)، جهت مثبت و جهت شماره‌ی ۲ را که موافق حرکت عقربه‌های ساعت است (ساعتگرد)، جهت منفی می‌گویند.

تعریف دایره‌ی مثلثاتی



دایره‌ای است به شعاع واحد که در آن، با توجه به شکل، نقطه‌ی **A** به عنوان مبدأ کمان‌ها در نظر گرفته می‌شود و جهت آن مثبت می‌باشد (پادساعتگرد).

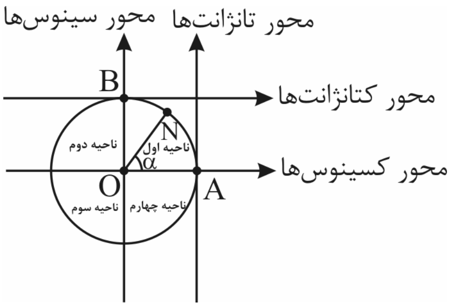
محورهای مثلثاتی

۱- محور کسینوس‌ها: محوری که از مرکز دایره‌ی مثلثاتی و مبدأ کمان‌ها (نقطه‌ی **A**) می‌گذرد.

۲- محور سینوس‌ها: محوری که در مرکز دایره‌ی مثلثاتی بر محور کسینوس‌ها عمود است.

۳- محور تانژانت‌ها: محوری که در مبدأ کمان‌ها (نقطه‌ی **A**) بر دایره‌ی مثلثاتی مماس است و موازی محور سینوس‌هاست.

۴- محور کتانژانت‌ها: محوری است که در بالاترین نقطه‌ی دایره بر آن مماس است و با محور کسینوس‌ها موازی و بر محور تانژانت‌ها و سینوس‌ها عمود است.



این چهار محور مثلثاتی را در روبه‌رو می‌بینید:

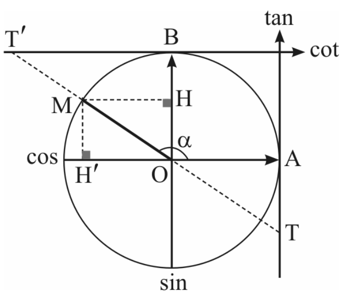
نقطه‌ی **N** : انتهای کمان روبه‌رو به زاویه‌ی α

نقطه‌ی **B** : مبدأ محور **cot**

نقطه‌ی **A** : مبدأ محور **tan**

نقطه‌ی **O** : مبدأ محورهای **sin** و **cos**

روش به دست آوردن مقدار یک نسبت مثلثاتی از روی دایره‌ی مثلثاتی



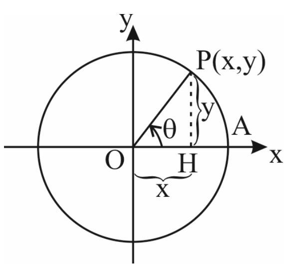
فرض کنید، مطابق شکل روبه‌رو زاویه‌ای به اندازه‌ی α انتخاب کرده‌ایم.

در این صورت از انتهای کمان بر محور **sin** و **cos** عمود می‌کنیم. داریم:

$$\boxed{OH = \sin\alpha \quad , \quad OH' = -\cos\alpha}$$

حال با امتداد **OM** به گونه‌ای که محور **tan** و **cot** قطع شود، داریم:

$$\boxed{AT = -\tan\alpha \quad , \quad BT' = -\cot\alpha}$$



در دایره‌ی مثلثاتی، زاویه‌ی دلخواه θ را در نظر می‌گیریم. با توجه به مثلث قائم‌الزاویه، مختصات نقطه‌ی **P(x,y)** در این دایره برحسب زاویه‌ی θ برابر است با:

$$P(x,y) = P(\cos\theta, \sin\theta) \Rightarrow \begin{cases} x = \cos\theta \\ y = \sin\theta \end{cases}$$

مثال ۱۵: اگر زاویه‌ی θ، دایره‌ی مثلثاتی را در نقطه‌ی $P(\frac{۱}{۳},\frac{۲\sqrt{۲}}{۳})$ قطع کند، نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ی θ را بیابید.

پاسخ:

$$P(\frac{۱}{۳},\frac{۲\sqrt{۲}}{۳})=P(\cos\theta,\sin\theta)$$

پس:
$$x=\cos\theta=\frac{۱}{۳}\ ,\ y=\sin\theta=\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}$$

از طرفی:
$$\tan\theta=\frac{y}{x}=۲\sqrt{۲}\ ,\ \cot\theta=\frac{x}{y}=\frac{۱}{۲\sqrt{۲}}$$

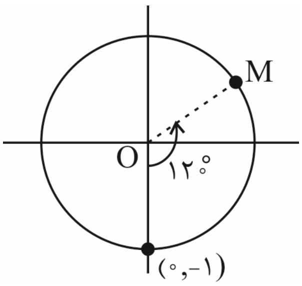
تست ۱۶: نقطه‌ی $P(\frac{۱}{۲},\frac{-\sqrt{۳}}{۲})$ روی دایره‌ی مثلثاتی را ۱۸۰° در جهت حرکت عقربه‌های ساعت حول مبدأ مختصات دوران می‌دهیم. نقطه‌ی جدید چه زاویه‌ای بر روی دایره‌ی مثلثاتی به وجود می‌آورد؟

۱) -۲۴۰° ۲) ۲۴۰° ۳) ۱۳۵° ۴) -۱۲۰°

تست ۱۷: نقطه‌ی $(۰,-۱)$ روی دایره‌ی مثلثاتی را حول مبدأ مختصات به اندازه‌ی ۱۲۰° در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت دوران می‌دهیم. مختصات نقطه‌ی جدید کدام است؟

۱) $(\frac{\sqrt{۳}}{۲},\frac{۱}{۲})$ ۲) $(\frac{-\sqrt{۳}}{۲},\frac{-۱}{۲})$ ۳) $(\frac{-\sqrt{۲}}{۲},\frac{۱}{۲})$ ۴) $(\frac{\sqrt{۳}}{۲},\frac{-۱}{۲})$

پاسخ: گزینه‌ی «۱» ـ نقطه‌ی $(۰,-۱)$ روی دایره‌ی مثلثاتی مطابق با شکل زیر است. اگر آن را ۱۲۰° در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت دوران دهیم، به نقطه‌ی M در ناحیه‌ی اول می‌رسیم.

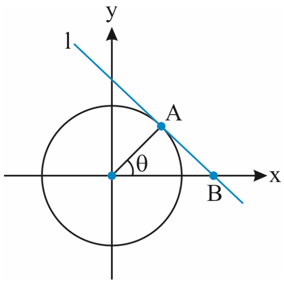


OM با محور طول‌ها، زاویه‌ی ۳۰° می‌سازد، بنابراین:

$$\begin{cases} x_M=\cos\theta \Rightarrow x_M=\cos ۳۰^\circ=\frac{\sqrt{۳}}{۲} \\ y_M=\sin\theta \Rightarrow y_M=\sin ۳۰^\circ=\frac{۱}{۲} \end{cases}$$

لذا $M(\frac{\sqrt{۳}}{۲},\frac{۱}{۲})$.

تست ۱۸: در دایرهٔ مثلثاتی زیر، اندازهٔ AB کدام است؟ (خط l بر دایره مماس است.)



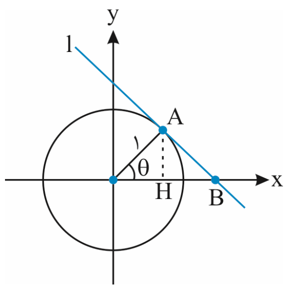
۱) $\cos\theta$

۲) $\dfrac{۱}{\cos\theta}$

۳) $\tan\theta$

۴) $\dfrac{۱}{\tan\theta}$

پاسخ: گزینهٔ «۳» ـ خط مماس بر دایره بر شعاع عمود است. حالا اگر از نقطهٔ A عمود بر محور طول‌ها رسم کنیم، طبق روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه داریم:



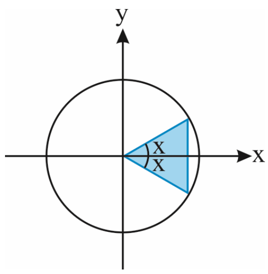
$$(۱)^۲ = OH \times OB \xrightarrow{OH=\cos\theta} ۱ = \cos\theta \times OB \Rightarrow OB = \frac{۱}{\cos\theta}$$

پس طبق قضیهٔ فیثاغورس در مثلث OAB می‌توان نوشت:

$$OB^۲ = (۱)^۲ + AB^۲ \Rightarrow \frac{۱}{\cos^۲\theta} = ۱ + AB^۲$$

$$\Rightarrow AB^۲ = \frac{۱}{\cos^۲\theta} - ۱ = \frac{۱-\cos^۲\theta}{\cos^۲\theta} = \frac{\sin^۲\theta}{\cos^۲\theta} = \tan^۲\theta \Rightarrow AB = \tan\theta$$

تست ۱۹: در دایرهٔ مثلثاتی زیر اگر مساحت ناحیهٔ رنگی برابر با A باشد، $A \times (\tan x + \cot x)$ کدام است؟



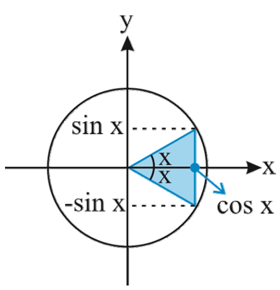
۱) $\frac{۱}{۲}$

۲) $\frac{۱}{۳}$

۳) $\frac{۱}{۴}$

۴) ۱

پاسخ: گزینهٔ «۴» ـ با توجه به شکل زیر، مساحت ناحیهٔ رنگی، مساحت یک مثلث با ارتفاع $\cos x$ و قاعدهٔ $۲\sin x$ است. پس داریم:



$$A = \frac{۱}{۲} \times (۲\sin x)\cos x = \sin x \cos x$$

در نتیجه برای محاسبهٔ $A(\tan x + \cot x)$ می‌توان نوشت:

$$A(\tan x + \cot x) = \sin x \cos x\left(\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x}\right) = \sin x \cos x\left(\frac{\overbrace{\sin^۲ x + \cos^۲ x}^{۱}}{\sin x \cos x}\right)$$

$$= \sin x \cos x\left(\frac{۱}{\sin x \cos x}\right) = ۱$$

تست ۲۰: کدام یک از نامساوی‌های زیر بین زوایای ۴۰ و ۵۰ درجه برقرار است؟ *(سراسری)*

۱) $\sin ۵۰^\circ < \sin ۴۰^\circ$

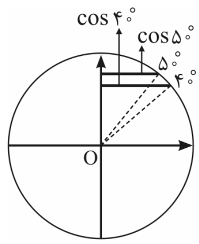
۲) $\cos ۵۰^\circ < \cos ۴۰^\circ$

۳) $\tan ۵۰^\circ < \tan ۴۰^\circ$

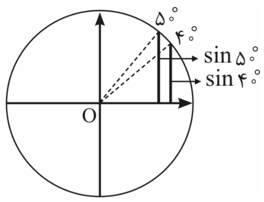
۴) $\cot ۴۰^\circ < \cot ۵۰^\circ$

پاسخ: گزینه‌ی «۲»

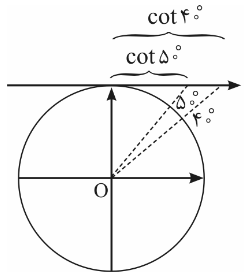
کافی است به دایره‌های مثلثاتی زیر خوب دقّت کنید:



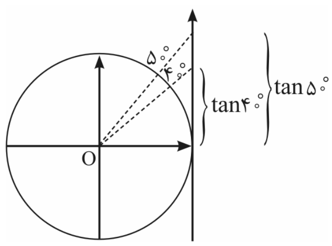
گزینه‌ی (۲) درست $\Rightarrow$ $\cos 50^\circ < \cos 40^\circ$



گزینه‌ی (۱) نادرست $\Rightarrow$ $\sin 50^\circ > \sin 40^\circ$



گزینه‌ی (۴) نادرست $\Rightarrow$ $\cot 40^\circ > \cot 50^\circ$



گزینه‌ی (۳) نادرست $\Rightarrow$ $\tan 50^\circ > \tan 40^\circ$

البته اگر به مفهوم صعود و نزول توابع نیز آشنا باشید، می‌توانید خیلی ساده‌تر پی به درستی گزینه‌ی (۲) ببرید.

$f(x)=\sin x$ در $(0\,,\frac{\pi}{2})$ صعودی است. $\Rightarrow \quad 50^\circ > 40^\circ \quad \Rightarrow \quad \sin 50^\circ > \sin 40^\circ$

$f(x)=\cos x$ در $(0\,,\frac{\pi}{2})$ نزولی است. $\Rightarrow \quad 50^\circ > 40^\circ \quad \Rightarrow \quad \cos 50^\circ < \cos 40^\circ$

$f(x)=\tan x$ در $(0\,,\frac{\pi}{2})$ صعودی است. $\Rightarrow \quad 50^\circ > 40^\circ \quad \Rightarrow \quad \tan 50^\circ > \tan 40^\circ$

$f(x)=\cot x$ در $(0\,,\frac{\pi}{2})$ نزولی است. $\Rightarrow \quad 50^\circ > 40^\circ \quad \Rightarrow \quad \cot 50^\circ < \cot 40^\circ$

تست ۲۱: اگر $\cos\alpha.\sin\alpha > 0$ و $\cos\alpha.\tan\alpha < 0$ آن‌گاه انتهای کمان α در کدام ناحیه‌ی مثلثاتی است؟

۱) اول　　　۲) دوم　　　۳) سوم　　　۴) چهارم

تست ۲۲: حاصل عبارت $\frac{\sin x+\cos x}{۲}+\frac{|\sin x-\cos x|}{۲}$ که در آن $x\in[۰\,,\,\frac{\pi}{۴}]$ کدام است؟ *(سراسری)*

۱) $\sin x$ ‏ ۲) $\cos x$ ‏ ۳) $\sin x+\cos x$ ‏ ۴) $\cos x-\sin x$

پاسخ: گزینه‌ی «۲»

گفتیم در $[۰\,,\,\frac{\pi}{۴}]$ (زیر خط $y=x$)، $\cos x>\sin x$:

$$\frac{|\sin x-\cos x|}{۲}+\frac{\sin x+\cos x}{۲}=\frac{-(\sin x-\cos x)+(\sin x+\cos x)}{۲}=\cos x$$

تست ۲۳: اگر $a\in\mathbb{R}$ و $\cos x=\sqrt{\frac{\cot x}{\cot x-a^۲}}$، انتهای کمان x در کدام ناحیه‌ی مثلثاتی است؟

۱) اول ‏ ۲) دوم ‏ ۳) سوم ‏ ۴) چهارم

پاسخ: گزینه‌ی «۴»

$$\cos x=\sqrt{\frac{\cot x}{\cot x-a^۲}}\geq ۰\quad\Rightarrow\quad\cos x\geq ۰\quad\Rightarrow$$ انتهای کمان x در ناحیه‌ی اوّل یا چهارم

اما با انتخاب x در ناحیه‌ی اول، $\cot x>۰$ و در نتیجه به ازای مقادیر بزرگ $a^۲$ می‌تواند زیر رادیکال منفی شود ودر نتیجه فرض مسئله که به ازای هر $a\in\mathbb{R}$ ، تساوی برقرار است از بین می‌رود. پس x باید در ناحیه‌ی چهارم باشد که در این صورت همواره زیر رادیکال مثبت خواهد بود:

$$\begin{cases}\cot x\leq ۰\\ \cot x-a^۲<۰\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\frac{\cot x}{\cot x-a^۲}\geq ۰$$

تست ۲۴: کدام نامساوی زیر نادرست است؟

۱) $\sin ۲۰^\circ<\sin ۴۰^\circ<\sin ۱۰۰^\circ$ ‏ ۲) $\cos ۱۰۰^\circ<\cos ۴۰^\circ<\cos ۲۰^\circ$

۳) $\sin ۴۰^\circ<\sin ۹۰^\circ<\sin ۱۰۰^\circ$ ‏ ۴) $\cos ۱۰۰^\circ<\cos ۷۰^\circ<\cos ۴۰^\circ$

تست ۲۵: اگر $\sin\theta+\tan\theta>۰$ و $\sin\theta\times\tan\theta<\frac{۱}{\cos\theta}$ باشند، انتهای کمان θ در کدام ناحیه قرار دارد؟

۱) اول ‏ ۲) دوم ‏ ۳) سوم ‏ ۴) چهارم

تست ۲۶: اگر $۴۵^\circ < \alpha < ۱۸۰^\circ$ باشد و $\sin\alpha = \frac{۵m+۱}{۳}$، آن‌گاه حدود m کدام است؟

۱) $(-\frac{۱}{۵},\frac{۲}{۵})$ ۲) $(-\frac{۱}{۵},\frac{۲}{۵}]$ ۳) $(\frac{۱}{۵},\frac{۲}{۵})$ ۴) $[۰,\frac{۲}{۵}]$

تست ۲۷: اگر $-۴۵^\circ < \alpha < ۴۵^\circ$ و $\cos\alpha = \frac{۳m+۲}{۴}$، آن‌گاه بیشترین مقدار m برابر است با:

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{۴}{۳}$

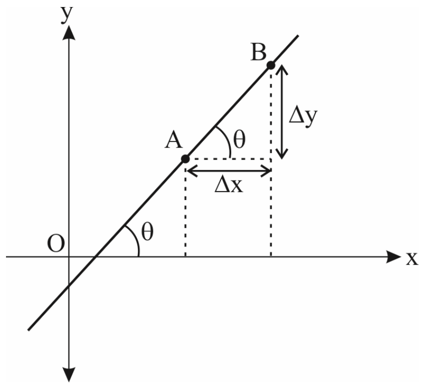
تست ۲۸: مجموع حداقل و حداکثر مقدار عبارت $\frac{\cos\alpha}{۲+\cos\alpha}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $-\frac{۱}{۳}$ ۳) $-\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

تست ۲۹: بیشترین مقدار عبارت $۴+\cos^۲ x+۲\cos x$ کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۵ ۳) ۴ ۴) ۳

رابطهٔ شیب خط با تانژانت اولیه



می‌دانیم که شیب هر خط، برابر نسبت تفاضل عرض‌های دو نقطهٔ واقع بر آن به تفاضل طول‌های همان دو نقطه است. حال اگر این خط محور xها را قطع کند، شیب خط برابر تانژانت زاویه‌ای است که خط با جهت مثبت محور xها می‌سازد، یعنی:

$$\tan\theta = \frac{\text{تفاضل عرض‌ها}}{\text{تفاضل طول‌ها}} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = m$$

به طور کلی می‌توان گفت:

الف) اگر خطی موازی با محور xها باشد، شیب آن صفر است.

ب) اگر خطی عمود بر محور xها باشد، شیب آن تعریف نشده است.

معادلهٔ خط

با داشتن یک نقطه از خط، مانند $A(x_\circ, y_\circ)$ و شیب خط از معادلهٔ مقابل استفاده می‌کنیم: $y - y_\circ = m(x - x_\circ)$

تست ۳۰: معادلهٔ خطی که با قسمت مثبت محور xها زاویهٔ ۴۵° می‌سازد و از نقطهٔ $A(۲,۳)$ می‌گذرد، کدام است؟

۱) $y = ۲x - ۱$ ۲) $y = ۲x + ۱$ ۳) $y = x - ۱$ ۴) $y = x + ۱$

پاسخ: گزینهٔ «۴» ـ شیب این خط برابر $m = \tan ۴۵^\circ = ۱$ است، در نتیجه:

$$y - y_\circ = m(x - x_\circ) \Rightarrow y - ۳ = ۱(x - ۲) \Rightarrow y = x + ۱$$

تست ۳۱: اگر خط $(۵t - ۳)x - ۲\sqrt{۳}y = ۱۰$ با جهت مثبت محور xها زاویهٔ ۳۰° بسازد، t کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ: گزینهٔ «۲»

یادآوری: شیب خط $ax + by = c$ برابر $-\frac{a}{b}$ است.

$$m = \frac{-a}{b} \Rightarrow \begin{cases} a = ۵t - ۳ \\ b = -۲\sqrt{۳} \end{cases} \Rightarrow m = \frac{-(۵t - ۳)}{-۲\sqrt{۳}} = \frac{۵t - ۳}{۲\sqrt{۳}}$$

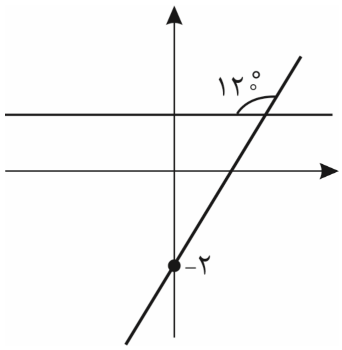
شیب خط داده شده برابر $\frac{۵t - ۳}{۲\sqrt{۳}}$ است، در نتیجه:

$$\tan ۳۰^\circ = \frac{۵t - ۳}{۲\sqrt{۳}} \Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۳} = \frac{۵t - ۳}{۲\sqrt{۳}} \Rightarrow ۲\sqrt{۳} \times \sqrt{۳} = ۳(۵t - ۳) \Rightarrow ۶ = ۱۵t - ۹ \Rightarrow ۱۵t = ۱۵ \Rightarrow t = ۱$$

تست ۳۲: خطی که از نقطهٔ $A(۲,۳)$ عبور کرده و با راستای مثبت محور xها زاویهٔ ۴۵° می‌سازد، محور xها را با چه طولی قطع می‌کند؟

۱) ۱- ۲) ۱ ۳) ۳- ۴) ۳

تست ۳۳: معادلهٔ خط مقابل کدام است؟



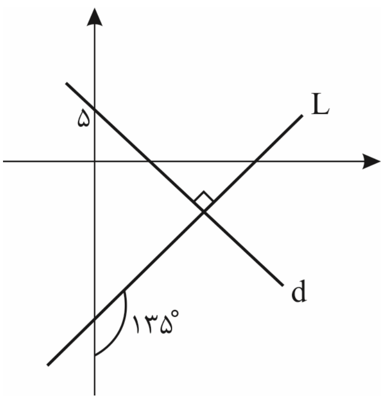
۱) $y+\sqrt{۳}x=۲$

۲) $y=\sqrt{۳}x-۲$

۳) $y-\sqrt{۳}x-۲=۰$

۴) $y=-\sqrt{۳}x-۴$

تست ۳۴: معادلهٔ خط **d** در شکل مقابل کدام است؟



۱) $y=-x+۵$

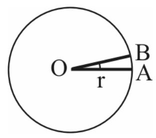
۲) $y=x+۵$

۳) $y=\sqrt{۳}x+۵$

۴) $y=-\sqrt{۳}x+۵$

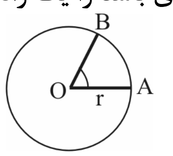
واحدهای کمان و زاویه

درجه: اگر محیط دایره را به ۳۶۰ قسمت مساوی تقسیم کنیم، هر قسمت کمانی به اندازه‌ی یک درجه است و زاویه‌ی مرکزی مقابل بـه آن مساوی ۱ درجه است. یعنی:



$\widehat{AB}=\frac{۲\pi r}{۳۶۰}$ $\qquad$ $\hat{AOB}$ = ۱ درجه

رادیان: زاویه‌ی مرکزی روبه‌رو به کمانی که طول آن با شعاع دایره مساوی باشد را یک رادیان می‌نامیم. یعنی:



$\widehat{AB}=r$ $\qquad$ $\hat{AOB}$ = ۱ رادیان

و به همین ترتیب ۲ رادیان، زاویه‌ی مرکزی روبه‌رو به کمانی است که طول آن ۲ برابر شعاع دایره باشد و ۲π رادیان، زاویه‌ی مرکزی روبه‌رو به کمانی است که طول آن مساوی ۲π برابر شعاع دایره (همان محیط دایره) باشد. جالب شد!

پس:

هر دایره با هر شعاعی، ۳۶۰ درجه یا ۲π رادیان است.

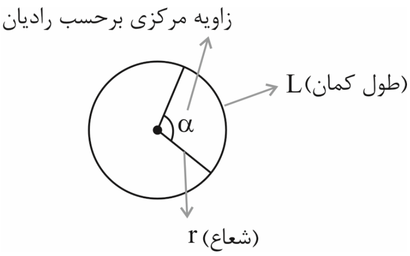
رابطه‌ی بین رادیان و درجه:

$$\boxed{\frac{D}{۱۸۰}=\frac{R}{\pi}}$$

R اندازه‌ی زاویه برحسب رادیان و **D** اندازه‌ی زاویه برحسب درجه است، مثلاً اگر $R=۱$ فرض شود، داریم:

$$D=\frac{۱۸۰}{\pi}\xrightarrow{\pi\simeq ۳/۱۴}D\simeq ۵۷^\circ$$

هر یک رادیان، تقریباً ۵۷° است.



اگر طول کمان روبه‌رو به زاویه را با نماد **L** ، شعاع دایره را با **r** و اندازه‌ی زاویه را با α نشان دهیم، آن‌گاه رابطه‌ی بالا به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\alpha=\frac{L}{r}$$

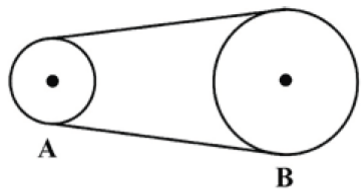
تست ۳۵: اگر در یک دایره، اندازه‌ی کمان مقابل به زاویه‌ی مرکزی $\theta=۵۰^\circ$ برابر ۱۰ سانتی‌متر باشد، مساحت این دایره چند برابر محیط آن است؟

۱) $\frac{۱}{۵۰}$ ۲) $\frac{۱}{۱۰}$ ۳) $\frac{۱۸}{\pi}$ ۴) $\frac{۳۶}{\pi}$

تست ۳۶: دایره‌ای به مساحت ۴π مفروض است. قطاعی به محیط $۷/۱۴$ از آن جدا کرده‌ایم. زاویه‌ای که توسط این قطاع از دایره جدا می‌شود، چند درجه است؟ $(\pi\simeq ۳/۱۴)$

۱) ۱۸۰ ۲) ۹۰ ۳) ۴۵ ۴) ۱۲۰

تست ۳۷: در شکل زیر چرخ‌دنده‌های $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ توسط نواری لاستیکی به هم وصل شده‌اند. شعاع چرخ‌دنده‌ی $\mathbf{A}$، ۲۰ سانتی‌متر و شعاع چرخ‌دنده‌ی $\mathbf{B}$ برابر با ۱ متر است. اگر چرخ‌دنده‌ی $\mathbf{B}$ به اندازه‌ی $\frac{۳\pi}{۲}$ رادیان بچرخد، چرخ‌دنده‌ی $\mathbf{A}$ چند دور می‌زنند؟



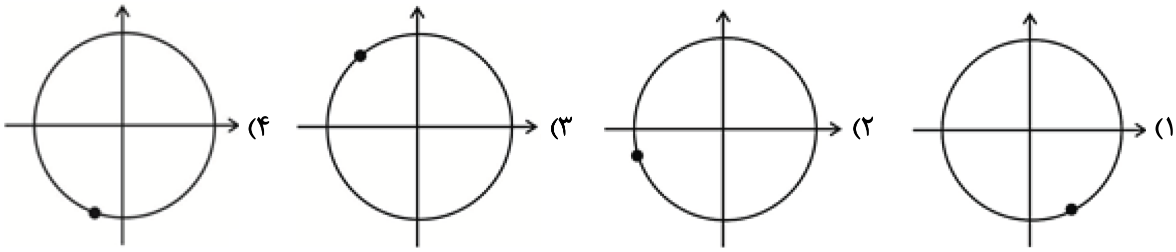
۱) ۲/۵

۲) ۵

۳) ۳/۷۵

۴) ۱۰

تست ۳۸: مجموعه دو زاویه ۷۲° و تفاضل آن دو زاویه $\frac{\pi}{۱۵}$ رادیان است. اگر اندازه‌ی زاویه‌ی بزرگ‌تر برابر با $\mathbf{x}$ درجه باشد، زاویه‌ی $(۵\mathbf{x}-۱۰^\circ)$ به طور تقریبی روی دایره‌ی مثلثاتی کدام است؟



تست ۳۹: چرخ و فلکی دارای ۳۶ کابین است و شما در کابین شماره‌ی پنجم قرار دارید. اگر چرخ و فلک به اندازه‌ی $\frac{۱۱\pi}{۳}$ رادیان در جهت مثبت مثلثاتی حرکت کند، در موقعیت اولیه‌ی کدام کابین قرار می‌گیرید؟ (شماره‌گذاری کابین‌ها در جهت مثبت مثلثاتی و فاصله‌ی کابین‌ها یکسان است.)

۱) ۲۵ ۲) ۳۰ ۳) ۳۴ ۴) ۳۵

نکات ساعت

الف) عقربهٔ دقیقه‌شمار به ازای هر یک دقیقه ۶ درجه طی می‌کند.

ب) عقربهٔ ساعت‌شمار به ازای هر یک ساعت ۳۰ درجه طی می‌کند.

پ) عقربهٔ ساعت‌شمار به ازای هر یک دقیقه ۰/۵ درجه طی می‌کند.

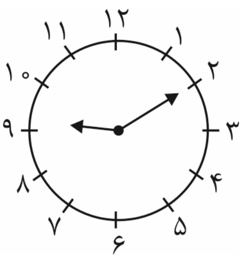
ت) زاویهٔ بین عقربهٔ ساعت‌شمار و دقیقه‌شمار از دستور زیر پیدا می‌شود:

$$\theta = \left| \frac{11m}{2} - 30h \right|$$

تست ۴۰: چه مدت طول می‌کشد تا عقربه‌ی دقیقه‌شمار ساعت به اندازه‌ی $\frac{8\pi}{3}$ رادیان دوران کند؟

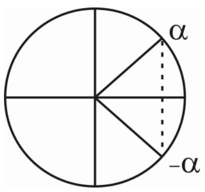
۱) یک ساعت
۲) یک ساعت و ۱۰ دقیقه
۳) یک ساعت و ۲۰ دقیقه
۴) یک ساعت و ۳۰ دقیقه

تست ۴۱: زاویه بین عقربه‌های ساعت‌شمار و دقیقه‌شمار در ساعت $9:10'$ چند رادیان است؟



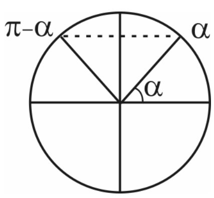
۱) $\frac{9\pi}{5}$
۲) $\frac{29\pi}{30}$
۳) $\frac{29\pi}{36}$
۴) $\frac{145\pi}{36}$

نسبت‌های مثلثاتی α و $-\alpha$ (قرینه)



$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$$
$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$$
$$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$$
$$\cot(-\alpha) = -\cot\alpha$$

نسبت‌های مثلثاتی زوایای مکمل $(\alpha, \pi-\alpha)$



$$\sin(\pi-\alpha) = \sin\alpha$$
$$\cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha$$
$$\tan(\pi-\alpha) = -\tan\alpha$$
$$\cot(\pi-\alpha) = -\cot\alpha$$

یادت باشه: دو زاویه‌ای که مکمل هستند (جمع‌شان ۱۸۰° است) سینوس‌های مساوی دارند، اما کسینوس و تانژانت و کتانژانت قرینه دارند. یعنی به عنوان مثال جمع کسینوس‌های دو زاویه مکمل برابر صفر است. (برای تانژانت و کتانژانت نیز به همین صورت، البته بـه شـرطی کـه هیچ‌یک از دو زاویه باعث بی‌معنی شدن تانژانت و کتانژانت نشود.)

مثال ۴۲:

$$\sin ۱۵۰ = \sin(\pi - ۳۰) =$$
$$\cos ۱۵۰ = \cos(\pi - ۳۰) =$$
$$\tan ۱۵۰ = \tan(\pi - ۳۰) =$$
$$\cot ۱۵۰ = \cot(\pi - ۳۰) =$$
$$\sin ۱۲۰ = \sin(\pi - ۶۰) =$$
$$\cos ۱۲۰ = \cos(\pi - ۶۰) =$$
$$\tan ۱۲۰ = \tan(\pi - ۶۰) =$$
$$\cot ۱۲۰ = \cot(\pi - ۶۰) =$$

زاویه‌های مکمل

اگر $\alpha + \beta = \pi$ ، پس $\alpha = \pi - \beta$ و در نتیجه:

$$\boxed{\sin\alpha = +\sin\beta \quad ، \quad \cos\alpha = -\cos\beta \quad ، \quad \tan\alpha = -\tan\beta \quad ، \quad \cot\alpha = -\cot\beta}$$

بنابراین:

اگر دو زاویه مکمل باشند، مجموع کسینوس‌های آن، تانژانت‌های آن‌ها و کتانژانت‌های آن‌ها مساوی صفر است.

مثال ۴۳: حاصل $\tan\frac{\pi}{۷} + \tan\frac{۶\pi}{۷} + \cos\frac{\pi}{۵} + \cos\frac{۴\pi}{۵}$ مساوی صفر است، زیرا:

$$\frac{\pi}{۷} + \frac{۶\pi}{۷} = \pi \quad \Rightarrow \quad \tan\frac{\pi}{۷} + \tan\frac{۶\pi}{۷} = ۰ \qquad , \qquad \frac{\pi}{۵} + \frac{۴\pi}{۵} = \pi \quad \Rightarrow \quad \cos\frac{\pi}{۵} + \cos\frac{۴\pi}{۵} = ۰$$

تست ۴۴: حاصل عبارت $\cos\frac{\pi}{n} + \cos\frac{۲\pi}{n} + \cdots + \cos\frac{n-۱}{n}\pi$ با فرض فردبودن n کدام است؟

۱) ۱   ۲) صفر   ۳) n ۴) $-n$

پاسخ: گزینه‌ی «۲»

$$\cos\boxed{\frac{\pi}{n}} + \cos\boxed{\frac{۲\pi}{n}} + \cdots + \cos\boxed{\frac{(n-۲)\pi}{n}} + \cos\boxed{\frac{(n-۱)\pi}{n}}$$

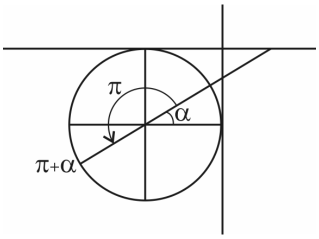
توی این مدل از سؤالات اولی و آخری رو با هم بگیرید و به همین ترتیب دومی رو با یکی مونده به آخری و ... . دقت کنید که اگر این زاویه‌ها را با هم جمع کنیم دو به دو جمعشان π می‌شود. یعنی مکمل هم هستند پس جمع کسینوس‌هایشان صفر می‌شود.

$$\frac{\pi}{n} + \frac{(n-۱)\pi}{n} = \frac{\pi}{n} + \frac{n\pi - \pi}{n} = \frac{n\pi}{n} = \pi$$

$$\frac{۲\pi}{n}+\frac{(n-۲)\pi}{n}=\frac{۲\pi}{n}+\frac{n\pi-۲\pi}{n}=\frac{n\pi}{n}=\pi$$

پس جواب صفر است.

نسبت‌های مثلثاتی $(\alpha\,,\pi+\alpha)$



$$\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha$$
$$\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha$$
$$\tan(\pi+\alpha)=\tan\alpha$$
$$\cot(\pi+\alpha)=\cot\alpha$$

یادت باشه: اگر به زاویه‌ای π رادیان اضافه شود، سینوس و کسینوس قرینه می‌شود، اما تانژانت و کتانژانت ثابت می‌مانند.

تذکر:

$$\begin{cases}\sin(۲k\pi+\alpha)=\sin\alpha\\ \cos(۲k\pi+\alpha)=\cos\alpha\end{cases}\qquad \begin{cases}\tan(k\pi+\alpha)=\tan\alpha\\ \cot(k\pi+\alpha)=\cot\alpha\end{cases}$$

مثال ۴۵:

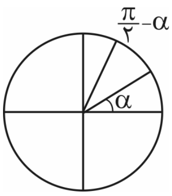
$$\sin ۲۱۰^\circ=\sin(\pi+۳۰^\circ)=$$

$$\cos ۲۱۰^\circ=\cos(\pi+۳۰^\circ)=$$

$$\tan ۲۱۰^\circ=\tan(\pi+۳۰^\circ)=$$

$$\cot ۲۱۰^\circ=\cot(\pi+۳۰^\circ)=$$

نسبت‌های مثلثاتی دو زاویه متمم (جمع $\frac{\pi}{۲}$)



$$\sin(\frac{\pi}{۲}-\alpha)=\cos\alpha$$
$$\cos(\frac{\pi}{۲}-\alpha)=\sin\alpha$$
$$\tan(\frac{\pi}{۲}-\alpha)=\cot\alpha$$
$$\cot(\frac{\pi}{۲}-\alpha)=\tan\alpha$$

یادت باشه: در مضارب فرد $\frac{\pi}{۲}$ نام نسبت عوض می‌شود. $\sin \rightleftarrows \cos$ و $\tan \rightleftarrows \cot$

یادت باشه:

$\sin(\frac{\pi}{۲}+\alpha)=\cos\alpha \qquad \tan(\frac{\pi}{۲}+\alpha)=-\cot\alpha$

$\cos(\frac{\pi}{۲}+\alpha)=-\sin\alpha \qquad \cot(\frac{\pi}{۲}+\alpha)=-\tan\alpha$

تذکر: در تمامی حالات فوق، α را زاویه‌ای حادّه در نظر گرفتیم.

یادت باشه: برای شما نحوه‌ی $\cos(\frac{۳\pi}{۲}+\alpha)$ را توضیح می‌دم و بدانید که تمامی حالات فوق را باید با این روش بررسی کنید و حفظ کردن آن‌ها کار خوبی نیست. α زاویه‌ای حادّه است. $\frac{۳\pi}{۲}+\alpha$ یعنی در جهت مثبت مثلثاتی (خلاف جهت عقربه‌های ساعت) به اندازه‌ی $\frac{۳\pi}{۲}$ (۲۷۰ درجه) حرکت کنیم و سپس چون $+\alpha$ داریم یعنی مقداری دیگر نیز در این جهت جلو برویم. پس انتهای کمان، ربع سوم را رد کرد و در ربع چهارم قرار دارد. حالا می‌گوییم که در ربع چهارم، کسینوس مثبت است، پس خروجی حتماً مثبت است و ضمناً به دلیل وجود فرد $\frac{\pi}{۲}$ $(\frac{۳\pi}{۲})$ نام نسبت عوض شده و تبدیل به سینوس می‌شود. پس:

$$\cos(\frac{۳\pi}{۲}+\alpha)=+\sin\alpha$$

محاسبه‌ی سریع نسبت‌های مثلثاتی $\frac{k\pi}{۶}$، $\frac{k\pi}{۴}$ و $\frac{k\pi}{۳}$

ابتدا با استفاده از زاویه‌ی مربوطه علامت نسبت رو مشخص کرده، بعد k را ندید گرفته و حاصل نسبت $\frac{\pi}{۶}$ یا $\frac{\pi}{۴}$ یا $\frac{\pi}{۳}$ خواسته شده را قرار می‌دهیم. به عنوان مثال ببینید:

$$\sin(\frac{۷\pi}{۶})=\sin\underbrace{(۷\times\frac{\pi}{۶})}_{\text{ربع سوم}}=-\sin(\frac{\pi}{۶})=-\frac{۱}{۲}$$

$$\cot(-\frac{۵\pi}{۳})=-\cot\underbrace{(۵\times\frac{\pi}{۳})}_{\text{ربع چهارم}}=-\left(-\cot(\frac{\pi}{۳})\right)=-(-\frac{\sqrt{۳}}{۳})=\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

برای تشخیص ساده‌تر زاویه‌هایی مثل $\frac{۷\pi}{۶}$ یا $\frac{۵\pi}{۳}$ ، توصیه می‌کنم آن‌ها را در ذهنتان به درجه تبدیل کنید، یعنی:

$$۷\times\frac{\pi}{۶}=۷\times۳۰^\circ=۲۱۰^\circ \qquad \text{یا} \qquad ۵\times\frac{\pi}{۳}=۵\times۶۰^\circ=۳۰۰^\circ$$

تست ۴۶: حاصل عبارت $\frac{\cos۲۸۵^\circ-\sin۲۵۵^\circ}{\sin۵۲۵^\circ-\sin۱۰۵^\circ}$، با فرض $\tan۱۵^\circ=۰/۲۸$ کدام است؟ (تجربی ۹۴)

۱) $-\frac{۱۶}{۹}$ ۲) $-\frac{۹}{۱۶}$ ۳) $\frac{۱۶}{۹}$ ۴) $\frac{۹}{۱۶}$

تست ۴۷: حاصل عبارت $A=\tan 1^\circ . \tan 2^\circ .... \tan 88^\circ . \tan 89^\circ$ کدام است؟

۱) تعریف‌نشده ۲) ۱ ۳) صفر ۴) $\frac{1}{2}$

چند نتیجه‌ی مهم از این سؤال: ۲ زاویه‌ای که متمم هستند، تانژانت و کتانژانت‌شان برابر است. $\tan\alpha=\cot\beta$ این اتفاق برای سینوس و کسینوس نیز صادق است، یعنی:

$$\alpha+\beta=\frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha=\frac{\pi}{2}-\beta \Rightarrow \begin{cases}\sin\alpha=\cos\beta\\ \cos\alpha=\sin\beta\end{cases}$$

به عنوان مثال: $\sin 15^\circ=\cos 75^\circ$، $\cos 53^\circ=\sin 37^\circ$ و ... ضمناً برای دو زاویه‌ای که متمم هستن، داریم:

$$\tan\alpha . \tan\beta=1$$

تست ۴۸: اگر $\tan 15^\circ=a$ باشد، حاصل $\frac{3\cos 165^\circ-2\sin 285^\circ}{3\sin 345^\circ-4\cos 255^\circ}$ کدام است؟

۱) $-\frac{1}{a}$ ۲) $-a$ ۳) $-\frac{2}{a}$ ۴) $-2a$

تست ۴۹: مقدار عبارت $\cos(300^\circ)+\sin(330^\circ)+\cot(750^\circ)+\tan(-840^\circ)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $2\sqrt{3}$ ۳) صفر ۴) $2\frac{\sqrt{3}}{3}$

تست ۵۰: حاصل عبارت $\sin^{۲}\frac{۷\pi}{۸}+\sin^{۲}\frac{۵\pi}{۸}+\sin^{۲}\frac{۳\pi}{۸}+\sin^{۲}\frac{\pi}{۸}$ کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۲}$ ۲) ۲ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) ۱

تست ۵۱: حاصل عبارت $\sin(\frac{۱۷\pi}{۳})\cos(-\frac{۱۷\pi}{۶})+\tan(\frac{۱۹\pi}{۴})\sin(-\frac{۱۱\pi}{۶})$ کدام است؟ (تجربی ۹۸)

۱) $-\frac{۱}{۴}$ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

تست ۵۲: حاصل عبارت $\tan(۲۸۵^\circ)\tan(-۱۶۵^\circ)-\sin(۱۰۹۵^\circ)\cos(۲۵۵^\circ)$ کدام است؟ (خارج تجربی ۹۹)

۱) $\sin^{۲}(۱۵^\circ)$ ۲) $\cos^{۲}(۱۵^\circ)$ ۳) $-\sin^{۲}(۱۵^\circ)$ ۴) $-\cos^{۲}(۱۵^\circ)$

روابط بین نسبت‌های مثلثاتی

روابط مثلثاتی کتاب دهم عبارت‌اند از:

$$۱)\ \sin^{۲}\theta+\cos^{۲}\theta=۱$$

اگر بخواهیم هر یک از نسبت‌های $\sin\theta$ یا $\cos\theta$ را برحسب دیگری بیابیم، داریم:

نتیجه:

$$\begin{cases}\sin^{۲}\theta=۱-\cos^{۲}\theta \Rightarrow \sin\theta=\pm\sqrt{۱-\cos^{۲}\theta}\\ \cos^{۲}\theta=۱-\sin^{۲}\theta \Rightarrow \cos\theta=\pm\sqrt{۱-\sin^{۲}\theta}\end{cases}$$

که علامت آن‌ها بر مبنای ناحیه‌ای که زاویه در آن قرار گرفته است، مشخص می‌شود.

۲) $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

۳) $\cot\theta = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$

۴) $\tan\theta = \dfrac{1}{\cot\theta}$

۵) $\cot\theta = \dfrac{1}{\tan\theta}$

۶) $\tan\theta \times \cot\theta = 1$

۷) $\dfrac{1}{\cos^2\theta} = 1 + \tan^2\theta$

۸) $\dfrac{1}{\sin^2\theta} = 1 + \cot^2\theta$

۹) $\tan\theta + \cot\theta = \dfrac{1}{\sin\theta.\cos\theta}$

۱۰) $(\sin\theta + \cos\theta)^2 = 1 + 2\sin\theta\cos\theta$

تست ۵۳: اگر α در ناحیهٔ سوم بوده و $\cos\alpha = -\dfrac{3}{5}$ باشد، حاصل $\dfrac{\cot\alpha}{\sin\alpha + \tan\alpha}$ کدام است؟

۱) $\dfrac{32}{45}$ ۲) $\dfrac{45}{32}$ ۳) $\dfrac{31}{45}$ ۴) $\dfrac{45}{31}$

تست ۵۴: اگر $\cos\theta = -\dfrac{3}{5}$ و انتهای کمان θ در ناحیه‌ی سوم مثلثاتی باشد، حاصل $\dfrac{\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$ کدام است؟

۱) $-\dfrac{12}{7}$ ۲) $-\dfrac{3}{7}$ ۳) $\dfrac{12}{7}$ ۴) $\dfrac{3}{7}$

تست ۵۵: حاصل $\dfrac{\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha} + \dfrac{\cot^2\alpha}{1+\cot^2\alpha}$ در صورت وجود کدام است؟

۱) $2\sin^2\alpha$ ۲) $\cos^2\alpha$ ۳) صفر ۴) ۱

تست ۵۶: اگر $\tan\theta = \frac{۳}{۴}$، حاصل $(\tan\theta - \cot\theta)^{۲} - \frac{۱}{\cos^{۲}\theta}$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱۱}{۹}$ ۲) $-\frac{۱۲}{۲۵}$ ۳) $\frac{۱۶}{۲۵}$ ۴) $\frac{۱۶}{۹}$

تست ۵۷: اگر $\sin x + \cos x = \frac{۱}{۲}$ باشد، حاصل $\tan x + \cot x$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۸}$ ۲) $-\frac{۳}{۸}$ ۳) $\frac{۸}{۳}$ ۴) $-\frac{۸}{۳}$

تست ۵۸: اگر $\sin x \cos x = \frac{۱}{۳}$ باشد، حاصل $\sin^{۳} x - \cos^{۳} x$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۵}$ ۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ ۳) $\pm\frac{۹}{۴\sqrt{۳}}$ ۴) $\pm\frac{۴\sqrt{۳}}{۹}$

پاسخ: گزینه‌ی «۴» ـ $\sin^{۳} x - \cos^{۳} x$ را تجزیه می‌کنیم:

$$\sin^{۳} x - \cos^{۳} x = (\sin x - \cos x)(\sin^{۲} x + \sin x \cos x + \cos^{۲} x) = (\sin x - \cos x)(۱ + \frac{۱}{۳}) = \frac{۴}{۳}(\sin x - \cos x)$$

حالا داشته باش:

$$(\sin x - \cos x)^{۲} = \sin^{۲} x + \cos^{۲} x - ۲\sin x \cos x = ۱ - ۲(\frac{۱}{۳}) = \frac{۱}{۳} \Rightarrow (\sin x - \cos x)^{۲} = \frac{۱}{۳}$$

$$\Rightarrow \sin x - \cos x = \pm\frac{۱}{\sqrt{۳}}$$

پس:

$$\sin^{۳} x - \cos^{۳} x = \frac{۴}{۳}(\pm\frac{۱}{\sqrt{۳}}) = \pm\frac{۴}{۳\sqrt{۳}} = \pm\frac{۴\sqrt{۳}}{۹}$$

تست ۵۹: اگر $\frac{\sin x + ۲\cos x}{\sin x - ۳\cos x} = ۲$ باشد، حاصل $\frac{۱}{\sin x \cos x}$ کدام است؟

۱) $\frac{۶۵}{۸}$ ۲) $-\frac{۶۵}{۸}$ ۳) $\frac{۱۷}{۴}$ ۴) $-\frac{۱۷}{۴}$

پاسخ: گزینه‌ی «۱» ـ طرفین وسطین می‌کنیم، یادتون باشه هروقت صورت و مخرج یک کسر هم‌زمان هم **sin** و هم **cos** داشت، طرفین وسطین کنید و بعدش **tan** بسازید:

$$\frac{\sin x + ۲\cos x}{\sin x - ۳\cos x} = ۲ \Rightarrow \sin x + ۲\cos x = ۲\sin x - ۶\cos x$$

$$\Rightarrow ۸\cos x = \sin x \xrightarrow[\text{تانژانت‌سازی}]{\div \cos x} ۸ = \tan x$$

از طرفی همیشه داریم:

$$\tan x + \cot x = \frac{۱}{\sin x \cos x}$$

$$۸ + \frac{۱}{۸} = \frac{۱}{\sin x \cos x} \Rightarrow \frac{۱}{\sin x \cos x} = \frac{۶۵}{۸}$$

تست ۶۰: اگر $۲\sin\alpha = ۳\cos\alpha$، حاصل $\frac{۱+\cot\alpha}{۱+\tan\alpha}$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۹}{۴}$ ۴) ۶

تست ۶۱: مقدار عبارت $\frac{\cos\alpha}{۱+\sin\alpha} - \frac{۱-\sin\alpha}{\cos\alpha}$ به ازای $\alpha = ۱۵^\circ$ کدام است؟

۱) صفر ۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ ۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۴) $\frac{\sqrt{۶}}{۲}$

تست ۶۲: حاصل $\frac{۱}{\sin^۴\theta} - \frac{۱}{\sin^۲\theta} - \cot^۴\theta$ کدام است؟

۱) $\sin^۲\theta$ ۲) $\cos^۲\theta$ ۳) $\tan^۲\theta$ ۴) $\cot^۲\theta$

تست ۶۳: اگر $\frac{1+\cot x}{\tan x+1}=2$، حاصل $\frac{2\cos x-3\sin x}{\sin x+\cos^{3} x}$ کدام است؟

۱) $\frac{2}{5}$ ۲) $\frac{1}{10}$ ۳) $\frac{2}{13}$ ۴) $\frac{5}{13}$

تست ۶۴: حاصل $\sqrt{1+\cot^{2}\alpha}\sqrt{1-\sin^{2}\alpha}$، اگر α در ربع دوم دایره‌ی مثلثاتی باشد، کدام است؟

۱) $\tan\alpha$ ۲) $-\tan\alpha$ ۳) $\cot\alpha$ ۴) $-\cot\alpha$

تست ۶۵: حاصل $\sqrt{1+\cos x\sqrt{(1-\sin x)(1+\sin x)}}$ کدام است؟ (x در ربع سوم است.)

۱) $\sin x$ ۲) $-\sin x$ ۳) $\cos x$ ۴) $-\cos x$

پاسخ: گزینهٔ «۲» ـ با استفاده از روابط $1-\sin^{2} x=\cos^{2} x$ و $1-\cos^{2} x=\sin^{2} x$ می‌توان نوشت:

$$\sqrt{1+\cos x\sqrt{\underbrace{(1-\sin x)(1+\sin x)}_{\text{اتحاد مزدوج}}}}=\sqrt{1+\cos x\sqrt{1-\sin^{2} x}}=\sqrt{1+\cos x\sqrt{\cos^{2} x}}$$

$$=\sqrt{1+\cos x\,|\cos x|}\overset{\pi<x<\frac{3\pi}{2}}{=\!=\!=}\sqrt{1+\cos x(-\cos x)}=\sqrt{1-\cos^{2} x}=\sqrt{\sin^{2} x}=|\sin x|\overset{\pi<x<\frac{3\pi}{2}}{=\!=\!=}-\sin x$$

تست ۶۶: در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC که در رأس $\hat{A}$ قائم است، حاصل $\frac{1}{\tan^{2}\hat{C}+1}+\sin^{2}(\frac{\pi}{2}-\hat{B})$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۱- ۴) ۲

پاسخ: گزینهٔ «۲» ـ روش اول: در مثلث ABC زاویهٔ $A=90^{\circ}$ است، پس داریم:

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180^{\circ}\Rightarrow 90^{\circ}+\hat{B}+\hat{C}=180^{\circ}\Rightarrow \hat{B}+\hat{C}=90^{\circ}$$

پس دو زاویهٔ B و C متمم‌اند. از طرفی با توجه به این که $\frac{1}{1+\tan^{2}\bigcirc}=\cos^{2}\bigcirc$ و $\sin^{2}(\frac{\pi}{2}-\bigcirc)=\cos^{2}\bigcirc$ است، پس می‌توان نوشت:

$$\frac{1}{1+\tan^{2}\hat{C}}+\sin^{2}(\frac{\pi}{2}-\hat{B})=\cos^{2}\hat{C}+\cos^{2}\hat{B}$$

از طرفی با توجه به این که دو زاویهٔ B و C متمم‌اند، می‌توان گفت $\cos\hat{C}=\sin\hat{B}$ و همچنین $\sin\hat{C}=\cos\hat{B}$ است. پس با استفاده از رابطهٔ $\cos\hat{C}=\sin\hat{B}$ می‌توان نوشت: $\cos^2\hat{C}+\cos^2\hat{B}=\sin^2\hat{B}+\cos^2\hat{B}=1$

روش دوم: دو زاویهٔ B و C متمم‌اند، یعنی $\hat{B}+\hat{C}=\frac{\pi}{2}$، پس $\frac{\pi}{2}-\hat{B}=\hat{C}$ است. در نتیجه داریم:

$$\frac{1}{1+\tan^2\hat{C}}+\sin^2(\frac{\pi}{2}-\hat{B})=\frac{1}{1+\tan^2\hat{C}}+\sin^2\hat{C}=\cos^2\hat{C}+\sin^2\hat{C}=1$$

تست ۶۷: با فرض $2\sin^2 x+3\cos^2 x=5\sin x\cos x$، مقدار $\cos^2 x$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{4}$　　۲) $\frac{13}{4}$　　۳) ۴　　۴) $\frac{4}{13}$

پاسخ: گزینهٔ «۴» ـ طرفین معادلهٔ داده‌شده را بر $\cos^2 x$ تقسیم می‌کنیم:

$$2\sin^2 x+3\cos^2 x=5\sin x\cos x\xrightarrow{\div\cos^2 x}2\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}+3\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x}=5\frac{\sin x\cos x}{\cos^2 x}$$

$$\Rightarrow 2\tan^2 x+3=5\tan x\Rightarrow 2\tan^2 x-5\tan x+3=0\xrightarrow{a+b+c=0}\begin{cases}\tan x=1\\ \tan x=\frac{3}{2}\end{cases}$$

حالا با استفاده از رابطهٔ $1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$ داریم:

حالت اول : $\tan x=1\Rightarrow 1+(1)^2=\frac{1}{\cos^2 x}\Rightarrow 2=\frac{1}{\cos^2 x}\Rightarrow\cos^2 x=\frac{1}{2}$

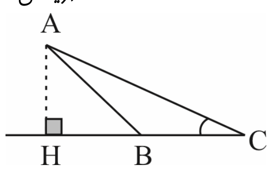
حالت دوم : $\tan x=\frac{3}{2}\Rightarrow 1+(\frac{3}{2})^2=\frac{1}{\cos^2 x}\Rightarrow 1+\frac{9}{4}=\frac{1}{\cos^2 x}\Rightarrow\frac{13}{4}=\frac{1}{\cos^2 x}\Rightarrow\cos^2 x=\frac{4}{13}$

که با توجه به گزینه‌ها پاسخ صحیح $\cos^2 x=\frac{4}{13}$ است.

تست ۶۸: اگر $2\sin^2 x+\cos^2 x=\frac{4}{3}$ باشد، حاصل $\tan^2 x$ کدام است؟ *(سراسری تجربی ۱۴۰۱)*

۱) $\frac{3}{2}$　　۲) $\frac{2}{3}$　　۳) $\frac{1}{2}$　　۴) $\frac{1}{4}$

تست ۶۹: در شکل زیر، فرض کنید $\sin\hat{C}=\frac{5}{13}$ و $CH=9$. اندازه‌ی ارتفاع AH کدام است؟ *(ریاضی ۹۹)*



۱) ۳/۲۵　　۲) ۳/۵

۳) ۳/۶　　۴) ۳/۷۵

فرمول‌های کمان 2α

۱) $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

مثال : $\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}$, $\sin 6x = 2\sin 3x\cos 3x$

۲) $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

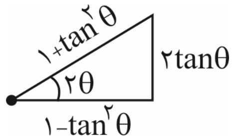
الف) $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

ب) $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$

پ) $1+\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha \Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$

ت) $1-\cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha \Rightarrow \sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$

«به شدت مهم»



۳) $\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} \xrightarrow{\text{اثبات}} \tan(\alpha+\alpha) = \frac{\tan\alpha+\tan\alpha}{1-\tan\alpha\tan\alpha} = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

۴) $\sin 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha} \xrightarrow{\text{اثبات}} \frac{2\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{1+\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = 2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha$

۵) $\cos 2\alpha = \frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha} \xrightarrow{\text{اثبات}} \frac{1-\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{1+\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = \frac{\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{\frac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos 2\alpha$

۶) $\tan^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha} \xrightarrow{\text{اثبات}} \frac{1-\cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha}{1+\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha} = \tan^2\alpha$

۷) $\tan\alpha + \cot\alpha = \frac{2}{\sin 2\alpha} \xrightarrow{\text{اثبات}} \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{1}{\frac{1}{2}\sin 2\alpha} = \frac{2}{\sin 2\alpha}$

۸) $\cot\alpha - \tan\alpha = 2\cot 2\alpha \xrightarrow{\text{اثبات}} \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{\cos 2\alpha}{\frac{1}{2}\sin 2\alpha} = \frac{2\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = 2\cot 2\alpha$

*۹) $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$

*۱۰) $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$

*۱۱) $\sin\alpha\sin(60^\circ-\alpha)\sin(60^\circ+\alpha) = \frac{1}{4}\sin 3\alpha$

*۱۲) $\cos\alpha\cos(60^\circ-\alpha)\cos(60^\circ+\alpha) = \frac{1}{4}\cos 3\alpha$

*۱۳) $\tan\alpha\tan(60^\circ-\alpha)\tan(60^\circ+\alpha) = \tan 3\alpha$

تست ۷۰: حاصل عبارت $\sin(۷/۵^\circ)\sin(۹۷/۵^\circ)\cos(۱۵^\circ)$ چه‌قدر است؟

۱) $-\frac{۱}{۸}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۸}$ ۴) $-\frac{۱}{۴}$

تست ۷۱: اگر $f(x) = x - \sqrt{x}$ و $g(x) = \sin^۴ x$ باشند، ضابطه‌ی تابع fog کدام است؟ (خارج ۹۲)

۱) $-\frac{۱}{۴}\sin^۲ ۲x$ ۲) $-\frac{۱}{۲}\sin^۲ ۲x$ ۳) $\frac{۱}{۴}\cos^۲ ۲x$ ۴) $\frac{۱}{۲}\cos^۲ ۲x$

تست ۷۲: حاصل عبارت $\cos\frac{\pi}{۷} \cdot \cos\frac{۲\pi}{۷} \cdot \cos\frac{۴\pi}{۷}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۸}$ ۲) $-\frac{۱}{۸}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $-\frac{۱}{۴}$

تست ۷۳: ساده‌شدهٔ عبارت $\frac{۱+\cos\theta}{\sin\theta} + \frac{\sin\theta}{۱-\cos\theta}$ کدام است؟ (ریاضی خارج ۱۴۰۰)

۱) $\cos\frac{\theta}{۲}$ ۲) $\sin\frac{\theta}{۲}$ ۳) $۲\cot\frac{\theta}{۲}$ ۴) $۲\tan\frac{\theta}{۲}$

تست ۷۴: اگر انتهای کمان x در ربع سوّم و $\frac{1-\sin x}{1+\sin x}=4$ باشد، مقدار صحیح $\tan\frac{x}{2}$ کدام است؟ (ریاضی خارج ۱۴۰۱)

۱) ۲ ۲) ۲- ۳) ۳ ۴) ۳-

تست ۷۵: حاصل $\sin x\cos x(\cos^4 x-\sin^4 x)$ به ازای $x=15^\circ$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{8}$ ۳) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ۴) $\frac{\sqrt{3}}{8}$

پاسخ: گزینهٔ «۴» ـ با استفاده از روابط $\sin 2\bigcirc=2\sin\bigcirc\cos\bigcirc$ و $\cos^2\bigcirc-\sin^2\bigcirc=\cos 2\bigcirc$ می‌توان نوشت:

$$\sin x\cos x(\cos^4 x-\sin^4 x)=\sin x\cos x(\cos^2 x-\sin^2 x)(\underbrace{\cos^2 x+\sin^2 x}_{1})=\frac{1}{2}\sin 2x\cos 2x=\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\sin(4x))$$

$$=\frac{1}{4}\sin(4x)$$

حالا با جای‌گذاری $x=15^\circ$ خواهیم داشت:

$$\frac{1}{4}\sin(4x)=\frac{1}{4}\sin(60^\circ)=\frac{1}{4}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{8}$$

تست ۷۶: با فرض $\sin\alpha=\frac{1}{4}$، مقدار $\cos 4\alpha$ کدام است؟

۱) $\frac{17}{64}$ ۲) $\frac{17}{32}$ ۳) $\frac{-17}{64}$ ۴) $\frac{-17}{32}$

پاسخ: گزینهٔ «۲» ـ ابتدا با استفاده از رابطهٔ $\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha$ مقدار $\cos 2\alpha$ را به دست می‌آوریم:

$$\cos 2\alpha=1-2(\frac{1}{16})=1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$$

حالا با استفاده از رابطهٔ $\cos 4\alpha=2\cos^2(2\alpha)-1$ برای محاسبهٔ مقدار $\cos 4\alpha$ می‌توان نوشت:

$$\cos 4\alpha=2(\frac{49}{64})-1=\frac{98}{64}-1=\frac{34}{64}=\frac{17}{32}$$

تست ۷۷: اگر زاویهٔ α در ناحیهٔ سوم مثلثاتی و $\tan\alpha=\frac{3}{4}$ باشد، مقدار $\frac{\cos(2\alpha-\frac{\pi}{2})+\cos(\alpha+\pi)}{\cot(2\alpha)}$ کدام است؟

(سراسری تجربی ۱۴۰۰)

۱) $-\frac{96}{175}$ ۲) $\frac{1056}{175}$ ۳) $\frac{96}{175}$ ۴) $-\frac{1056}{175}$

تست ۷۸: اگر $f(x)=16\cos^2(3x)\cos^2(6x)\cos^2(12x)\cos^2(24x)$ مقدار $f(\frac{\pi}{36})$ کدام است؟ (سراسری تجربی ۱۴۰۰)

۱) $\frac{6-3\sqrt{3}}{16}$ ۲) $\frac{6-\sqrt{3}}{16}$ ۳) $\frac{6+\sqrt{3}}{16}$ ۴) $\frac{6+3\sqrt{3}}{16}$

تست ۷۹: اگر $\cot x-\tan x=3$ باشد، حاصل عبارت $M=\frac{2\cot 4x}{2\cot 2x+3\tan 2x}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{6}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $-\frac{1}{6}$ ۴) $-\frac{5}{6}$

پاسخ: گزینهٔ «۱» ـ می‌دانیم $\cot\bigcirc-\tan\bigcirc=2\cot 2\bigcirc$ است، پس می‌توان نوشت:

$$2\cot 2x=3 \Rightarrow \cot 2x=\frac{3}{2} \Rightarrow \tan 2x=\frac{2}{3}$$

از طرفی مطابق فرمول بالا داریم:

$$2\cot 4x=\cot 2x-\tan 2x=\frac{3}{2}-\frac{2}{3}=\frac{9-4}{6}=\frac{5}{6}$$

در نهایت با جای‌گذاری مقادیر به‌دست‌آمده در خواستهٔ مسئله، مقدار M به دست می‌آید، یعنی:

$$M=\frac{2\cot 4x}{2\cot 2x+3\tan 2x}=\frac{\frac{5}{6}}{2(\frac{3}{2})+3(\frac{2}{3})}=\frac{\frac{5}{6}}{3+2}=\frac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{1}}=\frac{1}{6}$$

تست ۸۰: اگر $\frac{\tan\alpha(1-\tan^2\alpha)}{(1+\tan^2\alpha)^2}=\frac{1}{8}$، حاصل $\sin 4\alpha$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۳) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۴) $\frac{3}{4}$

چند تا اتّحاد مهمّ و کاربردی

$$1)\ \cos^4 x-\sin^4 x=\cos 2x$$

اثبات : $(\cos^2 x-\sin^2 x)\underbrace{(\cos^2 x+\sin^2 x)}_{1}=\cos^2 x-\sin^2 x=\cos 2x$

$$2)\ \sin^4 x+\cos^4 x=1-\frac{1}{2}\sin^2 2x=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cos 4x$$

اثبات: $\sin^4 x+\cos^4 x$

$(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-2\sin^2 x\cos^2 x=1-2\sin^2 x\cos^2 x=1-2(\sin x\cos x)^2=1-2(\frac{1}{2}\sin 2x)^2$

$=1-2\times\frac{1}{4}\sin^2 2x=1-\frac{1}{2}\sin^2 2x=1-\frac{1}{2}(\frac{1-\cos 4x}{2})=1-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cos 4x=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cos 4x$

توی اثبات این فرمول از اتحاد $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$ استفاده کردیم که $a=\sin^2 x$ و $b=\cos^2 x$ بود.

$$3)\ \sin^6 x+\cos^6 x=1-\frac{3}{4}\sin^2 2x=\frac{5}{8}+\frac{3}{8}\cos 4x$$

اثبات: $\sin^6 x+\cos^6 x$

اثبات : $\underbrace{(\sin^2 x+\cos^2 x)}_{1}{}^3-3\sin^2 x\cos^2 x\underbrace{(\sin^2 x+\cos^2 x)}_{1}=1-3\sin^2 x\cos^2 x=1-3(\sin x\cos x)^2$

$=1-3(\frac{1}{2}\sin 2x)^2=1-\frac{3}{4}\sin^2 2x=1-\frac{3}{4}(\frac{1-\cos 4x}{2})=1-\frac{3}{8}+\frac{3}{8}\cos 4x=\frac{5}{8}+\frac{3}{8}\cos 4x$

توی اثبات این فرمول از اتحاد $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$ استفاده کردیم که $a=\sin^2 x$ و $b=\cos^2 x$ بود.

یادت باشه: فرمول‌های ۲ و ۳ در فصل مشتق کاربرد زیادی خواهند داشت.

$$4)\ (\sin x+\cos x)^2=1+\sin 2x$$
$$(\sin x-\cos x)^2=1-\sin 2x$$

اثبات: $(\sin x\pm\cos x)^2$

$\underbrace{\sin^2 x+\cos^2 x}_{1}\pm\overbrace{2\sin x\cos x}^{\sin 2x}=1\pm\sin 2x$

یادت باشه: فرمول شماره ۴ در فصل حد، برای رفع ابهام کاربرد زیادی دارد.

تست ۸۱: حاصل $\sqrt{1+\sin 2x}-\sin x$ وقتی $\frac{\pi}{3}<x<\frac{3\pi}{4}$ باشد، کدام است؟

۱) صفر　　۲) $-2\sin x$　　۳) $\cos x$　　۴) $2\sin x-\cos x$

تست ۸۲: اگر $\sin\alpha-\cos\alpha=\frac{۱}{۲}$ باشد، مقدار $\cos(\frac{۳\pi}{۲}-۲\alpha)$ کدام است؟ (تجربی ۹۵)

۱) $-\frac{۳}{۴}$ ۲) $-\frac{۳}{۸}$ ۳) $\frac{۳}{۸}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

معادلات مثلثاتی

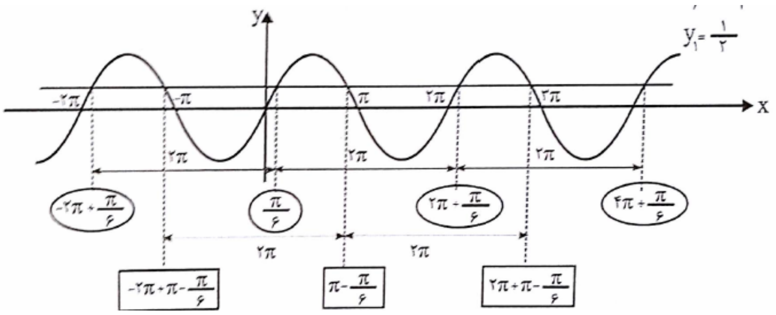
به معادلاتی که مجهولشان نسبت‌های مثلثاتی باشد، معادلات مثلثاتی می‌گوییم و هدف از حل آن‌ها مشخص کردن همه‌ی کمان‌هایی (زوایایی) است که در معادله صدق می‌کند.

چون توابع مثلثاتی متناوب هستند، اگر خط $y=k$ آن‌ها را قطع کند، برخورد در بیش از یک نقطه رخ می‌دهند و بی‌شمار جواب داریم که برای گزارش طول نقاط تلاقی به روش زیر عمل می‌کنیم:

به عنوان مثال: اگر از ما بپرسند چه xهایی در معادله‌ی $۲\sin x-۱=۰$ صدق می‌کند، می‌توانیم از طریق زیر عمل کنیم:

$$۲\sin x-۱=۰ \Rightarrow \underbrace{\sin x}_{y_۱}=\underbrace{\frac{۱}{۲}}_{y_۲}$$

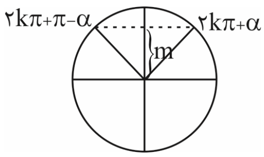
از روش رسم و تقاطع دو تابع $y_۱$ و $y_۲$ دقیقاً xهایی را پیدا می‌کنیم که در معادله‌ی فوق صدق می‌کنند.



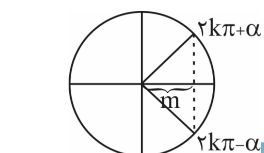
حل معادله‌ی ساده‌ی مثلثاتی

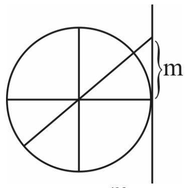
برای این که هر بار مجبور به رسم و تقاطع دو تابع نشویم، به کمک اتحادها و روابط و یا نسبت زوایای متمم، معادله را ساده می‌کنیم به طوری که به تساوی دو نسبت هم‌نام برسیم و به کمک ۴ مسئله‌ی زیر، معادله حل می‌شود.

$$۱)\ \sin x=m \xrightarrow{m=\sin\alpha} \sin x=\sin\alpha \Rightarrow \begin{cases} x=۲k\pi+\alpha \\ x=۲k\pi+\pi-\alpha \end{cases}$$

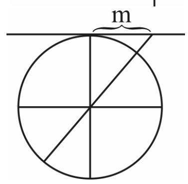


$$۲)\ \cos x=m \xrightarrow{m=\cos\alpha} \cos x=\cos\alpha \Rightarrow x=۲k\pi\pm\alpha$$





$$۳)\ \tan x = m \xrightarrow{m=\tan\alpha} \tan x = \tan\alpha \Rightarrow x = k\pi + \alpha$$



$$۴)\ \cot x = m \xrightarrow{m=\cot\alpha} \cot x = \cot\alpha \Rightarrow x = k\pi + \alpha$$

حالات مختلف معادلات مثلثاتی

۱- حالت اول: در این حالت در معادله مثلثاتی فقط یک نسبت مثلثاتی با زاویه مجهول و از درجه اول وجود دارد که با کمک ۴ مسئله‌ای که گفته شد، جواب را می‌یابیم.

مثال ۸۳: معادلات زیر را حل کنید.

$۱)\ ۲\sin x - \sqrt{۳} = ۰$

$$۲\sin x = \sqrt{۳} \Rightarrow \sin x = \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \sin\frac{\pi}{۳} \Rightarrow \begin{cases} x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۳} \\ x = ۲k\pi + \pi - \frac{\pi}{۳} \end{cases}$$

$۲)\ ۲\sin x + \sqrt{۳} = ۰$

$$۲\sin x = -\sqrt{۳} \Rightarrow \sin x = \frac{-\sqrt{۳}}{۲} = \sin(\frac{-\pi}{۳}) \Rightarrow \begin{cases} x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۳} \\ x = ۲k\pi + \pi + \frac{\pi}{۳} \end{cases}$$

$۳)\ ۲\cos x - \sqrt{۳} = ۰$

$$۲\cos x = \sqrt{۳} \Rightarrow \cos x = \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \cos\frac{\pi}{۶} \Rightarrow x = ۲k\pi \pm \frac{\pi}{۶}$$

$۴)\ ۲\cos x + \sqrt{۳} = ۰$

$$۲\cos x = -\sqrt{۳} \Rightarrow \cos x = \frac{-\sqrt{۳}}{۲} = \cos(\frac{۵\pi}{۶}) \Rightarrow x = ۲k\pi \pm \frac{۵\pi}{۶}$$

یادت باشه: چنان‌چه کسینوس یک کمان منفی را خواستند، کمان را از ربع دوم انتخاب کنید. اما در سایر نسبت‌های مثلثاتی برای کمان منفی، به ربع چهارم با کمان قرینه رجوع می‌کنیم.

$۵)\ \tan x - \sqrt{۳} = ۰$

$$\tan x = \sqrt{۳} = \tan\frac{\pi}{۳} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{۳}$$

$۶)\ \tan x + \sqrt{۳} = ۰$

$$\tan x = -\sqrt{۳} = \tan(-\frac{\pi}{۳}) \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{۳}$$

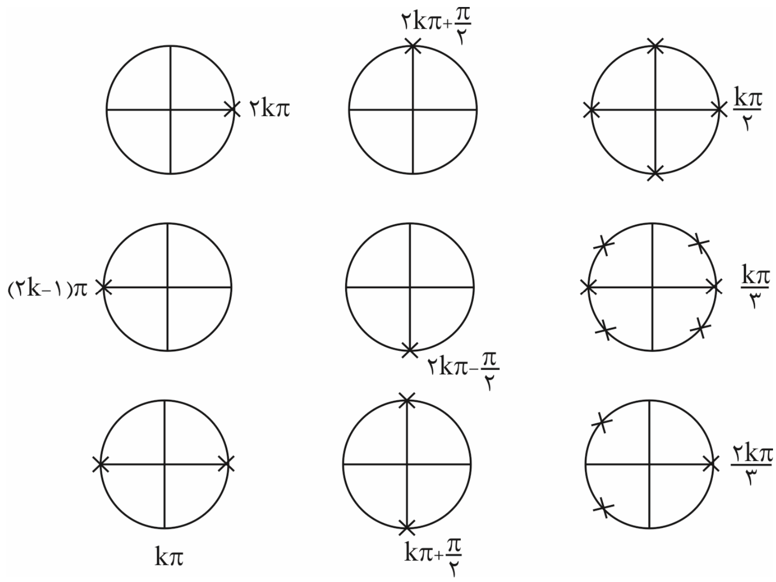
$7)\ \cot x - \sqrt{3} = 0$

$\cot x = \sqrt{3} = \cot\frac{\pi}{6} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{6}$

$8)\ \cot x + \sqrt{3} = 0$

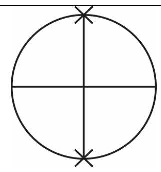
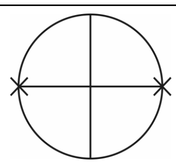
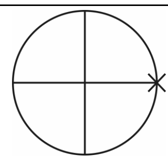
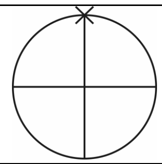
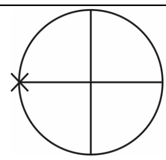
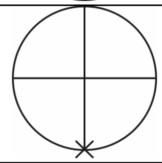
$\cot x = -\sqrt{3} = \cot(-\frac{\pi}{6}) \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{6}$

آدرس نقاط مهم روی دایره مثلثاتی



حل معادلات خاص مثلثاتی

برخی از معادلات هستند که جواب‌های آن‌ها به فرم ساده‌تری هم قابل نمایش است. این معادلات رادر جدول زیر بررسی می‌کنیم.

آدرس روی دایره	جواب کلی	معادله	آدرس روی دایره	جواب کلی	معادله
	$x = k\pi + \frac{\pi}{2}$	$\cos x = 0$		$x = k\pi$	$\sin x = 0$
	$x = 2k\pi$	$\cos x = 1$		$x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$	$\sin x = 1$
	$x = (2k+1)\pi$	$\cos x = -1$		$x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$	$\sin x = -1$

یادت باشه: $\sin x = \pm 1$ و $\cos x = \pm 1$ ریشه مضاعف دارند.

۲- حالت دوم: در این حالت فقط و فقط دو نسبت مثلثاتی با ضریب ۱ یا ۱- و توان ۱ وجود دارند که معادله را به تساوی دو نسبت هم‌نام تبدیل می‌کنیم (اگر هم‌نام نبودند از زوایای متمم استفاده می‌کنیم) و به کمک ۴ مسئله گفته‌شده، مسئله را حل می‌کنیم.

به طور کلی کمان می‌تواند به جز x ، چیز دیگری هم باشد.

مثلاً: فرض کنید u یک عبارتِ xدار است.

$$\sin u = \sin\alpha \Rightarrow \begin{cases} u = ۲k\pi + \alpha \\ u = ۲k\pi + \pi - \alpha \end{cases}$$

$$\cos u = \cos\alpha \Rightarrow u = ۲k\pi \pm \alpha$$

$$\tan u = \tan\alpha \Rightarrow u = k\pi + \alpha$$

$$\cot u = \cot\alpha \Rightarrow u = k\pi + \alpha$$

مثال ۸۴: معادله‌ی زیر را حل کنید.

۱) $\sin ۳x - \sin x = ۰$

$$\sin ۳x = \sin x \Rightarrow \begin{cases} ۳x = ۲k\pi + x \Rightarrow ۲x = ۲k\pi \Rightarrow x = k\pi \\ ۳x = ۲k\pi + \pi - x \Rightarrow x = \dfrac{k\pi}{۲} + \dfrac{\pi}{۴} \end{cases}$$

تست ۸۵: جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $\dfrac{\sin ۳x}{\cos(\frac{۳\pi}{۲} + x)} = ۱$ ، به کدام صورت است؟ (خارج تجربی ۹۳)

۱) $k\pi + \dfrac{\pi}{۴}$ ۲) $۲k\pi \pm \dfrac{\pi}{۴}$ ۳) $۲k\pi \pm \dfrac{۳\pi}{۴}$ ۴) $\dfrac{k\pi}{۲} + \dfrac{\pi}{۴}$

مثال ۸۶: معادله زیر را حل کنید.

۲) $\sin ۳x + \sin x = ۰$

$$\sin ۳x = -\sin x$$

قرار شد چپ و راست مساوی یک نسبت همنام داشته باشیم (که این‌جا داریم) و هر دو، پشتشون علامت مثبت داشته باشه. این‌جا برای این که از شرّ منفی خلاص بشیم از خاصیت $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ استفاده می‌کنیم یعنی به جای $-\sin x$ می‌نویسیم $\sin(-x)$ پس:

$$\sin \underbrace{۳x}_{u} = \sin(\underbrace{-x}_{\alpha}) \Rightarrow \begin{cases} ۳x = ۲k\pi + (-x) \\ , \\ ۳x = ۲k\pi + \pi - (-x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۴x = ۲k\pi \Rightarrow \boxed{x = \dfrac{k\pi}{۲}} \\ ۲x = ۲k\pi + \pi \Rightarrow \boxed{x = k\pi + \dfrac{\pi}{۲}} \end{cases}$$

تست ۸۷: مجموع جواب‌های مثلثاتی $\sin ۲x + \cos(\frac{\pi}{۲} - x) = ۰$، در بازه‌ی $[۰,۲\pi]$ کدام است؟ (خارج تجربی ۹۶)

۱) $\frac{۱۴\pi}{۳}$ ۲) ۴π ۳) $\frac{۹\pi}{۲}$ ۴) ۵π

تست ۸۸: تعداد جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\cos^۲(x) - \sin^۲(x)\cos(۳x) = ۱$ در فاصلهٔ $[۰,۲\pi]$ کدام است؟ (سراسری تجربی ۱۴۰۰)

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۶

تست ۸۹: مجموع جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\sin(x + \frac{\pi}{۸}) + \cos(x - \frac{۳\pi}{۸}) = ۱$، در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ برابر کدام است؟ (خارج ریاضی ۹۵)

۱) $\frac{۳\pi}{۴}$ ۲) $\frac{۵\pi}{۴}$ ۳) $\frac{۳\pi}{۲}$ ۴) $\frac{۷\pi}{۴}$

تست ۹۰: فرض کنید A مجموعهٔ جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $(۱+\cos ۲\alpha)(۱+\cos ۴\alpha)(۱+\cos ۸\alpha) = \frac{۱}{۸}$ در بازهٔ $[۰,\pi]$ باشد، ماکزیمم عضو مجموعهٔ A کدام است؟ (سراسری ریاضی ۱۴۰۰)

۱) $\frac{۵}{۷}\pi$ ۲) $\frac{۶}{۷}\pi$ ۳) $\frac{۷}{۹}\pi$ ۴) $\frac{۸}{۹}\pi$

تست ۹۱: مجموع جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\sin^۳ x + \cos^۳ x = ۱ - \frac{۱}{۲}\sin ۲x$، در بازهٔ $[۰, ۲\pi]$ کدام است؟ *(ریاضی ۹۸)*

۱) $\frac{۵\pi}{۲}$ ۲) $\frac{۷\pi}{۲}$ ۳) ۲π ۴) ۳π

تست ۹۲: مجموع جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\sin^۴ x + \cos^۴ x = \frac{۱}{۲}$، در بازهٔ $[۰, ۲\pi]$، کدام است؟ *(خارج ریاضی ۹۸)*

۱) $\frac{۵\pi}{۲}$ ۲) ۳π ۳) $\frac{۷\pi}{۲}$ ۴) ۴π

تست ۹۳: جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $۲\tan x . \cos^۲ x = ۱$ به کدام صورت است؟ *(خارج تجربی ۸۶)*

۱) $k\pi - \frac{\pi}{۴}$ ۲) $k\pi + \frac{\pi}{۴}$ ۳) $۲k\pi - \frac{\pi}{۴}$ ۴) $۲k\pi + \frac{\pi}{۴}$

مثال ۹۴: معادله زیر را حل کنید.

۳) $\cos ۳x - \cos x = ۰$

$$\cos \underbrace{۳x}_{u} = \cos \underbrace{x}_{\alpha} \Rightarrow ۳x = ۲k\pi \pm x \Rightarrow \begin{cases} ۳x = ۲k\pi + x \Rightarrow ۲x = ۲k\pi \Rightarrow x = k\pi \\ ۳x = ۲k\pi - x \Rightarrow ۴x = ۲k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{۲} \end{cases}$$

تست ۹۵: جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $\sin^{۲} x - \cos^{۲} x = \sin(\frac{۳\pi}{۲} + x)$ به کدام صورت است؟ (تجربی ۹۱)

۱) $\frac{k\pi}{۳}$ ۲) $\frac{۲k\pi}{۳}$ ۳) $۲k\pi + \frac{\pi}{۳}$ ۴) $۲k\pi \pm \frac{۲\pi}{۳}$

مثال ۹۶: معادله زیر را حل کنید. $۴)\ \cos ۳x + \cos x = ۰$

$\cos ۳x = -\cos x$

الان چی‌کار کنم آقا؟ چطوری از شرّ منفی خلاص بشیم؟ آخه کسینوس که خاصیت $\cos(-\alpha) = -\cos\alpha$ رو نداره ☹

ایرادی نداره از یه خاصیت دیگه می‌توانیم واسش استفاده کنیم. کسینوسه دیگه! همیشه ساز مخالف میزنه. ببینید:

$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$

پس به جای $-\cos\alpha$ بذارید $\cos(\pi - \alpha)$. به همین راحتی ☺

$$\cos ۳x = -\cos x \Rightarrow \cos ۳x = \cos(\pi - x) \Rightarrow ۳x = ۲k\pi \pm (\pi - x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۳x = ۲k\pi + \pi - x \Rightarrow ۴x = ۲k\pi + \pi \Rightarrow \boxed{x = \frac{k\pi}{۲} + \frac{\pi}{۴}} \\ ۳x = ۲k\pi - \pi + x \Rightarrow ۲x = ۲k\pi - \pi \Rightarrow \boxed{x = k\pi - \frac{\pi}{۲}} \end{cases}$$

تست ۹۷: جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $\cos ۳x + \cos x = ۰$ با شرط $\cos x \neq ۰$ کدام است؟ (خارج تجربی ۹۳ و ۹۸)

۱) $\frac{k\pi}{۲} + \frac{\pi}{۴}$ ۲) $\frac{k\pi}{۲} + \frac{\pi}{۸}$ ۳) $k\pi - \frac{\pi}{۴}$ ۴) $k\pi + \frac{\pi}{۴}$

اگر دو طرف هم‌نسبت نباشن ولی توانشون (یک) باشد باید کاری کنیم که هم‌نسبت بشن. فقط کافیه از این روابط استفاده کنیم:

$$\sin\alpha = \cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)$$

$$\cos\alpha = \sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)$$

$$\tan\alpha = \cot(\frac{\pi}{2}-\alpha)$$

$$\cot\alpha = \tan(\frac{\pi}{2}-\alpha)$$

مثال ۹۸: معادله زیر را حل کنید. $5)\ \sin 3x - \cos 2x = 0$

$$\sin 3x = \cos 2x \Rightarrow \sin \underbrace{3x}_{u} = \sin(\underbrace{\frac{\pi}{2}-2x}_{\alpha}) \Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} - 2x \Rightarrow 5x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow \boxed{x = \frac{2k\pi}{5} + \frac{\pi}{10}} \\ 3x = 2k\pi + \pi - (\frac{\pi}{2} - x) \Rightarrow \boxed{x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}} \end{cases}$$

تست ۹۹: جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\sin(2x-\frac{\pi}{4}) = \cos(x+\frac{\pi}{4})$ با شرط $x \neq k\pi$ که در آن k یک عدد صحیح است، کدام است؟

(تجربی ۹۹)

۱) $\frac{k\pi}{3}$ ۲) $\frac{2k\pi}{3}$ ۳) $\frac{2k\pi}{3} - \frac{\pi}{6}$ ۴) $\frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$

مثال ۱۰۰: معادله زیر را حل کنید. $6)\ \sin 3x + \cos x = 0$

این‌طور موقع‌ها که یه دونه از این‌ها منفی داره کاری کن منفی بیاد پشت سینوس. اینطوری راحت‌تر از شرّ منفی خلاص می‌شی. ببین:

$$\sin 3x = -\cos x$$

راه طولانی: چون اول باید منفیِ پشت کسینوس رو از بین ببری بعدش کسینوس رو تبدیل به سینوس کنی. $\Rightarrow$

راه خوبتر: $\cos x = -\sin 3x = \sin(-3x)$

$$\cos x = \cos(\frac{\pi}{2} - (-3x)) \Rightarrow \cos x = \cos(\frac{\pi}{2} + 3x) \Rightarrow x = 2k\pi \pm (\frac{\pi}{2} + 3x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} + 3x \Rightarrow -2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = -k\pi - \frac{\pi}{4} \xrightarrow{k\pi \text{ فرقی با } -k\pi \text{ نداره}} \boxed{x = k\pi - \frac{\pi}{4}} \\ x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} - 3x \Rightarrow 4x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \Rightarrow \boxed{x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8}} \end{cases}$$

تست ۱۰۱: جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $۲\cos^{۲} x + ۲\sin x \cos x = ۱$، به کدام صورت است؟ (تجربی ۹۴)

۱) $\frac{k\pi}{۲} - \frac{\pi}{۸}$ ۲) $\frac{k\pi}{۲} + \frac{\pi}{۸}$ ۳) $k\pi - \frac{\pi}{۸}$ ۴) $k\pi + \frac{\pi}{۸}$

معادلات تانژانتی

مثال ۱۰۲: معادله زیر را حل کنید و تعداد جواب‌ها را در فاصلهٔ $[۰,۲\pi]$ مشخص کنید.

۷) $\tan ۳x - \tan x = ۰$

$$\tan \underbrace{۳x}_{u} = \tan \underbrace{x}_{\alpha} \Rightarrow ۳x = k\pi + x \Rightarrow ۲x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{۲}$$

k	۰	۱	۲	۳	۴
x	۰	$\boxed{\frac{\pi}{۲}}$ ↓ غ.ق.ق	π	$\boxed{\frac{۳\pi}{۲}}$ ↓ غ.ق.ق	۲π

۸) $\tan ۳x + \tan x = ۰ \Rightarrow \tan ۳x = -\tan x$

واسه تانژانت هم مثل سینوس می‌تونی از خاصیت $\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$ استفاده کنی:

$$\tan \underbrace{۳x}_{u} = \tan(\underbrace{-x}_{\alpha}) \Rightarrow ۳x = k\pi + (-x) \Rightarrow ۴x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{۴}$$

k	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸
x	۰	$\frac{\pi}{۴}$	$\boxed{\frac{\pi}{۲}}$ ↓ غ.ق.ق	$\frac{۳\pi}{۴}$	π	$\frac{۵\pi}{۴}$	$\boxed{\frac{۳\pi}{۲}}$ ↓ غ.ق.ق	$\frac{۷\pi}{۴}$	۲π

کتانژانت هم دقیقاً مثل تانژانتِ.

تست ۱۰۳: جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $\tan x \tan ۳x = ۱$، کدام است؟ (تجربی ۹۷ و ریاضی ۹۹)

۱) $\frac{k\pi}{۴}$ ۲) $\frac{k\pi}{۲} + \frac{\pi}{۸}$ ۳) $\frac{k\pi}{۲} + \frac{۳\pi}{۸}$ ۴) $\frac{k\pi}{۴} + \frac{\pi}{۸}$

مثال ۱۰۴: معادلات زیر را حل کنید.

۱) $\sin x+\sqrt{۳}\cos x=۰$

$$\xrightarrow{\div \cos x} \tan x+\sqrt{۳}=۰ \Rightarrow \tan x=-\sqrt{۳}=\tan(-\frac{\pi}{۳}) \Rightarrow x=k\pi-\frac{\pi}{۳}$$

اگر سینوس و کسینوس توان دو داشتند، می‌تونیم از روش‌های حل معادله درجه ۲ استفاده کنیم.

تست ۱۰۵: از معادلهٔ $۲\sin^{۲} ۲x-\sin ۲x-۱=۰$ برای x در فاصلهٔ صفر تا ۲π چند جواب به‌دست می‌آید؟

۱) ۶ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

$$\begin{cases} (۱)\sin^{۲} u=\sin^{۲}\alpha \\ (۲)\cos^{۲} u=\cos^{۲}\alpha \\ (۳)\tan^{۲} u=\tan^{۲}\alpha \\ (۴)\cot^{۲} u=\cot^{۲}\alpha \end{cases} \Rightarrow \boxed{u=k\pi\pm\alpha}$$

تست ۱۰۶: جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $\cos ۲x+۲\cos^{۲} x=۰$ کدام است؟ (تجربی ۹۶)

۱) $۲k\pi\pm\frac{\pi}{۳}$ ۲) $۲k\pi\pm\frac{۲\pi}{۳}$ ۳) $k\pi\pm\frac{\pi}{۳}$ ۴) $k\pi\pm\frac{\pi}{۶}$

یادت باشه: حواست به رادیکال فرجه زوج باشه.

تست ۱۰۷: تمام جواب‌های معادله‌ی $\sqrt{\sin x} = \sqrt{\cos x}$ کدام است؟

۱) $x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۴}$ ۲) $x = k\pi + \frac{\pi}{۴}$ ۳) $x = ۲k\pi$ ۴) $x = \frac{k\pi}{۲} + \frac{\pi}{۴}$

تست ۱۰۸: جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $\frac{\sin ۳x}{\sin x} = ۲\cos^۲ x$ کدام است؟ *(سراسری ریاضی ۹۳)*

۱) $\frac{k\pi}{۲}$ ۲) $\frac{k\pi}{۲} + \frac{\pi}{۴}$ ۳) $k\pi - \frac{\pi}{۴}$ ۴) $k\pi + \frac{\pi}{۴}$

پاسخ: گزینه‌ی «۲»

$$\frac{۳\sin x - ۴\sin^۳ x}{\sin x} = ۲\underbrace{\cos^۲ x}$$

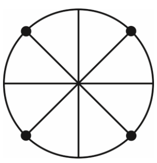
حالا تفکیک:

$$۳ - ۴\sin^۲ x = ۲(۱ - \sin^۲ x)$$

$$۳ - ۴\sin^۲ x = ۲ - ۲\sin^۲ x \Rightarrow -۲\sin^۲ x = -۱ \Rightarrow \sin^۲ x = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \sin^۲ x = (\frac{\sqrt{۲}}{۲})^۲$$

$$\Rightarrow \sin^۲ x = (\sin\frac{\pi}{۴})^۲ \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{۴}$$

طراح جفتش رو توی گزینه‌ها گذاشته، ولی از روی دایره تصمیم می‌گیریم.

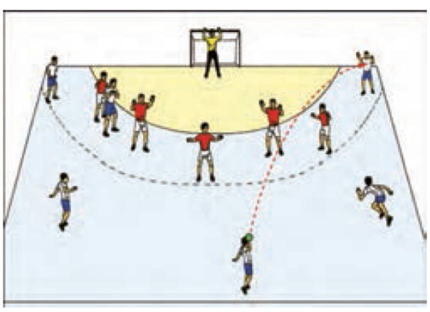


$$\boxed{x = \frac{k\pi}{۲} + \frac{\pi}{۴}}$$

گزینه‌ی «۲» درسته. ضمناً چون این جواب‌ها مخرج کسر اصلی رو صفر نمی‌کنن پس اوکیه!

مثال ۱۰۹: یک بازیکن هندبال توپ را با سرعت $۱۶\ m/s$ برای هم‌تیمی خود که در ۱۲/۸ متری او قرار دارد پرتاب می‌کند. اگر رابطه بین سرعت توپ v (برحسب متر بر ثانیه)، مسافت طی‌شده افقی d (برحسب متر) و زاویه‌ی پرتاب θ به صورت زیر باشد، آن‌گاه زاویه‌ی پرتاب توپ چه‌قدر بوده است؟

$$d = \frac{v^۲ \sin ۲\theta}{۱۰}$$



از رابطه‌ی داده‌شده به دست می‌آید:

$$۱۲/۸=\frac{(۱۶)^۲\sin ۲\theta}{۱۰}\Rightarrow \sin ۲\theta=\frac{۱۲/۸\times ۱۰}{۲۵۶}\Rightarrow \sin ۲\theta=\frac{۱}{۲}\Rightarrow \begin{cases} ۲\theta=۲k\pi+\frac{\pi}{۶} & k\in\mathbb{Z}\\ ۲\theta=(۲k+۱)\pi-\frac{\pi}{۶} & k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

با توجه به شکل، جواب $\theta=\frac{\pi}{۱۲},\frac{۵\pi}{۱۲}$ قابل قبول می‌باشد.

مثال ۱۱۰: مثلثی با مساحت ۳ سانتی‌متر مربع مفروض است. اگر اندازه‌ی دو ضلع آن به ترتیب ۲ و ۶ سانتی‌متر باشند، آن‌گاه چند مثلث بـا این خاصیت‌ها می‌توان ساخت؟

یادت باشه: حواست به ریشه‌ی مخرج باشه.

مثال ۱۱۱: معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$\frac{۱+\sin x}{۱+\cos ۲x}=\frac{۱}{۲}$$

دوره تناوب

f متناوب است اگر با افزودن یک مقدار ناصفر به **x** عرض **(y)** تابع عوض نشود و دو شرط زیر داشته باشد:

$۱)\ \forall x\in D_f \Rightarrow x+T\in D_f$ $\qquad$ $۲)\ f(x+T)=f(x) \quad T\neq ۰$

مثلاً $\sin\frac{\pi}{۶}$ با $\sin(۲\pi+\frac{\pi}{۶})$ برابر و هر دو $\frac{۱}{۲}$ هستند. در حالی که به **x**، $۲\pi=۶/۲۸...$ افزوده‌ایم.

هر مضربی از دوره‌ی تناوب، خود دوره‌ی تناوب است که کوچک‌ترین مقدار مثبت دوره تناوب را، دوره تناوب اصلی می‌گوییم.

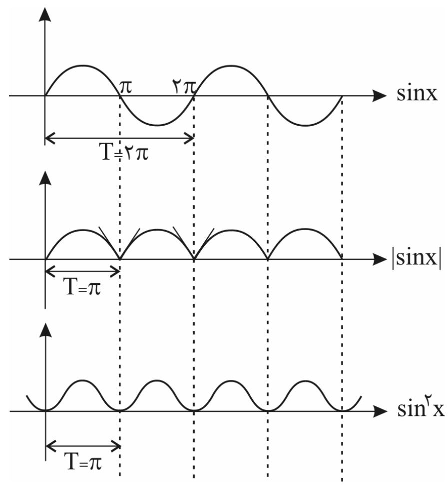
تذکر: تابع ثابت، متناوب است و دوره تناوبش هر عدد حقیقی است ولی چون کوچک‌ترین عدد حقیقی وجود ندارد، کوچک‌ترین دوره تناوب ندارد.

۱) دوره تناوب $f(x)$ اگر **T** باشد، آن‌گاه دوره‌ی تناوب $af(x+b)+k$ نیز همان **T** هست.

۲) تابع متناوب، یک به یک و معکوس‌پذیر نیست.

۳) دوره تناوب $\sin^{۲k+۱} ax$ و $\cos^{۲k+۱} ax$ برابر است با: $T=\frac{۲\pi}{|a|}$

دوره تناوب $\tan ax$ و $\cot ax$ به هر توان (چه زوج، چه فرد) و $|\tan ax|$ و $|\cot ax|$ به هر توان $T=\frac{\pi}{|a|}$ است.



$$\begin{cases} \sin^{۲k} ax \\ \cos^{۲k} ax \\ |\sin ax| \text{(توان چه زوج و چه فرد باشد)} \\ |\cos ax| \text{(توان چه زوج و چه فرد باشد)} \end{cases}$$

تست ۱۱۲: اگر دورهٔ تناوب تابع $f(x) = ۲\cos(mx + \frac{m}{۲})$ برابر $\frac{۴}{۳}$ باشد، مقدار $f(۰)$ کدام است؟ $(m > ۰)$

۱) $-\sqrt{۳}$ ۲) $\sqrt{۳}$ ۳) $\sqrt{۲}$ ۴) $-\sqrt{۲}$

تست ۱۱۳: دورهٔ تناوب تابع $f(x) = \frac{\cos ۲x \cos ۴x}{\tan x + \cot x}$ کدام است؟

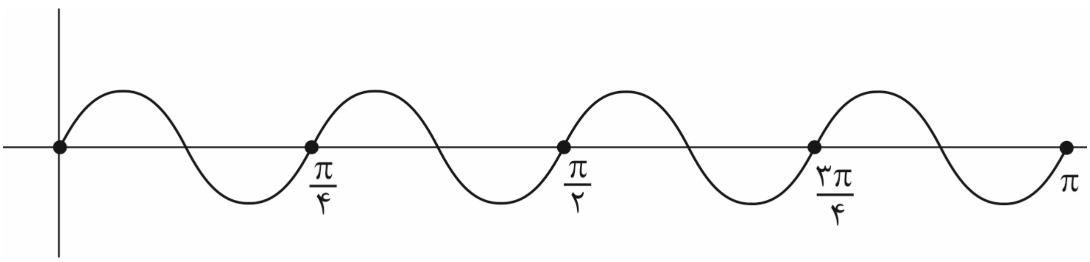
۱) π ۲) $\frac{\pi}{۲}$ ۳) $\frac{\pi}{۴}$ ۴) $\frac{\pi}{۸}$

پاسخ:

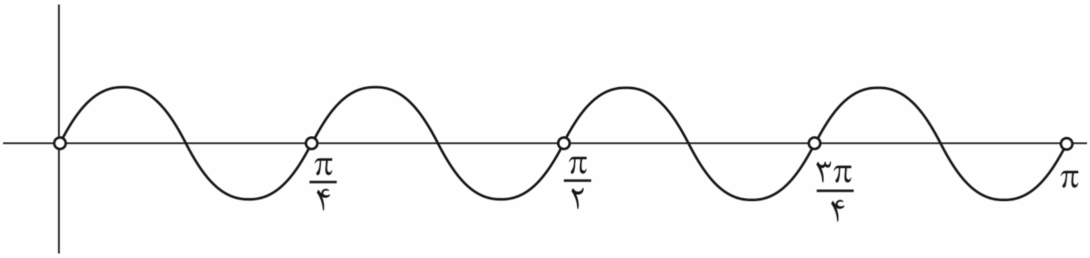
$$f(x) = \frac{\cos ۲x \cos ۴x}{\frac{۲}{\sin ۲x}} = \frac{\sin ۲x \cos ۲x \cos ۴x}{۲} = \frac{\frac{۱}{۲}\sin ۴x \cos ۴x}{۲} = \frac{\frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲}\sin ۸x}{۲} = \frac{۱}{۸}\sin ۸x$$

در حالت معمول $T = \frac{۲\pi}{۸} = \frac{\pi}{۴}$

بنابراین به این شکل می‌رسیم:



ولی باید توجه کنید که به علت حضور $\tan x$ و $\cot x$ در مخرج کسر $x \neq \frac{k\pi}{۲}$ می‌باشد. پس باید این نقاط توخالی باشند:



اکنون از شکل مشخص است که $T = \frac{\pi}{۲}$ است نه $\frac{\pi}{۴}$. جالب این است که در خود آزمون، این سوال به اشتباه پاسخ داده شده است. گزینهٔ (۲) صحیح است.

تست ۱۱۴: دورهٔ تناوب $f(x) = \frac{\sin x}{\sin x}$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{۲}$ ۲) π ۳) $\frac{۳\pi}{۲}$ ۴) ۲π

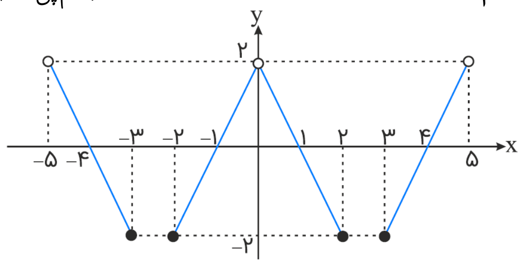
تست ۱۱۵: اگر دورهٔ تناوب تابع $y = ۳\cos ax$ برابر ۲ باشد، اولین نقطه min این تابع با طول مثبت کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) ۲

تست ۱۱۶: تابع $y = -\frac{۱}{۲}\sin(۳\pi x)$ در بازهٔ $[-\frac{۱}{۲}, ۱]$ چند بار بیشترین مقدار را دارد؟ (قلم‌چی ۹۸)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

تست ۱۱۷: قسمتی از نمودار تابع متناوب $y=f(x)$ به شکل زیر است. $f(۱۲۸/۱)$ کدام است؟ (قلم‌چی ۹۸)



۱) $۱/۸$

۲) $-۱/۸$

۳) $-۰/۲$

۴) تعریف‌نشده

تست ۱۱۸: دورهٔ تناوب تابع با ضابطهٔ $f(x)=\tan(\pi x)-\cot(\pi x)$ کدام است؟ (خارج ریاضی ۹۸)

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۱ ۳) $-\frac{۱}{۲}$ ۴) -۱

تست ۱۱۹: دورهٔ تناوب تابع $y=\sin x\sqrt{۱+\cos ۲x}$ کدام است؟ (قلم‌چی ریاضی ۹۹)

۱) π ۲) $\frac{\pi}{۲}$ ۳) $\frac{۳\pi}{۲}$ ۴) ۲π

پاسخ:

$$f(x)=\sin x\sqrt{۲\cos^۲ x}=\sqrt{۲}\sin x|\cos x|$$

گزینهٔ (۱): $f(x+\pi)=-\sqrt{۲}\sin x|\cos x|\neq f(x)$

گزینهٔ (۲): $f(x+\frac{\pi}{۲})=\sqrt{۲}\cos x|\sin x|\neq f(x)$

گزینهٔ (۳): $f(x+\frac{۳\pi}{۲})=-\sqrt{۲}\cos x|\sin x|\neq f(x)$

گزینهٔ (۴): $f(x+۲\pi)=\sqrt{۲}\sin x|\cos x|=f(x)$

توابع مثلثاتی

$\boxed{y=\sin x}$

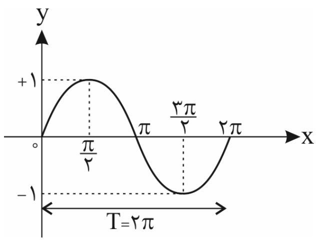
۱) دامنه‌ی این تابع $\mathbb{R}$ است. ($\sin x$ به ازای هر $x\in\mathbb{R}$ جواب دارد.)

۲) برد این تابع $[-۱,۱]$ است. (چون $-۱\le \sin x\le ۱$)

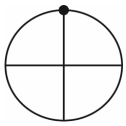
۳) از آن‌جایی که کمان $(\underbrace{۲k\pi}_{\text{مضارب زوج }\pi}+\alpha)$ از لحاظ موقعیت در دایره‌ی مثلثاتی با کمان α تفاوتی ندارد، رفتار تابع $y=\sin x$ را در $[۰,۲\pi]$ یعنی یک دور از دایره‌ی مثلثاتی بررسی و نمودار آن را رسم کرده، سپس ۲π تا ۲π تا تکرارش می‌کنیم.

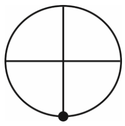
نمودار $y=\sin x$ در $[۰,۲\pi]$ به کمک جدول زیر به صورتی که مشاهده می‌شود رسم می‌گردد:

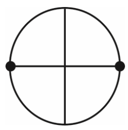
x	۰	$\frac{\pi}{۲}$	π	$\frac{۳\pi}{۲}$	۲π
y	۰	۱	۰	-۱	۰



(دوره‌ی تناوب اصلی این تابع $T=۲\pi$ می‌باشد.)

۴) ماکزیمم (بیشینه) مقدار تابع $y=\sin x$ برابر ۱ است که در  یعنی کمان $x=۲k\pi+\frac{\pi}{۲},k\in\mathbb{Z}$ (مثل $\frac{\pi}{۲}$، $\frac{۵\pi}{۲}$، $\frac{۹\pi}{۲}$ یا $\frac{-۳\pi}{۲}$، $\frac{-۷\pi}{۲}$ و ...) رخ می‌دهد.

۵) مینیمم (کمینه) مقدار تابع $y=\sin x$ برابر -۱ است که در  یعنی کمان $x=۲k\pi-\frac{\pi}{۲},k\in\mathbb{Z}$ (مثل $\frac{۳\pi}{۲}$، $\frac{۷\pi}{۲}$ یا $\frac{-\pi}{۲}$، $\frac{-۵\pi}{۲}$ و ...) رخ می‌دهد.

۶) تابع $y=\sin x$ در  یعنی کمان $x=k\pi,k\in\mathbb{Z}$ (مثل ۰، $\pm\pi$، $\pm۲\pi$ و ...) با محور طول‌ها برخورد می‌کند، یعنی مقدار آن صفر می‌شود.

در حالت کلی، در تابع $y=a\sin(bx+c)+d$:

۱) مقدار ماکزیمم تابع برابر $|a|+d$ و مقدار مینیمم آن $-|a|+d$ می‌باشد.

۲) برای یافتن نقطه‌ی برخورد نمودار با محور yها، در ضابطه‌ی تابع $x=۰$ قرار می‌دهیم و y را به دست می‌آوریم. برای یافتن نقاط برخورد نمودار با محور xها نیز در ضابطه‌ی تابع $y=۰$ قرار می‌دهیم و معادله‌ی مثلثاتی حاصل را حل می‌کنیم.

۳) دوره‌ی تناوب برابر $T=\frac{۲\pi}{|b|}$ است.

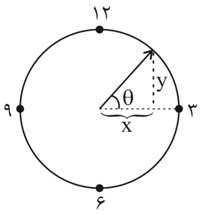
تست ۱۲۰: اگر بیشترین مقدار تابع $y=۲\sin ۵x-۳c$ برابر (-۷) باشد، c کدام است؟

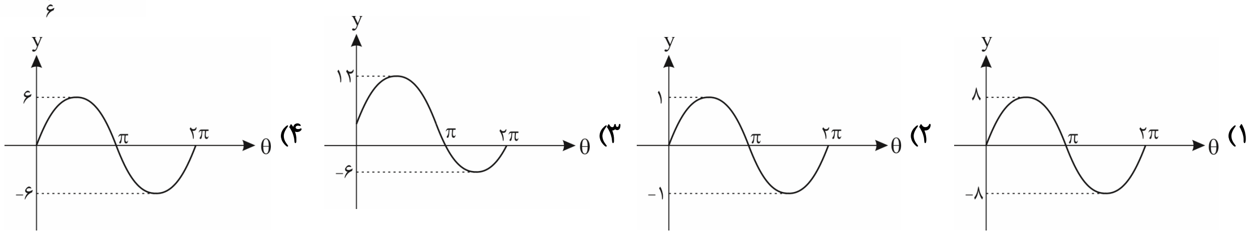
۱) ۳ ۲) -۲ ۳) -۵ ۴) ۱

پاسخ: گزینه‌ی «۱»

$y_{max}=۲-۳c=-۷\Rightarrow -۳c=-۹\Rightarrow c=۳$

تست ۱۲۱: طول عقربه‌ی دقیقه‌شمار یک ساعت ۸ سانتی‌متر است و این عقربه با جهت مثبت محور افقی زاویه‌ی θ می‌سازد. با توجه به شکل زیر، نمودار تابع y برحسب θ کدام است؟ (θ برحسب رادیان است.)



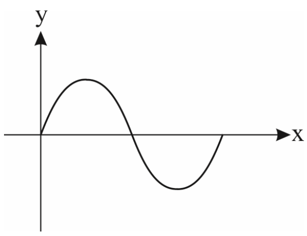


پاسخ: گزینه‌ی «۱» ـ طبق تعریف نسبت مثلثاتی سینوس در مثلث قائم‌الزاویه‌ی موجود داریم:

$$\sin\theta = \frac{y}{r} \Rightarrow \sin\theta = \frac{y}{۸} \Rightarrow y = ۸\sin\theta \Rightarrow \begin{cases} T = ۲\pi \\ y_{max} = ۸ \\ y_{min} = -۸ \end{cases}$$

مشخصه که بیشترین مقدار (max) تابع $y = ۸\sin\theta$ برابر ۸ و کم‌ترین مقدار این تابع ۸- و دوره‌ی تناوبش هم $T = ۲\pi$ هست. پس گزینه‌ی «۱» درسته.

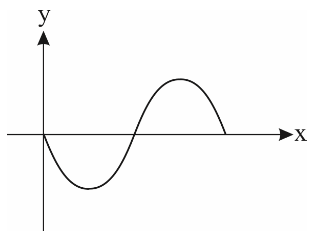
حالت ۱



$y = a\sin bx$

$a \times b > ۰$

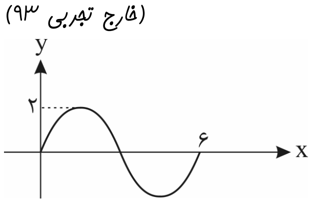
حالت ۲



$y = a\sin bx$

$a \times b < ۰$

تست ۱۲۲: شکل روبه‌رو قسمتی از نمودار تابع $y = a\sin(b\pi x)$ است. $a+b$ کدام است؟ (خارج تجربی ۹۳)



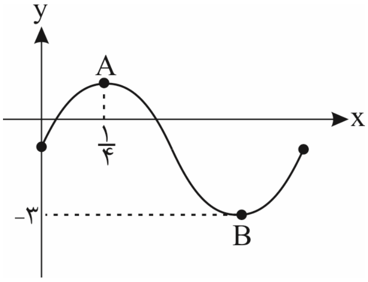
۱) $\frac{۴}{۳}$

۲) $\frac{۵}{۳}$

۳) $\frac{۷}{۳}$

۴) $\frac{۸}{۳}$

تست ۱۲۳: قسمتی از نمودار تابع $f(x) = ۲\sin b\pi x + c$ به صورت زیر رسم شده است. طول پاره‌خط AB کدام است؟



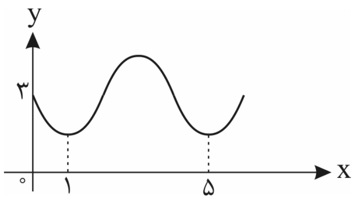
۱) $\frac{\sqrt{۱۷}}{۲}$

۲) $\frac{\sqrt{۶۵}}{۲}$

۳) $\frac{\sqrt{۱۷}}{۴}$

۴) $\frac{\sqrt{۶۵}}{۴}$

تست ۱۲۴: شکل روبه‌رو قسمتی از نمودار تابع $y = a + \sin(b\pi x)$ است. مقدار y در نقطه‌ی $x = \frac{۲۵}{۳}$، کدام است؟ (تجربی ۹۳)



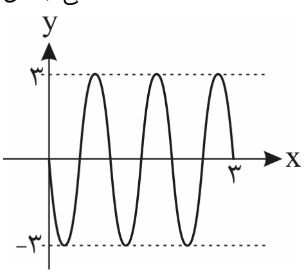
۱) ۲

۲) ۲/۵

۳) ۳

۴) ۳/۵

تست ۱۲۵: شکل روبه‌رو، قسمتی از نمودار تابع $y = a\sin(b\pi x)$ است. $a.b$ کدام است؟ (خارج ریاضی ۹۲)



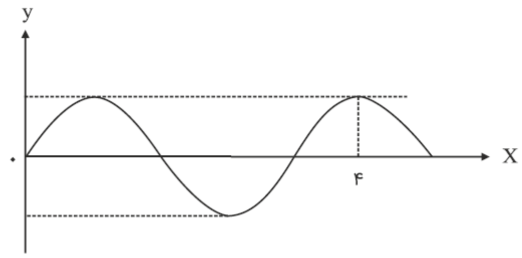
۱) ۶-

۲) ۳-

۳) ۴/۵

۴) ۶

تست ۱۲۶: قسمتی از نمودار تابع $y = a\cos((\frac{۳}{۲} + bx)\pi)$ به صورت زیر است. آن‌گاه کدام گزینه صحیح است؟ (قلم‌چی ۹۴)



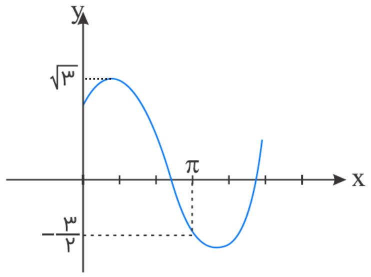
۱) $a < ۰ , b = \frac{۵}{۸}$

۲) $a < ۰ , b = -\frac{۵}{۸}$

۳) $a > ۰ , b = \frac{۵}{۱۶}$

۴) $a > ۰ , b = -\frac{۵}{۱۶}$

تست ۱۲۷: شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع $y = a + b\sin(x + \frac{\pi}{۳})$ است. b کدام است؟ (تجربی ۹۸)



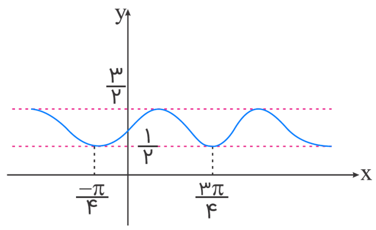
۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

۲) $\frac{۳}{۲}$

۳) $\sqrt{۳}$

۴) ۲

تست ۱۲۸: شکل زیر، نمودار تابع $y = ۱ + a\sin bx\cos bx$ است. $a + b$ کدام است؟ (ریاضی ۹۸)



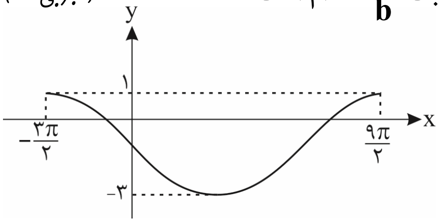
۱) ۱

۲) $\frac{۳}{۲}$

۳) ۲

۴) ۳

تست ۱۲۹: شکل زیر، نمودار تابع $y = a\sin(bx) + c$ را در یک بازهٔ تناوب، نشان می‌دهد. نسبت $\frac{a}{b}$، کدام است؟ (تجربی ۹۹)



۱) -2

۲) -3

۳) -4

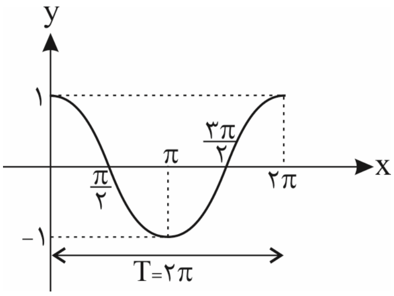
۴) -6

$\boxed{y = \cos x}$

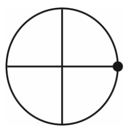
۱) دامنه‌ی این تابع $\mathbb{R}$ است ($\cos x$ به ازای هر $x \in \mathbb{R}$ جواب دارد).

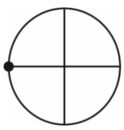
۲) برد این تابع $[-1,1]$ است (چون $-1 \le \cos x \le 1$).

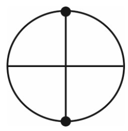
۳) نمودار $y = \cos x$ را نیز مانند $y = \sin x$ در $[0, 2\pi]$ به کمک جدول زیر رسم کرده، سپس با توجه به همان خاصیت کمان $(\underbrace{2k\pi}_{\text{مضارب زوج } \pi} + \alpha)$ و این که در واقع دوره‌ی تناوب اصلی $y = \cos x$ هم $T = 2\pi$ است، 2π تا 2π تا تکرار می‌کنیم.



x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
y	1	0	-1	0	1

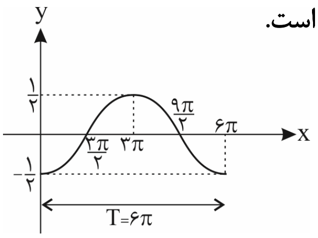
۴) ماکزیمم (بیشینه) مقدار تابع $y = \cos x$ برابر ۱ است که در  یعنی کمان $x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ (مثل 0 ، $\pm 2\pi$، $\pm 4\pi$ و ...) رخ می‌دهد.

۵) مینیمم (کمینه) مقدار تابع $y = \cos x$ برابر -1 است که در  یعنی کمان $x = (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}$ (مثل $\pm\pi$، $\pm 3\pi$ و ...) رخ می‌دهد.

۶) تابع $y = \cos x$ در  یعنی کمان $x = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ (مثل $\pm\frac{\pi}{2}$، $\pm\frac{3\pi}{2}$ و ...) با محور طول‌ها برخورد می‌کند، یعنی مقدار آن صفر می‌شود.

قوانین انتقال (مشابه آن‌چه در قسمت الف) گفته شد) در مورد $y=\cos x$ نیز برقرار است.

تابع $y=a\cos bx$ دارای دوره‌ی تناوب اصلی $T=\frac{2\pi}{|b|}$، مقدار ماکزیمم $|a|$ و مقدار مینیمم $-|a|$ می‌باشد. مثلاً در $y=-\frac{1}{2}\cos(-\frac{x}{3})$ دوره‌ی تناوب اصلی $\frac{2\pi}{|-\frac{1}{3}|}=6\pi$، ماکزیمم تابع برابر $\frac{1}{2}$ و مینیمم تابع برابر $-\frac{1}{2}$ است.



(از آن‌جایی که $\cos(-\alpha)=\cos\alpha$، $y=-\frac{1}{2}\cos(-\frac{x}{3})$ همان $y=-\frac{1}{2}\cos\frac{x}{3}$ می‌باشد.)

تذکر: در واقع در رسم $y=a\cos bx$، نمودار $y=\cos x$ با ضریب $\frac{1}{|b|}$ دچار انقباض یا انبساط طولی (افقی) و با ضریب a دچار انبساط یا انقباض عرضی (عمودی) می‌شود. (علامت b تأثیری روی رسم نمودار تابع کسینوس ندارد، چون کسینوس منفی‌خور است.)

حالت کلی، در تابع $y=a\cos(bx+c)+d$

۱) مقدار ماکزیمم تابع برابر $|a|+d$ و مقدار مینیمم آن $-|a|+d$ است.

۲) برای یافتن نقطه‌ی برخورد نمودار با محور yها، در ضابطه‌ی تابع $x=0$ قرار می‌دهیم و y را به دست می‌آوریم. برای یافتن نقاط برخورد نمودار با محور xها نیز در ضابطه‌ی تابع $y=0$ را قرار می‌دهیم و معادله‌ی مثلثاتی حاصل را حل می‌کنیم.

۳) دوره‌ی تناوب برابر $T=\frac{2\pi}{|b|}$ است.

تست ۱۳۰: اگر کم‌ترین مقدار تابع $h(x)=-a\cos\frac{\pi x}{3}+1$ برابر $\frac{2}{3}$ باشد، مقدار a کدام می‌تواند باشد؟

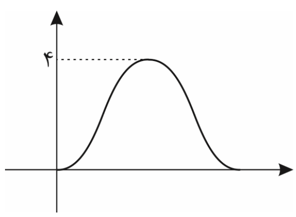
۱) $\frac{2}{3}$　　۲) $-\frac{3}{2}$　　۳) $\frac{3}{2}$　　۴) $-\frac{1}{3}$

پاسخ: گزینه‌ی «۴»

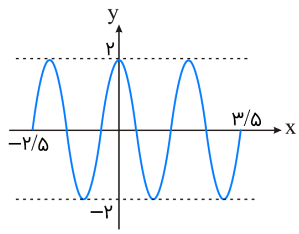
$$-|-a|+1=\frac{2}{3}\Rightarrow -|a|=\frac{2}{3}-1\Rightarrow -|a|=-\frac{1}{3}\Rightarrow |a|=\frac{1}{3}\Rightarrow a=\pm\frac{1}{3}$$ (در میان گزینه‌ها $(-\frac{1}{3})$ وجود دارد.)

تست ۱۳۱: شکل زیر نمودار تابع $y=a+b\cos(\frac{\pi}{2}x)$، در بازه‌ی $(0,4)$ است. b کدام است؟ *(ریاضی ۹۷)*

۱) ۲-
۲) ۱-
۳) ۱
۴) ۲



تست ۱۳۲: شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع $y = a\sin\pi(\frac{۱}{۲} + bx)$ است. $a.b$ کدام است؟ (ریاضی ۹۲، قلم‌چی ۹۸)



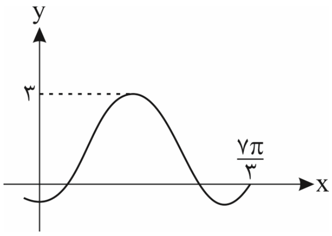
۱) ۲

۲) ۲/۵

۳) ۳

۴) ۳/۵

تست ۱۳۳: شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع با ضابطهٔ $y = a + b\sin(\frac{\pi}{۲} + x)$ است. مقدار b کدام است؟ (تجربی ۹۹)



۱) ۲

۲) ۱

۳) ۱−

۴) ۲−

تست ۱۳۴: در تابع $f(x) = -۴a\sin^۲ ۲x + \cos ۴x + ۲a + ۳$ حدود a کدام باشد تا نمودار آن همواره زیر خط $y = ۷$ قرار گیرد؟

(قلم‌چی ریاضی ۹۹)

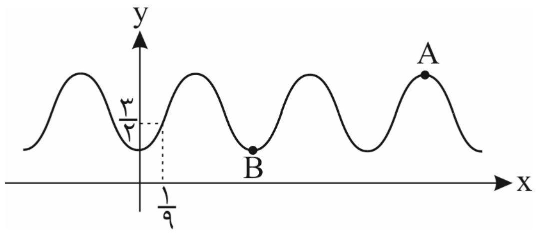
۱) $-\frac{۵}{۲} < a < \frac{۳}{۲}$

۲) $-\frac{۳}{۲} < a < \frac{۵}{۲}$

۳) $-\frac{۵}{۲} < a < -\frac{۳}{۲}$

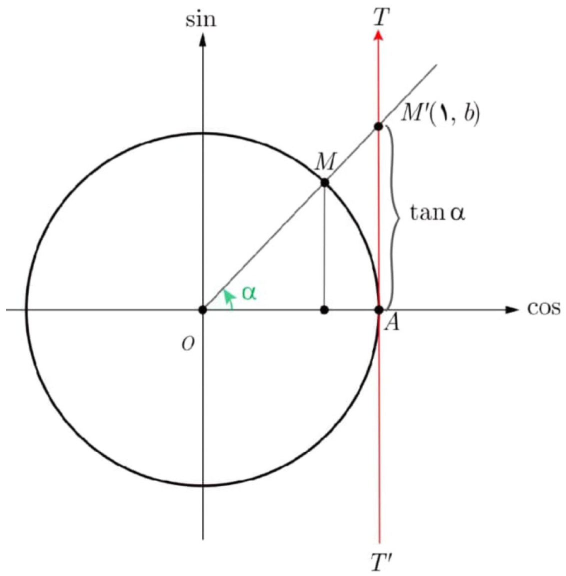
۴) $\frac{۳}{۲} < a < \frac{۵}{۲}$

تست ۱۳۵: اگر نمودار تابع $f(x)=1+a\sin^{2}(\frac{3\pi}{2}x)$ به صورت زیر باشد، شیب خط گذرنده از نقاط $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ کدام است؟



۱) ۱
۲) $\frac{3}{2}$
۳) ۲
۴) $\frac{5}{2}$

تانژانت



در دایرهٔ مثلثاتی روبه‌رو خط $\mathbf{TAT'}$ در نقطهٔ $\mathbf{A}$ بر محور کسینوس‌ها عمود است.

الف) زاویهٔ α را در ربع اول دایره مثلثاتی در نظر می‌گیریم و پاره‌خط $\mathbf{OM}$ را امتداد می‌دهیم تا این خط را در نقطهٔ $\mathbf{M'}$ قطع کند. نشان دهید:

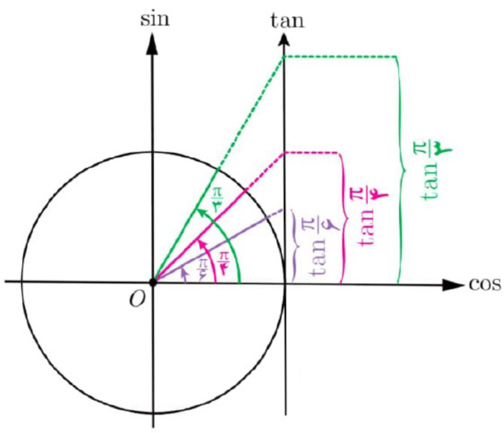
$$\tan\alpha = AM' = b$$

می‌توان دید که تانژانت هر زاویهٔ دلخواه مانند α، به همین ترتیب از برخورد امتداد ضلع دوم آن زاویه با خط $\mathbf{TAT'}$ تعیین می‌شود. بنابراین خط $\mathbf{TAT'}$ را محور تانژانت می‌نامیم. نقطهٔ $\mathbf{A}$ مبدأ این محور است و جهت مثبت محور، از پایین به سمت بالا است.

ب) چرا تانژانت زوایایی که انتهای کمان آن‌ها در ربع اول و سوم قرار دارد مقداری مثبت و تانژانت زوایایی که انتهای کمان آن‌ها در ربع دوم و چهارم قرار دارد، مقداری منفی است؟

تغییرات تانژانت

با تغییر زاویهٔ α مقادیر تانژانت آن نیز تغییر می‌کند. ابتدا این تغییرات را در ربع اول دایرهٔ مثلثاتی بررسی می‌کنیم. اگر $\alpha=0$، مقدار $\tan\alpha$ نیز برابر صفر است و با افزایش اندازهٔ α، مقدار $\tan\alpha$ نیز افزایش می‌یابد.

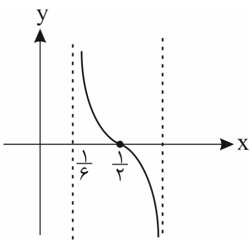


تابع تانژانت

همان‌طور که می‌بینیم به ازای هر زاویهٔ دلخواه در دایرهٔ مثلثاتی (به‌جز $x = k\pi + \frac{\pi}{۲}, k \in \mathbb{Z}$)، عددی حقیقی به عنوان $\tan\alpha$ داریم و تابعی با ضابطهٔ $y = \tan\alpha$ مشخص می‌کند. دامنهٔ این تابع مجموعهٔ $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi + \frac{\pi}{۲}, k \in \mathbb{Z}\}$ است و برد آن مجموعه اعداد حقیقی است. به سادگی می‌توان دید تابع $y = \tan\alpha$، تابعی متناوب است و دوره تناوب آن π است، زیرا: $\tan(\pi + x) = \tan x$

رسم تابع $y = \tan\alpha$

تست ۱۳۶: نمودار $f(x) = \tan(a + bx)$ به صورت مقابل است. b کدام است؟



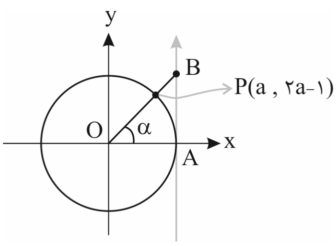
۱) $-\frac{۳\pi}{۲}$

۲) $\frac{۳\pi}{۲}$

۳) $-\frac{\pi}{۲}$

۴) $\frac{\pi}{۲}$

تست ۱۳۷: با توجه به دایرهٔ مثلثاتی زیر، مساحت مثلث AOB چه‌قدر است؟ $(۰ < \alpha < \frac{\pi}{۲})$



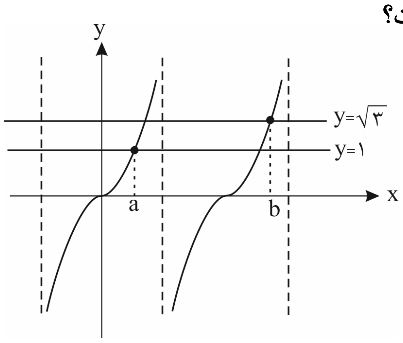
۱) $\frac{۲}{۳}$

۲) $\frac{۳}{۴}$

۳) $\frac{۳}{۸}$

۴) $\frac{۱}{۲}$

تست ۱۳۸: شکل زیر قسمتی از نمودار تابع $y = \tan x$ را نشان می‌دهد. حاصل $b - a$ کدام است؟



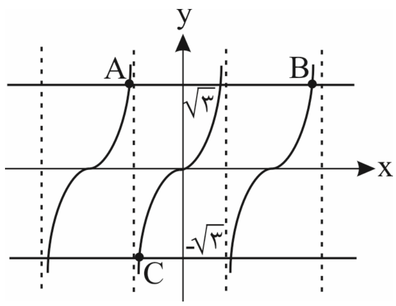
۱) $\frac{\pi}{۱۲}$

۲) $\frac{۵\pi}{۱۲}$

۳) $\frac{۷\pi}{۱۲}$

۴) $\frac{۱۳\pi}{۱۲}$

تست ۱۳۹: شکل زیر نمودار تابع $y = \tan ax$ است. اگر مساحت مثلث ABC برابر با $۸\sqrt{۳}\pi$ باشد، مقدار a کدام است؟



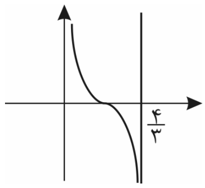
۱) $\frac{۱}{۲}$

۲) $\frac{۱}{۴}$

۳) $\frac{۳}{۴}$

۴) $\frac{۵}{۴}$

تست ۱۴۰: قسمتی از نمودار $f(x) = \tan(ax + \frac{۱}{۲})\pi$ به صورت شکل مقابل است. a کدام است؟



۱) $-\frac{۳}{۴}$ ۲) $\pm\frac{۳}{۴}$

۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) $\pm\frac{۳}{۲}$