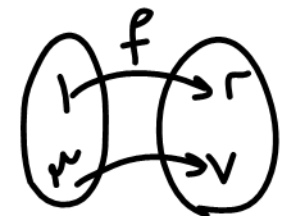
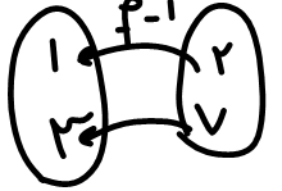


$f = \{(1, 2), (3, 7)\}$ 

$f^{-1} = \{(2, 1), (7, 3)\}$ 

دامنه پذیرند f^{-1} تابع است

$f(1) = 2$ $f(3) = 7$


$f^{-1}(2) = 1$ $f^{-1}(7) = 3$


$A|_2 \in f \leftrightarrow A|_1 \in f^{-1}$

$B|_7 \in f \leftrightarrow B|_3 \in f^{-1}$

$D_f = \{1, 3\} = R_{f^{-1}}$ $R_f = \{2, 7\} = D_{f^{-1}}$

تابع وارون $1, 2, 3, 7$

$g = \{(1, 2), (3, 2)\}$ 

$g^{-1} = \{(2, 1), (2, 3)\}$ 

دامنه پذیرند

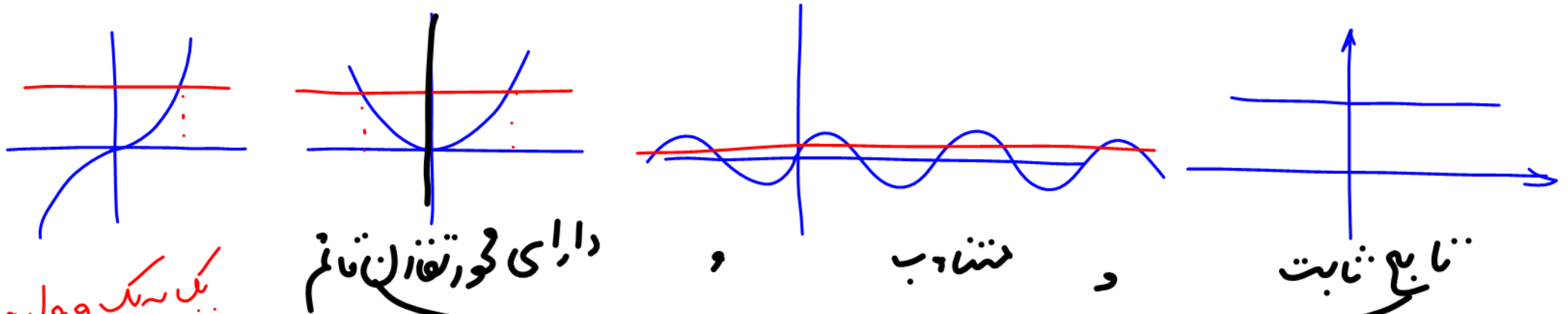
همه توابع وارون دارند. اما وارون همه توابع تابع نیست.

یک تابع وارون طبیعی که یک به یک نباشد تابع نیست.

یک تابع وارون طبیعی که یک به یک نباشد تابع نیست.

این تابع وارون طبیعی است.

این تابع وارون پذیر نیست.



دایره ای محور تقاطع قائم

و متناوب

تابع ثابت

یک به یک و وارون پذیر

غیر یک به یک و وارون ناپذیرند .

نکته: هر خط موازی محورها (افقی) تابع یک به یک را حتماً تشکیل می دهد
 قطع می کند یعنی یا یک جا یا هیچ جا

اگر تابعی ابتداً بکنوا باشد، یک به یک و وارون پذیر است.
 وارون پذیر → یک به یک → ابتداً بکنوا

نکته

رسم اول-4 :

اول خط $y=x$

را رسم کن

قرینه

آن نسبت به آن

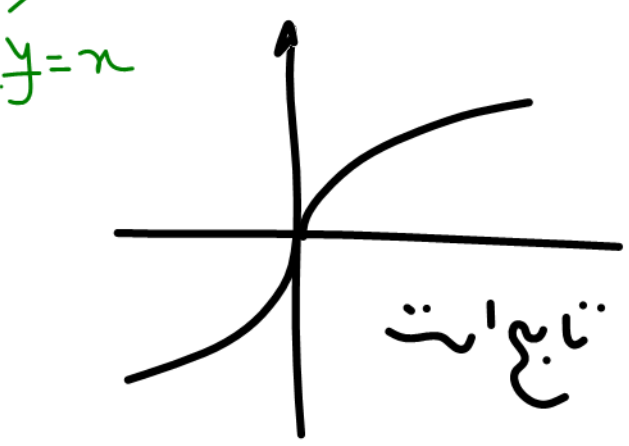
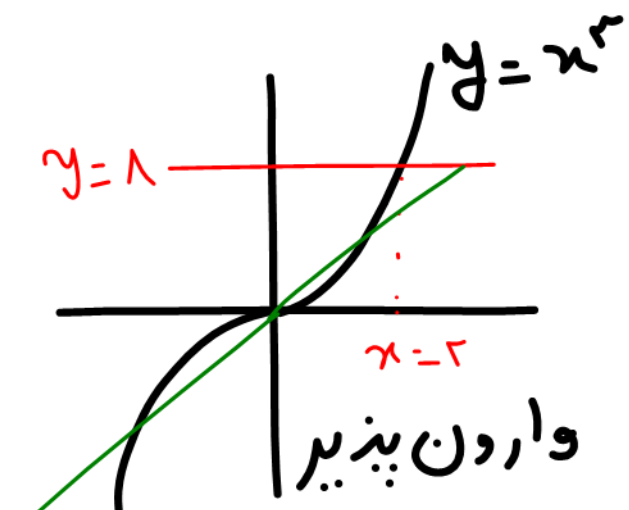
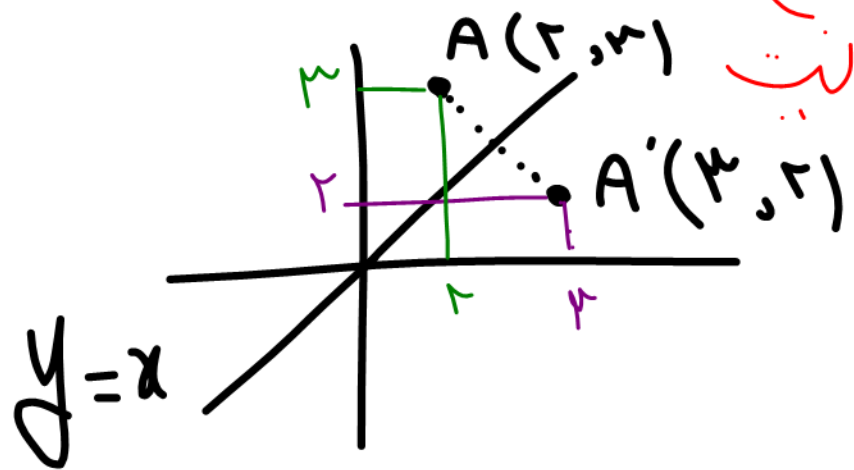
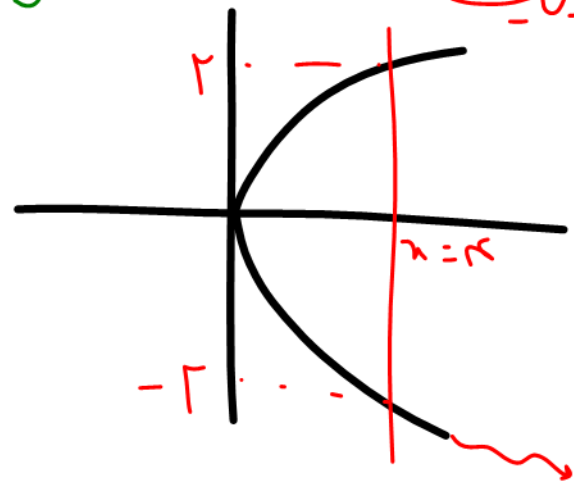
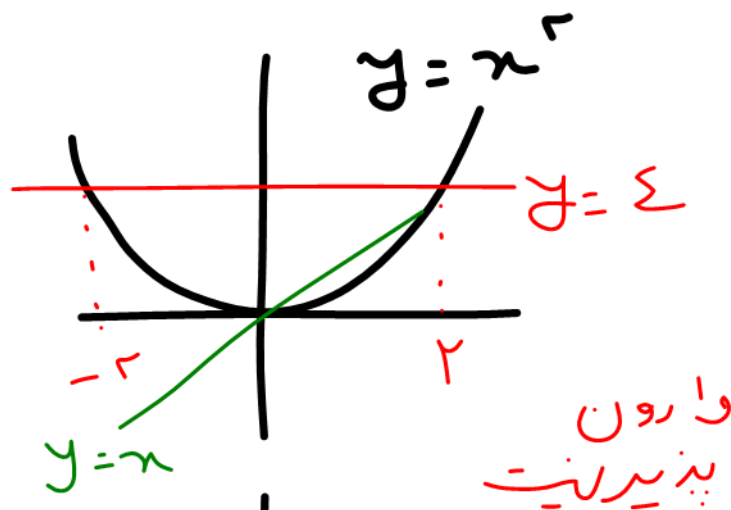
بخش از هر نقطه f

به $y=x$ عمود کن

به اندازه خودش

امتداد بده تا نقطه

متناظرش پیدا شود



تابع یک به یک همواره
وارون پذیر است.

طرز یافتن ضابطه f^{-1} : تابع را برابر y فرض کرده، x را بدست y

یافته و سپس جای x را عوض کنید (x رو ته کن، جای x رو عوض کن)

راه یک:

$$f(x) = 2x + 1$$

$$y = 2x + 1$$

$$\frac{y-1}{2} = x$$

$$\frac{x-1}{2} = y = f^{-1}(x)$$

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

راه دو:

$$f(x) = 2x + 1$$

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

تشیو عکس کن
 عرض از مبدا رو
 قدرینه کن روی
 تیب بگرد

الف) وارون کردن خط ۳، ۲، ۱
 راه سه: توی خط همون ادل
 جای x را عوض کن

$$y = 2x + 1$$

$$x = 2y + 1$$

$$\frac{x-1}{2} = y$$

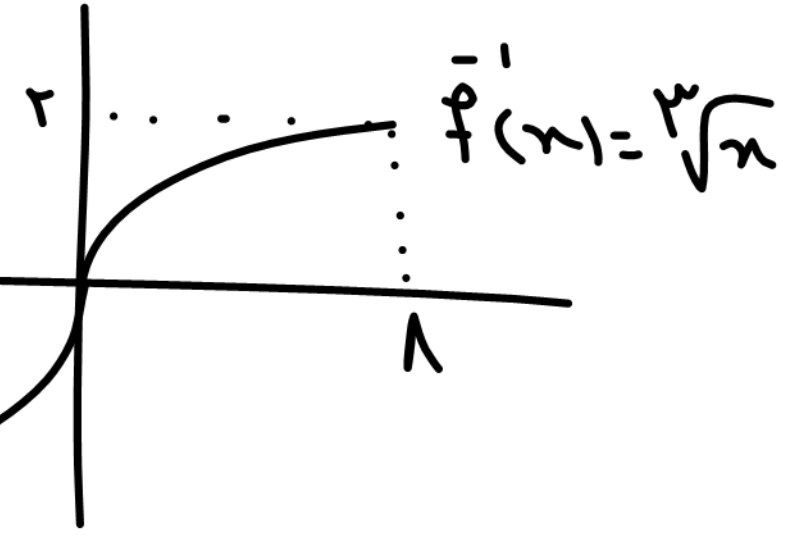
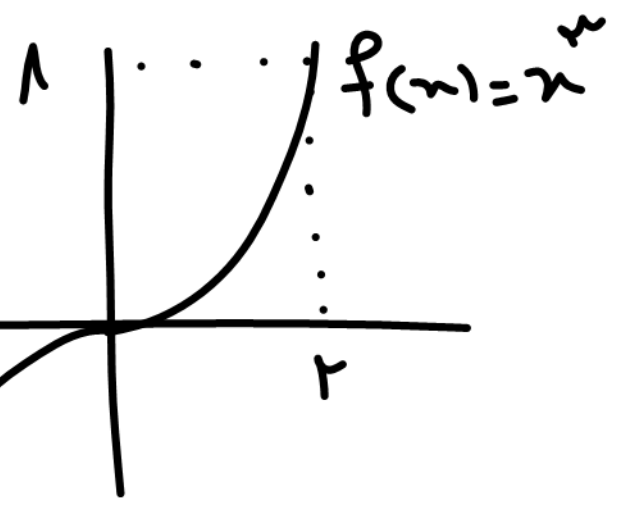
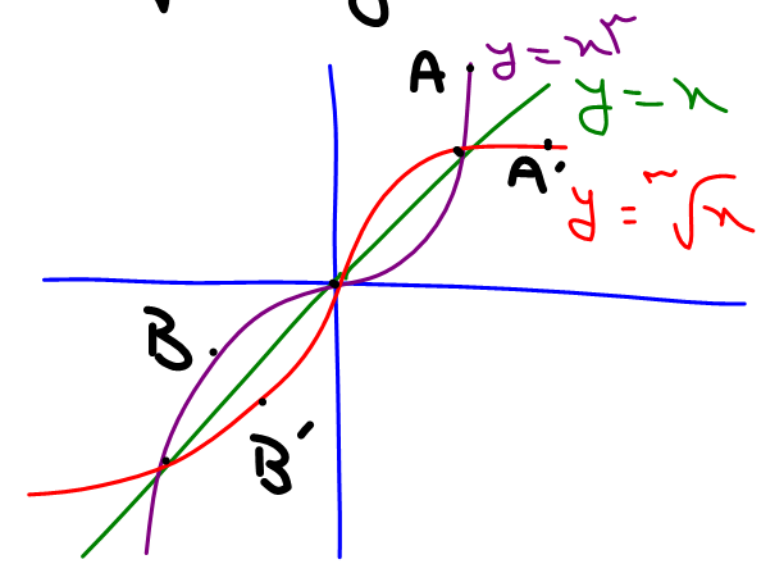
ب) وارون

$w, w', f(x) = x^u$

$$y = x^u$$

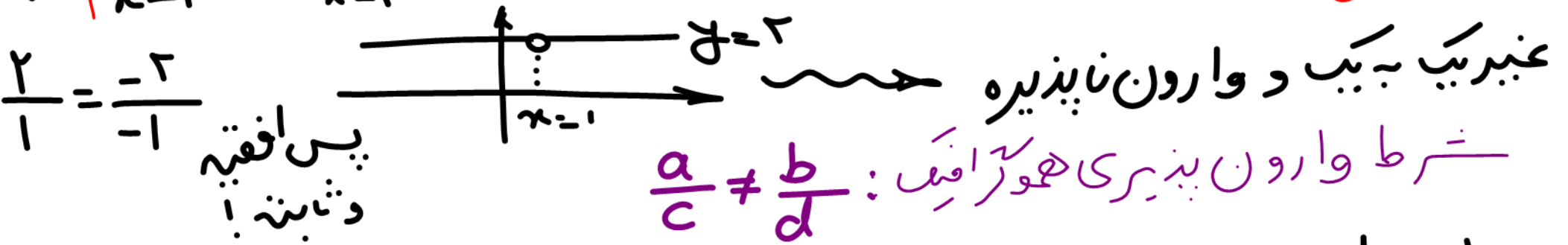
$$\sqrt[u]{y} = x$$

$$\sqrt[u]{x} = y = f^{-1}(x)$$



(ج) وارون تابع همگرافیه $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ را بیابید.

- شرط $\frac{a}{c} \neq \frac{b}{d}$ که به تابع ثابت تبدیل نشود. مثل $y = \frac{2x-2}{x-1} = \frac{2(x-1)}{x-1} = 2$



$$y = \frac{ax+b}{cx+d} \rightarrow cxy + dy = ax + b \rightarrow cxy - ax = -dy + b$$

$$x(cy - a) = -dy + b \rightarrow x = \frac{-dy + b}{cy - a} \rightarrow y = \frac{-dx + b}{cx - a} = f^{-1}(x)$$

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{-dx+b}{cx-a}$$

$$f(x) = \frac{3x+7}{2x-1} \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1x+7}{2x-2}$$

$$f(x) = \frac{2x-3}{4x-7} \longrightarrow f^{-1}(x) = \frac{7x-3}{4x-2}$$

در تابع همگرا کنید با چه شرطی تابع بر وارون خود منطبق است یا $f = f^{-1}$ یا تابع در معادله $f(x) = f^{-1}(x)$ صادق است؟

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{-dx+b}{cx-a}$$

باید $\rightarrow a = -d$ یا $d = -a$ یا $a+d=0$.

مثلاً تابع $f(x) = \frac{2x+3}{4x-2}$ وارونش بر خودش منطبقه و $f^{-1} = f$

به ازای کدام مقدار m وارون $f(x) = \frac{4x-7}{1x+m}$ بر خودش منطبق است؟ $m = -4$

$$(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$$

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

∴

نتیجه

نکته: ترکیب هر تابع با وارونش، تابع همانی $y=x$ است.

اما مواظب دامنه باش!

$$y = f \circ f^{-1}(x) = f(f^{-1}(x)) = x$$

$\rightarrow x \in D_{f^{-1}} = R$

$$y = f^{-1} \circ f(x) = f^{-1}(f(x)) = x$$

$\rightarrow x \in D_f$

$y = f \circ f^{-1}$ را ببینید

$y = f \circ f^{-1}(x) = x$

مثلاً $D_f = [1, 2]$, $D_{f^{-1}} = [7, 9]$ باشد، تابع

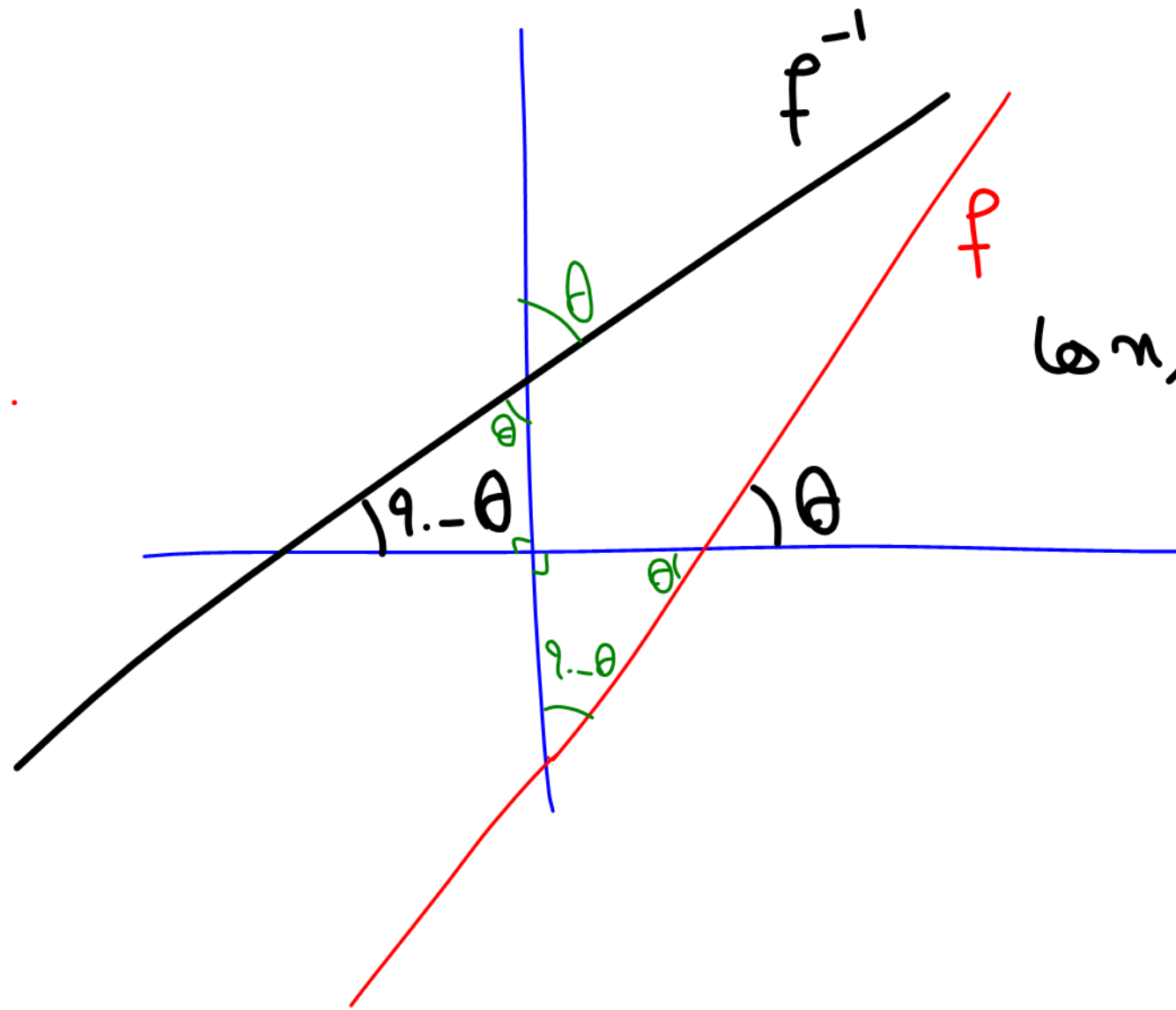
$$y = f^{-1} \circ f(x) = x$$



$$(f^{-1})^{-1} = f$$

نکته:

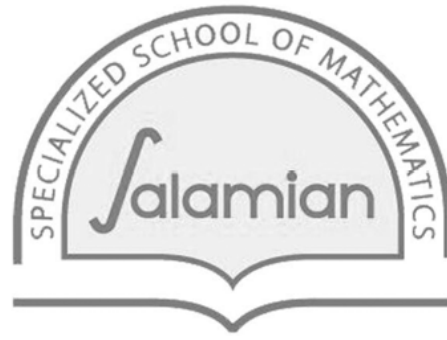
وارون، وارون هر تابع، برابر خود تابع است.



دنتی f ضعیف است

زاویه f و f^{-1} با محور x ها

هم یکدیگرند.



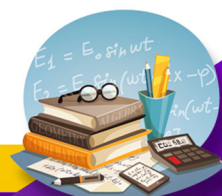
ریاضیات کنکور

بخش نخست

توان، ریشه، رادیکال، عبارات جبری، اتحاد، تجزیه، تابع،

قدر مطلق و جزء صحیح

مدرس: دکتر سامان سلامیان



توان، ریشه، رادیکال، عبارات جبری، اتحاد، تجزیه، تابع، قدر مطلق و جزء صحیح

روابط و قضیه‌ها
 ۱- روابط توان: $\frac{2^5}{2^3} = 2^{5-3} = 2^2 = 4$, $2^5 \cdot 2^3 = 2^{5+3} = 2^8 = 256$, $\frac{2^5}{2^5} = 2^{5-5} = 2^0 = 1$, $2^5 \cdot 2^0 = 2^5 = 32$

$a^m \times a^n = a^{m+n}$	$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$a^m \times b^m = (ab)^m$	$\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$
بر مخرج توان صغریه $a \neq 0$ $a^0 = 1$	$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$	$(a^m)^n = a^{mn}$	$(2^3)^2 = 2^6 = 64 \neq 2^3 \cdot 2^2 = 2^5 = 32$
فرد $n \Rightarrow (-a)^n = -a^n$ $(-2)^3 = -8$		زوج $n \Rightarrow (-a)^n = a^n$ $(-2)^2 = 4$	

اگر توان عدد غیر صحیح باشد، پایه را مثبت در نظر می‌گیریم.
 ۲- رادیکال: $a^{\frac{1}{n}} \rightarrow a^{\frac{1}{n}}$
 هر عددی که توانی برابری با عکس همان عدد در پایه آن توان اولی مثبت $2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$, $2^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$	$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$	$\sqrt[n]{a^m} = n\sqrt[n]{a^{mk}}$	$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = m\sqrt[mn]{a}$
فرد $n \Rightarrow \sqrt[n]{a^n} = a$ زوج $n \Rightarrow \sqrt[n]{a^n} = a $		$a\sqrt{b} = \begin{cases} \sqrt{a^2b} & a > 0 \\ -\sqrt{a^2b} & a < 0 \end{cases}$	

منظور از ریشه دوم ۹، دو عدد +۳ و -۳ است. ولی منظور از $\sqrt{9}$ فقط +۳ هست.
 توجه کنید که $(\sqrt{x})^2 = x$ و x حتماً نامنفی است ولی $y = \sqrt{x^2} = |x|$
 ۳- اتحادها:

$\begin{cases} (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \\ (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \end{cases}$ مربع ۲ جمله	$\begin{cases} (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \end{cases}$ مکعب ۲ جمله
$\begin{cases} a+b = S \\ ab = P \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = S^2 - 2P \\ a^3 + b^3 = S^3 - 3PS \end{cases}$	$\begin{cases} a^2 + b^2 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) \\ a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2) \end{cases}$ جابجی دلاغر
$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ مزدوج	$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$ یک جمله شترک
$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$ مربع ۳ جمله	



دسته بندی تست ها:

۱- ساده کردن عبارت های توانی و رادیکالی:

تست ۱: اگر $A = \frac{\sqrt[3]{18}}{\sqrt{6}} \times 12^{1/2}$ باشد، کدام درست است؟

- $A^6 = 3$ (۴) $A^6 = 2$ (۳) $A^6 = 3$ (۲) $A^6 = 2$ (۱)

۲- استفاده از اتحادها:

تست ۲: اگر $x + y = 11$ و $x^3 + y^3 = 407$ باشد، حاصل xy برابر کدام است؟

- ۳۳ (۴) ۳۰ (۳) ۲۸ (۲) ۲۴ (۱)

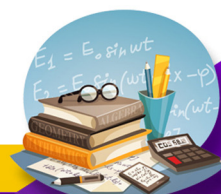
تست ۳: اگر $f(x) = \sqrt[3]{8x^3 + ax^2 + 54x + b}$ یک تابع خطی باشد، مقدار $a - b$ کدام است؟

- ۹ (۴) ۸ (۳) -۸ (۲) -۹ (۱)

۳- کار کردن با عبارت های $x \pm \frac{1}{x}$: معمولاً با توان ۲ یا ۳ رساندن و یا استفاده از اتحاد های $S^2 - 2P$ و $S^3 - 3PS$ مسئله حل می شود.

تست ۴: اگر $\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} = 3$ باشد، مقدار مثبت $x - \frac{1}{x}$ کدام است؟

- $7\sqrt{3}$ (۴) $3\sqrt{7}$ (۳) $5\sqrt{3}$ (۲) $3\sqrt{5}$ (۱)



۱۳۱ $\sqrt[2k]{13}$ فرجه زوج $(13)^{2k}$

۴- مجموع چند عبارت نامنفی (مثل عبارت‌های با توان زوج، رادیکال و قدرمطلق) وقتی صفر است که همگی صفر باشند.

تست ۵: اگر $4a^2 + 2b^2 + 4 = 4b(a+1)$ باشد، حاصل $a+b$ کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

ابنت آرام @salamianriazi

دکتر آرام

سامان سلامیان وبسایت
www.saman.salamian.ir

نام خانوادگی
nob

۵- گویا کردن رادیکال‌ها:

تست ۶: اگر $2 + \sqrt{7} = a - 1 = b + 3$ باشد، حاصل $\sqrt{\frac{1}{a} + \frac{3}{b}}$ کدام است؟

- ۱ (۱) $\sqrt{2}$ ۲ (۲) ۳ (۳) $\sqrt[4]{7}$ ۴ (۴) $2\sqrt[4]{7}$

تست ۷: اگر $\sqrt[3]{a} = \sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4}$ باشد، مقدار a برابر کدام است؟

- ۱ (۱) ۹ ۲ (۲) ۸ ۳ (۳) ۳ ۴ (۴) ۶

۶- رادیکال‌های مرکب:

(۱) مربع کردن عبارت زیر رادیکال

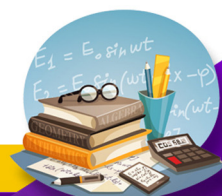
$$\sqrt{17 - 12\sqrt{2}} \begin{cases} a^2 + b^2 = 17 \\ 2ab = 12\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \sqrt{(3 - 2\sqrt{2})^2} = |3 - 2\sqrt{2}| = 3 - 2\sqrt{2}$$

(۲) دو برابر کردن صورت و مخرج

$$\sqrt{4 + \sqrt{15}} = \sqrt{\frac{8 + 2\sqrt{15}}{2}} = \sqrt{\frac{(\sqrt{5} + \sqrt{3})^2}{2}} = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

(۳) به توان ۲ رساندن در عبارت‌های متقارن

$$A = \sqrt{3 + \sqrt{5}} - \sqrt{3 - \sqrt{5}} \Rightarrow A^2 = (3 + \sqrt{5}) + (3 - \sqrt{5}) - 2\sqrt{9 - 5} = 2 \xrightarrow{A > 0} A = \sqrt{2}$$



تست ۸: اگر $\sqrt{2} \cdot \sqrt{13-4\sqrt{3}} + 2\sqrt{2+\sqrt{3}} = \sqrt{a}$ باشد، a کدام است؟

۵۴ (۴)

۴۸ (۳)

۳۲ (۲)

۲۴ (۱)

تست ۹: حاصل عبارت $\frac{\sqrt{5+\sqrt{21}} - \sqrt{5-\sqrt{21}}}{\sqrt{2}}$ برابر کدام است؟

$\sqrt{7}$ (۴)

$\sqrt{3}$ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

۷- به عبارت‌های رادیکالی مزدوج توجه کنید، به خصوص وقتی ضرب آن‌ها ۱ باشد، وارون یکدیگرند:

$$(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3}) = 4-3=1 \Rightarrow (2-\sqrt{3}) = (2+\sqrt{3})^{-1}, (2+\sqrt{3}) = (2-\sqrt{3})^{-1}$$

تست ۱۰: اگر $\sqrt[3]{2-\sqrt{3}} \cdot \sqrt[4]{2+\sqrt{3}} = \sqrt[n]{7-4\sqrt{3}}$ مقدار n کدام است؟

۴ (۴)

۶ (۳)

۸ (۲)

۱۸ (۱)

تست ۱۱: اگر $\sqrt{x+2} - \sqrt{x-4} = 2$ ، مقدار $\sqrt{x+2} + \sqrt{x-4}$ کدام است؟

۳/۵ (۴)

۳ (۳)

۲/۵ (۲)

۱/۵ (۱)



۸- تجزیه عبارت‌های جبری:

(۱) استفاده از اتحاد جمله مشترک

$$x^2 - \underbrace{7x}_{a+b} + \underbrace{12}_{ab} = (x-3)(x-4)$$

(۲) حل معادله درجه دوم به کمک فرمول

$$2x^2 + 5x - 3 : x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 24}}{4} = \frac{1}{4}, -3 \Rightarrow 2(x - \frac{1}{4})(x - (-3)) = (2x-1)(x+3)$$

(۳) حدس زدن ریشه و سپس تقسیم یا جور کردن ضرایب (به ویژه در عبارت‌های درجه سوم و بالاتر)

$$x^3 - 3x^2 + 2 \quad (x=1 \text{ حدس ریشه: } x=1) \quad x^3 - 3x^2 + 2 = (x-1)(x^2 + x - 2)$$

$$x^3 - 3x^2 + 2 = (x-1)(x^2 + x - 2) \quad (\text{تجزیه پیرانتز دوم}) \quad (x-1)(x-1)(x+2) = (x-1)^2(x+2)$$

(۴) مربع کامل کردن

$$a^4 + 4b^4 = (a^2 + 2b^2)^2 - 4a^2b^2 = (a^2 + 2b^2)^2 - (2ab)^2 = (a^2 + 2b^2 - 2ab)(a^2 + 2b^2 + 2ab)$$

(۵) دسته‌بندی

$$x^3 - a - x^2 + ax = (x^3 - x^2) + (-a + ax) = x^2(x-1) + a(x-1) = (x-1)(x^2 + a)$$

تست ۱۲: کدام عامل در تجزیه $(x^2 - 4x)^2 - 2(x^2 - 4x) - 15$ وجود ندارد؟

x - 5 (۴)

x - 3 (۳)

x - 2 (۲)

x - 1 (۱)

تست ۱۳: عبارت $x^6 + 4x^2 - 5$ بر کدام یک از عبارات زیر بخش پذیر است؟

$x^4 + x^2 + 5$ (۴)

$x^4 - x^2 + 5$ (۳)

$x^2 + x + 5$ (۲)

$x^2 - x + 5$ (۱)

۹- ساده کردن عبارت‌های جبری: در مجموع چند کسر حتماً مخرج‌ها را تجزیه کنید و «ک.م.م» آن‌ها را به عنوان مخرج مشترک در نظر بگیرید.

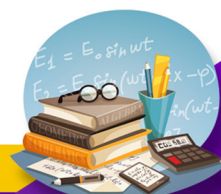
تست ۱۴: اگر $\frac{1}{x^2 - x} + \frac{1}{x^2 + x} - \frac{3}{x^2 + x - 2} = \frac{a}{x^2 + 3x + 2}$ باشد، کدام است a؟

-2 (۴)

-1 (۳)

2 (۲)

1 (۱)



زوج مرتب

زوج مرتب به دوتایی (a, b) گفته می‌شود که a را مؤلفه اول و b را مؤلفه دوم می‌نامیم. دقت کنید که در زوج مرتب، ترتیب مؤلفه‌ها مهم است، یعنی زوج مرتب (a, b) با زوج مرتب (b, a) فرق دارد. هر زوج مرتب، یک نقطه را در صفحه مشخص می‌کند و دو زوج مرتب، وقتی با هم برابرند که مؤلفه‌های اولشان با هم و مؤلفه‌های دومشان نیز با هم برابر باشند.

$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c, b = d$$

تست ۱۵: اگر دو زوج مرتب $(x - y, 1)$ و $(3, 2x + 3y)$ یک نقطه را در صفحه مشخص کنند، حاصل $3x + 2y$ کدام است؟

۹ (۴)

۶ (۳)

۵ (۲)

۴ (۱)

$$\begin{cases} x - y = 3 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases}$$

$$3x - 2y = 3 \quad \textcircled{3}$$

رابطه

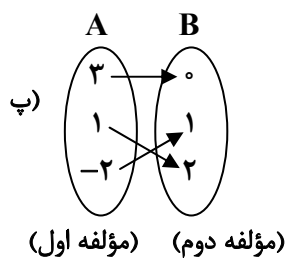
برای نشان دادن ارتباط و وابستگی بین دو مجموعه از رابطه استفاده می‌شود و آن را معمولاً با حرف R نشان می‌دهند. رابطه‌ها را می‌توان به شکل زوج مرتب، جدول، نمودار ون و نمودار دکارتی نشان داد.

الف) $R = \{(1, 2), (3, 0), (-2, 1)\}$ (زوج مرتب)

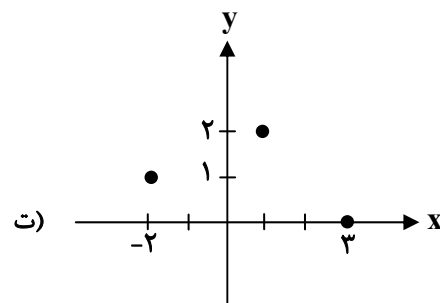
ب)

x (مؤلفه اول)	۱	۳	-۲
y (مؤلفه دوم)	۲	۰	۱

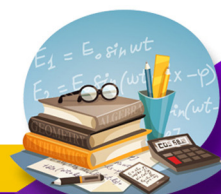
 (جدول)



(نمودار ون)



(نمودار دکارتی یا نمایش هندسی)



حل با جدول نظام دار

تقریباً

(سراسری ریاضی خارج)

تست ۱۶: رابطه‌ی $R = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{N}, 2x + y \leq 7\}$ ، دارای چند زوج مرتب است؟

- ۹ (۴)
- ۸ (۳)
- ۶ (۲)
- ۵ (۱)

$$\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1)\}$$

(سراسری ریاضی)

تست ۱۷: رابطه‌ی $R = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{Z}, |x| + |y| = 2\}$ ، چند زوج مرتب دارد؟

- ۴ (۴)
- ۷ (۳)
- ۶ (۲)
- ۸ (۱)

$$\{(1, 1), (-1, -1), (1, -1), (2, 0), (-2, 0), (-1, 1), (0, 2), (0, -2)\}$$

مفروضه‌ی (ت ب ع) تابع است که ناعلم از تابع یعنی پیروا دنباله دو و سه‌گیت کننده است. α سه‌گیت است و اول تغییر است و اول به دنبال α دنباله است

گفتیم که رابطه‌ها را می‌توان به شکل‌های مختلف مثل زوج مرتب، نمودار ون و ... نشان داد. بدانید که تابع را هم می‌توانیم به همان شکل‌ها نشان دهیم. با هم ببینیم:

۱) تعریف تابع از نظر زوج‌های مرتب



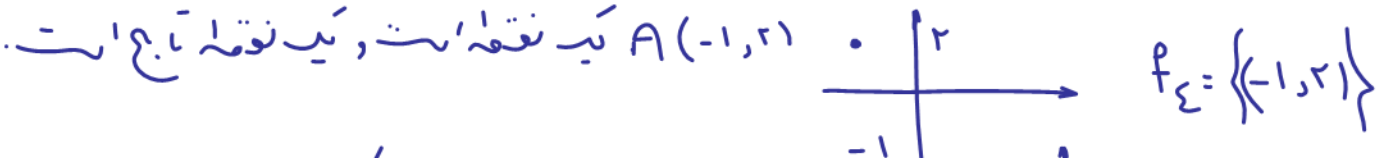
تابع مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب است که در آن مؤلفه‌های اول متمایز باشند، پس اگر دو زوج مرتب پیدا شوند که مؤلفه‌های اول مساوی داشتند، آن رابطه تابع نیست، مگر این‌که مؤلفه‌های دوم آن زوج مرتب‌ها نیز برابر باشند:

اگر $(x, y_1) \in f, (x, y_2) \in f \Rightarrow y_1 = y_2$

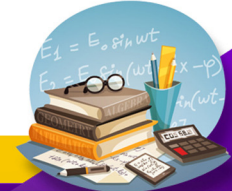
مثال ۱۸: کدام یک از رابطه‌های زیر تابع نیست؟ f_1 زیرا در f_1 عدد α با دو تابع رابطه دارد و تابع نیست

- $f_1 = \{(0, 1), (-2, 3), (4, 2)\}$
- $f_2 = \{(1, 2), (3, 4), (1, 2)\}$
- $f_3 = \{(2, 3), (1, -4), (2, \sqrt{9})\}$
- $f_4 = \{(-1, 2)\}$
- $f_5 = \{\}$
- $f_6 = \{(1, 2), (2, 2), (1, 5)\}$

در مجموعه‌ها تکرار اختلاف نیست
عیب ندارد که ۲ تا (۱, ۲) دارد



تابع است یعنی تابع است که هر خطی برآزی محورهای (نام) آن را حد اکثر یک بار قطع کند (یا قطع نکند یا یک بار قطع کند) و در اصل هر خطی نام زنی در تابع است



۳ تست ۲۱: در گزینه‌های زیر اگر از تمام اعضای A به اعضای B پیکان رسم کنیم، کدام گزینه همیشه نشان‌دهنده‌ی یک تابع است؟



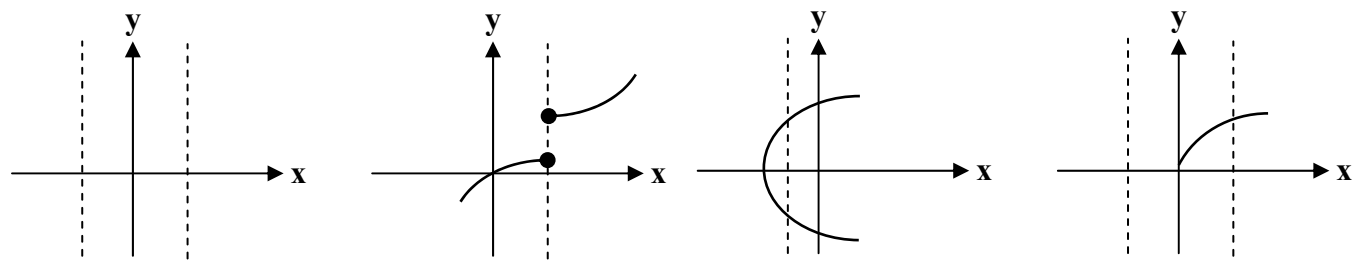
نمونه تست ۲۳: اگر A m عضو، B n عضو باشد، توابع از A به B $F: A \rightarrow B$ n^m است.

تست ۲۲: از مجموعه‌ی $A = \{1, 2, 3, 4\}$ چند تابع به مجموعه‌ی $B = \{1, 2, 3\}$ می‌توانیم تعریف کنیم به شرطی که $f(1) = 1$ باشد؟



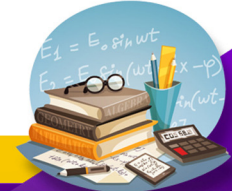
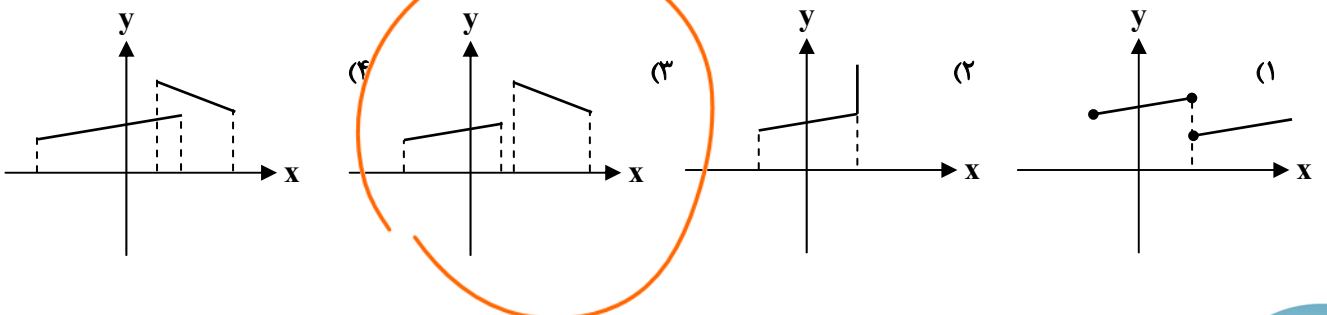
حالت $3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^3 = 27$ در صورتی که برای هر کدام از اعضای A به مقدار اعضای B حالت داریم.

تست ۲۳: تعریف تابع از نظر نمودار دکارتی (هندسی) نمودار دکارتی وقتی نشان‌دهنده یک تابع است که هر خط عمودی (موازی محور y ها) نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کند، نه بیشتر.



تابع است. چون هر خط به موازات محور y، در هیچ جا چیزی را قطع نمی‌کند. تابع است. چون هر خط به موازات محور y، در یک نقطه نمودار را قطع می‌کند. تابع نیست. چون خطی به موازات محور y در بیش از یک نقطه، نمودار را قطع می‌کند. تابع است. چون هر خط به موازات محور y، حداکثر در یک نقطه نمودار را قطع می‌کند.

تست ۲۳: کدام شکل نمودار یک تابع است؟



۴) تعریف تابع از نظر ضابطه

ضابطه $y = f(x)$ وقتی نشان دهنده‌ی یک تابع است که به ازای هر x حداکثر یک y به دست آید.



توی این مدل از سوال‌ها x ای رو انتخاب کن به ازای اون مشکوک به تولید چند تا y بشی. در واقع برای اثبات تابع نبودن از مثال نقض استفاده می‌کنیم.

۱- اگر عبارت y دار توی قدرمطلق و یا درون پرانتز توان زوج بود کاری کن عبارت قدرمطلق و یا توان زوج با یک عدد مثبت برابر بشه:

الف) $|2y-1|+x-2=0$
 $\xrightarrow{x=0} |2y-1|=2 \rightarrow 2y-1=2 \rightarrow y=\frac{3}{2}$
 $2y-1=-2 \rightarrow y=-\frac{1}{2}$

ب) $(y-1)^2+x^2=1$
 $\xrightarrow{x=0} (y-1)^2=1 \rightarrow \begin{cases} y-1=1 \rightarrow y=2 \\ y-1=-1 \rightarrow y=0 \end{cases}$
 (نکته: تابع نیست زیرا یک x دو تا y می‌دهد)

۲- وقتی چند y با توان‌های فرد و مختلف کنار هم هستند، x ای را انتخاب کنید که سمت راست تساوی صفر بشه:

پ) $y^3-y=2x-1$
 $\xrightarrow{x=\frac{1}{2}} y^3-y=0 \rightarrow y(y^2-1)=0 \rightarrow y=0$ یا $y=1$ یا $y=-1$
 یک x مثل $\frac{1}{2}$ با سه تا y در ارتباطه بنابراین تابع نیست

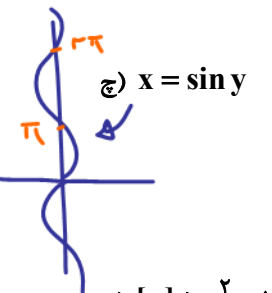
۳- اگر جمع چند عبارت نامنفی برابر صفر بشه، باید تک تک آن‌ها را برابر صفر قرار دهیم.

ت) $(y-1)^2+x^2=0$
 $\xrightarrow{x=0, y=1} A(0,1)$

ث) $(y^2-1)^2+x^2=0$
 $\xrightarrow{x=0} y^2-1=0 \rightarrow y=1$ یا $y=-1$
 $\xrightarrow{y=1} x^2=0 \rightarrow x=0$
 $\xrightarrow{y=-1} x^2=0 \rightarrow x=0$
 A(0,1) B(0,-1)

ج) $x^2+y^4+2y^3+y^2+4x+4=0$
 $\rightarrow (x^2+4x+4)+y^2(y^2+2y+1)=0$
 $(x+2)^2+y^2(y+1)^2=0 \rightarrow \begin{cases} x+2=0 \rightarrow x=-2 \\ y(y+1)=0 \rightarrow y=0$ یا $y=-1$
 A(-2,0) B(-2,-1)

معمولاً روابطی که در آن‌ها $|y|$ ، y^{2n} یا $[y]$ و یا $\sin y$ ، $\cos y$ ، $\tan y$ و یا $\cot y$ دیده می‌شه تابع نیستند.

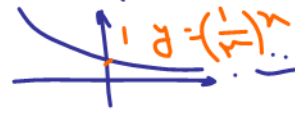
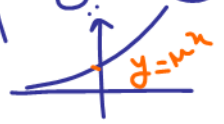


ج) $x = \sin y$
 $\xrightarrow{x=0} \sin y = 0 \rightarrow y = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi, \dots$
 می‌بینیم یک x بی شمار لار تابع نیست

ح) $[y]+x^2-1=0$
 $\xrightarrow{x=0} [y]=1 \rightarrow 1 < y < 2$
 یک x بی شمار لار پس تابع نیست



نکته: تابع هایی مثل $y = 3^x$ یا $y = (\frac{1}{3})^x$ که متغیرش در نما (توان) هست تابع نمایی نام دارد که همواره مثبت و نمودارش بالای محور x است و هرگز به محور x برخورد نمی کند.



۴- اگر جمع چند عبارت نامنفی و یا چند عبارت همواره مثبت برابر یک عدد منفی بشه به رابطه ای برخورد کردیم که بیانگر تهی است و می دانیم تهی یک تابع است.

خ) $|y| + 3^x = -1$

در مورد (خ) و (د) طرف چپ تساوی یک عبارت مثبت است.

نمی تواند برابر سمت راست باشد. هیچ ربع مرتب (د) در این در رابطه صدق نمی کند.

د) $\sqrt{x-1} + y^2 = -1$

پس بجواب \emptyset و \emptyset تابع است. (با علامت خند)

تست ۲۴: کدام رابطه یک تابع است؟

- ۱) $y^3 - 3y^2 + x = 0$
- ۲) $y + y^2 = x^3 + 1$
- ۳) $|y-1| + x = 0$
- ۴) $xy^2 - x = 1$

گزینه های ۱ و ۳ و ۴ رو تحلیل می کنیم و ثابت می کنیم که به ازای یک x بیش از یک مقدار واسه y بدست میاد پس تابع نیستن.

۱) $y^3 - 3y^2 + x = 0 \xrightarrow{x=0} y^3 - 3y^2 = 0 \Rightarrow y^2(y-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} y^2 = 0 \Rightarrow y = 0 \\ y-3 = 0 \Rightarrow y = 3 \end{cases}$

۳) $|y-1| + x = 0 \xrightarrow{x=-1} |y-1| - 1 = 0 \Rightarrow |y-1| = 1 \Rightarrow y-1 = \pm 1 \Rightarrow y = 2, y = 0$

۴) $xy^2 - x = 1 \xrightarrow{x=1} y^2 - 1 = 1 \Rightarrow y^2 = 2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{2}$

نامعادله ها

تعیین علامت

یکی از روش های اصلی حل نامعادله ها، تعیین علامت عبارت های جبری است. برای تعیین علامت یک عبارت جبری (به هر شکلی که باشد)، کارهای زیر را انجام می دهیم:

- الف) ریشه های عبارت ها را (چه در صورت و چه در مخرج) پیدا می کنیم.
 - ب) مرتبه های ریشه ها را تعیین می کنیم.
 - پ) ریشه ها را به ترتیب در جدول تعیین علامت می نویسیم و ریشه های با مرتبه ی زوج را مشخص می کنیم (ما در این جا برای مشخص کردنشان، بالایشان یک * می گذاریم).
 - ت) عبارت در ریشه های صورت برابر صفر و در ریشه های مخرج تعریف نشده است. (بعضی ها روی خط ریشه های مخرج می نویسند ت.ن (تعریف نشده) ولی ما بر اساس آن چه متداول شده (ولی درست نیست) نماد ∞ می گذاریم).
 - ث) علامت ضریب بزرگ ترین توان x را در صورت (بعد از ضرب کردن عامل ها) و علامت ضریب بزرگ ترین توان x را در مخرج، در هم ضرب می کنیم و نتیجه را می گذاریم توی اولین خانه ی سمت راست جدول.
 - ج) به سمت چپ حرکت می کنیم و با عبور از هر ریشه ی مرتبه ی فرد، علامت را عوض می کنیم؛ ولی با عبور از ریشه ی مرتبه ی زوج علامت را عوض نمی کنیم.
 - چ) ریشه ی قدر مطلق مثل ریشه ی مرتبه ی زوج عمل می کند.
- برای حل یک نامعادله با روش تعیین علامت، اول همه ی اجزا را می آوریم یک طرف تا به یک نامعادله به شکل $A > 0$ یا $A < 0$ برسیم و سپس عبارت A را تعیین علامت می کنیم و با توجه به جهت نامعادله، مجموعه جواب را انتخاب می کنیم.



تست ۲۵: مجموعه جواب نامعادله $\frac{x+1}{x-1} - \frac{x+6}{x+2} > 1$ ، شامل چند عدد صحیح است؟

- (۱) هیچ (۲) یک (۳) دو (۴) بی شمار

پاسخ: گزینه‌ی «۳» - اول همه‌ی عوامل را می‌آوریم یک طرف و مخرج مشترک می‌گیریم:

$$\frac{x+1}{x-1} - \frac{x+6}{x+2} - 1 > 0 \Rightarrow \frac{x^2 + 3x - 2 - x^2 - 5x + 6 - x^2 - x + 2}{(x-1)(x+2)} > 0 \Rightarrow \frac{-x^2 - 3x + 10}{(x-1)(x+2)} > 0$$

$$-x^2 - 3x + 10 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -5 \text{ (۱)} \\ x = 2 \text{ (۱)} \end{cases} \quad (x-1)(x+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \text{ (۱)} \\ x = -2 \text{ (۱)} \end{cases}$$

x	-∞	-5	-2	1	2	+∞		
		-	+	∅	-	∅	+	-

با توجه به جهت نامعادله، مجموعه جواب برابر است با $1 < x < 2$ یا $-5 < x < -2$ که شامل اعداد صحیح -۴ و -۳ یعنی دو عدد صحیح است.

تست ۲۶: طول بزرگ‌ترین بازه‌ای که نامساوی $\frac{x^4 - 3x + 2}{(x-1)(x-2)} \leq 1$ در آن برقرار است، برابر کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

پاسخ: گزینه‌ی «۳» - اول همه را می‌آوریم یک طرف و مخرج مشترک می‌گیریم:

$$\frac{x^4 - 3x + 2}{x^2 - 3x + 2} - 1 \leq 0 \Rightarrow \frac{x^4 - 3x + 2 - x^2 + 3x - 2}{x^2 - 3x + 2} \leq 0 \Rightarrow \frac{x^4 - x^2}{x^2 - 3x + 2} \leq 0$$

حالا کسر به دست آمده را تعیین علامت می‌کنیم:

$$x^4 - x^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ (۲)} \\ x = 1 \text{ (۱)} \\ x = -1 \text{ (۱)} \end{cases} \quad x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \text{ (۱)} \\ x = 2 \text{ (۱)} \end{cases}$$

دقت کنید که چون ریشه‌ی $x = 1$ دو بار (یک بار در صورت و یک بار در مخرج) به دست آمده، پس مرتبه‌ی ریشه‌ی $x = 1$ زوج است؛ یعنی دو ریشه‌ی مرتبه‌ی زوج داریم: یکی $x = 0$ و دیگری $x = 1$:

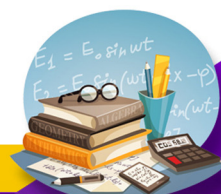
x	-∞	-1	0	1	2	+∞	
		+	-	-	∅	-	+

بنابراین بازه‌های جواب نامعادله عبارت‌اند از $[-1, 1)$ و $(1, 2)$ ؛ پس طول بزرگ‌ترین بازه‌ی جواب نامعادله برابر طول بازه‌ی $[-1, 1)$ یعنی ۲ است.

اگر بخواهیم عبارت درجه دوم $ax^2 + bx + c$ همواره مثبت یا همواره منفی یا همواره نامنفی یا همواره نامثبت باشد، باید داشته باشیم:

$$\text{همواره مثبت (بزرگ‌تر از صفر)} \begin{cases} \Delta < 0 \\ a > 0 \end{cases} \quad \text{همواره منفی (کوچک‌تر از صفر)} \begin{cases} \Delta < 0 \\ a < 0 \end{cases}$$

$$\text{همواره نامنفی (بزرگ‌تر یا مساوی صفر)} \begin{cases} \Delta \leq 0 \\ a > 0 \end{cases} \quad \text{همواره نامثبت (کوچک‌ر یا مساوی صفر)} \begin{cases} \Delta \leq 0 \\ a < 0 \end{cases}$$



تست ۲۷: اگر نمودار تابع $y = (m+3)x^2 + 2mx + 4$ به ازای تمام مقادیر x بالای محور x ها قرار گیرد، حدود m کدام است؟
 (۱) $-3 < m < 2$ (۲) $-3 < m < 6$ (۳) $-3 < m < -2$ (۴) $-2 < m < 6$

پاسخ: گزینه «۴» - با توجه به چیزهایی که در مورد تعیین علامت گفتیم، برای آن که عبارت درجه دوم $ax^2 + bx + c$ همواره مثبت باشد، باید ریشه نداشته باشد؛ یعنی $\Delta < 0$ و از طرفی عبارت هم، علامت ضریب x^2 یعنی a است یعنی برای مثبت بودن عبارت، باید $a > 0$ باشد:

$$\Delta < 0 \Rightarrow 4m^2 - 16(m+3) < 0 \Rightarrow 4(m^2 - 4m - 12) < 0 \Rightarrow -2 < m < 6$$

$$a > 0 \Rightarrow m + 3 > 0 \Rightarrow m > -3$$

و اشتراک دو بازه‌ی $-2 < m < 6$ و $m > -3$ می‌شود: $-2 < m < 6$.

(تجربی ۹۸ و مشابه ۹۶)

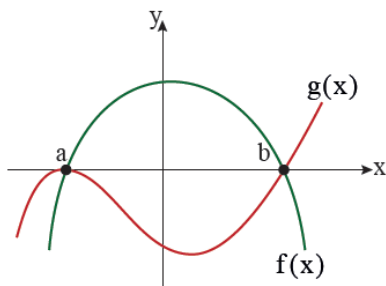
تست ۲۸: مجموعه جواب نامعادله $1 < \frac{2x-3}{x+1} < 3$ به کدام صورت است؟

(۱) $\mathbb{R} - [-6, 4]$ (۲) $\mathbb{R} - [-4, 6]$ (۳) $x > 4$ (۴) $x < -6$

تست ۲۹: در کدام بازه‌ها، نمودار تابع $y = \frac{2x^2 - 6}{x^2 - x - 2}$ ، در زیر خط به معادله $y = 2$ قرار دارد؟

(۱) $(1, +\infty)$ (۲) $(-1, 2)$ (۳) $(-\infty, -1) \cup (1, 2)$ (۴) $(-1, 1) \cup (2, +\infty)$

تست ۳۰: با توجه به نمودار توابع f و g ، اگر مجموعه جواب نامعادله $(f \cdot g)(x) > 0$ به صورت $(-\infty, -2)$ و مجموعه جواب نامعادله $(f - g)(x) > 0$ به صورت $(-1 - b, c - 1)$ باشد، حاصل $a + b + c$ کدام است؟



- (۱) ۱
- (۲) -۱
- (۳) صفر
- (۴) ۲

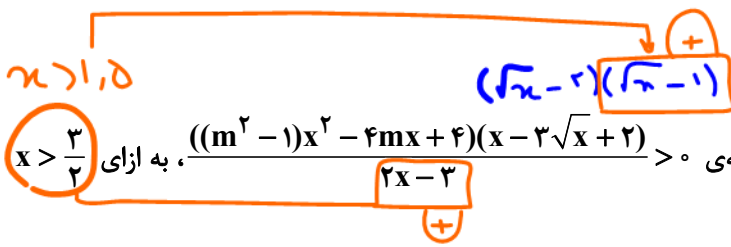


تست ۳۱: مجموع جواب نامعادلهی $x^2 - 2ax^2 + bx + c > 3$ به صورت $(-1, 1) \cup (1, +\infty)$ است. مقدار ac کدام است؟

$4 \quad (4) \qquad -4 \quad (3) \qquad 2 \quad (2) \qquad -2 \quad (1)$

تست ۳۲: فرض کنید مجموعه جواب نامعادلهی $((m^2 - 1)x^2 - 4mx + 4)(x - 2\sqrt{x} + 2) > 0$ ، به ازای $x > \frac{3}{2}$ بازه‌ی $[2, 4]$ باشد. مقدار m کدام است؟

$2 \quad (4) \qquad 1 \quad (3) \qquad \boxed{2} \quad \text{صفر} \qquad -2 \quad (1)$



x	0	2	3	4	
$\sqrt{x} - 2$		-	-	0	+
2		+	0	+	+
$(2\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2) > 0$		-	+	0	+

جواب

بافتارم \sqrt{x} باید $x \geq 0$

تست ۳۲: فرض کنید مجموعه جواب نامعادلهی $((m^2 - 1)x^2 - 4mx + 4)(x - 2\sqrt{x} + 2) > 0$ ، به ازای $x > \frac{3}{2}$ بازه‌ی $[2, 4]$ باشد. مقدار m کدام است؟

ریاضی (۱۴۰۰)

بافتارم \sqrt{x} باید $x \geq 0$

تست ۳۲: فرض کنید مجموعه جواب نامعادلهی $((m^2 - 1)x^2 - 4mx + 4)(x - 2\sqrt{x} + 2) > 0$ ، به ازای $x > \frac{3}{2}$ بازه‌ی $[2, 4]$ باشد. مقدار m کدام است؟

ریاضی (۱۴۰۰)

اول m را بیابیم $m = 0$ یا $m = 2$ درجه ۲ منفی

بافتارم \sqrt{x} باید $x \geq 0$

تست ۳۲: فرض کنید مجموعه جواب نامعادلهی $((m^2 - 1)x^2 - 4mx + 4)(x - 2\sqrt{x} + 2) > 0$ ، به ازای $x > \frac{3}{2}$ بازه‌ی $[2, 4]$ باشد. مقدار m کدام است؟

ریاضی (۱۴۰۰)

$m = 0$: $y = -x^2 + 4$

قواعد تعیین دامنه

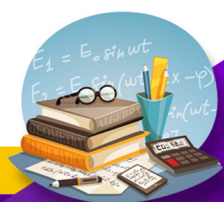
الف) توابع چند جمله‌ای: دامنه این توابع برابر با R است.

مثال ۳۳:

$f(x) = x^2 - 5x + 6$
 $f(x) = x + 1$
 $f(x) = 2$
 $f(x) = x^2 + 4x + 10$

$y = 2$

y از خازانه چند جمله‌ای هست

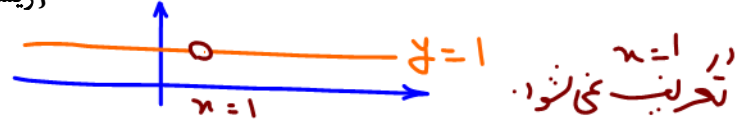


کرها را از خرج نگاه کن!

(ب) توابع کسری: اگر ضابطه f کسری باشد (تابع گویا)، x هایی که مخرج را صفر می کنند، قابل قبول نیستند.

$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ $D_f = \mathbb{R} - \{x | h(x) = 0\} = \mathbb{R} - \{\text{ریشه های مخرج}\}$

۱) $f(x) = \frac{x-1}{x-1} \Rightarrow x-1=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{1\}$



۲) $f(x) = \frac{x+5}{x^2-1} \Rightarrow x^2-1=0 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1 \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$

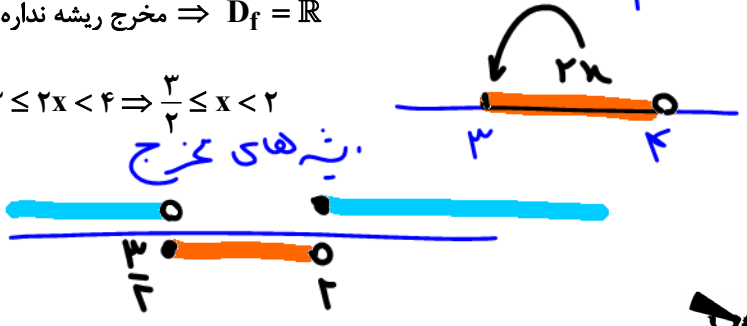
۳) $f(x) = \frac{1}{x^2+4x-5} \Rightarrow x^2+4x-5=0 \xrightarrow{a+b+c=0} x=1, x=-5 \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{-5, 1\}$



۴) $f(x) = \frac{1}{x^2+1} \Rightarrow x^2+1=0 \Rightarrow x^2=-1 \Rightarrow \text{غ.ق.ق. ندارد} \Rightarrow D_f = \mathbb{R}$

۵) $f(x) = \frac{1}{x^2+x+1} \Rightarrow x^2+x+1=0 \Rightarrow \Delta < 0 \Rightarrow \text{مخرج ریشه ندارد} \Rightarrow D_f = \mathbb{R}$

۶) $f(x) = \frac{x+1}{[2x-3]} \Rightarrow [2x]-3=0 \Rightarrow [2x]=3 \Rightarrow 3 \leq 2x < 4 \Rightarrow \frac{3}{2} \leq x < 2$



$\Rightarrow D_f = \mathbb{R} - [\frac{3}{2}, 2) = (-\infty, \frac{3}{2}) \cup [2, +\infty)$

۷) $f(x) = \frac{1}{[x] - \frac{1}{2}} \Rightarrow [x] = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{عدد صحیح}$

قبل از تعیین دامنه، حق ساده کردن عبارت را ندارید!

۸) $g(x) = \frac{1}{\frac{x-1}{2x} - \frac{1}{x-2}}$ $D_g = \mathbb{R} - \{0, 1, 2\}$

برای تعیین دامنه هرگز ساده نکن!

۹) $g(x) = \frac{\frac{x^2-1}{x-2}}{\frac{x-3}{x-4}}$ $D_g = \mathbb{R} - \{2, 3, 4\}$

- $\mathbb{R} - (a, b) = (-\infty, a] \cup [b, +\infty)$
- $\mathbb{R} - [a, b) = (-\infty, a] \cup (b, +\infty)$
- $\mathbb{R} - [a, b] = (-\infty, a) \cup [b, +\infty)$
- $\mathbb{R} - (a, b] = (-\infty, a) \cup (b, +\infty)$

(ج) توابع رادیکالی با فرجه زوج: در این توابع باید عبارت زیر رادیکال را بزرگتر یا مساوی صفر قرار دهیم:

$f(x) = \sqrt[k]{g(x)}$ $D_f = \{x | g(x) \geq 0\}$

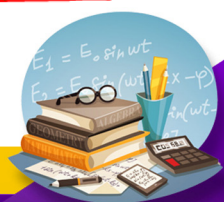
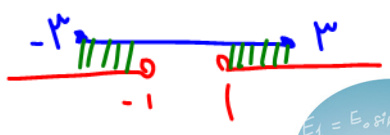
اگر رادیکال با فرجه زوج در مخرج کسر باشد، باید زیر رادیکال را فقط بزرگتر از صفر قرار دهیم:

۹) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow x > 0 \Rightarrow D_f = (0, +\infty)$

کسر 1/√x هم صورت هم محدبش مثبت ارزش آن نسبت د بالای محور x هست.

۱۰) $f(x) = \frac{\sqrt{9-x^2}}{\sqrt{x^2-1}}$ $\begin{cases} 9-x^2 \geq 0 \Rightarrow -3 \leq x \leq 3 \\ x^2-1 > 0 \Rightarrow x < -1 \text{ یا } x > 1 \end{cases} \Rightarrow D_f = [-3, -1) \cup (1, 3]$

$\begin{cases} u^2 < a^2 \rightarrow |u| < a \rightarrow -a < u < a \\ u^2 = a^2 \rightarrow |u| = a \rightarrow u = \pm a \\ u^2 > a^2 \rightarrow |u| > a \rightarrow u < -a \text{ یا } u > a \end{cases}$



محاولی که دامنه را محو می کنند: $D_f = D_{|f|} = D_{[f]} = D_{\sin f} = D_{\cos f} = D_{f^2} = D_{f^3} = D_{f^4} = D_{f^5} = D_{f^6} = D_{f^7} = D_{af} = D_{af+b} = D_{\sqrt[n]{f}}$

۱۱) $f(x) = \sqrt{\frac{x-3}{x+4}} \Rightarrow \frac{x-3}{x+4} \geq 0$

	-4	3	4
	+	-	+

$D_f = (-\infty, -4) \cup [3, +\infty)$

دامنه $f(x) = 5 \left[\sin \left(\cos \left| \sqrt{\frac{1}{x}} \right| \right) \right] + 7$

$D_f: \mathbb{R} - \{0\}$

(د) توابع رادیکالی با فرجه فرد: برای تعیین دامنه توابع رادیکالی با فرجه فرد، رادیکال را نادیده می گیریم:

- $f(x) = \sqrt[k]{g(x)} \quad D_f = D_g$
- ۱۲) $f(x) = \sqrt{x^2 + x - 12}$ $D_f: \mathbb{R} - \{-3, -4\}$
- ۱۳) $f(x) = \sqrt{5x^2 - 7} \Rightarrow D_f = \mathbb{R}$
- ۱۴) $f(x) = \sqrt{\frac{1}{x-1}} \Rightarrow x-1=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{1\}$
- ۱۵) $f(x) = \frac{1-x}{\sqrt{x}}$ $D_f: \mathbb{R} - \{0\}$

در تعیین دامنه توابع $f(x) = |g(x)|, f(x) = [g(x)]$ قدرمطلق و براکت را نادیده می گیریم یعنی $D_f = D_g$ است:

- ۱۶) $f(x) = [\sqrt{x}] \Rightarrow D_f = x \geq 0$
- ۱۷) $f(x) = \left[\frac{1}{x} \right] \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{0\}$
- ۱۸) $f(x) = \frac{1}{[x]} \Rightarrow [x] = 0 \Rightarrow 0 \leq x < 1 \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - [0, 1)$
- ۱۹) $f(x) = \frac{\sqrt{9-x^2}}{|x-1|}$

[جزء صحیح با براکت: آن عدد صحیح بزرگترین است که از عدد اعشاری قبلی رو سینه

از عدد اعشاری بزرگتر عدد صحیح قبلی رو سینه

$[-2, 3] = -2$

تست ۳۴: دامنه تابع با ضابطه $f(x) = \frac{1}{x^2 - (a+1)x - b}$ به صورت $\mathbb{R} - \{-1, 6\}$ است. مقدار $a+b$ کدام است؟

۱۲ (۴) ۱۰ (۳) ۸ (۲) ۶ (۱)

Setting \rightarrow کدر از خروجی نه کن

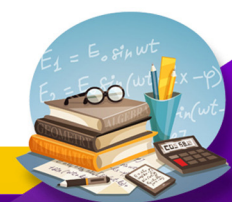
با فرض $f(x) = \frac{1}{(x+1)(x-7) = x^2 - 5x - 7}$

مقایسه کن

$a+1 = 5 \rightarrow a = 4$

$b = -7$

$a+b = -3$



تست ۳۵: اگر دامنه تابع $f(x) = \frac{x}{2x^2 + ax + b}$ برابر $R - \{-2\}$ باشد، $b + a$ چه قدر است؟

۴ (۴) ۲۰ (۳) ۱۶ (۲) ۸ (۱)

$x = -2$ تنها ریشه خارج کسرت پس خارج کننده ۲ است باید ریشه مضرب دارد.

$$2(x+2)^2 = 2(x^2 + 4x + 4)$$

$$2x^2 + 8x + 8$$

مقایسه با خارج

$$a = 8 = b$$

$$a + b = 16 \quad \text{جواب}$$

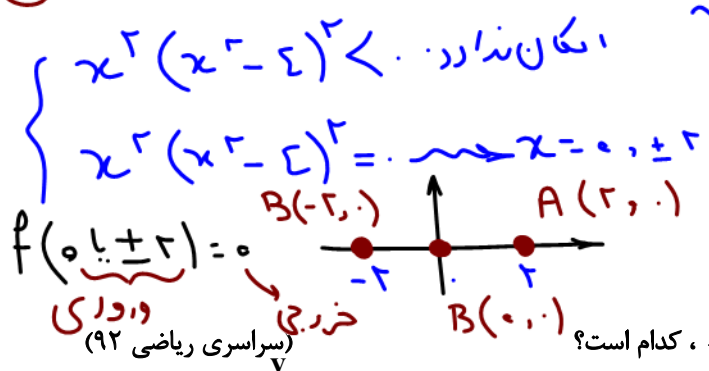
تست ۳۶: دامنه تابع $y = \sqrt{-x^2(x^2 - 4)^2}$ چند عضو دارد؟

۴ بی شمار ۳ (۳) ۱ (۲) ۱ (۱) صفر

طرفین فنبره (-) جهت نام یی عوض بیند

$$x^2(x^2 - 4)^2 \leq 0$$

زیرا اعداد منفرجه



گزینه ۳ صحیح است

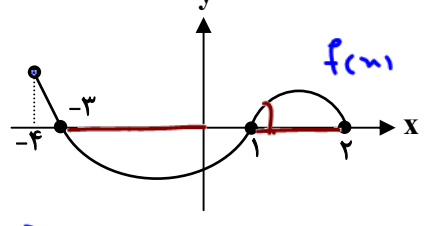
$D_f = \{0, \pm 2\}$

$R_f = \{0\}$

بد تداقه صفر دارد.

تست ۳۷: شکل روبه رو نمودار تابع $y = f(x)$ است. دامنه تابع $\sqrt{xf(x)}$ کدام است؟

- (۱) $[0, 2]$
- (۲) $[-3, 2]$
- (۳) $[-4, -3] \cup [1, 2]$
- (۴) $[-3, 0] \cup [1, 2]$ ✓



$x f(x) \geq 0$

پس x و $f(x)$ باید هم علامت باشند

هر دو مثبت یا هر دو منفی باشند

Setting → نمودار را از چپ به راست نگاه کن

$f(x)$ مثبت بالای x هاست

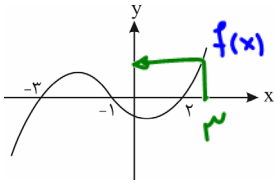
$f(x)$ منفی زیر x هاست

$f(x)$ صفر روی x هاست



(خارج ریاضی ۹۷)

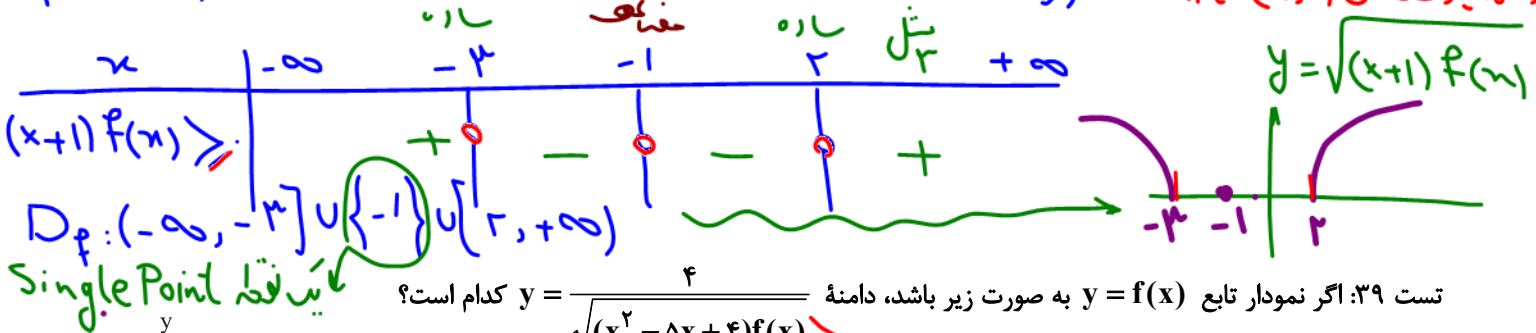
تست ۳۸: شکل زیر، نمودار تابع با ضابطه $y = f(x)$ است. دامنه تابع غیر نقطه‌ای $\sqrt{(x+1)f(x)}$ کدام است؟



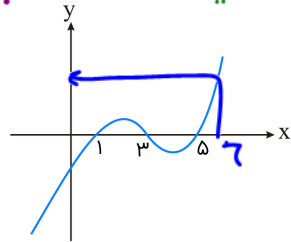
$$(x+1)f(x) \geq 0 \begin{cases} x+1=0 \rightarrow x=-1 \\ f(x)=0 \rightarrow x=-3, -1, 2 \end{cases}$$

- (۱) $[-3, 2]$
- (۲) $[-1, +\infty)$
- (۳) $(-\infty, -1]$
- (۴) $\mathbb{R} - (-3, 2)$ ✓

دامنه غیر نقطه‌ای $\mathbb{R} - (-3, 2)$ است. اصغر کرده است. $f(x)$ و $x+1$ زیرا هم $(x+1)f(x)$ است. $x = -1$ و $x = -3$ را در نظر بگیریم.



تست ۳۹: اگر نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت زیر باشد، دامنه $y = \frac{f}{\sqrt{(x^2 - 5x + 4)f(x)}}$ کدام است؟



$$(x-1)(x-5)f(x) > 0$$

- (۱) $(4, +\infty)$
- (۲) $(-\infty, 1)$
- (۳) $(1, 3) \cup (5, +\infty)$
- (۴) $(3, 4) \cup (5, +\infty)$ ✓



تست ۴۰: اگر دامنه $f(x) = \sqrt{(2a-3)x^2 + 4ax + 2a-3}$ مجموعه اعداد حقیقی باشد، حدود a کدام است؟

- (۱) $0 \leq a < \frac{3}{2}$
- (۲) $a \in \mathbb{R}$
- (۳) $\{ \}$
- (۴) $a \geq \frac{3}{2}$

پاسخ: گزینه «۳» - برای این که دامنه \mathbb{R} باشد، باید زیر رادیکال همواره نامنفی باشد.

$$(2a-3)x^2 + 4ax + 2a-3 \geq 0$$

برای آن که نامعادله درجه دو نامنفی باشد، باید ضریب x^2 مثبت و دلتای عبارت درجه دوم منفی یا صفر باشد.

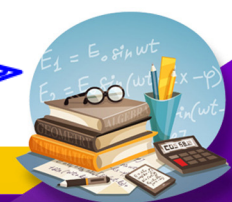
دانه به بالا

$$\begin{cases} 2a-3 > 0 \Rightarrow a > \frac{3}{2} \quad (1) \\ \Delta \leq 0 \Rightarrow (4a)^2 - 4(2a-3)(2a-3) \leq 0 \Rightarrow 16a^2 - 4(4a^2 - 12a + 9) \leq 0 \Rightarrow -4(-12a + 9) \leq 0 \Rightarrow a \leq \frac{3}{2} \quad (2) \end{cases}$$

شرط $\frac{3}{2} > a > \frac{3}{2}$ (impossible) and $\frac{3}{2} \geq a \geq \frac{3}{2}$ (impossible). Final result: $a = \frac{3}{2}$.

(۱) ∩ (۲) = ∅

نتیجه درجه دوم داریم:



از طرفی $D_g = \mathbb{R}$ پس $D_f = \mathbb{R}$ ، یعنی مخرج تابع f نباید دارای ریشه باشد.

$$x^2 + x - a \neq 0 \Rightarrow \Delta < 0 \Rightarrow 1 + 4a < 0 \Rightarrow a < -\frac{1}{4} \Rightarrow a = -1$$

تست ۴۴: کدام دو تابع با هم، برابرند؟

$$g(x) = \frac{x}{\frac{2+x}{1-x}}, f(x) = \frac{x(x+1)}{(1-x)(2+x)} \quad (2)$$

$$g(x) = x\sqrt{x} \cdot \sqrt{x+1}, f(x) = x\sqrt{x^2+x} \quad (1)$$

$$g(x) = 0, f(x) = \left[\frac{x^2+1}{x^2+2} \right] \quad (4)$$

$$g(x) = \cos x, f(x) = \sqrt{1-\sin^2 x} \quad (3)$$

۱) $g(x) = x\sqrt{x}\sqrt{x+1} \geq 0$
 $(x \geq 0) \wedge (x \geq -1) = D_g: [0, +\infty)$

$f(x) = x\sqrt{x^2+x} = x(x+1) \geq 0$
 $x(x+1) \geq 0 \Rightarrow x \leq -1 \vee x \geq 0$
 $D_f: (-\infty, -1] \cup [0, +\infty) \neq D_g$
 برابر نیستند.

۲) $D_g: \mathbb{R} - \{-2, 1, -1\} \neq D_f: \mathbb{R} - \{1, -2\}$
 برابر نیستند.

۳) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad f(x) = \sqrt{1-\sin^2 x} = \cos^2 x = |\cos x| \neq g(x) = \cos x$
 برابر نیستند.

۴) $g(x) = \dots = f(x) = \left[\frac{x^2+1}{x^2+2} < 1 \right] = 0 \rightarrow$ **دو تابع همواره مساوی هستند**
 $D_g = \mathbb{R} = D_f: \mathbb{R}$
 کسر کمتر از ۱ است \rightarrow **همیشه مساوی هستند**

$am - bn =$
 $\frac{1}{\frac{m}{r}} - 10 =$
 $\frac{m}{r} - 10 = -\frac{27}{r}$

تست ۴۵: اگر دو تابع $g(x) = \frac{x-b}{2x^2-3x-5}$ و $f(x) = \frac{ax+2}{x^2-mx+n}$ مساوی باشند، حاصل $am - bn$ کدام است؟ **VIP**

$\frac{23}{2}$ (۴) $-\frac{27}{4}$ (۳) $\frac{17}{2}$ (۲) $-\frac{29}{4}$ (۱)

$D_g: \mathbb{R} - \{-1, \frac{5}{2}\} \stackrel{!}{=} D_f$ $f(x) = \frac{\dots}{(x+1)(x-\frac{5}{2})}$
 مخارج f باید دور $x = -1$ و $x = \frac{5}{2}$ باشد.

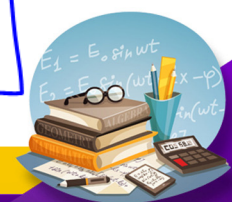
$g(x) = \frac{x-b}{2x^2-3x-5} = \frac{1}{2} \frac{(x-b)}{x^2-\frac{3}{2}x-\frac{5}{2}} = f(x) = \frac{ax+2}{x^2-mx+n}$

مخارج f $\left\{ \begin{array}{l} x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{5}{2} \\ x^2 - mx + n \end{array} \right.$ ضرایب کتبی با هم برابرند:

$m = \frac{3}{2}$
 $n = -\frac{5}{2}$

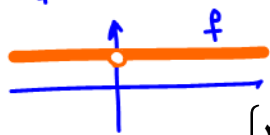
برای این که مخارج ها هم شکل شوند از کد ۲، از مخارج ضرایب برابر

$\frac{1}{2} = a$
 $-\frac{b}{2} = 2 \rightarrow b = -4$



آیا $f(x) = \frac{x}{x-1}$ با $g(x) = 1$ برابریت؟
 $D_f: \mathbb{R} - \{1\} \neq D_g: \mathbb{R}$
 برابر نیستند.

$f(x) = \frac{x}{x-1} = 1$
 $x \neq 1$



تست ۴۶: به ازای کدام مقدار k ، دو تابع $f(x) = 2x - 1$ و $g(x) = \begin{cases} \frac{4x^2 - 1}{2x + 1}, & x \neq -\frac{1}{2} \\ 1 - k, & x = -\frac{1}{2} \end{cases}$ برابرند؟

- (۱) -۳ (۲) ۳ (۳) صفر (۴) -۱

چون دو تابع برابرند بایه به ازای $x = -\frac{1}{2}$ هر دو یک چیز برابر بشوند:
 $g(x = -\frac{1}{2}) = 1 - k = f(x = -\frac{1}{2}) = 2(-\frac{1}{2}) - 1 = -2$
 $1 - 2 = k \rightarrow \boxed{k = -1}$

تابع گویا (مخبر اربابی)

هر تابع کسری که صورت و مخرج آن چند جمله‌ای‌های جبری باشند به طوری که مخرج صفر نشود، تابع گویا نام دارد.

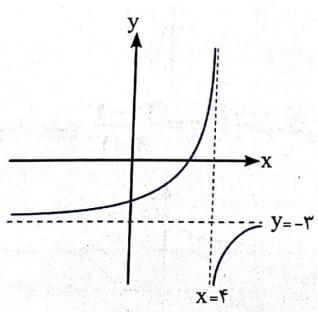
همه کدافید ساره

ساده‌ترین تابع گویا $f(x) = \frac{1}{x}$ با دامنه‌ی $\mathbb{R} - \{0\}$ است که به صورت $x = 0$ در ریشه مخرج که تعریف نمی‌شود استفاده از انتقال رسم می‌کنیم.

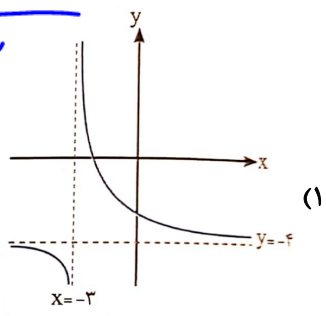
می‌باشد. حال با توجه به این تابع، بقیه را با

$x = 0$ طول (ایکس) نامرئی تابع $\frac{1}{x} = \frac{1}{x}$ است
 حیاتی
 انفصال

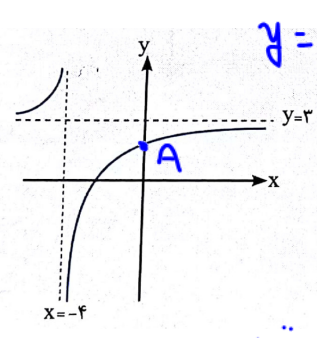
تست ۴۷: نمودار $y = \frac{1}{x+4} - 3$ در کدام گزینه به درستی نمایش داده شده است؟



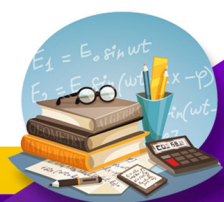
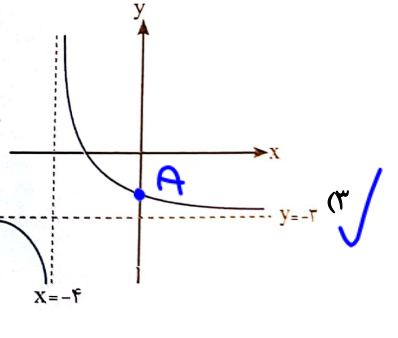
اولاً در $x = -4$ تعریف نمی‌شود
 یا گزینه ۳ درسته
 یا گزینه ۴ درسته



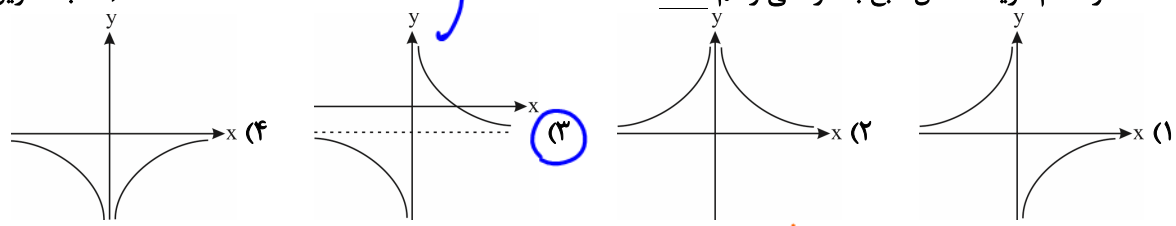
دقت: در کسرها اول به ریشه‌های مخرج نگاه کن
 😊



به ضابطه $y = \frac{1}{x+4} - 3$ در $x = 0$ می‌دهیم
 $A(0, \frac{1}{4} - 3 = -\frac{11}{4})$
 که با گزینه ۳ سازگار است



تست ۴۸: در کدام گزینه، شکل تابع به درستی رسم نشده است؟

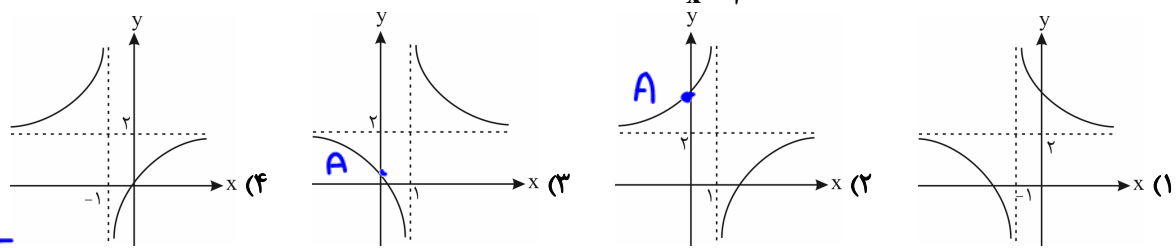


مشابه تمرین کتاب درسی)
قدر منفی جزوه
 $y = -\frac{1}{|x|}$
قدر مثبت $y = \frac{1}{|x|}$ است
نبت به کمر آه

$y = \frac{1}{x+1}$
همان $y = \frac{1}{x}$ است که بیه یک واحد به سمت چپ برود
دایره ابر $x = -1$ تقوینت

اگر $y = -\frac{1}{x}$ را از \ominus فتن بگیریم هوجا
بالای x هالت میاد زیر x هاد بر مکن
 $y = \frac{1}{x}$
 $y = -\frac{1}{x}$

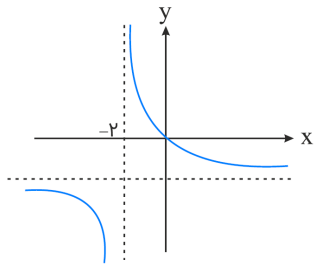
تست ۴۹: کدام یک از گزینه‌های زیر نمودار تابع $y = \frac{2x-1}{x-1}$ را به درستی نمایش می‌دهد؟



$y = \frac{2x-1}{x-1}$
 $A(0, 1)$
عمل بر خود در تابع با محور
یها

$y = \frac{2x-1}{x-1}$ در $x=1$ تعریف نمی‌شود پس یا گزینیه ۲ در رسته یا گزینیه ۳
 $A(0, 1)$ در تابع صافه که تقو با گزینیه ۳ سازگار است

تست ۵۰: اگر نمودار تابع $f(x) = \frac{x+a}{bx-2}$ به صورت زیر باشد، $f(1)$ کدام است؟



بی بیتم شکل در $x = -2$ تعریف نشده است.
پس $x = -2$ رینه مخج کمریت $b(x-2) - 2 = 0$
 $-2b = 2 \rightarrow b = -1$

- (۱) -۱
- (۲) $-\frac{1}{2}$
- (۳) $-\frac{3}{2}$
- (۴) $-\frac{1}{3}$ ✓

بی بیتم تابع از مبداء $(0, 1)$ عبور کرده است پس
 $f(0) = \frac{x+a}{bx-2} = 0 \rightarrow a = 0$
 $f(x) = \frac{x}{-x-2} = -\frac{x}{x+2}$
 $f(1) = \frac{1}{-1-2} = -\frac{1}{3}$



تست ۵۱: اگر $f = \{(1, 4), (2, 3), (5, 1), (4, 2)\}$ و $g(x) = \frac{x+1}{x-1}$ باشد، کدام مجموعه‌ی زیر نشان‌دهنده‌ی تابع $f + g$ می‌باشد؟

۱) $\{(2, 6), (5, \frac{5}{4}), (4, \frac{11}{3})\}$ ✓
 ۲) $\{(2, 6), (5, \frac{5}{4})\}$ نکلنه: $f + g$ در اینجایی روی بدنه‌های دوم اینجایی می‌شود.
 ۳) $\{(2, 6), (5, 10), (4, 11)\}$
 ۴) $\{(2, 4), (5, 1), (4, 10)\}$

$$f = \{(1, 4), (2, 3), (5, 1), (4, 2)\} \quad f + g = \{(2, 3 + \frac{3}{1}), (5, 1 + \frac{4}{4}), (4, 2 + \frac{5}{3})\}$$

اعمال روی توابع ← جمع عمل یعنی چهار عمل اصلی $\frac{+}{x}$

اگر f و g دو تابع باشند، آن‌گاه جمع، تفاضل، ضرب و تقسیم این دو تابع به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \times g(x)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

دامنه‌ی توابع $f \pm g$ و $f \cdot g$ اشتراک دامنه‌های f و g است و دامنه‌ی $\frac{f}{g}$ اشتراک دامنه‌های f و g است به‌جز نقاطی که $g(x) = 0$.

اگر توابع f و g به‌صورت زوج‌های مرتب مطرح شوند، مثلاً $f = \{(a, b), (1, 2)\}$ و $g = \{(a, c), (2, 1)\}$ ، منظور از $f + g$ آن است که مؤلفه‌های دوم زوج‌های مرتبی از f و g را که دارای مؤلفه‌های اول یکی هستند (اشتراک دامنه‌ها)، با هم جمع کنیم. یعنی:

$$f + g = \{(a, b + c)\}$$

و به همین ترتیب $f - g$ ، $f \cdot g$ و $\frac{f}{g}$ عبارت است از:

$$f - g = \{(a, b - c)\} \quad , \quad f \cdot g = \{(a, b \times c)\} \quad , \quad \frac{f}{g} = \left\{ \left(a, \frac{b}{c} \right) \right\} \quad , \quad c \neq 0$$

حواستون باشه که دو زوج مرتب $(1, 2)$ و $(2, 1)$ در f و g ، چون مؤلفه‌های اول یکسان ندارند در $f \pm g$ و $f \cdot g$ و $\frac{f}{g}$ به بازی گرفته

نمی‌شن!

تذکره: $(kf)(x) = kf(x)$ و $D_{kf} = D_f$ و منظور از $(kf)(x)$ آن است که اعضای برد f در k ضرب شوند. مثلاً:

$$f = \{(a, b), (1, 2)\} \Rightarrow 3f = \{(a, 3b), (1, 6)\}$$

تست ۵۲: اگر $f(x) = \sqrt{x+1}$ و $g(x) = \frac{x+1}{x-2}$ ، مقدار $(2f - g)(3)$ کدام است؟

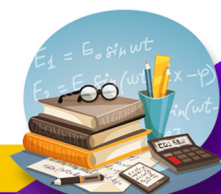
۲ (۴)

۱ (۳)

۰ (۲) ✓

-۱ (۱)

$$2f(3) - g(3) = 2\sqrt{3+1} - \frac{3+1}{3-2} = 2\sqrt{4} - \frac{4}{1} = 2(2) - 4 = 4 - 4 = \text{صفر}$$



تست ۵۳: اگر $f = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$ و $g = \{(1, 5), (2, 6), (3, 0)\}$ باشد، آن گاه تابع $\frac{2f}{g}$ کدام است؟

\emptyset (۱) $\{(1, \frac{4}{5}), (3, 1)\}$ (۲) $\{(1, \frac{4}{5}), (2, \frac{1}{6})\}$ (۳) $\{(2, 1), (1, \frac{4}{5})\}$ (۴)

$2f = \{(1, 4), (2, 6), (3, 8)\}$

$g = \{(1, 5), (2, 6), (3, 0)\}$

$\frac{2f}{g} = \{(1, \frac{4}{5}), (2, \frac{6}{6})\}$ ~~$(3, \frac{8}{0})$~~ نتیجه

تست ۵۴: اگر $f = \{(4, 3), (3, 1), (5, 4)\}$ و $2f - g = \{(3, 6), (4, 4)\}$ باشد، تابع $\frac{f}{g}$ کدام است؟

$g = \{(4, 9), (3, 6)\}$ تابع g را به صورت $\{(3, -\frac{1}{4})\}$ (۲) نتیجه
در نظریه بگیریم $\{(4, \frac{3}{4})\}$ (۴)

$2f = \{(8, 6), (6, 2), (10, 8)\}$ (۱)
 $\{(3, -\frac{1}{4}), (4, \frac{3}{4})\}$ (۲)
 $\{(3, \frac{3}{8}), (4, \frac{3}{4})\}$ (۳)

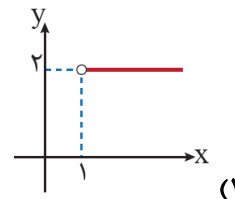
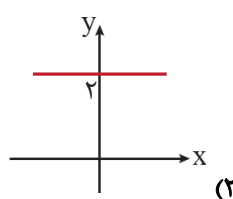
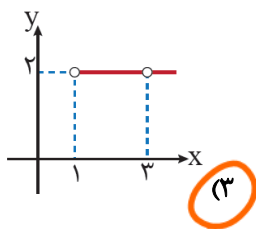
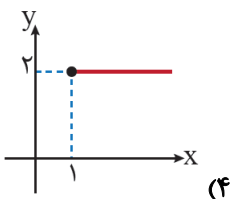
$2f - g = \{(4, 7-9), (3, 2-6)\}$

$2f - g = \{(4, 2), (3, -4)\}$

$7-9 = 2 \rightarrow 9-2 = 7$
 $2-6 = -4 \rightarrow 6-(-4) = 10$

$g = \{(4, 7), (3, -4)\}$ $\frac{f}{g} = \{(4, \frac{3}{7}), (3, -\frac{1}{4})\}$

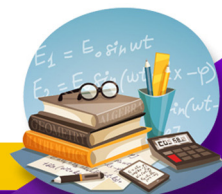
تست ۵۵: اگر $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{x-3}$ و $g(x) = \frac{2x-6}{\sqrt{x-1}}$ ، آن گاه نمودار تابع $f \cdot g$ کدام است؟



راه سریع: $x=3$ نباید در جواب پذیری باشد چون ریشه حجت است. لذا گزینه ۳ درسته!

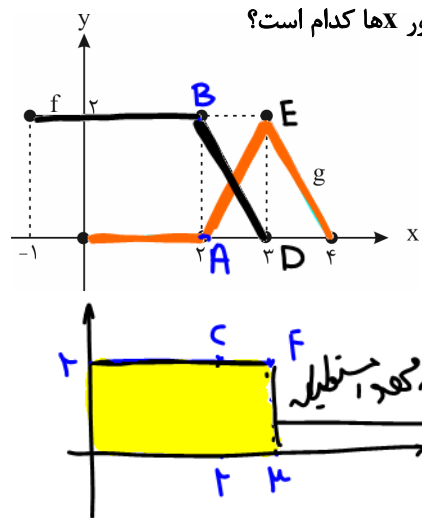
$D_{f \cdot g} = D_f \cap D_g = ([1, +\infty) - \{3\}) \cap ([1, +\infty)) = ([1, +\infty) - \{3\})$

$y = f \cdot g = \frac{\sqrt{x-1}}{x-3} \cdot \frac{2(x-3)}{\sqrt{x-1}} = 2$ تابع ثابت ۲، اما توجه به $D_{f \cdot g}$ باشد.



اسم منحل از (ح ص ر) یعنی گیر افتاده

تست ۵۶: اگر نمودار توابع f و g به صورت زیر باشد، مساحت محصور بین نمودار تابع f + g و محور xها کدام است؟



$$D_{f+g} = D_f \cap D_g = [-1, 3] \cap [0, 3] = [0, 3]$$

y = 2: 2 <= x < 3

$$(A|_2 \in g) (B|_2 \in f)$$

$$S = 2(3) = 6$$

$$(D|_3 \in f) (E|_3 \in g)$$

- (۱) ۳/۲
- (۲) ۶ ✓
- (۳) ۵/۲
- (۴) ۱۸

تست ۵۷: توابع $f(x) = \frac{x+1}{x}$ و $g(x) = \frac{x^2+1}{x}$ مفروض اند. برد تابع f - g کدام است؟

- (۱) $\mathbb{R} - \{0\}$
- (۲) $\mathbb{R} - \{1\}$ ✓
- (۳) $\mathbb{R} - \{-1\}$
- (۴) \mathbb{R}

اول $y = f - g$ را می سازیم. آن را رسم می کنیم روی محور yها. آن را پیرس می کنیم هر جا که برد است:

$$y = f - g = \frac{x+1}{x} - \frac{x^2+1}{x} = \frac{x+1-x^2-1}{x} = \frac{x-x^2}{x} = \frac{x(1-x)}{x} = 1-x$$

خط خط $x=0$ است که تازه در تعریف نداشتیم

$D_{f-g}: \mathbb{R} - \{0\}$

$R_{f-g}: \mathbb{R} - \{y=1\}$

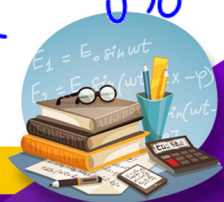
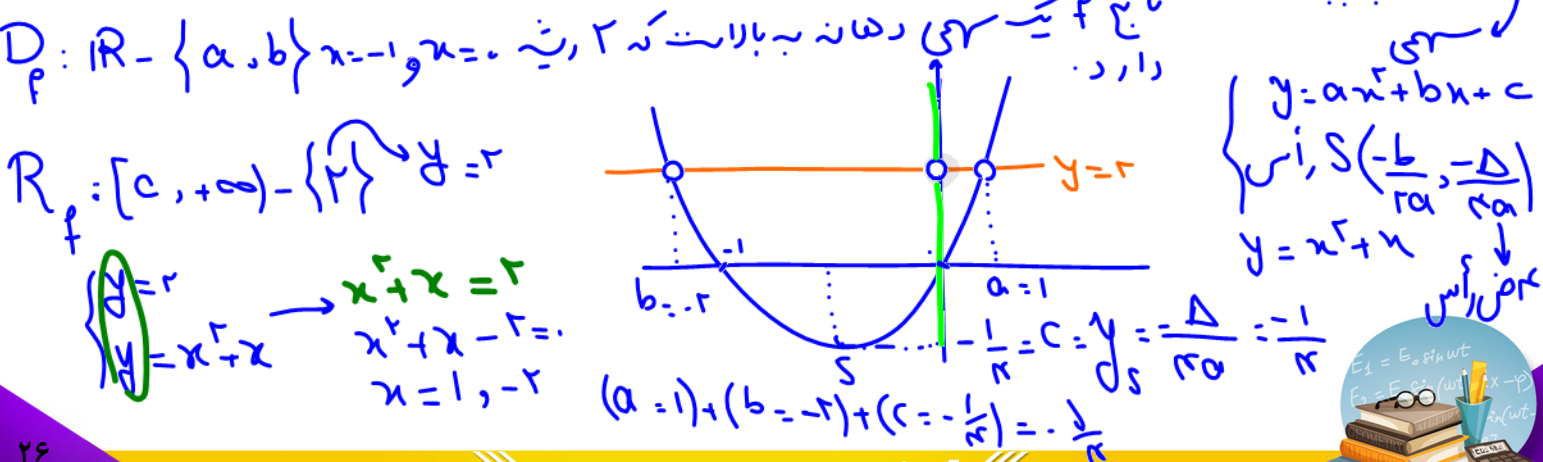
تست ۵۸: تابع $f(x) = \frac{x^2-x}{x-1}$ با دامنه $\mathbb{R} - \{a, b\}$ و برد $[c, +\infty) - \{2\}$ مفروض است. حاصل a + b + c کدام است؟

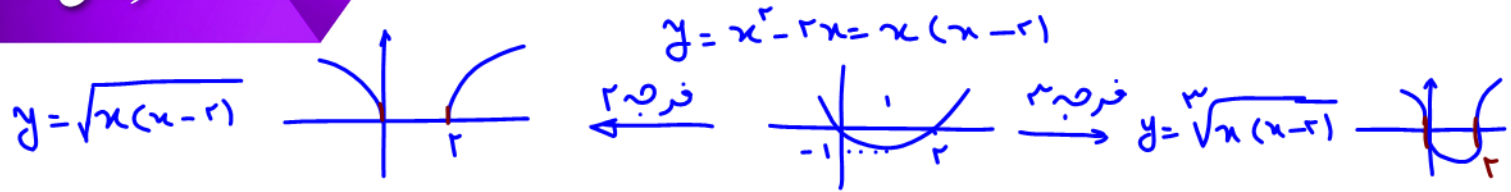
$$f(x) = \frac{x^2-x}{x-1} = \frac{x(x-1)}{x-1} = x$$

توابع f = x

دامنه $D_f: \mathbb{R} - \{a, b\}$ که $x=0$ و $x=-1$ را حذف کرده ایم

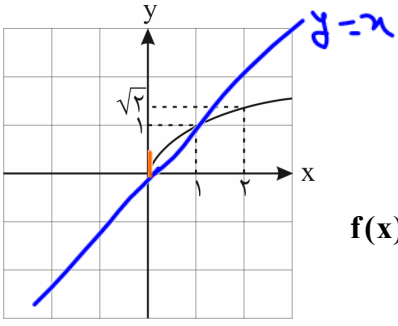
برده $R_f: [c, +\infty) - \{2\}$ که $y=2$ را حذف کرده ایم



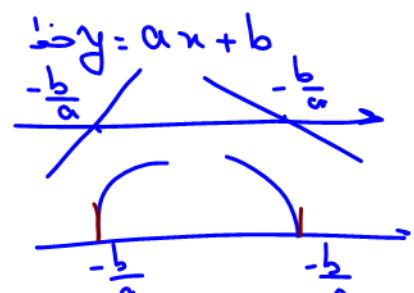


تابع رادیکالی

هر تابع به صورت $f(x) = \sqrt{p(x)}$ (یک تابع از x است) را یک تابع رادیکالی (ریشه دوم) می نامیم. برای محاسبه دامنه ی این نوع توابع باید نامعادله ی $p(x) \geq 0$ را حل کرد. به طور مثال به تابع زیر و نمودار آن توجه کنید:

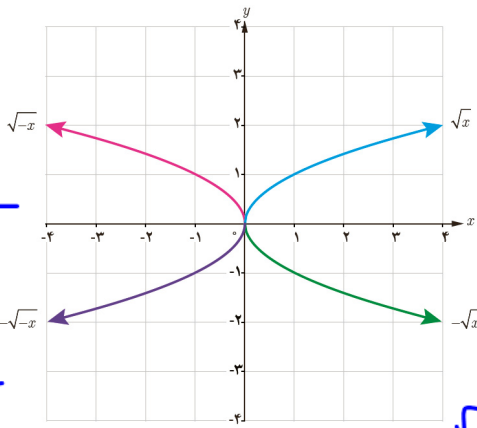


$f(x) \geq 0$ ارزش تابع $\sqrt{\dots}$ مثبت باشد.



اکنون با استفاده از قوانین انتقال می توانیم توابع رادیکالی به صورت $k\sqrt{ax+b}$ را رسم کنیم. مثال ۵۹: نمودار توابع $\sqrt{-x}$ و $-\sqrt{x}$ و $-\sqrt{-x}$ را به کمک نمودار تابع \sqrt{x} رسم کنید.


قرینه محوری
 $\sqrt{-x}$ قرینه \sqrt{x} نسبت به محور y ها
 $-x \geq 0$
 $x \leq 0$



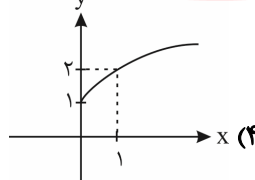
آنگاه تابع در علامت \ominus ضرب شود
 نسبت به محور x ها قرینه می شود
 مثل $\sqrt{-x}$ - که قرینه \sqrt{x} نسبت به x است
 قرینه محوری

آنگاه هم x را به $-x$ تبدیل کنیم
 و هم کل تابع را در \ominus ضرب کنیم
 شکل نسبت به مبدأ مختصات قرینه می شود
 (قرینه مرکزی)

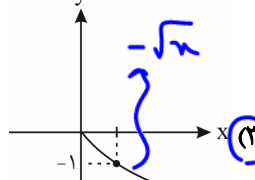
آنگاه x به $-x$ تبدیل شود ($x \rightarrow -x$)
 x ها رو بری داریم به جاش $-x$ می داریم
 شکل نسبت به محور y ها قرینه می شود مثل $\sqrt{-x}$
 تست ۶: در کدام گزینه، نمودار تابع صحیح رسم نشده است؟



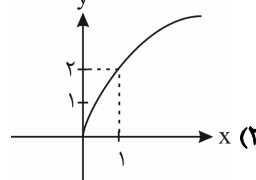
$y = \sqrt{x+1} - 1$
 یک کپی و واحد بالا برده
 به چپ برده



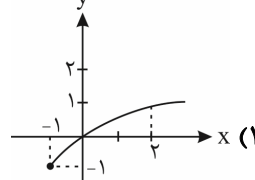
$y = \sqrt{x+1}$
 یک کپی و واحد بالا برده
 فرق این ۲ تارو ببینید



$y = \sqrt{x} - 1$
 عرض های \sqrt{x} منفرجه

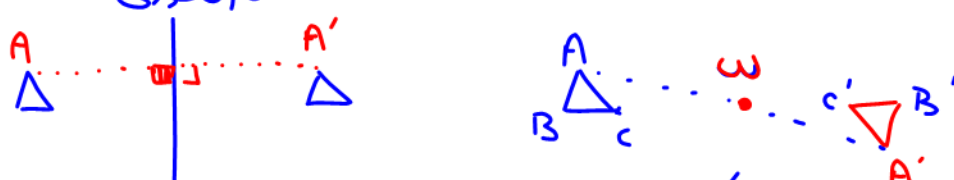


$y = 2\sqrt{x}$
 عرض های \sqrt{x} منفرجه

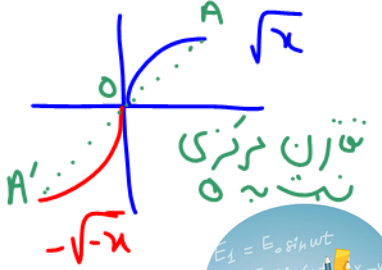
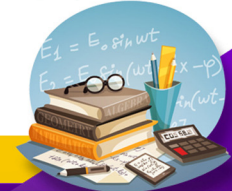


$y = \sqrt{x+1} - 1$
 همون \sqrt{x} که واحد به چپ برده و واحد پایین

تقارن محوری



تقارن مرکزی
 از A به نقطه A' وصل و به A از O خوارشانی
 از A به محور xy وصل و به A از O خوارشانی

$y = \sqrt{x-1} - (x-1) \xrightarrow{\sqrt{x-1}=t} t - t^2 = t(1-t) = \begin{cases} t=0 \\ t=1 \end{cases}$
 سه دهانه به پایین با رأس $t=0$ و $t=1$ داریم



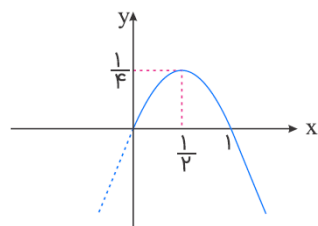
تست ۶۱: برد تابع $f(x) = \sqrt{x-1} + 1 - x$ کدام است؟

- گزینه ۱: $(-\infty, \frac{1}{4}]$ (۱) ✓ **گزینه ۱**
- گزینه ۲: $[0, +\infty)$ (۲)
- گزینه ۳: $(-\infty, \frac{1}{4})$ (۳)
- گزینه ۴: $(-\infty, 1]$ (۴)

$y = t - t^2$

پاسخ: گزینه «۱» - با تغییر متغیر $t = \sqrt{x-1}$ ضابطه تابع به صورت زیر درمی آید:

برد سهمی فوق با دامنه $[0, +\infty)$ ، برابر برد تابع f است. این سهمی در شکل زیر رسم شده است:



برد سهمی فوق و در نتیجه برد f برابر $(-\infty, \frac{1}{4}]$ است.

$y = \frac{\sqrt{x-2}-1}{|2-x|-x} \xrightarrow{x \geq 2} \frac{\sqrt{x-2}-1}{-2+x+x} = -\frac{1}{4}(\sqrt{x-2}-1)$

تست ۶۲: برد تابع $f(x) = \frac{\sqrt{x-2}-1}{|2-x|-x}$ کدام است؟

گزینه ۱: $(-\infty, \frac{1}{4}]$ (۱)

گزینه ۲: $[\frac{1}{4}, +\infty)$ (۲)

گزینه ۳: $(-\infty, 1]$ (۳)

گزینه ۴: $[1, +\infty)$ (۴)

پاسخ: گزینه «۱» - به ازای مقادیر $x \geq 2$ عبارت زیر رادیکال نامنفی است و داریم $|2-x| = x-2$ و تابع به صورت زیر ساده می شود:

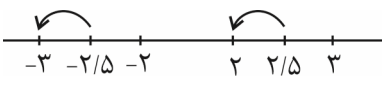
$f(x) = \frac{\sqrt{x-2}-1}{|2-x|-x} = \frac{\sqrt{x-2}-1}{x-2-x} = \frac{\sqrt{x-2}-1}{-2}$

تابع را با توجه به دامنه یعنی $x \geq 2$ می سازیم: **دقت!**

$x \geq 2 \Rightarrow \sqrt{x-2} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x-2}-1 \geq -1 \Rightarrow \frac{\sqrt{x-2}-1}{-2} \leq \frac{1}{4} \Rightarrow f(x) \leq \frac{1}{4} \Rightarrow R_f = (-\infty, \frac{1}{4}]$

راه ۲: راه رسم به کمک انتقال زیرصفتی جزء صحیح

جزء صحیح هر عددی مانند x را به شکل $[x]$ نمایش می دهیم و به این صورت تعریف می کنیم که اگر x عدد صحیح باشد جزء صحیح آن با خودش برابر است. مثلاً $[2] = 2$ و اگر x عددی غیر صحیح باشد، اولین عدد صحیح قبل آن، برابر جزء صحیح x است. مثلاً $[2/5] = 0$ و $[-2/5] = -1$ می باشد.



خاصیت جزء صحیح

(۱) خروجی جزء صحیح همواره یک عدد صحیح است، یعنی برای هر $x \in \mathbb{Z} : x \in \mathbb{R}$ مثلاً $[4] = 4$ و $[3/14] = 0$

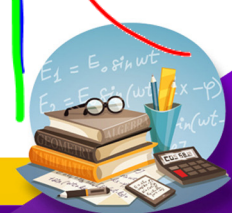
(۲) اگر عبارت داخل جزء صحیح یک عدد صحیح باشد می توانیم جزء صحیح را حذف می کنیم. یعنی برای هر $x \in \mathbb{Z}$ داریم: $[x] = x$

(۳) اعداد ثابت و عبارت هایی که مطمئن هستیم صحیح هستند می توانیم از جزء صحیح خارج کنیم یعنی اگر $k \in \mathbb{Z}$ باشد $[x+k] = [x] + k$ است.

مثلاً $[x+3]$ همان $[x]+3$ است. به مثال های زیر توجه کنید:

$\in \mathbb{Z}$
 ۱) $[x + [x]] = [x] + [x] = 2[x]$
 ۲) $[x + 2[x]] = [x] + 2[x] = 3[x]$

$f(x) = \frac{\sqrt{x-2}-1}{-2}$ به دامنه با پس $\sqrt{x-2}-1$
 $-\frac{(\sqrt{x-2}-1)}{2}$
 Diagrams showing the integer part of the function for different values of x.



$$3) [x - \underbrace{[x]}_{\in \mathbb{Z}}] = [x] - [x] = 0$$

$$[2x] = [x] + [x + \frac{1}{2}]$$

۴) خاصیت روبه‌رو در برخی از تست‌ها مورد استفاده قرار می‌گیرد:

مثلاً اگر دامنه تابع $y = \frac{2x}{[2x] - [x]}$ را بی‌پسند، داریم:

$$\text{مخرج} = 0 \Rightarrow [2x] - [x] = 0 \xrightarrow{[2x] = [x] + [x + \frac{1}{2}]} [x] + [x + \frac{1}{2}] - [x] = 0$$

$$\Rightarrow [x + \frac{1}{2}] = 0 \xrightarrow{\substack{[u]=k, k \in \mathbb{Z} \\ k \leq u < k+1}} 0 \leq x + \frac{1}{2} < 1 \xrightarrow{-\frac{1}{2}} \frac{-1}{2} \leq x < \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = (-\infty, -\frac{1}{2}) \cup [\frac{1}{2}, +\infty)$$

۵) برای هر $k \in \mathbb{Z}$ داریم: $k \leq x < k+1 \Rightarrow [x] = k$ یعنی اگر $[x] = 2$ باشد، حدود x به صورت $2 \leq x < 3$ است.

۶) مجموع عبارت‌های $[x]$ و $[-x]$ را می‌توان به صورت یک تابع دو ضابطه‌ای به شکل زیر نوشت:

$$[x] + [-x] = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Z} \\ -1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

اگر $[x]$ را به سمت راست تساوی ببریم، در این صورت داریم:

$$\text{اگر } x \in \mathbb{Z} \Rightarrow [-x] = -[x]$$

$$\text{اگر } x \notin \mathbb{Z} \Rightarrow [-x] = -[x] - 1$$

۷) همواره رابطه $[x] + [y] \leq [x+y]$ برقرار است.

به مقایسه مقابل توجه کنید:

$$\begin{cases} |x+y| \leq |x| + |y| \\ [x] + [y] \leq [x+y] \end{cases}$$

۸) برای هر دو عدد حقیقی x و y ، مقدار $[x+y]$ می‌تواند دو مقدار متمایز زیر را اختیار کند:

$$[x+y] = [x] + [y] \quad \text{یا} \quad [x] + [y] + 1$$

(خارج تجربی)

تست ۶۳: اگر $x^2 + x < 0$ ، آن‌گاه $[x] + [x^2] + [x^3] + [x^4]$ کدام است؟

۱ (۴)

صفر (۳)

-۱ (۲)

-۲ (۱)

Handwritten solution for the test 63:

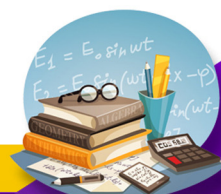
$x^2 + x = x(x+1) < 0$ (۴) $\Rightarrow -1 < x < 0$ (۳) $\Rightarrow x \in (-1, 0)$

Graphs of $y = x(x+1)$ and $y = x^2 + x$ are shown. The parabola $y = x(x+1)$ has roots at $x = -1$ and $x = 0$. The region between $x = -1$ and $x = 0$ is shaded red, indicating where $x^2 + x < 0$.

Calculation of the sum of floor functions:

$$[x] + [x^2] + [x^3] + [x^4] = [-1] + \left[(-\frac{1}{2})^2\right] + \left[(-\frac{1}{2})^3\right] + \left[(-\frac{1}{2})^4\right] = -1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = -1$$

The result is -1 (۲).



تست ۶۴: اگر $|\frac{x}{y}| = 1$ باشد، حاصل $\sqrt{x^2 - 4x + 4} + \sqrt{x^2 - 8x + 16}$ کدام است؟

۶ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

$$\sqrt{(x-2)^2} + \sqrt{(x-4)^2} = |x-2| + |x-4| = -x-2 -x+4 = 2$$

$1 \leq \frac{x}{y} \leq 2$
 ضرب در ۲
 $2 \leq x < 4$
 به عدد نیندگن مثل $x=3$

(سراسری تجربی خارج از کشور ۹۰)

تست ۶۵: در تابع با ضابطه $f(x) = x^2 - 2|x|$ مقدار $f(-\frac{1}{f(\sqrt{3})})$ کدام است؟

۲/۷۵ (۴)

۲/۵ (۳)

۲/۲۵ (۲)

۱/۷۵ (۱)

$$f\left(-\frac{1}{f(\sqrt{3})}\right) = f\left(-\frac{1}{(1)}\right) = f(-1) = (-1)^2 - 2[-1] = 1 - 2(-1) = 3$$

بازی از داخلی ترین تابع شروع می‌شود
 $f(\sqrt{3}) = (\sqrt{3})^2 - 2[\sqrt{3}] = 3 - 2(1) = 3 - 2 = 1$

تست ۶۶: اگر $[x^2 - 6x] = [x^2 - 10x] = 7$ باشد، حاصل $[x - 4]^2$ کدام است؟

۲۳ (۴)

۲۴ (۳)

۱۶ (۲)

۷ (۱)

$$\begin{cases} [x^2 - 6x] = 7 \implies 7 \leq x^2 - 6x < 8 \\ [x^2 - 10x] = 7 \implies 7 \leq x^2 - 10x < 8 \end{cases}$$

$$\frac{14 \leq 2x^2 - 16x < 16}{\div 2} \implies 7 \leq x^2 - 8x < 8$$

$$[x - 4]^2 = [x^2 - 8x + 16] = [x^2 - 8x] + 16 = 7 + 16 = 23$$

تست ۶۷: اگر $(1 + \sqrt{2})^6 + (1 - \sqrt{2})^6 = 198$ ، جزء صحیح عدد $(1 + \sqrt{2})^7$ کدام است؟

۱۹۸ (۴)

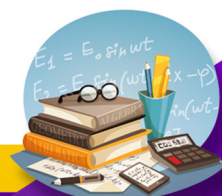
۱۹۷ (۳)

۱۹۶ (۲)

۱۹۵ (۱)

$$[(1 + \sqrt{2})^7] = [198 - (1 - \sqrt{2})^7] = 198 - (1 - 1.4 = -0.4)^7 = 198 - 8 = 190$$

ایسیلون منفرد عدد ریزد نسبت



به عدد طبیعی n ، 2 رگزه انبج-کن دبه عبارت به: $n=3$ شق

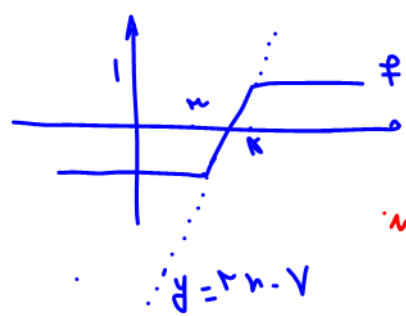
تست ۶۸: برای هر عدد طبیعی $n > 2$ ، حاصل $[\sqrt{4n^2 - 3n + 1}] - 2[\sqrt{n^2 - 2n}]$ کدام است؟ (سراسری تجربی ۹۱)

$$[\sqrt{4(3)^2 - 3(3) + 1} = 28 = 5, \dots] - 2[\sqrt{3^2 - 2(3) = 9 - 6 = 3} = 1, 7]$$

$$5 - 2(1) = 5 - 2 = 3 \quad \underline{3}$$

تست ۶۹: اگر $[x-2] = 1$ باشد، نمودارهای دو تابع $f(x) = |x-3| - |x-4|$ و $g(x) = 2x^2 + x - 17$ در چند نقطه مشترک هستند؟

$f(x) = x - 3 + x - 4 = 2x - 7$ (۳) $g(x) = 2x^2 + x - 17$ (۴)
 $f(x) = x - 3 - x + 4 = 1$ (۱) $g(x) = 2x^2 + x - 17$ (۴)
 $f(x) = x - 3 + x - 4 = 2x - 7$ (۳) $g(x) = 2x^2 + x - 17$ (۴)
 $f(x) = x - 3 - x + 4 = 1$ (۱) $g(x) = 2x^2 + x - 17$ (۴)



$2x^2 + x - 17 = 2x - 7 \rightarrow 2x^2 - x - 10 = 0 \rightarrow x^2 - x - 5 = 0$
 $(x+4)(x-5) = 0$
 $x_1 = -4, x_2 = 5$
 $x_1 = -\frac{5}{2} = -2.5, x_2 = \frac{5}{2} = 2.5$
 هیچ یک از بازه $3 < x < 4$ نیستند.

خطی
م
ن
ک

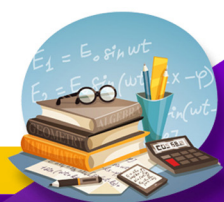
تست ۷۰: معادله $[x] + [x^2] = \frac{x}{2}$ چند جواب دارد؟

جمع ۲ تا جزو مجموع یکدیگر معنی است پس باید $\frac{x}{2} = k \in \mathbb{Z}$ ، پس $x = 2k$ پس x یک عدد زوج و صحیح است و x^2 هم صحیح است پس x از برابرت خارج می شوند.
 $x + x^2 = \frac{x}{2} \rightarrow x(\frac{1}{2} + x) = 0$
 $x = 0$ یا $x = -\frac{1}{2} \neq 2k$
 جواب: $x = 0$ دارد.

تست ۷۱: دامنه و برد تابع $f(x) = \frac{x - [x]}{\sqrt{[x] + [-x] + 1}}$ کدام است؟

(۱) $D_f = \mathbb{N}, R_f = \{0\}$
 (۲) $D_f = \mathbb{Z}, R_f = \{0\}$
 (۳) $D_f = \mathbb{R} - \mathbb{Z}, R_f = [0, 1)$
 (۴) $D_f = \mathbb{R} - \mathbb{N}, R_f = [0, 1)$

تعریف کرده: $f(x) = \frac{x - [x]}{\sqrt{[x] + [-x] + 1}}$
 اگر $x \in \mathbb{Z}$ ، $f(x) = \frac{x - x}{\sqrt{0 + 1}} = 0$
 اگر $x \notin \mathbb{Z}$ ، $f(x) = \frac{x - [x]}{\sqrt{-1 + 1}}$ صفر مطلق
 $D_f: \mathbb{Z} \quad R_f: \{0\}$



راه دوم: دو نام عدد را نگاه به عبارت می‌دهیم به سبب ضربی چه اعدادی خواهد شد؟

دلتخواه $x=0$: $\left[\frac{0-1}{2}\right] + \left[\frac{3-0}{2} = 1,5\right] = -1 + 1 = 0$

تست ۷۲: حاصل عبارت $\left[\frac{x-1}{2}\right] + \left[\frac{3-x}{2}\right]$ چه اعدادی می‌تواند باشد؟

دلتخواه $x=1$: $\left[\frac{1-1}{2}\right] + \left[\frac{3-1}{2} = 1\right] = 0 + 1 = 1$

پاسخ: گزینه‌ی «۱» صحیح است. عبارت را ساده می‌کنیم و از خاصیت‌ها استفاده می‌کنیم:

$$\left[\frac{x-1}{2}\right] + \left[\frac{3-x}{2}\right] = \left[\frac{x-1}{2}\right] + \left[\frac{2+1-x}{2}\right] = \left[\frac{x-1}{2}\right] + \left[\frac{1-x}{2} + 1\right] = \left[\frac{x-1}{2}\right] + \left[\frac{1-x}{2}\right] + 1$$

چون $\begin{cases} u \in \mathbb{Z} & [u] + [-u] = 0 \\ u \notin \mathbb{Z} & [u] + [-u] = -1 \end{cases}$ پس:

۱ یا صفر یا صفر یا -۱

تست ۷۳: مجموعه جواب معادله $[x] - [-x] = 3$ کدام است؟ ([] علامت جزء صحیح است.)

- پاسخ: گزینه «۴»
- (۱) (۰, ۱) (۲) (۱, ۲) (۳) $\left\{\frac{3}{2}\right\}$ (۴) (۱, ۲)

$$[-x] = \begin{cases} -[x] & x \in \mathbb{Z} \\ -[x] - 1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

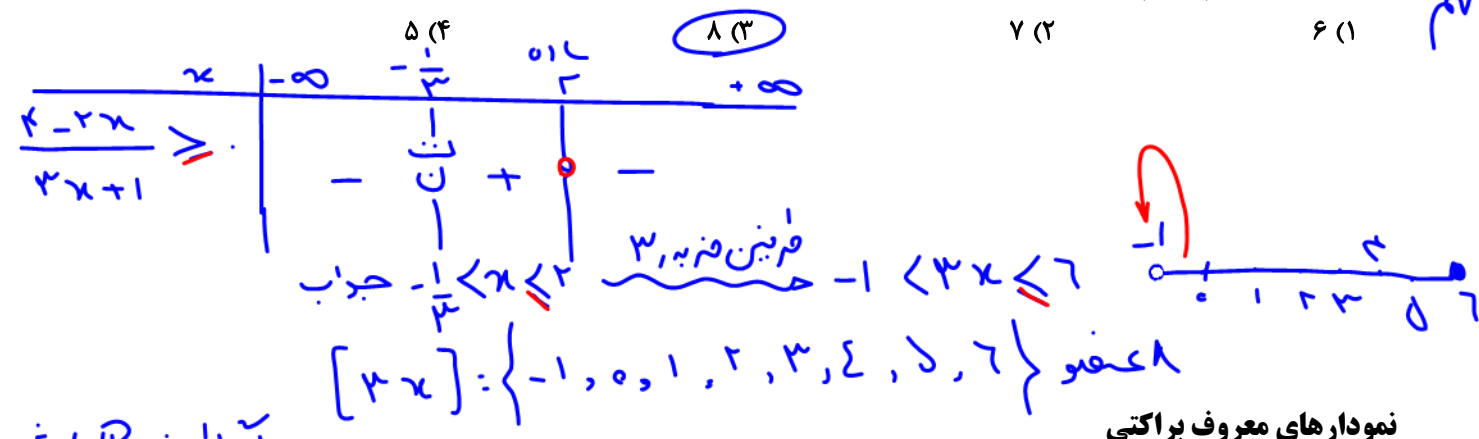
نکته:

غ.ق ق $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow [x] - (-[x]) = 3 \Rightarrow 2[x] = 3 \Rightarrow [x] = \frac{3}{2}$

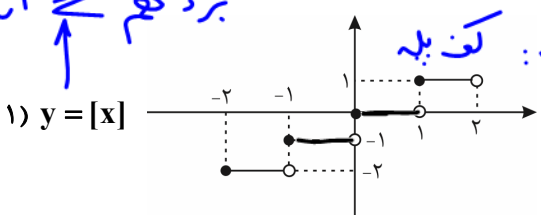
شما $x \notin \mathbb{Z} \Rightarrow [x] - (-[x] - 1) = 3 \Rightarrow 2[x] + 1 = 3 \Rightarrow [x] = 1 \Rightarrow 1 < x < 2, x \notin \mathbb{Z} \Rightarrow x \in (1, 2)$

تست ۷۴: اگر $\frac{4-2x}{3x+1} \geq 0$ باشد، مجموعه مقادیر $[3x]$ چند عضو دارد؟

(تجربی ۱۴۰۱)



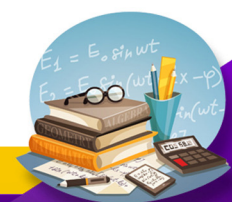
اگر دامنه \mathbb{R} باشد برد هم \mathbb{Z} است



طول کف پله: $[ax]$ برابر $\frac{1}{|a|}$ است: کف پله

توجه کنید در تابع $y = [x]$ ، طول هر پله یک واحد است و نقاط سمت چپ همگی توپر می‌باشند. این‌جا به صورت دلتخواه در بازه $(-2, 2)$ آن را رسم کردیم. اگر بازه به صورت $[-2, 2]$ باشد (یعنی انتهای بازه بسته باشد) نقطه $x = 2$ را جداگانه بررسی می‌کنیم و داریم:

$x = 2 \Rightarrow y = [2] = 2 \Rightarrow A(2, 2)$



یکسانست

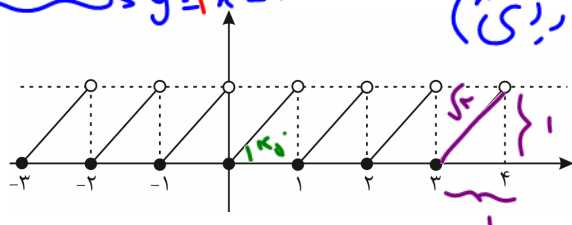
نکته: در توابع مثل $[x]$ در هر زیر بازه $[n, n+1)$ روبروی داریم به جاش عددی زاریم.

و این یعنی به شکل بالا باید نقطه $A(2, 2)$ نیز اضافه شود.

- $-1 < x < 0 \rightarrow y = x + 1$
- $0 \leq x < 1 \rightarrow y = x$
- $1 \leq x < 2 \rightarrow y = x - 1$
- $2 \leq x < 3 \rightarrow y = x - 2$

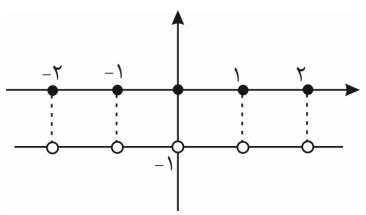
حرفی $y = x - [x]$ تابع جزئی اعشاری (خوردی)

۲) $y = x - [x]$
 $D_f: \mathbb{R}$
 $R_f: [0, 1)$



ویژگی‌های تابع $y = x - [x]$
 دامنه \mathbb{R}
 برد $[0, 1)$ یعنی: $0 \leq x - [x] < 1$ (خوردی)
 در نقاط $x \in \mathbb{Z}$ حد ندارد و ناپیوسته است ولی در سایر نقاط حد دارد و پیوسته است.
 طول هر پله $\sqrt{2}$ واحد است.
 متناوب است با دوره تناوب $T = 1$
 در این جا به طور دلخواه آن را در بازه $[-3, 4)$ رسم کردیم.

۳) $y = [x] + [-x] = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Z} \\ -1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$

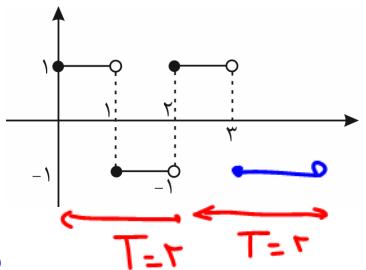


ویژگی‌های تابع $y = [x] + [-x]$

- دامنه \mathbb{R}
- برد دو عضوی $\{-1, 0\}$
- در نقاط $x \in \mathbb{Z}$ ناپیوسته است.
- در تمام نقاط دارای حد -1 است یعنی $\lim_{x \rightarrow a \in \mathbb{R}} [x] + [-x] = -1$
- متناوب است با دوره تناوب $T = 1$.
- نمودار به ازای اعداد صحیح صفر می‌شود و ریشه می‌دهد و به ازای سایر اعداد، -1 می‌شود.

عشق طرح

۴) $y = (-1)^{[x]} \quad 0 \leq x < 3$



- $0 \leq x < 1 \rightarrow y = (-1)^0 = 1$
- $1 \leq x < 2 \rightarrow y = (-1)^1 = -1$
- $2 \leq x < 3 \rightarrow y = (-1)^2 = 1$
- $3 \leq x < 4 \rightarrow y = (-1)^3 = -1$

ویژگی‌های $y = (-1)^{[x]}$

- در این جا به طور مثال در بازه $[0, 3)$ رسمش کردیم.
- دامنه \mathbb{R}
- برد دو عضوی $\{-1, 1\}$
- در نقاط $x \in \mathbb{Z}$ حد ندارد و ناپیوسته است.



(۴) متناوب است با دوره تناوب $T = 2$.

بازه را C_m و C_n بکن
در هر زیربازه عدد بگذار
بزرگتر بردار

۵) $y = x[x]$ $-1 \leq x < 1$

$-1 < x < 0 \rightarrow y = x(-1) = -x$
 $0 \leq x < 1 \rightarrow y = x(0) = 0$

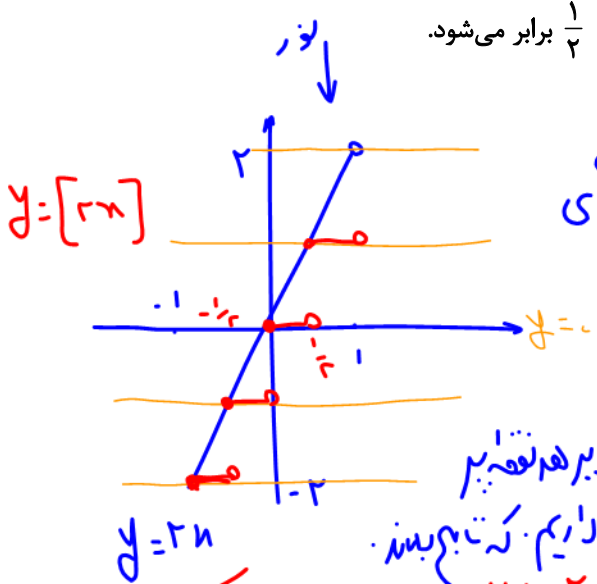
در این جا به طور مثال در بازه $(-1, 1)$ رسمش کردیم.
توجه کنید نقطه $x = 0$ برای این تابع، نقطه گوشه به حساب می آید.

رسم نمودار $y = [ax]$

تابع $y = [ax]$ از روی تابع $y = [x]$ رسم می شود. فقط توجه کنید که طول هر پله $\frac{1}{|a|}$ برابر می شود. مثلاً در رسم $y = [\frac{x}{4}]$ که

$a = \frac{1}{4}$ است طول پله ها $\frac{1}{4} = 2$ برابر و در رسم $y = [2x]$ که $a = 2$ است طول پله ها $\frac{1}{2}$ برابر می شود.

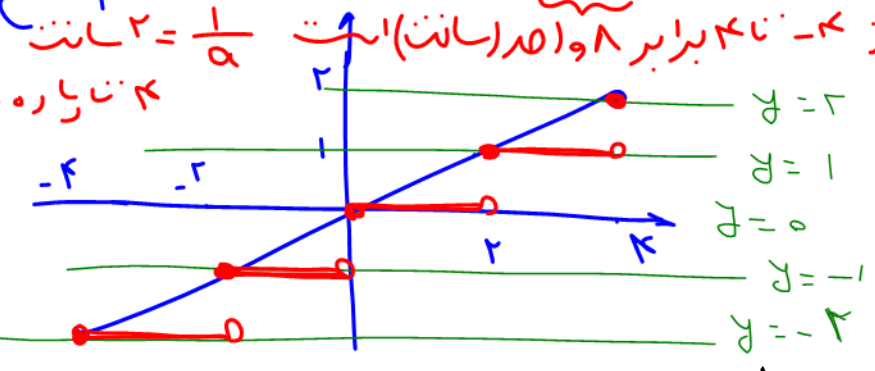
مثال ۷۵: تابع $y = [2x]$ را در بازه $(-1, 1)$ رسم کنید.



فرز رسم $y = [u]$ با داشتن $y = u$ ابتدا $y = u$ را رسم کنید پس خط های
متوالی $y = k$ و $y = k+1$ که $k \in \mathbb{Z}$ را بکشید هر جا $y = u$
به این خط ها برخورد کرد در پیرامون آن بکشید از بالا به تابع نور بنام این
سایه کشی که بین ۲ خط متوالی هستند را روی خط پایین تر بیانه از پیرامون تقاطع
تیر نقطه توجالی داریم که تابع بسند.

مثال ۷۶: نمودار تابع $y = [\frac{x}{4}]$ را در بازه $[-4, 4]$ رسم کنید.

از -4 تا 4 برابر 8 و 4 (هر سانت) است $\frac{1}{a} = 2$ سانت 2 سانت حرکت پس
 4 تا 4 راه خط شد و یک نقطه $A(k, 2)$



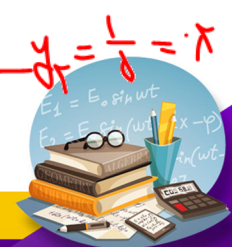
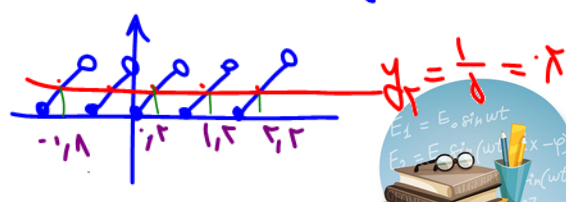
$a = \frac{1}{4}$
 $2 = \frac{1}{a}$
 $y = [\frac{x}{4}]$

تست ۷۷: معادله $x = \frac{1}{5} + [x]$ در فاصله $(-2, 3)$ چند جواب دارد؟

چون $[x]$ داریم بازه را یک سانت بکن

$-2 < x < -1 \rightarrow x = \frac{1}{5} + (-2) = -1,8$
 $-1 \leq x < 0 \rightarrow x = \frac{1}{5} + (-1) = -0,8$
 $0 \leq x < 1 \rightarrow x = \frac{1}{5} + 0 = 0,2$
 $1 \leq x < 2 \rightarrow x = \frac{1}{5} + 1 = 1,2$
 $2 \leq x < 3 \rightarrow x = \frac{1}{5} + 2 = 2,2$

$x - [x] = \frac{1}{5}$
 y_1
 y_2



نکته: برای تست ۷۷: یکی از روشهای حل معادله، تبدیل معادله به نمادی است تابع قابل رسم است. هر ۲ را در یک دستگاه رسم می‌کنیم. بعد از آن با بر خورد ۲ تابع، تقاطع آنها را در دستگاه ۷۷. این ۵ برخورد داشتند.

تست ۷۸: برد تابع $y = x - 2\left[\frac{x}{7} + 1\right]$ کدام است؟

- (۱) $[-2, 0]$ (۲) $[-1, 2]$ (۳) $[0, 2]$ (۴) $[-1, 1]$

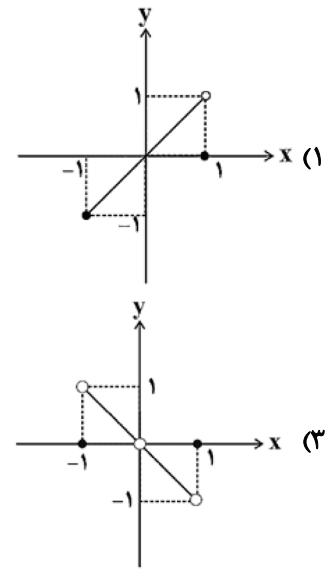
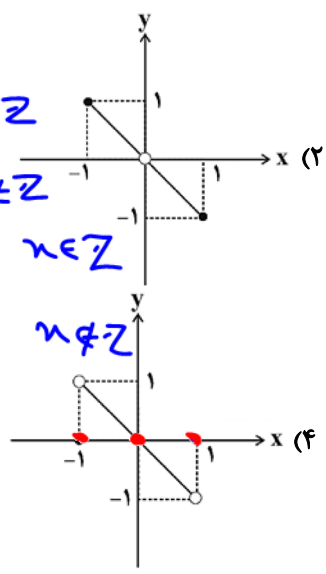
راه‌بیت: به عدد نگاه $x = 0$ به تابع می‌دهیم ضربی ۲- می‌گیریم تنها زنی‌ای که ۲- دارد یک است.

⑤ $y = x - 2\left(\left[\frac{x}{7} + 1\right]\right) = x - 2\left[\frac{x}{7}\right] - 2 = 2\left(\frac{x}{7} - \left[\frac{x}{7}\right]\right) - 2$
 جواب ① $0 < y < 2 \rightarrow -2 < y < 0$
 $0 < u < 1 \rightarrow -2 < u - [u] < -1$ تولید می‌کنیم دی اینم $u - [u] < 0$

تست ۷۹: نمودار تابع $y = x([-x] + [x])$ با دامنه $-1 \leq x \leq 1$ کدام است؟ ([]، نماد جزء صحیح است.)

می‌دانیم: تابع چینی معروف

$[x] + [-x] = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Z} \\ -1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$
 $y = x([x] + [-x]) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Z} \\ -x & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$ با صغریا ۱-



پاسخ: گزینه «۴» - راه‌حل اول: عددگذاری:

در ضابطه تابع قرار می‌دهیم $x = 1 \rightarrow y = 1([-1] + [1]) = 1 \times (-1 + 1) = 0$

$x = 0 \Rightarrow y = 0$
 $x = -1 \Rightarrow y = 0$

یعنی تابع در سه نقطه دلخواهی که دادیم مقداری برابر با صفر دارد که این سه نقطه فقط در نمودار گزینه (۴) صدق می‌کند. راه‌حل دوم:

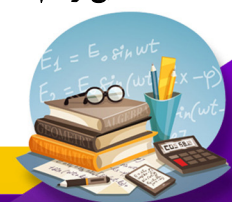
$y = [x] + [-x] = \begin{cases} -1 & x \notin \mathbb{Z} \\ 0 & x \in \mathbb{Z} \end{cases}$

نکته:

$\begin{cases} -1 < x < 1 \xrightarrow{x \neq 0, x \notin \mathbb{Z}} y = -x \\ x = -1, 0, 1 \Rightarrow y = 0 \end{cases}$

با توجه به نکته داریم:

تابع رسم شده در گزینه (۴) در نقاط $x = -1, 0, 1$ مقداری برابر با صفر دارد و در $-1 < x < 1$ برابر با $y = -x$ است.



(تجربی خارج)

مثال ۸۰: نمودار تابع $y = 2\left[\frac{x}{2}\right] + 1$; $x \in [-2, 6]$ از چند پاره خط مساوی هم تشکیل شده است؟

۶ (۴)

۵ (۳)

۴ (۲) ✓

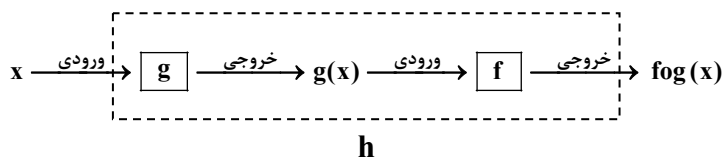
۳ (۱)

از $x = -2$ تا $x = 6$ برابر ۸ سانت است تبعاً ما $\frac{1}{2} = 2$ سانت ۲ سانت می‌کنند
۸ سانت تا ۲ سانت است ۶ سانت.

دقت: در $y = 2\left[\frac{x}{2}\right] + 1$ کمی تأثیر، تعداد پاره‌ها هستند جز آن ۲ پارت برکت ۴ ض‌های $\left[\frac{x}{2}\right]$
۲ برابر می‌کنند دگر ۱ تابع، اما ۱ واحد بالای برود در تعداد پاره خط‌ها
تأثیر ندارند.

تابع مرکب

به شکل زیر دقت کنید، می‌خواهیم با هم فرآیند آن را مرور کنیم. اگر x را به عنوان ورودی به ماشین g دهیم، خروجی آن $g(x)$ خواهد بود، حال این خروجی را به عنوان ورودی به ماشین f می‌دهیم و در نتیجه خروجی $f(g(x))$ حاصل می‌شود که ما آن را $f \circ g(x)$ می‌نامیم. پس در واقع می‌توانیم بگوییم $f \circ g(x)$ ، ماحصل رفتار ماشین h است وقتی به آن ورودی x را می‌دهیم.



مثال ۸۱: اگر $f = \{(1, 2), (2, -1), (2, 0), (-1, 4), (5, -7)\}$ و $g = \{(0, -1), (5, 2), (3, 5), (-2, 4)\}$ تابع $f \circ g$ را در صورت امکان بنویسید.

دول و کاری کنه

$$f(g(x)) = \{(0, 4), (5, 0), (3, -7)\}$$

$$g(0) = -1 \quad f(-1) = 4$$

$$g(5) = 2 \quad f(2) = 0$$

$$g(3) = 5 \quad f(5) = -7$$

$$g(-2) = 4 \quad f(4) = \text{تن}$$

تست ۸۲: اگر $f = \{(1, 1), (2, 3), (3, 3), (4, 2)\}$ و $g = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1), (4, 6)\}$ باشد، برد تابع $f \circ g$ چند عضو دارد؟

سه (۴)

دو (۳)

یک (۲)

هیچ (۱)

پاسخ: گزینه‌ی «۳» - اول x را در g قرار می‌دهیم (چون در $f \circ g$ ، تابع g تابع درونی است) و بعد حاصلش را در f :

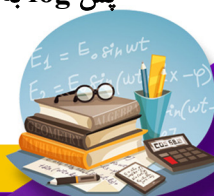
$$1 \xrightarrow{g} 2 \xrightarrow{f} 3 \Rightarrow (1, 3)$$

$$2 \xrightarrow{g} 3 \xrightarrow{f} 3 \Rightarrow (2, 3)$$

$$3 \xrightarrow{g} 1 \xrightarrow{f} 1 \Rightarrow (3, 1)$$

$$4 \xrightarrow{g} 6 \xrightarrow{f} \square$$

پس $f \circ g$ به صورت $f \circ g = \{(1, 3), (2, 3), (3, 1)\}$ است که بردش برابر $R = \{1, 3\}$ می‌باشد و دو عضو دارد.



تست ۸۳: اگر $f = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5)\}$ باشد، تابع $((f \circ f) - f)$ چگونه تابعی است؟

- (۱) تهی (۲) همانی (۳) ثابت (۴) خطی
 پاسخ: گزینه «۳» - ابتدا $f \circ f$ را پیدا می‌کنیم:

$$\begin{aligned} 1 &\xrightarrow{f} 2 \xrightarrow{f} 3 \Rightarrow (1, 3) \\ 2 &\xrightarrow{f} 3 \xrightarrow{f} 4 \Rightarrow (2, 4) \\ 3 &\xrightarrow{f} 4 \xrightarrow{f} 5 \Rightarrow (3, 5) \end{aligned} \Rightarrow f \circ f = \{(1, 3), (2, 4), (3, 5)\}$$

$$4 \xrightarrow{f} 5 \xrightarrow{f} \square$$

حالا $((f \circ f) - f)$ را تشکیل می‌دهیم:

می‌بینیم که $((f \circ f) - f)$ همواره مقداری ثابت یعنی برابر ۱ دارد؛ پس تابع ثابت است.

تست ۸۴: $f = \{(2, 1), (3, 2), (4, 5), (1, 7)\}$ و $g = \{(1, 2), (3, 1), (a, 3), (b, 1)\}$ مفروض‌اند. اگر $(4, 2) \in f \circ g$ و $(4, 1) \in g \circ f$ باشند، دوتایی مرتب (a, b) کدام است؟ (سراسری ریاضی)

- (۱) $(3, 4)$ (۲) $(4, 3)$ (۳) $(4, 5)$ (۴) $(5, 4)$

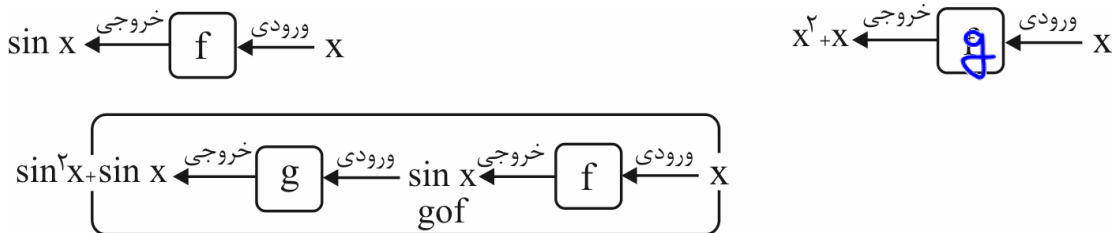
پاسخ: گزینه «۳» طبق فرض مسئله از آن جایی که $(4, 1) \in g \circ f$ ، پس $(g \circ f)(4) = 1$ است، در نتیجه داریم:

$$g(f(4)) = 1 \xrightarrow{f(4)=5} g(5) = 1 \xrightarrow{g(b)=1} b = 5$$

هم‌چنین $(4, 2) \in f \circ g$ ، پس $(f \circ g)(4) = 2$ است، یعنی باید عدد ۴ در دامنه تابع g که به صورت $g = \{(1, 2), (3, 1), (a, 3), (5, 1)\}$ باشد، خیلی واضح است که باید $a = 4$ باشد. در نهایت خواسته مسئله برابر $(a, b) = (4, 5)$ است.

ترکیب تابع با ایده‌ی ماشین

اگر هر تابع را به عنوان یک ماشین در نظر بگیریم که x را به عنوان یک مقدار ورودی می‌پذیرد و مقدار $f(x)$ را به عنوان خروجی تحویل می‌دهد می‌توانیم ترکیب تابع‌ها را به عنوان ترکیب ماشین‌ها که به دنبال هم روی یک مقدار ورودی x اثر می‌گذارند در نظر بگیریم. مثلث اگر $f(x)$ تابعی با ضابطه‌ی $f(x) = \sin x$ و $g(x)$ تابعی با ضابطه‌ی $g(x) = x^2 + x$ باشد، ترکیب این دو تابع را می‌توانیم به شکل زیر نشان دهیم:

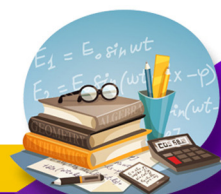


تست ۸۵: اگر $f(x) = \frac{2x+3}{2-x}$ و $g(x) = \frac{1-3x}{x+2}$ باشند، ضابطه‌ی تابع $g(f(x))$ کدام است؟ (تجربی خارج ۹۶)

- (۱) x (۲) $-x$ (۳) $-x-1$ (۴) $x+1$

$$g(f(x)) = \frac{1-3f(x)}{f(x)+2} = \frac{1-3\left(\frac{2x+3}{2-x}\right)}{\frac{2x+3}{2-x}+2} \quad \text{در دنگوه مثلا } x=1 \quad \frac{-14}{7} = -2$$

تجرباتی که برای $x=1$ می‌کنیم به دست می‌آید -2 - نه $2-x$ نه 3 است.



قدر منفی خوره منفی رومی خوره

$| - ۱ | = ۱$

$|۱۷| = \begin{cases} \text{توش مثبتنه} \\ \text{توش منبیه} \end{cases}$

(سراسری ریاضی خارج از کشور ۹۰)

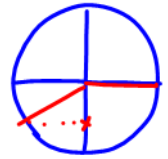
تست ۸۶: اگر $f(x) = ۲ - |x - ۲|$ ، ضابطه‌ی تابع $f(f(x))$ برابر کدام است؟

- (۱) x
- (۲) $۴ - x$
- (۳) $f(x)$
- (۴) $۲ - f(x)$

$$f(f(x)) = ۲ - |f(x) - ۲| = ۲ - |۲ - |x - ۲| - ۲| = ۲ - |- |x - ۲|| = ۲ - |x - ۲| = f(x)$$

قدر منفی خوره

تست ۸۷: اگر $f(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ و $g(x) = \cos x$ باشند، ضابطه‌ی تابع $y = f(g(x))$ کدام است؟ (X در ربع سوم است.)



- (۱) $\cot x$
- (۲) $\tan x$
- (۳) $-\tan x$
- (۴) $-\cot x$

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

پاسخ: گزینه «۳» - ضابطه‌ی تابع $y = f(g(x))$ را به دست می‌آوریم. ببینید:

$$y = f(g(x)) = f(\cos x) = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 x}}{\cos x} = \frac{\sqrt{\sin^2 x}}{\cos x} = \frac{|\sin x|}{\cos x} = -\frac{\sin x}{\cos x} = -\tan x$$

از طرفی X در ربع سوم است، پس $\sin x$ عددی منفی است، در نتیجه خواهیم داشت:

$$y = f(g(x)) = \frac{|\sin x|}{\cos x} = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x$$

(سراسری ریاضی)

تست ۸۸: اگر خروجی ماشین مقابل $\frac{۴}{۳}$ باشد، مقدار ورودی کدام است؟

ورودی $\rightarrow \boxed{2x-2} \rightarrow \frac{x}{\sqrt{x+1}} \rightarrow$ خروجی

(۴) ۴

(۳) ۳

(۲) $\frac{۷}{۲}$

(۱) $\frac{۱۱}{۹}$

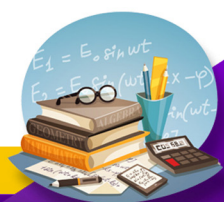
با کنترل نزنیه

تست ۸۹: اگر $f(x) = \frac{x}{x-1}$ باشد، ضابطه‌ی تابع $f(x^2) - 2f(x) + 1$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{1-x^2}$
- (۲) $\frac{2x}{x^2-1}$
- (۳) $\frac{2x+1}{1-x^2}$
- (۴) $\frac{2x-1}{x^2-1}$

$$\frac{x^2}{x^2-1} - \frac{2x}{x-1} + 1 = \frac{x^2}{x^2-1} - \frac{2x}{x-1} + \frac{x^2-x^2}{x^2-1} = \frac{x^2 - 2x(x-1) + x^2 - x^2}{x^2-1} = \frac{x^2 - 2x^2 + 2x + x^2 - x^2}{x^2-1} = \frac{-x^2 + 2x}{x^2-1} = -\frac{x}{x-1}$$

نزنیه ۳ به ازای $x=۲$ همان $\frac{-۲}{۱}$ می‌شود.



$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$(x-2)^3 = x^3 - 2x^2 + 12x - 8$$

گفتن تا بلواز $(x-2)^3$

تست ۹۰: اگر $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x + 5$ باشد، آن گاه $f(\sqrt[3]{3} + 2)$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) $(\sqrt[3]{3} + 1)^3 - 1$ (۳) ۵ (۴) 16 ✓

$$f(x) = (x^3 - 2x^2 + 12x - 8) + 13 = (x-2)^3 + 13$$

$$f(x) = (x-2)^3 + 13$$

$$f(\sqrt[3]{3} + 2) = (\sqrt[3]{3} + 2 - 2)^3 + 13 = 3 + 13 = 16$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

(ریاضی ۱۴۰۱)

تست ۹۱: اگر $f(x) = \frac{\sqrt{2}x}{3x - \sqrt{2}}$ باشد، حاصل $f \circ f(\sqrt{2})$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (۳) $\sqrt{2}$ (۴) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

ابتدا حساب کردیم $f(\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2})}{3\sqrt{2} - \sqrt{2}} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$f(\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2})}{3\sqrt{2} - \sqrt{2}} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{3\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \sqrt{2}} = \frac{1}{\frac{3 - 2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{3 - 2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}(3 + 2\sqrt{2})}{9 - 8} = 3\sqrt{2} + 4$$

تست ۹۲: تابع با ضابطه $g(x) = x - \sqrt{x}$ مفروض است. اگر نمودار تابع f ، محور x ها را در دو نقطه به طولهای ۶ و $-\frac{1}{4}$ قطع کند، آنگاه

(سراسری ریاضی خارج ۹۴)

نمودار تابع $f \circ g$ ، محور x ها را با کدام طول قطع می کند؟

- (۱) $\frac{1}{9}$ و $\frac{4}{9}$ (۲) $\frac{1}{9}$ و $\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{1}{4}$ و $\frac{4}{9}$ (۴) $\frac{1}{4}$ و $\frac{1}{9}$

نمودار f را در نظر بگیرید. $f(7) = 0$ و $f(-\frac{1}{4}) = 0$

نمودار $f \circ g$ را در نظر بگیرید. $f \circ g = 0$ در $x = 9$ و $x = \frac{1}{4}$

$$f \circ g = f(g(x)) = 0$$

$$g(x) = x - \sqrt{x} = 7 \Rightarrow x = 9$$

$$g(x) = x - \sqrt{x} = -\frac{1}{4} \Rightarrow x = \frac{1}{4}$$

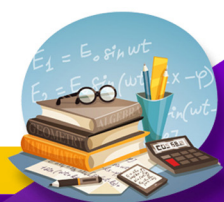
زمانی صورتی که توی شش ۶ یا $-\frac{1}{4}$ بیفتد

تست ۹۳: اگر $\Delta f(x-2) + f(2-x) = 4x + 1$ باشد، آن گاه $f(3)$ کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) $\frac{4}{5}$ (۳) ۵ (۴) $\frac{5}{5}$

پاسخ: گزینه «۲»

$$\begin{cases} x=5: \Delta f(3) + f(-3) = 21 \\ x=-1: \Delta f(-3) + f(3) = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2\Delta f(3) - \Delta f(-3) = -10.5 \\ \Delta f(-3) + f(3) = -3 \end{cases} \Rightarrow -2\Delta f(3) = -10.8 \Rightarrow f(3) = 4/5$$





هر وقت بخواهیم از روی تابع تابع $f(x)$ ضابطه $f(x)$ پیدا کنیم، کافیست روی پرانتز t بگیریم و سپس x رو تنها کنیم و هر جا سمت راست مساوی x دیدیم مقدارش رو بر حسب t جای گذاری کنیم و آخرش هم $t \rightarrow x$.

تست ۹۴: اگر $f(2x-3) = 4x^2 - 14x + 13$ باشد، ضابطه $f(x)$ برابر کدام است؟ (تجربی ۹۷)

- (۱) $x^2 - x + 3$ (۲) $x^2 - 2x - 1$ (۳) $x^2 - 2x + 1$ (۴) $x^2 - x + 1$

$2x - 3 = t \rightarrow x = \frac{t+3}{2}$ $f(2x-3=t) = 4\left(\frac{t+3}{2}\right)^2 - 14\left(\frac{t+3}{2}\right) + 13$

به یاد نداشتی که مثلاً $x = \dots$
 $f(2x-3) = 4x^2 - 14x + 13$
 $f(-3) = 13$ افادونی است که -3 بگیریم
 ۱۳ به یاد باشه

$f(t) = (t+3)^2 - 7(t+3) + 13$
 $f(t) = t^2 + 6t + 9 - 7t - 21 + 13$
 $f(t) = t^2 - t + 1$
 $f(x) = x^2 - x + 1$ گزینه (۴)

تست ۹۵: اگر $g(x) = 2x - 3$ و $(f \circ g)(x) = 4(x^2 - 4x + 5)$ باشند، تابع $f(x)$ کدام است؟ (ریاضی داخل ۹۳)

- (۱) $x^2 - 4x + 3$ (۲) $x^2 - 4x + 5$ (۳) $x^2 - 2x + 5$ (۴) $x^2 - 2x + 3$

پاسخ: گزینه «۳» - می دانیم $(f \circ g)(x)$ همان $f(g(x))$ است. پس می توان نوشت:

$f(g(x)) = 4(x^2 - 4x + 5) \xrightarrow{g(x)=2x-3} f(2x-3) = 4x^2 - 16x + 20$

حالا برای این که $f(x)$ را به دست آوریم، از تغییر متغیر $2x - 3 = t$ کمک می گیریم. پس داریم:

$2x - 3 = t \Rightarrow 2x = t + 3 \Rightarrow x = \frac{t+3}{2}$
 $f(t) = 4\left(\frac{t+3}{2}\right)^2 - 16\left(\frac{t+3}{2}\right) + 20 = 4\left(\frac{t^2 + 6t + 9}{4}\right) - 8(t+3) + 20$
 $\Leftrightarrow f(t) = t^2 + 6t + 9 - 8t - 24 + 20 = t^2 - 2t + 5$

پس ضابطه تابع $f(x) = x^2 - 2x + 5$ به صورت $f(x)$ است.

تست ۹۶: اگر $g \circ f(x) = 5x^2 + 11$ و $f(x) = 2x$ باشد، کمترین مقدار $g(x-7)$ چقدر است؟ (تجربی ۱۴۰۱)

- (۱) ۷ (۲) ۹ (۳) ۱۱ (۴) ۳

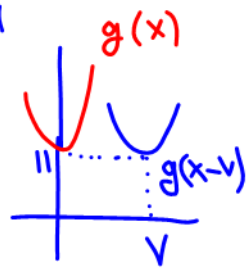
$g(f(x)) = 5x^2 + 11$ $g(x)$ هان است که 7 و 11 با 5 Min $g(x-7)$ Min $g(x)$ 7 11 5

$2x = t \rightarrow x = \frac{t}{2} \rightarrow g(2x=t) = 5\left(\frac{t}{2}\right)^2 + 11 = \frac{5}{4}t^2 + 11$

$g(t) = \frac{5}{4}t^2 + 11 \rightarrow g(x) = \frac{5}{4}x^2 + 11$

$g(x-7) = \frac{5}{4}(x-7)^2 + 11$

$S(7, 11)$ Min $g(x-7)$ 7 11 5



راه تری: به طرف $x=2$ برویم: $f\left(\frac{2-2}{2+1}\right) = 2+1=3$
 افادینه که صغریه ۳ میت

تست ۹۷: اگر $f\left(\frac{x-2}{x+1}\right) = x+1$ باشد، $f(x)$ کدام است؟

(۱) $\frac{3}{1-x}$ (۲) $\frac{3}{x-1}$ (۳) $\frac{1-x}{3}$ (۴) $\frac{x-1}{3}$

پاسخ: توی پرانتز رو t می گیریم.

$\frac{x-2}{x+1} = t$

پس $f(t) = x+1$ حالا باید x رو تنها کنیم: $x-2 = tx+t \Rightarrow tx-x = -t-2 \Rightarrow x(t-1) = -t-2 \Rightarrow x = \frac{-t-2}{t-1}$ (*)

حالا سمت راست هر جا x دیدیم (*) رو می ذاریم:

$f(t) = \frac{-t-2}{t-1} + 1 \xrightarrow{t \rightarrow x} f(x) = \frac{-x-2}{x-1} + 1 = \frac{-x-2+x-1}{x-1} = \frac{-3}{x-1} = \frac{3}{1-x}$



بعضی وقتها هم نیازی به t نیست فقط کافیست از اتحادها استفاده کنیم:

$a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$

$a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$

$a^2 + b^2 = (a-b)^2 + 2ab$

۲ تا مثال خوب:

۱) $f\left(x - \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2} - 4$, $f(x) = ?$

پاسخ:

$f\left(x - \frac{1}{x}\right) = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2x \cdot \frac{1}{x} - 4 = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2 - 4 = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 - 2$

$f(t) = t^2 - 2 \xrightarrow{t \rightarrow x} f(x) = x^2 - 2$

حالا $x - \frac{1}{x} = t$ پس:

واسه حلش از اتحاد $a^2 + b^2 = (a-b)^2 + 2ab$ استفاده کردیم.

۲) $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2} - 6$

$f\left(x + \frac{1}{x}\right) = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2x \cdot \frac{1}{x} - 6 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 - 6 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 8$

$f(t) = t^2 - 8 \xrightarrow{t \rightarrow x} f(x) = x^2 - 8$

حالا $x + \frac{1}{x} = t$ پس:

واسه حلش از اتحاد $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$ استفاده کردیم.

تست ۹۸: اگر $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^3 + \frac{1}{x^3}$ ضابطه‌ی تابع $f(x)$ کدام است؟

(۱) $x^3 + 3x$ (۲) $x^3 - 3x$ (۳) $(x-1)^3$ (۴) $(x+1)^3$

پاسخ: باید ببینیم f با ورودی‌های خود چه کرده است. یعنی دقیقاً بلایی که به سر $x + \frac{1}{x}$ اومده چیه؟

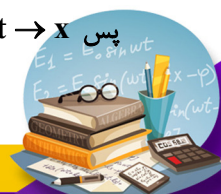
$f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3x \cdot \frac{1}{x} \left(x + \frac{1}{x}\right) = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right)$

$f(t) = t^3 - 3t$

الان اگر $x + \frac{1}{x} = t$ بگیریم:

$f(x) = x^3 - 3x$

پس $x \rightarrow t$:





تذکر: چنانچه تابع $f \circ g$ و تابع بیرونی f را داشته باشیم و تابع درونی g را بخواهیم، ابتدا به جای x های تابع f ، $g(x)$ قرار می‌دهیم و تابع $f(g(x))$ را برحسب $g(x)$ می‌یابیم. از آنجا که تابع $f \circ g$ را هم داریم، با مقایسه‌ی این دو ضابطه، تابع g را بدست می‌آوریم. تست ۹۹: اگر f و g به عنوان ماشین به صورت $x \rightarrow f \rightarrow g \rightarrow 2x$ و $g(x) = 3x + 4$ باشند، آنگاه مقدار $f(5)$ کدام است؟ (سراسری تجربی خارج از کشور ۹۱)



$$g(f(x)) = 2x$$

$$x=5 \rightarrow 3f(5) + 4 = 2 \cdot 5 \rightarrow f(5) = 2$$

تست ۱۰۰: اگر $f(x) = x^2 - x - 2$ و $f(g(x)) = x^2 + x - 2$ ، آنگاه $(f+g)(x)$ کدام گزینه می‌تواند باشد؟ (خارج تجربی ۹۰)

- $x^2 + 2x$ (۴) $x^2 - 2x$ (۳) $x^2 + 1$ (۲) $x^2 - 1$ (۱)

دانشه و تابعی را یکدیگر ضعیف به صورت $g(x) = ax + b$ است.

تست ۱۰۱: اگر $f(x) = x^2 + 1$ و $(f \circ g)(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$ باشد، با شرط $x \geq 1$ ، ضابطه‌ی $g(x)$ کدام است؟

- $(x-1)\sqrt{x-1}$ (۴) $(x-1)\sqrt{x-1}$ (۳) $\sqrt[3]{x-1}$ (۲) $\sqrt{x-1}$ (۱)

پاسخ: گزینه‌ی «۳» - $(f \circ g)(x)$ یعنی $f(g(x))$ پس $(f \circ g)(x) = g^2 + 1$ ، بنابراین:

$$g^2 + 1 = x^3 - 3x^2 + 3x \Rightarrow g^2 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 \Rightarrow g^2 = (x-1)^3 \Rightarrow g = \sqrt{(x-1)^3}$$

بنابراین ضابطه‌ی $g(x)$ به صورت $g(x) = |x-1|\sqrt{x-1}$ است. شرط $x \geq 1$ هم برای این داده شده که در این صورت

$$g(x) = (x-1)(\sqrt{x-1})$$

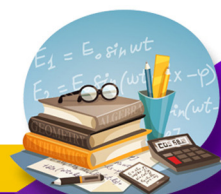
دامنه‌ی تابع مرکب

اگر f و g دو تابع باشند، آنگاه ترکیب آن‌ها یعنی $f(g(x))$ به شرطی تشکیل می‌شود که اولاً x اجازه داشته باشد به عنوان دامنه وارد g بشود ($x \in D_g$) و ثانیاً، $g(x)$ هم اجازه داشته باشد تا به عنوان دامنه وارد f بشود ($g(x) \in D_f$) و خواهیم داشت:

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

برای ترکیب $g(f(x))$ نیز داریم:

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$





اگر نخواستید از راه تعریف، دامنه را بدست آورید، ضابطه‌ی fog یا g of را نوشته ولی به هیچ عنوان، آن را ساده نمی‌کنیم و از روی ضابطه، دامنه را بدست می‌آوریم.

مثال ۱۰۲: اگر $f(x) = \frac{2}{x-1}$ و $g(x) = \frac{3}{x}$ ، دامنه و ضابطه‌ی fog را به دست آورید.

تست ۱۰۳: اگر $f(x) = \sqrt{1-x}$ و $g(x) = \sqrt{x-1}$ ، دامنه‌ی تابع fog کدام است؟
 (۱) [۰, ۱] (۲) [۰, ۲] (۳) [۱, ۲] (۴) [۱, ۳]

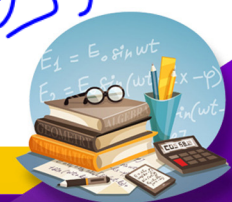
$x = \sqrt{x-1}$ را \ominus می‌کنیم
 $y = f(g(x)) = \sqrt{1-g(x)} = \sqrt{1-\sqrt{x-1}}$
 گ' و ۲ نقطه ۳ زیر $\sqrt{1-\sqrt{x-1}} = 2$ را \ominus می‌کنیم گ' نقطه فقط ۳ در رتبه
 [۱, ۲] \ominus ان \ominus ان $x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$ ان \ominus ان \ominus ان

تست ۱۰۴: اگر $f(x) = 4x^2 - 1$ و $g(x) = \sqrt{1-x^2}$ باشد، دامنه‌ی تعریف fog(x) کدام است؟
 (۱) $[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}]$ (۲) $[-1, 1]$ (۳) $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ (۴) $(-1, 1)$
 ۲۰۱، $1 - \sqrt{x-1} \geq 0$
 $1 \geq \sqrt{x-1}$
 $1 \geq x-1$
 $2 \geq x$

$y = f(g(x)) = 4g^2(x) - 1 = 4(\sqrt{1-x^2})^2 - 1$
 برای دامنه ساده شدن
 $1 - x^2 \geq 0$
 $1 \geq x^2 \rightarrow 1 \geq |x|$

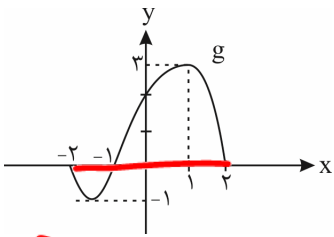
تست ۱۰۵: اگر $f(x) = \frac{1+x^2}{1-x^2}$ و $g(x) = \sqrt{x-x^2}$ باشند، دامنه‌ی تابع g of کدام است؟ (ریاضی ۹۶)
 (۱) [۰, ۱] (۲) {۰} (۳) (-۱, ۱) (۴) $\mathbb{R} - \{1, -1\}$

$y = g(f(x)) = \sqrt{f - f^2} = \sqrt{\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right) - \left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)^2}$
 $x = \frac{1}{2} \rightarrow \sqrt{\left(\frac{1+\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}\right) - \left(\frac{1+\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\frac{5}{4}}{\frac{3}{4}}\right) - \left(\frac{5}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{5}{3} - \frac{25}{9}} = \sqrt{\frac{5-25}{9}} = \frac{-10}{9}$
 نرنبه کی مثل $x = \frac{1}{2}$ نقطه
 و گ' در رتبه



f چندجذبی
D_f: R

تست ۱۰۶: اگر f(x) = 4x^2 - 2 و نمودار تابع g به صورت زیر باشد، دامنه‌ی تابع g ∘ f کدام است؟



$$D_{g(f(x))} = \{x \in D_f, f(x) \in D_g\}$$

$$x \in R, 4x^2 - 2 \in [-2, 2]$$

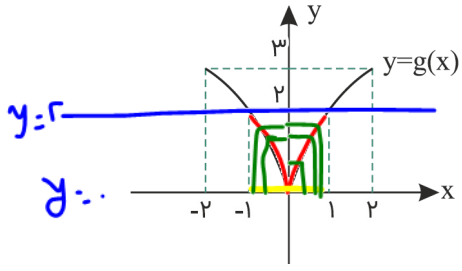
D_g: [-2, 2]
g(x)

D_{g(f(x))} = [-1, 1]

$-2 \leq 4x^2 - 2 \leq 2$
 $\cdot +2$
 $0 \leq 4x^2 \leq 4$
 $\div 4$
 $0 \leq x^2 \leq 1$
 $|x| \leq 1$
 $x \in R$

- (۱) [-1, 1] ✓
- (۲) [1/2, sqrt(5)/2]
- (۳) [-sqrt(5)/2, -1/2]
- (۴) [-sqrt(2), sqrt(2)]

تست ۱۰۷: اگر D_f = [0, 2] باشد و نمودار تابع g به صورت زیر باشد، دامنه‌ی f ∘ g کدام است؟



D_g: [-2, 2]
g(x)

f(x): 0 ≤ x ≤ 2
f ورودی

- (۱) [-2, 2]
- (۲) [-1, 1] ✓
- (۳) [-2, -1] ∪ [1, 2]
- (۴) [0, 2]

$$D_{f(g(x))} = \{x \in D_g \text{ و } g(x) \in D_f\} = \{ -2 \leq x \leq 2 \cap g(x) \in [0, 2] \}$$

مقایسه‌ی دامنه‌ی f(x) و f(g(x))
 ۱) اگر دامنه‌ی تابع f(x) بازه‌ی [a, b] باشد و بخواهیم دامنه‌ی تابع f(g(x)) را پیدا کنیم، باید نامعادله‌ی a ≤ g(x) ≤ b را حل کنیم. جواب آخر برابر اشتراک جواب این نامعادله و دامنه‌ی تابع g است.
 ۲) اگر دامنه‌ی تابع f(g(x)) بازه‌ی [a, b] باشد و بخواهیم دامنه‌ی تابع f(x) را پیدا کنیم، باید برد تابع g را به ازای متعلق به بازه‌ی [a, b] پیدا کنیم.
 مثال: [0, 2] ∩ [1, 2] = [1, 2] (جواب: [1, 2])
 مثال: [0, 2] ∩ [-1, 1] = [0, 1] (جواب: [0, 1])

تست ۱۰۸: اگر دامنه‌ی تابع f بازه‌ی [3, 12] باشد، دامنه‌ی تابع f(x/3 - 3) کدام است؟

- (۱) [-2, 1]
- (۲) [-1, 2]
- (۳) [18, 45]
- (۴) [6, 39]

پاسخ: گزینه‌ی «۳» - همان‌طور که گفتیم باید نامعادله‌ی 3 ≤ x/3 - 3 ≤ 12 را حل کنیم:

$$3 \leq \frac{x}{3} - 3 \leq 12 \Rightarrow 6 \leq \frac{x}{3} \leq 15 \Rightarrow 18 \leq x \leq 45$$

پس دامنه‌ی تابع f(x/3 - 3) برابر بازه‌ی [18, 45] است.



تست ۱۰۹: اگر دامنه‌ی تابع $f(x)$ بازه‌ی $[1, 5]$ باشد، دامنه‌ی تابع $f(\sqrt{x})$ حتمن شامل کدام مجموعه است؟

- (۱) $\{1, 2, 3, 4\}$ (۲) $\{1, 4, 9, 16\}$ (۳) $[1, 16]$ (۴) $[1, 2]$

پاسخ: گزینه‌ی «۲» - اول برد $[x]$ را به ازای $1 \leq x < 5$ پیدا می‌کنیم. اگر $1 \leq x < 5$ باشد، $[x]$ مقادیری برابر ۱، ۲، ۳ و ۴ دارد، پس دامنه‌ی تابع $f(x)$ مجموعه‌ی $\{1, 2, 3, 4\}$ است. حالا دامنه‌ی تابع $f(\sqrt{x})$ را پیدا می‌کنیم. اگر \sqrt{x} بخواهد برابر ۱ یا ۲ یا ۳ یا ۴ باشد x باید برابر ۱، ۴، ۹ و ۱۶ باشد، پس دامنه‌ی تابع $f(\sqrt{x})$ حتمن شامل اعضای مجموعه‌ی $\{1, 4, 9, 16\}$ است. دقت کنید که دامنه‌ی تابع \sqrt{x} ممکن است شامل تمام بازه‌ی $[1, 16]$ هم باشد.

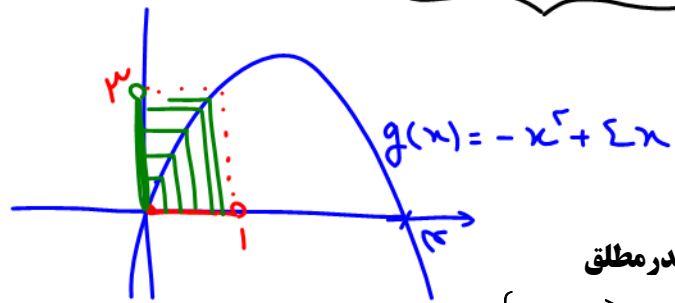
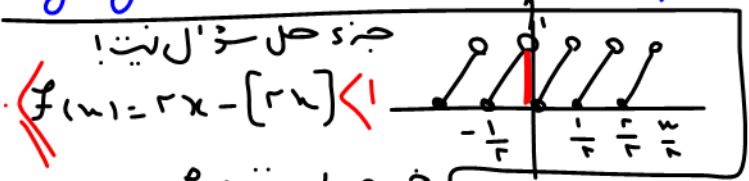
تست ۱۱۰: اگر $f(x) = 2x - [2x]$ و $g(x) = -x^2 + 4x$ باشند، برد تابع $g \circ f$ کدام است؟

- (۱) $[0, 2]$ (۲) $[0, 3]$ (۳) $[0, 4]$ (۴) $[1, 4]$

بی‌دینیم: $0 \leq u < [u] < u+1$ پس $f(x) = 2x - [2x]$

خریبی f و روی g است.

$y = g(x_1) = -x^2 + 4x = x(-x + 4)$



قدر مطلق

تابع $f(x) = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$ را تابع قدر مطلق می‌خوانند و آن را با نماد $f(x) = |x|$ نمایش می‌دهند.

تذکر: $\sqrt{a^2} = |a|$

خریبی یا برد تابع f و روی g تابع و خواهد شد

قدری که توش مثبت خودش میاد بیرون. قدری که توش منفیه قرینه‌اش!



- $|\sqrt{3} - \sqrt{5}| =$
- $|1 - \sqrt{2}| =$
- $|\sqrt{3} - \sqrt{2}| =$
- $|\sin x - 1| =$
- $|1 - \cos x| =$

تست ۱۱۱: اگر $a < 0 < b$ و $|b| < |a|$ باشد، حاصل $|a+b| + |a-b| + |a| + |b|$ کدام است؟

- (۱) $2a+b$ (۲) $a+2b$ (۳) $2b-a$ (۴) $b-2a$

پاسخ: گزینه‌ی «۴» - چون $a < 0$ و $b > 0$ است، پس $|a| = -a$ و $|b| = b$ و چون $|a| > |b|$ است (یعنی زور عدد منفی بیشتر است) پس $|a+b| = -a-b$ و $|a-b| = -a+b$

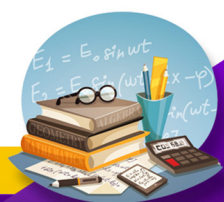
$|a+b| + |a-b| + |a| + |b| = -a-b - a+b - a+b = -3a+b$

تست ۱۱۲: هرگاه x و y دو عدد حقیقی ناصفر باشند و $|x| + |y| = x - y$ حاصل $\sqrt{|x| + |y| + x} + \sqrt{|x| + |y| - y}$ کدام است؟

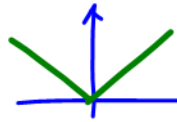
- (۱) $-x-y$ (۲) $y-x$ (۳) $x-y$ (۴) $x+y$

پاسخ: گزینه‌ی «۳» - چون $|x| + |y| = x - y$ شده است، پس $x > 0$ و $y < 0$ است و در نتیجه:

$\sqrt{|x| + |y| + x} + \sqrt{|x| + |y| - y} = \sqrt{x^2 - xy - yx + y^2} = \sqrt{x^2 - 2xy + y^2} = \sqrt{(x-y)^2} = |x-y| = x-y$



ویژگی‌های تابع قدر مطلق:



$$|2-3| = |3-2|$$

قدر منفی خوره، منفی روی خوره!

۱) $|x| \geq 0$

مثبت یا صفر مناسبتی

۲) $\sqrt{u^2} = |u|$

۳) $|-x| = |x| \Rightarrow |a-b| = |b-a|$ یعنی داخل قدر مطلق را می‌توان در منفی ضرب نمود

بجز تندر

$$\begin{cases} |u| = a \xrightarrow{a \geq 0} u = \pm a \xrightarrow{\text{مثلاً}} |x-1| = 3 \Rightarrow x-1 = \pm 3 \Rightarrow x = 4, -2 \\ |u| \leq a \xrightarrow{a \geq 0} -a \leq u \leq a \xrightarrow{\text{مثلاً}} |x-1| \leq 3 \Rightarrow -3 \leq x-1 \leq 3 \Rightarrow -2 \leq x \leq 4 \\ |u| \geq a \xrightarrow{a \geq 0} u \geq a \text{ یا } u \leq -a \xrightarrow{\text{مثلاً}} |x-1| \geq 3 \Rightarrow \begin{cases} x-1 \geq 3 \Rightarrow x \geq 4 \\ \text{یا} \\ x-1 \leq -3 \Rightarrow x \leq -2 \end{cases} \end{cases}$$

۵) $|x| \geq x \xrightarrow{\text{مثلاً}} y = \sqrt{|x|-x} \xrightarrow{\text{دامنه}} |x|-x \geq 0 \Rightarrow |x| \geq x$ بدیهی $\Rightarrow D_f = \mathbb{R}$

۶) $|x|^2 = |x^2| = x^2$

۷) $|x+y| \leq |x|+|y|$ نامساوی مثلثی $\Rightarrow \begin{cases} |x+y| = |x|+|y| \Rightarrow xy \geq 0 \text{ و } x \text{ و } y \text{ هم‌علامت} \\ |x+y| < |x|+|y| \Rightarrow xy < 0 \text{ و } x \text{ و } y \text{ مختلف‌العلامت} \end{cases}$

تست ۱۱۳: اگر به ازای هر $x \in \mathbb{R}$ ، $A = \frac{x^2 - x + 1}{|x^2 - 1| + |x - 2|}$ باشد، دقیق‌ترین محدوده‌ی A کدام است؟

$A \geq 1$ (۴) $0 < A < 1$ (۳) $0 < A \leq 1$ (۲) $A > 0$ (۱)

پاسخ: گزینه‌ی «۲» - با توجه به نامساوی مثلثی $|a+b| \leq |a|+|b|$ نتیجه می‌گیریم که:

$$0 \leq \frac{|a+b|}{|a|+|b|} \leq 1 \xrightarrow{\substack{a=x^2-1 \\ b=2-x}} 0 \leq \frac{|x^2-x+1|}{|x^2-1|+|2-x|} \leq 1$$

از طرفی $x^2 - x + 1$ یک عبارت همواره مثبت است چون $\Delta < 0$ و $a > 0$ می‌باشد:

$$0 < \frac{x^2 - x + 1}{|x^2 - 1| + |x - 2|} \leq 1 \Rightarrow 0 < A \leq 1$$

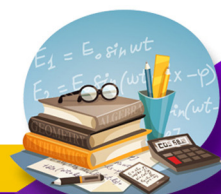
۸) $|xy| = |x||y| \xrightarrow{\text{مثلاً}} |x^2-1| = |x-1||x+1|$

۹) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$

مثال: $\left|\frac{x-1}{x+2}\right| < 1$

یادت باشه: برای حل نامعادله قدرمطلق $|u| < |v|$ می‌توانیم دو طرف را به توان ۲ برسانیم تا قدرمطلق‌ها از بین بروند:

$$|x-1| < |x+2| \xrightarrow{\text{توان ۲}} (x-1)^2 < (x+2)^2 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 < x^2 + 4x + 4 \Rightarrow -6x < 3 \Rightarrow x > -\frac{1}{2}$$



حل معادلات قدر مطلق

(۱) معادلات به فرم $|f(x)| = a$ ، $(a \geq 0)$: برای حل این معادله به صورت مقابل عمل می‌کنیم:

$$|f(x)| = a \Rightarrow f(x) = \pm a$$

مثلاً $|x-3| = 2$ به صورت $x-3 = \pm 2$ حل می‌شود که یک‌بار $x=5$ و یک‌بار $x=1$ به دست می‌آید.

(۲) معادلات به فرم $|f(x)| = |g(x)|$: حل این مدل از معادلات به صورت زیر است: مثلاً برای حل معادله $|2x-1| = |x|$ داریم:

$$|2x-1| = |x| \Rightarrow 2x-1 = \pm x \Rightarrow \begin{cases} 2x-1 = x \Rightarrow x=1 \\ 2x-1 = -x \Rightarrow 3x=1 \Rightarrow x=\frac{1}{3} \end{cases}$$

(۳) معادلات به فرم $|f(x)| = g(x)$: در حل این دسته از معادلات چون طرف چپ، یک عبارت نامنفی است پس برای برقرار بودن تساوی باید عبارت سمت راست هم، نامنفی باشد یعنی $g(x) \geq 0$. حالا با این شرط، جاب‌ها را به صورت زیر می‌یابیم:

$$|f(x)| = g(x) \Rightarrow f(x) = \pm g(x)$$

فقط x هایی قبول می‌شوند که $g(x)$ را منفی نکنند.

مثلاً برای حل معادله $|x-1| = -2x$ داریم:

$$|x-1| = -2x \Rightarrow x-1 = \pm 2x \Rightarrow \begin{cases} x-1 = 2x \Rightarrow x=-1 \\ x-1 = -2x \Rightarrow 3x=1 \Rightarrow x=\frac{1}{3} \end{cases}$$

اگر $x = \frac{1}{3}$ باشد سمت راست تساوی یعنی $-2x$ ، منفی می‌شود پس $x = \frac{1}{3}$ قبول نیست ولی اگر $x = -1$ باشد سمت راست یعنی $-2x$ ، منفی نمی‌شود پس $x = -1$ قبول است.

(۴) معادلات به فرم $|f(x)| = f(x)$: این دسته از معادلات زمانی برقرار هستند که $f(x) \geq 0$ باشد. مثلاً برای حل $|x-1| = x-1$ داریم:

$$|x-1| = x-1 \Rightarrow x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$$

(۵) معادلات به فرم $|f(x)| = -f(x)$: این دسته از معادلات زمانی برقرار هستند که $f(x) \leq 0$ باشد. مثلاً برای حل $|x-2| = 2-x$ داریم:

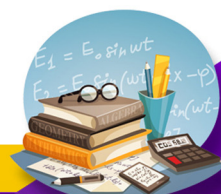
$$|x-2| = 2-x \Rightarrow x-2 \leq 0 \Rightarrow x \leq 2$$

(۶) معادلات به فرم $|f(x)| + |g(x)| = 0$: چون قدرمطلق یک عبارت همواره نامنفی است، از درسنامه معادلات گنگ فهمیدیم که جمع چند عبارت نامنفی زمانی صفر است که هر کدام از آن‌ها صفر باشد.

تست ۱۱۴: معادله $|x-x^2| + |x^3 - 2x^2 + 4x - 3| = 0$ چند جواب دارد؟ جمع دو نامنفی صفره شدند صفرند.

$$x - x^2 = x(1-x) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ یا } x = 1$$

فقط $x = 0$ تنها دو صفر می‌کند.



۷) اگر معادله با هیچ یک از ۶ حالت قبل تطابق نداشت، باید به کمک تعیین علامت جواب‌ها را در صورت وجود پیدا کنیم. مثلاً معادله

$$|x| + |2x - 2| = x - 3$$

برای این منظور ابتدا ریشه‌های داخل قدرمطلق‌ها را به دست می‌آوریم که می‌شود $x = 0$ و $x = 1$ و سپس x را یک‌بار کوچک‌تر از ریشه کوچک، یک‌بار بین دو ریشه و یک‌بار بزرگ‌تر از ریشه بزرگ‌تر قرار می‌دهیم. سپس جواب به دست آمده را به شرطی قبول می‌کنیم که در محدوده تعیین شده قرار گرفته باشد.

$$x < 0 \Rightarrow -x - (2x - 2) = x - 3 \Rightarrow -x - 2x + 2 = x - 3 \Rightarrow x = \frac{5}{4}$$

$x = \frac{5}{4}$ در محدوده $x < 0$ قرار ندارد و اشتراکشان \emptyset شد پس $x = \frac{5}{4}$ قبول نمی‌شود.

$$0 \leq x < 1 \Rightarrow x - (2x - 2) = x - 3 \Rightarrow x - 2x + 2 = x - 3 \Rightarrow -2x = -5 \Rightarrow x = \frac{5}{2}$$

اشتراکشان \emptyset شد پس $x = \frac{5}{2}$ قبول نمی‌شود.

$$x \geq 1 \Rightarrow x + 2x - 2 = x - 3 \Rightarrow 2x = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

اشتراکشان \emptyset شد پس $x = -\frac{1}{2}$ قبول نمی‌شود.

پس این معادله جواب ندارد.

تست ۱۱۵: مجموعه جواب معادله $|x^3 - 9x| + x^3 - 9x = 0$ شامل چند عدد طبیعی می‌باشد؟

$|x^3 - 9x| = -x^3 + 9x$ ۴ (۴) ۳ (۳) ۲ (۲) ۱ (۱)

$|u| = -u \rightarrow u \leq 0$ $x^3 - 9x \leq 0$

$x^3 - 9x = x(x^2 - 9) = x(x+3)(x-3) \leq 0$

خط محور x با نقاط $-\infty, -3, 0, 3, +\infty$ و علامت‌ها: $-$ (بین -3 و 0), $+$ (بین 0 و 3), $-$ (بین 3 و $+\infty$).

جواب: $x \in \mathbb{N} : 1, 2, 3$

تست ۱۱۶: مجموعه جواب معادله $x + \sqrt{x^2 - 2\sqrt{3}x + 3} = \sqrt{3}$ کدام است؟

- (۱) \mathbb{R} (۲) $\{\sqrt{3}\}$ (۳) $(-\infty, \sqrt{3}]$ (۴) $(\sqrt{3}, +\infty)$

پاسخ: گزینه «۳»

$$x + \sqrt{x^2 - 2\sqrt{3}x + 3} = \sqrt{3} \Rightarrow x + \sqrt{(x - \sqrt{3})^2} = \sqrt{3} \Rightarrow |x - \sqrt{3}| = \sqrt{3} - x$$

می‌دانیم اگر $|u| = -u$ باشد، آن‌گاه $u \leq 0$ است؛ پس:

$$x - \sqrt{3} \leq 0 \Rightarrow x \leq \sqrt{3} \Rightarrow x \in (-\infty, \sqrt{3}]$$

تست ۱۱۷: مجموعه‌ی جواب نامعادله $(-x^2 - 6)(5 - |2x - 1|) \leq 0$ کدام است؟

- (۱) $\mathbb{R} - (-2, 3)$ (۲) $[-2, 3]$ (۳) $(-2, 3)$ (۴) $\mathbb{R} - [-2, 3]$

$$-(x^2 + 6)(5 - |2x - 1|) \leq 0$$

باید مثبت یا منفی

$5 - |2x - 1| \geq 0 \Rightarrow |2x - 1| \leq 5 \Rightarrow -5 \leq 2x - 1 \leq 5 \Rightarrow -2 \leq x \leq 3$



تست ۱۱۸: مجموع ریشه‌های معادله $3|x| - |x-1| + x = 0$ کدام است؟

$-\frac{4}{5}$ (۴) ✓ $-\frac{7}{15}$ (۳) $-\frac{2}{15}$ (۲) $-\frac{4}{3}$ (۱)

$x < 0 \rightarrow -3x + x - 1 + x = 0 \rightarrow x = -1 < 0$ ✓
 $0 \leq x \leq 1 \rightarrow 3x + x - 1 + x = 0 \rightarrow x = \frac{1}{5} \in [0, 1]$ ✓
 $x > 1 \rightarrow 3x - x + 1 + x = 0 \rightarrow x = -\frac{1}{3}$ ✗

$(x_1 = -1) + (x_2 = \frac{1}{5}) = -\frac{4}{5}$

حل نامعادله قدرمطلق:

تست ۱۱۹: مجموعه جواب نامعادله $|x| + |3x-1| \leq 5$ شامل چند عدد صحیح است؟

(۱) هیچ (۲) یک (۳) دو (۴) سه

پاسخ: گزینه «۴» - ریشه‌های قدرمطلقها $x = 0$ و $x = \frac{1}{3}$ است، پس:

$|x| + |3x-1| \leq 5$

فرض $x \leq 0 \Rightarrow -x - 3x + 1 \leq 5 \Rightarrow x \geq -1 \Rightarrow -1 \leq x \leq 0$
 فرض $0 \leq x \leq \frac{1}{3} \Rightarrow x - 3x + 1 \leq 5 \Rightarrow x \geq -2 \Rightarrow 0 \leq x \leq \frac{1}{3}$
 فرض $\frac{1}{3} \leq x \Rightarrow x + 3x - 1 \leq 5 \Rightarrow x \leq \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{1}{3} \leq x \leq \frac{3}{2}$

$\cup \rightarrow -1 \leq x \leq \frac{3}{2}$

ریشه قدرمطلق را بیابید در هر زیر بازه نامعادله را حل کنید بین فرض در جواب‌ها اشتراک بگیرید در آن فرضین جواب‌های نهایی اجتناب کنید.

پس مجموعه جواب نامعادله می‌شود بازه $[-1, \frac{3}{2}]$ که شامل ۳ عدد صحیح $-1, 0, 1$ است.

تست ۱۲۰: تمام جواب‌های نامعادله $|x-1| < |x-3|$ کدام است؟

(۱) $x \leq 2$ (۲) $x > 2$ (۳) $1 \leq x \leq 3$ (۴) $x < 2$

پاسخ: گزینه «۴» - طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم:

$|x-1| < |x-3| \xrightarrow{\text{توان ۲}} x^2 - 2x + 1 < x^2 - 6x + 9 \Rightarrow 4x < 8 \Rightarrow x < 2$
 یا $|x-1| < |x-3| \Rightarrow (x-1)^2 - (x-3)^2 < 0 \Rightarrow 2(2x-4) < 0 \Rightarrow x < 2$

تست ۱۲۱: اگر مجموعه جواب نامعادله $|ax+b| > 3$ به صورت $\mathbb{R} - [-1, 2]$ باشد، $a+b$ کدام می‌تواند باشد؟

$|u| > a \rightarrow u < -a \text{ یا } u > a$

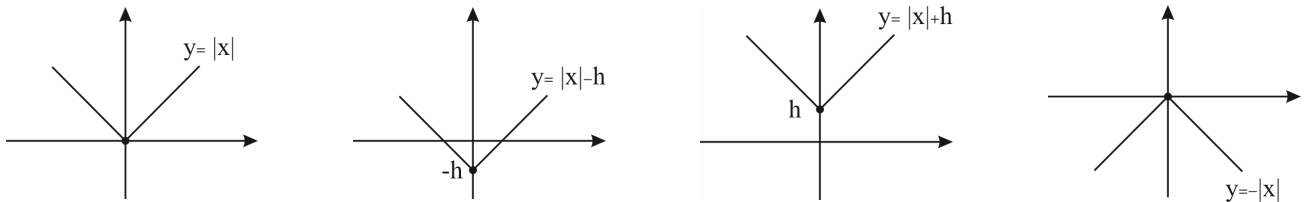
$ax+b > 3 \rightarrow x > \frac{3-b}{a} = 2$
 $ax+b < -3 \rightarrow x < \frac{-3-b}{a} = -1$

$\begin{cases} 3-b = 2a \\ -3-b = -a \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3-b = 2a \\ 3+b = a \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} 3-b = 2a \\ +) 3+b = a \\ \hline 7 = 3a \end{matrix} \rightarrow a = \frac{7}{3} \rightarrow \begin{matrix} 3-b = 2a \\ 3-b = \frac{14}{3} \\ \hline b = -\frac{5}{3} \end{matrix}$

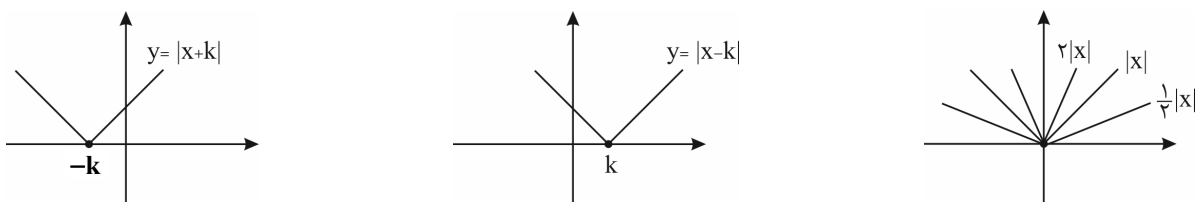


نمودارهای قدر مطلق

(۱) رسم به کمک انتقال: این روش برای رسم تابع‌هایی به فرم $\pm |x \pm k| \pm h$ کاربرد دارد. به مثال‌های زیر توجه کنید:



اگر $|x|$ را نسبت به محور x همان $|x|$ است که به اندازه h پایین آمده است. ($h > 0$) همان $|x|$ است که به اندازه h بالا رفته است. ($h > 0$)



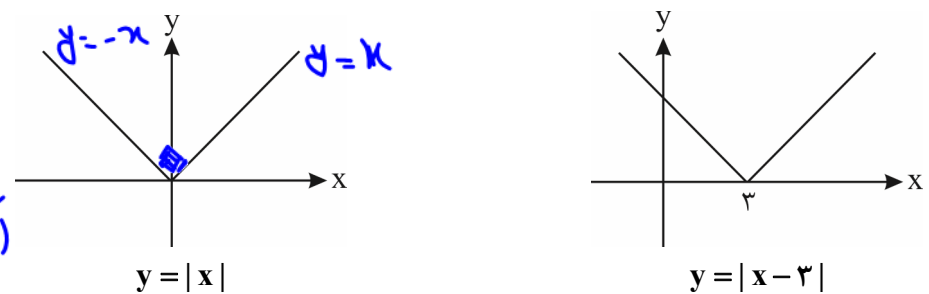
همان $|x|$ است که به اندازه k به چپ رفته است. ($k > 0$) همان $|x|$ است که به اندازه k به راست رفته است. ($k > 0$)

رسم چند تابع قدر مطلق:

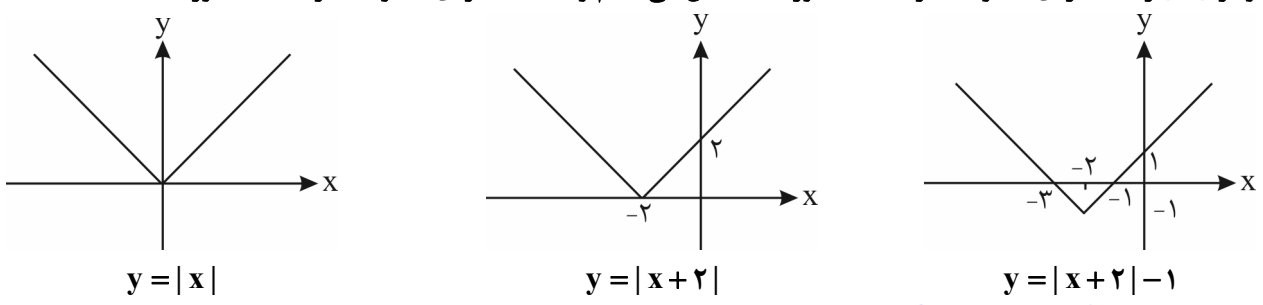
(۱) در تابع‌های ساده مثل $y = |x - a| + k$ می‌شود نمودار را با انتقال نمودار تابع $y = |x|$ رسم کرد.

توجه: برای رسم نمودار تابع $f(x+a)$ نمودار $f(x)$ را به اندازه a در امتداد محور x انتقال می‌دهیم و برای رسم نمودار تابع $f(x) + k$ نمودار $f(x)$ را به اندازه k در امتداد محور y انتقال می‌دهیم. این مثال را ببینید:
 نمودار $y = |x|$ را به اندازه 3 واحد ($-a$ می‌شود $-(-3)$) در امتداد محور x انتقال می‌دهیم.

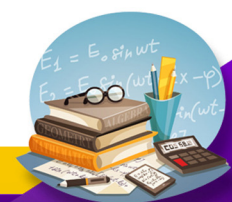
ریشه ساره داخل قدر مطلق قبول فقط زاویه دار (لوحه) است



حالا یکی دیگر: اول نمودار $|x|$ را به اندازه 2 واحد در امتداد محور x انتقال می‌دهیم و بعد به اندازه 1 واحد در امتداد محور y :



در $x = -2$ تمیز شده



از رسم نمودار توابع شامل قدرمطلق می توان برای پیدا کردن مینیمم و ماکسیمم تابع (و در نتیجه برد تابع) استفاده کرد. کافی است نمودار را رسم کنیم و سپس کمترین یا بیشترین مقدار y را از روی نمودار پیدا کنیم.

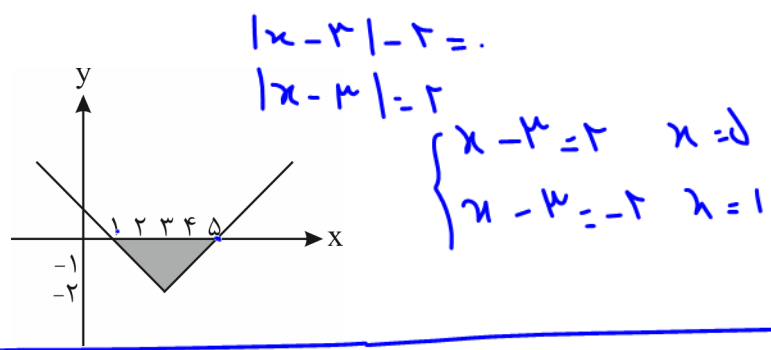
تست ۱۲۲: مساحت مثلث که بین نمودار تابع $y = |x-3|-2$ و محور طولها تشکیل می شود، چند واحد سطح است؟

- ۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

پاسخ: گزینه ی «۳» - نمودار تابع را رسم می کنیم:

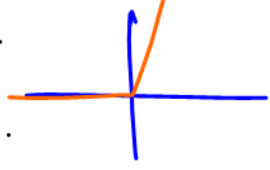
مثلی که بین نمودار تابع و محور x ها تشکیل می شود، مثلثی است با قاعده ی به طول ۴ (نمودار محور x ها را در $x=1$ و $x=5$ قطع کرده

است (چرا؟!)) و ارتفاع ۲ پس مساحتش برابر $\frac{4 \times 2}{2} = 4$ است.

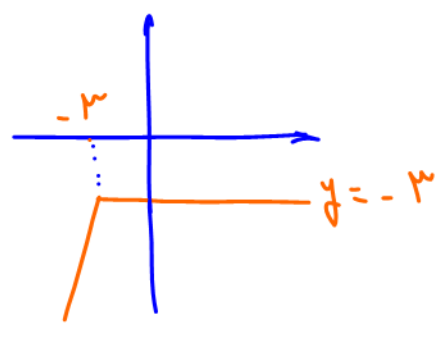


حللولیت رسم نمودار توابع زیر:

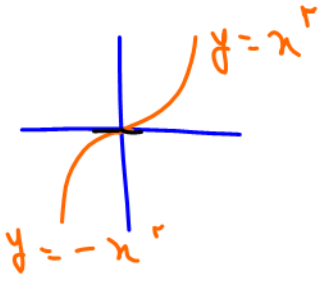
۱) $y = x + |x| = \begin{cases} x - x = 0 & x \leq 0 \\ x + x = 2x & x \geq 0 \end{cases}$



۲) $y = x - |x+3| = \begin{cases} x - x - 3 = -3 & x \geq -3 \\ x + x + 3 = 2x + 3 & x \leq -3 \end{cases}$

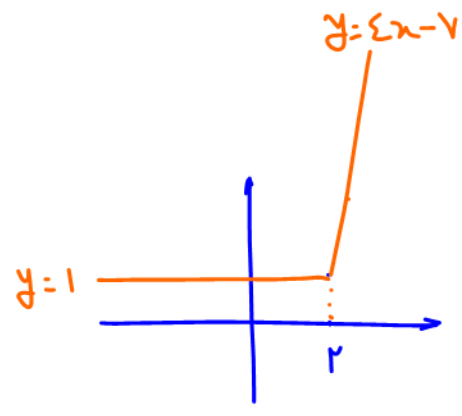
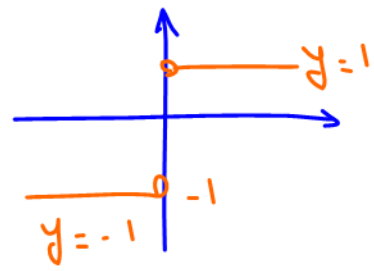


۳) $y = x \sqrt{|x|} = \begin{cases} x(x) = x^2 & x \geq 0 \\ x(-x) = -x^2 & x < 0 \end{cases}$

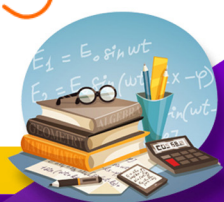


نکته: اگر ریشه ی ساده داخل قدرمطلق ضرب آن را مقولانه آن نقطه زاویه دار است

۴) $y = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} \frac{x}{x} = 1 & x > 0 \\ \frac{-x}{x} = -1 & x < 0 \end{cases}$
 $D_f: \mathbb{R} - \{0\}$



۵) $y = 2x - 3 + |2x - 4| = \begin{cases} 2x - 3 + 2x - 4 = 4x - 7 & x \geq 2 \\ 2x - 3 - 2x + 4 = 1 & x < 2 \end{cases}$



⑥ $y = |x-1| + |x-3| = \begin{cases} x < 1 : y = -x+1-x+3 = -2x+4 & \text{نیم خط} \\ 1 \leq x \leq 3 : y = x-1-x+3 = 2 & \text{پاره خط} \\ x > 3 : y = x-1+x-3 = 2x-4 & \text{نیم خط} \end{cases}$

جمع دو قدر مطلق
شکل x
شکل x و نه!

$y_{\min} = 2$
برای $y \geq y_{\min} = 2$

مقدارشان $x = \frac{1+3}{2} = 2$

⑦ $y = |x-1| - |x-3| = \begin{cases} x < 1 : y = -x+1+x-3 = -2 & \text{نیم خط} \\ 1 \leq x \leq 3 : y = x-1+x-3 = 2x-4 & \text{پاره خط} \\ x > 3 : y = x-1-x+3 = 2 & \text{نیم خط} \end{cases}$

تفریق دو قدر مطلق
شکل x
آب را با سر سره است!

$y_{\min} = -2$
برای $y \geq -2$

مقدارشان $x_w = \frac{1+3}{2} = 2$

نکته: برای یافتن \min توابع $y = |a_1x-b_1| + |a_2x-b_2| + \dots + |a_nx-b_n|$ ، بیشترین قدر مطلق‌ها را یافته آن‌ها را در یک عبارت بنویسید کمترین x در دست است.

⑧ $y = x + |x-2| + |x+3|$

$x=2$ $x=-3$

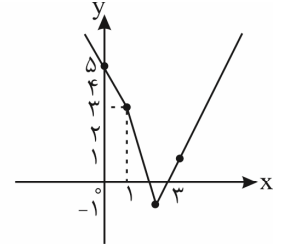
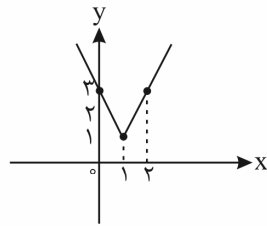
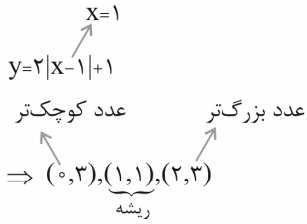
A(-3, 3) B(-2, 2) C(2, 7) D(3, 13)

$y_{\min} = 2$
برای $y \geq y_{\min} = 2$



۲) برای رسم توابعی که به صورت $y = |a_1x - x_1| + |a_2x - x_2| + \dots + |a_nx - x_n| + k$ هستند کافی است ریشه‌ی هر کدام از قدرمطلق‌ها را پیدا کنیم و بعد یک عدد کوچک‌تر از کوچک‌ترین ریشه و یک عدد بزرگ‌تر از بزرگ‌ترین ریشه در نظر بگیریم و بعد مختصات نقاطی را که این عددها و ریشه‌ها طول‌هایشان هستند، پیدا کنیم و آن‌ها را روی محور مختصات مشخص و به ترتیب به هم وصل کنیم و دو پاره‌خط اول و آخر را امتداد دهیم.

این مثال‌ها را ببینید:



اگر دقت کنید در این ضابطه‌ها پس از ساده کردن قدرمطلق‌ها و تعیین علامت آن‌ها در بازه‌های مختلف یک معادله خط در هر بازه باقی خواهد ماند و از آن‌جا که خطی که از هر دو نقطه می‌گذرد منحصر به فرد می‌باشد ما با این کار از هر خط دو نقطه را می‌دهیم که با وصل کردن آن‌ها به یکدیگر نمودار خط هر قسمت به دست می‌آید.

تست ۱۲۳: کم‌ترین مقدار تابع $f(x) = |3x| + |x+2| - x$ برابر کدام است؟

۱) ۴ -

۲) ۲ ✓

۳) ۱

۴) صفر

$x = 0 \rightarrow f(0) = 0 + 2 - 0 = 2 = 4 \text{ min}$

$x = -2 \rightarrow f(-2) = 2 - 0 + 2 = 4$

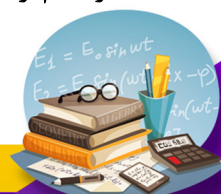
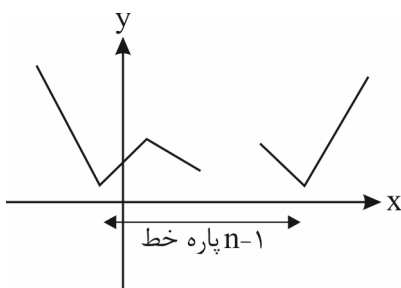
چند نکته در مورد نمودارهای توابع شامل قدرمطلق

۱) با توجه به روش رسم نمودار تابع $y = |a_1x - b_1| + |a_2x - b_2| + \dots + |a_nx - b_n|$ مشخص است که نمودار این تابع از $n-1$ پاره‌خط و دو نیم‌خط تشکیل شده است. (چرا؟)

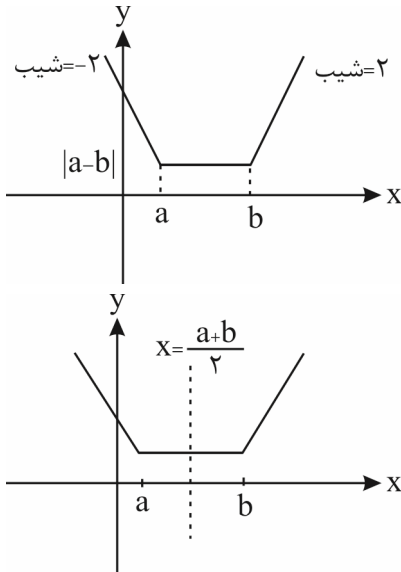
پس کم‌ترین مقدار تابع همیشه به ازای یکی از ریشه‌ها به دست می‌آید.

بنابراین برای پیدا کردن حداقل عبارت‌هایی مثل عبارت بالا کافی است مقدار تابع را به ازای ریشه‌ی

هر کدام از قدرمطلق‌ها پیدا کنیم و کم‌ترین مقدار به دست آمده را انتخاب کنیم.



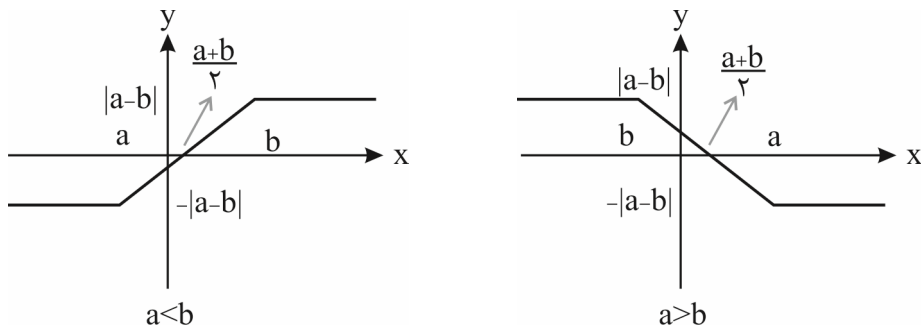
۲) نمودار تابع با ضابطه‌ی $y = |x-a| + |x-b|$ را می‌توانیم با همان روشی که تا الان یاد گرفته‌ایم، رسم کنیم. ولی در مورد این تابع می‌توانید این نکته را هم یاد بگیرید.



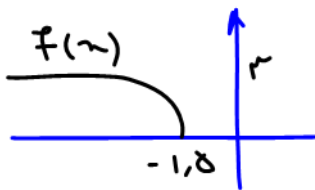
نمودار این تابع‌ها به صورت روبه‌رو است: (بعضی‌ها دوست دارند بگویند گلدانی است!) کم‌ترین مقدار تابع برابر $|a-b|$ و طول نقاط زاویه‌دار نمودار ریشه‌های عبارت‌های داخل قدرمطلق است، شیب دو نیم‌خطی هم که در سمت چپ و راست پاره‌خط افقی رسم می‌شوند برابر -2 و 2 است. منحنی دارای یک محور تقارن است به معادله‌ی $x = \frac{a+b}{2}$ یا «میانگین ریشه‌ها» x

۳) محور تقارن تابع $y = |x-a| + |x-b|$ خط $x = \frac{a+b}{2}$ است. اگر به نمودار نگاه کنید، می‌بینید محور تقارن در اصل همان میانگین ریشه‌ها است. پس به طور کلی معادله‌ی محور تقارن هر تابع با ضابطه‌ی $y = |a_1x+b_1| + |a_2x+b_2|$ (به شرط این که $|a_1| = |a_2|$ باشد) به صورت «میانگین ریشه‌ها» x است.

۴) نمودار تابع‌هایی با ضابطه‌ی $y = |x-a| - |x-b|$ را هم می‌توان با استفاده از روشی که برای رسم نمودار تابع‌های شامل قدرمطلق یاد گرفتید رسم کرد. ولی در مورد این تابع خوب است این‌ها را هم بدانید:



نمودار تابع به یکی از دو صورت بالا است (بعضی‌ها دوست دارند بگویند سرسره‌ای یا آبشاری!) تابع همواره بین $|a-b|$ و $-|a-b|$ است یعنی $|a-b| \geq y \geq -|a-b|$. نمودار تابع یک مرکز تقارن دارد که مختصاتش $(\frac{a+b}{2}, 0)$ است، شیب خطی که دو پاره‌خط افقی را به

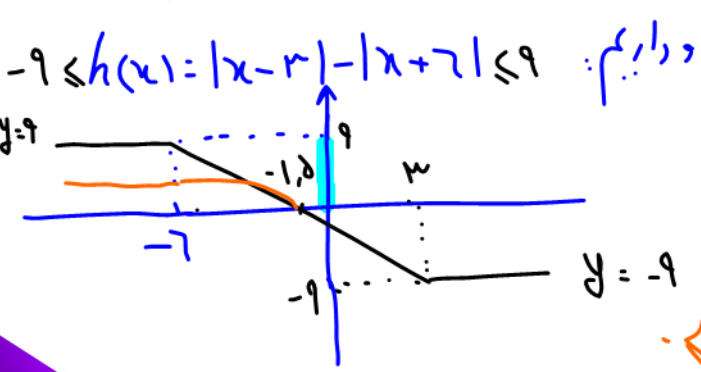


هم وصل می‌کند برابر 2 یا -2 است. تست ۱۲۴: برد تابع $f(x) = \sqrt{|x-3| - |x+6|}$ شامل چند عدد صحیح است؟

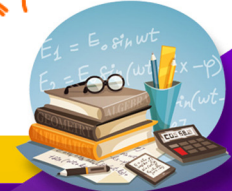
- ۱) ۰
- ۲) ۷
- ۳) ۳
- ۴) ۴

هم

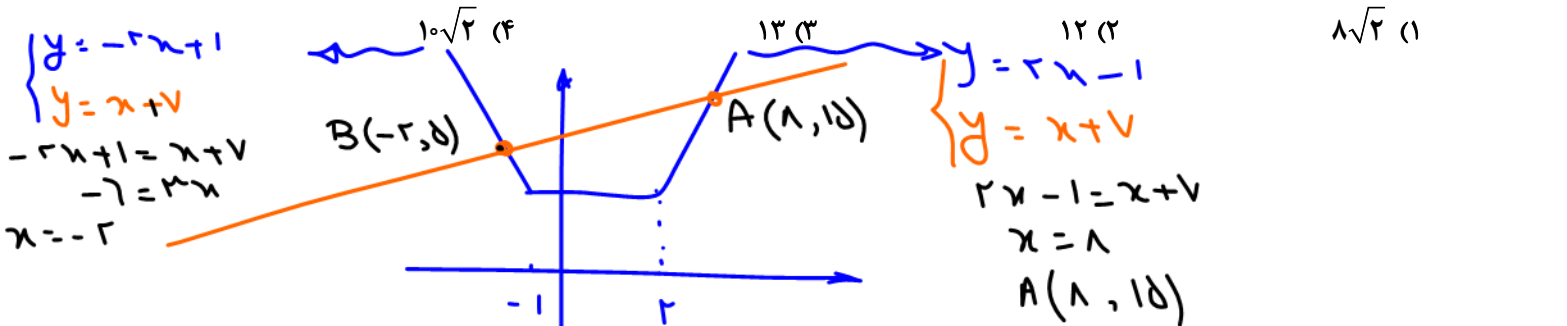
می‌دانیم این تابع ترکیب دو تابع $g(x) = \sqrt{x}$ و $h(x) = |x-3| - |x+6|$ است. $f(x) = g(h(x))$ خردی باید $h(x)$ و دردی تابع $g(x)$ شود داریم: $-9 \leq h(x) = |x-3| - |x+6| \leq 9$



$f(x) = \sqrt{-9 \leq h(x) \leq 9}$
 $h(x) < 9$
 $f(x) = g(h(x)) < 3$



تست ۱۲۵: نمودارهای دو تابع $y = |x-2| + |x+1|$ و $y = x+7$ ، در دو نقطه‌ی A و B متقاطع هستند. اندازه‌ی پاره‌خط AB، کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۹)



$$AB = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{(1 - (-2))^2 + (15 - 5)^2} = \sqrt{10^2 + 10^2} = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}$$

تست ۱۲۶: اگر مرکز تقارن نمودار تابع $y = |x-k+1| - |x+2|$ باشد، کمترین مقدار تابع $y = |x+2| + |x-k|$ کدام است؟

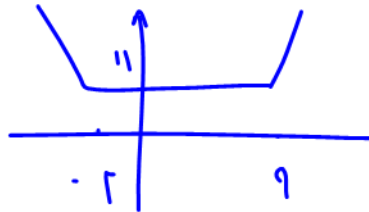
طول مرکز تقارن آبشار وسط آبشار است

$$k = x_w = \frac{(k-1) + (-2)}{2} = 11$$

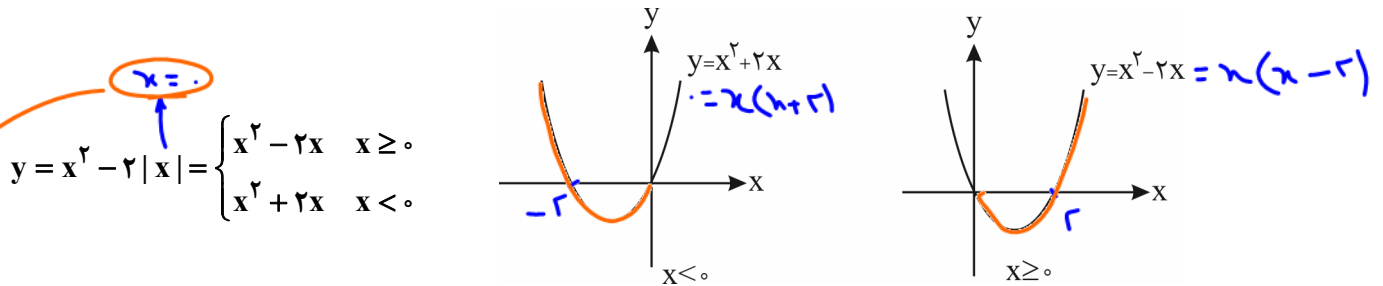
$k = 9$

$$y = |x+2| + |x-9|$$

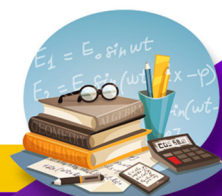
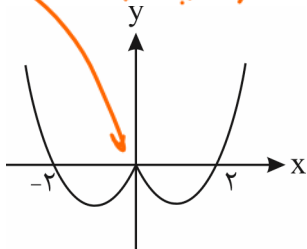
$x = -2 \rightarrow f(-2) = 11$
 $x = 9 \rightarrow f(9) = 11$

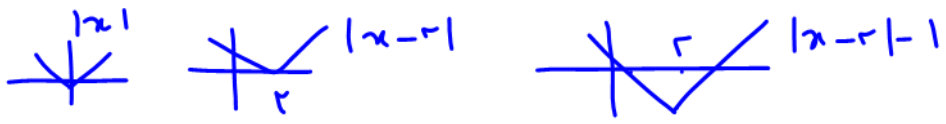


۳) راه اصلی رسم نمودار این توابع تعیین علامت عبارت داخل قدرمطلق است. به این مثال توجه کنید:



قسمتی از نمودار اول که $(x \geq 0)$ در ناحیه‌ی اول یا چهارم است را به قسمتی از نمودار دوم که $(x \leq 0)$ در ناحیه‌ی سوم یا دوم است متصل می‌کنیم.



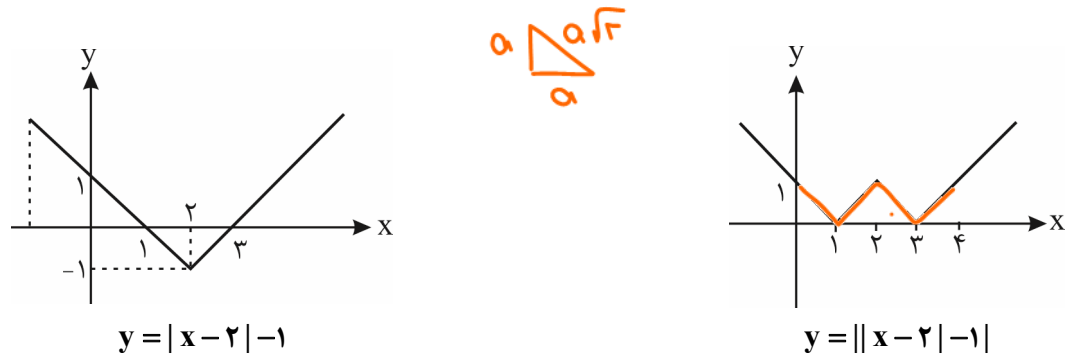


۴) برای رسم نمودار تابع $y = |f(x)|$ ابتدا نمودار تابع $y = f(x)$ را رسم می‌کنیم و سپس قسمت‌های پایین محور طول‌ها را نسبت به محور طول‌ها قرینه می‌کنیم.

تست ۱۲۷: مجموع طول پاره‌خط‌های تشکیل‌دهنده نمودار تابع $y = ||x-2|-1|$ در بازه $0 \leq x \leq 4$ کدام است؟

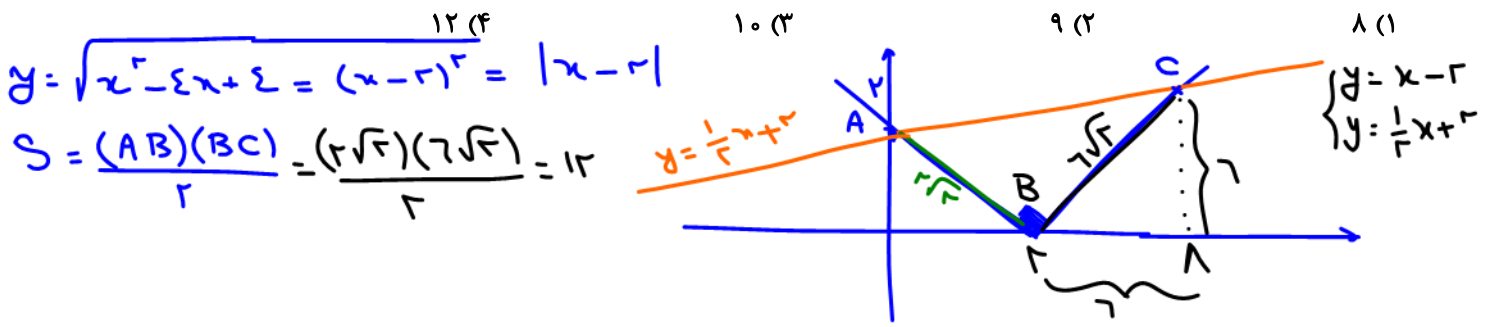
- ۸√۲ (۴)
- ۶√۲ (۳)
- ۴√۲ (۲)
- ۲√۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۲ - ابتدا نمودار تابع $f(x) = |x-2|-1$ را رسم می‌کنیم و سپس قسمت‌های پایین محور X‌ها را نسبت به محور X‌ها قرینه می‌کنیم:

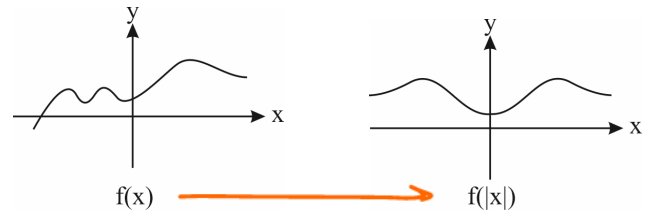


حالا برای آن که طول پاره‌خط‌ها را پیدا کنیم مختصات دو نقطه به طول $x=4$ و $x=0$ را پیدا می‌کنیم که می‌شود $(0,1)$ و $(4,1)$. حالا به شکل نگاه کنید نمودار از چهار پاره‌خط تشکیل شده که طول همه‌شان $\sqrt{2}$ است پس مجموع طول پاره‌خط‌ها می‌شود $4\sqrt{2}$.

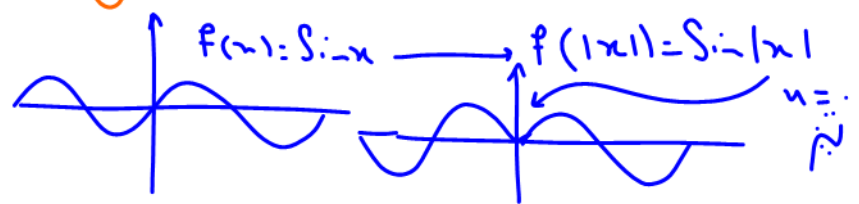
تست ۱۲۸: مساحت ناحیه محدود به نمودارهای دو تابع $y = \sqrt{x^2 - 4x + 4}$ و $y = \frac{1}{2}x + 2$ ، کدام است؟ (ریاضی ۹۹)



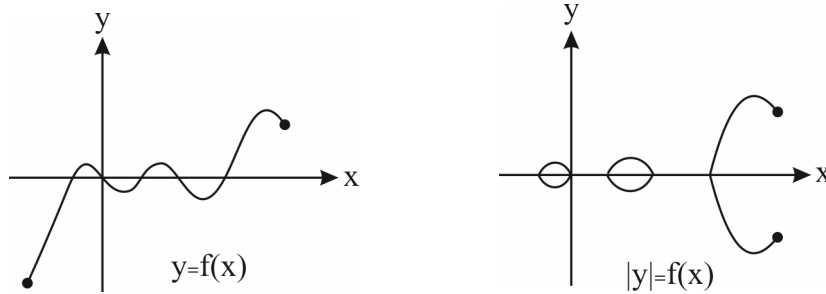
۵) برای رسم نمودار تابع $y = f(|x|)$ ابتدا نمودار تابع $y = f(x)$ را رسم می‌کنیم و سپس قسمتی را که سمت چپ محور Y‌ها (یعنی $x < 0$) است، حذف می‌کنیم و قرینه قسمت سمت راست (یعنی $x > 0$) را نسبت به محور Y‌ها رسم می‌کنیم.



همواره y برابریش $|x|$ برابرید.



۶) برای رسم نمودار ضابطه‌ی $|y| = f(x)$ که عموماً یک تابع نیست، ابتدا نمودار تابع $y = f(x)$ را رسم می‌کنیم و سپس قسمت زیر محور x ‌ها را حذف می‌کنیم و قرینه‌ی قسمت بالای محور x ‌ها را نسبت به محور x ‌ها رسم می‌کنیم.

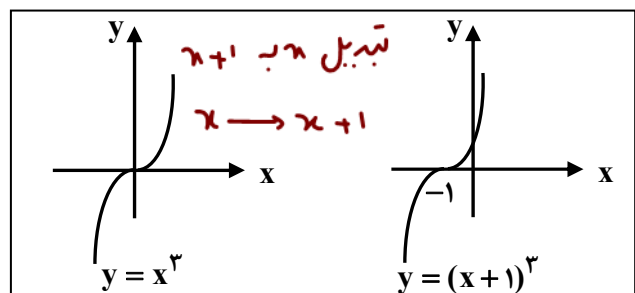
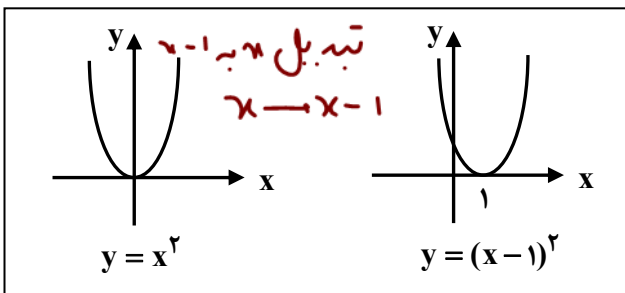


تبدیل نمودار توابع

۱- انتقال افقی

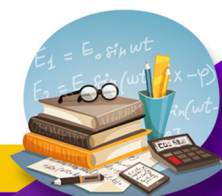
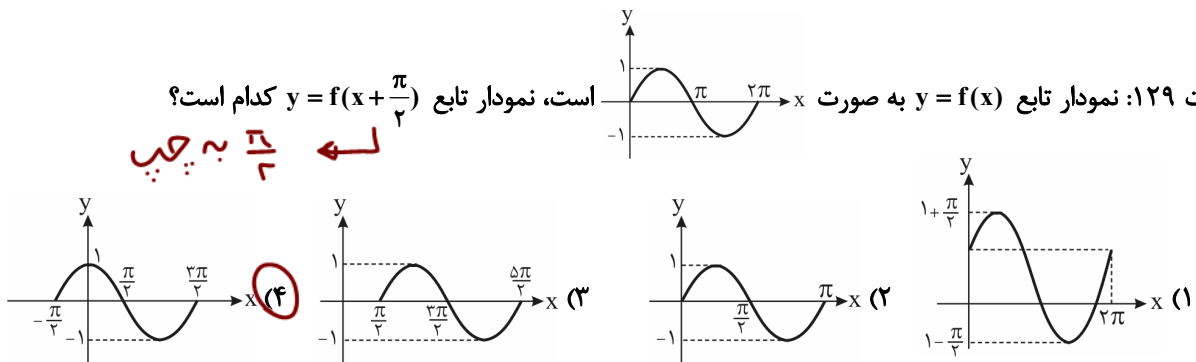
۱) اگر $a > 0$ باشد، نمودار $y = f(x - a)$ همان نمودار f است که a واحد به سمت راست انتقال داده شده است. در این حالت به مقادیر x ، a واحد اضافه شده است. (دامنه تغییر می‌کند.)

۲) اگر $a > 0$ باشد نمودار $y = f(x + a)$ همان نمودار f است که a واحد به چپ انتقال داده شده است. در این حالت از مقادیر x ، a واحد کم می‌شود. (دامنه تغییر می‌کند.)



تست ۱۲۹: نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت $y = f(x + \frac{\pi}{4})$ است، نمودار تابع $y = f(x + \frac{\pi}{4})$ کدام است؟

← $\frac{\pi}{4}$ به چپ



تست ۱۳: اگر نقطه $A(3, 4)$ روی تابع $f(x)$ قرار گیرد، در این صورت کدام نقطه زیر، روی تابع $y = f(x+m)$ قرار می‌گیرد؟
 (۱) $(3+m, 4)$ (۲) $(3-m, 4-m)$ (۳) $(3-m, 4)$ (۴) $(3+m, 4+m)$

چون $x \rightarrow x+m$ تبدیل شده انتقال افقی را می‌دانیم و تابع m واحد به چپ می‌رود و عرض تابع m واحد کم می‌شود.

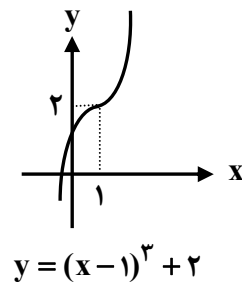
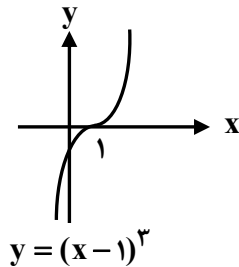


۲- انتقال عمودی

(۱) اگر $a > 0$ باشد نمودار $y = f(x) + a$ همان نمودار f است که a واحد به بالا انتقال داده شده است. در این حالت به مقادیر y (برد) a واحد اضافه می‌شود (برد تغییر می‌کند).

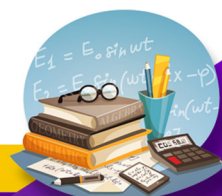
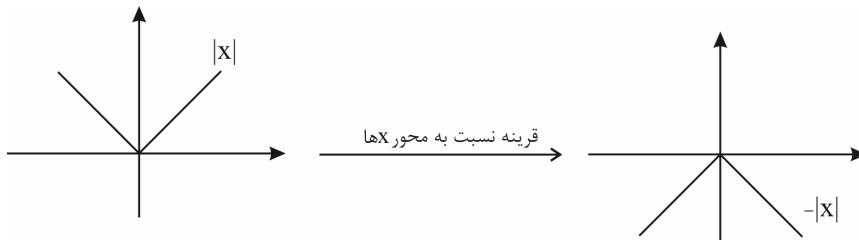
(۲) اگر $a < 0$ باشد نمودار $y = f(x) + a$ همان نمودار f است که a واحد به پایین انتقال داده شده است. در این حالت از مقادیر y (برد) a واحد کم می‌شود (برد تغییر می‌کند).

مثلاً برای رسم نمودار $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$ می‌نویسیم: $y = (x-1)^3 + 2$ حالا:

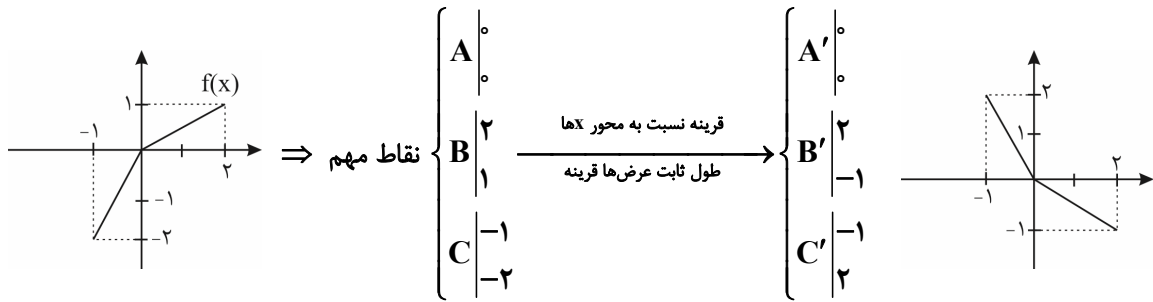


۳- رسم $-f(x)$:

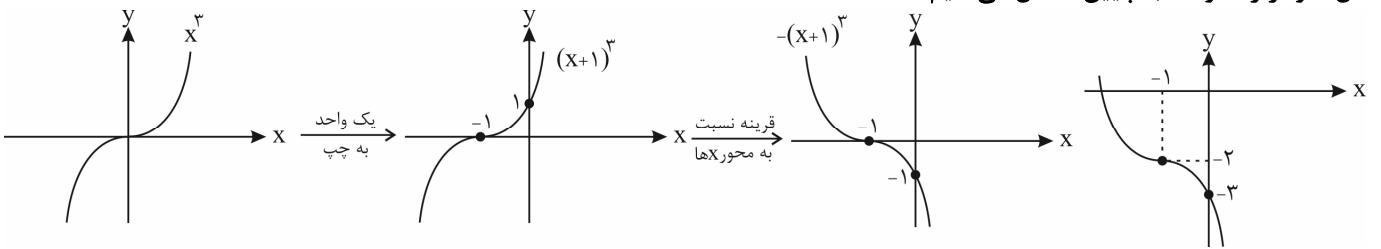
برای رسم $-f(x)$ کافی است نمودار f را نسبت به محور x قرینه کنیم. توجه کنید در این حالت طول نقاط ثابت ولی عرضشان قرینه می‌شود. پس مقادیر دامنه ثابت ولی مقادیر برد قرینه خواهند شد. مثلاً برای رسم تابع $y = -|x|$ داریم:



و یا مثلاً اگر $f(x)$ به صورت مقابل باشد داریم:



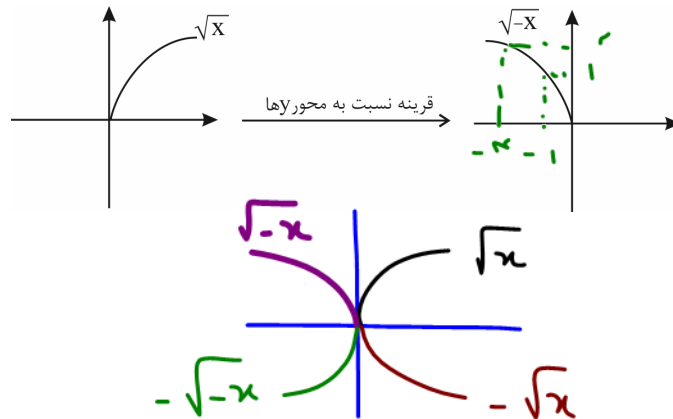
برای رسم تابع $y = -(x+1)^3 - 2$ ابتدا x^3 را یک واحد به سمت چپ انتقال داده و سپس نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم و در نهایت کل نمودار را ۲ واحد به پایین منتقل می‌کنیم:



همان‌طور که دیدید اولویت با انتقال افقی، سپس با علامت منفی پشت تابع و در نهایت با انتقال عمودی است.

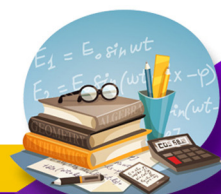
۴- رسم $f(-x)$:

برای رسم نمودار $f(-x)$ کافی است نمودار f را نسبت به محور y ها قرینه کنیم. توجه کنید در این حالت طول نقاط قرینه شده ولی عرضشان ثابت می‌ماند. پس مقادیر دامنه قرینه خواهند شد ولی برد تغییری نمی‌کند. **ما رو برمی‌داریم $-x$ می‌ذاریم تابع نسبت به محور y ها قرینه می‌شود.**

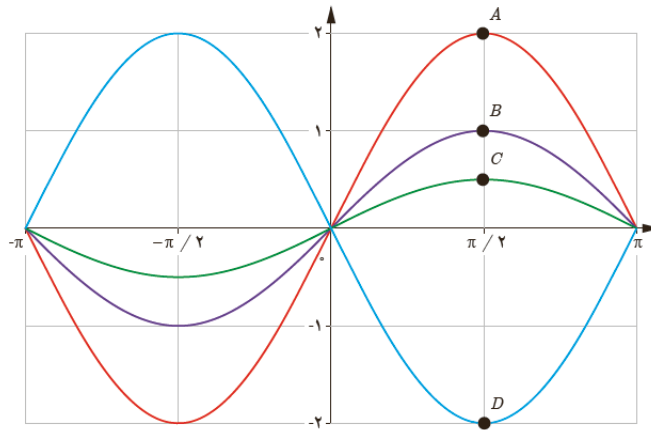


۵- رسم $y = af(x)$

- اگر $a > 1$ باشد، نمودار $f(x)$ در امتداد محور y ها با ضریب a کشیده می‌شود که به آن انبساط عمودی می‌گوییم. در این حالت مقادیر برد (y) ها، a برابر می‌شوند.
- اگر $0 < a < 1$ باشد، نمودار $f(x)$ در امتداد محور y ها با ضریب a فشرده می‌شود که به آن انقباض عمودی می‌گوییم. در این حالت نیز مقادیر برد (y) ها، a برابر می‌شوند.
- اگر پشت تابع یک عدد منفی ضرب شده باشد ($a < 0$) ابتدا تابع را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم که از منفی خلاص شویم و سپس عرض‌ها را در عدد مثبت a ضرب می‌کنیم (مثل حالت ۲ بالا).



مثال ۱۳۱: در شکل زیر نمودار توابع با ضابطه‌های $y = \sin x$ و $y = 2 \sin x$ و $y = -2 \sin x$ و $y = \frac{1}{2} \sin x$ در بازه $[-\pi, \pi]$ رسم شده است. مشخص کنید هر کدام از ضابطه‌ها مربوط به کدام نمودار است. دامنه و برد هر کدام را مشخص کنید.



یادت باشه: در این نوع از توابع $(af(x))$ ، عرض نقاط در عدد a ضرب می‌شود اما x ها (طول نقاط) ثابت می‌ماند.

۶- رسم $f(ax)$

با فرض این که $a > 0$ است، برای رسم $f(ax)$ کافی است طول هر نقطه از نمودار $f(x)$ را $\frac{1}{a}$ برابر کنیم.

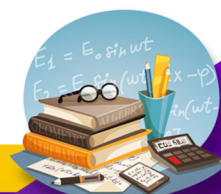
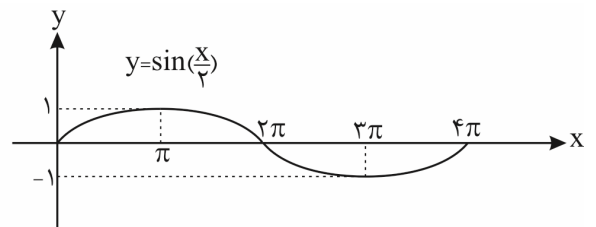
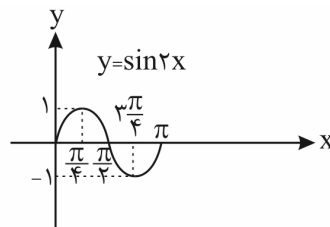
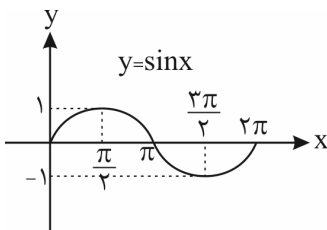
(۱) اگر $a > 1$ باشد منحنی با ضریب $\frac{1}{a}$ در امتداد محور x ها منقبض (فشرده) می‌شود.

(۲) اگر $0 < a < 1$ باشد منحنی با ضریب $\frac{1}{a}$ در امتداد محور x ها کشیده می‌شود.

در هر دو حالت فوق، مقادیر دامنه $\frac{1}{a}$ برابر می‌شود.

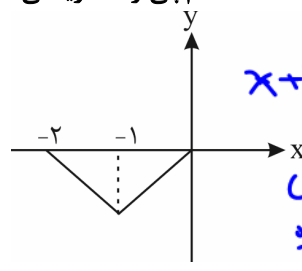
یادت باشه: در این مدل از توابع $(f(ax))$ ، طول نقاط در عدد $\frac{1}{a}$ ضرب می‌شود اما عرض نقاط ثابت می‌ماند. مثلاً اگر $f(x) = \sin x$

باشد برای رسم $f(\frac{x}{2})$ و $f(2x)$ ، به ترتیب طول نقاط را در ۲ و $\frac{1}{2}$ ضرب می‌کنیم:

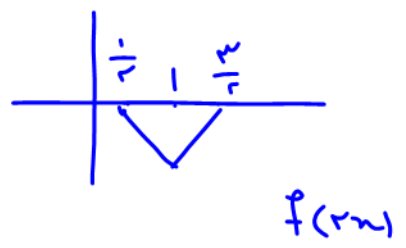


بعد از این که ترتیب عملیات را آنتیم و عمل عکس را هم گفتیم بیا و دوباره حل کن

مثال ۱۳۲: اگر شکل زیر مربوط به نمودار تابع $y = f(1-x)$ باشد، نمودار تابع $y = f(2x)$ کدام است؟ (قلمچی رشته ریاضی)

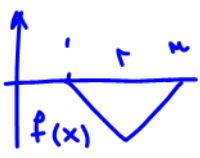


$f(x) = f(-x+1)$ اول در تابع $f(x)$ ها به $x+1$ تبدیل شده اند و تابع به واسطه به چپ رفته و سپس با تبدیل x به $-x$ نسبت به محور y ها قرینه شده

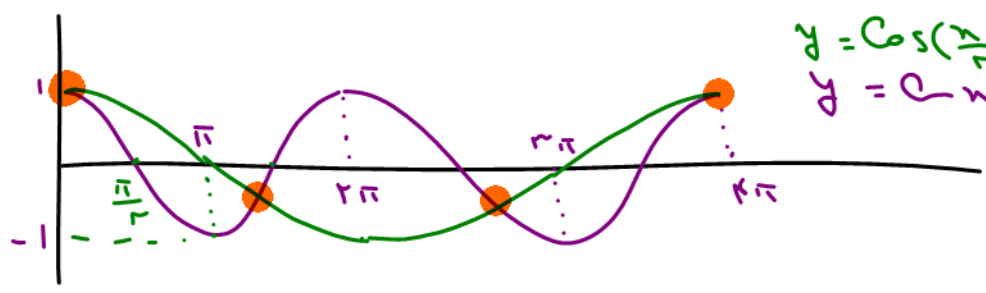


پس ابتدا به ای خنثی کردن تغییرات داریم. تابع را نسبت به محور y ها قرینه می کنیم که به صورت $f(x+1)$ در بیاید. با همان $f(x)$ پس تابع $f(x+1)$ که همان $f(x)$ بود واسطه به چپ رفتن را به راست می بریم.

تست ۱۳۳: اگر $f(x) = \cos x$ باشد، آن گاه نمودار دو تابع $y = f(x)$ و $y = f(\frac{x}{4})$ در بازه $[0, 4\pi]$ در چند نقطه مشترک اند؟



$\cos x$ نسبتاً همیشه و x ها دو برابر می شوند. $2(1)$ $3(2)$ $4(4)$ $5(2)$ $2(1)$



$y = \cos(\frac{x}{4})$
 $y = \cos x$
۴ نقطه بر محور دارند

۷- رسم $y = Af(bx+c)+D$

بهترین و کامل ترین روش رسم، همین مورد است که تمام موارد قبلی را شامل می شود.

مراحل رسم:

(۱) ابتدا انتقال عدد ثابت c را انجام می دهیم.

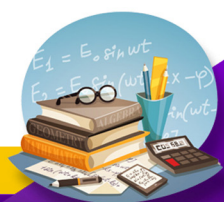
(۲) با توجه به مقدار b نمودار را در راستای افقی یعنی محور x ها منبسط یا منقبض می کنیم.

(۳) اگر b منفی باشد، در پایان، نمودار را نسبت به محور y ها قرینه می کنیم.

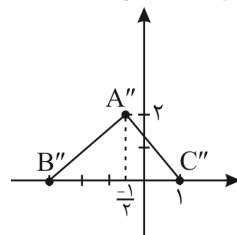
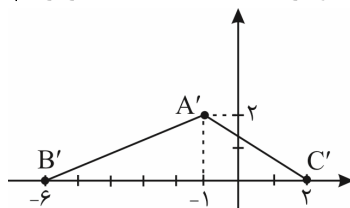
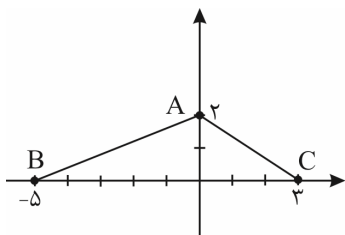
(۴) با توجه به مقدار A نمودار در راستای محور y ها کشیده و یا فشرده می کنیم (عرض نقاط را در A ضرب می کنیم).

(۵) اگر A منفی باشد پس از آن که عرض نقاط را در عدد مثبت پشت تابع ضرب کردیم، تابع را نسبت به محور x ها قرینه می کنیم (یعنی با ثابت نگه داشتن x ها، عرض نقاط را در منفی ضرب می کنیم).

(۶) انتقال عمودی عدد D را انجام می دهیم.

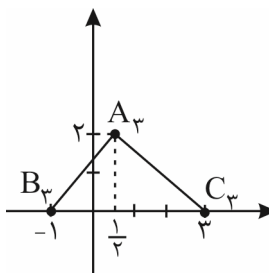


مثال ۱۳۴: اگر $f(x)$ به صورت زیر باشد، نمودار $y = -2f(1-2x)$ را رسم کنید.

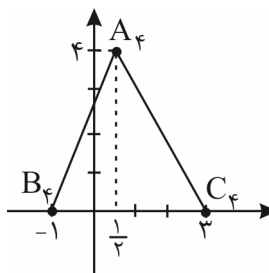


$$\begin{aligned} A \begin{vmatrix} 0 \\ 2 \end{vmatrix} &\rightarrow A' \begin{vmatrix} -1 \\ 2 \end{vmatrix} \\ B \begin{vmatrix} -5 \\ 0 \end{vmatrix} &\rightarrow B' \begin{vmatrix} -6 \\ 0 \end{vmatrix} \\ C \begin{vmatrix} 3 \\ 0 \end{vmatrix} &\rightarrow C' \begin{vmatrix} 2 \\ 0 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

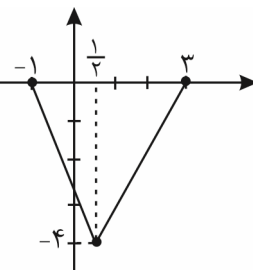
$$\begin{aligned} B' \begin{vmatrix} -6 \\ 0 \end{vmatrix} &\rightarrow B'' \begin{vmatrix} -3 \\ 0 \end{vmatrix} \\ C' \begin{vmatrix} 2 \\ 0 \end{vmatrix} &\rightarrow C'' \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} \\ A' \begin{vmatrix} -1 \\ 2 \end{vmatrix} &\rightarrow A'' \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} \\ 2 \end{vmatrix} \end{aligned}$$



عرض‌ها دو برابر می‌شوند



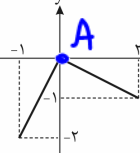
تقارن عمودی



$$\begin{aligned} B'' \begin{vmatrix} -3 \\ 0 \end{vmatrix} &\rightarrow B_3 \begin{vmatrix} 3 \\ 0 \end{vmatrix} \\ A'' \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} \\ 2 \end{vmatrix} &\rightarrow A_3 \begin{vmatrix} \frac{1}{2} \\ 2 \end{vmatrix} \\ C'' \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} &\rightarrow C_3 \begin{vmatrix} -1 \\ 0 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

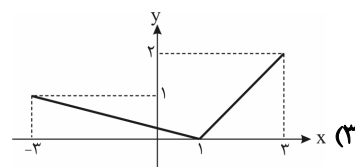
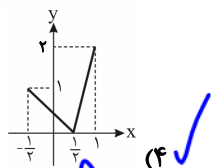
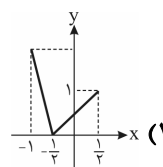
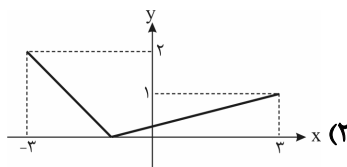
$$\begin{aligned} C_3 \begin{vmatrix} -1 \\ 0 \end{vmatrix} &\rightarrow C_4 \begin{vmatrix} -1 \\ 0 \end{vmatrix} \\ B_3 \begin{vmatrix} 3 \\ 0 \end{vmatrix} &\rightarrow B_4 \begin{vmatrix} 3 \\ 0 \end{vmatrix} \\ A_3 \begin{vmatrix} \frac{1}{2} \\ 2 \end{vmatrix} &\rightarrow A_4 \begin{vmatrix} \frac{1}{2} \\ 4 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

تست ۱۳۵: نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت x است، نمودار تابع $y = -f(1-2x)$ کدام است؟



باید ۳ ها لطف شوند.

دامنه $f(x)$ از ۰ تا ۱ برابر
۳ سانت است دامنه باید $\frac{3}{2}$
سنت شود پس یگانه



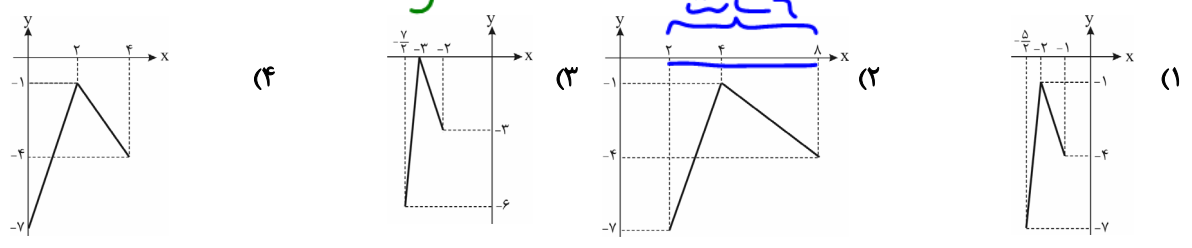
$$A \begin{vmatrix} 0 \\ 2 \end{vmatrix} \in f(x) \quad A_1 \begin{vmatrix} -1 \\ 2 \end{vmatrix} \in f(1+x)$$

$$A_2 \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} \\ 2 \end{vmatrix} \in f(1+2x) \quad A_3 \begin{vmatrix} \frac{1}{2} \\ 2 \end{vmatrix} \in f(1-2x) \quad A_4 \begin{vmatrix} 0 \\ 2 \end{vmatrix} \in -f(1-2x)$$

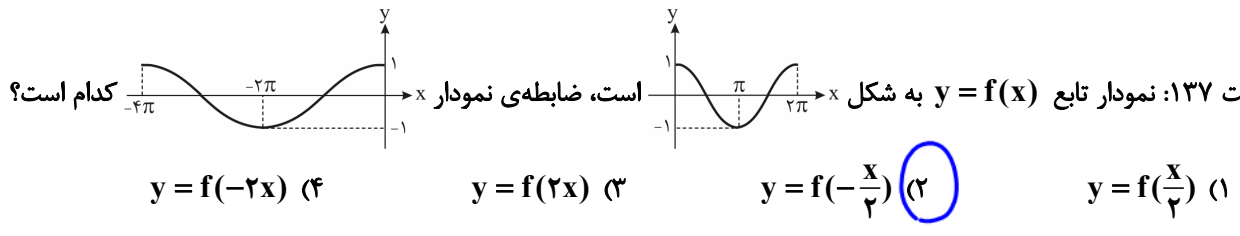


دامنه $f(x)$ در رزنت ۱۳۵ از ۱ تا ۲ و برابر ۳ سانت بود که به خاطر $\frac{1}{3}$ باید ۲ برابر شود و بشود ۶ سانت که فقط گزینه (۲) درست است

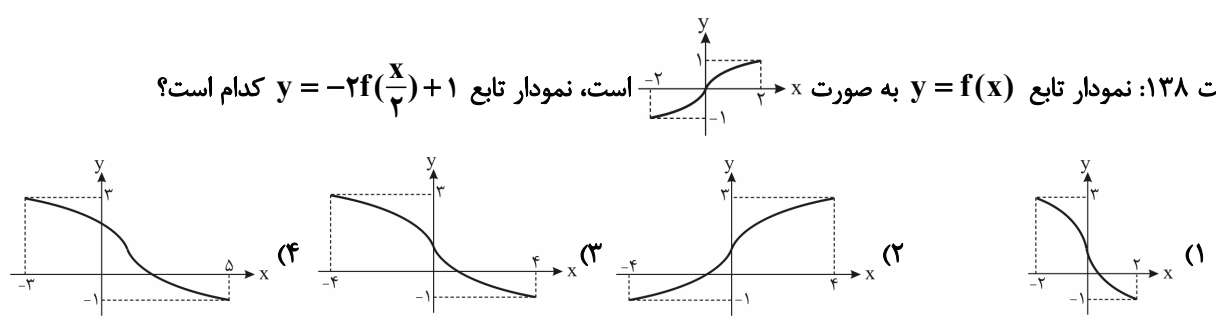
تست ۱۳۶: بر اساس نمودار تابع $y = f(x)$ در تست قبلی، نمودار تابع $y = 3f(\frac{x}{3} - 2) - 1$ کدام است؟



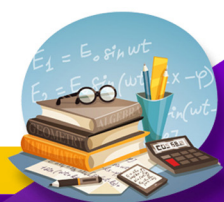
تست ۱۳۷: نمودار تابع $y = f(x)$ به شکل $y = f(x)$ ضابطه‌ی نمودار x کدام است؟



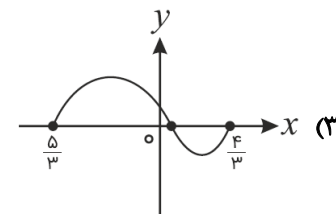
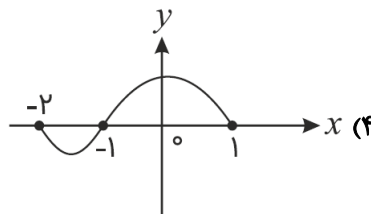
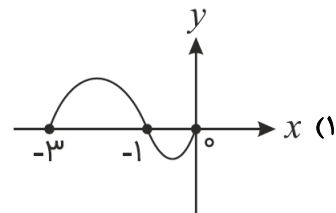
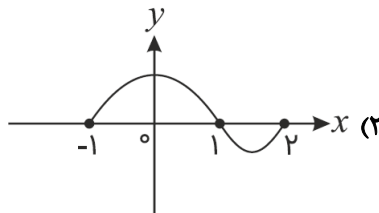
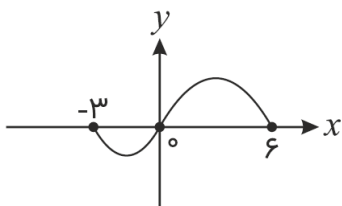
تست ۱۳۸: نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت $y = f(x)$ است، نمودار تابع $y = -2f(\frac{x}{2}) + 1$ کدام است؟



به خاطر \ominus قدیمه نسبت به n هاینه دهرجا بالای محور x هانت بیاد و پایینه \oplus به خاطر $\frac{1}{2}$ دامنه ۲ برابرینه لزا $\textcircled{1}$ غلطه
 باید سه جای خودش بید و اصله بالا بره لزا $\textcircled{3}$ درسته $\textcircled{4}$ هم غلطه چون بید و اصله به رامت رفته.

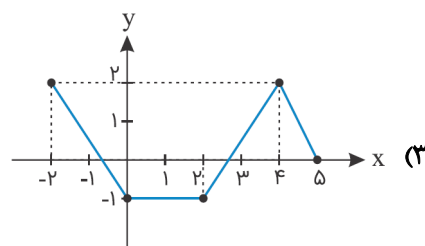
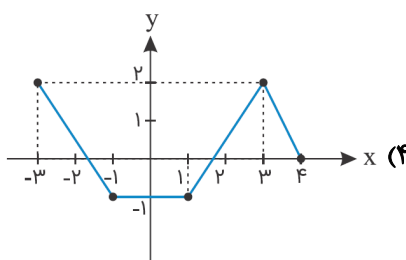
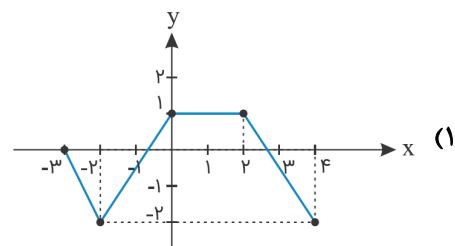
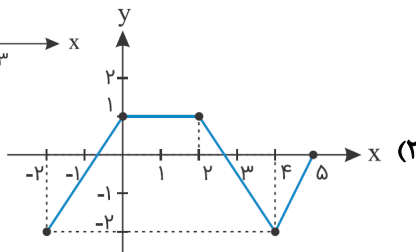
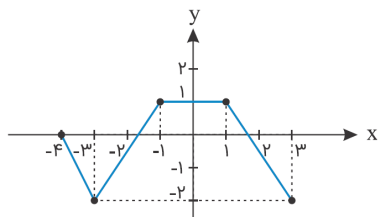


تست ۱۳۹: اگر نمودار $y = f(x)$ به صورت زیر باشد، نمودار تابع $y = f(1-3x)$ کدام است؟



پاسخ: گزینه «۳» - باید تابع نسبت به محور y ها قرینه شود و هم‌چنین x های آن $\frac{1}{3}$ گردد و در آخر نمودار $\frac{1}{3}$ به سمت راست منتقل گردد.

تست ۱۴۰: اگر نمودار تابع $f(x)$ به صورت زیر باشد، نمودار $-f(-x+1)$ کدام است؟

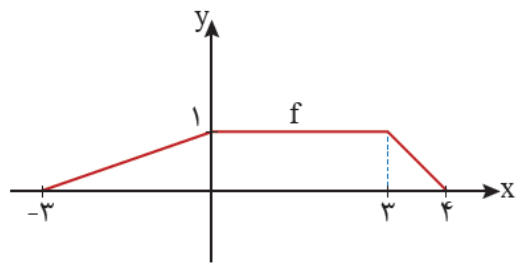


پاسخ: گزینه «۳» - برای رسم نمودار تابع $-f(-x+1)$ باید مراحل زیر را انجام داد: ابتدا نمودار ۱ واحد به سمت چپ انتقال داده شود و نمودار نسبت به محور y ها قرینه شود، سپس برای این که نمودار $-f(-x+1)$ را رسم کنید باید نمودار را نسبت به محور x ها قرینه کنید که در نهایت به گزینه (۳) می‌رسیم.



نوشته است f به برآه \sim چپ

تست ۱۴۱: اگر نمودار تابع f به صورت شکل زیر و $g(x) = \begin{cases} f(x+1) & x \geq 0 \\ f(2x) & x < 0 \end{cases}$ باشد، مساحت محدود بین نمودار تابع g و محور x ها

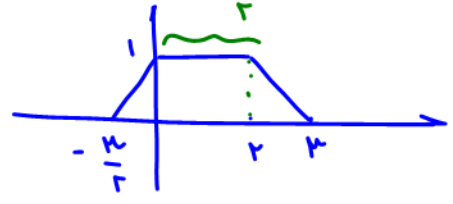


نوشته ها \downarrow مثل هانفند

- $\frac{11}{4}$ (۲)
- $\frac{15}{4}$ (۴)

- کدام است؟
- $\frac{7}{4}$ (۱)
- $\frac{13}{4}$ (۳)

$S = \frac{(11)(\frac{9}{4} + 1)}{2} = \frac{13}{4}$ (جمع روستاق) ارتناع



$3 - (-\frac{3}{2}) = \frac{9}{4}$

ها را برابر $x+3$ بنویس

تست ۱۴۲: تابع $y = 2^{x+3} + |x+3|$ را ۳ واحد در امتداد محور x ها در جهت منفی و سپس در امتداد محور y ها ۲ واحد در جهت منفی انتقال می‌دهیم. منحنی حاصل، محور x ها را با کدام طول، قطع می‌کند؟ (خارج تجربی ۱۴۰۰)

$x+3 + |x+3| = -2$

$x+3 + |x+3| = 2$

$x+3 + |x+3| = -2$ (۴) $\frac{7}{2}$ (۳) $\frac{5}{2}$ (۲) $-\frac{3}{2}$ (۱) ✓

$x+3 + |x+3| = -2$

$x+3 + |x+3| = 2$

$x+3 + |x+3| = -2$ $\begin{cases} x \geq -3 & x+x+3 = -2 \rightarrow 2x = -5 \rightarrow x = -\frac{5}{2} \\ x < -3 & x-x-3 = -2 \rightarrow -3 = -2 \end{cases}$ $x = -\frac{5}{2}$

تست ۱۴۳: نقطه $A(-1, 3)$ روی نمودار تابع $f(x)$ و نقطه متناظر با آن یعنی $A'(a, b)$ روی نمودار تابع $y = 3f(2x-5) - 7$ دارد. $a-b$ کدام است؟

- ۴ (۴)
- ۲ (۳)
- صفر (۲)
- ۲ (۱)

پاسخ: گزینه «۲»

$A \begin{matrix} -1 \\ 3 \end{matrix} \xrightarrow{\text{واحد به راست}} \begin{matrix} 4 \\ 3 \end{matrix} \xrightarrow{\text{انقباض طولی}} \begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix} \xrightarrow{\text{انبساط عرضی}} \begin{matrix} 2 \\ 9 \end{matrix} \xrightarrow{\text{انتقال به پایین}} \begin{matrix} 2 \\ 2 \end{matrix}$

$\Rightarrow A'(2, 2) \Rightarrow a-b = 2-2 = 0$

تست ۱۴۴: قرینه نمودار $f(x) = \sqrt{x}$ را نسبت به محور y ها تعیین کرده، سپس ۲ واحد به طرف x های مثبت انتقال می‌دهیم. نمودار حاصل، نیمساز ناحیه اول و سوم را با کدام طول قطع می‌کند؟ (خارج تجربی ۹۷)

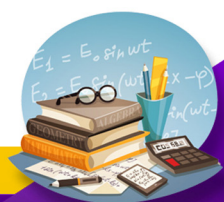
$\sqrt{-x}$ $\frac{1}{5}$ (۴) $\frac{1}{5}$ (۳) $\frac{0}{5}$ (۲) -2 (۱)

۲ واحد به سمت مثبت y ها را برمی‌داریم یعنی $x-2$ می‌زنیم

$\sqrt{-(x-2)} = \sqrt{-x+2}$

$\sqrt{-x+2} = x$ $\xrightarrow{\text{مربع}} -x+2 = x^2 \rightarrow x^2+x-2=0$ $\begin{cases} x=1 \\ x=-2 \end{cases}$

خرجه را برضال منتهی نمی‌تواند باشد

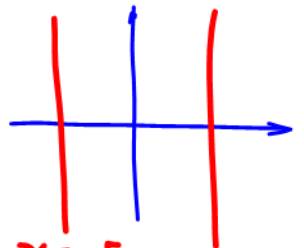


تبدیل شده بین تابع لنتب محور ل ها قرینه شده

$y = f(x+1) \leftarrow y = f(-x+1)$

تست ۱۴۵: اگر $x=2$ محور تقارن $y = f(x+1)$ باشد، محور تقارن $y = f(1-x)$ کدام است؟

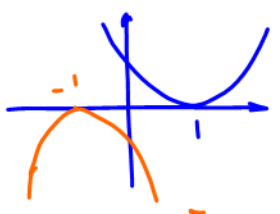
- (۱) $x = -4$
- (۲) $x = 4$
- (۳) $x = -2$ ✓
- (۴) $x = -1$



محور تقارن $x=2$
قرینه نسبت به y $x=-2$
 $x=-4$

تست ۱۴۶: ابتدا قرینه نمودار تابع $f(x) = (x-1)^2$ را نسبت به مبدأ مختصات رسم کرده، سپس منحنی حاصل را ۴ واحد به سمت بالا انتقال می‌دهیم. طول نقاط تلاقی منحنی اخیر با منحنی اصلی کدام است؟

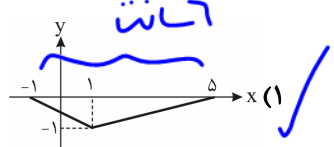
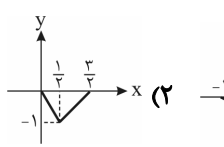
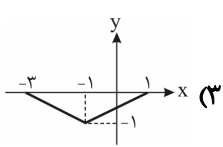
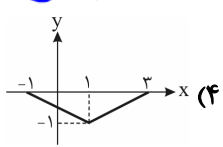
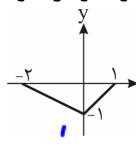
- (۱) ۰.۲
- (۲) ۱.۱
- (۳) ۱.۲
- (۴) ۲.۱



کنترل قرینه $x = \pm 1$
 $-(x+1)^2 + 4 = (x-1)^2$

گاهی اوقات نمودار انتقال یافته رو میدان و نمودار خود $f(x)$ رو می‌پرسن. در عملیات برعکس از x خراب اول و برعکس انجام می‌دهیم مثل داستان پوشیدن جوراب و کش و درآوردن کش و جوراب

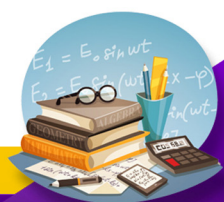
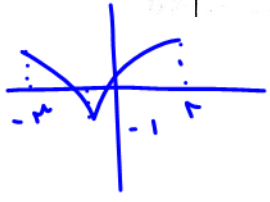
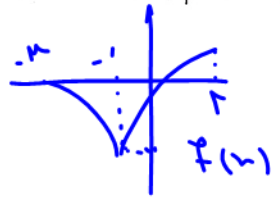
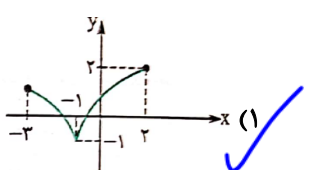
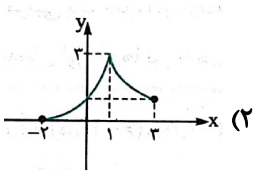
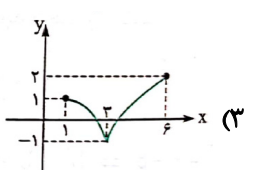
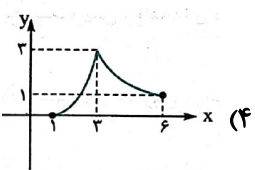
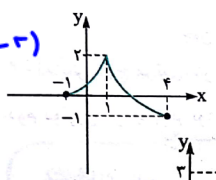
تست ۱۴۷: نمودار $y = f(1-2x)$ به صورت x است، نمودار $y = f(x)$ کدام است؟



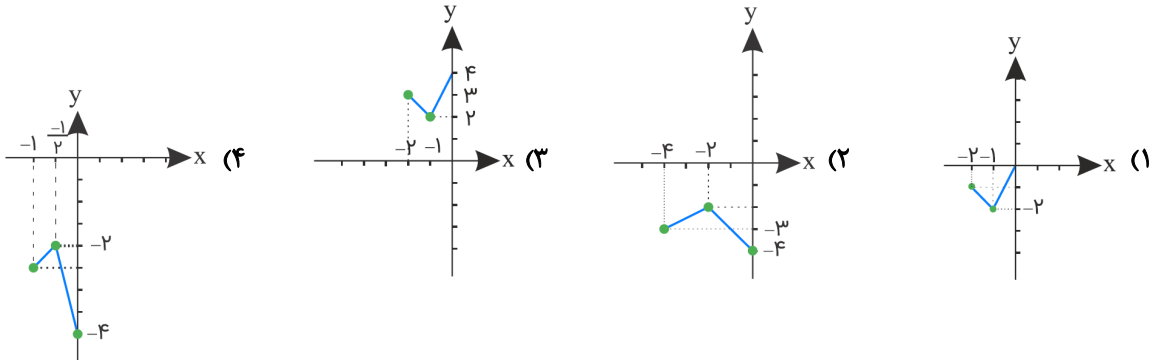
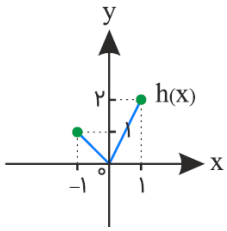
در نمودار تغییر یافته دامنه تابع از -2 تا 1 برابر ۳ است. در نمودار $f(x)$ دامنه باید ۲ برابر شود. شونده فقط در قرینه ۱ به این صورت است.

$y = f(1-2x)$

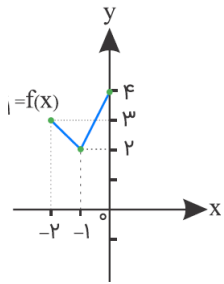
تست ۱۴۸: اگر نمودار تابع $y = -f(x-2)$ به شکل مقابل باشد، نمودار تابع $y = 1 + f(x)$ کدام است؟



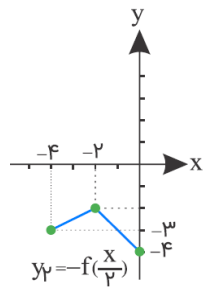
تست ۱۴۹: نمودار تابع $h(x) = f(x-1) - 2$ مطابق شکل زیر است. کدام گزینه نمودار تابع $-f(\frac{x}{3})$ را به درستی نشان می‌دهد؟



پاسخ: گزینه «۲» - ابتدا باید نمودار تابع $y_1 = f(x)$ را به دست آوریم. برای این منظور، کافی است نمودار $y = h(x)$ را یک واحد به سمت چپ و دو واحد به سمت بالا انتقال دهیم؛ بنابراین:



حال برای رسم $y_2 = -f(\frac{x}{3})$ کافی است نمودار تابع $y_1 = f(x)$ را در راستای افقی دو برابر منبسط و سپس نسبت به محور xها قرینه کنیم؛ در نتیجه تابع $y_2 = -f(\frac{x}{3})$ به صورت زیر به دست می‌آید:



تأثیر انتقال روی دامنه و برد تابع

۱) اگر دامنه f بازه $[a, b]$ باشد، برای یافتن دامنه $A.f(Bx+c)+D$ کافی است نامعادله $a \leq Bx+c \leq b$ را حل کنید. مثال ۱۵۰: اگر دامنه تابع f بازه $[-2, 3]$ باشد، دامنه $y = 5f(3x) - 3$ را بیابید.

دردی f بیاید پس $-2 \leq 3x \leq 3$ باشد

D $f(x) : [-2, 3]$ $\xrightarrow{\div 3}$ $-2/3 \leq x \leq 1$

دردی f بیاید پس $-2 \leq 3x \leq 3$ باشد

D $f(3x) = D$ $5f(3x) - 3$ $[-2/3, 1]$ D $f(3x) = D$ $5f(3x) - 3$

نتیجه: $D = D$ $f = af + b$



۲) اگر دامنه‌ی $A \cdot f(Bx+c) + D$ بازه‌ی $[a, b]$ باشد، برای یافتن دامنه‌ی $f(x)$ با قرار دادن $a \leq x \leq b$ ، عبارت $Bx+c$ را بسازیم و محدوده‌اش را بیابیم.
 مثال ۱۵۱: اگر دامنه‌ی $y = -2f(4x-1)$ بازه‌ی $[-3, 3]$ باشد، دامنه‌ی f را بیابید.

$$\begin{aligned}
 & -3 \leq x \leq 3 \\
 & \xrightarrow{\times 4} -12 \leq 4x \leq 12 \\
 & \xrightarrow{-1} -13 \leq 4x-1 \leq 11 \\
 & D_f: [-13, 11]
 \end{aligned}$$

۳) اگر برد f ، بازه‌ی $[a, b]$ باشد، برای یافتن برد $A \cdot f(Bx+c) + D$ کافی است برد f را در A ضرب کنیم و سپس با D جمع می‌کنیم.

تست ۱۵۲: اگر برد تابع f برابر $R_f = [-\sqrt{3}, 2]$ باشد، برد تابع $y = \sqrt{2}f(x-1) + 1$ شامل چند عدد صحیح است؟

- (۱) ۵ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

$$-\sqrt{3} \leq f(x) \leq 2 \xrightarrow{\text{ضرب در } \sqrt{2}} -\sqrt{6} \leq \sqrt{2}f(x-1) \leq 2\sqrt{2}$$

$$\begin{aligned}
 & 1 - \sqrt{6} \leq \sqrt{2}f(x-1) + 1 \leq 2\sqrt{2} + 1 \\
 & -1.0 \dots \leq \text{برد} \leq 3.8 \\
 & \leftarrow 3, 2, 1, 0, -1
 \end{aligned}$$

تست ۱۵۳: دامنه‌ی تابع $y = \frac{-f(x)}{2}$ به صورت $[0, 4]$ است. دامنه‌ی تابع $y = -f(\frac{-x}{2})$ کدام است؟

- (۱) $[-8, 0]$ (۲) $(-8, 0]$ (۳) $[0, 8]$ (۴) $(0, 8)$

پاسخ: گزینه «۲» - می‌دانیم دامنه‌ی توابع $y = \frac{-f(x)}{2}$ و $y = f(x)$ برابر است. (قبوله؟) پس داریم: $D_{\frac{-f(x)}{2}} = D_{f(x)} = [0, 4]$

از طرفی برای محاسبه‌ی دامنه‌ی تابع $y = -f(\frac{-x}{2})$ می‌توان نوشت:

پس دامنه‌ی تابع $y = -f(\frac{-x}{2})$ برابر $(-8, 0]$ است.

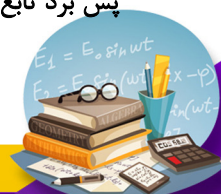
تست ۱۵۴: اگر برد تابع $y = f(x-1)$ به صورت $[0, 2]$ باشد، برد تابع $y = -3f(2-x) + 1$ کدام است؟

- (۱) $(-1, 5]$ (۲) $[-1, 5)$ (۳) $(-5, 1)$ (۴) $[-5, 1)$

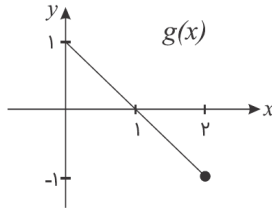
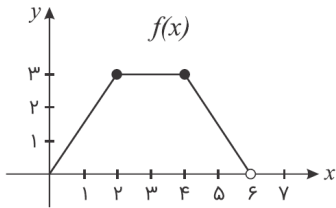
پاسخ: گزینه «۳» - می‌دانیم انتقال افقی روی برد تابع اثر ندارد یعنی برد دو تابع $f(x-1)$ و $f(2-x)$ یکی است. حالا شروع می‌کنیم و محدوده‌ی برد تابع خواسته‌شده را پیدا می‌کنیم، پس داریم:

$$0 \leq f(2-x) < 2 \xrightarrow{\times(-2)} -6 < -3f(2-x) \leq 0 \xrightarrow{+1} -5 < -3f(2-x) + 1 \leq 1$$

پس برد تابع $y = -3f(2-x) + 1$ بازه‌ی $(-5, 1)$ است.



تست ۱۵۵: اگر نمودار توابع f و g به صورت زیر باشند، دامنه تابع $\frac{f(2x)}{g(\frac{1}{4}x)}$ کدام است؟



- (۱) $[0, 3] - \{2\}$
- (۲) $[0, 4] - \{2\}$
- (۳) $[0, 3] - \{1\}$
- (۴) $[0, 3] - \{1\}$

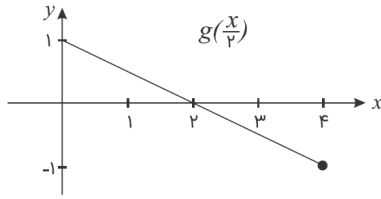
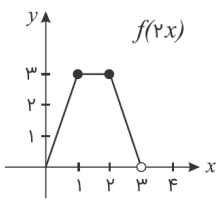
پاسخ: گزینه «۱»

$$D_{f(x)} = [0, 6] \Rightarrow D_{f(2x)} = [0, 3]$$

$$D_{g(x)} = [0, 2] \Rightarrow D_{g(\frac{x}{4})} = [0, 4]$$

$$D_{\frac{f(2x)}{g(\frac{x}{4})}} = [0, 3] \cap [0, 4] - \{x \mid g(\frac{x}{4}) = 0\} = [0, 3] - \{2\}$$

نکته: اگر دامنه $f(x)$ تقسیم بر k شود، دامنه $f(kx)$ به دست می‌آید و اگر $0 < k < 1$ باشد، این دامنه بزرگ‌تر و اگر $k > 1$ باشد، این دامنه کوچک‌تر می‌شود.



توابع چندجمله‌ای روی \mathbb{R} بسوزند و اکثر توان فرد داشته (بزرگ‌ترین توان فرد) بر \mathbb{R} دارند.

در سال‌های گذشته با توابع خطی آشنا شدید. هر تابع به صورت $f(x) = ax + b$ را یک تابع خطی می‌نامیم. اگر $a = 0$ ، تابع به صورت $f(x) = b$ درمی‌آید که آن را تابع ثابت می‌نامیم. تابع ثابت و تابع خطی حالت خاصی از توابعی هستند که توابع چندجمله‌ای نام دارند. توابع درجه دوم نیز حالت خاصی از توابع چندجمله‌ای هستند.

هر تابع به صورت $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ را که در آن a_n و a_{n-1} و \dots و a_2 و a_1 و a_0 اعداد حقیقی و n یک عدد صحیح نامنفی و $a_n \neq 0$ ، یک تابع چندجمله‌ای از درجه n می‌نامند. دامنه‌ی توابع چندجمله‌ای مجموعه‌ی اعداد حقیقی است.

مثال ۱۵۶: توابع زیر نمونه‌ای از توابع چندجمله‌ای هستند که به ترتیب از درجه‌ی ۱، ۲، ۳ و ۵ هستند.

$$y = 3x + 5, \quad y = -8x^2 + 2x - \frac{1}{4}, \quad y = \sqrt{2}x^3 - \frac{3}{4}x, \quad y = 2x^5 - 4x^3 + \sqrt{7}x^2$$

تست ۱۵۷: نمودار تابع با ضابطه $f(x) = -(x-1)^3 + m$ به ازای چه مقادیری از m ، از ناحیه سوم عبور نمی‌کند؟

- (۱) $m \leq 1$
- (۲) $m \geq 1$
- (۳) $m \leq -1$
- (۴) $m \geq -1$



$$m \geq -1$$



$$(x-1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$$

$$(x-2)^3 = x^3 - 2x^2 + 12x - 8$$

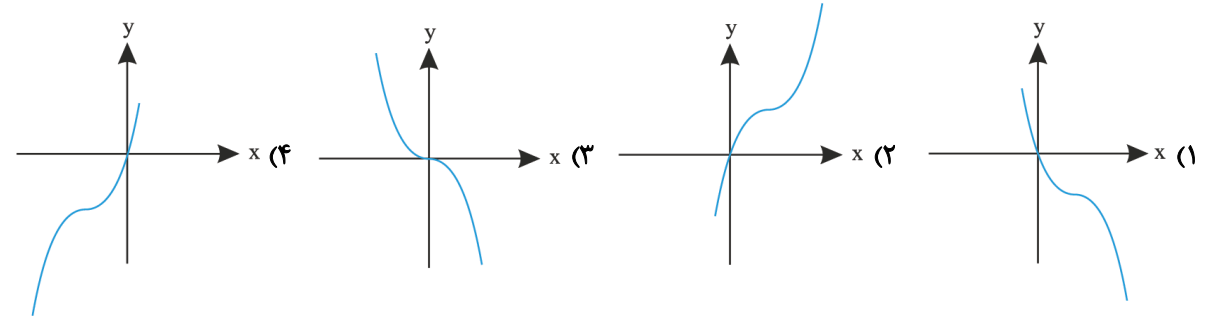
تست ۱۵۸: نمودار تابع با ضابطه $f(x) = x^3 - 3(x^2 - x) + 2$ از کدام ناحیه دستگاه مختصات عبور نمی‌کند؟

اول (۱) دوم (۲) سوم (۳) چهارم (۴)

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 2 = (x^3 - 3x^2 + 3x - 1) + 3 = (x-1)^3 + 3$$



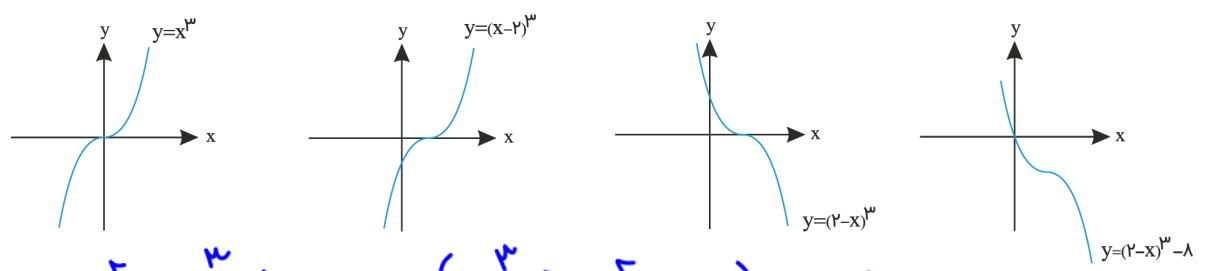
تست ۱۵۹: نمودار تابع $f(x) = 6x^2 - x^3 - 12x$ شبیه کدام گزینه است؟



پاسخ: گزینه «۱»

$$f(x) = \underbrace{6x^2 - x^3 - 12x + 8 - 8}_{(2-x)^3} = (2-x)^3 - 8$$

حالا مرحله به مرحله نمودار تابع را رسم می‌کنیم:



$$y = 6x^2 - x^3 - 12x = -(x^3 - 2x^2 + 12x) = -(x^3 - 2x^2 + 12x - 8) - 8$$

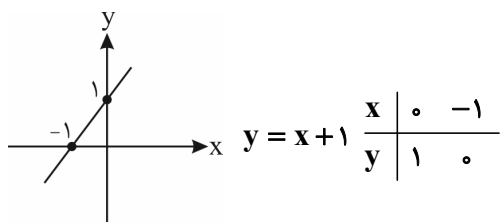


تابع های خطی، ثابت، همانی

۱- تابع خطی

به هر تابع که بتوان ضابطه آن را به شکل $f(x) = ax + b$ نوشت یک تابع خطی می نامند. برای یافتن معادله یک تابع خطی کافی است دو نقطه از آن را داشته باشیم. نمودار یک تابع خطی به صورت یک خط راست می باشد. مثلاً برای رسم تابع $f(x) = x + 1$ دو نقطه را به شکل زیر در نظر گرفته و آن را رسم می کنیم:

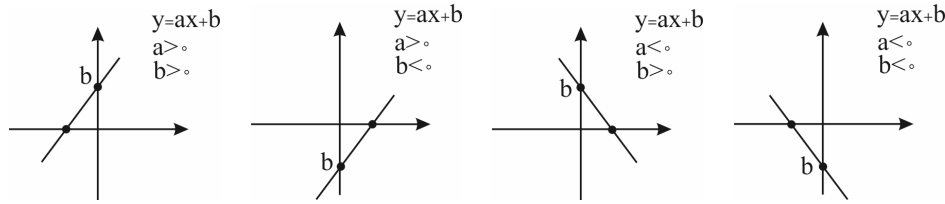
بهر است یک بار $x = 0$ داده و y را پیدا کنیم و بار دیگر $y = 0$ داده و x را پیدا کنیم.



در تابع خطی $f(x) = ax + b$ ، a شیب تابع و b عرض از مبدأ آن است. در این نوع توابع با افزایش منظم در x ها، y ها به طور منظم تغییر می کنند. برای تشخیص خطی بودن یک تابع باید بفهمیم که نسبت تغییرات y به x (همان $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ یا شیب) ثابت است یا خیر.

$\Delta y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

به شکل های زیر توجه کنید:



تست ۱۶۰: اگر برد تابع خطی $f(x) = ax + b$ با دامنه $[1, 3]$ برابر $[-3, 4]$ باشد با فرض مثبت بودن a مقدار b کدام است؟

شیب خط مثبت و صعودی

۳/۵ (۴) -۳/۵ (۳) -۶/۵ (۲) ۶/۵ (۱)

$f(1) = -3$ $f(3) = 4$

$$\begin{cases} a + b = -3 \\ 3a + b = 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -a - b = 3 \\ 3a + b = 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2a = 7 \\ a = 3.5 \end{cases}$$

$b = -7, 0$ $a + b = -3$ $a = 3.5$

تست ۱۶۱: تابع خطی f برای هر x در تساوی $f(2x) = 2f(x)$ صدق می کند. اگر مساحت محدود به $y = |f(x)|$ و خط $y = 6$ برابر ۱۲ باشد، مقدار $f(9)$ کدام می تواند باشد؟

- ۳۶ (۴) ۲۷ (۳) ۲۴ (۲) ۱۸ (۱)

$f(x) = ax + b \rightarrow f(2x) = 2f(x) \rightarrow 2ax + b = 2(ax + b)$

$2ax + b = 2ax + 2b \rightarrow b = 0 \rightarrow f(x) = ax + b \rightarrow f(x) = ax$

$S = \frac{(\frac{12}{a})^2}{2} = 12 \rightarrow a = 3$

$f(x) = 3x$

$f(9) = 3(9) = 27$



۲- تابع ثابت

به تابعی گفته می‌شود که برد آن فقط شامل یک عضو است. نمایش این تابع به صورت $f(x) = c$ است مثل $f(x) = 0$ ، $f(x) = 2$. اگر این تابع را رسم کنیم به صورت یک خط افقی درمی‌آید. نمودار تابع ثابت با دامنه \mathbb{R} ، خط افقی است ولی اگر دامنه تابع \mathbb{R} نباشد نمودار تابع بخشی از یک خط افقی و یا نقاطی روی آن است. در تابع خطی $f(x) = ax + b$ اگر $a = 0$ باشد به تابع ثابت می‌رسیم.

تست ۱۶۲: اگر تابع $f(x) = (a+1)x^2 - (b+2)x + a - 2b$ یک تابع ثابت باشد، حاصل $f(5)$ کدام است؟

$\begin{matrix} 3 & (1) \\ -5 & (3) \\ 5 & (2) \\ -3 & (1) \end{matrix}$

مقدار x را برابر با x فرض کنیم، x صفره

$a+1=0 \rightarrow a=-1$ $b+2=0 \rightarrow b=-2$

$f(x) = (a+1)x^2 - (b+2)x + a - 2b = 0x^2 - 0x - 1 - 2(-2) = 3 \rightarrow f(x) = 3$



در گزینه‌های بینیم که همه به صورت

تست ۱۶۳: مجموع دو تابع $f(x) = 4 - x$ و $f(4-x)$ تابعی ثابت است. ضابطه‌ی $f(x)$ کدام می‌تواند باشد؟

$\begin{matrix} x^2 + 4x & (4) \\ x^2 - 4x & (3) \\ x^2 - 2x & (2) \\ x^2 + 2x & (1) \end{matrix}$

$f(x) = x^2 + bx$ عدد $k - f(x) + f(k-x) =$

$k - (x^2 + bx) + (k-x)^2 + b(k-x) =$

$k - x^2 - bx + k^2 - 2kx + x^2 + bk - bx =$

$(-2bx - 2kx) + k^2 + bk =$

$(-2b - 2k)x + k^2 + bk = 0$

$-2b - 2k = 0 \rightarrow b = -k$

تست ۱۶۴: به ازای کدام مقدار a ، نمودار تابع $y = \frac{(a-2)x+3}{a+5-2x}$ نمایش یک خط افقی با حذف یک نقطه آن است؟ (سنجش جامع)

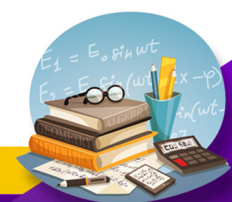
$\begin{matrix} -1 \text{ و } 5 & (3) \\ -1 \text{ و } -5 & (4) \end{matrix}$

$f(x) = \frac{3}{a+5} = k$

$f(x) = \frac{(a-2)x+3}{a+5-2x} = \frac{a+1}{a+3} = k$

$\frac{3}{a+5} = \frac{a+1}{a+3}$

تکلیف: خ به انتقال توابع + ثابت خطی



۳- تابع همانی

اگر در یک تابع، هر عضو از دامنه، دقیقاً به همان عضو از برد نظیر شود، تابع همانی است. ضابطه تابع همانی $f(x) = x$ است. نمودار تابع همانی با دامنه \mathbb{R} ، خط $y = x$ (نیمساز ناحیه اول و سوم) است. ولی اگر دامنه \mathbb{R} نباشد، نمودار بخشی از $y = x$ و یا نقاطی بر روی آن است. توابع زیر همگی همانی هستند:

۱) $f(x) = x$, $D_f = \mathbb{R}$

۲) $f(x) = \frac{x^2 + x}{x + 1} = \frac{x(x+1)}{(x+1)} = x$

$D_f: \mathbb{R} - \{-1\}$

$f(2) = 2$ $f(3) = 3$ $f(-1) = -1$

$D_f = R_f: \mathbb{R}$

این تابع روی دامنه اش یعنی $\mathbb{R} - \{-1\}$ همانی است.

۳) $f(x) = (\sqrt{x})^2 = x$

۴) $\{(0,0), (1,1), (2,2)\}$ یا

برای دامنه سازش $x \geq 0$ برای رسم ساده بکن.

این تابع نیز روی دامنه اش یعنی $[0, +\infty)$ همانی است.

تست ۱۶۵: اگر $f(x) = \frac{ax + 2b + 6}{(b+3)x + 2}$ ضابطه یک تابع همانی باشد $a + b$ کدام است؟

(۱) صفر (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) -۲

هدن

$$f(x=0) = \frac{2b+6}{2} = 0 \rightarrow b = -3$$

هدن

$$f(x=1) = \frac{a+2b+6}{(b+3)+2} = 1 \rightarrow a = 2 \quad a+b = -1$$

تست ۱۶۶: اگر تابع $y = \frac{3x^2 + x}{(a-1)x^2 + bx + c}$ یک تابع همانی باشد، حاصل $a + b + c$ کدام است؟ اگر تابع همانی باشد برابر $y = x$ است

۶ (۴) ۵ (۳) ۴ (۲) ۳ (۱)

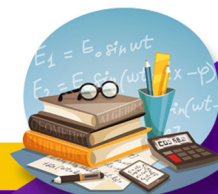
$$y = \frac{3x^2 + x}{(a-1)x^2 + bx + c} = x$$

این دلیل هانی

$$3x^2 + x = (a-1)x^2 + bx + cx$$

و طرف برابرند طرف اول x^2 سازد پس ضریب x^2 طرف دوم باید معض باشد:

$a-1=0 \rightarrow a=1$ $b=3$ $c=1$ $a+b+c=5$

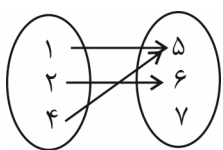


تابع یک‌به‌یک: کید با یک و را ا ب ه

۱) تابعی که در آن هیچ دو زوج متمایزی، مولفه دوم تکراری نداشته باشد، یک‌به‌یک می‌گویند. تابع یک‌به‌یک دارای تعداد عضوهای یکسان دامنه و برد است.

برای پیدا کردن مجهول در تست‌های مربوط به تابع یک‌به‌یک، ابتدا سراغ مولفه‌های دوم یکسان می‌رویم و مولفه‌های اولشان را برابر می‌گذاریم. مثلاً در $f = \{(2,5), (3,1), (m,5)\}$ به سراغ $(2,5), (m,5)$ می‌رویم و مولفه‌های اولشان را مساوی قرار می‌دهیم: $m = 2$ توجه کنید در این مدل از سوالات شرط تابع بودن را نیز کنترل کنید. مثلاً $f = \{(1,5), (1,6)\}$ اصلاً تابع نیست پس شرط یک‌به‌یک بودن را کنترل نمی‌کنیم.

۲) در نمودار ون چنان‌چه بیش از یک فلش به مولفه‌های دوم وارد شود، تابع دیگر یک‌به‌یک نخواهد بود. مثلاً:



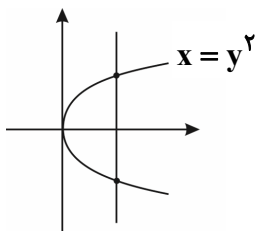
یک به یک نیست

یک‌به‌یک نیست چون $(4,5), (1,5)$ دارای مولفه دوم تکراری هستند.

۳) در نمودار دکارتی، تابعی یک‌به‌یک است که در آن هر خط به موازات محور x ها، نمودار تابع را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

<p>یک‌به‌یک نیست چون یک خط افقی نمودار تابع را در بیشتر از یک نقطه قطع کرده است.</p>	<p>یک‌به‌یک نیست، چون یک خط افقی نمودار تابع را در بیشتر از یک نقطه قطع کرده است.</p>	<p>یک‌به‌یک است. چون هر خط افقی دلخواه، حداکثر در یک نقطه نمودار تابع را قطع کرده است.</p>
--	---	--

توجه کنید نمودار اصلاً بیانگر یک تابع نیست پس شرط یک‌به‌یک بودن را اصلاً کنترل نمی‌کنیم.



تابع ثابت $y=k$ ، مستند ب

یا تابعی که دارای خط تقارن قائم‌الزاویه است مثل $y=|x|$ یا $y=x^2$ یک‌به‌یک نیستند.

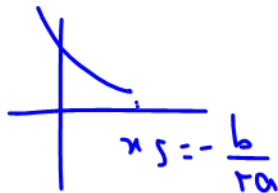
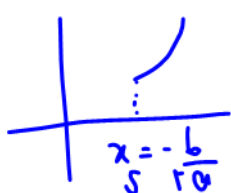
$y=(x-3)^2$

یادت باشه: معمولاً وجود x^2 ، $|x|$ ، $[x]$ یا نسبت‌های مثلثاتی $\sin x$ ، $\cos x$ ، $\tan x$ و $\cot x$ تابع را غیریک‌به‌یک می‌کند.

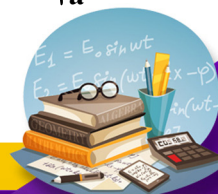
چند نکته مهم:

۱) تابع خطی $y = ax + b$ با شرط $a \neq 0$ (شیب غیرصفر، خطی که افقی نباشد) همواره یک‌به‌یک است.

۲) تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ در فاصله طول رأس به بعد و یا طول رأس به قبل، یک‌به‌یک است یعنی در این فاصله‌ها: $(-\infty, \frac{-b}{2a}]$ یا $[\frac{-b}{2a}, +\infty)$



$(-\infty, \frac{-b}{2a}]$ یا $[\frac{-b}{2a}, +\infty)$



تغییرات

اگر تابعی آبدر آبیکو باشد، یک به یک است. آبدر معصوری با آبیکه نزدیکی

(۳) توابع چند جمله‌ای از درجه زوج (بزرگ توان X زوج است) غیر یک به یک هستند.

(۴) توابع $|x|$ یا $\frac{|x|}{x}$ ، $x + |x|$ ، $|x| - x$ ، $x - |x|$ با توجه به نمودارشان که در درس نامه قدم مطلق دیدیم، یک به یک نیستند چون در

بخشی از نمودارشان به شکل یک خط افقی درمی‌آیند و هر وقت قسمتی از نمودار به شکل یک خط افقی باشد تابع حتماً غیر یک به یک است.

(۵) توابع $[x]$ ، $x - [x]$ ، $[x] + [-x]$ و $(-1)^{[x]}$ به دلیل مشابه مورد بالا، غیر یک به یک هستند.

(۶) تابع $x + [x]$ یک به یک است.

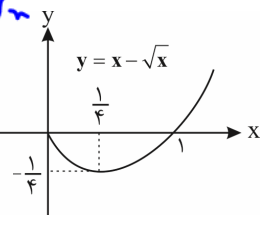
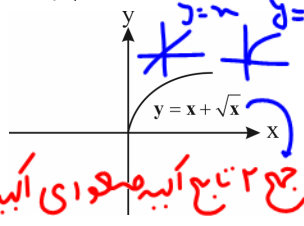
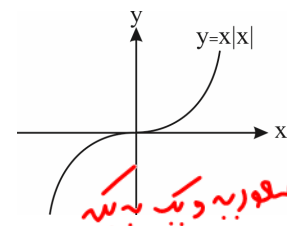
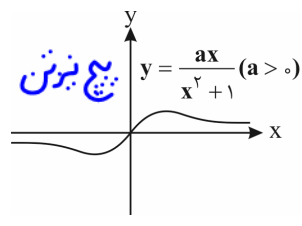
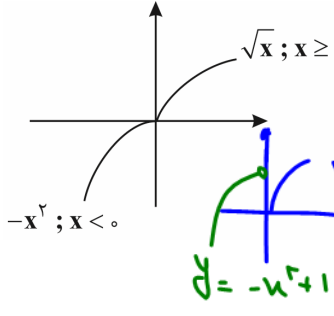
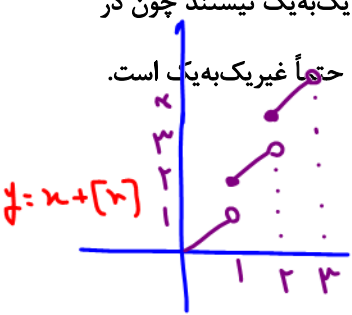
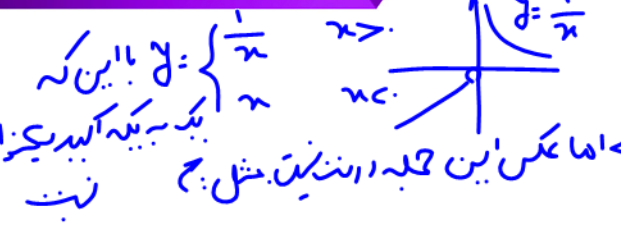
(۷) تابع هموگرافیک $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ با شرط $ad - bc \neq 0$ یک به یک است.

(۸) در بررسی یک به یک بودن توابع دو یا چند ضابطه‌ای ابتدا یک به یک بودن ضابطه را در دامنه آن بررسی کرده و سپس بررسی می‌کنیم که هر خط افقی بیشتر از یک مرتبه نمودار تابع را قطع نکند

(برد ضابطه‌ها با هم اشتراک نداشته باشد)، مثلاً تابع $y = \begin{cases} \sqrt{x} & x \geq 0 \\ -x^2 & x < 0 \end{cases}$ یک به یک است چون طبق

نمودار هر خط افقی فقط در یک نقطه نمودار تابع را قطع می‌کند.

(۹) توابع $x + \sqrt{x}$ و $x|x|$ یک به یک و توابع $x - \sqrt{x}$ و $\frac{ax}{x^2+1}$ غیر یک به یک هستند.



انحال راه ذهن بسیار!

تست ۱۶۷: اگر تابع $f = \{(-1, 1), (1, 2), (2, 3), (a, m-1), (a+2, n), (m, 3)\}$ یک به یک باشد، مقدار n کدام است؟

$y=3$ آبیکه آبیکه در ارتباط باشد پس $m=3$

$y=1$ آبیکه آبیکه در ارتباط باشد پس $a=-1$ پس $(a+2, n) = (1, n)$ چون $(1, 2)$ هم داریم باید برای تابع همدن یک آبیکه در ارتباط باشد پس $(n=2)$ و آبیکه در ارتباط است

تست ۱۶۸: تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ با کدام ضابطه، یک به یک است؟

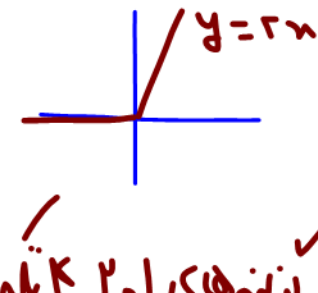
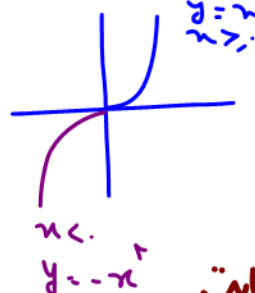
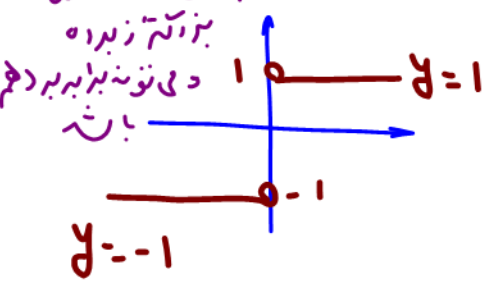
$f: A \rightarrow B$ هم دامنه داشته بزرگتر زبده دمی تونه بزرگتر بد هم باشه

$f(x) = \frac{|x|}{x}$ (۴)

$f(x) = x|x|$ (۳)

$f(x) = x + |x|$ (۲)

$f(x) = x - |x|$ (۱)



نمونه‌های ۱ و ۲، ۳ که ثابت دارند و آبیکه به آبیکه نیستند.



بارآوری: هر خط $y=mx$ عبوری از مبدأ است. $y=mx$

دو نیم خط عبوری از مبدأ به یکی از چهار مدل تقابلند:

تست ۱۶۹: اگر تابع $f(x) = a|x| + 2x$ یک به یک باشد، حدود a کدام است؟

۱) $(2, +\infty)$ ۲) $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ ۳) $(0, 2)$ ۴) $(-2, 2)$

آبگیرکزا $m_1 m_2 > 0$ / غیر آبگیرکزا $m_1 m_2 < 0$

بین تابع دو تابع خط عبوری از مبدأ هستند. برای یک به یک بودن باید به صورت آبگیرکزا باشد یعنی

تست ۱۷۰: اگر تابع $f(x) = \begin{cases} 3x+2 & x \geq 1 \\ 2x-a & x < 1 \end{cases}$ یک به یک باشد، حدود a کدام است؟

۱) \mathbb{R} ۲) \emptyset ۳) $[-3, +\infty)$ ۴) $(-\infty, -3]$

جواب: $m_1 m_2 = (2-a)(2+a) > 0$

دو ضرایب ای هار آبگیرکزا!

عرض نقطه توخالی (حفره) باید ۵ یا کمتر باشد:

$2-a \leq 5$
 $-3 \leq a$

گزینه ۳

تابع معکوس (تابع وارون) با $f^{-1} \neq \frac{1}{f}$ نشان داده می شود و **Inverse**

تابع یک به یک f ، در زیر داده شده است. اگر جای مولفه های اول و دوم زوج های مرتب f را عوض کنیم، تابع دیگری مانند g به دست می آید:

$f = \{(1, 2), (0, -3), (4, 7)\}$, $g = \{(2, 1), (-3, 0), (7, 4)\}$

دو تابع f و g را معکوس هم می نامند اگر برد و دامنه دو تابع بالا را مقایسه کنید می بینید که دامنه f برابر برد g و برد f مساوی دامنه g است:

$D_f = R_g = \{1, 0, 4\}$, $R_f = D_g = \{2, -3, 7\}$

هرگاه $f: A \rightarrow B$ یک به یک باشد، تابع معکوس f را که با نماد f^{-1} نشان می دهیم به صورت زیر تعریف می کنیم:

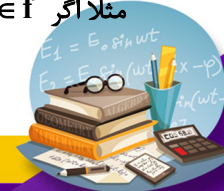
$f^{-1} = \{(y, x) | (x, y) \in f\}$

همان طور که در مثال دیدیم، می توانیم بگوییم که همواره $R_f = D_{f^{-1}}$ و $D_f = R_{f^{-1}}$ می باشد.

توجه کنید که شرط لازم و کافی برای آن که f^{-1} تابع باشد (معکوس پذیر باشد) آن است که f یک به یک باشد. پس اگر در یک سؤال از ما شرط وارون پذیری بپرسند، در واقع منظور همان شرط یک به یک بودن است که در درس نامه قبلی بسیار کامل بررسی کردیم.

نکته مهم در معکوس توابع مرکب: اگر f و g دو تابع یک به یک باشند آن گاه همواره داریم:

- $(g^{-1} \circ f^{-1})(x) = (f \circ g)^{-1}(x)$
 - $(f^{-1} \circ g^{-1})(x) = (g \circ f)^{-1}(x)$
- تذکر: اگر نقطه $A(a, b)$ روی تابع f باشد، نقطه $A'(b, a)$ روی f^{-1} است یعنی:
- $f(a) = b \Rightarrow f^{-1}(b) = a$
- مثلاً اگر $A(2, 3) \in f$ باشد:
- $f(2) = 3 \Rightarrow f^{-1}(3) = 2$



تست ۱۷۱: در تابع $f = \{(1, 2), (2, 3), (4, 5), (3, 4)\}$ و $g = \{(2, 1), (3, 2), (5, 4)\}$ مفروض‌اند. تابع $g^{-1} \circ f^{-1}$ کدام است؟
 (ریاضی خارج ۹۰)

$\{(3, 3), (5, 5), (4, 3)\}$ (۲) $\{(4, 4), (1, 1), (3, 4)\}$ (۱)
 $\{(2, 2), (3, 3), (5, 5)\}$ (۴) $\{(2, 2), (1, 1), (4, 4)\}$ (۳)

تست ۱۷۲: دو تابع $f = \{(5, 2), (7, 3), (1, 4), (3, 6), (9, 1)\}$ و $g(x) = \sqrt{5x+9}$ مفروض‌اند. اگر $(g^{-1} \circ f^{-1})(a) = 8$ باشد، a کدام است؟
 (تجربی خارج ۹۶)

۷ (۴) ۶ (۳) ۳ (۲) ۲ (۱)

تست ۱۷۳: دو تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & , x \geq 0 \\ -\sqrt{-x} & , x < 0 \end{cases}$ و $g = \{(2, -1), (-1, 4), (3, -2), (-4, -3)\}$ مفروض‌اند. اگر $g^{-1}(f(a)) = 3$ باشد، a کدام است؟
 (ریاضی خارج ۹۳)

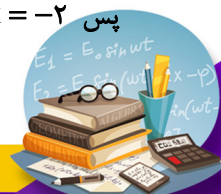
۴ (۴) ۲ (۳) -۱ (۲) -۴ (۱)

۷) اگر $f^{-1}(a)$ را بپرسند، اسم آن x گذاشته و $f(x) = a$ را حل می‌کنیم. x همان جواب مسئله است. مثلاً اگر $f(x) = -x + \sqrt{-2x}$ و $f^{-1}(4)$ را بپرسند:

$$f^{-1}(4) = x \Rightarrow f(x) = 4 \Rightarrow -x + \sqrt{-2x} = 4$$

$$\Rightarrow \sqrt{-2x} = x + 4 \xrightarrow[x=-2]{\text{حدس}} \sqrt{-2(-2)} = -2 + 4 \Rightarrow 2 = 2 \checkmark$$

پس $x = -2$ جواب مسئله است. (ریاضی ۸۸)



$$f(\alpha) = \beta \quad f^{-1}(\beta) = \alpha$$

درودی f خردی-کماست و خردی f درودی f^{-1} باشد.

$$g(x) = f^{-1}(x)$$

تست ۱۷۴: فرض کنید $g(x)$ وارون تابع $f(x) = x + 2\sqrt{x}$ باشد. حاصل $g(3) + g(15)$ کدام است؟ (تجربی خارج ۹۹)

اعداد ۳ و ۱۵ درودی f^{-1} هستند پس خردی f هم می‌شوند: $g(3) = f^{-1}(3) = 1$
 $g(15) = f^{-1}(15) = 9$ جمع ۱۰

$$3 = x + 2\sqrt{x} \rightarrow x = 1$$

$$15 = x + 2\sqrt{x} \rightarrow x = 9$$

$$f(1) = 3 \rightarrow f^{-1}(3) = 1$$

$$f(9) = 15 \rightarrow f^{-1}(15) = 9$$

تست ۱۷۵: اگر $f(x) = x + \sqrt{x}$ و $g(x) = \frac{9x+6}{1-x}$ باشند، مقدار $(g^{-1} \circ f^{-1})(20)$ کدام است؟ (ریاضی ۹۹)

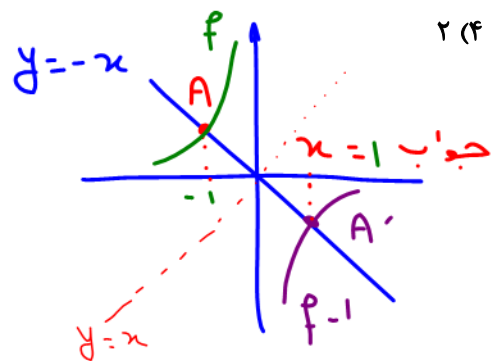
$$g^{-1}(f^{-1}(20)) = g^{-1}(17) = \frac{2}{5}$$

۲۰ درودی f^{-1} و همون خردی f است: $f(x) = x + \sqrt{x} = 20$
 حل: $x = 16$
 $f(16) = 20$ و $f^{-1}(20) = 16$

$$g(x) = \frac{9x+7}{1-x} = 17 \rightarrow 9x+7 = 17-17x \rightarrow x = \frac{10}{18} = \frac{5}{9}$$

$$g\left(\frac{2}{5}\right) = 17 \rightarrow g^{-1}(17) = \frac{2}{5}$$

تست ۱۷۶: تابع f با ضابطه $f(x) = x - \frac{2}{x}$ در دامنه $D_f = (-\infty, 0)$ را در نظر بگیرید. نمودار تابع f^{-1} نیمساز ناحیه چهارم را با کدام طول قطع می‌کند؟ (تجربی ۹۹)

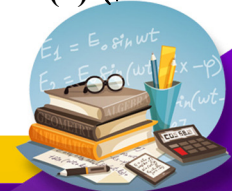


لازم نیست f^{-1} را بیابیم بلکه کافی است خود f را با $y = -x$ قطع دهیم
 نقطه تقاطع A جواب است یعنی A دپولش را از آرش بییم

(۱) نمودار تابع‌های f ، f^{-1} نسبت به خط $y = x$ قرینه یکدیگرند. بنابراین اگر نمودار یک تابع یک‌به‌یک نسبت به خط $y = x$ متقارن باشد، آن‌گاه تابع و وارونش با هم برابرند.

(۲) اگر $f(a) = b$ ، آن‌گاه $f^{-1}(b) = a$ به عبارت دیگر اگر نقطه (a, b) روی نمودار تابع f باشد، آن‌گاه نقطه (b, a) روی نمودار f^{-1} است.

$$(f^{-1})^{-1}(x) = f(x) \quad (۳)$$



(۴) اگر نمودارهای f و f^{-1} ، یکدیگر را در نقطه (a, b) قطع کنند آن گاه $f(a) = b$ و $f(b) = a$. یعنی هم (a, b) و هم (b, a) ، نقاط تقاطع هستند.

(۵) اگر f تابعی وارون‌پذیر باشد، آن گاه: $(f^{-1} \circ f)(x) = x$ ، $x \in D_f$ یا $x \in R_{f^{-1}}$ (الف)

فرقی نمی‌کند، اگر f را داشتید دامنه‌اش و اگر f^{-1} را داشتید بردش را حساب می‌کنید.

(ب) $(f \circ f^{-1})(x) = x$ ، $x \in D_{f^{-1}}$ یا $x \in R_f$

فرقی نمی‌کند، اگر f را داشتید بردش و اگر f^{-1} را داشتید دامنه‌اش را حساب می‌کنید.

(۶) دو تابع $f^{-1} \circ f$ و $f \circ f^{-1}$ فقط به شرطی با هم مساوی هستند که f وارون‌پذیر باشد و دامنه و برد f یکسان باشد. بعضی‌ها فکر می‌کنند که چون $f^{-1}(f(x)) = x$ و $f(f^{-1}(x)) = x$ هستند پس این دو همیشه برابرند.

مثال: در تابع $f(x) = -x + 1$ با شرط $-1 \leq x \leq 2$ ، $f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1}$ است چون برد این تابع در محدوده دامنه $[-1, 2]$ ، برابر است.

(۷) اگر دو تابع f و g وارون یکدیگر باشند، ترکیب آن‌ها همانی است اما عکس موضوع همواره برقرار نیست.

تست ۱۷۷: ضابطه‌ی وارون $y = \frac{x}{1+|x|}$ کدام است؟ $A(\alpha, \beta)$ ردی f باشد $A'(\beta, \alpha)$ (تجربی ۹۱)

ردی f^{-1} است.

$$y = \frac{1-|x|}{|x|}, |x| > 1 \quad (۲)$$

$$y = \frac{x}{1-|x|}, |x| < 1 \quad (۱)$$

$$y = \frac{|x|-1}{x}, |x| < 1 \quad (۴)$$

$$y = \frac{x}{|x|-1}, |x| > 1 \quad (۳)$$

بی‌شک $A(0, 0)$ ردی f است پس بایه $A'(0, 0)$ ردی f^{-1} باشد. گزینه‌های ۲ و ۴ نمی‌توانند.

$x=0$ بگیرند چون $x=0$ در شرط خارج آن‌هاست. گزینه ۳ نیز به خاطر شرط $|x| > 1$ نمی‌زنند. $x=0$ را بگیرند چون $x=0$ در شرط $|x| < 1$ است. پس گزینه ۱ بیدار است! (تجربی خارج ۹۲)

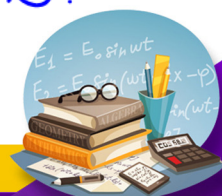
$$y = x\sqrt{|x|}, x \in \mathbb{R} - \{0\} \quad (۲)$$

$$y = x\sqrt{|x|}, x \in \mathbb{R} \quad (۱)$$

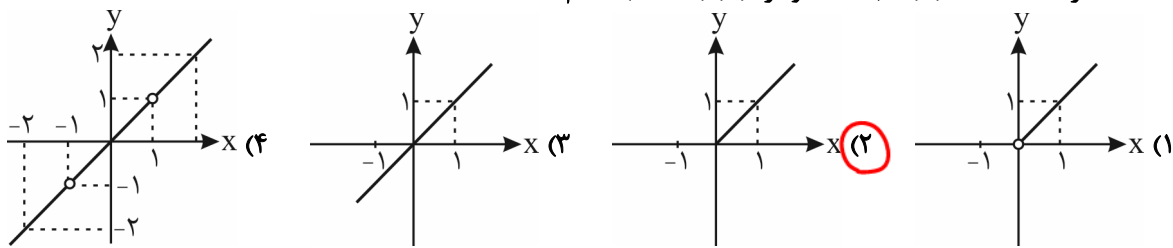
$$y = x|x|, x \in \mathbb{R} \quad (۴)$$

$$y = x|x|, x \in \mathbb{R} - \{0\} \quad (۳)$$

ردی f که جزو دامنه $x=4$ به تابع می‌دهیم $f(4) = \frac{4}{4} = 1$ پس $A(4, 1) \in A$ و بایه $A'(1, 4) \in A'$ نقطه $A(4, 1)$ و $A'(1, 4)$ که $x=2$ می‌دهیم خروجی f دارند. از طرفی $B(0, 0) \in B$ پس بایه $B'(0, 0) \in B'$ باشد ولی گزینه ۳ را به خاطر شرط $|x| > 1$ پس گزینه ۴ بیدار است!

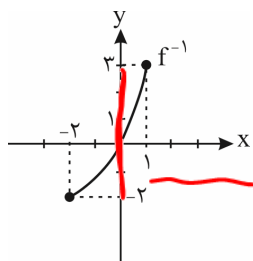


تست ۱۷۹: اگر $f(x) = \sqrt{1-x}$ باشد، نمودار $(f \circ f^{-1})(x)$ کدام است؟

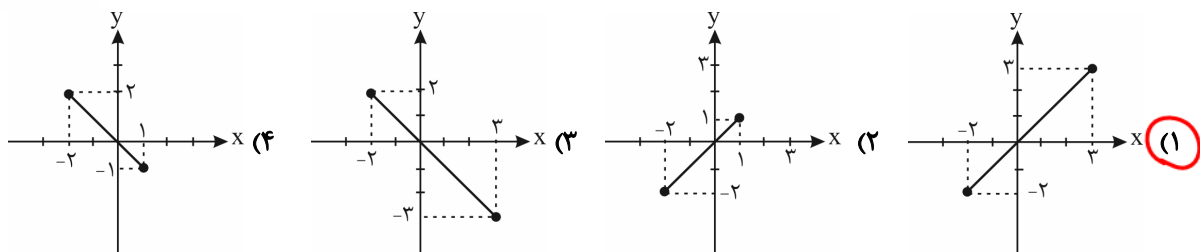


$y = f(f^{-1}(x)) = x$
 $x \in D_{f^{-1}} = R_f$
 $f = \sqrt{1-x}$
 $R_f = [0, +\infty)$

تست ۱۸۰: نمودار تابع f^{-1} به صورت زیر است. نمودار تابع $y = f^{-1} \circ f(x)$ کدام است؟



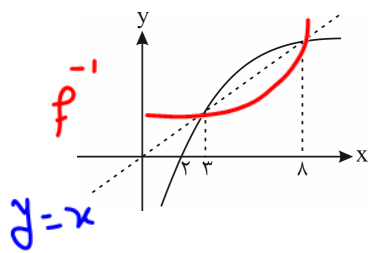
$R_{f^{-1}} = [-2, 3] = D_f$



$y = f^{-1}(f(x)) = x$
 $x \in D_f = R_{f^{-1}} = [-2, 3]$
 گزینه ۱

تست ۱۸۱: شکل روبه‌رو، نمودار تابع $y = f(x)$ و نیمساز ناحیه اول و سوم است. دامنه تابع با ضابطه $\sqrt{x - f^{-1}(x)}$ کدام است؟

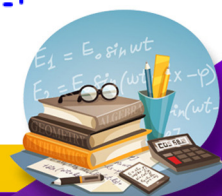
(تجربی ۹۴)



$x - f^{-1}(x) \geq 0$
 $x \geq f^{-1}(x)$

- (۱) $(0, 2]$
- (۲) $[2, 3]$
- (۳) $[2, 8]$
- (۴) $[3, 8]$ ✓

باید دید کجی‌ها (در کدام x ها) تابع $y=x$
 از نمودار f^{-1} بالاتر یا مساوی است؟
 f^{-1} را خورمان، پس می‌بینیم که $y=x$ تا $(3, 8)$ تابع $y=x$ از f^{-1} بالاتر



به دست آوردن ضابطه‌ی وارون

برای به دست آوردن ضابطه‌ی تابع وارون (البته تابع اصلی باید یک‌به‌یک باشد) این ۳ کار رو می‌کنیم:

۱- به جای $f(x)$ می‌نویسیم y .

۲- x رو تنها می‌کنیم.

۳- وقتی x تنها شد، به جای x قرار می‌دهیم $f^{-1}(x)$ و به جای y می‌ذاریم x .

$$1) f(x) = 2x - 3 \Rightarrow y = 2x - 3 \Rightarrow y + 3 = 2x \xrightarrow{\div 2} \frac{y+3}{2} = x \xrightarrow{\text{تعویض } x \text{ و } y} \frac{x+3}{2} = y \Rightarrow \frac{x+3}{2} = f^{-1}(x)$$

$$2) f(x) = \frac{1}{x-1} \Rightarrow y = \frac{1}{x-1} \Rightarrow x-1 = \frac{1}{y} \Rightarrow x = \frac{1}{y} + 1 \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1}{x} + 1 = \frac{x+1}{x}$$

$$3) f(x) = (x-1)^2; x \geq 1 \Rightarrow y = (x-1)^2 \xrightarrow{\text{جذر می‌گیریم تا از شر توان ۲ و اساسه } x \text{ خلاص بشیم.}} \sqrt{y} = |x-1| \xrightarrow{\text{خودش گفته } x \geq 1 \text{ پس}} \sqrt{y} = x-1 \xrightarrow{\text{خودش } |x-1|=x-1} \sqrt{y} = x-1$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{y} + 1 \xrightarrow{\text{مرحله‌ی سوم}} f^{-1}(x) = \sqrt{x} + 1$$

$$4) f(x) = (x-1)^2; x < 1$$

$$\Rightarrow y = (x-1)^2 \xrightarrow{\sqrt{\quad}} \sqrt{y} = |x-1| \xrightarrow{\text{خودش گفته } x < 1} \sqrt{y} = 1-x \Rightarrow x = 1 - \sqrt{y}$$

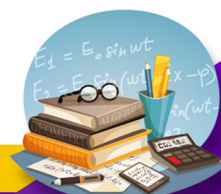
$$\xrightarrow{\text{مرحله‌ی سوم}} f^{-1}(x) = 1 - \sqrt{x}$$

$$5) f(x) = \sqrt{x-1} \Rightarrow y = \sqrt{x-1} \xrightarrow{\text{به توان ۲ می‌رسونیم تا از شر رادیکال خلاص بشیم و } x \text{ آزاد بشه}} y^2 = x-1 \Rightarrow x = y^2 + 1$$

$$\xrightarrow{\text{مرحله‌ی سوم}} f^{-1}(x) = x^2 + 1$$

$$6) f(x) = -\sqrt{x-1} \Rightarrow y = -\sqrt{x-1} \xrightarrow{\text{توان ۲}} y^2 = (-\sqrt{x-1})^2 = +(x-1) \Rightarrow x = y^2 + 1$$

$$\xrightarrow{\text{مرحله‌ی سوم}} f^{-1}(x) = x^2 + 1$$



۷) $f(x) = x^3 \Rightarrow y = x^3 \xrightarrow{\sqrt[3]{\quad}} \sqrt[3]{y} = x \xrightarrow{\text{مرحله سوم}} f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$

۸) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 5 \Rightarrow y = x^3 - 3x^2 + 3x + 5 \Rightarrow y = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + 6 \Rightarrow y = (x-1)^3 + 6$
 حالا عبارت x دارو تنها کن.

$(x-1)^3 = y - 6 \xrightarrow{\sqrt[3]{\quad}} x-1 = \sqrt[3]{y-6} \Rightarrow x = \sqrt[3]{y-6} + 1 \xrightarrow{\text{مرحله سوم}} f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-6} + 1$

تست ۱۸۲: قرینه خط به معادله $3y - 2x = 4$ را نسبت به خط $y = x$ ، خط d می‌نامیم. عرض از مبدأ خط d کدام است؟

- (سراسری تجربی داخل ۹۷) d داردش است.
- ۱) ۲
 - ۲) ۳
 - ۳) ۴
 - ۴) ۵

نوی d (وارون تابع) $y = x$ بنابر
 د این مدل این که نوی خود تابع
 $y = x$ بنابر
 $3y - 2x = 4$
 $x = -2$

راه رینه این که وارون یا همون d ایا بییم و x را مقرر کنیم
 ، حفظ جای x و y رو عوض کن
 $3x - 2y = 4$
 $y = -2$

تست ۱۸۳: درباره‌ی تابع خطی f به ازای هر مقدار حقیقی x می‌دانیم $f^{-1}(x) = f(x-10)$. مقدار $f(7)$ کدام است؟

$f(x) = ax + b$
 $f^{-1}(x) = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a}$
 $\frac{1}{a}x - \frac{b}{a} = a(x-10) + b = ax + b - 10a$
 دو طرف برابرند پس ضریب x و اعداد ثابت در طرف تری باید یکسان باشند.

$\frac{1}{a} = a \rightarrow a^2 = 1 \rightarrow a = \pm 1$
 $-\frac{b}{a} = b - 10a$
 $a = 1 \rightarrow b = 5$
 $f(x) = x + 5$
 $f(7) = 7 + 5 = 12$
 ۱) وارون تابع هموگرافیک $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ با شرط $ad - bc \neq 0$ به شکل $f^{-1}(x) = \frac{-dx+b}{cx-a}$ است.
 ۲) در تابع هموگرافیک $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ با شرط $ad - bc \neq 0$ اگر $a + d = 0$ باشد، تابع و وارونش بر یکدیگر منطبق هستند یعنی:

$f(x) = f^{-1}(x)$

تست ۱۸۴: نمودار تابع $f(x) = \frac{x+4}{x-2}$ ، با دامنه‌ی $\mathbb{R} - \{2\}$ ، نمودار وارون خود را با کدام طول قطع می‌کند؟ (تجربی خارج ۹۶)

- ۱) -۴
- ۲) -۱، ۴
- ۳) ۱، ۴
- ۴) -۱، -۴



تست ۱۸۵: قرینه‌ی نمودار تابع $y = 2 + \sqrt{x-1}$ را نسبت به خط $y = x$ رسم کرده و سپس نمودار حاصل را ۲ واحد در جهت مثبت محور x ها و ۳ واحد در جهت منفی محور y ها انتقال می‌دهیم و آن را $y = g(x)$ می‌نامیم. مقدار $g(4)$ کدام است؟ (تجربی ۱۴۰۰)

(۱) ۳ (۲) -۳ (۳) -۲ (۴) -۴

تست ۱۸۶: تابع $f(x) = x^2 \sqrt{x^2}$ در یک بازه نزولی است. ضابطه‌ی وارون تابع در این بازه کدام است؟ (ریاضی ۱۴۰۱)

(۱) $-\sqrt{x}; x \geq 0$ (۲) $-\sqrt{x^3}; x \leq 0$ (۳) $-\sqrt[3]{x}; x \leq 0$ (۴) $-\sqrt{x^3}; x \geq 0$

تست ۱۸۷: وارون تابع $y = x^3 - x + 1$ از کدام نقطه عبور می‌کند؟ (تجربی ۱۴۰۱)

(۱) $(\frac{5}{8}, \frac{1}{2})$ (۲) $(1, 2)$ (۳) $(-\frac{1}{4}, -\frac{11}{8})$ (۴) $(-1, -2)$

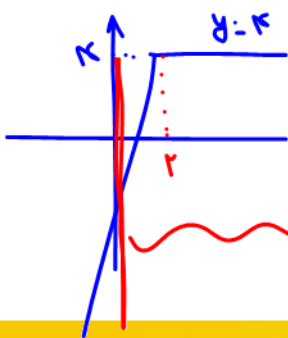
آلبی بکنو
بد بید

تست ۱۸۸: تابع با ضابطه‌ی $f(x) = 2x - |4 - 2x|$ در بازه‌ای وارون پذیر است. ضابطه‌ی $f^{-1}(x)$ در آن بازه کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۲)

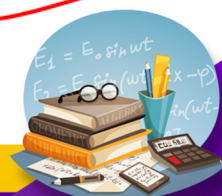
$\frac{1}{4}x + 1, x \geq 4$ (۴) $\frac{1}{4}x - 1, x \geq 4$ (۳) $\frac{1}{4}x - 1, x \leq 4$ (۲) $\frac{1}{4}x + 1, x \geq 4$ (۱)

$f(x) = 2x - |4 - 2x| = \begin{cases} x \leq 2 & y = 2x - (4 - 2x) = 4x - 4 \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1}{4}x + \frac{4}{4} = \frac{1}{4}x + 1 \\ x > 2 & y = 2x - (-4 + 2x) = 4 \end{cases}$

تابع ثابت نمی‌گیرد به یک وارون ناپذیر



$x < 2$
 $R_f(-\infty, 4] = D_{f^{-1}}$



نکلیف : نت ازهر سنج

(تجربی ۹۴)

تست ۱۸۹: تابع با ضابطه $y = x|x-2|$ در یک بازه نزولی است. ضابطه معکوس آن در این بازه کدام است؟

- (۱) $1 - \sqrt{1+x}, x < 0$
- (۲) $1 - \sqrt{1-x}, x < 1$
- (۳) $1 + \sqrt{1-x}, 0 < x < 1$
- (۴) $1 - \sqrt{1-x}, 0 < x < 1$

(سراسری داخل ۹۵)

تست ۱۹۰: اگر $f(x) = \frac{1}{y}(x + \sqrt{x^2 + 4})$ باشد، حاصل $f^{-1}(x) + f^{-1}(\frac{1}{x})$ کدام است؟

- (۱) $2x$
- (۲) $\frac{2}{x}$
- (۳) $x^2 - 1$
- (۴) صفر

پاسخ: گزینه «۴» - ابتدا باید $f^{-1}(x)$ را به دست آوریم، پس می توان نوشت:

$$y = \frac{1}{y}(x + \sqrt{x^2 + 4}) \xrightarrow{\times y} 2y = x + \sqrt{x^2 + 4} \Rightarrow 2y - x = \sqrt{x^2 + 4} \xrightarrow{\text{توان دو}} 4y^2 + x^2 - 4xy = x^2 + 4$$

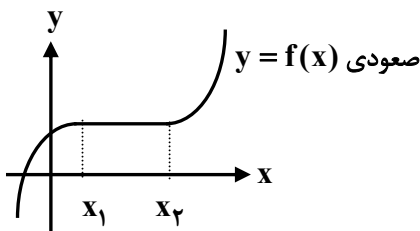
$$\Rightarrow 4y = 4y^2 - 4 \xrightarrow{\div 4} xy = y^2 - 1 \Rightarrow x = \frac{y^2 - 1}{y} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x^2 - 1}{x} = x - \frac{1}{x}$$

$$f^{-1}(x) + f^{-1}(\frac{1}{x}) = (x - \frac{1}{x}) + (\frac{1}{x} - x) = 0$$

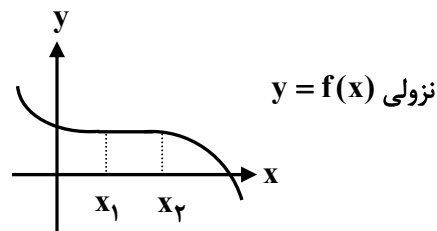
هم چنین $f^{-1}(\frac{1}{x}) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x} - x$ است، پس داریم:

«توابع صعودی و نزولی»

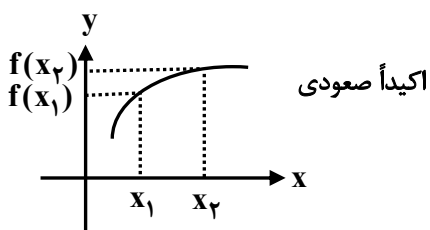
اگر با افزایش x ، مقادیر y افزایش یافته و یا تغییر نکنند، تابع صعودی و اگر با افزایش x مقادیر y کاهش یافته و یا تغییر نکنند، تابع نزولی است. توابع صعودی یا نزولی را (یکنوا) نیز می گویند.



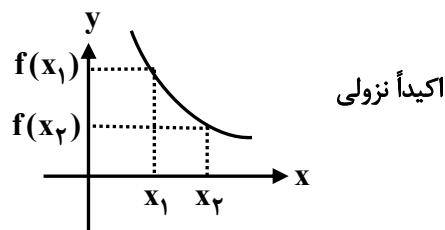
$$x_1, x_2 \in D_f : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$



$$x_1, x_2 \in D_f : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$



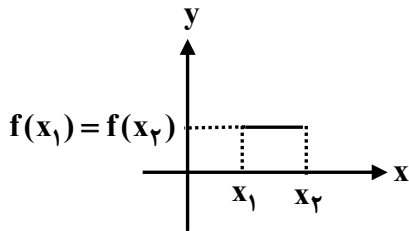
$$x_1, x_2 \in D_f : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$



$$x_1, x_2 \in D_f : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

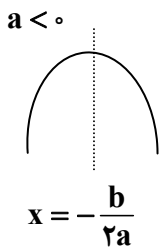


- (۱) تابعی که اکیداً صعودی یا نزولی باشد، اکیداً یکنوا نام دارد.
 (۲) توابع ثابت هم صعودی و هم نزولی اند ولی اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی نیستند.
 مثلاً $y = [x]$ و $y = x + |x|$ ، تابعی صعودی هستند.

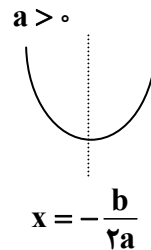


$$x_1, x_2 \in D_f : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$$

(۳) توابع درجه دوم $y = ax^2 + bx + c$ در کل روی \mathbb{R} نه صعودی است و نه نزولی، اما از راس سهمی به قبل و یا از راس سهمی به بعد اکیداً یکنوا (اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی) هستند.



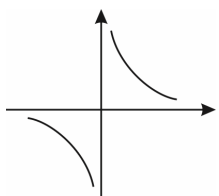
صعودی اکید: $(-\infty, -\frac{b}{2a}]$
 نزولی اکید: $[-\frac{b}{2a}, +\infty)$



نزولی اکید: $(-\infty, -\frac{b}{2a}]$
 صعودی اکید: $[-\frac{b}{2a}, +\infty)$

تست ۱۹۱: تابع $f(x) = 3x^2 + kx + 3k^2$ در بازه $[-2, +\infty)$ صعودی است. حدود k کدام است؟
 (۱) $k \geq -12$ (۲) $k \leq -12$ (۳) $k \geq 12$ (۴) $k \leq 12$

(۴) اگر تابع در قسمت‌هایی از دامنه صعودی و در قسمت‌های دیگر نزولی باشد می‌گوییم نه صعودی و نه نزولی است. به این توابع غیریکنوا گفته می‌شود.



(۵) ممکن است یک تابع در دامنه‌اش نه صعودی و نه نزولی باشد ولی در بازه‌هایی از دامنه‌اش صعودی و یا نزولی باشد. مثلاً $y = \frac{1}{x}$ در فاصله $(0, +\infty)$ و یا در فاصله $(-\infty, 0)$ اکیداً نزولی است ولی روی دامنه‌اش نه صعودی و نه نزولی است.

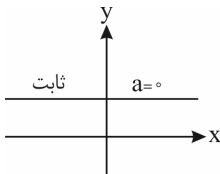


۶) توابع $y = a^x$ و $y = \log_a x$ به ازای $a > 1$ اکیداً صعودی هستند.

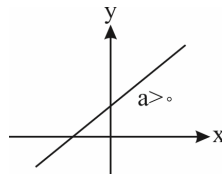
۷) توابع $y = a^x$ و $y = \log_a x$ به ازای $0 < a < 1$ اکیداً نزولی هستند.

۸) تابع خطی $f(x) = ax + b$ با شرط $a \neq 0$ اکیداً یکنوا است و اگر $a = 0$ باشد به صورت یک خط افقی درمی آید که هم صعودی و هم نزولی است اما اکیداً صعودی و یا اکیداً نزولی نیست.

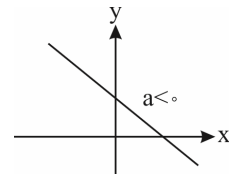
در خصوص دو مورد قبلی در بخش توابع نمایی و لگاریتمی صحبت کرده ایم.



هم صعودی، هم نزولی



اکیداً صعودی



اکیداً نزولی

تست ۱۹۲: اگر $f = \{(-3, 4)(0, -2m + 1)(-1, m)\}$ نزولی باشد، حدود m کدام است؟

(۴) $(\frac{1}{3}, +\infty)$

(۳) $[\frac{1}{3}, 4]$

(۲) $(\frac{1}{3}, 4)$

(۱) $(-\infty, 4)$

(ریاضی ۹۱)

تست ۱۹۳: تابع با ضابطه $f(x) = x^2 - 2x - 3$ با دامنه $\{x : |x - 1| < 2\}$ ، همواره چگونه است؟

(۴) نزولی

(۳) صعودی

(۲) مثبت

(۱) منفی



تست ۱۹۴: در بازه‌ای که تابع با ضابطه $f(x) = |x-2| + |x-3|$ اکیداً نزولی است، نمودار آن با نمودار تابع $g(x) = 2x^2 - x - 1$ در چند نقطه مشترک هستند؟ (تجربی داخل ۹۷)

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) فاقد نقطه مشترک

اگر $x_1, x_2 \in D_f: x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ یعنی f تابعی است اکیداً صعودی و اگر $x_1, x_2 \in D_f: x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ یعنی f تابعی است اکیداً نزولی پس اگر مثلاً داشته باشیم $f(x^2) > f(x)$ و f تابعی اکیداً صعودی باشد نتیجه می‌گیریم که $x^2 > x$ است و داریم $x > 1$ یا $x < 0 \Rightarrow x^2 - x > 0 \Rightarrow x^2 > x$ و اگر مثلاً داشته باشیم $f(x^2) > f(x)$ و f تابعی اکیداً نزولی باشد نتیجه می‌گیریم که $x^2 < x$ است و داریم:

$$x^2 < x \Rightarrow x^2 - x < 0 \Rightarrow 0 < x < 1$$

در واقع در تابع اکیداً نزولی با حذف f ، جهت نامساوی عوض می‌شود و در تابع اکیداً صعودی با حذف f جهت نامساوی عوض نمی‌شود.

تست ۱۹۵: اگر f تابعی نزولی اکید با دامنه‌ی R باشد، دامنه‌ی تعریف $y = \sqrt{f(|x-2|) - f(2x-1)}$ کدام است؟

(۱) $[1, +\infty)$ (۲) R (۳) $[-1, 1]$ (۴) $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$

تست ۱۹۶: تابع $f(x) = |\sin x|$ مفروض است. در کدام یک از بازه‌های زیر، برای هر x_1 و x_2 عضو این بازه، رابطه $f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow x_1 < x_2$ برقرار است؟

- (۱) $(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$ (۲) $(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ (۳) $[-\frac{\pi}{4}, 0]$ (۴) $[0, \frac{\pi}{4}]$



تست ۱۹۷: اگر تابع f اکیداً صعودی و $f(1) = 0$ باشد، آن‌گاه دامنه $\sqrt{(x^3 - x)f(x)}$ برابر با $\mathbb{R} - (a, b)$ است. حاصل $a + b$ کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) صفر ۳ (۳) -۱ ۴ (۴) ۲

تست ۱۹۸: کدام یک از توابع زیر یک‌به‌یک است؟

(۱) $y = x^2 + 2\sqrt{x}$ (۲) $y = x - x\sqrt{x}$ (۳) $y = x + \frac{1}{x}$ (۴) $y = 2x^2 - |x|$

پاسخ: گزینه «۱» - تابع $y = 2\sqrt{x}$ با شرط $x \geq 0$ اکیداً صعودی است، به علاوه x^2 هم در این فاصله اکیداً صعودی است. پس $y = x^2 + 2\sqrt{x}$ اکیداً صعودی خواهد بود و در نتیجه یک‌به‌یک است.

گزینه (۲): یک‌به‌یک نیست.
 $y = x(1 - \sqrt{x})$, $y = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$

گزینه (۳):
 $y = x + \frac{1}{x} = \frac{x^2 + 1}{x}$, $y = 3 \Rightarrow \frac{x^2 + 1}{x} = 3 \Rightarrow x^2 - 3x + 1 = 0 \Rightarrow \Delta > 0$

به ازای دو مقدار از x مقدار تابع ۳ می‌شود پس تابع یک‌به‌یک نیست.

گزینه (۴):
 $y = 2x^2 - |x| = |x|(2|x| - 1)$, $y = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm \frac{1}{2} \end{cases}$

به ازای سه مقدار از x مقدار تابع صفر می‌شود و یک‌به‌یک نیست.

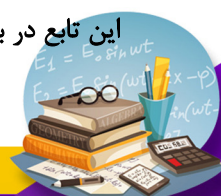
تست ۱۹۹: اگر $f(x) = \frac{x^4 - 1}{\sqrt{x - 2}}$ و $g(x) = \frac{\sqrt{x - 2}}{x^2 - 1}$ ، آن‌گاه نمودار تابع $y = (f \cdot g)(x)$ چگونه است؟

- (۱) صعودی (۲) نزولی
 (۳) ابتدا صعودی، سپس نزولی (۴) ابتدا نزولی، سپس صعودی
 پاسخ: گزینه «۱» - ابتدا دامنه تابع $y = (f \cdot g)(x)$ را می‌یابیم:

$$\left. \begin{aligned} D_{f \cdot g} &= D_f \cap D_g \\ D_f : x - 2 > 0 &\Rightarrow x \in (2, +\infty) \\ D_g : \begin{cases} x - 2 \geq 0 \\ x^2 - 1 \neq 0 \end{cases} &\Rightarrow x \in [2, +\infty) \end{aligned} \right\} \Rightarrow D_{f \cdot g} = (2, +\infty)$$

$$y = (f \cdot g)(x) = f(x) \times g(x) = \frac{x^4 - 1}{\sqrt{x - 2}} \times \frac{\sqrt{x - 2}}{x^2 - 1} = \frac{x^4 - 1}{x^2 - 1} = \frac{(x^2 - 1)(x^2 + 1)}{x^2 - 1} \Rightarrow y = (f \cdot g)(x) = x^2 + 1$$

این تابع در بازه $(2, +\infty)$ صعودی است.



تست ۲۰۰: تابع $f(x) = (-9 + k^2)x^3 + 5$ اکیداً نزولی است. مجموع مقادیر صحیح k چقدر است؟ (تجربی ۱۴۰۱)

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۶ (۴) صفر

تست ۲۰۱: اگر تابع $f(x) = \begin{cases} -3x+1 & x \geq 0 \\ ax+a+4 & x < 0 \end{cases}$ در تمام دامنه‌اش نزولی اکید باشد، مجموعه تمام مقادیر ممکن برای a کدام است؟

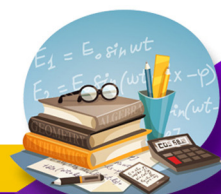
- (۱) $a \leq 0$ (۲) $-3 \leq a \leq 0$ (۳) $-3 \leq a < 0$ (۴) $a < 0$

تست ۲۰۲: تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & x \geq 0 \\ 1 - x^2 & x < 0 \end{cases}$ ، بر روی مجموعه اعداد حقیقی چگونه است؟ (سراسری - ۸۹)

- (۱) یکنوا - یک به یک (۲) غیریکنوا - یک به یک (۳) یکنوا - غیر یک به یک (۴) غیریکنوا - غیر یک به یک

تست ۲۰۳: تابع با ضابطه‌ی $f(x) = |x+2| + |x-1|$ در کدام بازه اکیداً نزولی است؟ (تجربی ۹۸)

- (۱) $(-\infty, -2)$ (۲) $(-\infty, 1)$ (۳) $(-2, 1)$ (۴) $(1, +\infty)$



نامعادلات نمایی و لگاریتمی

با توجه به مفهوم یکنوایی توابع $y = a^x$ و $y = \log_a x$ می‌توان نکات زیر را برای حل نامعادلات نمایی و لگاریتمی نتیجه گرفت:

نامعادلات نمایی: در حل نامعادلات توابع نمایی از روابط زیر استفاده می‌کنیم:

$$1) a^x > a^y \xrightarrow{a > 1} x > y$$

$$2) a^x > a^y \xrightarrow{0 < a < 1} x < y$$

یعنی در حل نامعادلات نمایی، اگر پایه بین صفر و یک باشد، جهت نامساوی عوض می‌شود. (حتماً می‌دانید که دلیل این تغییر جهت آن است

که تابع $y = a^x$ با شرط $0 < a < 1$ اکیداً نزولی است.)

نامعادلات لگاریتمی: در حل نامعادلات لگاریتمی از روابط زیر استفاده می‌کنیم:

$$1) \log_a x > y \xrightarrow{a > 1} x > a^y$$

$$2) \log_a x > y \xrightarrow{0 < a < 1} x < a^y$$

$$3) \log_a x > \log_a y \xrightarrow{a > 1} x > y$$

$$4) \log_a x > \log_a y \xrightarrow{0 < a < 1} x < y$$

تست ۲۰۴: مجموعه جواب نامعادله $(\frac{\sqrt{2}}{4})^{x^2} \geq (\frac{\sqrt{2}}{4})^x$ به کدام صورت است؟

(۴) $(-\infty, 1]$

(۳) $[0, 1]$

(۲) $\mathbb{R} - (0, 1)$

(۱) $[0, +\infty)$

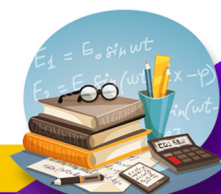
تست ۲۰۵: مجموعه جواب نامعادله $\log_{0.1}(x-3) \geq \log_{0.1}(5-x)$ شامل چند عدد طبیعی است؟

(۴) ۴

(۳) ۳

(۲) ۲

(۱) ۱



تست ۲۰۶: اگر $f(x) = 3 - 2^x$ باشد، دامنه تابع $g(x) = \sqrt{xf^{-1}(x)}$ کدام است؟

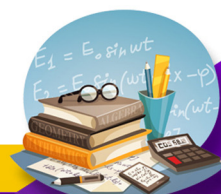
- (۱) $[0, 2]$ (۲) $[0, 3]$ (۳) $[2, 3]$ (۴) $[1, 3]$

تست ۲۰۷: بزرگ‌ترین بازه برای k که در آن تابع نمایی $y = \left(\frac{5-k}{1-3k}\right)^x$ همواره اکیداً صعودی باشد، کدام است؟

- (۱) $(-1, \frac{1}{3})$ (۲) $(-2, \frac{1}{3})$ (۳) $(-3, \frac{1}{3})$ (۴) $(-4, \frac{1}{3})$

تست ۲۰۸: تابع $f(x) = \begin{cases} a - \log_{\frac{1}{3}} x & x \geq 3 \\ 2x + 1 & x < 3 \end{cases}$ به ازای چه حدودی از a همواره در شرط $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1)$ صدق می‌کند؟

- (۱) $a \leq 6$ (۲) $a \geq 6$ (۳) هیچ مقدار a (۴) فقط $a = 6$



تقسیم و روابط آن

یکی از سؤالات معروف در دوره‌ی اول این بود که «عدد ۳۱ را بر ۷ تقسیم کنید و خارج قسمت و باقی‌مانده را بیابید.»

باقی‌مانده + خارج قسمت \times مقسوم‌علیه = مقسوم

$$31 = 7 \times 4 + 3$$

با استفاده از همین موضوع ساده، تقسیم چندجمله‌ای‌ها را به این صورت انجام می‌دهیم:

۱- مقسوم را بر اساس توان‌های نزولی از بزرگ به کوچک مرتب می‌کنیم.

۲- جمله‌ای که در مقسوم، بزرگ‌ترین درجه را دارد بر جمله‌ای از مقسوم‌علیه که بزرگ‌ترین درجه را دارد تقسیم می‌کنیم.

۳- عبارت به‌دست‌آمده در خارج قسمت را در مقسوم‌علیه ضرب می‌کنیم و علامتش را قرینه کرده با مقسوم جمع می‌کنیم.

۴- این مراحل سه‌گانه را تا جایی ادامه می‌دهیم که درجه‌ی به‌دست‌آمده در ردیف باقی‌مانده کم‌تر از درجه‌ی مقسوم‌علیه باشد.

مثلاً: عبارت $x^3 + x^2 - 2$ را بر $x - 1$ تقسیم می‌کنیم:

مقسوم	مقسوم‌علیه
$x^3 + x^2 - 2$	$x - 1$
$-x^3 + x^2$	$x^2 + 2x + 2$
$2x^2 - 2$	خارج قسمت
$-2x^2 + 2x$	
$2x - 2$	
$-2x + 2$	
$0 = R$	
باقی‌مانده	

با توجه به قانون تقسیم داریم:

باقی‌مانده + خارج قسمت \times مقسوم‌علیه = مقسوم

$$x^3 + x^2 - 2 = (x - 1)(x^2 + 2x + 2) + 0$$

پس اگر مقسوم را با $P(x)$ ، مقسوم‌علیه را با $D(x)$ ، خارج قسمت را با $Q(x)$ و باقی‌مانده را با $R(x)$ نمایش دهیم، خواهیم داشت:

باقی‌مانده + خارج قسمت \times مقسوم‌علیه = مقسوم

$$P(x) = D(x) \times Q(x) + R(x)$$

یادت باشه همواره باقی‌مانده حداقل یک درجه کم‌تر از مقسوم‌علیه است.

۱- محاسبه‌ی باقی‌مانده‌ی تقسیم $P(x)$ بر چندجمله‌ای درجه اول $ax + b$:

وقتی $P(x)$ را بر $ax + b$ تقسیم می‌کنیم کافی است، برای یافتن باقی‌مانده، به جای x قرار دهیم $-\frac{b}{a}$. به این ترتیب داریم:

$$ax + b = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$$

$$R = P\left(-\frac{b}{a}\right) \text{ باقی‌مانده}$$



مثال ۲۰۹: باقی مانده‌ی تقسیم $x^4 - ax^3 + x^2 + 2ax + 1$ بر $x + 1$ برابر ۴ شده است. a کدام است؟ (سراسری ریاضی ۸۰)
پاسخ:

$$R = P(-1) = 4 \Rightarrow (-1)^4 - a(-1)^3 + (-1)^2 + 2a(-1) + 1 = 4 \Rightarrow 1 + a + 1 - 2a + 1 = 4 \Rightarrow -a = 1 \Rightarrow a = -1$$

مثال ۲۱۰: باقی مانده‌ی تقسیم $15x^2 + 14x - 29$ بر $x - 1$ بیابید.
پاسخ:

$$R = P(1) = 15(1)^2 + 14(1) - 29 = 29 - 29 = 0 \Rightarrow R = 0$$

باقی مانده صفر شد، یعنی این که $15x^2 + 14x - 29$ بر $x - 1$ بخش پذیر است. پس عامل $x - 1$ را در خود دارد.
۲- محاسبه‌ی باقی مانده‌ی تقسیم $P(x)$ بر یک چندجمله‌ای با درجه‌ی بیشتر از یک:

گفتیم برای پیدا کردن باقی مانده، مقسوم علیه را صفر می‌کنیم:

و این برای وقتی بود که مقسوم علیه از درجه‌ی اول بود. حال اگر مقسوم علیه از درجه‌ی اول نباشد باز هم آن را مساوی صفر قرار می‌دهیم. اما این جا، جمله‌های پرتوان را بر حسب جمله‌های با توان کم‌تر می‌نویسیم و با ظاهر کردن جملات پرتوان در مقسوم، معادل کم‌توانشان را جاگذاری می‌کنیم.

مثال ۲۱۱: باقی مانده‌ی تقسیم $x^5 + 2x^9 + 2$ بر $x^3 - 1$ بیابید.

پاسخ: ابتدا قرار می‌دهیم $x^3 - 1 = 0$ پس $x^3 = 1$ (این یک معادله نیست. یعنی نباید نتیجه بگیرد که $x = 1$ است). حال در رابطه‌ی $x^5 + 2x^9 + 2$ می‌سازیم و به جایش $(x^3 = 1)$ قرار می‌دهیم.

$$2x^9 + x^5 + 2 = 2(x^3)^3 + (x^3)x^2 + 2 \stackrel{x^3=1}{=} 2(1)^3 + (1)x^2 + 2 = x^2 + 4$$

یعنی باقی مانده، $x^2 + 4$ است.

۳- اگر باقی مانده‌ی تقسیم عبارت $P(x)$ بر $x - a$ و $x - b$ به ترتیب R_1 و R_2 باشد، باقی مانده‌ی تقسیم $P(x)$ بر $(x - a)(x - b)$ برابر است با $R(x) = Ax + B$ چرا که مقسوم علیه از درجه دو است و باقی مانده باید درجه‌اش از مقسوم علیه کم‌تر باشد:

$$\frac{P(x)}{R = Ax + B} \Big| \frac{(x - a)(x - b)}{Q(x)}$$

مثال ۲۱۲: اگر باقی مانده‌ی تقسیم $f(x)$ بر $x + 1$ و $x - 2$ به ترتیب -1 و 5 باشد، باقی مانده‌ی $f(x)$ بر $x^2 - x - 2$ کدام است؟

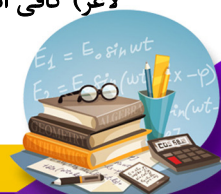
$$\frac{f(x)}{R = Ax + B} \Big| \frac{x^2 - x - 2}{Q(x)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow R = f(-1) = -1 \Rightarrow \begin{cases} A(-1) + B = -1 & \text{(I)} \\ x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow R = f(2) = 5 \Rightarrow \begin{cases} A(2) + B = 5 & \text{(II)} \end{cases} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{(I)} \times 2 \Rightarrow -2A + 2B = -2 \\ \text{(II)} \Rightarrow 2A + B = 5 \end{cases} \Rightarrow 3B = 3 \Rightarrow B = 1 \Rightarrow A = 2 \Rightarrow R = Ax + B = 2x + 1$$

پس باقی مانده $R = 2x + 1$ است.

۴- هرگاه باقی مانده‌ی تقسیم عبارتی، اغلب با درجه بالاتر بر عبارتی مثل $x^2 \pm x + 1$ یا $x^2 \pm 2x + 4$ خواسته شود (مرتبط با اتحاد چاق و لاغر) کافی است عبارات فوق را در قسمت لاغر $(x \mp 1)$ یا $(x \mp 2)$ ضرب کنیم.



مثال ۲۱۳: باقی مانده‌ی تقسیم x^{27} بر $x^2 - x + 1$ کدام است؟

$$-1 \quad (1) \qquad 1 \quad (2) \qquad x-7 \quad (3) \qquad 3x+1 \quad (4)$$

پاسخ: گزینه‌ی «۱»

(این یک معادله نیست) $\Rightarrow x^3 = -1 \Rightarrow x^3 + 1 = 0 \Rightarrow x^3 + 1 = 0 \Rightarrow (x^2 - x + 1)(x + 1) \Rightarrow x^3 + 1 = 0$

یادت باشه

$$\Rightarrow R = x^{27} = (x^3)^9 = (-1)^9 = -1$$

این مورد را پس از فصل مشتق یادتان می‌دهم.

۵- اگر عبارت $P(x)$ بر $(x-a)^n$ بخش پذیر باشد، $x=a$ خود $P(x)$ و مشتقات متوالی آن را تا $(n-1)$ مرتبه صفر می‌کند.

$$P(a) = P'(a) = P''(a) = \dots = P^{(n-1)}(a) = 0$$

مثال ۲۱۴: به ازای چه مقدار از a و b عبارت $ax^6 + bx^5 - 1$ بر $(x-1)^2$ بخش پذیر است؟

ریشه $P(x)$ و ریشه $P'(x)$ $(x-1)^2 = 0 \Rightarrow x=1$

پاسخ:

$$P(x) = ax^6 + bx^5 - 1 \Rightarrow P(1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a + b - 1 = 0 \\ P'(x) = 6ax^5 + 5bx^4 \Rightarrow P'(1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 6a + 5b = 0 \end{cases} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + b = 1 & \xrightarrow{-5} & -5a - 5b = -5 & \text{(I)} \\ 6a + 5b = 0 & \text{(II)} \end{cases} \xrightarrow[\text{(I)+(II)}]{\text{حل دستگاه}} a = -5, b = 6$$

۶- اگر باقی مانده‌ی تقسیم عبارات $f(x)$ و $g(x)$ بر عبارت $h(x)$ به ترتیب R_1 و R_2 باشد، باقی مانده‌ی تقسیم $f(x) \cdot g(x)$ بر عبارت $h(x)$ برابر است با، باقی مانده‌ی تقسیم $R_1 R_2$ بر $h(x)$.

مثال ۲۱۵: اگر باقی مانده‌ی تقسیم عبارت‌های $f(x)$ و $g(x)$ بر $x^2 - x - 5$ به ترتیب $x+2$ و x باشد، باقی مانده‌ی تقسیم $f(x) \cdot g(x)$ را بر $x^2 - x - 5$ بیابید.

پاسخ:

$$R_1 R_2 = x(x+2) = x^2 + 2x \quad \left| \begin{array}{r} x^2 - x - 5 \\ -x^2 + x + 5 \\ \hline 3x + 5 \end{array} \right.$$

پس باقی مانده‌ی تقسیم $f(x) \cdot g(x)$ بر $x^2 - x - 5$ برابر است با $3x+5$.

$P(x) = x^n - y^n$ $-y - x^n - y^n$ همواره بر $x-y$ بخش پذیر است. چون:

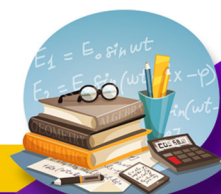
$$x - y = 0 \Rightarrow x = y \Rightarrow P(y) = y^n - y^n = 0$$

$$x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y^1 + x^{n-3}y^2 + \dots + xy^{n-2} + y^{n-1})$$

$P(x) = x^n - y^n$ ۸- $x^n - y^n$ زمانی بر $x+y$ بخش پذیر است که n زوج باشد. چون:

$$x + y = 0 \Rightarrow x = -y \Rightarrow P(-y) = (-y)^n - (y)^n \stackrel{\text{زوج } n}{=} y^n - y^n = 0$$

$$x^n - y^n = (x+y)(x^{n-1} - x^{n-2}y^1 + \dots + xy^{n-2} - y^{n-1})$$



۹- $x^n + y^n$ هیچ‌گاه بر $x - y$ بخش پذیر نیست.

$P(x) = x^n + y^n$ ۱۰- $x^n + y^n$ زمانی بر $x + y$ بخش پذیر است که n فرد باشد، چون:

$$x + y = 0 \Rightarrow x = -y \Rightarrow P(-y) = (-y)^n + y^n \stackrel{n \text{ فرد}}{=} -y^n + y^n = 0$$

تست‌ها:

تست ۲۱۶: اگر عبارت $x^4 + ax^2 - bx + 4$ بر $(x-1)^2$ بخش پذیر باشد، b کدام است؟ (سراسری ریاضی خارج ۹۴)

- ۳ (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴)

پاسخ: گزینه‌ی «۴»

بهبهت یاد دادم که اگر $P(x)$ بر $(x-a)^n$ بخش پذیر باشد، خودش و مشتق‌هاشو تا $(n-1)$ مرتبه صفر می‌کند. پس این‌جا

$$x=1 \Rightarrow (x-1)^2 = 0 \Rightarrow P(x) \text{ و } P'(x) \text{ رو صفر می‌کند.}$$

$$P(1) = 0 \Rightarrow 1 + a - b + 4 = 0 \Rightarrow a - b = -5 \quad \text{(I)}$$

$$P'(x) = 4x^3 + 2ax - b \Rightarrow P'(1) = 4 + 2a - b = 0 \Rightarrow 2a - b = -4 \quad \text{(II)}$$

$$\begin{cases} \text{(I)} \times (-2) \Rightarrow -2a + 2b = 10 \\ \text{(II)} \Rightarrow 2a - b = -4 \end{cases} \Rightarrow b = 6, a = 1$$

تست ۲۱۷: به ازای مقداری از a ، چندجمله‌ای $f(x) = x^4 + ax^3 - 8x$ بر $x+2$ بخش پذیر است. کوچک‌ترین ریشه‌ی معادله‌ی

$f(x) = 0$ کدام است؟ (سراسری ریاضی ۹۴)

- ۱- $\sqrt{3}$ (۱) ۲- $\sqrt{5}$ (۲) ۳- $-\sqrt{3}$ (۳) ۴- $-\sqrt{5}$ (۴)

پاسخ: گزینه‌ی «۴» - $f(x)$ بر $x+2$ بخش پذیر یعنی این که $f(-2) = 0 \Rightarrow x = -2 \Rightarrow x+2 = 0$ ، می‌شه پس:

$$f(-2) = (-2)^4 + a(-2)^3 - 8(-2) = 16 - 4a + 16 = 0 \Rightarrow 8a = 32 \Rightarrow a = 4$$

حالا بیا $f(x)$ رو بنویس: $f(x) = x^4 + 4x^3 - 8x = 0 \Rightarrow x(x^3 + 4x^2 - 8) = 0$

حالا چون صورت سؤال گفته $(x+2)$ یک عامل عبارت است، می‌تونیم عامل $x^3 + 4x^2 - 8x$ رو به $x+2$ تقسیم کنیم و عامل درجه دوم حاصل رو حل کنیم و کوچک‌ترین ریشه رو به دست بیاریم.

$$\begin{array}{r|l} x^3 + 4x^2 - 8 & x+2 \\ -x^3 - 2x^2 & \\ \hline 2x^2 - 8 & \\ -2x^2 - 4x & \\ \hline -4x - 8 & \\ 4x + 8 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$\Rightarrow x^2 + 2x - 4 = 0 \xrightarrow[\Delta=20]{\text{حل به روش دلتا}} x = \frac{-2 \pm \sqrt{20}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{5}}{2} = -1 \pm \sqrt{5} \xrightarrow{\text{کوچک‌ترین ریشه}} -1 - \sqrt{5}$$

ریشه‌های این معادله عبارت‌اند از: $-1 - \sqrt{5}, -1 + \sqrt{5}, -2, 0$



(سراسری ریاضی ۸۶)

تست ۲۱۸: عبارت $x^2 + fax^2 + 2bx + 1$ بر $x^2 - 4$ بخش پذیر است. $a + b$ کدام است؟

(۱) $-\frac{15}{8}$ (۲) $-\frac{17}{16}$ (۳) $\frac{17}{6}$ (۴) $\frac{15}{8}$

پاسخ: گزینه‌ی «۲»

مقسوم‌علیه را مساوی صفر قرار بده: $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4$

حالا در مقسوم به جای x^2 ، ۴ رو قرار بده و کل عبارت رو مساوی صفر بذار چون قراره بخش پذیر بشه پس باقی‌مانده صفر هست.

$$x^4 + fax^2 + 2bx + 1 = (x^2)^2 + fa(x^2) + 2bx + 1 \stackrel{x^2=4}{=} (4)^2 + fa(4) + 2bx + 1 = 16 + 16a + 2bx + 1 = 0$$

حالا چون این تساوی باید به ازای هر x برقرار باشد، پس این رابطه به x وابسته نیست و باید یه جور x رو حذف کنیم. پس ضریب x رو صفر قرار می‌دهیم:

$$2b = 0 \Rightarrow b = 0 \Rightarrow 16 + 16a + 1 = 0 \Rightarrow 16a = -17 \Rightarrow a = -\frac{17}{16}$$

$$a + b = 0 - \frac{17}{16} = -\frac{17}{16}$$

روش دوم: مقسوم‌علیه قابل تجزیه است. پس رابطه‌ی تقسیم رو این جور می‌نویسیم:

$$x^4 + fax^2 + 2bx + 1 = \underbrace{(x-2)(x+2)}_{x^2-4} Q(x) + R(x)$$

حالا با قرار دادن $x = 2$ و $x = -2$ ، $Q(x)$ رو حذف می‌کنیم.

$$\begin{cases} x = 2 \Rightarrow 16 + 16a + 4b + 1 = 0 \\ x = -2 \Rightarrow 16 + 16a - 4b + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 16a + 4b = -17 \\ 16a - 4b = -17 \end{cases} \xrightarrow{\text{جمع}} 32a = -34 \Rightarrow a = -\frac{17}{16} \Rightarrow b = 0$$

پس $a + b = -\frac{17}{16}$

تست ۲۱۹: اگر عبارت $x^{2n+1} + 2x^{2n} + x^5 - 5x^3 + k$ به ازای هر عدد طبیعی x بر دو جمله‌ای $x + 2$ بخش پذیر باشد، آن گاه

(سراسری ریاضی ۸۹)

باقی‌مانده‌ی تقسیم آن بر $x^2 - 1$ کدام است؟

(۱) $-3x - 6$ (۲) $-2x + 1$ (۳) $2x + 4$ (۴) $3x - 4$

پاسخ: گزینه‌ی «۱»

چون $P(x)$ بر $x + 2$ بخش پذیره، پس $x = -2 \Rightarrow P(-2) = 0$ است. لذا داریم:

$$(-2)^{2n-1} + 2(-2)^{2n} + (-2)^5 - 5(-2)^3 + k = 0 \Rightarrow \underbrace{(-2)(-2)^{2n} + 2(-2)^{2n}}_{\text{صفر}} - 32 + 40 + k = 0 \Rightarrow k = -8$$

حالا $P(x) = x^{2n+1} + 2x^{2n} + x^5 - 5x^3 - 8$ رو بنویس:

واسه این که باقی‌مانده‌ی تقسیم $P(x)$ بر $x^2 - 1$ رو به دست بیاریم کافیست که $x^2 = 1$ (مقسوم‌علیه رو مساوی صفر گذاشتیم) رو در $P(x)$ جاگذاری کنیم:

$$P(x) = (x^2)^n x + 2(x^2)^n + (x^2)^2 x - 5(x^2)x - 8 \stackrel{x^2=1}{=} x + 2 + x - 5x - 8 = -3x - 6$$



تست ۲۲۰: اگر باقی مانده‌ی تقسیم $f(x)$ بر $x(x-3)(x+3)$ برابر $5x^2 + 3x + 1$ باشد و باقی مانده‌ی تقسیم $f(x)$ بر $x^2 - 3x$ برابر $ax + b$ باشد، آن گاه $2a + b$ کدام است؟

- (۱) ۲۰ (۲) ۳۷ (۳) -۲۳ (۴) ۱۹

پاسخ: گزینه‌ی «۲»

باقی مانده خارج قسمت مقسوم علیه
 $P(x) = D(x) Q(x) + R(x)$ رابطه‌ی کلی تقسیم $P(x)$ به $Q(x)$ رو یادته؟

حالا این جا هم $f(x)$ مقسوم و $x(x-3)(x+3)$ مقسوم علیه و $5x^2 + 3x + 1$ باقی مانده است. و در حالت بعدی $f(x)$ مقسوم، $x^2 - 3x$ مقسوم علیه و $ax + b$ باقی مانده است. پس:

$$\begin{cases} f(x) = x(x-3)(x+3)Q(x) + 5x^2 + 3x + 1 \quad (I) \\ f(x) = (x^2 - 3x)Q'(x) + ax + b = x(x-3)Q'(x) + ax + b \quad (II) \end{cases}$$

(II) : $f(0) = b, f(3) = 3a + b$ $\xrightarrow{\text{مقایسه}}$ $b = 1, 3a + 1 = 55 \Rightarrow 3a = 54 \Rightarrow a = 18$

(I) : $f(0) = 1, f(3) = 55$

بنابراین $2a + b = 36 + 1 = 37$

تست ۲۲۱: باقی مانده‌ی تقسیم عبارت $f(x) = (x+1)^3(x-1)^2 + x^4 - x^2 - 1$ بر $x^2 - 1$ کدام است؟

- (۱) $x + 1$ (۲) ۱ (۳) -۱ (۴) $-x - 1$

پاسخ: گزینه‌ی «۳» - برای یافتن باقی مانده بهت یاد دادم که مقسوم علیه رو صفر کنی $x^2 = 1 \Rightarrow x^2 - 1 = 0$ ، و در مقسوم به جای x^2 ، ۱ بذاری؛ اما اول $f(x)$ رو جمع و جورتر بنویس:

$$f(x) = \overbrace{(x+1)(x+1)^2(x-1)^2}^{\text{مزدوج}} + x^4 - x^2 - 1 = (x+1)(x^2-1)^2 + x^4 - x^2 - 1 = (x+1)((x^2-1)^2) + (x^2)^2 - (x^2) - 1$$

$$\xrightarrow{x^2=1} (x+1)(1-1)^2 + (1)^2 - 1 - 1 = -1 \Rightarrow R = -1$$

تست ۲۲۲: عبارت $a^{28} + b^{28}$ بر کدام یک از عبارات زیر بخش پذیر است؟

- (۱) $a + b$ (۲) $a^2 + b^2$ (۳) $a^4 + b^4$ (۴) $a^7 + b^7$

پاسخ: گزینه‌ی «۳»

یادته گفتیم که $x^n + y^n$ وقتی به $x + y$ بخش پذیره که n فرد باشد. حالا $a^n + b^n$ وقتی به $a^m + b^m$ بخش پذیره که n مضرب فرد و طبیعی از m باشد. 28 مضرب فرد و طبیعی از 4 است (مضرب ۷) پس $a^{28} + b^{28}$ بر $a^4 + b^4$ بخش پذیر است. روش دوم: در گزینه‌ی «۳» داریم:

$$a^4 + b^4 = 0 \Rightarrow a^4 = -b^4 \Rightarrow a^{28} + b^{28} = (a^4)^7 + b^{28} = (-b^4)^7 + b^{28} = -(b^{28}) + b^{28} = 0$$

چون توان $(-b^4)^7$ فرد است، پس منفی رو پس می ده:

$$(-b^4)^7 = -b^{28}$$

تست ۲۲۳: عبارت $x^{24} + 1$ بر کدام عبارت زیر همواره بخش پذیر است؟

- (۱) $x^{12} + 1$ (۲) $x^3 + 1$ (۳) $x^6 + 1$ (۴) $x^8 + 1$



پاسخ: گزینه‌ی «۴» - $x^{24} + 1$ همان $x^{24} + 1^{24}$ است و مثل سؤال قبلی وقتی به $x^m + 1^m$ بخش‌پذیره که 24 مضرب طبیعی و فرد از m باشد. درگزینه‌ی «۴»، 24 بر 8 می‌شه 3 و مضرب فرد از اون هست.

روش دوم: دست تو جیب در گزینه‌ی «۴» داریم:

$$x^8 + 1 = 0 \Rightarrow x^8 = -1$$

$$x^{24} + 1 = (x^8)^3 + 1 = (-1)^3 + 1 = -1 + 1 = 0$$

پس $x^{24} = 1$ بر $x^8 + 1$ بخش‌پذیره چون باقی‌مانده‌اش صفر شد.

تست ۲۲۴: خارج‌قسمت $x^9 + 4x^6 + 2x - 1$ بر $x + 1$ را بر $x - 1$ تقسیم کرده‌ایم. باقی‌مانده کدام است؟

$$-1 \quad (1) \quad 1 \quad (2) \quad 3 \quad (3) \quad 4 \quad (4)$$

پاسخ: گزینه‌ی «۳» - ابتدا باقی‌مانده $P(x)$ رو بر $x + 1$ پیدا می‌کنیم:

$$x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow R = P(-1) = -1 + 4 - 2 - 1 = 0 \Rightarrow R = 0$$

$$x^9 + 4x^6 + 2x - 1 = (x + 1)Q(x) \quad (I)$$

$$Q(x) = (x - 1)Q'(x) + R'$$

$$\xrightarrow{x=1} Q(1) = \overbrace{(1-1)Q'(1)}^{=0} + R' \Rightarrow Q(1) = R'$$

از ما R' رو می‌خواد پس $Q'(x)$ رو حذف می‌کنیم:

از قسمت (I)، $Q(1)$ رو حساب می‌کنیم:

$$\xrightarrow{x=1} 1 + 4 + 2 - 1 = (1 + 1)Q(1) \Rightarrow 6 = 2Q(1) \Rightarrow Q(1) = 3 \Rightarrow R' = 3$$

تست ۲۲۵: اگر باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر $x - 1$ و $x - 2$ به ترتیب 3 و -1 باشد، باقی‌مانده تقسیم

$$g(x) = x^2 f(x) - 2x + 1 \text{ بر } x^2 - 3x + 2 \text{ کدام است؟}$$

$$11 - 9x \quad (1) \quad 7 - 4x \quad (2) \quad 7 + 4x \quad (3) \quad 11 + 9x \quad (4)$$

تست ۲۲۶: در تقسیم $x^{15} + x^3 + 2x - 11$ بر $x + 1$ ، مجموع ضرایب خارج‌قسمت تقسیم کدام است؟

$$14 \quad (4) \quad 16 \quad (3) \quad 18 \quad (2) \quad 4 \quad (1)$$

تست ۲۲۷: حاصل خارج‌قسمت تقسیم $x^9 + 1$ بر $x + 1$ به ازای $x = -1$ کدام است؟

$$9 \quad (4) \quad -1 \quad (3) \quad 1 \quad (2) \quad \text{صفر} \quad (1)$$

