

تمرین: اگر $(1 + \sqrt{2})^6 + (1 - \sqrt{2})^6 = 198$ ، جزء صحیح عدد $(1 + \sqrt{2})^6$ کدام است؟

- (۱) ۱۹۵ (۲) ۱۹۶ (۳) ۱۹۷ (۴) ۱۹۸

تمرین: اگر $|x - 2| = 1$ باشد، نمودارهای دو تابع $f(x) = |x - 3| - |x - 4|$ و $g(x) = 2x^2 + x - 17$ در چند نقطه مشترک هستند؟

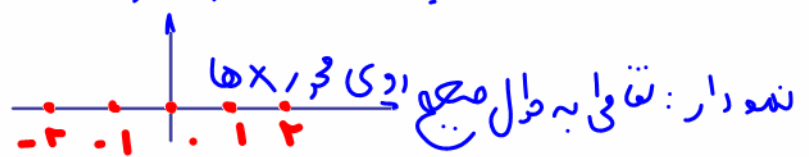
- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) فاقد نقطه‌ی مشترک

تمرین: دامنه و برد تابع $f(x) = \frac{x - [x]}{\sqrt{[x] + [-x] + 1}}$ ، کدام است؟

- (۱) $D_f = \mathbb{N}, R_f = \{0\}$ (۲) $D_f = \mathbb{Z}, R_f = \{0\}$
 (۳) $D_f = \mathbb{R} - \mathbb{Z}, R_f = [0, 1)$ (۴) $D_f = \mathbb{R} - \mathbb{N}, R_f = [0, 1)$

پس $[x] + [-x] = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Z} \\ -1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$

$f(x \in \mathbb{Z}) = \frac{x - [x] = x - x = 0}{\sqrt{[x] + [-x] + 1} = 1} = 0$ $R_f = \{0\}$ $D_f = \mathbb{Z}$



تمرین: حاصل عبارت $[\frac{x-1}{2}] + [\frac{3-x}{2}]$ چه اعدادی می‌تواند باشد؟

- (۱) صفر و ۱ (۲) صفر و -۱ (۳) -۱ و -۲ (۴) ۱ و ۲، اصحاب کرد

پاسخ: گزینه‌ی «۱» صحیح است. عبارت را ساده می‌کنیم و از خاصیت‌ها استفاده می‌کنیم:

$$[\frac{x-1}{2}] + [\frac{3-x}{2}] = [\frac{x-1}{2}] + [\frac{2+1-x}{2}] = [\frac{x-1}{2}] + [\frac{1-x}{2} + 1] = [\frac{x-1}{2}] + [\frac{1-x}{2}] + 1$$

$$[\frac{x-1}{2}] + [\frac{1-x}{2}] + 1 = \text{صفر یا صفر}$$

چون $[u] + [-u] = \begin{cases} 0 & u \in \mathbb{Z} \\ -1 & u \notin \mathbb{Z} \end{cases}$ ، پس:

(تجربی ۱۴۰۱)

تعریف: اگر $\frac{4-2x}{3x+1} \geq 0$ باشد، مجموعه مقادیر $[3x]$ چند عضو دارد؟

۵ (۴) ۸ (۳) ۷ (۲) ۶ (۱)

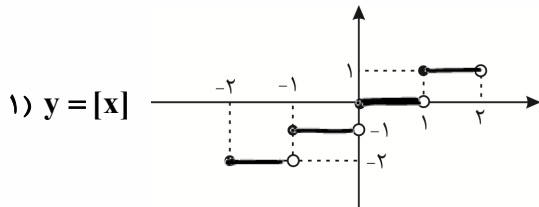
جواب

این بین فریبنا

گزینه ۳

نمودارهای معروف براکتی

شکل‌های بسیار مهم توابع معروف براکتی (شامل جزء صحیح)



توجه کنید در تابع $y = [x]$ ، طول هر پله یک واحد است و نقاط سمت چپ همگی توپر می‌باشند. این‌جا به صورت دلخواه در بازه $[-2, 2)$ آن را رسم کردیم. اگر بازه به صورت $[-2, 2]$ باشد (یعنی انتهای بازه بسته باشد) نقطه $x = 2$ را جداگانه بررسی می‌کنیم و داریم:

$x = 2 \Rightarrow y = [2] = 2 \Rightarrow A(2, 2)$

و این یعنی به شکل بالا باید نقطه $A(2, 2)$ نیز اضافه شود.

Partial = $P = x - [x] < 1$

جزء اعشاری

۲) $y = x - [x]$

$f(x) = x - [x]$

$D_f: \mathbb{R}$ $R_f: [0, 1)$

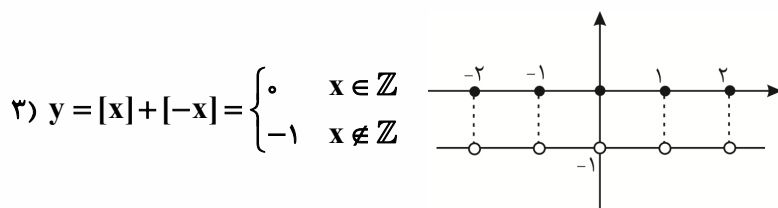
$y = ax - [ax]$

$\tan \theta = a$

ویژگی‌های تابع $y = x - [x]$

- دامنه \mathbb{R}
- برد $[0, 1)$ یعنی: $0 \leq x - [x] < 1$
- در نقاط $x \in \mathbb{Z}$ حد ندارد و ناپیوسته است ولی در سایر نقاط حد دارد و پیوسته است.
- طول هر پله $\sqrt{2}$ واحد است.
- متناوب است با دوره تناوب $T = 1$.

در این‌جا به طور دلخواه آن را در بازه $[-3, 4)$ رسم کردیم.



ویژگی‌های تابع $y = [x] + [-x]$

(۱) دامنه \mathbb{R}

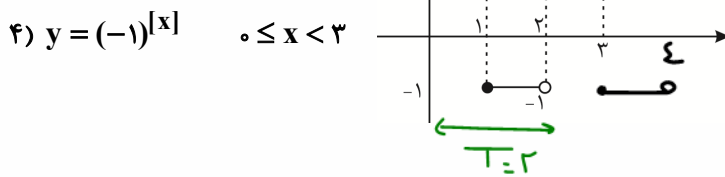
(۲) برد دو عضوی $R_f = \{-1, 0\}$

(۳) در نقاط $x \in \mathbb{Z}$ ناپیوسته است.

(۴) در تمام نقاط دارای حد -1 است یعنی $\lim_{x \rightarrow a} [x] + [-x] = -1$

(۵) متناوب است با دوره تناوب $T = 1$.

(۶) نمودار به ازای اعداد صحیح صفر می‌شود و ریشه می‌دهد و به ازای سایر اعداد، -1 می‌شود.



ویژگی‌های تابع $y = (-1)^{[x]}$

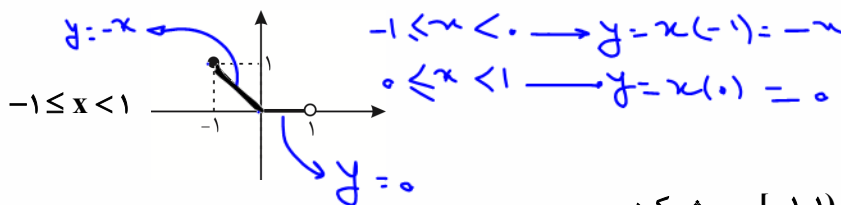
در این جا به طور مثال در بازه $[0, 3)$ رسمش کردیم.

(۱) دامنه \mathbb{R}

(۲) برد دو عضوی $R_f = \{-1, 1\}$

(۳) در نقاط $x \in \mathbb{Z}$ حد ندارد و ناپیوسته است.

(۴) متناوب است با دوره تناوب $T = 2$.



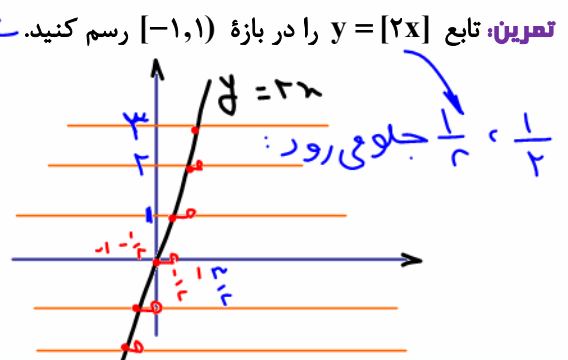
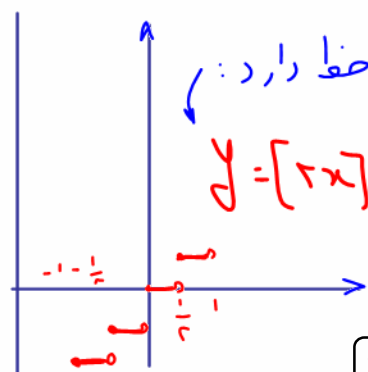
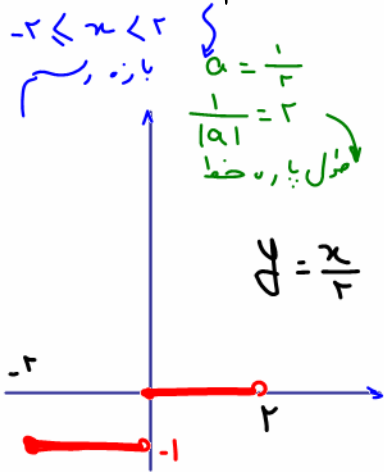
در این جا به طور مثال در بازه $[-1, 1)$ رسمش کردیم.

توجه کنید نقطه $x = 0$ برای این تابع، نقطه گوشه به حساب می‌آید.

رسم نمودار $y = [ax]$

تابع $y = [ax]$ از روی تابع $y = [x]$ رسم می‌شود. فقط توجه کنید که طول هر پله $\frac{1}{|a|}$ برابر می‌شود. مثلاً در رسم $y = [\frac{x}{2}]$ که

$a = \frac{1}{2}$ است طول پله‌ها $\frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$ برابر و در رسم $y = [2x]$ که $a = 2$ است طول پله‌ها $\frac{1}{2}$ برابر می‌شود.



سنت ۸

تعریف: نمودار تابع $y = [\frac{x}{2}]$ را در بازه $[-4, 4]$ رسم کنید. $\frac{x}{2}$ تا پار. خط دین نقطه $A(4, 2)$

$a = \frac{1}{2}$
 $\frac{1}{|a|} = 2$ سنت ۸
 سنت ۸ (۴) تا سنت ۸

راه سوم: اعدادی در بازه $(-2, 3)$ بیابید که بصورت $[x] + 2$ باشند:

$x = [\frac{x}{2}] + 2$ چون جواب بداله است
 $x = -2 + 0.3 = -1.7$
 $x = -1 + 0.3 = -0.7$
 $x = 0 + 0.3 = 0.3$
 $x = 1 + 0.3 = 1.3$
 $x = 2 + 0.3 = 2.3$

تعریف: معادله $x = \frac{1}{5} + [x]$ در فاصله $(-2, 3)$ چند جواب دارد؟

$x = -1 + 0.2 = -0.8$ (۳)
 $x = 0 + 0.2 = 0.2$ (۲) ۵ (۲)
 $x = 1 + 0.2 = 1.2$
 $x = 2 + 0.2 = 2.2$

راه اول: $x - [x] = \frac{1}{5} = 0.2$

جزء اعشاری چند عدد در بازه $(-2, 3)$ برابر ۰.۲ است: ۵ عدد بالا

۷ (۴) ۴ (۱)

$-1.7, -0.7, 0.3, 1.3, 2.3$

$y = x - [x]$

راه تقسیم: $x - [x] = \frac{1}{5}$

$\frac{1}{5} = \frac{1}{5}$

تعریف: برد تابع $y = x - 2[\frac{x}{2} + 1]$ کدام است؟

راه تری باین گزیندها: $f(0) = -2$ نقطه گزینده در بسته:

(۱) $[-2, 0)$ (۲) $[-1, 2]$ (۳) $[0, 2]$ (۴) $[-1, 1)$

تابع راب شکل چیزی در بیار که قبلا آیدی

$y = x - 2\left([\frac{x}{2} + 1]\right) = x - 2[\frac{x}{2}] - 2$

$y = 2\left(\frac{x}{2} - [\frac{x}{2}]\right) - 2$

$U - [U] < 1$ تا بگویند

$0 \leq U - [U] < 1$

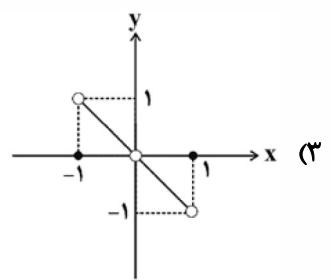
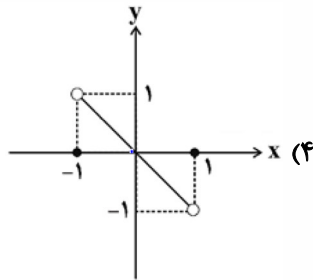
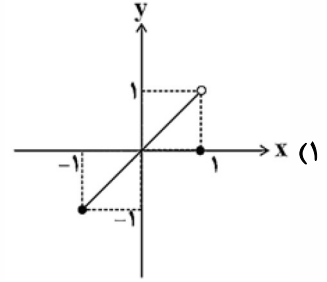
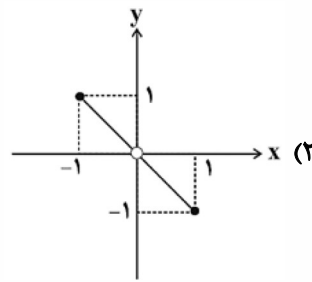
$0 \leq \frac{x}{2} - [\frac{x}{2}] < 1$

$0 = 2 \cdot 0 \leq 2\left(\frac{x}{2} - [\frac{x}{2}]\right) < 2$

$-2 \leq 2\left(\frac{x}{2} - [\frac{x}{2}]\right) - 2 < 0$ تکلیف کن

$-2 \leq f(x) < 0$ گزینده

تمرین: نمودار تابع $y = x([-x] + [x])$ با دامنه $-1 \leq x \leq 1$ کدام است؟ ([]، نماد جزء صحیح است.)



پاسخ: گزینه «۴» - راه حل اول: عددگذاری:

$$x = 1 \xrightarrow{\text{در ضابطه تابع قرار می‌دهیم}} y = 1([-1] + [1]) = 1 \times \underbrace{(-1 + 1)}_0 = 0$$

$$x = 0 \Rightarrow y = 0$$

$$x = -1 \Rightarrow y = 0$$

یعنی تابع در سه نقطه دلخواهی که دادیم مقداری برابر با صفر دارد که این سه نقطه فقط در نمودار گزینه (۴) صدق می‌کند.

راه حل دوم:

$$y = [x] + [-x] = \begin{cases} -1 & x \notin \mathbb{Z} \\ 0 & x \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

نکته:

$$\begin{cases} -1 < x < 1 \xrightarrow[\substack{x \neq 0 \\ x \notin \mathbb{Z}}]{x \neq 0} y = -x \\ x = -1, 0, 1 \Rightarrow y = 0 \end{cases}$$

با توجه به نکته داریم:

تابع رسم شده در گزینه (۴) در نقاط $x = -1, 0, 1$ مقداری برابر با صفر دارد و در $-1 < x < 1$ برابر با $y = -x$ است.

تمرین: نمودار تابع $x \in [-2, 6)$; $y = \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + 1$ از چند پاره خط مساوی هم تشکیل شده است؟ (تجربی خارج)

۶ (۴)

۵ (۳)

۴ (۲)

۸ است

۳ (۱)

تابع $\frac{1}{|x|} = \frac{1}{x}$ است ۲ سانتی شکند و در ۸ سانت ۴ تا ۲ سانت داریم
 جواب گزینه (۳) است ... در $y = \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + 1$ در $x = 2$ پاره خط ۵
 می‌تایرنه ضرب ۲ عرض هر ۲ برابر کرده و عدد ۱ شکل را کم کرد ۱ واحد بالا برد است

Homework

۱ در تابع $f(x) = [x + \frac{3}{4}] - [-x]$ مقدار $f(\frac{9}{4}) + f(-\frac{1}{4})$ کدام است؟

- ۴ (۱)
- ۵ (۲)
- ۶ (۳)
- ۷ (۴)

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۳۹۸

۲ در تابع $f(x) = 2[x] + [-x]$ مقدار $f(-\frac{1}{2}) + f(\frac{3}{2})$ کدام است؟

- ۲ (۱)
- ۱ (۲)
- ۱ (۳)
- صفر (۴)

کنکور سراسری علوم انسانی خارج از کشور ۱۳۹۸

۳ اگر $f(x) = [1 - \frac{x}{2}]$ باشد، مقدار $f(\sqrt{2}) + f(-\frac{3}{2})$ کدام است؟

- صفر (۱)
- ۲ (۲)
- ۱ (۳)
- ۱ (۴)

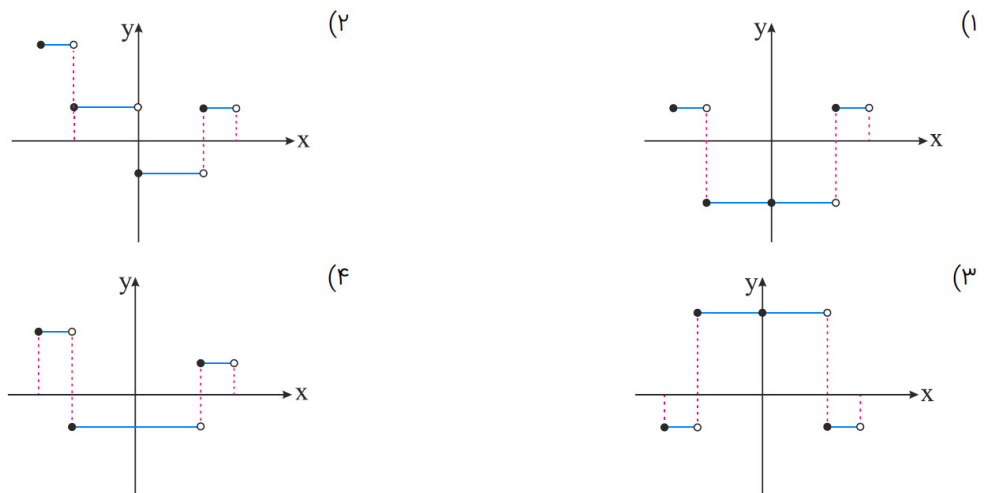
کنکور سراسری علوم انسانی خارج از کشور ۱۳۹۹

۴ ضابطه تابع $y = [-2x + |x|] + x$ در دامنه $-\frac{2}{3} < x < -\frac{1}{3}$ کدام است؟ ([] نماد جزء صحیح است)

- ۲x (۱)
- x + 1 (۲)
- x - 2 (۳)
- $2x + \frac{1}{3}$ (۴)

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۴۰۰

۵ نمودار تابع $y = 2|[3x]| - 1$ به ازای $-\frac{1}{2} \leq x < \frac{1}{2}$ کدام است؟



کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

۶ نمودار تابع $y = [x^2]$ ، روی بازه $(-2, 2)$ از چند پاره خط تشکیل شده است؟ (نماد $[]$ به مفهوم جزء صحیح است)

- (۱) ۴
(۲) ۵
(۳) ۶
(۴) ۷

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۱

۷ دو تابع با ضابطه های $f(x) = [x] + [-x]$ و $g(x) = x^2 + x - 2$ مفروض اند. اگر $g(f(x)) = -2$ آنگاه مجموعه مقادیر x کدام است؟

- (۱) $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$
(۲) \mathbb{Z}
(۳) \mathbb{R}
(۴) \emptyset

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۹

۸ اگر $x^2 + x < 0$ باشد، حاصل $[x] + [x^2] + [x^3] + [x^4]$ کدام است؟

- (۱) -۲
(۲) -۱
(۳) صفر
(۴) ۱

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۸

۹ برای هر عدد طبیعی $n > 2$ حاصل $[\sqrt{4n^2 - 3n + 1}] - 2[\sqrt{n^2 - 2n}]$ کدام است؟ (نماد $[]$ به مفهوم جزء صحیح است.)

- (۱) ۱
(۲) ۲
(۳) ۳
(۴) ۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۱

۱۰ اگر $[x - 2] = 1$ باشد، نمودارهای دو تابع $f(x) = |x - 3| - |x - 4|$ و $g(x) = 2x^2 + x - 17$ در چند نقطه مشترک هستند؟

- (۱) ۱
(۲) ۲
(۳) ۳
(۴) فاقد نقطه مشترک

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۷

پاسخ Homework

گزینه ۴

۱

$$f\left(\frac{9}{4}\right) = \left[\frac{9}{4} + \frac{3}{4}\right] - \left[-\frac{9}{4}\right] = \left[\frac{12}{4}\right] - \left[-\frac{9}{4}\right] = 3 - (-3) = 6$$

$$f\left(-\frac{1}{4}\right) = \left[-\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\right] - \left[+\frac{1}{4}\right] = [1] - \left[\frac{1}{4}\right] = 1 - 0 = 1$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{9}{4}\right) + f\left(-\frac{1}{4}\right) = 6 + 1 = 7$$

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۳۹۸

گزینه ۱

۲

اعداد داده شده را در ضابطه تابع قرار می‌دهیم:

$$f(x) = 2[x] + [-x]$$

$$\Rightarrow f\left(-\frac{1}{4}\right) + f\left(\frac{3}{4}\right) = (2\left[-\frac{1}{4}\right] + [-(-\frac{1}{4})]) + (2\left[\frac{3}{4}\right] + [-\frac{3}{4}])$$

$$-1 < -\frac{1}{4} < 0 \Rightarrow \left[-\frac{1}{4}\right] = -1, \quad 0 < \frac{3}{4} < 1 \Rightarrow \left[\frac{3}{4}\right] = 0$$

$$-2 < -\frac{3}{4} < -1 \Rightarrow \left[-\frac{3}{4}\right] = -2, \quad 1 < \frac{3}{4} < 2 \Rightarrow \left[\frac{3}{4}\right] = 1$$

$$\Rightarrow f\left(-\frac{1}{4}\right) + f\left(\frac{3}{4}\right) = (2 \times (-1) + 0) + (2 \times 1 + (-2)) = -2 + 0 = -2$$

کنکور سراسری علوم انسانی خارج از کشور ۱۳۹۸

گزینه ۴

۳

مقدار تابع را به ازای مقادیر خواسته شده محاسبه کرده و سپس مجموع را به دست می‌آوریم:

$$f(x) = \left[1 - \frac{x}{2}\right] \Rightarrow f(\sqrt{2}) = \left[1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right] = 0$$

توجه کنید که:

$$1 < \sqrt{2} < 2 \Rightarrow \frac{1}{2} < \frac{\sqrt{2}}{2} < 1 \Rightarrow -1 < -\frac{\sqrt{2}}{2} < -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 0 < 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{1}{2} \Rightarrow \left[1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right] = 0$$

$$f\left(-\frac{3}{2}\right) = \left[1 - \frac{\left(-\frac{3}{2}\right)}{2}\right] = \left[1 + \frac{3}{4}\right] = \left[\frac{7}{4}\right] = 1$$

$$\Rightarrow f(\sqrt{2}) + f\left(-\frac{3}{2}\right) = 0 + 1 = 1$$

کنکور سراسری علوم انسانی خارج از کشور ۱۳۹۹

گزینه ۲

۴

روش اول: تشریحی

طبق تعریف تابع قدرمطلق، در فاصله $-\frac{1}{3} < x < -\frac{2}{3}$ تابع $|x| = -x$ است.

$$y = [-2x + (-x)] + x = [-3x] + x$$

برای تعیین $[-3x]$ باید محدوده تغییرات $-3x$ را مشخص کنیم.

$$-\frac{2}{3} < x < -\frac{1}{3} \xrightarrow{\times(-3)} 1 < -3x < 2 \Rightarrow [-3x] = 1$$

بنابراین ضابطه تابع در دامنه موردنظر به صورت زیر است:

$$y = [-2x + |x|] + x = [-3x] + x = 1 + x$$

روش دوم: تستی (عددگذاری)

عدد $x = -\frac{1}{4} = -0/5$ را که در دامنه تابع قرار دارد، در ضابطه تابع و هریک از گزینه‌ها جایگذاری می‌کنیم.

$$y = [-2(-0/5) + |-0/5|] + (-0/5) = [1 + 0/5] - 0/5$$

$$= [1/5] - 0/5 = 1 - 0/5 = 0/5$$

$$1 \text{ (گزینه ۱)} - 2(-0/5) = 1$$

$$2 \text{ (گزینه ۲)} - 0/5 + 1 = 0/5$$

$$3 \text{ (گزینه ۳)} - 0/5 - 2 = -2/5$$

$$4 \text{ (گزینه ۴)} 2(-0/5) + \frac{1}{3} = -1 + \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$$

فقط مقدار به دست آمده از گزینه "۲" با مقدار تابع برابر است.

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۴۰۰

گزینه ۲

۵

$$-\frac{1}{2} \leq x < -\frac{1}{3} \Rightarrow -\frac{3}{2} \leq 3x < -1 \Rightarrow [3x] = -2 \Rightarrow y = 3$$

$$-\frac{1}{3} \leq x < 0 \Rightarrow -1 \leq 3x < 0 \Rightarrow [3x] = -1 \Rightarrow y = 1$$

$$0 \leq x < \frac{1}{3} \Rightarrow 0 \leq 3x < 1 \Rightarrow [3x] = 0 \Rightarrow y = -1$$

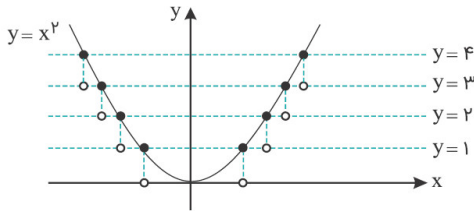
$$\frac{1}{3} \leq x < \frac{1}{2} \Rightarrow 1 \leq 3x < \frac{3}{2} \Rightarrow [3x] = 1 \Rightarrow y = 1$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

گزینه ۴

۶

اول نمودار تابع $y = x^2$ را در بازه $(-2, 2)$ رسم می‌کنیم. برای به دست آوردن نمودار تابع $y = [x^2]$ از روی نمودار تابع $y = x^2$ در بازه $(-2, 2)$ خطوطی به موازات محور x ها رسم کرده و قسمت‌هایی از نمودار که بین دو خط متوالی $y = k$ و $y = k + 1$ ($k \in \mathbb{Z}$) قرار می‌گیرند را بر روی خط $y = k$ تصویر می‌کنیم. در نهایت نقاط تلاقی خط و نمودار توپر خواهد شد.



با توجه به شکل، نمودار تابع $y = [x^2]$ در بازه $(-2, 2)$ از هفت پاره خط تشکیل شده است.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۱

گزینه ۳

۷

مقدار $[x] + [-x]$ برای اعداد صحیح و غیرصحیح متفاوت است. بنابراین حواستان باشد که برای $f(x)$ دو مقدار به دست می‌آید، یک مقدار به ازای $x \in \mathbb{Z}$ است و مقدار دیگر به ازای $x \notin \mathbb{Z}$. یعنی:

$$f(x) = [x] + [-x] = \begin{cases} 0 & ; x \in \mathbb{Z} \\ -1 & ; x \notin \mathbb{Z} (x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}) \end{cases}$$

ضابطه $g(f(x))$ را برای هر یک از این حالت‌ها تعیین می‌کنیم:

$$x \in \mathbb{Z} \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow g(f(x)) = g(0) \xrightarrow{g(x)=x^2+x-2} g(0) = 0 + 0 - 2 = -2$$

بنابراین به ازای $x \in \mathbb{Z}$ رابطه $g(f(x)) = -2$ برقرار است.

$$x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z} \Rightarrow f(x) = -1 \Rightarrow g(f(x)) = g(-1)$$

$$\xrightarrow{g(x)=x^2+x-2} g(-1) = (-1)^2 + (-1) - 2 = 1 - 1 - 2 = -2 \Rightarrow g(f(x)) = -2$$

پس رابطه $g(f(x)) = -2$ به ازای تمام x های صحیح و غیرصحیح یعنی به ازای \mathbb{R} برقرار است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۹

گزینه ۱

۸

اگر $x < 0$ و $x^2 + x < 0$ باشد، $-1 < x < 0$ خواهد بود، بنابراین:

$$\begin{aligned} -1 < x < 0 &\Rightarrow [x] = -1 \\ -1 < x < 0 &\Rightarrow 0 < x^2 < 1 \Rightarrow [x^2] = 0 \\ -1 < x < 0 &\Rightarrow -1 < x^3 < 0 \Rightarrow [x^3] = -1 \\ -1 < x < 0 &\Rightarrow 0 < x^4 < 1 \Rightarrow [x^4] = 0 \\ \Rightarrow [x] + [x^2] + [x^3] + [x^4] &= -1 + 0 - 1 + 0 = -2 \end{aligned}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۸

گزینه ۳

۹

بعضی از تست های جزء صحیح را با یک عددگذاری ساده می توانیم حل کنیم. حال این تست را به دو روش اصلی و عددگذاری حل می کنیم.
روش اول:
به ازای هر عدد طبیعی n داریم:

$$\begin{aligned} 4n^2 - 4n + 1 < 4n^2 - 3n + 1 < 4n^2 &\Rightarrow (2n-1)^2 < 4n^2 - 3n + 1 < (2n)^2 \\ \text{از نامعادله جذر می گیریم} &\rightarrow 2n-1 < \sqrt{4n^2 - 3n + 1} < 2n \Rightarrow [\sqrt{4n^2 - 3n + 1}] = 2n-1 \end{aligned}$$

از طرف دیگر وقتی $n > 2$ باشد، رابطه زیر برقرار است:

$$\begin{aligned} n^2 - 4n + 4 < n^2 - 2n < n^2 - 2n + 1 &\Rightarrow (n-2)^2 < n^2 - 2n < (n-1)^2 \\ \text{از نامعادله جذر می گیریم} &\rightarrow n-2 < \sqrt{n^2 - 2n} < n-1 \Rightarrow [\sqrt{n^2 - 2n}] = n-2 \end{aligned}$$

پس حاصل عبارت داده شده به ازای $n > 2$ برابر است با:

$$[\sqrt{4n^2 - 3n + 1}] - 2[\sqrt{n^2 - 2n}] = 2n-1 - 2(n-2) = 2n-1 - 2n+4 = 3$$

روش دوم (روش عددگذاری):

در صورت تست به این نکته اشاره شده که به ازای هر عدد طبیعی بزرگ تر از ۲ حاصل عبارت یکسان است، کافی است یک عدد طبیعی بزرگ تر از ۲ را انتخاب کرده و حاصل عبارت داده شده را به ازای آن محاسبه کنیم. برای حل آسان تر، n را ۳ در نظر می گیریم:

$$\begin{aligned} A &= [\sqrt{4n^2 - 3n + 1}] - 2[\sqrt{n^2 - 2n}] \xrightarrow{n=3} A = [\sqrt{36 - 9 + 1}] - 2[\sqrt{9 - 6}] \\ &= [\sqrt{28}] - 2[\sqrt{3}] = 5 - 2(1) = 5 - 2 = 3 \end{aligned}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۱

$$|x - 2| = 1 \Rightarrow 1 \leq x - 2 < 2 \Rightarrow 3 \leq x < 4$$

اگر $3 \leq x < 4$ باشد، پس $x - 3 \geq 0$ و $x - 4 < 0$ خواهد بود.

$$f(x) = \underbrace{|x - 3|}_{\text{مثبت}} - \underbrace{|x - 4|}_{\text{منفی}} = x - 3 + (x - 4) = 2x - 7$$

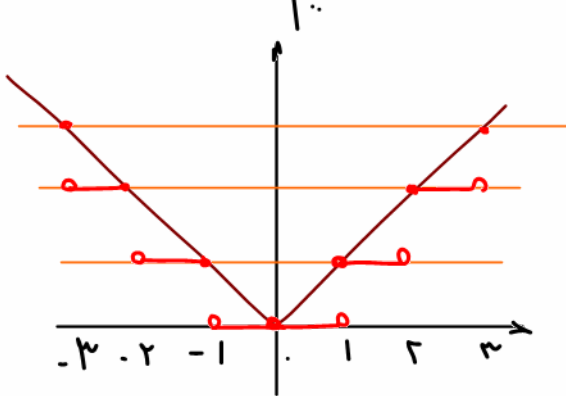
$$f(x) = g(x) \Rightarrow 2x - 7 = 2x^2 + x - 17 \Rightarrow 2x^2 - x - 10 = 0$$

$$\Rightarrow (2x - 5)(x + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{2} \times \\ x = -2 \times \end{cases}$$

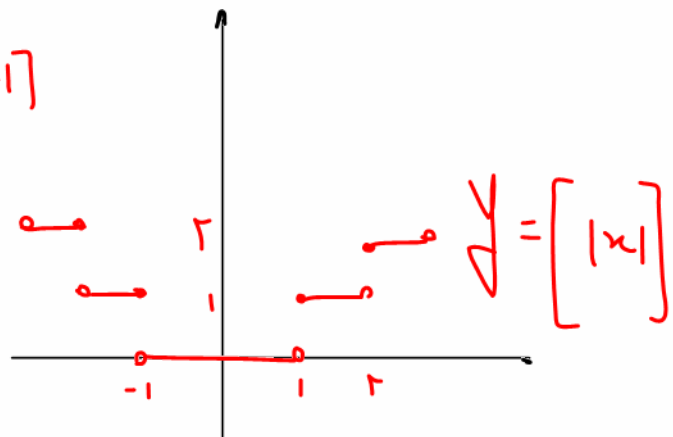
هیچ کدام از جواب‌های به دست آمده در فاصله $3 \leq x < 4$ نیستند؛ پس معادله $f(x) = g(x)$ هیچ جوابی ندارد.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۷

رسم $[y] = x$ با داشتن u : ابتدا $u = y$ را بخش خطی استوایی $y = k$ ، $y = k + 1$ که $k \in \mathbb{Z}$ را رسم کن
 هر جا u به این خطوط برخورد کرد را پیرفت کن پس بفر
 قسمتی از تابع که بین ۲ خط استوایی است را ردی خط پایین تر
 بکش. زیر هر نقطه پیرفتی نقطه توخالی داریم.



$$y = [x]$$

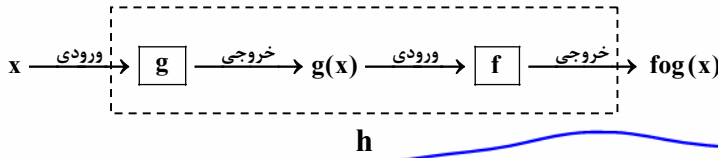


در صورت کلی $f \circ g \neq g \circ f$

$$f(x) = \sqrt{x} \quad \left\{ \begin{aligned} y = (f \circ g)(x) &= f(g(x)) = \sqrt{g(x)} = \sqrt{x^2} = |x| \\ y = (g \circ f)(x) &= g(f(x)) = f^2(x) = (\sqrt{x})^2 = x \end{aligned} \right.$$

تابع مرکب

به شکل زیر دقت کنید، می‌خواهیم با هم فرآیند آن را مرور کنیم. اگر x را به عنوان ورودی به ماشین g دهیم، خروجی آن $g(x)$ خواهد بود، حال این خروجی را به عنوان ورودی به ماشین f می‌دهیم و در نتیجه خروجی $f(g(x))$ حاصل می‌شود که ما آن را $f \circ g(x)$ می‌نامیم. پس در واقع می‌توانیم بگوییم $f \circ g(x)$ ، ماحصل رفتار ماشین h است وقتی به آن ورودی x را می‌دهیم.



تعریف: اگر $f = \{(1, 2), (2, -1), (2, 0), (-1, 4), (5, -7)\}$ و $g = \{(0, -1), (5, 2), (3, 5), (-2, 4)\}$ ، تابع $f \circ g$ را در صورت امکان بنویسید.

$$f(g(x)) = \{(0, 4), (5, 0), (3, -7)\}$$

$$g(0) = -1 \quad f(-1) = 4 \quad g(3) = 5 \quad f(5) = -7$$

$$g(5) = 2 \quad f(2) = -1 \quad g(-2) = 4 \quad f(4) = 0$$

تعریف: اگر $f = \{(1, 1), (2, 3), (3, 3), (4, 2)\}$ و $g = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1), (4, 6)\}$ باشد، برد تابع $f \circ g$ چند عضو دارد؟

(1) هیچ (2) یک (3) دو (4) سه

پاسخ: گزینه «3» - اول x را در g قرار می‌دهیم (چون در $f \circ g$ تابع g تابع درونی است) و بعد حاصلش را در f :

$$1 \xrightarrow{g} 2 \xrightarrow{f} 3 \Rightarrow (1, 3) \quad 2 \xrightarrow{g} 3 \xrightarrow{f} 3 \Rightarrow (2, 3)$$

$$3 \xrightarrow{g} 1 \xrightarrow{f} 1 \Rightarrow (3, 1) \quad 4 \xrightarrow{g} 6 \xrightarrow{f} \square$$

پس $f \circ g$ به صورت $f \circ g = \{(1, 3), (2, 3), (3, 1)\}$ است که بردش برابر $R = \{1, 3\}$ می‌باشد و دو عضو دارد.

تعریف: اگر $f = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5)\}$ باشد، تابع $(f \circ f) - f$ چگونه تابعی است؟

(1) تهی (2) همانی (3) ثابت (4) خطی

پاسخ: گزینه «3» - ابتدا $f \circ f$ را پیدا می‌کنیم:

$$1 \xrightarrow{f} 2 \xrightarrow{f} 3 \Rightarrow (1, 3)$$

$$2 \xrightarrow{f} 3 \xrightarrow{f} 4 \Rightarrow (2, 4)$$

$$3 \xrightarrow{f} 4 \xrightarrow{f} 5 \Rightarrow (3, 5)$$

$$4 \xrightarrow{f} 5 \xrightarrow{f} \square$$

$$\Rightarrow f \circ f = \{(1, 3), (2, 4), (3, 5)\}$$

$$(f \circ f) - f = \{(1, 1), (2, 1), (3, 1)\}$$



ثابت است

حالا $(f \circ f) - f$ را تشکیل می‌دهیم:

می‌بینیم که $(f \circ f) - f$ همواره مقداری ثابت یعنی برابر 1 دارد؛ پس تابع ثابت است.

تعریف: اگر $f = \{(2, 1), (3, 2), (4, 5), (1, 7)\}$ و $g = \{(1, 2), (3, 1), (a, 3), (b, 1)\}$ مفروضاند. اگر $(4, 2) \in f \circ g$ و $(4, 1) \in g \circ f$ باشند، دوتایی مرتب (a, b) کدام است؟

(1) $(3, 4)$ (2) $(4, 3)$ (3) $(4, 5)$ (4) $(5, 4)$

(سراسری ریاضی)

$$g(f(4)) = 1$$

$$g(b) = 1$$

$$f(4) = b$$

$$f(4) = 5$$

$$b = 5$$

$$f(g(4)) = 2$$

$$f(3) = 2$$

$$g(4) = 3$$

$$g(a) = 3$$

$$a = 4$$

خروجی f شده 2 پس ورودی f برابر 3 بوده پس
خروجی g یک شده پس ورودی g برابر 4 بوده پس:

گزینه 3 درسته!

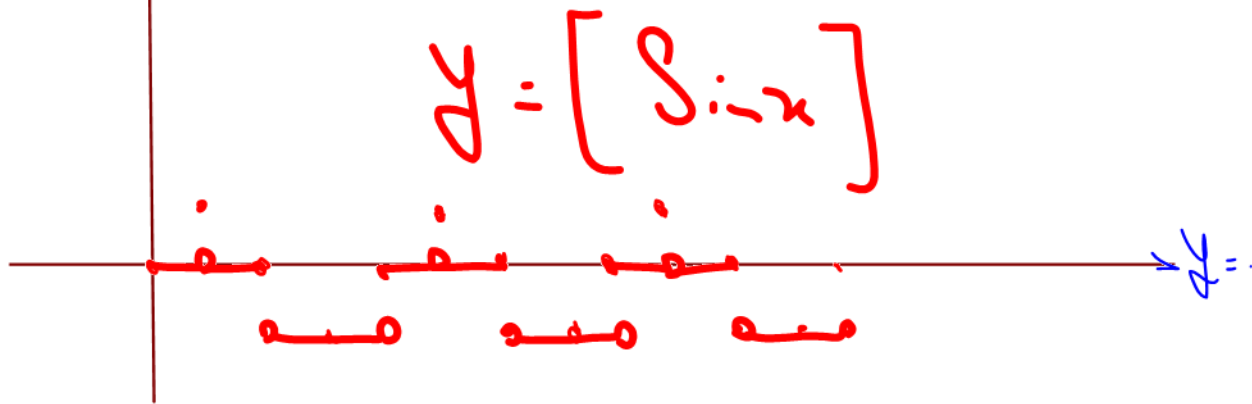
رسم $[v]$ بار داشتن $v = \gamma$ اول $v = \gamma$ را می کشیم کپس خط های $y = k$

و $\gamma = k+1$ که $k \in \mathbb{Z}$ را رسم می کنیم. هر جا $v = \gamma$ به این خط ها برخورد

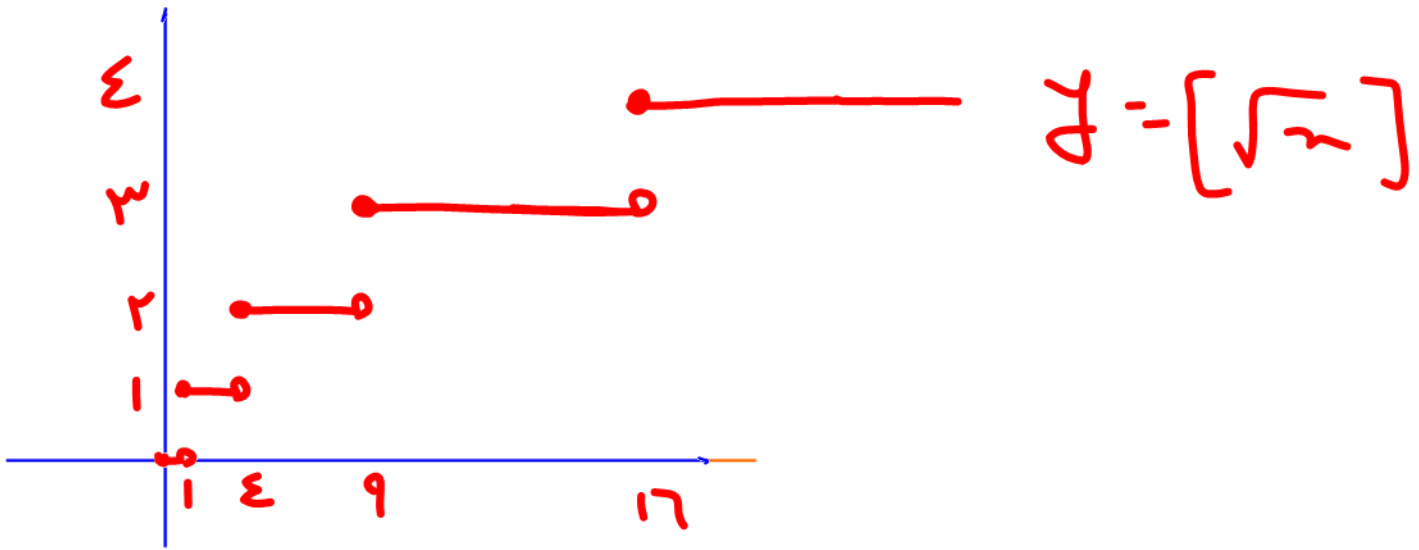
کرد آن جا را پر رنگ می کنیم. از بالا به تابع نور می تابانیم سایه

سمت های $v = \gamma$ که بین ۲ خط متوالی است را ردی

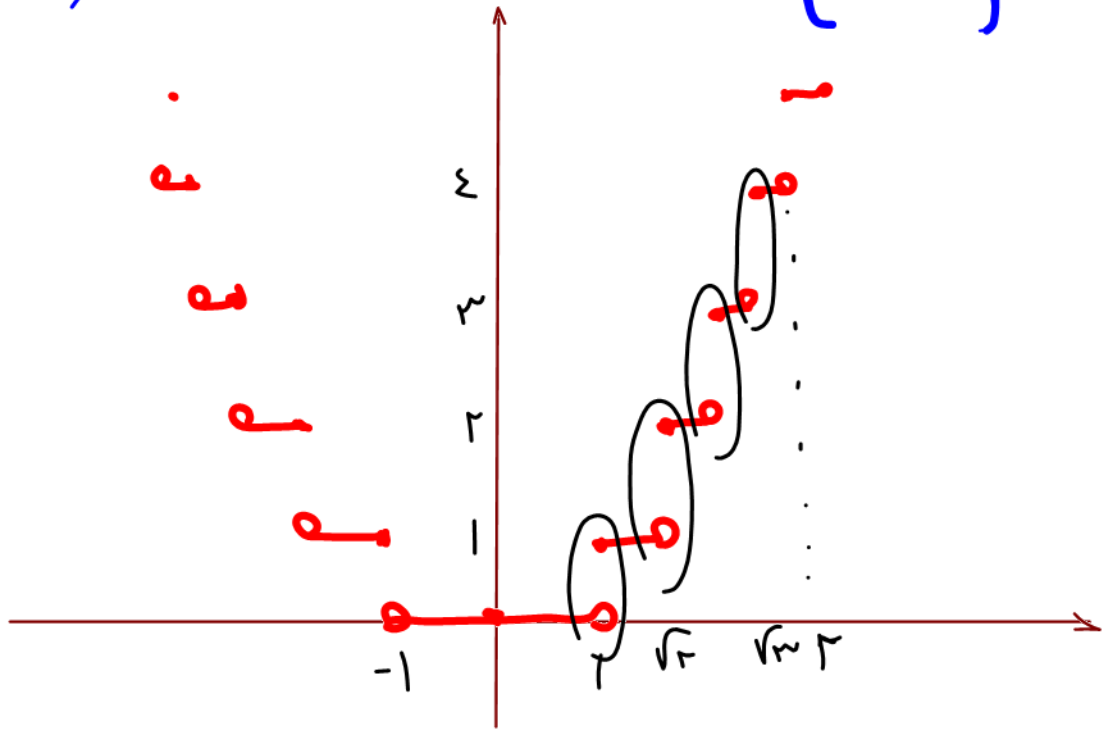
خط های $v = \gamma$ کشیم زیر هر لقمه پر یک لقمه نوزغی داریم



$$\gamma = [\sqrt{x}]$$



تابع $y = [x^2]$ در چند نقطه از بازه $(-1, 2)$ ناپوسته است



اگر $f(x) = \frac{1}{x}$ و $g(x) = 2+3x$ مع $y = (g \circ f)(x)$ و $y = f(g(x))$

$$y = g(f(x)) = 2 + 3f(x) = 2 + 3\left(\frac{1}{x}\right) = 2 + \frac{3}{x} = \frac{2x+3}{x}$$

$$y = f(g(x)) = \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{2+3x}$$

در سوال باک $f(g(0))$ و $g(f(0))$

$$f(g(0)) = f(2+3(0)=2) = f(2) = \frac{1}{2} = 0.5$$

$$g(f(0)) = g\left(\frac{1}{0} = \infty\right) = \infty$$

$$D_{f(g(x))} = \left\{ x \in D_g ; g(x) \in D_f \right\}$$

$$D_{g(f(x))} = \left\{ x \in D_f ; f(x) \in D_g \right\}$$

تعریف دامنه ترکیب دو تابع :

۱. / اتقان من

$y = (g \circ f)(x)$, $y = (f \circ g)(x)$ باشد $g(x) = \frac{x-2}{x+3}$

۱۰۰ سوال امتحان نهایی
 اکثر $f(x) = \sqrt{2x+1}$
 $x \geq -\frac{1}{2}$
 کسک تعریف بیاید

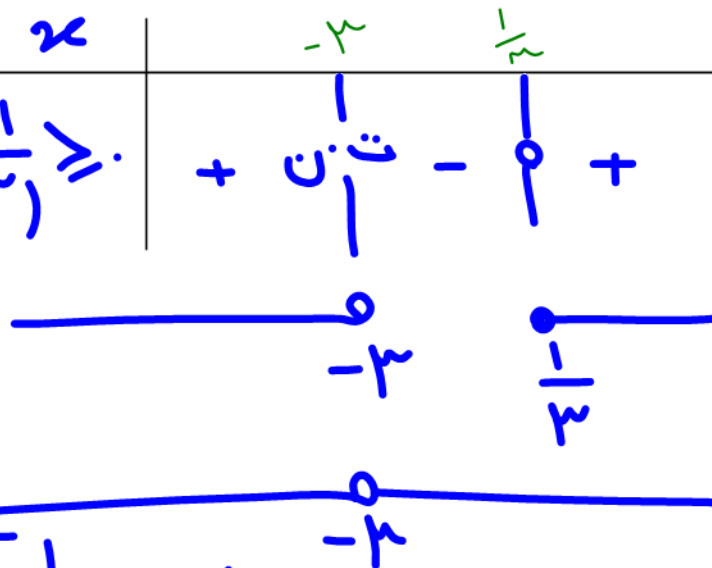
$D_f: [-\frac{1}{2}, +\infty)$ یا $x \geq -\frac{1}{2}$ (۲۵)

$D_g: \mathbb{R} - \{-3\}$ (۲۵)

$D_{f \circ g} = \{x \in D_g, g(x) \in D_f\} = \left\{ x \in \mathbb{R} - \{-3\}, \frac{x-2}{x+3} \geq -\frac{1}{2} \right\}$

$\frac{x-2}{x+3} + \frac{1}{2} \geq 0$ (۱۵)
 راه حل

$\frac{2x - 2 + x + 3}{2(x+3)} = \frac{3x - 1}{2(x+3)} \geq 0$



(الف)

(ب)

اشتراک (الف)

$D_{f \circ g}: (-\infty, -3) \cup [\frac{1}{3}, +\infty)$

$$D_{g \circ f} = \left\{ x \in D_f, f(x) \in D_g \right\} = \left\{ x \geq -\frac{1}{2} \text{ و } \sqrt{2x+1} \in \mathbb{R} - \{-3\} \right\}$$

$$D_{g \circ f} : \left[-\frac{1}{2}, +\infty \right)$$

هرگز رخ نمی‌دهد زیرا خردی $\sqrt{\quad}$ همواره بزرگتر یا مساوی صفره لذا جواب $x \geq -\frac{1}{2}$ است
 خردی $\sqrt{2x+1}$ عضو \mathbb{R} است و هرگز -3 نیست



$$y = g(f(x)) = \frac{f(x) - 2}{f(x) + 3} = \frac{\sqrt{2x+1} - 2}{\sqrt{2x+1} + 3} \quad x \geq -\frac{1}{2}$$

در آزمون تئوری می‌توان $g \circ f$ یا $f \circ g$ را ساخت **ساده نکرد** و دامنه را یافت.

