آموزش آنلاین

ریاضی جامع کنکور

(دهم ــ یازدهم ــ دوازدهم)

به روش انحصاری

I.P.P.P & P.B.L

مدرس: دکتر سامان سلامیان

بانک تست مبحثی + درس + نکته + تست + امتحان نهایی

مقدمه:

به نام خردمند خردآفرین

مجموعه حاضر برای کلاس‌های آنلاین سالانه کنکور تجربی و حسابان رشته ریاضی دوره متوسطه دوم، گردآوری و تنظیم شده است. هدف این مجموعه ؛ نجات مخاطب از یادداشت‌برداری و نوشتن جزوه در طول کلاس است. مطالب مفهومی و تکمیلی و نکات کنکوری سال‌های دهم و یازدهم و دوازدهم به صورت مبحثی و فصل به فصل آورده شده است. در کلاس آنلاین فرصتی برای گفتن و نوشتن جزوه نداریم. البته برای حل مثال‌های سر کلاس و مقایسه میزان یادگیری دانش‌آموزان برای حل مسئله‌ها به طور آنلاین زمانی در کلاس خواهیم گذاشت ولی فرصت نوشتن تمیز و با وسواس نخواهیم داد . پس این جزوه ؛ گزارش اتفاقات هر جلسه درس خواهد بود. با توجه به اهمیت یافتن امتحان نهایی و نمره تشریحی درس ریاضی؛ به کمک جلسات ویژه امتحان نهایی و درسنامه‌های همراه با تمرین‌های تشریحی امتحانات کشوری؛ بدنه اصلی درس برای آمادگی امتحانات تشریحی مدرسه و نهایی ارائه می‌شود که دانش‌آموزان دوازدهم قدرت و توان برگه نویسی موثر برای امتحان مدرسه و تسلط بر کتاب وزارتخانه آموزش و پرورش را کسب کنند و سپس با حل تمرین‌ها و تست‌های متنوع ؛ نکات کنکوری و جالبی که در کنکورهای آزمایشی استاندارد طرح می‌شود؛ آموزش داده می‌شود. روش تدریس در کلاس منطبق بر آخرین تغییرات کتاب درسی وزارتخانه آموزش و پرورش و بخشنامه‌های سازمان سنجش آموزش کشور است . با توجه به سابقه ربع قرن تدریس ریاضیات کنکور «روش مفهومی» و «حل مسئله به کمک حل مسئله» در این مجموعه به‌کار گرفته شده است که در تمام این سال‌ها موفق بوده است. تکلیف: (Homework) در انتهای هر درس تست‌ها و تمرین‌های متعددی همراه با پاسخ تشریحی بسیار گویا و دقیق گذاشته شده که خارج از کلاس و به صورت خودآموز هم می‌توانند راهگشای حل مسئله‌ها و حل تست‌های جدید باشند. سعی شده است که دانش‌آموز با کار کردن کامل این مجموعه به "هیچ" سوال جدیدی از نظر محتوا در مدرسه و امتحان و کنکورآزمایشی و سراسری برخورد نکند و پوشش کامل بر نکات داخل کتاب و حاشیه امن خارج از کتاب داشته باشد. اگر قصد دارید در ابتدای شروع کلاس‌ها به خودتان قول دهید که "امسال" ریاضی را «می‌خوانم» با من همراه نشوید ؛ زیرا اصلا ریاضی خواندنی نیست؛ بلکه نوشتنی و مسئله حل‌کردنی و توضیح‌دادنی است. ریاضی را به این نیت یاد بگیرید که قرار است به کسی درس بدهید .مهمترین ابزار موفقیت در ریاضی ؛ تمرین کردن وحل مسئله به کمک نوشتن در چرکنویس؛ توضیح دادن به خود یا یک شاگرد خیالی و حل مسئله‌های جدید است. سوالات مجموعه؛ سوالات رایج امتحانات مدارس برتر تهران؛ سوالات و تست‌های تالیفی ؛ تست‌های کنکور سراسری و آزمون‌های آزمایشی استاندارد است؛ به‌طوری که با سلیقه طراحان مختلف در تمام کشور آشنا خواهید شد .همراهی آنلاین و بدون غیبت در کلاس آنلاین ؛ حضور پر رنگ و شرکت فعال در بحث‌های کلاس و گروه رفع‌اشکال؛ حل همه تکالیف و مقایسه و تحلیل جواب‌ها با پاسخنامه ؛ تنها راه گرفتن نمره کامل «بیست» در آزمون و درصد خوب در آزمونهای تستی است. اگر در ریاضی به مرحله‌ای رسیدید که؛ حل یک مسئله شما را شاد کرد و ذوق زده شدید و یا با خواندن و حل یک تست به طراح آن تست «آفرین» گفتید که با چه روش جالبی ؛ فلان موضوع را پنهان کرده است یا مورد سوال قرار داده ؛ یعنی اینکه دارید؛ مسیر یادگیری ریاضی را درست می‌پیمایید .تکرار می‌کنم پیشرفت در ریاضی فقط با «حل مسئله» و «تکرار و تمرین» امکان‌پذیر است. بدون کاغذ چرکنویس و تمام‌کردن خودکارهای متعدد؛ ریاضی شما رشد نمی‌کند.تدریس به خود یا شاگرد واقعی یا حتی خیالی با صدای بلند نیز در رشد مهارت‌های ریاضی شما موثر است. سعی کنید ؛ تکالیف (Homework)پاسخنامه‌دار آخر هر درس هر فصل را ؛ خودتان حتما حتما حل کنید و به کمک پاسخ‌نامه نمره یا درصد برای خود حساب کنید. مثل قد و وزن خود که آن را می‌دانید؛ دانستن درصد یادگیری ریاضی خودتان در هر لحظه شما را به پیشرفت علاقه‌مندتر خواهد ساخت. در هر قسمت از درس ابتدا قسمت‌های مشترک هر دو رشته تدریس می‌شود و قسمتهای محدود مرتبط با رشته ریاضی و حسابان جداگانه تدریس می‌شود . دانش‌آموزان رشته ریاضی مطالب هندسه تالس و تشابه و آمار و شمارش و احتمال را می‌توانند با این مجموعه دوره کنند و به صورت مهمان سر کلاس باشند البته که این مطالب را در کلاس هندسه و جبر و احتمال و گسسته خود کامل‌تر خواهند خواند. البته می‌توانند در جلساتی که این مباحث تدریس می‌شوند به‌عنوان میهمان سر کلاس باشند.

این مجموعه برای راهنمای تدریس معلمان ریاضی سراسر کشور و دانشجویان دانشگاه فرهنگیان گرایش دبیری ریاضی توصیه می‌شود.

استفاده از این مجموعه با ذکر منبع بلامانع است و در غیر این‌صورت ایراد شرعی و اخلاقی دارد.

بهروز باشید.

دکترسامان سلامیان

فهرست مندرجات

عنوان صفحه

فصل صفر

معرفی دستگاه مختصات و مختصات یک نقطه ۱

تابع

زوج مرتب ۴۹

تابع گویا ۸۰

تابع رادیکالی ۹۷

جزء صحیح ۱۰۶

تابع مرکب ۱۲۰

قدرمطلق ۱۴۱

تبدیل نمودار توابع ۱۷۷

توابع چندجمله‌ای ۲۱۳

توابع صعودی و نزولی ۲۴۵

معادله درجه دو، سهمی، معادله گویا و گنگ

معادله درجه دوم ۲۹۹

رابطه بین ریشه‌های یک معادله درجه دوم ۳۰۹

معادله دو مجذوری (درجه چهار) ۳۳۴

نامعادله‌ها ـ تعیین علامت ۳۴۸

نمودار تابع درجه دوم ۳۵۸

تقسیم و روابط آن ۳۹۲

مثلثات

نسبت‌های مثلثاتی ۳۹۹

جهت مثلثاتی ۴۱۵

واحدهای کمان و زاویه ۴۳۰

نسبت‌های مثلثاتی α و $-\alpha$ (قرینه) ۴۳۶

روابط بین نسبت‌های مثلثاتی ۴۵۲

نسبت‌های مثلثاتی $\alpha \pm \beta$ (ویژه حسابان) ۴۶۵

فرمول‌های کمان 2α ۴۸۴

معادلات مثلثاتی ۵۰۷

دوره تناوب ۵۵۱

تانژانت ۵۹۱

حد و پیوستگی

حد ۶۲۱

حالت صفر صفرم ۶۴۴

حد بی‌نهایت ۶۹۶

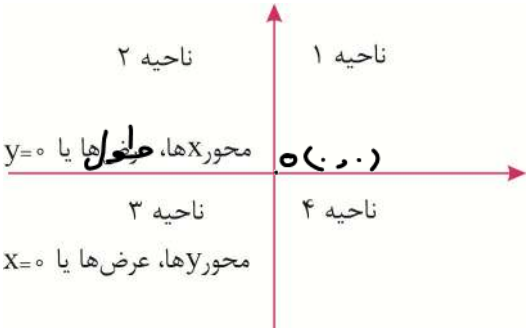
عنوان | صفحه

حد در بی‌نهایت ۷۲۸
پیوستگی ۷۵۹
پیوستگی در بازه ۷۶۸
همسایگی ۷۷۳
همسایگی چپ و راست ۸۱۲
مشتق
آشنایی با مفهوم مشتق ۸۲۲
محاسبه مشتق ۸۳۶
ساده‌سازی و سپس مشتق‌گیری ۸۵۷
مشتق توابع شامل قدرمطلق ۸۹۲
مشتق‌پذیری و پیوستگی ۹۱۴
آهنگ تغییر ۹۷۸
کاربرد مشتق
توابع صعودی و نزولی ـ بررسی جهت تغییرات تابع ۱۰۲۱
نقاط بحرانی ۱۰۳۱
اکسترمم مطلق ۱۰۵۵
اکسترمم نسبی ۱۰۸۰
بررسی نمودارها ۱۱۱۰
بهینه‌سازی ۱۱۳۵
عطف و تقعر (ویژه رشته ریاضی) ۱۱۶۸
هندسه
تفکر تجسمی و آشنایی با مقاطع مخروطی ۱۲۶۲
بیضی ۱۲۹۵
دایره ۱۳۱۶
وضعیت یک نقطه و دایره نسبت به هم ۱۳۳۳
احتمال کل دوازدهم ۱۳۹۵
شمارش بدون شمردن ۱۴۱۸
فاکتوریل ۱۴۲۵
جایگشت ۱۴۲۹
ترکیب ۱۴۴۱
احتمال ۱۴۵۹
احتمال شرطی ۱۴۸۴
پیشامد مستقل ۱۵۰۴
آمار ۱۵۲۱
تابع نمایی و لگاریتمی ۱۵۴۴
تالس و تشابه ۱۵۵۰
الگو و دنباله ۱۵۸۰

ریاضیات پایه دوازدهم

فصل صفر

معرفی دستگاه مختصات و مختصات یک نقطه:



نقطه $A(x,y)$

(ایگرگ ,ایکس)A

(عرض ,طول)A

$A(\ldots\ldots\ ,\ \ldots\ldots)$ ← جلو یا عقب ← بالا یا پایین

(صبغه , بلند)A

ناحیه یا ربع	اول	دوم	سوم	چهارم
x	+	−	−	+
y	+	+	−	−

تمرین: اگر نقطه $A(m+2,2m-1)$ در ناحیه چهارم دستگاه مختصات باشد و $m \in (a,b)$ بیشترین مقدار $b-a$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) $\frac{5}{2}$ ۴) $m \in \varnothing$

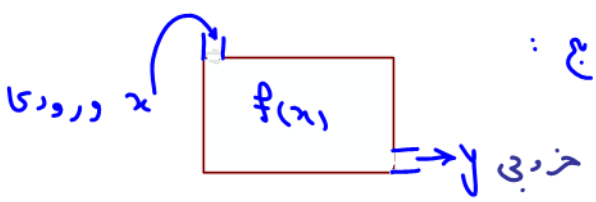
$\begin{cases} x=m+2>0 & m>-2 \\ y=2m-1<0 & m<\frac{1}{2} \end{cases}$ اشتراک

$a=-2<m<\frac{1}{2}=b$

$b-a=\frac{1}{2}-(-2)=\frac{5}{2}$ گزینه ۳

تابع $y=f(x)$ **چیست؟**

یعنی y دنباله‌رو x است. x متغیر مستقل و اول تغییر می‌کند y به تبع (دنبال) x تغییر می‌کند. x ورودی است به f، f یک عمل (function) روی x انجام می‌دهد و خروجی y را تولید می‌کند. مثلاً تابع:



$y=f(x)=x^2$

$y=f(-2)=(-2)^2=4$

تابع: هر شکلی درصفحه که هر خط موازی محور yها آن را حداکثر یک جا قطع کند تابع است (هیچ جا یا یک جا) مثل که تابع است اما تابع نیست. یعنی اگر یک x چند y (۲تا یا بیشتر) به ما تابع نیست

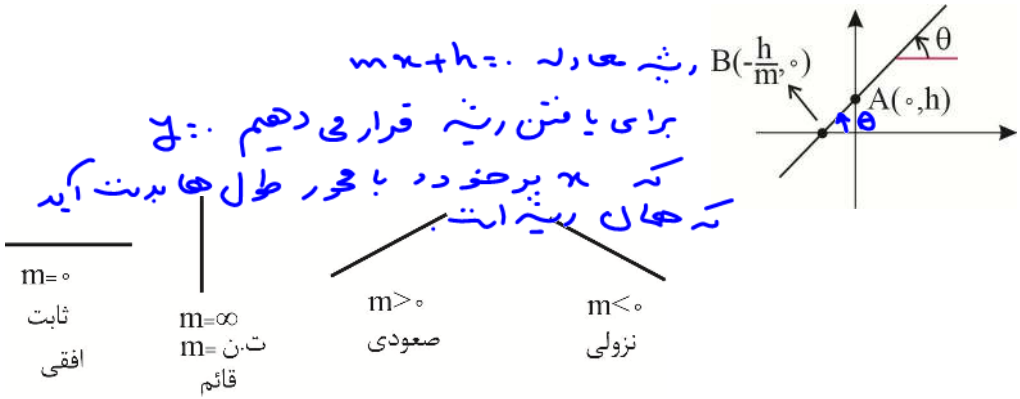
معادله خط راست یا تابع خطی:

$$y = f(x) = mx + h$$

عرض از مبدأ

$m = \tan\theta$ = شیب یا ضریب زاویه

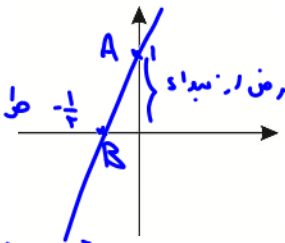
زاویه‌ای است که خط با جهت مثبت محور x ها می‌سازد.



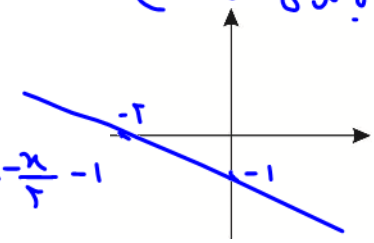
رسم خط: با ۲ نقطه

x	صفر	$-\frac{1}{2}$
$y = 2x + 1$	۱	صفر

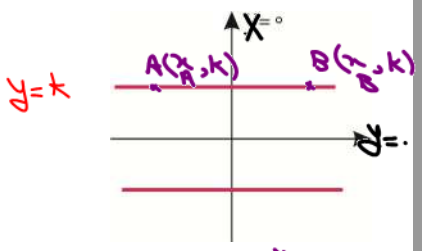
$A(0,1)$ $B(-\frac{1}{2},0)$



x	صفر	-2
$y = -\frac{x}{2} - 1$	-1	صفر



خط‌های خاص:

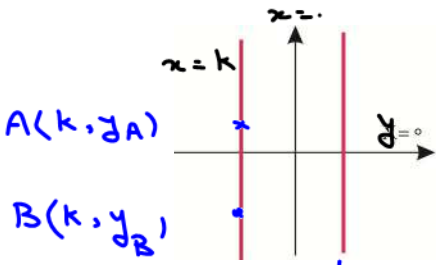


خط ..... $y = k$

موازی محور .....

تابع .....

مثلاً از ۲ نقطه $A(-2,7)$, $B(5,7)$ خط $y=7$ را عبور می‌دهد.



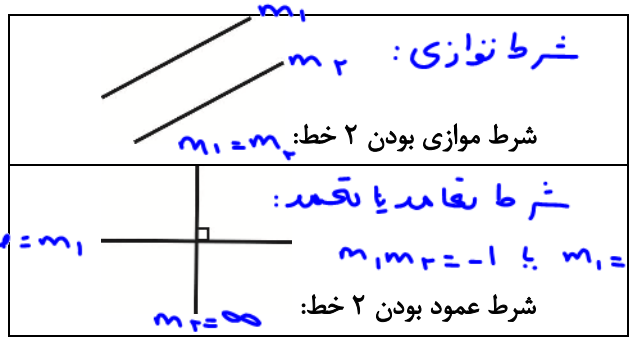
خط ..... $x = k$

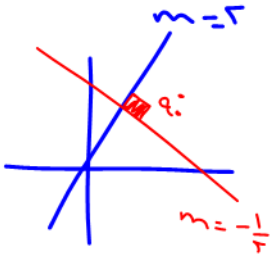
موازی محور .....

تابع .....

مثلاً خط عبوری از $A(-3,2)$ و $B(-3,-5)$ معادله‌اش $x=-3$ است.

توجه: دو خط $y = m_1x + h_1$ و $y = m_2x + h_2$ را در نظر بگیرید:





هر خط با شیب صفر بر هر خط با شیب ∞ عمود است.

صورت دیگر معادله خط:

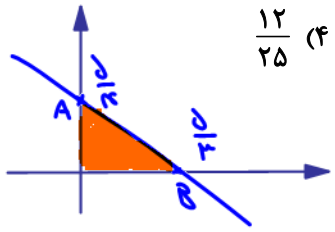
$$ax+by+c=0$$

شیب خط $= -\frac{\text{ضریب } x}{\text{ضریب } y}$

$$by=-ax-c \Rightarrow y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$$

تمرین: مساحت محصور بین خط $3x+4y=5$ و محورهای مختصات کدام است؟

۱) $\frac{25}{24}$ ۲) $\frac{24}{25}$ ۳) $\frac{25}{12}$ ۴) $\frac{12}{25}$

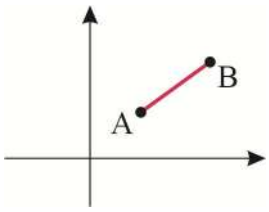


$A\left(x=0, y=\frac{5}{4}\right)$

$B\left(x=\frac{5}{3}, y=0\right)$

$S_{\text{مثلث}}=\frac{(\text{قاعده})(\text{ارتفاع})}{2}=\frac{\left(\frac{5}{3}\right)\left(\frac{5}{4}\right)}{2}=\frac{25}{24}$

شیب خط بین دو نقطه:



$$m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}=\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

نوشتن معادله خط با داشتن دو نقطه $B(x_B,y_B)$ و $A(x_A,y_A)$:

$$y-y_A=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}(x-x_A)$$

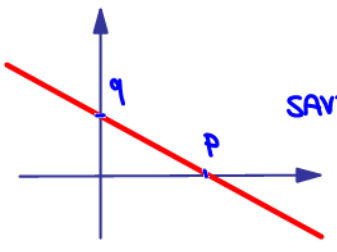
تمرین: معادله خط عبوری از نقاط $B(0,9)$ و $A(6,0)$ را بنویسید.

$$y-y_A=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}(x-x_A) \quad y-0=\frac{9-0}{0-6}(x-6) \quad y=-\frac{9}{6}x-\frac{9}{6}(-6)=-\frac{9}{6}x+9$$

$$y=-\frac{9}{6}x+9 \rightsquigarrow \text{طرفین } 6 \quad 6y=-9x+54$$

$$6y+9x=54$$

$$\frac{6y}{54}+\frac{9x}{54}=\frac{54}{54} \quad (\div 54)$$



SAVE

$$\frac{x}{6}+\frac{y}{9}=1$$

نوشتن معادله خط با داشتن یک نقطه و شیب:

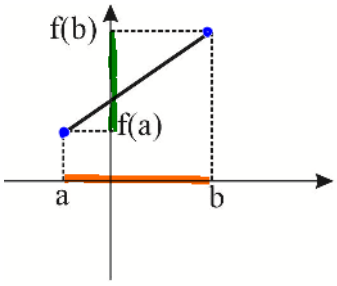
$$y - y_A = m(x - x_A)$$

تمرین: معادله خط عبوری از $A(2,-1)$ که عمود بر خط $3x+4y=1$ می‌باشد، کدام است؟

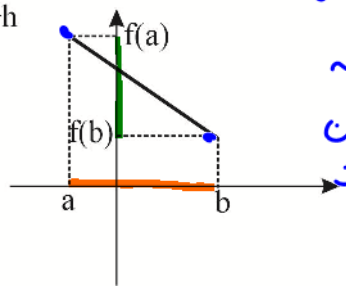
دامنه و برد خط $y = mx + h$

دامنه: محدوده تغییرات x

برد: محدوده تغییرات y



$m > 0$ صعودی



$m < 0$ نزولی

$D_f : [a,b]$ دامنه

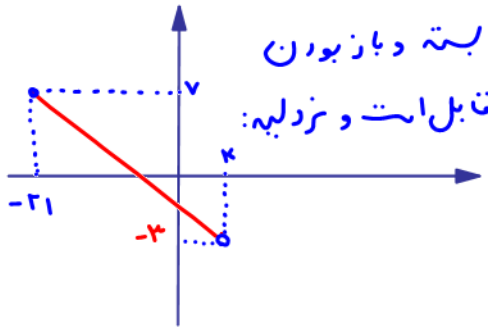
$R_f : [f(a), f(b)]$ برد

$D_f : [a,b]$ دامنه

$R_f : [f(b), f(a)]$ برد

تمرین: یک تابع خطی با دامنه $[-21,4]$ و برد $[-3,7]$ مفروض است، حاصل $3f(1)$ کدام است؟ (نماد [ ] جزء صحیح است.)

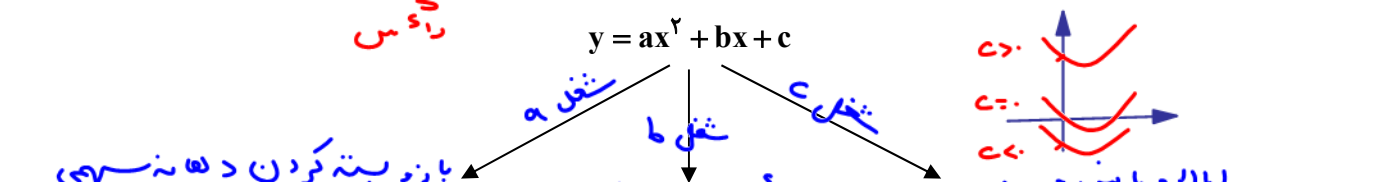
۱) ۴- ۲) ۵- ۳) ۶- ۴) ۷-



معرفی تابع درجه دوم یا ۳ جمله‌ای درجه ۲ یا سهمی: $f(x)=ax^2+bx+c$

$y=ax^2+bx+c$

شکل a — شکل b — شکل c



نکات مهم:

$\Delta=b^2-4ac$: بیانگر اینکه سهمی به محور xها چند خورد یا نه؟

یک معادله درجه دوم حداکثر ۲ ریشه دارد.

ریشه یا صفر معادله در صورت وجود: $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$

جمع ریشه‌ها در صورت وجود: $S=-\frac{b}{a}$

ضرب ریشه‌ها در صورت وجود: $P=\frac{c}{a}$

معادله محور تقارن: $x=-\frac{b}{2a}$

مختصات رأس: $S\left(-\frac{b}{2a},-\frac{\Delta}{4a}\right)$

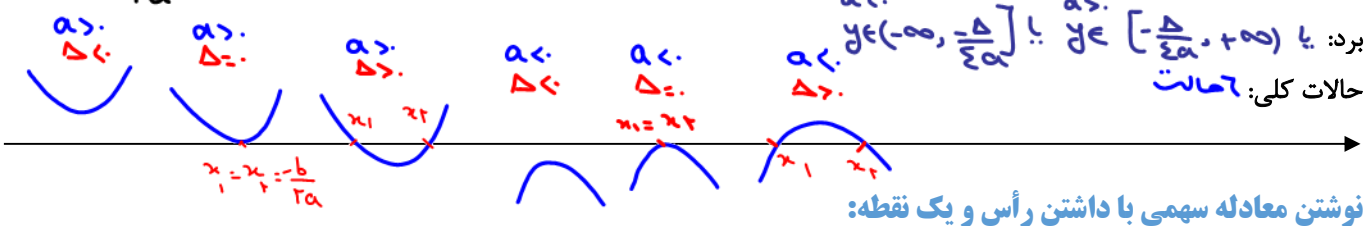
اکسترمم: min یا max

ویژگی مهم: نقاطی که نسبت به x_S متقارن هستند عرض مساوی دارند.

دامنه: $\mathbb{R}$

برد: یا $y\in[-\frac{\Delta}{4a},+\infty)$ یا $y\in(-\infty,\frac{\Delta}{4a}]$

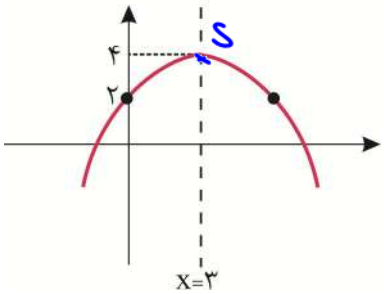
حالات کلی: ۶ حالت



نوشتن معادله سهمی با داشتن رأس و یک نقطه:

$$y=a(x-x_S)^2+y_S$$

تمرین: معادله سهمی مقابل را بنویسید.



$A(0,2)$ عبور کرده و از نقطه $y_S=4$ و $x_S=3$ می‌بینیم

$y=a(x-x_S)^2+y_S$

$A(0,2)\in y=a(x-3)^2+4$

$2=a(0-3)^2+4$

$2=9a+4$

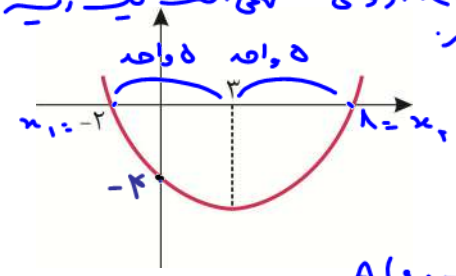
$-\frac{2}{9}=a$ ⟶ $y=-\frac{2}{9}(x-3)^2+4$

نوشتن معادله سهمی با داشتن دو ریشه:

$$y = a(x - x_1)(x - x_2)$$

$y = a(x - \text{ریشه اول})(x - \text{ریشه دوم})$

تمرین: اگر معادله شکل مقابل $y = ax^2 + bx + c$ باشد، $f(-1)$ کدام است؟



می‌بینم که $A(0,-4)$ روی سهمی است یک ریشه $x_1 = -2$ هست، ریشه دیگر با توجه به $x_s = 3$ باید $x_2 = 8$ باشد.

x_s وسط دو ریشه است یا روی سهمی نقاطی که عرض یکسان دارند طولشان از x_s به یک فاصله است.

$y = a(x - \text{ریشه اول})(x - \text{ریشه دوم})$

$y = a(x - (-2))(x - 8)$

$A(0,-4) \in \quad y = a(x+2)(x-8)$

$-4 = a(0+2)(0-8)$

$\frac{1}{2} = \frac{-4}{-16} = a \rightarrow f(x) = \frac{1}{2}(x+2)(x-8) \quad f(-1) = \frac{1}{2}(-1+2)(-1-8) = -\frac{9}{2}$

نوشتن معادله سهمی با داشتن ۳ نقطه:

یک راه طولانی این است که $y = ax^2 + bx + c$ را در نظر گرفته و با صدق دادن مختصات سه نقطه و حل سه معادله سه مجهول a و b و c را پیدا می‌کنیم. اما راه ساده‌تر:

تمرین: معادله یک سهمی بنویسید که از نقاط $A(2,4)$ و $B(0,3)$ و $C(-1,2)$ بگذرد.

$f(x) = ax^2 + bx + c$ ← ۳ مجهول، ۳ معادله

$f(2) = 4a + 2b + c = 4 \rightarrow 4a + 2b = 1$

$f(0) = 0 + 0 + c = 3 \rightarrow c = 3$

$f(-1) = a - b + c = 2 \rightarrow a - b = -1$

$\begin{cases} 4a + 2b = 1 \\ a = b - 1 \end{cases} \quad 4(b-1) + 2b = 1 \quad 6b - 4 = 1$

$b = \frac{5}{6} \quad a = \frac{5}{6} - 1 = -\frac{1}{6}$

$f(x) = -\frac{1}{6}x^2 + \frac{5}{6}x + 3$

$y = ax^2 + bx + c$

$y = (\text{خط } BC) + a(x - x_B)(x - x_C)$

$y = x + 3 + a(x - 0)(x + 1)$

حال $A(2,4)$ را در معادله بالا می‌نشانیم:

$4 = (2+3) + a(2)(3) \rightarrow a = -\frac{1}{6}$

$y = (x+3) - \frac{1}{6}(x)(x+1)$

$y = -\frac{1}{6}x^2 + \frac{5}{6}x + 3$

تمرین: چهار مربع به ضلع ۲ مانند شکل کنار یکدیگر قرار دارند. یک سهمی از نقاط A، B و C عبور کرده و محور xها را در دو نقطه قطع می‌کند. فاصله نقاط تقاطع چند است؟ (المپیاد ریاضی مرحله اول سال ۱۴۰۰)

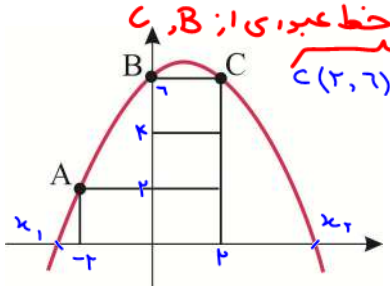
۱) ۷

۲) $2\sqrt{13}$

۳) $5\sqrt{2}$

۴) $3\sqrt{7}$

۵) ۸



$y = 6$ خط عبوری از B و C

$C(2,6), B(0,6), A(-2,2)$ معادله سهمی با داشتن ۳ نقطه

$y = (\text{خط } BC) + a(x - x_B)(x - x_C)$ می‌نویسیم:

$y = 6 + a(x - 0)(x - 2)$

مختصات نقطه $A(-2,2)$ را در معادله بالا می‌نشانیم

چون سهمی بابه از A هم نمی‌رود.

$2 = 6 + a(-2)(-2-2) \quad a = \frac{-4}{8} = -\frac{1}{2}$

$y = 6 - \frac{1}{2}x(x-2)$

سهمی $y = -\frac{1}{2}x^2 + x + 6$

فاصله از نقاط برخورد سهمی با محور xها از هم همان تفاضل ریشه‌هاست:

$y = ax^2 + bx + c$

تفاضل دو ریشه: $D = |x_2 - x_1| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \frac{\sqrt{(1)^2 - 4(-\frac{1}{2})(6)}}{|-\frac{1}{2}|} = \frac{\sqrt{13}}{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{13}$ گزینه ۲

معرفی تابع جزء صحیح: با براکت [ ] بزرگترین عدد صحیح نابیشتر از x را گزارش می‌کند.

کمتر یا مساوی

اگر عدد صحیح به براکت بدی: میده خودش

اگر عدد اعشاری به براکت بدی میده عدد صحیح قبلی‌اش، صحیح کف چپی روی محور

عدد صحیح کمتره

$\forall x\in\mathbb{R}\ ;\ n\le x<n+1\ ,\ n\in\mathbb{Z} \longrightarrow [x]=n$

$[-2,3]=-3$ $[2]=2$ $[x=2,3]=2$

if $-3<x<-2 \longrightarrow [x]=-3$

if $-3<x<1 \longrightarrow [x]=\{-3,-2,-1,0\}$

if $\sqrt{2}<x<\sqrt{3}$ ($1,4$ تا $1,7$) $\longrightarrow [x]=1$

خروجی براکت عدد صحیح است براکت $\mathbb{Z}$ توست.

مثال: معادله $[x^2-3x]=\frac{7}{3}$ چند جواب دارد؟ جواب ندارد زیرا سمت چپ یک عدد صحیح است و نمی‌تواند برابر $2,333\ldots=\frac{7}{3}$ که عدد صحیح نیست بشود $x\in\phi=\{\}$

هر عددی در دنیا مثل x دو تا بخش داره: یکی بخش صحیح با جزء اعشاری که با $[x]$ نشون می‌دیم

یکی بخش اعشاری یا Partial خوردی

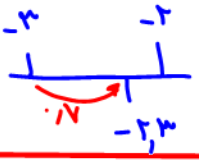
$$x=[x]+P$$

$$0\le P=x-[x]<1$$

$2,3 = 2 + 0,3$ در اعداد مثبت P همون اعشاره

در عدد صحیح $P=0$ $\quad 2=2+0$

در اعداد منفی اعشار $P=1-$ $\quad -2,3=[-2,3]+P=-3+0,7$



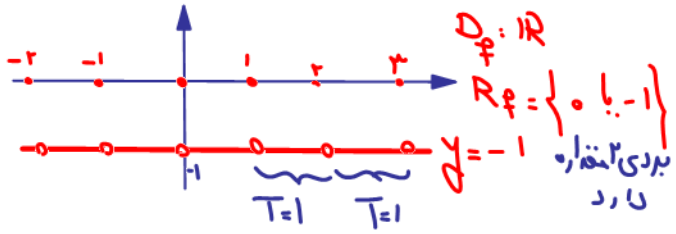
نکته:

$$[-x]=\begin{cases}-[x] & x\in\mathbb{Z}\\ -[x]-1 & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$$

$[-2]=-[2]=-2$

$[-2,3]=-[2,3]-1$ ($[-2,3]=-3$، $[2,3]=2$)

$$y=[x]+[-x]=\begin{cases}\text{صفر} & x\in\mathbb{Z}\\ -1 & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$$



معرفی تابع قدرمطلق:

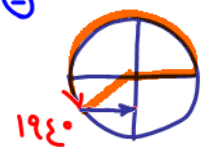
$$|u| = \begin{cases} u & u \geq 0 \\ -u & u < 0 \end{cases}$$

$$|\text{توش}| = \begin{cases} \text{خوش} & \text{توش} \oplus \\ \text{قرینش} & \text{توش} \ominus \end{cases}$$

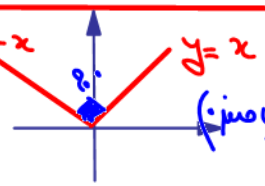
$|-5| = -(-5) = 5$

$|\underbrace{\sqrt{2}-\sqrt{3}}_{1,4-1,7}| = -(\sqrt{2}-\sqrt{3}) = -\sqrt{2}+\sqrt{3} = \sqrt{3}-\sqrt{2}$

$|\underbrace{\sin 194^\circ}_{-}| = -\sin 194^\circ$



$y = f(x) = |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$



$y = |x|$ $D_f : \mathbb{R}$

$R_f : [0, +\infty)$ نامنفی‌ات (مثبت یا صفر)

---

u متغیره که توش داره مثل x^2-4x ، $a>0$ عدده شرط

$u^2 < a^2 \longrightarrow |u| < |a| \xrightarrow{a>0} |u| < a \xrightarrow{a>0} -a < u < a$

$u^2 = a^2 \longrightarrow |u| = |a| \xrightarrow{a>0} |u| = a \xrightarrow{a>0} u = \pm a$

$u^2 > a^2 \longrightarrow |u| > |a| \xrightarrow{a>0} |u| > a \xrightarrow{a>0} u < -a$ یا $u > a$

مثال: نامعادلات زیر را حل کنید:

الف) $|2x-1| < 3 \longrightarrow -3 < 2x-1 < 3 \longrightarrow -2 < 2x < 4 \longrightarrow -1 < x < 2$

ب) $|x^2-1| = 3 \longrightarrow \begin{cases} x^2-1 = 3 \longrightarrow x^2 = 4 \longrightarrow x = 2 \text{ یا } -2 \\ x^2-1 = -3 \longrightarrow x^2 = -2 \text{ ق ق} \end{cases}$ جواب نداره غ ق ق

ج) $|2x+3| > 1$ $\begin{cases} 2x+3 < -1 & 2x < -4 \quad x < -2 \\ 2x+3 > 1 & 2x > -2 \quad x > -1 \end{cases}$ $x \in (-\infty, -2) \cup (-1, +\infty)$

د) $|x^2-1| < -1 \longrightarrow x \in \emptyset = \{\}$ خروجی قد، مطلق مثبته و هرگز کمتر از ① نیست

ه) $|x^2-1| = -3 \rightsquigarrow x \in \emptyset$

و) $|x^2-1| > -2 \rightsquigarrow x \in \mathbb{R}$

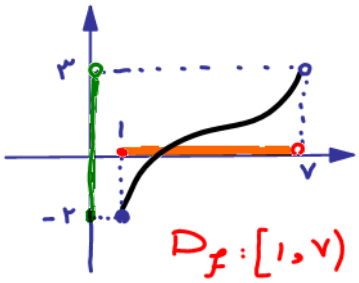
ز) $|x^2-4| \leq 0 \rightsquigarrow x \in \{\pm 2\}$

ح) $\left|\frac{x-7}{x^2-12}\right| > -3 \rightsquigarrow x \in \mathbb{R} - \{\pm 4\}$

ط) $|1-\sqrt{x-2}| > -7 \rightsquigarrow x-2 \geq 0 \quad x \geq 2$

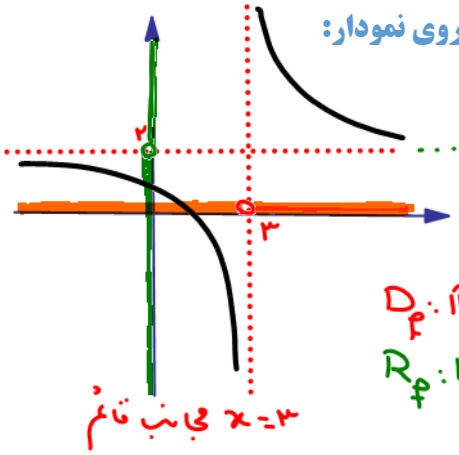
ی) $|x^2-9| < 0 \rightsquigarrow x \in \{\} = \emptyset$

تعیین دامنه و برد یک تابع از روی نمودار:



$D_f : [1, 7)$

$R_f : [-2, 3)$

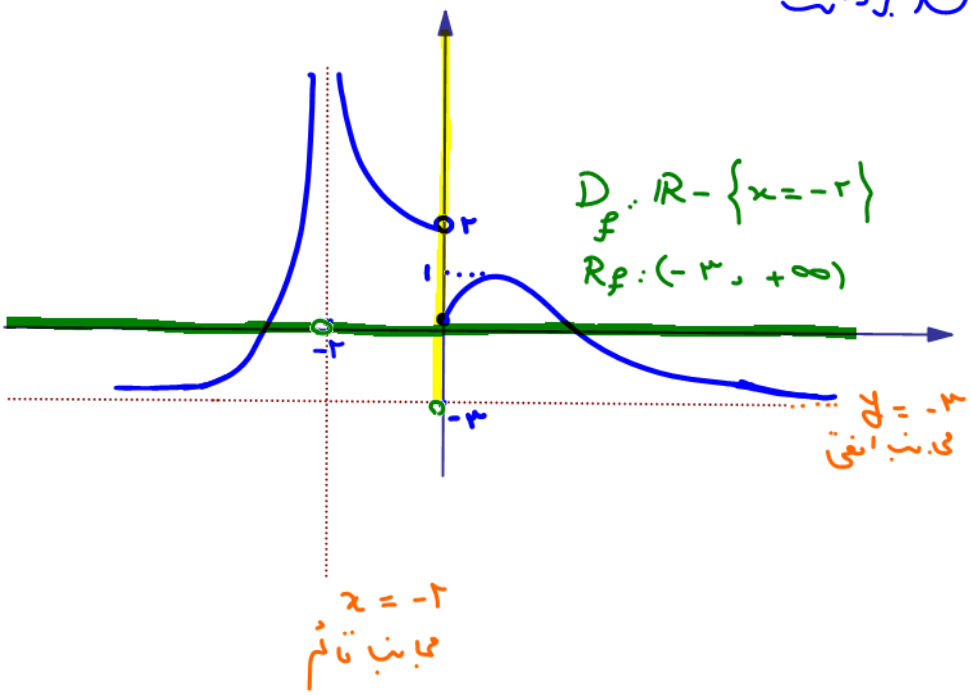


$D_f : \mathbb{R} - \{x = -3\}$

$R_f : \mathbb{R} - \{y = 2\}$

کافی است: با یک پرس ۲ فکه شکل را روی محور طول‌ها (x ها) پرس کنیم محدوده تغییرات x پیدا می‌شود یعنی همه جا روی محور xها که شده عضو دامنه است.

برای برد شکل را با یک پرس دو فکه روی محور yها (عرض‌ها) پرس می‌کنیم هرجا که شد برد است.



$D_f : \mathbb{R} - \{x = -2\}$

$R_f : (-3, +\infty)$

روش‌های حل تست:

۱- روش کلاسیک

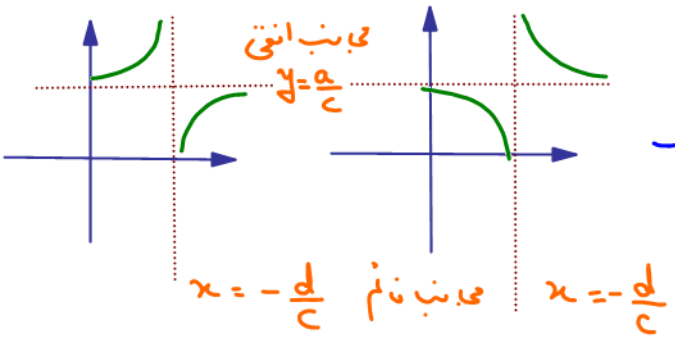
۲- حذف حالات نامطلوب (ردّ گزینه)

۳- کنترل گزینه‌ها و عددگذاری

۴- روش ترسیم

معرفی و رسم تابع $y=\frac{ax+b}{cx+d}$

تابع هموگرافیک



مراحل رسم هموگرافیک:

① رسم مجانب‌ها: $x=$ ریشه مخرج مجانب قائم است

② $y=\frac{\text{ضریب } x \text{ صورت}}{\text{ضریب } x \text{ مخرج}}$ مجانب افقی است

③ $A(0,y)$ و $B(x,0)$

یک بار به x صفر داده y را می‌یابیم

یک بار به y صفر داده x را حساب می‌کنیم تا محل برخورد تابع با محورهای مختصات به دست آید.

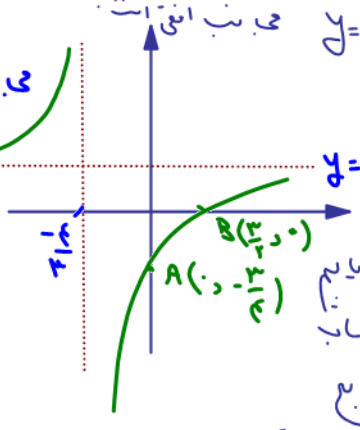
$y=\frac{x-3}{x+2}$

$x=-\frac{-3}{1}=3$ مجانب قائم

$y=\frac{1}{1}=1$ مجانب افقی

$A(0,-\frac{3}{2})$

$B(3,0)$



$y=\frac{x}{x+3}$

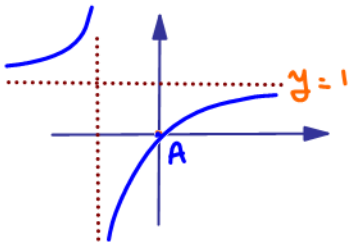
$x=-3$ مجانب قائم

$y=\frac{1}{1}=1$ مجانب افقی

$A(0,0)$

$(a=1)(d=3)-(0)(1)>0$

شاخه‌ها صعودی

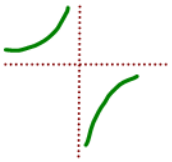


④ رسم شاخه‌ها

دقت: در عبارت $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ ابتدا $ad-bc$ را بسازید.

اگر $ad-bc>0$ شاخه‌ها صعودی

اگر $ad-bc<0$ شاخه‌ها نزولی



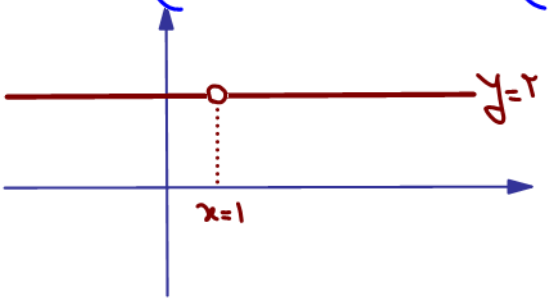
اگر $ad-bc=0$ یا $ad=bc$ یا $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$ ← شکل تبدیل به تابع ثابت $y=\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$ می‌شود که در ریشه مخرج توخالی است.

$y=\frac{2x-2}{x-1}=\frac{2(x-1)}{x-1}=2$

$\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$

$x\neq 1$

$D_f:\mathbb{R}-\{x=1\}$



اگر $c=0$ ← $y=\frac{ax+b}{d}=\frac{a}{d}x+\frac{b}{d}$ خط

تمرین: مجموعه جواب نامعادلهٔ $-1 < \frac{3x+1}{x-3} < 3$ به کدام صورت است؟ (تجربی ۹۶)

۱) $x < \frac{1}{2}$ ۲) $x < 3$ ۳) $-\frac{1}{2} < x < 3$ ۴) $\frac{1}{2} < x < 3$

راه کلاسیک: حل نامعادلی توأمان

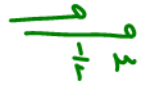
$$-1 < \frac{3x+1}{x-3} < 3$$

$$\frac{3x+1}{x-3} < 3 \rightsquigarrow \frac{3x+1}{x-3} - 3 < 0 \rightsquigarrow \frac{3x+1-3x+9}{x-3} < 0 \rightsquigarrow \frac{10}{x-3} < 0 \rightsquigarrow x-3<0 \rightsquigarrow x<3 \quad (\text{الف})$$

و

$$-1 < \frac{3x+1}{x-3} \rightsquigarrow 0 < \frac{3x+1}{x-3} + 1 \rightsquigarrow 0 < \frac{3x+1+x-3}{x-3} = \frac{4x-2}{x-3} \rightsquigarrow 4x-2>0 \rightsquigarrow 4x>2 \rightsquigarrow x>\frac{1}{2} \quad (\text{ب})$$

از مرحله بالا می‌فهمیم باید منفی باشه که مثبت بخشش منفی باشه صورت کسر $x-3<0$ هم باید منفی باشه



اشتراک (الف) و (ب): $x<\frac{1}{2}$ گزینه ۱

راه بستن گزینه‌ها: یا در گزینه‌ها می‌بینم $x=1$ که در گزینه ۲، ۳ و ۴ هست نامساوی را برقرار می‌کند:

پس $x=1$ عدد غلط و فقط گزینه یک در بقیه $3 > \frac{3x+1}{x-3}\Big|_{x=1} = \frac{4}{-2} = -2 > -1$

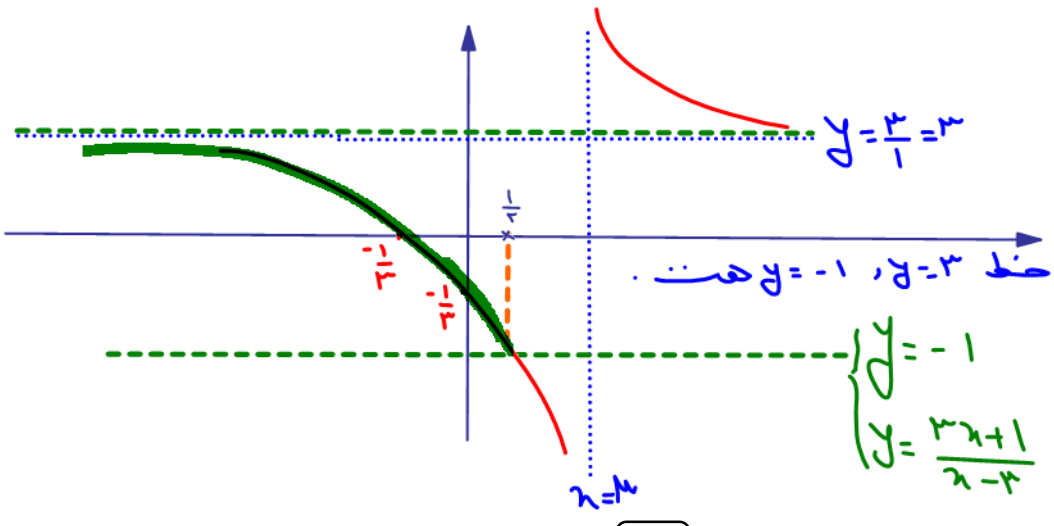
عدد $x=1$ جزا بقاری کرد گزینه‌های شامل $x=1$ غلط اند.

راه سوم:

تابع هموگرافیک

$$y=-1 < y = \frac{3x+1}{x-3} < y=3$$

می‌خواهیم ببینیم برای کدام xها تابع هموگرافیک $y = \frac{3x+1}{x-3}$ بین ۲ خط $y=3$ و $y=-1$ هست؟

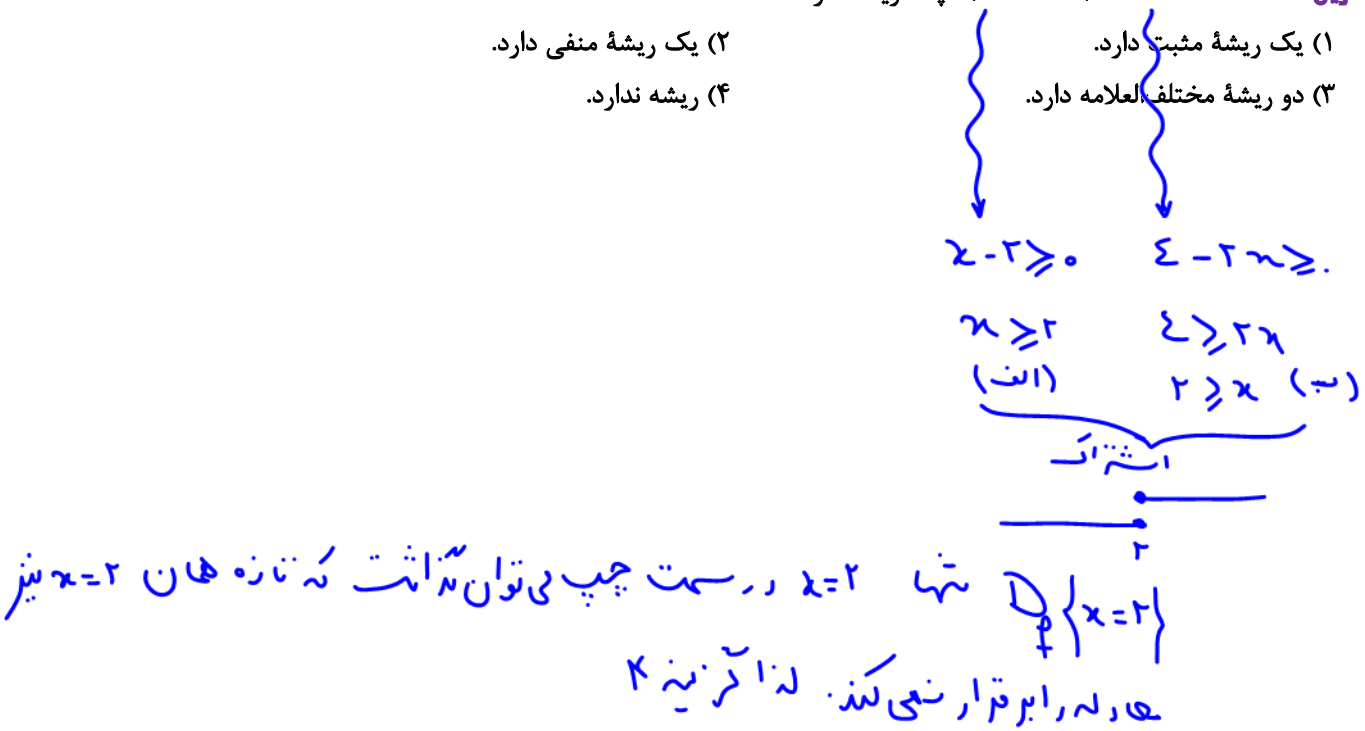


می‌بینم تابع $y = \frac{3x+1}{x-3}$ از $x<\frac{1}{2}$ بین دو خط $y=3$ و $y=-1$ هست.

$$\frac{3x+1}{x-3} = -1$$
$$3x+1 = -x+3$$
$$4x = 2$$
$$x = \frac{1}{2}$$

تمرین: معادلهٔ $\sqrt{x-2}+\sqrt{4-2x}=5$ چند ریشه دارد؟

۱) یک ریشهٔ مثبت دارد.
۲) یک ریشهٔ منفی دارد.
۳) دو ریشهٔ مختلف‌العلامه دارد.
۴) ریشه ندارد.



تنها $x=2$ در سمت چپ می‌توان گذاشت که تا زه همان $x=2$ نیز $\{x=2\}$ معادله را برقرار می‌کند. لذا گزینه ۲

تمرین: اگر x در دامنهٔ $|x-3|+|x-1|=f(x)$ تغییر کند، $f(x)$ در چه بازه‌ای تغییر می‌کند؟ برد $f(x)$ را می‌خواهد.

۱) $1 \le y \le 3$ ۲) $y \ge 2$ ۳) $-1 \le y \le 3$ ۴) $y \ge -2$

حدس‌زدن و کنترل گزینه‌ها:

با دادن عدد دلخواه $x=10$ داریم: $f(10)=|10-1|+|10-3|=16$

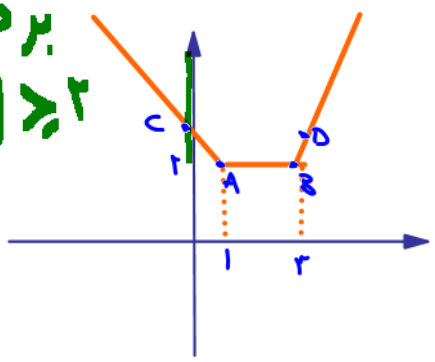
پس $f(x)$ می‌تواند $y=16$ هم باشد لذا گزینه یک و سه غلط‌اند.

از طرفی جمع دو عدد مطلق عبارتی نامنفی (مثبت یا صفر) است لذا گزینه ۴ هم غلط زیرا نوشته $y \ge -2$ پس y می‌تواند -2، -1 یا نه اصلاً نداردِ گزینه ۲ درست است.

$f(x)=|x-1|+|x-3|$ (جمع کردن)

$C\begin{cases}x=0\\y=4\end{cases}$ $A\begin{cases}x=1\\y=2\end{cases}$ $B\begin{cases}x=3\\y=2\end{cases}$ $D\begin{cases}4\\2\end{cases}$

برد: $y \ge 2$

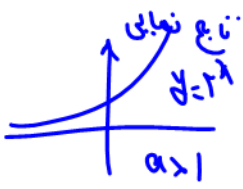


نامنفی‌ها (مثبت یا صفر)

$y=\sqrt{x} \ge 0$

$y=|x| \ge 0$

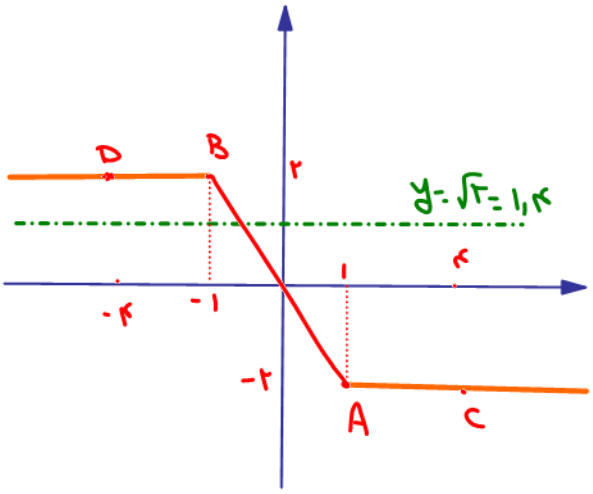
$y=(x-1)^2 \ge 0$

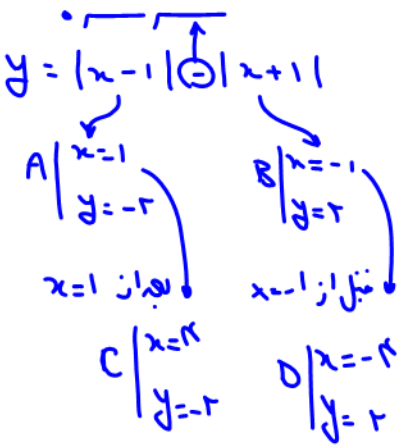


مثبت‌ها: $y=a^x$ $a>0$

تمرین: خط $y=\sqrt{2}$ نمودار هندسی تابع $y=|x-1|-|x+1|$ را در چند نقطه قطع می‌کند؟

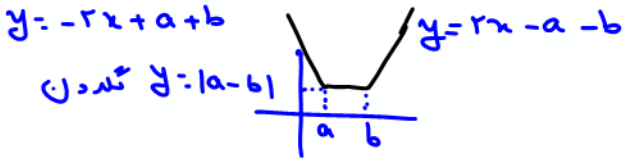
۱) ۱ ✓ ۲) ۲ ۳) هیچ ۴) بی‌شمار

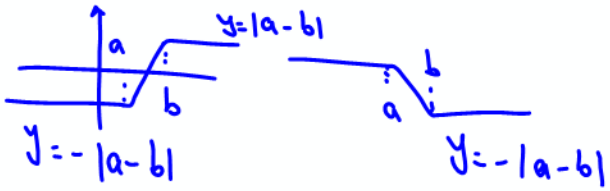




$y=|x-a|+|x-b|$

$y=|x-a|-|x-b|$





یک به یک : هر خط افقی موازی محور xها تابع یک به یک را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند. (یا قطع نمی‌کند یا فقط یک نقطه)

یک تابع با یک x در ارتباط

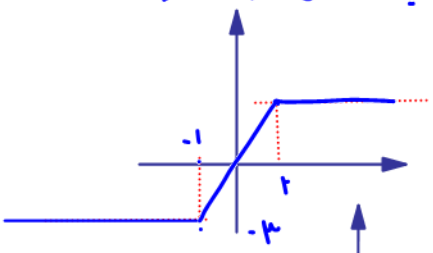
تمرین: کدام تابع زیر یک‌به‌یک است؟

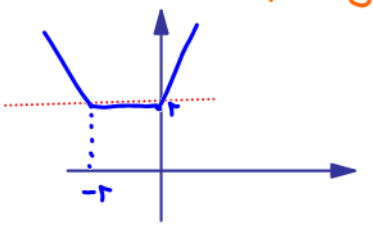
۱) $y=|x+2|+|x|$ ۲) $y=|x+1|-|x-2|$ ۳) $y=|x+2|+4x$ ✓ ۴) $y=|x+2|+x$

گذر دو نمودار یک تابع به یک تابع نیست

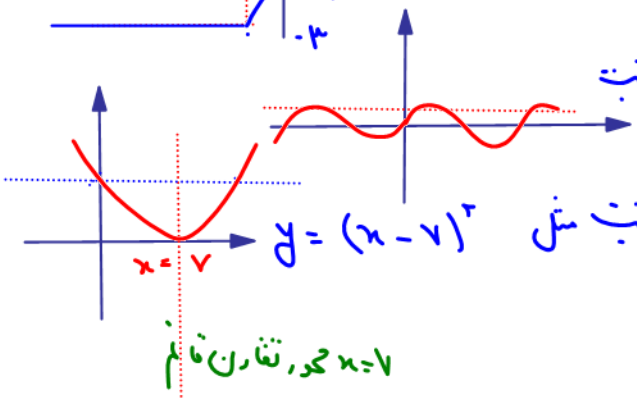
$y=3x-2$ $y=5x+2$

نکته: اگر تابعی در یک بازه‌ای ثابت باشد یک به یک نیست زیرا یک y با بی‌شمار x در ارتباط





اگر تابع متناوب باشد مثل $y=\sin x$ یک به یک نیست



اگر تابع محور تقارن قائم داشته باشد یک به یک نیست مثل $y=(x-7)^2$

$x=7$ محور تقارن قائم

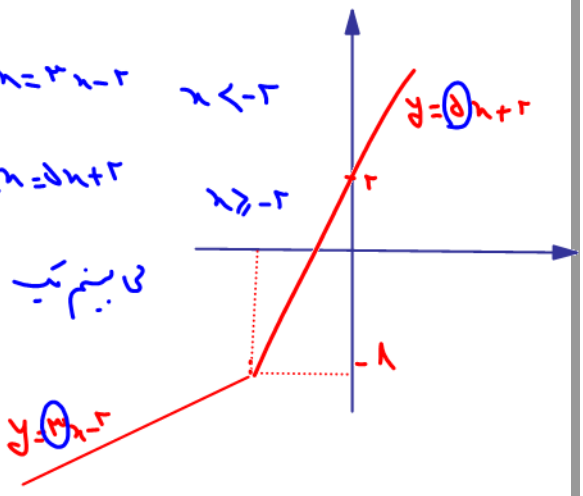
$y=|x+2|+4x$

$x+2=0 \rightarrow x=-2$ ریشه

$x<-2$: $|x+2|+4x=-x-2+4x=3x-2$

$x\geq -2$: $|x+2|+4x=x+2+4x=5x+2$

می‌بینم یک به یک است



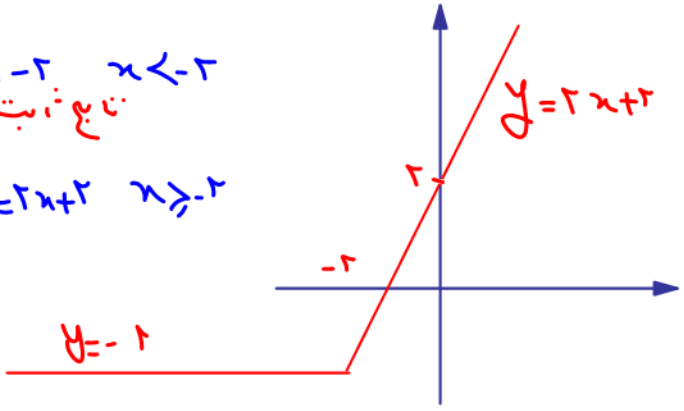
نکته: هر تابع که اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی باشد یک به یک است مثل همین تابع

$y=|x+2|+x$

$x=-2$ ریشه

$x<-2$: $y=-x-2+x=-2$ تابع ثابت دارد یک به یک نیست

$x\geq -2$: $y=x+2+x=2x+2$



تمرین: اگر $y=\sqrt[4]{\frac{2}{x^2}-\frac{9}{2}}+\sqrt[3]{2x-x^2}$ باشد، دامنه کدام است؟

۱) $[-\frac{2}{3},2]$ ۲) $[-\frac{2}{3},\frac{2}{3}]$ ۳) $[-\frac{2}{3},0)\cup(0,2]$ ۴) $[-\frac{2}{3},0)\cup(0,\frac{2}{3}]$

عدد $x=0$ ریشه مخرج $\frac{2}{x^2}$ است پس گزینه‌هایی که $x=0$ دارند مردود و در نتیجه گزینه ۱ و ۲

عدد $x=2$ که در گزینه سه هست $y=\sqrt[4]{\frac{2}{4}=\frac{1}{2}=0.5)-(\frac{9}{2}=4.5)}$ زیر رادیکال $\sqrt[4]{}$ را منفی می‌کند و عدد منفی است پس گزینه ۳ غلط و ۴ درست.

راه کلاسیک: برای محاسبه دامنه $\sqrt[2k]{}$ و $\sqrt[2k+1]{}$ همان دامنه U را آزمایش می‌کنیم.

$y=\sqrt[4]{\frac{2}{x^2}-\frac{9}{2}\geq 0}+\sqrt[3]{2x-x^2}$

همان دامنه $2x-x^2$ که $\mathbb{R}$ است (دائم)

$\frac{2}{x^2}\geq\frac{9}{2}$

$\frac{x^2}{2}\leq\frac{2}{9}$

$x^2\leq\frac{4}{9}$

$|x|\leq\frac{2}{3}$

$-\frac{2}{3}\leq x\leq\frac{2}{3}$ (ب)

$x=0$ ریشه مخرج از مجموعه جواب حذف می‌شه

گزینه ۴: $[-\frac{2}{3},0)\cup(0,\frac{2}{3}]=\{-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\}-\{0\}=(\mathbb{R})\cap[-\frac{2}{3},\frac{2}{3}]-\{0\}$

معرفی لگاریتم، تابع لگاریتمی، تابع نمایی:

۸ چه توانی از ۲ هست؟ ۳

$2^3=8$ یعنی $\log_2^8=3$ (۳ به توان ۲)

$\log_{10}^{1}=0$	$\log_{10}^{10}=1$
$\log_{10}^{100}=2$	$\log_{10}^{0.1}=-1$

$\log_b$ ← b = مبنا = پایه

تعریف لگاریتم:

$f(x)=\log_b^x=y \longleftrightarrow b^y=x$ (x به توان y)

b: base: مبنا ← پایه

هر تابع در یک تابع x را برحسب y به دست بیاوریم مثل $y=b^x$ پس جای x و y را عوض کنیم $x=b^y$

تابع وارون به دست می‌آید. تابع نمایی (متغیرش در نما است) وارون تابع لگاریتمی است: $f^{-1}(x)=b^x$

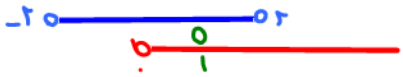
دامنه تابع لگاریتمی: $y=\log_b^u$ پایه $(u>0)\cap(b>0)\cap(b\neq 1)$

مثلاً دامنه $y=\log_x^{4-x^2}$ را بیابید.

$\begin{cases}4-x^2>0 \rightarrow 4>x^2 \rightarrow 2>|x| \rightarrow -2<x<2\\ x>0\\ x\neq 1\end{cases}$

$D_f:(0,2)-\{x=1\}$

$Df:(0,1)\cup(1,2)$



نکته: تعریف لگاریتم را در حالت نامساوی هم می‌توان به کار برد فقط و فقط مبنا بین صفر و یک است جهت نامساوی را عوض می‌کنیم. مثلاً برای مساله دامنه داریم: $y=\sqrt{\log_{0.2}^{3-x}}$

$\sqrt{\ }$ شرط: $\log_{0.2}^{3-x}\geq 0$ (به توان ۰٫۲)

$3-x\leq (0.2)^0=1$

$x\geq 2$ (الف)

$\log$ شرط: $3-x>0$

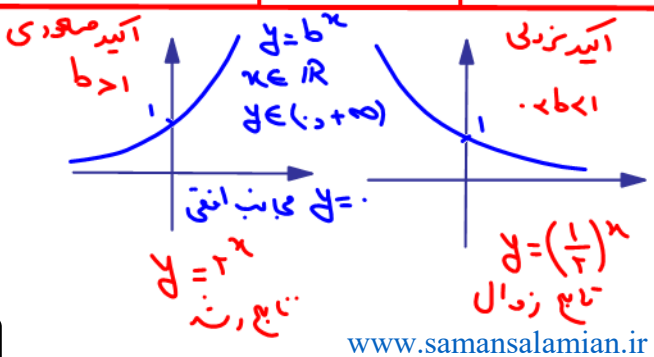
$0.2>0$ ✓

$0.2\neq 1$ ✓

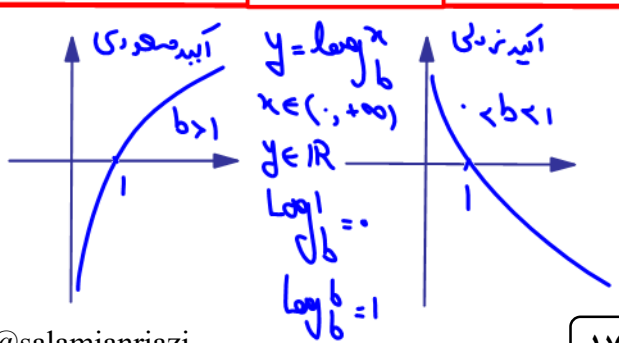
$x<3$ (ب)

$(2,3]$: (ب) ∩ (الف)

تابع نمایی



تابع لگاریتمی



تعرین: اگر $f(x)=\sqrt{1-\log(x^2-3x)}$ باشد، دامنه کدام است؟ راهنمایی: $\log_b a = c$

۱) $[-2,0)\cup(3,5]$ ۲) $[-2,3)$ ۳) $[-2,0)\cup(3,5)$ ۴) $(0,5]$

روش کنترل گزینه و عددگذاری:

عدد $x=-1$ $f(-1)=\sqrt{1-\underbrace{\log(-2)}_{\text{غ ق ق}}}$ چون لگ را منفی می‌کند و غ.ق.ق است

پس گزینه‌های شامل $x=-1$ یعنی گزینه ۲ و ۴ غلط هستند. چون $x=5$ در گزینه ۱ و ۳ مورد

امتحان است آن را کنترل می‌کنیم $f(5)=\sqrt{1-(\log_{25-15=10}^{10}=1)}=0$

پس $x=5$ باید در دامنه باشه پس گزینه ۱ درسته!

روش کلاسیک:

$y=\sqrt{1-\lg^{x^2-3x}}$

$\log$ شرط: $x^2-3x>0$

$x(x-3)>0$

	$-\infty$		0		3		$+\infty$
x	−	−	۰	+	۰	+	
$x-3$	−	−		−	۰	+	
$x(x-3)$	+	+	۰	−	۰	+	

(الف) $D_f=(-\infty,0)\cup(3,+\infty)$

$\sqrt{}$ شرط: $1-\lg^{x^2-3x}\geq 0$

$1\geq \lg^{x^2-3x}$

10

$10^1=10\geq x^2-3x$

$0\geq x^2-3x-10$

$x^2-3x-10\leq 0$

$(x-5)(x+2)\leq 0$

5 -2

	$-\infty$		-2		5		$+\infty$
$x-5$	−	−		−	۰	+	
$x+2$	−	۰	+	+		+	
$(x-5)(x+2)$	+	۰	−	−	۰	+	

(ب) $D_g=[-2,5]$

$D_f\cap D_g=[-2,0)\cup(3,5]$

تمرین: مجموعه جواب $|x^2+1|>|x-2|-2x+1$ کدام است؟

۱) $(-2,1)$ ۲) $(-1,1)$ ۳) $(-1,2)$ ۴) $(1,2)$

شامل $x=0$ هستند

$x=0$ را در نامعادله بگذار

$|(0)^2+1|>|0-2|-2(0)+1$

$1>-1$

$x=0$ در نامعادله صدق نکرد لذا گزینه‌های موردار غلط هستند

و جواب گزینه ۴

تمرین: حاصل $[\sqrt{x^2+1}]+[\frac{x^2+2}{x^2+1}]$ کدام است؟ (x عدد صحیح مثبت) مفهوم $[x]$

۱) $x+1$ ۲) x ۳) $x+2$ ۴) ۲

به عدد صحیح مثبت دلخواه مثل $x=2$ تبدیل کن:

$$\left[\frac{2^2+2=6}{2^2+1=5}=1,2\right]+\left[\sqrt{2^2+1=5}=2,\cdots\right]$$

$$1 + 2 = 3$$

آزمینه‌ای در رشته‌ای که $x=2$ به هم ۳ بدست آید: فقط گزینه ۱

تمرین: اگر $\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}=\frac{x}{(x^2-2x+1)}$ باشد، $A+B$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

روش کلاسیک:

$$\frac{A(x-1)+B}{(x-1)^2}=\frac{x}{(x-1)^2}$$

$$Ax-A+B=1x$$

بود ثابت

ی سیم ۲ طرف برابرند پس ضریب x سمت چپ باید یک باشد مثل سمت راست

$A=1$

و طرف راست عدد ثابت نداریم، طرف چپ هم نباید عدد ثابت داشته باشیم.

$$-A+B=0 \rightarrow A=B$$

$A=1$

$B=1$

$A+B=2$

روش سریع:

$$\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}=\frac{x}{x^2-2x+1}$$

$x=2$

$$\frac{A}{2-1}+\frac{B}{(2-1)^2=1}=\frac{2}{4-4+1}$$

$A+B=2$ تر نیه ۲

راه سریع:

$x=1 \rightarrow 2-1=A$ ، $A=1$

$x=1$ ، $1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$

تمرین: اگر $2x-\frac{1}{x}=A$ باشد، حاصل $x^3-\frac{1}{8x^3}$ کدام است؟

حال بیایید با $x=1$ که همون $A=1$ شده کدام گزینه $\frac{7}{8}$ را میده

فقط گزینه ۳

۱) $A^3+\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{A^3+3A}{4}$ ۳) $\frac{A^3+6A}{8}$ ۴) $A^3-\frac{3}{2}$

حل با اتحاد کلاس دهم

$2x-\frac{1}{x}=A \longrightarrow x^3-\frac{1}{8x^3}=?$

دو طرف تقسیم بر ۲

$x-\frac{1}{2x}=\frac{A}{2}$

۲ طرف به توان ۳ با دستور *

$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

$*(a-b)^3=a^3-b^3-3ab(a-b)$

$\left(x-\frac{1}{2x}\right)^3=\left(\frac{A}{2}\right)^3$

$x^3-\frac{1}{8x^3}-3\times\frac{1}{2x}\left(x-\frac{1}{2x}\right)=\frac{A^3}{8}$ ، $x-\frac{1}{2x}=\frac{A}{2}$

$x^3-\frac{1}{8x^3}-\frac{3}{2}A=\frac{A^3}{8} \rightarrow x^3-\frac{1}{8x^3}=\frac{A^3}{8}+\frac{3}{2}A=\frac{A^3+6A}{8}$

گزینه ۳

تعیین علامت

نام ریشه در عبارات جبری:
جایی که تابع به محور x ها می خورد
نام دیگر ریشه: صفر معادله است

$y=f(x) \rightarrow y=0 \rightarrow \begin{cases} x=a \\ x=b \\ x=c \end{cases}$ ۳ صفر دارد، ۳ تا ریشه دارد.

a ریشه ساده — b ریشه مکرر مرتبه فرد — c ریشه مکرر مرتبه زوج

$y=x$: $x=0$ ۱ بار
$y=x^3$: $x.x.x=0$ $x=0$ ۳ بار
$y=x^2$: $x.x=0$ $x=0$ ۲ بار ریشه مضاعف

مثبت بودن تابع: بالای محور x ها بودن
منفی بودن تابع: زیر محور x ها بودن
صفر شدن تابع: ریشه دادن
پاره محور x ها خوردن یا مماس شدن

نکته:
یکی از روشهای حل معادله تبدیل معادله به تساوی دو تابع قابل رسم است
هر دو تابع را در یک دستگاه مختصات می کشیم تعداد نقاط برخورد تعداد ریشه ها است.
مثال: معادله $2^x - x^2 = 0$ چند ریشه دارد؟ ۳ تا
$2^x = x^2$
$y_1 = x^2$
$y_2 = 2^x$

۱/ $y=ax+b$
$0=ax+b \rightarrow x=-\frac{b}{a}$ ریشه ساده

۲/ $y=ax^2+bx+c$
$\Delta=b^2-4ac$
$\Delta>0$ ۲ ریشه ساده x_1, x_2
$\Delta=0$ یک ریشه مضاعف
$\Delta<0$ ریشه ندارد

۳/ $y=x^2-a^2$
$0=x^2-a^2 \quad 0=(x+a)(x-a) \quad x=\pm a$ ریشه ساده
$y=x^2-a^2$ ، $-a$ ، a

$|x-a|=0$ مثل $x=a$ مماس

۴/ $y=(x-a)^{2n}$
$0=(x-a)^{2n} \rightarrow x=a$ ریشه مکرر مرتبه زوج
$y=(x+3)^2=0 \quad (x+3)(x+3)=0 \quad x=-3$ ۲ بار (مضاعف)

۵/ $y=(x-a)^{2n+1}$ $x=a$ ریشه مکرر مرتبه فرد
$y=(x+1)^3=0 \rightarrow x=-1$ ۳ بار
$y=(x+1)^3$ ، -1

۶/ (حالت) $\begin{cases} \sin x=\pm 1 \\ \cos x=\pm 1 \end{cases}$ ریشه مضاعف
$y=1$ ، $y=-1$
$y=1$ ، $y=-1$

نحوه تعیین علامت سریع: ریشه های صورت و مخرج را یافته آن ها را به ترتیب از کوچک به بزرگ در جدول می نویسیم و نام آن ها را روی سر شان یادداشت می کنیم. یک عدد بزرگتر از بزرگترین ریشه در نظر گرفته به کل عبارت داده علامت را در اولین خانه سمت راست زیر $+\infty$ می نویسیم و در ریشه های ساده و مکرر مرتبه فرد علامت را عوض می کنیم ولی در ریشه های مضاعف و مرتبه زوج وقتی علامت را عوض می کنیم

عبارت $P=\frac{(x^2+3)(x+1)(x+3)^2(x-4)^3|x|}{(x-6)^{22}}$ در چه بازه‌ای بالای محور x هاست؟ در چه بازه‌ای مثبت است.

خط $y=0$

$y=-3$

$x^2+3=0 \rightarrow x^2=-3$ ریشه ندارد.

$x+1=0 \rightarrow x=-1$ ریشه ساده

$(x+3)^2=0 \rightarrow x=-3$ ریشه مضاعف

$(x-4)^3=0 \rightarrow x=4$ ریشه فرد

$(x-6)^{22}=0 \rightarrow x=6$ ریشه زوج

$|x|=0 \rightarrow x=0$ مثل مضاعف

نامنفی‌ها (مثبت یا صفر) $(\ )^{2k}$ $|\ |$ $\sqrt[2k]{\ }$

$y=x^2$ $y=|x|$ $y=\sqrt{x}$

x	$-\infty$	-3 مضاعف	-1 ساده	0 مضاعف	4 فرد	6 زوج	7 مثل	$+\infty$
P		+	+	−	−	+	ت.ن	+

شکل در بازه $x\in(-\infty,-3)\cup(-3,-1)\cup(-1,0)\cup(0,4)\cup(6,+\infty)$ بالای محور x هاست.

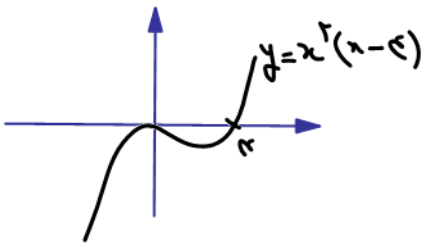
سوال: جواب نامعادله $P<0$ کدام است؟ $x\in(-1,4)-\{0\}$

سوال: جواب نامعادله $x^3-4x^2<0$ کدام است؟

$x^3-4x^2=0 \rightarrow x^2(x-4)=0 \rightarrow \begin{cases} x^2=0 \rightarrow x=0 & \text{مضاعف زوج} \\ x-4=0 \rightarrow x=4 & \text{ساده} \end{cases}$

x	$-\infty$	0 مضاعف	4 ساده	7 مثل	$+\infty$
$x^3-4x^2<0$		−	−	+	
$x^2(x-4)<0$					

جواب $x\in(-\infty,4)-\{0\}$



x	$-\infty$	-1 مضاعف	$-\frac{1}{3}$ ساده	4 فرد	$+\infty$
$\frac{(3x+1)(x+1)^2}{(x-4)^3}$		+	+	− ت.ن	+

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$ ساده	6 مثل	7 ساده	$+\infty$
$\frac{3x+1}{x-6}$		+	− ت.ن		+

Homework (1)

۱ مساحت ناحیهٔ محدود به نمودارهای دو تابع $y = \sqrt{x^۲ - ۴x + ۴}$ و $y = \frac{۱}{۲}x + ۲$، کدام است؟

۱) ۸
۲) ۹
۳) ۱۰
۴) ۱۲

جاهای خالی داده‌شده را با عبارت مناسب کامل نمایید.

۲ نقاط برخورد نمودار تابع با محور ..... را صفرهای تابع می‌نامیم.

۳ اگر سه نقطه $A(a\ ,\ ۲a + ۱)$، $B(۳\ ,\ -۱)$ و $C(۲\ ,\ ۴)$ روی یک خط راست قرار گیرند، مقدار a کدام است؟

۱) $\frac{۷}{۱۳}$
۲) $\frac{۷}{۱۲}$
۳) $\frac{۱۳}{۷}$
۴) $\frac{۱۲}{۷}$

۴ مثلث ABC با مختصات رئوس $A(۳\ ,\ ۲)$، $B(-۱\ ,\ ۳)$ و $C(۱\ ,\ ۰)$ مفروض است. نوع مثلث ABC کدام است؟

۱) متساوی‌الاضلاع
۲) قائم‌الزاویه
۳) متساوی‌الساقین
۴) هیچ‌کدام

۵ اگر نقطه $A(۶ - x\ ,\ x + ۲)$ در ناحیه اول قرار داشته باشد، چند مقدار طبیعی برای x یافت می‌شود؟

۱) ۵
۲) ۶
۳) ۷
۴) ۸

۶ اگر فاصله $A(m\ ,\ -۱)$ و $B(۴\ ,\ ۷)$ برابر ۸ باشد، فاصله دو نقطه $C(m\ ,\ ۷)$ و $D(۱\ ,\ m - ۱)$ چقدر است؟

۱) ۵
۲) ۳
۳) ۶
۴) ۴

۷ اگر دو ضلع مجاور یک مربع خطوط $L : ۳x + my = ۰$ و $L' : ۲x + (m - ۵)y = \frac{۱۳}{۲}$ باشند، مختصات نقطه برخورد L و L' کدام است؟

۱) $(۱ , -\frac{۳}{۲})$
۲) $(\frac{۳}{۲} , -۱)$
۳) $(-۱ , \frac{۳}{۲})$
۴) $(-\frac{۳}{۲} , -۱)$

۸ اگر $A(۲ , ۵)$، $B(۲ , ۳)$ و $C(-۱ , ۵)$ سه رأس مثلثی باشند، نوع مثلث کدام است؟

۱) متساوی‌الاضلاع
۲) متساوی‌الساقین
۳) قائم‌الزاویه
۴) متساوی‌الساقین قائم‌الزاویه

۹ فاصلهٔ نقطهٔ تلاقی دو خط $y = ۲x + ۲$ و $y = ۳x - ۳$، از مبدأ مختصات کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۲}$
۲) $۳\sqrt{۲}$
۳) ۱۲
۴) ۱۳

۱۰ اگر $A(۲, ۵)$، $B(۲, ۳)$ و $C(-۱, ۵)$ سه رأس مثلثی باشند، آن مثلث چه نام دارد؟

۱) متساوی‌الساقین
۲) قائم‌الزاویه
۳) متساوی‌الاضلاع
۴) متساوی‌الساقین قائم‌الزاویه

۱۱ اگر x نقطه‌ای روی محور xها باشد به‌طوری‌که فاصله‌اش از نقطهٔ $\sqrt{۲}$ کمتر از $\sqrt{۸}$ باشد، حدود x کدام است؟

۱) $۰ < x < ۴\sqrt{۲}$
۲) $۰ < x < ۳\sqrt{۲}$
۳) $-\sqrt{۲} < x < ۳\sqrt{۲}$
۴) $-\sqrt{۲} < x < ۴\sqrt{۲}$

۱۲ شیب خطی که محور xها را با طول -۴ و محور عرض‌ها را با عرض ۲ قطع می‌کند، کدام است؟

۱) -۲
۲) $\frac{۱}{۲}$
۳) $-\frac{۱}{۲}$
۴) ۲

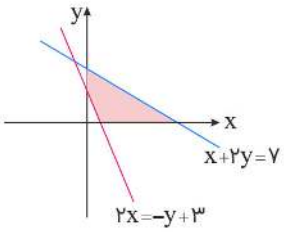
۱۳ دو نقطه روی نیمساز ربع اول و سوم وجود دارد که فاصلهٔ آن تا نقطهٔ $A(۲ , ۰)$ برابر $\sqrt{۱۰}$ می‌باشد. مجموع عرض‌های دو نقطهٔ موردنظر کدام است؟

۱) ۳
۲) -۱
۳) ۲
۴) ۴

۱۴ اگر شیب خط گذرا از دو نقطهٔ $A(k , k + ۱)$ و $B(۲ , k)$ منفی باشد، حدود k کدام است؟

۱) $k > ۲$
۲) $k < ۲$
۳) $k > -۲$
۴) $k < ۳$

۱۵ باتوجه‌به شکل زیر، مساحت قسمت رنگی کدام است؟



۱) ۱۰

۲) ۱۵

۳) ۲۰

۴) ۵

۱۶ مجموع مقادیر a کدام باشد تا فاصله نقطه $A(a\ ,\ ۱)$ از $B(۳\ ,\ ۲)$ برابر $\sqrt{۲}$ شود؟

۱) ۶

۲) ۸

۳) ۴

۴) ۲

۱۷ اگر $A(۳\ ,\ ۲)$ و $B(-۱\ ,\ -۱)$ رئوس غیرمجاور یک مربع باشند و این مربع داخل یک دایره محاط شده باشد، در این صورت مساحت فضای بین دایره و مربع کدام است؟ $(\pi \simeq ۳)$

۱) ۵

۲) ۵/۲۵

۳) ۶

۴) ۶/۲۵

۱۸ مساحت مثلث ABC با مختصات رئوس $A(۳\ ,\ ۱)$، $B(-۲\ ,\ ۰)$ و $C(-۱\ ,\ ۲)$ کدام است؟

۱) ۵

۲) ۱۰

۳) ۵/۵

۴) ۴/۵

۱۹ اگر مختصات دو سرِ قطر یک دایره $A(۳\ ,\ ۲)$ و $B(-۲\ ,\ ۴)$ باشد، مساحت دایره کدام است؟

۱) ۷π

۲) $۷/۵\pi$

۳) $۷/۲۵\pi$

۴) $۷/۷۵\pi$

۲۰ به ازای کدام مقدار m، سه نقطهٔ $A(۴\ ,\ m)$، $B(۳\ ,\ -۲)$ و $C(m+۴\ ,\ ۴)$ روی یک خط راست قرار می‌گیرند؟

۱) -۴

۲) ۱

۳) ۱ و -۴

۴) هیچ مقدار

۲۱ مقدار m چقدر باشد تا خط به معادلهٔ $۲y + x = ۳$ از نقطهٔ $A(m\ ,\ m-۱)$ عبور کند؟

۱) $\frac{۴}{۳}$

۲) $\frac{۵}{۳}$

۳) $\frac{۱}{۳}$

۴) $\frac{۲}{۳}$

۲۲ اگر نقطهٔ $A(۲m+۱\ ,\ m-۱)$ در ناحیهٔ اول و بالای خط $y = x$ قرار گیرد، حدود m کدام است؟

۱) $m > ۱$

۲) $m > ۰$

۳) $m > ۲$

۴) $m \in \varnothing$

۲۳ خط d دایره‌ای به مرکز $(a\ ,\ b)$ را در دو نقطه $(۴\ ,\ ۰)$ و $(۲\ ,\ -۲)$ قطع کرده است. اگر فاصله مرکز دایره تا خط d، ۳ باشد، حاصل $a+b$ کدام است؟

۱) ۳
۲) ۲
۳) ۱
۴) -۲

۲۴ اگر A و B دو نقطه با مختصات $(n+۳\ ,\ ۲)$ و $(۵\ ,\ ۴)$ باشند و $AB=۳$ باشد، آنگاه حاصل‌جمع حالت‌های ممکن برای n چند است؟

۱) ۲
۲) ۴
۳) ۸
۴) ۵

۲۵ رئوس مثلث متساوی‌الاضلاع ABC روی دایره‌ای به مرکز $(-۴\ ,\ ۳)$ قرار دارد. اگر $A(۳\ ,\ -۲)$ و $C(x\ ,\ y)$ باشد، x کدام می‌تواند باشد؟ (فاصله محل برخورد میانه‌ها از رئوس مثلث برابرند)

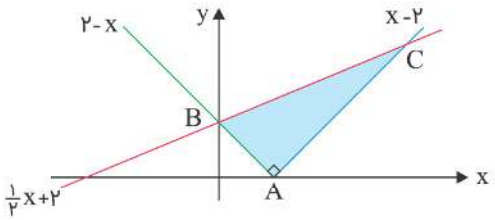
۱) $۳+\sqrt{۳}$
۲) $-۲\pm\sqrt{۳}$
۳) $۲\sqrt{۳}$
۴) $\pm\sqrt{۳}$

پاسخ Homework (1)

۱ گزینه ۴

$$y_۱ = \sqrt{x^۲ - ۴x + ۴} = \sqrt{(x-۲)^۲} = |x-۲|$$
$$y_۲ = \frac{۱}{۲}x + ۲$$

$$|x-۲| = \begin{cases} x-۲ & ; x \geq ۲ \\ -x+۲ & ; x < ۲ \end{cases}$$



$$\begin{cases} A = (۲, ۰) \\ x-۲ = \frac{۱}{۲}x + ۲ \Rightarrow \frac{۱}{۲}x = ۴ \Rightarrow x = ۸ \Rightarrow C = (۸, ۶) \\ ۲-x = \frac{۱}{۲}x + ۲ \Rightarrow \frac{۳}{۲}x = ۰ \Rightarrow x = ۰ \Rightarrow B = (۰, ۲) \end{cases}$$

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^۲ + (y_B - y_A)^۲} = \sqrt{(۰-۲)^۲ + (۲-۰)^۲} = ۲\sqrt{۲}$$
$$AC = \sqrt{(x_C - x_A)^۲ + (y_C - y_A)^۲} = \sqrt{(۸-۲)^۲ + (۶-۰)^۲} = ۶\sqrt{۲}$$
$$S_{\overset{\Delta}{ABC}} = \frac{AB \times AC}{۲} = \frac{۲\sqrt{۲} \times ۶\sqrt{۲}}{۲} = ۱۲$$

۲ xها

۳ گزینه ۳

$$m_{AB} = m_{BC} \Rightarrow \frac{۲a+۱+۱}{a-۳} = \frac{۴+۱}{۲-۳} \Rightarrow \frac{۲a+۲}{a-۳} = -۵$$
$$\Rightarrow -۵a + ۱۵ = ۲a + ۲ \Rightarrow ۷a = ۱۳ \Rightarrow a = \frac{۱۳}{۷}$$

۴ گزینه ۴

$$\left.\begin{aligned} AB &= \sqrt{(۳+۱)^۲+(۲-۳)^۲} = \sqrt{۱۶+۱} = \sqrt{۱۷} \\ AC &= \sqrt{(۳-۱)^۲+(۲-۰)^۲} = \sqrt{۴+۴} = \sqrt{۸} \\ BC &= \sqrt{(۱+۱)^۲+(۰-۳)^۲} = \sqrt{۴+۹} = \sqrt{۱۳} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{مختلف‌الاضلاع}$$

$AB^۲ \neq AC^۲ + BC^۲ \Rightarrow$ (قائم‌الزاویه نیست)

۵ گزینه ۱

$$\begin{cases} ۶-x>۰ \Rightarrow x<۶ \\ x+۲>۰ \Rightarrow x>-۲ \end{cases} \xrightarrow{\cap} -۲<x<۶$$

اعداد طبیعی موجود در این بازه ۵ تا است.

۶ گزینه ۱

$$|AB| = ۸ \Rightarrow \sqrt{(m-۴)^۲+(-۱-۷)^۲} = ۸ \Rightarrow (m-۴)^۲ = ۰ \Rightarrow m = ۴$$

$$m = ۴ \Rightarrow C(۴\,,\,۷)\,,\, D(۱\,,\,۳)$$

$$|CD| = \sqrt{(۴-۱)^۲+(۷-۳)^۲} = ۵$$

۷ گزینه ۱

دو ضلع مجاور مربع بر هم عمودند، پس ضرب شیب‌های دو خط L و L' برابر ۱- است.

$$\frac{-۳}{m} \times \frac{-۲}{m-۵} = -۱ \Rightarrow m(m-۵) = -۶ \Rightarrow m^۲ - ۵m + ۶ = ۰ \Rightarrow m = ۲\,,\,۳$$

اگر $m = ۲$ باشد:

$$\begin{matrix} ۳\times \\ ۲\times \end{matrix} \begin{cases} ۳x+۲y=۰ \\ ۲x-۳y=\frac{۱۳}{۲} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۹x+۶y=۰ \\ ۴x-۶y=۱۳ \end{cases}$$

$$\xrightarrow{+} ۱۳x = ۱۳ \Rightarrow x = ۱ \Rightarrow y = -\frac{۳}{۲}$$

مختصات نقطه برخورد دو خط L و L' برابر $(۱\,,\,-\frac{۳}{۲})$ است.

به ازای $m = ۳$ مختصات نقطهٔ برخورد به‌صورت $(\frac{۱۳}{۸}, \frac{-۱۳}{۸})$ است که در گزینه‌ها وجود ندارد.

۸ گزینه ۳

$$AB = \sqrt{(۲-۲)^۲ + (۳-۵)^۲} = ۲$$

$$AC = \sqrt{(-۱-۲)^۲ + (۵-۵)^۲} = ۳$$

$$BC = \sqrt{(-۱-۲)^۲ + (۵-۳)^۲} = \sqrt{۱۳}$$

$$BC^۲ = AC^۲ + AB^۲ \Rightarrow ۱۳ = ۹ + ۴$$ مثلث قائم‌الزاویه

۹ گزینه ۴

$$y_۱ = y_۲ \Rightarrow ۳x - ۳ = ۲x + ۲ \Rightarrow \begin{cases} x = ۵ \\ y = ۱۲ \end{cases}$$

نقطهٔ تلاقی دو خط: $A(۵\ ,\ ۱۲)$

$$OA = \sqrt{x^۲ + y^۲} \Rightarrow OA = \sqrt{۲۵ + ۱۴۴} = ۱۳$$

۱۰ گزینه ۲

$$AB = \sqrt{(۲-۲)^۲ + (۳-۵)^۲} = ۲$$

$$AC = \sqrt{(-۱-۲)^۲ + (۵-۵)^۲} = ۳$$

$$BC = \sqrt{(-۱-۲)^۲ + (۵-۳)^۲} = \sqrt{۱۳}$$

مثلث قائم‌الزاویه:

$$BC^۲ = AC^۲ + AB^۲ \Rightarrow ۱۳ = ۹ + ۴$$

۱۱ گزینه ۳

$$|x - \sqrt{۲}| < \sqrt{۸} \Rightarrow -\sqrt{۸} < x - \sqrt{۲} < \sqrt{۸}$$

$$\xrightarrow{+\sqrt{۲}} -\sqrt{۸} + \sqrt{۲} < x < \sqrt{۸} + \sqrt{۲} \Rightarrow -\sqrt{۲} < x < ۳\sqrt{۲}$$

۱۲ گزینه ۲

خط محور xها را با طول -۴ قطع می‌کند، درنتیجه نقطهٔ $(-۴, ۰)$ رو خط قرار دارد.

خط محور yها را با عرض ۲ قطع می‌کند، درنتیجه نقطهٔ $(۰, ۲)$ رو خط قرار دارد.

$$\Rightarrow \text{شیب} : m = \frac{y_۲ - y_۱}{x_۲ - x_۱} = \frac{۲ - ۰}{۰ - (-۴)} = \frac{۲}{۴} = \frac{۱}{۲}$$

۱۳ گزینه ۳

نقاطی را که روی خط $y = x$ قرار می‌گیرند، به صورت $M(a\ ,\ a)$ در نظر می‌گیریم:

$$|AM| = \sqrt{۱۰} \Rightarrow \sqrt{(a-۲)^۲ + (a-۰)^۲} = \sqrt{۱۰} \Rightarrow a^۲ - ۴a + ۴ + a^۲ = ۱۰$$

$$\Rightarrow ۲a^۲ - ۴a - ۶ = ۰ \xrightarrow{\div ۲} a^۲ - ۲a - ۳ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} a = -۱ \\ a = ۳ \end{cases}$$

پس نقاط موردنظر $M_۱(-۱\ ,\ -۱)$ و $M_۲(۳\ ,\ ۳)$ می‌باشند. مجموع عرض‌ها برابر ۲ خواهد بود.

۱۴ گزینه ۲

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{k - (k+۱)}{۲ - k} < ۰ \Rightarrow \frac{۱}{k-۲} < ۰ \Rightarrow k - ۲ < ۰ \Rightarrow k < ۲$$

۱۵ گزینه ۱

$$x + ۲y = ۷ \Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \Rightarrow y = \frac{۷}{۲} \\ y = ۰ \Rightarrow x = ۷ \end{cases}$$

$$۲x = -y + ۳ \Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \Rightarrow y = ۳ \\ y = ۰ \Rightarrow x = \frac{۳}{۲} \end{cases}$$

مساحت رنگی:

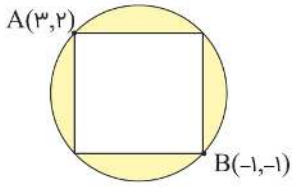
$$\left(\frac{\frac{۷}{۲} \times ۷}{۲}\right) - \left(\frac{۳ \times \frac{۳}{۲}}{۲}\right) = \frac{۴۹}{۴} - \frac{۹}{۴} = ۱۰$$

۱۶ گزینه ۱

$$\sqrt{(a-۳)^۲ + (۱-۲)^۲} = \sqrt{۲} \Rightarrow \sqrt{a^۲ - ۶a + ۱۰} = \sqrt{۲} \Rightarrow a^۲ - ۶a + ۱۰ = ۲$$

$$\Rightarrow a^۲ - ۶a + ۸ = ۰ \Rightarrow (a-۲)(a-۴) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} a = ۲ \\ a = ۴ \end{cases} \Rightarrow ۲ + ۴ = ۶$$

۱۷ گزینه ۴

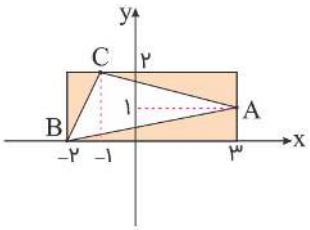


$$AB = \sqrt{(۳+۱)^۲ + (۲+۱)^۲} = \sqrt{۱۶+۹} = ۵$$

$$\left.\begin{array}{l} S_{\text{مربع}} = \dfrac{(AB)^۲}{۲} = \dfrac{۲۵}{۲} \\ S_{\text{دایره}} = \pi(\dfrac{AB}{۲})^۲ = ۳(\dfrac{۵}{۲})^۲ = \dfrac{۷۵}{۴} \end{array}\right\} \Rightarrow S_{\text{رنگی}} = \frac{۷۵}{۴} - \frac{۲۵}{۲} = ۶/۲۵$$

۱۸ گزینه ۴

مثلث را رسم می‌کنیم:



$$S_{\overset{\Delta}{ABC}} = \text{مساحت مستطیل} - \text{مساحت رنگی}$$

$$= (۵ \times ۲) - (۱ + ۲ + ۲/۵) = ۱۰ - ۵/۵ = ۴/۵$$

۱۹ گزینه ۳

$$AB = \sqrt{(۳+۲)^۲ + (۲-۴)^۲} = \sqrt{۲۵+۴} = \sqrt{۲۹}$$

$$r = \frac{AB}{۲} = \frac{\sqrt{۲۹}}{۲} \Rightarrow S_{\text{دایره}} = \pi r^۲ = \pi \times (\frac{\sqrt{۲۹}}{۲})^۲ = \frac{۲۹\pi}{۴} = ۷/۲۵\pi$$

۲۰ گزینه ۳

$$m_{AB} = m_{AC} \Rightarrow \frac{m+۲}{۴-۳} = \frac{m-۴}{۴-m-۴} \Rightarrow \frac{m+۲}{۱} = \frac{m-۴}{-m}$$

$$\Rightarrow m^۲ + ۳m - ۴ = ۰ \Rightarrow (m-۱)(m+۴) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} m = ۱ \\ m = -۴ \end{cases}$$

۲۱ گزینه ۲

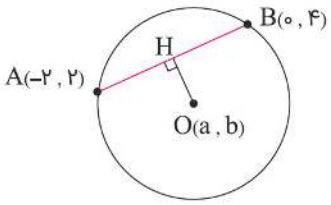
$$۲(m-۱)+m=۳ \Rightarrow ۳m=۵ \Rightarrow m=\frac{۵}{۳}$$

۲۲ گزینه ۴

چون A در ناحیهٔ اول است، پس طول و عرض آن مثبت می‌باشد و ازطرفی بالای خط $y=x$ قرار دارد، درنتیجه عرض آن بیشتر از طول آن است.

$$m-۱>۲m+۱>۰ \Rightarrow \begin{cases} m-۱>۲m+۱ \Rightarrow m<-۲ \\ ۲m+۱>۰ \Rightarrow m>-\frac{۱}{۲} \end{cases} \xrightarrow{\cap} \varnothing$$

۲۳ گزینه ۲



نقطه H وسط پاره‌خط AB است:

$$H=\frac{A+B}{۲}=(-۱\,,\,۳)$$

$$AH=\sqrt{(-۲+۱)^۲+(۳-۲)^۲}=\sqrt{۲}\,,\ OH=۳$$

$$\xrightarrow{\text{قضیه فیثاغورس}}\ OA=\sqrt{۲+۹}=\sqrt{۱۱}$$

$$OH=\sqrt{(a+۱)^۲+(b-۳)^۲}=۳ \ \Rightarrow\ a^۲+۲a+۱+b^۲-۶b+۹=۹$$

$$\Rightarrow\ a^۲+۲a+b^۲-۶b=-۱\quad (۱)$$

$$OA=\sqrt{(a+۲)^۲+(b-۲)^۲}=\sqrt{۱۱}\ \Rightarrow\ a^۲+۴a+۴+b^۲-۴b+۴=۱۱$$

$$\Rightarrow\ a^۲+۴a+b^۲-۴b=۳\quad (۲)$$

$$\xrightarrow{\text{جایگذاری ۱ در ۲}}\ ۲a+۲b=۴\ \Rightarrow\ a+b=۲$$

۲۴ گزینه ۲

با داشتن نقاط A و B، پاره‌خط AB را به‌صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (۵\ ,\ ۴) - (n+۳\ ,\ ۲) = (۲-n\ ,\ ۲)$$

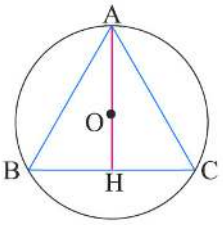
حال طول پاره‌خط AB را توسط فرمول زیر به دست می‌آوریم و برابر ۳ قرار می‌دهیم:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(۲-n)^۲ + (۲)^۲} = ۳ \Rightarrow (۲-n)^۲ + ۲^۲ = ۹ \Rightarrow n^۲ - ۴n - ۱ = ۰$$

$$\Rightarrow \Delta = ۱۶ + ۴ = ۲۰ \Rightarrow n = \frac{۴ \pm \sqrt{۲۰}}{۲}$$

حاصل‌جمع حالت‌های ممکن برای n برابر است با ۴.

۲۵ گزینه ۱



$$OA = \sqrt{(۳-۳)^۲ + (-۲+۴)^۲} = ۲$$

$$\xrightarrow{OA=OC} OC = \sqrt{(x-۳)^۲ + (y+۴)^۲} = ۲ \quad (۱)$$

مرکز دایره همان محل برخورد میانه‌های مثلث است، بنابراین:

$$AH = \frac{۳}{۲}OA = \frac{۳}{۲} \times ۲ = ۳$$

اگر طول ضلع مثلث را a درنظر بگیریم، طبق قضیه فیثاغورس داریم:

$$AC^۲ = HC^۲ + AH^۲ \ \Rightarrow\ a^۲ - (\frac{a}{۲})^۲ = ۹ \ \Rightarrow\ a = \sqrt{۱۲}$$

$$\Rightarrow\ AC = \sqrt{(x-۳)^۲ + (y+۲)^۲} = \sqrt{۱۲} \quad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۲)\ ,\ (۱)} (x-۳)^۲ + (y+۲)^۲ = (x-۳)^۲ + (y+۴)^۲ + ۸$$

$$\Rightarrow\ y = -۵ \ \Rightarrow\ x = \pm\sqrt{۳} + ۳$$

Homework (2)

۱ مقدار m چقدر باشد تا عبارت $x^۲ + ۴mx + ۱۶$ مربع کامل شود؟

۱) ± ۴ ۲) ± ۲

۳) $\pm \sqrt{۲۰}$ ۴) -۱

۲ اگر کمترین مقدار تابع $y = ۵x^۲ - bx + ۷$ برابر ۲ باشد، آنگاه b کدام است؟

۱) $۱۰ , -۱۰$ ۲) ۳

۳) -۳ ۴) $-۵ , ۵$

۳ مجموع ضرایب معادلهٔ درجه دومی صفر است، یکی از جواب‌های معادله کدام است؟

۱) -۱ ۲) صفر

۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) ۱

۴ کدام‌یک از معادله‌های زیر ریشهٔ مضاعف دارد؟

۱) $۴x^۲ - ۱۲x + ۹ = ۰$ ۲) $۳x^۲ + ۴x - ۲ = ۰$

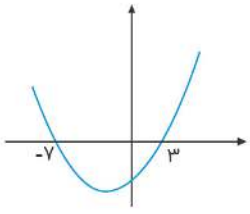
۳) $x^۲ - ۲x + ۳ = ۰$ ۴) $x^۲ + ۳x - ۲ = ۰$

۵ محور تقارن سهمی به معادلهٔ $y = -۲x^۲ - ۵x + ۷$ کدام است؟

۱) $x = \frac{۵}{۲}$ ۲) $x = -\frac{۵}{۲}$

۳) $x = -\frac{۵}{۴}$ ۴) $x = \frac{۵}{۴}$

۶ در شکل زیر معادلهٔ محور تقارن کدام است؟



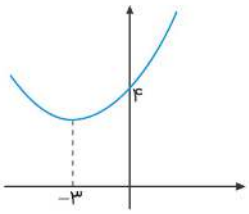
۱) $x = -۲$

۲) $x = -۴$

۳) $y = -۲$

۴) $y = -۴$

۷ اگر شکل زیر نمایش از سهمی $y = ۲x^۲ + bx + c$ باشد، حاصل $b + c$ کدام است؟



۱) ۴

۲) ۱۲

۳) ۱۶

۴) ۲۰

۸ قدرمطلق تفاضل ریشه‌های معادلهٔ $-۶x^۲ - ۵x - ۱ = ۰$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۵}$

۲) $\frac{۵}{۶}$

۳) $\frac{۲}{۵}$

۴) $\frac{۱}{۶}$

۹ اگر در معادلهٔ درجهٔ دوم $۸x^۲ - bx + ۲ = ۰$ تفاضل دو ریشه برابر صفر باشد، آنگاه b کدام است؟ $(b > ۰)$

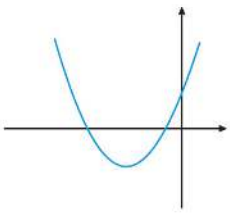
۱) ۴

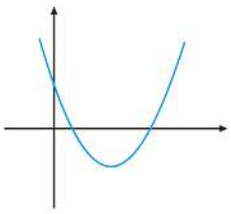
۲) ۸

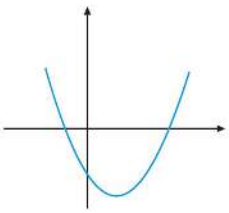
۳) ۲

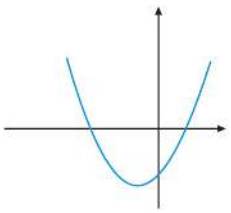
۴) ۶

۱۰ نمودار تابع $y = ۲x^۲ + ۴x - ۱$ کدام است؟

۱)


۲)


۳)


۴)


پاسخ Homework (2)

۱ گزینه ۲

عبارت درجه دوم وقتی مربع کامل می‌شود که دلتای آن مساوی صفر باشد، پس:

$$\Delta = b^۲ - ۴ac = (۴m)^۲ - ۴(۱)(۱۶) = ۱۶m^۲ - ۶۴ = ۰$$
$$m^۲ = ۴ \Rightarrow m = \pm ۲$$

۲ گزینه ۱

اگر در معادلهٔ سهمی $a > ۰$ باشد، سهمی در نقطهٔ رأس خود دارای کمترین مقدار است.

$$\text{طول رأس سهمی} : x = -\frac{b}{۲a} \Rightarrow x = -\frac{-b}{۱۰} = \frac{b}{۱۰}$$
$$\xrightarrow[\text{می‌کنیم}]{\text{در معادله جاگذاری}} ۲ = ۵(\frac{b}{۱۰})^۲ - b(\frac{b}{۱۰}) + ۷ \Rightarrow ۲ = \frac{b^۲}{۲۰} - \frac{b^۲}{۱۰} + ۷$$
$$\Rightarrow \frac{b^۲}{۲۰} - \frac{b^۲}{۱۰} = -۵ \Rightarrow \frac{b^۲(۱-۲)}{۲۰} = -۵ \Rightarrow \frac{-b^۲}{۲۰} = -۵ \Rightarrow b^۲ = ۱۰۰ \Rightarrow b = \pm ۱۰$$

۳ گزینه ۴

اگر مجموع ضرایب یک عبارت درجه دوم برابر با صفر باشند، یکی از ریشه‌ها $x = ۱$ است.

$$ax^۲ + bx + c = ۰ \xrightarrow{a+b+c=۰} x = ۱ : \text{یکی از ریشه‌ها}$$

۴ گزینه ۱

وقتی $\Delta = ۰$ شود، معادله ریشهٔ مضاعف خواهد داشت:

$$۱)\Delta = ۱۴۴ - ۴(۴)(۹) = ۱۴۴ - ۱۴۴ = ۰$$
$$۲)\Delta = ۱۶ - ۴(۳)(-۲) = ۱۶ + ۲۴ = ۴۰ > ۰ \quad \text{دو جواب}$$
$$۳)\Delta = ۴ - ۴(۱)(۳) = ۴ - ۱۲ = -۸ < ۰ \quad \text{جواب ندارد}$$
$$۴)\Delta = ۹ - ۴(۱)(-۲) = ۹ + ۸ = ۱۷ > ۰ \quad \text{دو جواب}$$

۵ گزینه ۳

در سهمی به معادلهٔ $y = ax^۲ + bx + c$ نقطه‌ای به طول $x = -\frac{b}{۲a}$ رأس سهمی است. خطی که از رأس سهمی به موازات محور عرض‌ها رسم می‌شود، محور تقارن سهمی است.

$$y = -۲x^۲ - ۵x + ۷ \Rightarrow x = -\frac{b}{۲a} \Rightarrow x = -\frac{(-۵)}{۲(-۲)} = -\frac{۵}{۴}$$

۶ گزینه ۱

می‌دانیم سهمی متقارن است و طول رأس سهمی در وسط ریشه‌ها قرار دارد و محور تقارن نیز از رأس می‌گذرد:

$$s(x, y) \Rightarrow x = \frac{-۷ + ۳}{۲} = -\frac{۴}{۲} = -۲ \Rightarrow x = -۲$$

۷ گزینه ۳

باتوجه‌به نقطهٔ رأس و $(۰, ۴)$ داریم:

$$\left.\begin{array}{l} y = ۲x^۲ + bx + c \xrightarrow{(۰,۴)} ۴ = ۰ + ۰ + c \Rightarrow c = ۴ \\ \text{طول رأس} : \frac{-b}{۲a} = \frac{-b}{۴} = -۳ \Rightarrow -b = -۱۲ \Rightarrow b = ۱۲ \end{array}\right\} \Rightarrow b + c = ۱۶$$

۸ گزینه ۴

بااستفاده‌از روش کلی حل معادلهٔ درجه دوم (روش Δ) داریم:

$$\Delta = b^۲ - ۴ac = (-۵)^۲ - ۴(-۶)(-۱) = ۲۵ - ۲۴ = ۱$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{۲a} \Rightarrow x_۱ = \frac{۵ + \sqrt{۱}}{۲(-۶)} = \frac{۶}{-۱۲} = -\frac{۱}{۲}$$

$$x_۲ = \frac{۵ - \sqrt{۱}}{۲(-۶)} = \frac{۴}{-۱۲} = -\frac{۱}{۳} \Rightarrow |x_۱ - x_۲| = |-\frac{۱}{۲} - (-\frac{۱}{۳})| = \frac{۱}{۶}$$

روش تستی: در معادلهٔ درجه دوم $ax^۲ + bx + c = ۰$، قدرمطلق تفاضل ریشه‌ها از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$\text{قدرمطلق تفاضل ریشه‌ها} = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \frac{۱}{۶}$$

۹ گزینه ۲

اگر تفاضل ریشه‌ها صفر باشد، آنگاه معادله دارای ریشهٔ مضاعف است، پس Δ صفر می‌باشد. در معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^۲ + bx + c = ۰$، Δ برابر است با:

$$\Delta = b^۲ - ۴ac$$

$$۸x^۲ - bx + ۲ = ۰$$

$$\Delta = (-b)^۲ - ۴(۸)(۲) = ۰ \Rightarrow b^۲ - ۶۴ = ۰ \Rightarrow b^۲ = ۶۴ \Rightarrow b = \pm ۸$$

طبق سؤال: $b = ۸$

۱۰ گزینه ۴

در سهمی داده‌شده، $y = ۲x^۲ + ۴x - ۱$، مختصات رأس سهمی عبارت است از:

$$x = -\frac{b}{۲a} = -\frac{۴}{۲(۲)} = -۱$$

$$y = ۲(-۱)^۲ + ۴(-۱) - ۱ = -۳$$

مختصات رأس سهمی : $(-۱, -۳)$

چون طول رأس سهمی برابر $x = -۱$ می‌باشد، بنابراین گزینه‌های "۲" و "۳" حذف می‌شوند. گزینهٔ "۱" نیز حذف می‌شود، زیرا محل تقاطع سهمی با محور yها، برابر -۱ می‌باشد و عددی منفی است، بنابراین پاسخ صحیح گزینهٔ "۴" می‌باشد.

Homework (3)

ریاضی

۱ دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{\sqrt{x-1}}{[x]-4}$ کدام است؟

۱) $\mathbb{R}-[4,5)$
۲) $[1,+\infty)-\{4\}$
۳) $[1,4]\cup[6,+\infty)$
۴) $[1,4)\cup[5,+\infty)$

حسابان

۲ مجموع ریشه‌های معادلهٔ $||x-1|-2|=1$ کدام است؟

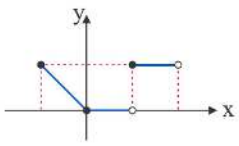
۱) ۲
۲) ۴
۳) ۶
۴) ۸

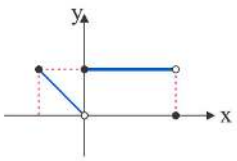
ریاضی

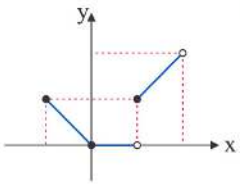
۳ حاصل $A=\frac{[-2/7]+[\frac{1}{4}]-[\sqrt{8}]}{[9]-[-0/3]+[0/8]}$ کدام است؟

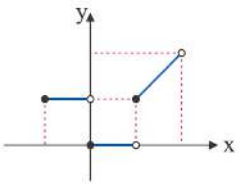
۱) $-\frac{1}{2}$
۲) $-\frac{3}{10}$
۳) $\frac{3}{10}$
۴) $\frac{1}{2}$

۴ نمودار $f(x) = x.[x]$ در بازهٔ $[-۱ , ۲)$ کدام است؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۵ معادلهٔ $[x - ۷] + [x + ۴] = ۹$ دارای مجموعه جواب $[a , b)$ می‌باشد. حداکثر مقدار $b + a$ کدام است؟

۱) ۱۳
۲) ۱۴
۳) ۱۵
۴) ۱۲

۶ مجموعهٔ جواب معادلهٔ $[۲x - ۹] + [۲x + ۳] = ۰$ به‌صورت $[a , b)$ می‌باشد، بیشترین مقدار $b - a$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$
۲) ۱
۳) $\frac{۳}{۲}$
۴) ۲

حسابان

۷ جواب نامعادله $|\frac{۲x - ۱}{x - ۳}| > ۱$ کدام است؟

۱) $\mathbb{R} - [-۲, \frac{۴}{۳}], x \neq ۳$
۲) $\mathbb{R} - (-۲, \frac{۴}{۳}), x \neq ۳$
۳) $[-۲, ۳)$
۴) $(-\infty, \frac{۴}{۳}]$

۸ در مجموعه جواب نامعادله $(x - ۴) \cdot |x + ۱| < ۳x - ۹$ چند عدد طبیعی وجود دارد؟

۱) ۲
۲) ۳
۳) ۵
۴) بی‌شمار

۹ تعداد ریشه‌های معادلهٔ $|x^۲ - ۲x| = ۲$ کدام است؟

۱) یک ریشه
۲) دو ریشه
۳) سه ریشه
۴) بدون ریشه

۱۰ در مجموعه جواب نامعادلهٔ $۲ < |۲x - ۱| < ۵$ چند عدد صحیح وجود دارد؟

۱) ۲
۲) ۱
۳) ۳
۴) بدون عدد صحیح

۱۱ به ازای هر $x < -۱$، حاصل $\sqrt{x^۲ + ۲x + ۱} - \sqrt{x^۲ - ۴x + ۴}$ کدام است؟

۱) ۳
۲) $۲x - ۱$
۳) -۳
۴) $-۲x + ۱$

۱۲ نسبت حاصل‌ضرب ریشه‌های معادله $||x - ۲| - ۳| = ۲$ به مجموع ریشه‌ها کدام است؟

۱) $\frac{-۴۸}{۷}$
۲) $\frac{-۶۳}{۸}$
۳) $\frac{۶۳}{۸}$
۴) $\frac{۴۸}{۷}$

پاسخ Homework (3)

ریاضی

۱ گزینه ۴

$$\left.\begin{array}{l} x-1\geq 0 \Rightarrow x\geq 1 \\ [x]-4=0 \Rightarrow [x]=4 \Rightarrow 4\leq x<5 \quad \text{ریشه‌های مخرج} \end{array}\right\} \Rightarrow D_f=[1\,,\,4)\cup[5\,,\,+\infty)$$

حسابان

۲ گزینه ۲

$$\begin{cases} |x-1|-2=1 \Rightarrow |x-1|=3 \Rightarrow \begin{cases} x-1=3 \Rightarrow x=4 \\ x-1=-3 \Rightarrow x=-2 \end{cases} \\ |x-1|-2=-1 \Rightarrow |x-1|=1 \Rightarrow \begin{cases} x-1=1 \Rightarrow x=2 \\ x-1=-1 \Rightarrow x=0 \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{مجموع ریشه‌ها} = 4+(-2)+2+0=4$$

ریاضی

۳ گزینه ۱

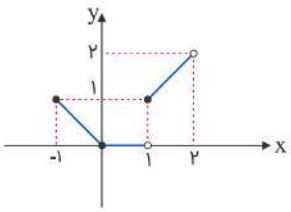
تابعی را که به هر عدد صحیح k خود همان عدد و به تمام اعداد میان دو عدد صحیح متوالی k و $k+1$، عدد صحیح k را نسبت می‌دهد، تابع جزء صحیح می‌نامند که با $f(x)=[x]$ نمایش می‌دهند.

$$\begin{cases} -3\leq -2/7<-2 \Rightarrow [-2/7]=-3 \\ 0\leq \frac{1}{4}<1 \Rightarrow [\frac{1}{4}]=0 \\ 2\leq \sqrt{8}<3 \Rightarrow [\sqrt{8}]=2 \\ -1\leq -0/3<0 \Rightarrow [-0/3]=-1 \\ 0\leq 0/8<1 \Rightarrow [0/8]=0 \end{cases} \Rightarrow A=\frac{-3+0-2}{9-(-1)+0}=\frac{-5}{10}=-\frac{1}{2}$$

۴ گزینه ۳

$$-۱ \le x < ۲ \Rightarrow \begin{cases} -۱ \le x < ۰ \Rightarrow [x] = -۱ : f(x) = -x \\ ۰ \le x < ۱ \Rightarrow [x] = ۰ : f(x) = ۰ \\ ۱ \le x < ۲ \Rightarrow [x] = ۱ : f(x) = x \end{cases}$$

$(-۱, ۱), (۰, ۰), (۱, ۱), (۲, ۲)$



۵ گزینه ۱

$$[x] + ۴ + [x] - ۷ = ۹ \Rightarrow ۲[x] - ۳ = ۹$$
$$\Rightarrow ۲[x] = ۱۲ \Rightarrow [x] = ۶$$
$$\Rightarrow ۶ \le x < ۷ \Rightarrow x \in [۶ , ۷)$$

$$b + a = ۷ + ۶ = ۱۳$$

۶ گزینه ۱

$$[۲x] + ۳ + [۲x] - ۹ = ۰$$

$$۲[۲x] = ۶ \Rightarrow [۲x] = ۳ \Rightarrow ۳ \le ۲x < ۴$$
$$\Rightarrow \frac{۳}{۲} \le x < ۲ \Rightarrow x \in [\frac{۳}{۲} , ۲)$$

$$b - a = ۲ - \frac{۳}{۲} = \frac{۱}{۲}$$

۷ گزینه ۱

$$\frac{|۲x-۱|}{|x-۳|} > ۱ \xrightarrow{x\neq ۳} |۲x-۱| > |x-۳|$$

به توان ۲ برسانید:

$$(۲x-۱)^۲ > (x-۳)^۲ \quad (I)$$

$$۴x^۲ - ۴x + ۱ > x^۲ - ۶x + ۹$$

$$\Rightarrow ۳x^۲ + ۲x - ۸ > ۰ \Rightarrow x < -۲ \cup x > \frac{۴}{۳} \quad (II)$$

x		-۲		$\frac{۴}{۳}$	
$۳x^۲+۲x-۸$	+	۰	−	۰	+
		ج			ج

$$\xrightarrow{(I)\cap(II)} (-\infty,-۲) \cup (\frac{۴}{۳},+\infty) - \{۳\} \text{ یا } \mathbb{R} - [-۲,\frac{۴}{۳}] \ , x\neq ۳$$

۸ گزینه ۲

چون منظور سؤال اعداد طبیعی نامعادله هستند، پس باید محدوده $x > ۰$ را در نظر بگیرید، درنتیجه عبارت داخل قدر مطلق مثبت خواهد شد و قدر مطلق برداشته می‌شود:

x		۱		۵	
$x^۲-۶x+۵$	+	۰	−	۰	+
			ج		

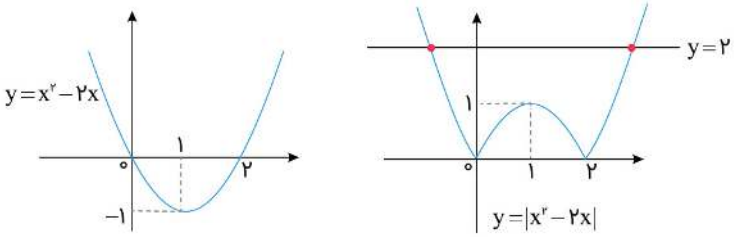
$$(x-۴)\cdot(x+۱) < ۳x-۹ \Rightarrow x^۲ - ۳x - ۴ < ۳x - ۹$$

$$x^۲ - ۶x + ۵ < ۰$$

$$(۱,۵) \Rightarrow \text{اعداد طبیعی} = \{۲,۳,۴\}$$

۹ گزینه ۲

روش هندسی:



$|x^۲ - ۲x| = ۲ \Rightarrow$ دو ریشه دارد.

۱۰ گزینه ۱

$$۲ < |۲x - ۱| < ۵ \Rightarrow \begin{cases} ۲ < ۲x - ۱ < ۵ \Rightarrow \frac{۳}{۲} < x < ۳ \\ \text{یا} \\ -۵ < ۲x - ۱ < -۲ \Rightarrow -۲ < x < -\frac{۱}{۲} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{مجموعه جواب} = (-۲ , -\frac{۱}{۲}) \cup (\frac{۳}{۲} , ۳)$$

اعداد صحیح در جواب نامعادله: $\{-۱ , ۲\}$

۱۱ گزینه ۳

$$A = \sqrt{(x+۱)^۲} - \sqrt{(x-۲)^۲}$$

$$A = |x+۱| - |x-۲| \xrightarrow[\text{تعیین علامت}]{x<-۱} A = -(x+۱) + (x-۲)$$

$$A = -x - ۱ + x - ۲ = -۳$$

۱۲ گزینه ۲

$$|x-۲|-۳=۲ \Rightarrow |x-۲|=۵ \Rightarrow \begin{cases} x-۲=۵ \Rightarrow x_۱=۷ \\ x-۲=-۵ \Rightarrow x_۲=-۳ \end{cases}$$

$$|x-۲|-۳=-۲ \Rightarrow |x-۲|=۱ \Rightarrow \begin{cases} x-۲=۱ \Rightarrow x_۳=۳ \\ x-۲=-۱ \Rightarrow x_۴=۱ \end{cases}$$

حاصل‌ضرب ریشه‌ها $= ۷(-۳)(۳)(۱) = -۶۳$

حاصل‌جمع ریشه‌ها $= ۷+(-۳)+(۳)+۱ = ۸$

نسبت $= \frac{-۶۳}{۸}$

تابع

زوج مرتب

زوج مرتب به دوتایی (a,b) گفته می‌شود که a را مؤلفه اول و b را مؤلفه دوم می‌نامیم. دقت کنید که در زوج مرتب، ترتیب مؤلفه‌ها مهم است، یعنی زوج مرتب (a,b) با زوج مرتب (b,a) فرق دارد.

هر زوج مرتب، یک نقطه را در صفحه مشخص می‌کند و دو زوج مرتب، وقتی با هم برابرند که مؤلفه‌های اولشان با هم و مؤلفه‌های دومشان نیز با هم برابر باشند.

$$(a,b)=(c,d) \Leftrightarrow a=c\,,\,b=d$$

تمرین: اگر دو زوج مرتب $(x-y,1)$ و $(3,2x+3y)$ یک نقطه را در صفحه مشخص کنند، حاصل $3x+2y$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۹

$$\begin{cases} x-y=3 \\ 2x+3y=1 \end{cases} \xrightarrow{+} 3x+2y=4$$

تمرین: زوج مرتب (a^2,b^2) با کدام زوج مرتب نمی‌تواند برابر باشد؟

۱) $(-a^2,-b^2)$ ۲) (b^2,a^2) ۳) $(4-2a^2,-1-3b^2)$ ۴) (a,b)

$a=b=0 \Rightarrow (a^2,b^2)=(-a^2,-b^2)$

$a=b=1 \Rightarrow (a^2,b^2)=(b^2,a^2)$

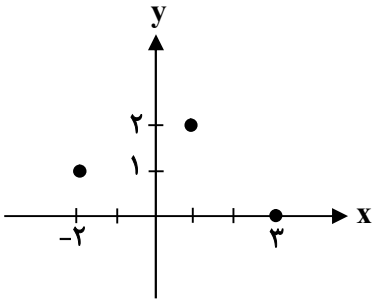
$a=b=1 \Rightarrow (a^2,b^2)=(a,b)$

رابطه

برای نشان دادن ارتباط و وابستگی بین دو مجموعه از رابطه استفاده می‌شود و آن را معمولاً با حرف R نشان می‌دهند. رابطه‌ها را می‌توان به شکل زوج مرتب، جدول، نمودار ون و نمودار دکارتی نشان داد.

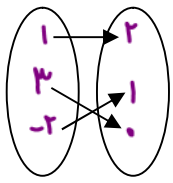
(زوج مرتب) $R=\{(1,2),(3,0),(-2,1)\}$

(مؤلفه اول)	۱	۳	-۲
(مؤلفه دوم)	۲	۰	۱



(نمودار دکارتی یا نمایش هندسی)

نمودار ون



(مؤلفه اول) (مؤلفه دوم)

تمرین: اگر $R=\{(x,y)\mid x,y\in N, xy=10\}$ باشد، رابطه R چند عضو دارد؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

$R = \{(۱,۱۰),(۱۰,۱),(۲,۵),(۵,۲)\}$

تمرین: رابطه‌ی $R = \{(x,y) \mid x,y \in N, ۲x+y \le ۷\}$ ، دارای چند زوج مرتب است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور ۸۸)

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۹

$R = \{(۱,۱),(۱,۲),(۱,۳),(۱,۴),(۱,۵),(۲,۱),(۲,۲),(۲,۳),(۳,۱)\}$

تابع

گفتیم که رابطه‌ها را می‌توان به شکل‌های مختلف مثل زوج مرتب، نمودار ون و ... نشان داد. بدانید که تابع را هم می‌توانیم به همان شکل‌ها نشان دهیم. با هم ببینیم:

تعریف تابع از نظر زوج‌های مرتب

تابع مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب است که در آن مؤلفه‌های اول متمایز باشند، پس اگر دو زوج مرتب پیدا شوند که مؤلفه‌های اول مساوی داشتند، آن رابطه تابع نیست، مگر این‌که مؤلفه‌های دوم آن زوج مرتب‌ها نیز برابر باشند:

اگر $(x,y_۱) \in f , (x,y_۲) \in f \Rightarrow y_۱ = y_۲$

مثال ۶: کدام‌یک از رابطه‌های زیر تابع نیست؟

$f_۱ = \{(۰,۱),(-۲,۳),(۴,۲)\}$

$f_۲ = \{(۱,۲),(۳,۴),(۱,۲)\}$ ($f_۲$ در مجموعه‌ها تکرار مجاز است.)

$f_۳ = \{(۲,۳),(۱,-۴),(۲,\sqrt{۹})\}$ ($\sqrt{۹} = ۳$ ولی دیتِ دوم ۹ برابر ± ۳ است.)

$f_۴ = \{(-۱,۲)\}$ یک نقطه تابع است

$f_۵ = \{\}$ تابع است

$f_۶ = \{(۱,۲),(۲,۲),(۱,۵)\}$

هر خط موازی محور y‌ها تابع را باید حداکثر در یک نقطه قطع کند (یا یک نقطه یا هیچ نقطه)

تمرین: اگر رابطه $\{(a-۱,۲),(۵,a-۲),(a-۲,b+۳),(۳,۵),(۵,۳)\}$ تابع باشد $b+a$ چه‌قدر است؟

۱) ۲ ۲) ۵ ۳) ۷ ۴) ۱۰

$a-۲=۳ \Rightarrow a=۵$

$b+۳=۵ \Rightarrow b=۲$

$a+b=۷$

تمرین: رابطه $\{(۳,m^۲),(۲,۱),(-۲,m),(۳,m+۲),(m,۴)\}$ به ازای کدام مقدار m، یک تابع است؟(سراسری تجربی خارج ۸۵)

۱) ۲- ۲) ۱- ۳) ۲ ۴) هیچ‌مقدار m

$m^۲ = m+۲$

$m^۲ - m - ۲ = ۰$

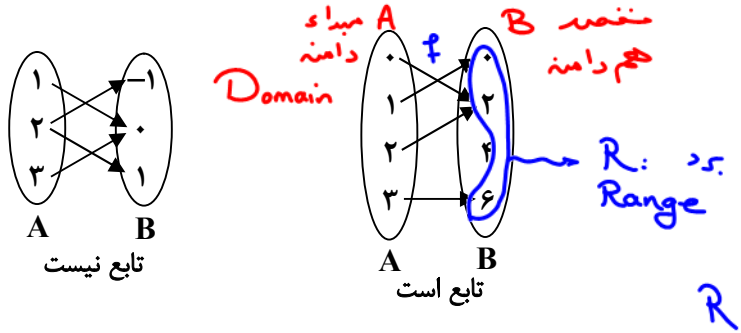
$m=-۱$ $m=۲$ غ ق ق

$m=2$ نباید باشه چون دو زوج $(2,4)$ و $(2,1)$ را درست می‌کند.

$m=-1$ هیچ دو زوج مرتبی با مؤلفه اول یکسان برابر نخواهند داشت و رابطه تابع است.

تعریف تابع از نظر نمودار ون

یک رابطه بین مجموعه A و مجموعه B که با نمودار ون نمایش داده می‌شود، وقتی تابع است که از هر مؤلفه مجموعه A (مؤلفه اول) فقط و فقط یک فلش خارج شود نه بیشتر و همه اعضای A به بازی گرفته شوند و هیچ عضوی از A نباشد که از آن فلش خارج نشود A همان دامنه‌ی تابع است.

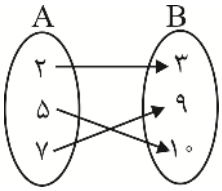


$f: A \longrightarrow B$

اف تابعی است از A به B که A دامنه و B هم دامنه است که هم دامنه یا بردش یا مجموعه‌ای بزرگتر از برد.

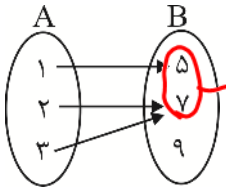
$R \subseteq B$

در نمودار پیکانی یک تابع، مجموعه‌ی همه‌ی عضوهای مجموعه‌ی اول، دامنه‌ی تابع و مجموعه‌ی همه‌ی عضوهایی از مجموعه‌ی دوم که پیکان به آن‌ها وارد شده، برد تابع است.



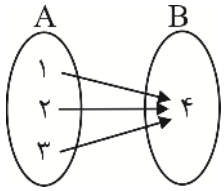
دامنه‌ی تابع $=\{2,5,7\}$

برد تابع $=\{3,9,10\}$



دامنه‌ی تابع $=\{1,2,3\}$

برد تابع $=\{5,7\}$



دامنه‌ی تابع $=\{1,2,3\}$

برد تابع $=\{4\}$

تابع ثابت

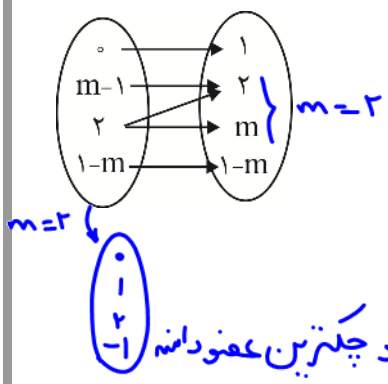
تمرین: با توجه به تابع مربوط به نمودار مقابل، کوچک‌ترین عضو دامنه کدام است؟

۱) -1

۲) صفر

۳) ۱

۴) ۲



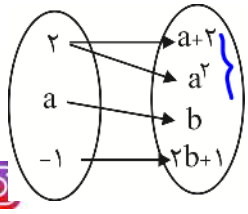
کوچکترین عضو دامنه $=-1$

گزینه ۱

تمرین: اگر نمودار مقابل نمایش یک تابع باشد، مقدار $a+b$ کدام می‌تواند باشد؟

۱) صفر

۲) -1



$a^2=a+2$

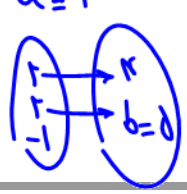
$a^2-a-2=0 \rightarrow a=-1$

$a=2$

$b=-1$

$2 \rightarrow 1$

$-1 \rightarrow b=2b+1$



تابع نیست

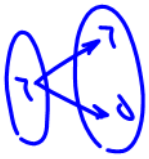
گزینه ۲

www.samansalamian.ir

۳) ۲

۴) -۲

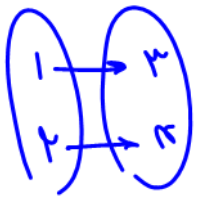
تمرین: در کدام‌یک از گزینه‌های زیر، یک تابع با دامنه و برد داده‌شده وجود ندارد؟



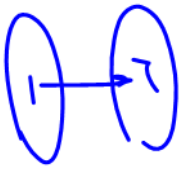
۱) دامنه‌ی آن دو عضو و برد آن تک عضوی باشد.

۲) دامنه‌ی آن تک عضوی و برد آن دو عضوی باشد.

۳) دامنه‌ی آن دو عضوی و برد آن دو عضوی باشد.

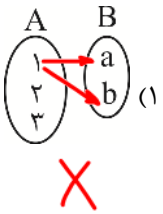


۴) دامنه‌ی آن تک عضوی و برد آن تک عضوی باشد.

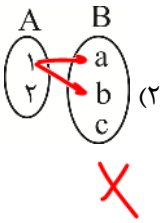


تمرین: در گزینه‌های زیر اگر از تمام اعضای **A** به اعضای **B** پیکان رسم کنیم، کدام گزینه همیشه نشان‌دهنده‌ی یک تابع است؟

۱)



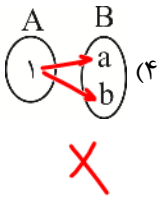
۲)



۳)

تابع است و تابع ثابت است

۴)



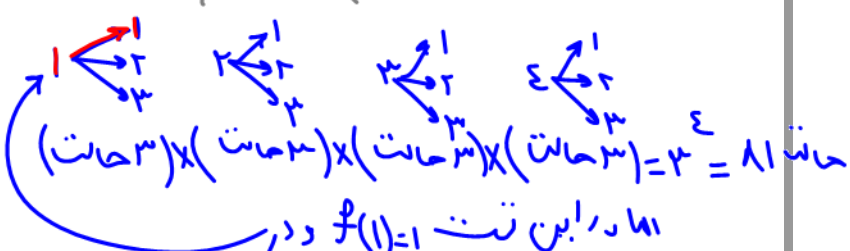
تمرین: از مجموعه‌ی $A=\{1,2,3,4\}$ چند تابع به مجموعه‌ی $B=\{1,2,3\}$ می‌توانیم تعریف کنیم به شرطی که $f(1)=1$ باشد؟

۱) ۱۶ ۲) ۶۴ ۳) ۲۷ ۴) ۸۱

اگر از مجموعه A که m عضو دارد به مجموعه B که n عضو دارد بخواهیم تابع تعریف کنیم تعداد توابع: n^m است.

$A=\{1,2,3,4\}\ m=4 \qquad B=\{1,2,3\}\ n=3$

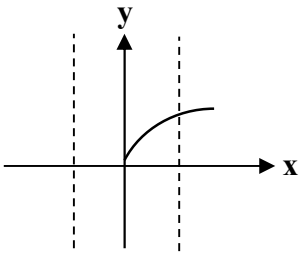
تعداد توابع بدون هیچ شرطی $= n^m = 3^4 = 81$



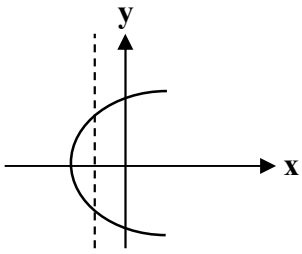
فقط یک حالت داریم: $1\times3\times3\times3=27$ جواب

تعریف تابع از نظر نمودار دکارتی (هندسی)

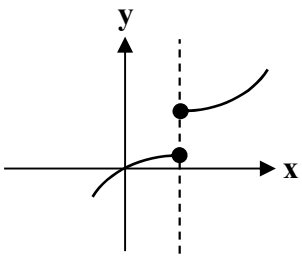
نمودار دکارتی وقتی نشان‌دهنده یک تابع است که هر خط عمودی (موازی محور yها) نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کند، نه بیشتر.



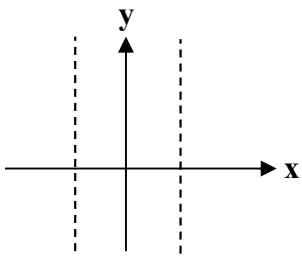
تابع است.
چون هر خط به موازات محور y، حداکثر در یک نقطه نمودار را قطع می‌کند.



تابع نیست.
چون خطی به موازات محور y در بیش از یک نقطه، نمودار را قطع می‌کند.

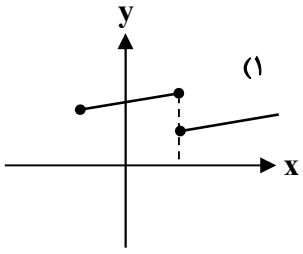


تابع نیست.
چون خطی به موازات محور y در بیش از یک نقطه نمودار را قطع می‌کند.

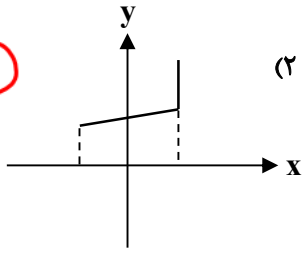


تابع است
(تهی) چون هر خطی به موازات محور yها، در هیچ جا چیزی را قطع نمی‌کند.
تهی یک تابع است.

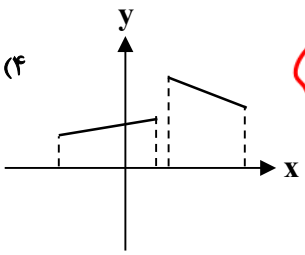
تمرین: کدام شکل نمودار یک تابع است؟



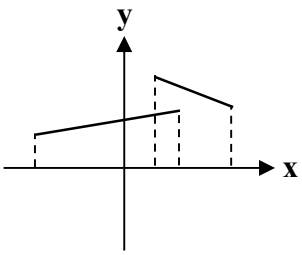
(۱)



(۲)

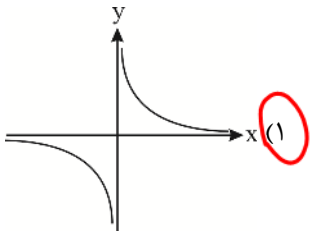


(۳)

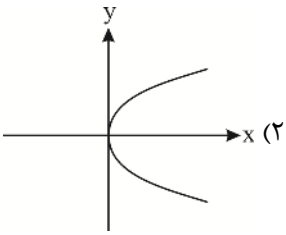


(۴)

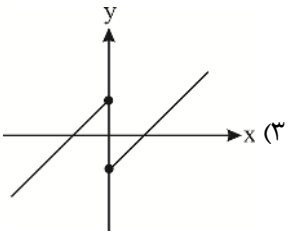
تمرین: کدام‌یک از نمودارهای زیر یک تابع را نشان می‌دهد؟



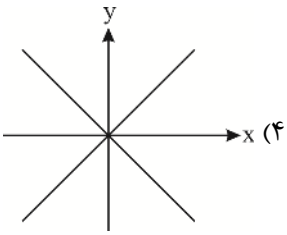
(۱)



(۲)



(۳)



(۴)

۴) تعریف تابع از نظر ضابطه

ضابطه $y = f(x)$ وقتی نشان‌دهنده‌ی یک تابع است که به ازای هر x حداکثر یک y به‌دست آید.

توی این مدل از سوال‌ها xای رو انتخاب کن به ازای اون مشکوک به تولید چند تا y بشی. در واقع برای اثبات تابع نبودن از مثال نقض استفاده می‌کنیم.

۱- اگر عبارت yدار توی قدرمطلق و یا درون پرانتز توان زوج بود کاری کن عبارت قدرمطلقی و یا توان زوج با یک عدد مثبت برابر بشه:

الف) $|2y-1|+x-2=0$

ب) $(y-1)^2+x^2=1$

۲- وقتی چند y با توان‌های فرد و مختلف کنار هم هستند، xای را انتخاب کنید که سمت راست تساوی صفر بشه:

پ) $y^3-y=2x-1$

۳- اگر جمع چند عبارت نامنفی برابر صفر بشه، باید تک‌تک آن‌ها را برابر صفر قرار دهیم.

ت) $(y-1)^2+x^2=0$

ث) $(y^2-1)^2+x^2=0$

ج) $x^2+y^4+2y^3+y^2+4x+4=0$

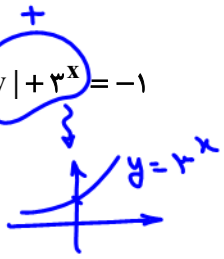
معمولاً روابطی که در آن‌ها $|y|$، y^{2n} یا $[y]$ و یا $\sin y$، $\cos y$، $\tan y$ و یا $\cot y$ دیده می‌شه تابع نیستند.

چ) $x=\sin y$

ح) $[y]+x^{۲}-۱=۰$

۴- اگر جمع چند عبارت نامنفی و یا چند عبارت همواره مثبت برابر یک عدد منفی بشه به رابطه‌ای برخورد کردیم که بیانگر تهی است و می‌دانیم تهی یک تابع است.

خ) $|y|+۳^{x}=-۱$



در (خ) و (د) طرف چپ عبارتی مثبت است که هرگز برابر عدد منفی نخواهد شد. هیچ زوج مرتب (x,y) در رابطه (خ) صدق نمی‌کند. مجموعه جواب ∅ است و ∅ تابع است.

د) $\sqrt{x-۱}+y^{۲}=-۱$

تمرین: کدام رابطه یک تابع است؟

۱) $y^{۳}-۳y^{۲}+x=۰$ ۲) $y+y^{۳}=x^{۳}+۱$ ۳) $|y-۱|+x=۰$ ۴) $xy^{۲}-x=۱$

گزینه‌های ۱ و ۳ و ۴ رو تحلیل می‌کنیم و ثابت می‌کنیم که به ازای یک x بیش از یک مقدار واسه y بدست میاد پس تابع نیستن.

۱) $y^{۳}-۳y^{۲}+x=۰\xrightarrow{x=۰}y^{۳}-۳y^{۲}=۰\Rightarrow y^{۲}(y-۳)=۰\Rightarrow\begin{cases}y^{۲}=۰\Rightarrow y=۰\\y-۳=۰\Rightarrow y=۳\end{cases}$

۳) $|y-۱|+x=۰\xrightarrow{x=-۱}|y-۱|-۱=۰\Rightarrow|y-۱|=۱\Rightarrow y-۱=\pm۱\Rightarrow y=۲,y=۰$

۴) $xy^{۲}-x=۱\xrightarrow{x=۱}y^{۲}-۱=۱\Rightarrow y^{۲}=۲\Rightarrow y=\pm\sqrt{۲}$

Homework

۱ حداقل چند عضو از مجموعه $f = \{(x,y)|x,y \in \mathbb{Z}, x = \frac{۷۲}{y^۲ - ۱}\}$ حذف شود تا f، یک تابع باشد؟

۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۵

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۲ حداقل چند عضو از مجموعهٔ $f = \{(x,y)|x,y \in \mathbb{Z}, x = \frac{۳۰}{۱ + |y|}\}$ حذف شود تا f، یک تابع باشد؟

۱) ۷
۲) ۶
۳) ۵
۴) ۴

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

۳ رابطه $f = \{(a, x+y), (b, m^۲)(a, m^۲ - ۱)(b, x-y)(a, ۴)\}$ یک تابع است. مقدار $x^۲ + y^۲$ کدام است؟

۱) ۲/۵
۲) ۲۰/۵
۳) ۲۴
۴) ۴۲

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۴۰۲

۴ فرض کنید رابطهٔ f به‌صورت $f = \{(a, a^۲); a = ۰, ۱, ۲\} \cup \{(a, a+b) | a, b \in \{۰, ۱, ۲\}\}$ توصیف شده باشد، تعداد عناصر f، کدام است؟ (با تغییر)

۱) ۸
۲) ۹
۳) ۱۰
۴) ۱۲

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۴۰۰

۵ اگر $f = \{(۱, x-۲y), (۲, ۳), (۹, ۵), (۱, -۷), (۹, x+y)\}$ یک تابع باشد، مقدار $x^۲ + y^۲$ چندبرابر $-x - ۴y$ است؟

۱) ۲
۲) ۱
۳) -۱
۴) -۲

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۴۰۱

۶ اگر رابطهٔ $\{(۳, a+۲b), (۵, ۴), (۷, ۲), (۳, ۷), (۵, ۲a-b)\}$ یک تابع باشد، $a^۲ - b^۲$ کدام است؟

۱) ۳
۲) ۴
۳) ۵
۴) ۶

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۳۹۸

۷ رابطهٔ $A = \{(۳, m^۲), (۲, ۱), (-۳, m), (-۲, m), (۳, m+۲), (m, ۴)\}$ به ازای کدام مقدار m یک تابع است؟

۱) -۲
۲) -۱
۳) ۲
۴) هیچ مقدار m

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۵

پاسخ Homework

۱ گزینه ۲

چون x عدد صحیح است پس ۷۲ باید بر $y^۲ - ۱$ بخش‌پذیر باشد از طرفی y هم باید عدد صحیح باشد:

$$y^۲ = ۰, ۴, ۹, ۲۵ \Rightarrow y = ۰, \pm ۲, \pm ۳, \pm ۵$$

$$\Rightarrow f = \{(-۷۲, ۰), (۲۴, ۲), (۲۴, -۲), (۹, ۳), (۹, -۳), (۳, ۵), (۳, -۵)\}$$

با حذف حداقل ۳ عضو تابع خواهیم داشت.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۲ گزینه ۱

برای اینکه x عددی صحیح باشد باید ۳۰ بر $|y| + ۱$ بخش‌پذیر باشد و y هم عددی صحیح باشد:

$$|y| + ۱ = ۱, ۲, ۳, ۵, ۶, ۱۰, ۱۵, ۳۰$$
$$\Rightarrow |y| = ۰, ۱, ۲, ۴, ۵, ۹, ۱۴, ۲۹$$
$$\Rightarrow y = \pm ۰, \pm ۱, \pm ۲, \pm ۴, \pm ۵, \pm ۹, \pm ۱۴, \pm ۲۹$$

$$f = \{(۳۰, ۰), (۱۵, \pm ۱), (۱۰, \pm ۲), (۶, \pm ۴), (۵, \pm ۵), (۳, \pm ۹), (۲, \pm ۱۴), (۱, \pm ۲۹)\}$$

برای اینکه f تابع باشد، باید حداقل ۷ عضو از f را حذف کنیم.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

۳ گزینه ۲

$$(a, ۴)\,(a, x + y)\,(a, m^۲ - ۱) \Rightarrow x + y = m^۲ - ۱,\ ۴ = x + y,\ m^۲ - ۱ = ۴ \Rightarrow m^۲ = ۵$$

$$(b, m^۲), (b, x - y) \Rightarrow x - y = m^۲$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - y = ۵ \\ x + y = ۴ \end{cases} \Rightarrow ۲x = ۹ \Rightarrow x = \frac{۹}{۲},\ y = -\frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow x^۲ + y^۲ = \frac{۸۱}{۴} + \frac{۱}{۴} = \frac{۸۲}{۴} = ۲۰/۵$$

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۴۰۲

۴ گزینه ۲

$$f = \{(۰, ۰), (۱, ۱), (۲, ۴)\} \cup \{(۰, ۰ + ۰), (۰, ۰ + ۱), (۰, ۰ + ۲), (۱, ۱ + ۰), (۱, ۱ + ۱), (۱, ۱ + ۲), (۲, ۲ + ۰), (۲, ۲ + ۱), (۲, ۲ + ۲)\}$$
$$f = \{(۰, ۰), (۰, ۱), (۰, ۲), (۱, ۱), (۱, ۲), (۱, ۳), (۲, ۲), (۲, ۳), (۲, ۴)\}$$

f دارای ۹ عضو است.

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۴۰۰

۵ گزینه ۳

زوج مرتب‌های $(1, x-2y)$ و $(1, -7)$ دارای مؤلفه‌های اول یکسان هستند، پس برای تابع بودن این رابطه، باید مؤلفه‌های دوم هم برابر باشند:

$$x-2y=-7$$

به همین ترتیب برای $(9, x+y)$ و $(9, 5)$ داریم:

$$x+y=5$$

از حل دو معادله دو مجهول فوق داریم:

$$\left.\begin{matrix} x-2y=-7 \\ x+y=5 \end{matrix}\right\} \Rightarrow -3y=-12 \Rightarrow y=4 \Rightarrow x=1$$

خواستهٔ سؤال را می‌یابیم:

$$\frac{x^2+y^2}{-x-4y}=\frac{1+16}{-1-16}=\frac{17}{-17}=-1$$

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۴۰۱

۶ گزینه ۳

$$\begin{cases}(3, a+2b)\in f \\ (3,7)\subset f\end{cases} \xrightarrow{\text{تابع است } f} a+2b=7$$

$$\begin{cases}(5,4)\in f \\ (5, 2a-b)\in f\end{cases} \xrightarrow{\text{تابع است } f} 2a-b=4$$

حال برای به دست آوردن a و b، دستگاه $\begin{cases}a+2b=7 \\ 2a-b=4\end{cases}$ را حل می‌کنیم:

$$\times(-2)\begin{cases}a+2b=7 \\ 2a-b=4\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-2a-4b=-14 \\ 2a-b=4\end{cases}$$

$$-5b=-10 \Rightarrow b=2$$

$$a+2b=7 \xrightarrow{b=2} a+4=7 \Rightarrow a=3$$

$$\Rightarrow a^2-b^2=9-4=5$$

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۳۹۸

۷ گزینه ۲

شرط تابع بودن یک رابطه این است که هیچ دو زوج مرتب متمایزی نباید مؤلفهٔ اول برابر داشته باشند و اگر مؤلفهٔ اول آن‌ها باهم برابر بود مؤلفه‌های دوم هم باهم برابر باشند.

$$A=\{(3,m^2),(2,1),(-3,m),(-2,m),(3,m+2),(m,4)\}$$

$$(3,m^2),(3,m+2)\in A \xrightarrow{\text{شرط تابع بودن}} m^2=m+2 \Rightarrow m^2-m-2=0$$

$$\Rightarrow (m-2)(m+1)=0 \Rightarrow \begin{cases}m=2 \\ m=-1\end{cases}$$

مقادیر به‌دست‌آمده برای m را بررسی می‌کنیم تا مطمئن شویم رابطه به تابع تبدیل شده است.

$$m=2 \Rightarrow A=\{(3,4),(2,1),(-3,2),(-2,2),(3,4),(2,4)\}$$

به ازای $m=2$ دو زوج مرتب $(2,1)$ و $(2,4)$ در رابطه وجود دارد، پس تابع نیست.

$$m=-1 \Rightarrow A=\{(3,1),(2,1),(-3,-1),(-2,-1),(3,1),(-1,4)\}$$

شرایط تابع بودن برقرار است، پس $m=-1$ تنها مقدار قابل‌قبول برای m است.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۵

دامنه و برد توابع

• دامنه: مجموعه همه‌ی مؤلفه‌های اول زوج‌های مرتب تشکیل‌دهنده‌ی هر تابع را دامنه آن تابع می‌نامند.

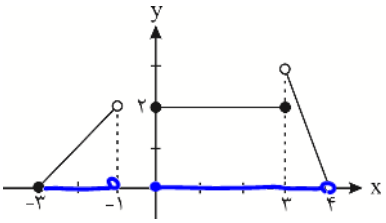
مثلاً اگر $f=\{(1,2),(0,1),(2,3)\}$ باشد، دامنه‌ی f که آن را با D_f نمایش می‌دهند برابر مجموعه‌ی $\{0,1,2\}$ است.

• برد: مجموعه همه‌ی مؤلفه‌های دوم زوج‌های مرتب تشکیل‌دهنده‌ی هر تابع را برد آن تابع می‌نامند.

مثلاً اگر $f=\{(1,2),(0,1),(2,3)\}$ باشد، برد f که آن را با R_f نمایش می‌دهند برابر مجموعه‌ی $\{2,1,3\}$ است.

نکته: تعداد اعضای دامنه با تعداد اعضای برد برابر یا از آن بیشتر است.

تمرین: اگر نمودار مقابل مربوط به تابع $y=f(x)$ باشد، آن‌گاه دامنه‌ی تابع کدام است؟



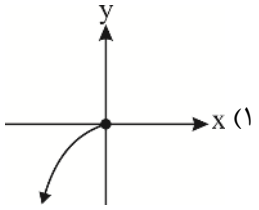
۱) $[0,3)$

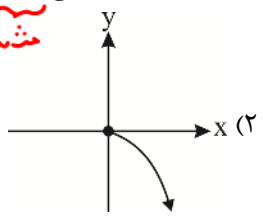
۲) $[-3,-1)\cup[0,4)$

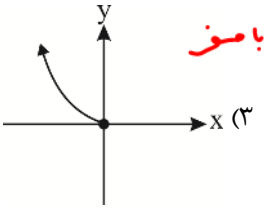
۳) $[-3,-1)\cup[0,3]$

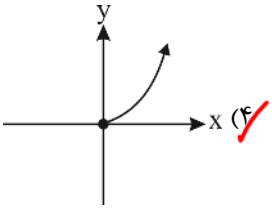
۴) $[-3,6)$

تمرین: در کدام تابع زیر، دامنه و برد، هر دو اعداد حقیقی نامنفی‌اند؟

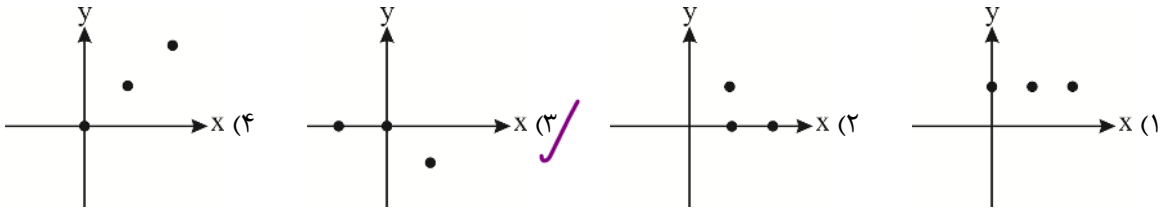
۱)


۲)


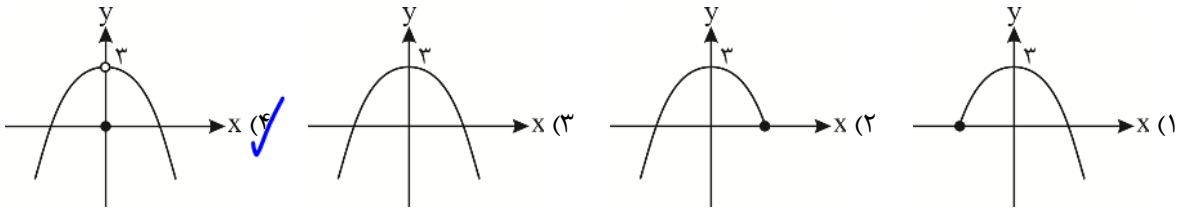
۳)


۴)


تمرین: در کدام نمودار زیر، تابع داده‌شده با دامنه‌ی ۳ عضوی و برد ۲ عضوی است؟

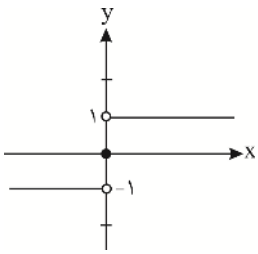


تمرین: برد کدام تابع زیر، بازه‌ی $(-\infty,3]$ نیست؟



$R_f = (-\infty,3)$

تمرین: اگر نمودار $y = f(x)$ به صورت مقابل باشد، برد آن کدام است؟



۱) $[-1,1]$

۲) $(-1,1)$

۳) $\{-1,0,1\}$ برد ی ۳ خط‌اره دارد.

۴) $\{-1,1\}$

قواعد تعیین دامنه

الف) توابع چند جمله‌ای: دامنه این توابع برابر با $\mathbf{R}$ است.

مثال ۲۳:

$$\begin{cases} f(x)=x^2-5x+6 \\ f(x)=x+1 \\ f(x)=2 \\ f(x)=x^3+4x+10 \end{cases}$$

ب) توابع کسری: اگر ضابطه f کسری باشد (تابع گویا)، xهایی که مخرج را صفر می‌کنند، قابل قبول نیستند.

$$f(x)=\frac{g(x)}{h(x)} \qquad D_f=\mathbf{R}-\{x \mid h(x)=0\}=\mathbf{R}-\{\text{ریشه‌های مخرج}\}$$

۱) $f(x)=\dfrac{x-1}{x-1} \Rightarrow x-1=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{1\}$

۲) $f(x)=\dfrac{x+5}{x^2-1} \Rightarrow x^2-1=0 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1 \Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{\pm 1\}$

۳) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+4x-5} \Rightarrow x^2+4x-5=0 \xrightarrow{a+b+c=0} x=1, x=-5 \Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{-5,1\}$

۴) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1} \Rightarrow x^2+1=0 \Rightarrow x^2=-1$ غ.ق.ق $\Rightarrow$ مخرج ریشه نداره $\Rightarrow D_f=\mathbb{R}$

۵) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+x+1} \Rightarrow x^2+x+1=0 \Rightarrow \Delta<0$ مخرج ریشه نداره $\Rightarrow D_f=\mathbb{R}$

۶) $f(x)=\dfrac{x+1}{[2x-3]_{=0}} \quad [2x]-3=0 \Rightarrow [2x]=3 \Rightarrow 3\le 2x<4 \Rightarrow \dfrac{3}{2}\le x<2$

$$\Rightarrow D_f=\mathbf{R}-[\tfrac{3}{2},2)=(-\infty,\tfrac{3}{2})\cup[2,+\infty)$$

۷) $f(x)=\dfrac{1}{[x]-\frac{1}{2}_{=0}} \Rightarrow [x]=\frac{1}{2}=0.5$ مخرج ریشه نداره $x\in\emptyset \Rightarrow D_f:\mathbb{R}$

قبل از تعیین دامنه، حق ساده کردن عبارت را ندارید!

۸) $g(x)=\dfrac{\frac{1}{x-1_{=0}}-1}{\frac{3x}{x-2_{=0}}} \qquad D_g=\mathbf{R}-\{0,1,2\}$

* $h(x)=(\sqrt{x})^2$ $\quad h(x)=x \quad x\ge 0$ $\quad D_h: x\ge 0 \Rightarrow [0,+\infty)$

برای رسم ساده کن
برای دامنه ساده نکن

$y=(\sqrt{x})^2$ نیم زنا صیاول $x\ge 0$

$$\mathbb{R}-(a,b)=(-\infty,a]\cup[b,+\infty)$$
$$\mathbb{R}-(a,b]=(-\infty,a]\cup(b,+\infty)$$
$$\mathbb{R}-[a,b)=(-\infty,a)\cup[b,+\infty)$$
$$\mathbb{R}-[a,b]=(-\infty,a)\cup(b,+\infty)$$

ج) توابع رادیکالی با فرجه زوج: در این توابع باید عبارت زیر رادیکال را بزرگ‌تر یا مساوی صفر قرار دهیم:

$\sqrt[2k]{U}$ $U \geq 0$ $\qquad$ $\sqrt[2k+1]{U}$ ⟵ دامنه $= D_U$

$f(x)=\sqrt[2k]{g(x)} \qquad D_f=\{x \mid g(x) \geq 0\}$ $\qquad y=\sqrt{-x}$ $\quad -x \geq 0 \xrightarrow{\times(-1)} x \leq 0$ $\quad D_f:(-\infty, 0]$

$y=\sqrt{x}$ $\quad D_f:[0,+\infty)$

اگر کل مخرج زیر $\sqrt{\ }$ فرجه زوج باشد، باید زیر رادیکال را فقط بزرگ‌تر از صفر قرار دهیم:

۹) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow x>0 \Rightarrow D_f=(0,+\infty)$

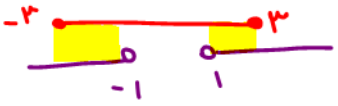
۱۰) $f(x)=\frac{\sqrt{9-x^2}}{\sqrt{x^2-1}}$ $\quad 9-x^2 \geq 0$ $\quad x^2-1>0$

۱) $9-x^2 \geq 0 \Rightarrow -3 \leq x \leq 3$

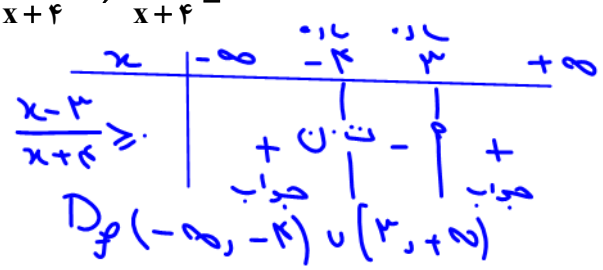
۲) $x^2-1>0 \Rightarrow x<-1$ یا $x>1$

$\Rightarrow (1),(2) \xrightarrow{\cap} D_f=[-3,-1) \cup (1,3]$

$|u|<a \Rightarrow -a<u<a$ $\quad |u|>a \Rightarrow u<-a$ یا $u>a$ $\quad x^2>1 \Rightarrow |x|>1$



۱۱) $f(x)=\sqrt{\frac{x-3}{x+4}} \Rightarrow \frac{x-3}{x+4} \geq 0$



$D_f: (-\infty,-4) \cup [3,+\infty)$

د) توابع رادیکالی با فرجه فرد: برای تعیین دامنه توابع رادیکالی با فرجه فرد، رادیکال را نادیده می‌گیریم:

$f(x)=\sqrt[2k+1]{g(x)} \qquad D_f=D_g$

۱۲) $f(x)=\sqrt[3]{\frac{5}{x^2+x-12}}$ $\quad x^2+x-12=(x-3)(x+4)=0 \longrightarrow x=3,-4$ $\quad D_f: \mathbb{R}-\{x=3,-4\}$

۱۳) $f(x)=\sqrt[3]{5x^2-7} \Rightarrow D_f=\mathbb{R}$

۱۴) $f(x)=\sqrt[3]{\frac{1}{x-1}} \Rightarrow x-1=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{1\}$

۱۵) $f(x)=\frac{1-x}{\sqrt[3]{x}}$ $\quad D_f: \mathbb{R}-\{0\}$

در تعیین دامنه توابع $f(x)=[g(x)], f(x)=|g(x)|$ قدرمطلق و براکت را نادیده می‌گیریم یعنی $D_f=D_g$ است:

۱۶) $f(x)=[\sqrt{x}] \Rightarrow D_f=x \geq 0$

۱۷) $f(x)=[\frac{1}{x}] \Rightarrow D_f=R-\{0\}$

۱۸) $f(x)=\frac{1}{[x]} \Rightarrow [x]=0 \Rightarrow 0 \leq x<1 \Rightarrow D_f=R-[0,1)=(-\infty,0) \cup [1,+\infty)$

$D_f = D_{\sqrt[2n+1]{f}} = D_{f^{n\in\mathbb{N}}} = D_{af+b} = D_{|f|} = D_{[f]} = D_{\sin f} = D_{\cos f} = D_{f^a}$; a عدد صحیح مثبت

۱۹) $f(x)=\frac{\sqrt{9-x^2}}{|x-1|}$ دامنه $f(x)=5\sin\left[|\cos\frac{1}{\sqrt{x}}|\right]+7$ به صورت $D_f:(0,+\infty)$ است.

$9-x^2\geq 0 \Rightarrow 9\geq x^2$

$3\geq|x| \Rightarrow -3\leq x\leq 3$ ، $|x-1|\neq 0 \Rightarrow x\neq 1$

$D_f:[-3,3]-\{1\}=[-3,1)\cup(1,3]$

تمرین: دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{1}{x^2-(a+1)x-b}$ به صورت $\mathbb{R}-\{-1,6\}$ است. مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

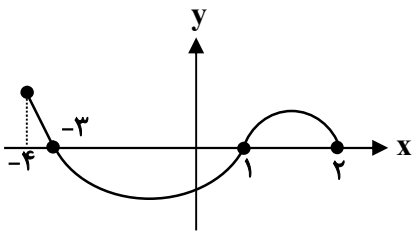
تمرین: اگر دامنه تابع $f(x)=\frac{x}{2x^2+ax+b}$ برابر $R-\{-2\}$ باشد، $b+a$ چه‌قدر است؟

۱) ۸ ۲) ۱۶ ۳) ۲۰ ۴) ۴

تمرین: دامنه‌ی تابع $y=\sqrt{-x^2(x^2-4)^2}$ چند عضو دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) بی‌شمار

تمرین: شکل روبه‌رو نمودار تابع $y=f(x)$ است. دامنه‌ی تابع $\sqrt{xf(x)}$ ، کدام است؟ (سراسری ریاضی ۹۲)



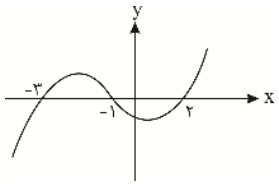
۱) $[۰,۲]$

۲) $[-۳,۲]$

۳) $[-۴,-۳]\cup[۱,۲]$

۴) $[-۳,۰]\cup[۱,۲]$

تمرین: شکل زیر، نمودار تابع با ضابطهٔ $y=f(x)$ است. دامنهٔ تابع غیرنقطه‌ای $\sqrt{(x+۱)f(x)}$ کدام است؟ (خارج ریاضی ۹۷)



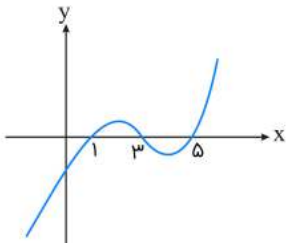
۱) $[-۳,۲]$

۲) $[-۱,+\infty)$

۳) $(-\infty,-۱]$

۴) $\mathbb{R}-(-۳,۲)$

تمرین: اگر نمودار تابع $y=f(x)$ به صورت زیر باشد، دامنهٔ $y=\frac{۴}{\sqrt{(x^۲-۵x+۴)f(x)}}$ کدام است؟



۱) $(۴,+\infty)$

۲) $(-\infty,۱)$

۳) $(۱,۳)\cup(۵,+\infty)$

۴) $(۳,۴)\cup(۵,+\infty)$

تمرین: اگر دامنهٔ $f(x)=\sqrt{(2a-3)x^2+4ax+2a-3}$ مجموعهٔ اعداد حقیقی باشد، حدود a کدام است؟

۱) $0\le a<\frac{3}{2}$ ۲) $a\in\mathbb{R}$ ۳) $\{\}$ ۴) $a\ge\frac{3}{2}$

پاسخ: گزینهٔ «۳» ـ برای این که دامنه $\mathbb{R}$ باشد، باید زیر رادیکال همواره نامنفی باشد.

$$(2a-3)x^2+4ax+2a-3\ge 0$$

برای آن که نامعادلهٔ درجه دو نامنفی باشد، باید ضریب x^2 مثبت و دلتای عبارت درجهٔ دوم منفی یا صفر باشد.

$$2a-3>0 \Rightarrow a>\frac{3}{2} \quad (1)$$

$$\Delta\le 0 \Rightarrow (4a)^2-4(2a-3)(2a-3)\le 0 \Rightarrow 16a^2-4(4a^2-12a+9)\le 0 \Rightarrow -4(-12a+9)\le 0 \Rightarrow a\le\frac{3}{4} \quad (2)$$

$$(1)\cap(2)=\varnothing$$

تمرین: اگر دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{1}{(4a-3)x^2+2ax+1}$ شامل همهٔ اعداد حقیقی به غیر از یک عدد حقیقی باشد، چند مقدار برای a وجود دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

تمرین: اگر دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{(a+2)x^2+ax+b}$ به صورت $(-\infty,3]$ باشد، مقدار b کدام است؟

۱) -۲ ۲) -۳ ۳) ۶ ۴) ۴

دو تابع f و g مساوی هستند هر گاه:

الف) دامنه‌ی f و g با هم برابر باشند.

ب) برای هر x از دامنه‌ی f (یا g) داشته باشیم، $f(x)=g(x)$ (ضابطه‌ها برابر باشند.)

تمرین: به ازای چند مقدار a دو تابع $f(x)=\frac{۲x^۲+۲x-۲a}{x^۲+x-a}$ و $g(x)=a^۳-a+۲$ با هم مساوی هستند؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) ۲

پاسخ: گزینهٔ «۲»

$$f(x)=\frac{۲(x^۲+x-a)}{x^۲+x-a}=۲=g(x)=a^۳-a+۲ \Rightarrow a^۳-a=۰ \Rightarrow a(a^۲-۱)=۰ \Rightarrow a=۰,\pm ۱$$

از طرفی $D_g=\mathbb{R}$ پس $D_f=\mathbb{R}$، یعنی مخرج تابع f نباید دارای ریشه باشد.

$$x^۲+x-a\neq ۰ \Rightarrow \Delta<۰ \Rightarrow ۱+۴a<۰ \Rightarrow a<\frac{-۱}{۴} \Rightarrow a=-۱$$

تمرین: کدام دو تابع با هم، برابرند؟

۱) $g(x)=x\sqrt{x}.\sqrt{x+۱}, f(x)=x\sqrt{x^۲+x}$

۲) $g(x)=\frac{\frac{x}{۲+x}}{\frac{۱-x}{x+۱}}$, $f(x)=\frac{x(x+۱)}{(۱-x)(۲+x)}$

۳) $g(x)=\cos x$, $f(x)=\sqrt{۱-\sin^۲ x}$

۴) $g(x)=۰$, $f(x)=[\frac{x^۲+۱}{x^۲+۲}]$

تمرین: اگر دو تابع $f(x)=\frac{ax+۲}{x^۲-mx+n}$ و $g(x)=\frac{x-b}{۲x^۲-۳x-۵}$ مساوی باشند، حاصل $am-bn$ کدام است؟

۱) $-\frac{۲۹}{۴}$ ۲) $\frac{۱۷}{۲}$ ۳) $-\frac{۳۷}{۴}$ ۴) $\frac{۲۳}{۲}$

تمرین: به ازای کدام مقدار k ، دو تابع $f(x)=2x-1$ و $g(x)=\begin{cases}\frac{4x^2-1}{2x+1} & , \ x\neq -\frac{1}{2}\\ 1-k & , \ x=-\frac{1}{2}\end{cases}$ برابرند؟

۱) ۳-　　۲) ۳　　۳) صفر　　۴) ۱-

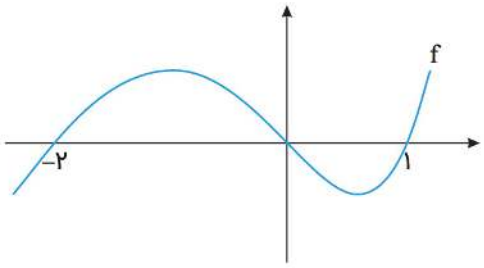
Homework (1)

۱ به‌ازای چند مقدار طبیعی از دامنهٔ تابع $y = -\frac{۱}{۳ - x}$، نمودار این تابع بالای $y = -۴$ و پایین $y = ۰$ قرار دارد؟

۱) ۴
۲) ۳
۳) ۲
۴) ۱

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

۲ نمودار زیر، تابع f را نشان می‌دهد. دامنهٔ تابع $g(x) = \sqrt{-\frac{f(x)}{f(۲ + x)}}$ شامل چند عدد صحیح است؟



۱) ۳
۲) ۶
۳) ۴
۴) ۵

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۳ اگر عبارت $\sqrt[۴]{\frac{۲}{x^۲} - \frac{۹}{۲}} + \sqrt[۳]{۲x - x^۲}$، عدد حقیقی باشد، مجموعهٔ مقادیر x در کدام بازه است؟

۱) $[\frac{۲}{۳}, ۲]$
۲) $[-\frac{۲}{۳}, \frac{۲}{۳}]$
۳) $[-\frac{۲}{۳}, ۰) \cup (۰, ۲]$
۴) $[-\frac{۲}{۳}, ۰) \cup (۰, \frac{۲}{۳}]$

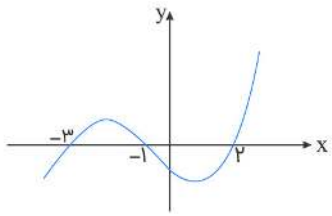
کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۶

۴ اگر $\frac{۴ - ۲x}{۳x + ۱} \geq ۰$ باشد، مجموعهٔ مقادیر $[۳x]$ چند عضو دارد؟

۱) ۵
۲) ۶
۳) ۷
۴) ۸

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

۵ شکل زیر، نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)$ است. دامنهٔ تابع غیرنقطه‌ای $\sqrt{(x+1)f(x)}$ کدام است؟



۱) $[-۳, ۲]$

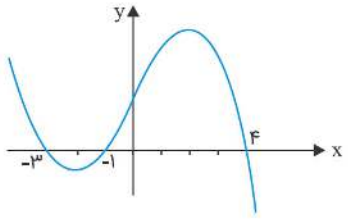
۲) $[-۱, +\infty)$

۳) $(-\infty, -۱]$

۴) $\mathbb{R} - (-۳, ۲)$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۷

۶ شکل زیر، نمودار تابع $y = f(x-۲)$ است. دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $\sqrt{xf(x)}$، کدام است؟



۱) $[-۱, ۱] \cup [۰, ۶]$

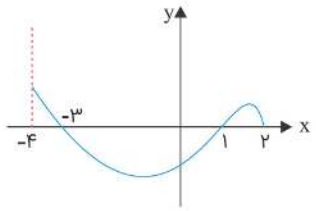
۲) $[-۳, ۱] \cup [۰, ۲]$

۳) $[-۵, -۳] \cup [-۱, ۲]$

۴) $[-۵, -۳] \cup [۰, ۲]$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۴

۷ شکل زیر، نمودار تابع $y = f(x)$ است. دامنهٔ تابع $\sqrt{xf(x)}$ کدام است؟



۱) $[۰, ۲]$

۲) $[-۳, ۲]$

۳) $[-۴, -۳] \cup [۱, ۲]$

۴) $[-۳, ۰] \cup [۱, ۲]$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۲

۸ به ازای کدام مجموعه مقادیر k، بازهٔ $(k-۲, ۳k+۲)$ زیرمجموعه‌ای از دامنهٔ تابع $f(x) = \frac{\sqrt{۹-x^۲}}{x-۱}$ است؟

۱) $(\frac{۱}{۳}, ۳]$

۲) $[-\frac{۱}{۳}, \frac{۱}{۳})$

۳) $[-۱, \frac{۱}{۳})$

۴) $[-۱, -\frac{۱}{۳})$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۸

۹ اگر $f(x) = \sqrt{x + |x+۲|}$، دامنهٔ تابع $f(-x)$ کدام است؟

۱) $x \leq -۱$

۲) $x \geq -۱$

۳) $x \leq ۱$

۴) $x \geq ۱$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۲

پاسخ Homework (1)

۱ گزینه ۳

$$\text{دامنه} = \mathbb{R} - \{۳\}$$

$$-۴ < -\frac{۱}{۳-x} < ۰ \Rightarrow ۰ < \frac{۱}{۳-x} < ۴$$

$$x = ۱ \Rightarrow ۰ < \frac{۱}{۲} < ۴$$

$$x = ۲ \Rightarrow ۰ < ۱ < ۴$$

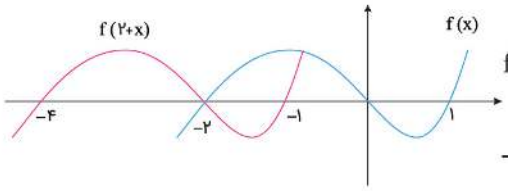
فقط همین دو عدد طبیعی در نامعادله صدق می‌کند. ضمناً برای $x > ۳$ عبارت $\frac{۱}{۳-x}$ منفی است.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

۲ گزینه ۱

$$g(x) = \sqrt{-\frac{f(x)}{f(۲+x)}} \Rightarrow -\frac{f(x)}{f(۲+x)} \geq ۰ \Rightarrow \frac{f(x)}{f(۲+x)} \leq ۰$$

$$f(x) = ۰; \quad x = -۲, ۰, ۱$$



$$f(x+۲) = ۰; \quad x = -۴, -۲, -۱$$

x		-۴		-۲		-۱		۰		۱	
f(x)	−		−	۰	+		+	۰	−	۰	+
f(x+۲)	−	۰	+	۰	−	۰	+		+		+
$\frac{f(x)}{f(x+۲)}$	+	∄	−	∄	−	∄	+	۰	−	۰	+

$D_g = (-۴, -۲) \cup (-۲, -۱) \cup [۰$

دامنهٔ تابع شامل اعداد صحیح ۳-، ۰ و ۱ است.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۳ گزینه ۴

راه‌حل تستی:

می‌توانیم از روش رد گزینه استفاده نماییم:

$x = ۰ \Leftarrow$ غ.ق.ق $\Leftarrow$ گزینهٔ (۲) حذف می‌شود.

$x = ۱ \Leftarrow$ غ.ق.ق $\Leftarrow$ گزینهٔ (۱) و (۳) حذف می‌شوند.

راه‌حل تشریحی:

$$\frac{۲}{x^۲} - \frac{۹}{۲} \geq ۰ \Rightarrow \frac{۴ - ۹x^۲}{۲x^۲} \geq ۰ \Rightarrow ۴ - ۹x^۲ \geq ۰ \xrightarrow{x \neq ۰} x^۲ \leq \frac{۴}{۹} \xrightarrow{x=۰} -\frac{۲}{۳} \leq x \leq \frac{۲}{۳}$$

ازطرفی چون $x \neq ۰$ است، پس گزینهٔ (۴) قابل‌قبول است.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۶

۴ گزینه ۴

$$\frac{۴ - ۲x}{۳x + ۱} \geq ۰ \Rightarrow \begin{cases} ۴ - ۲x = ۰ \Rightarrow x = ۲ \\ ۳x + ۱ = ۰ \Rightarrow x = -\frac{۱}{۳} \end{cases}$$

x		$-\frac{۱}{۳}$		۲	
$۴ - ۲x$	$+$	$+$	$+$	۰	$-$
$۳x + ۱$	$-$	۰	$+$		$+$
$\frac{۴ - ۲x}{۳x + ۱}$	$-$	ت ن	$+$	۰	$-$

$$\Rightarrow -\frac{۱}{۳} < x \leq ۲ \xrightarrow{\times ۳} -۱ < ۳x \leq ۶$$

$$\Rightarrow [۳x] = -۱, ۰, ۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶ \Rightarrow ۸ \text{ عضو}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

۵ گزینه ۴

$$(x + ۱)f(x) \geq ۰$$

$$(x + ۱)f(x) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x + ۱ = ۰ \Rightarrow x = -۱ \\ f(x) = ۰ \Rightarrow x = -۳, -۱, ۲ \end{cases}$$

دامنهٔ تابع به‌صورت $(-\infty, -۳] \cup [۲, +\infty) \cup \{-۱\}$ است که طبق گفتهٔ مسئله،
دامنهٔ تابع غیرنقطه‌ای به‌صورت $\mathbb{R} - (-۳, ۲)$ خواهد بود.

x	$-\infty$	-۳	-۱	۲	$+\infty$
$(x+۱)f(x)$	$+$	۰ $-$	۰ $-$	۰	$+$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۷

۶ گزینه ۴

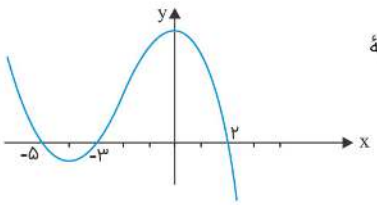
کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۴

گام اول

الف) عبارت زیر رادیکال با فرجهٔ زوج همواره نامنفی است، پس باید $xf(x) \geq 0$ باشد، پس x و $f(x)$ باید هر دو هم‌علامت باشند.
ب) برای به دست آوردن نمودار تابع $f(x)$ از روی نمودار تابع $f(x-2)$، کافی است نمودار تابع $f(x-2)$ را دو واحد به سمت چپ انتقال دهیم.

گام دوم

باتوجه‌به نمودار تابع $f(x-2)$ و با انتقال دو واحدی آن به سمت چپ، نمودار تابع $f(x)$ را رسم می‌کنیم:



طبق گام اول، محدوده‌ای که در آن x و $f(x)$ هم‌علامت باشند، قابل‌قبول است پس دامنهٔ تعریف تابع $\sqrt{xf(x)}$ برابر است با: $[-5,-3] \cup [0,2]$

۷ گزینه ۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۲

گام اول

عبارت زیر رادیکال با فرجهٔ زوج باید نامنفی باشد، پس داریم: $xf(x) \geq 0$

گام دوم

حالا با استفاده از جدول تعیین علامت، مشخص می‌کنیم در چه بازه‌هایی $xf(x) \geq 0$ برقرار است. داریم:

x	-۴		-۳		۰		۱		۲
x	−		−	۰	+		+		
f(x)	+	۰	−		−	۰	+	۰	
xf(x)	−	۰	+ ج	۰	−	۰	+ ج	۰	

دو بازهٔ مشخص‌شده مقادیر قابل‌قبول برای دامنهٔ تعریف تابع است، پس دامنهٔ تعریف تابع $\sqrt{xf(x)}$ به‌صورت $[-3,0] \cup [1,2]$ درمی‌آید.

۸ گزینه ۴

دامنهٔ تابع $[-3,3] - \{1\}$ است. اگر $(k-2,3k+2)$ زیرمجموعهٔ دامنهٔ تابع باشد، دو حالت رخ می‌دهد:

$$(1): (k-2,3k+2) \subseteq [-3,1) \Rightarrow \begin{cases} 3k+2 < 1 \Rightarrow k < -\frac{1}{3} \\ k-2 \geq -3 \Rightarrow k \geq -1 \end{cases} \xrightarrow{\cap} k \in [-1, \frac{-1}{3})$$

$$(2): (k-2,3k+2) \subseteq (1,3] \Rightarrow \begin{cases} 3k+2 \leq 3 \Rightarrow k \leq \frac{1}{3} \\ k-2 > 1 \Rightarrow k > 3 \end{cases} \xrightarrow{\cap} \varnothing$$

پس گزینهٔ ۴ صحیح است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۸

۹ گزینه ۳

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۲

گام اول

وقتی دامنه تعریف تابع $f(-x)$ از ما خواسته شده است، پس ابتدا باید ضابطهٔ $f(-x)$ را از روی تابع $f(x)$ تشکیل دهیم. تابع داده شده یک تابع رادیکالی با فرجهٔ زوج است، پس عبارت زیر رادیکال باید نامنفی باشد.

گام دوم

تشکیل ضابطهٔ $f(-x)$ و تعیین دامنه تعریف آن:

$$f(x)=\sqrt{x+|x+۲|} \Rightarrow f(-x)=\sqrt{-x+|-x+۲|}=\sqrt{|-x+۲|-x}$$

$$|-x+۲|-x \geq ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x>۲ : -x+۲<۰ \Rightarrow |-x+۲|-x \geq ۰ \Rightarrow x-۲-x \geq ۰ \Rightarrow -۲ \geq ۰ \quad \text{غ.ق.ق} \\ x \leq ۲ : -x+۲ \geq ۰ \Rightarrow |-x+۲|-x \geq ۰ \Rightarrow -x+۲-x \geq ۰ \Rightarrow -۲x+۲ \geq ۰ \\ \Rightarrow ۲x \leq ۲ \Rightarrow x \leq ۱ \end{cases}$$

با توجه به بازهٔ اولیه دامنه تعریف تابع $f(-x)$، به صورت $x \leq ۱$ در می آید.

Homework (2)

۱ اگر توابع $f(x)=\frac{۱}{x-۲}$ و $g(x)=\frac{(ax+b)}{x^۲+cx+d}$ باهم مساوی باشند، حاصل $\frac{b}{d}-\frac{a}{c}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$
۲) $\frac{۳}{۴}$
۳) $\frac{-۳}{۴}$
۴) $\frac{-۱}{۴}$

۲ کدام دو تابع زیر باهم برابرند؟

۱) $\begin{cases} f(x)=\frac{x^۲}{x^۲} \\ g(x)=۱ \end{cases}$
۲) $\begin{cases} f(x)=\sqrt{x^۲} \\ g(x)=x \end{cases}$
۳) $\begin{cases} f(x)=\frac{x^۲+۳}{x^۲+۳} \\ g(x)=۱ \end{cases}$
۴) $\begin{cases} f(x)=\sqrt{x(x-۲)} \\ g(x)=\sqrt{x}\times\sqrt{x-۲} \end{cases}$

۳ چند جفت از توابع زیر با یکدیگر برابرند؟

الف) $\begin{cases} f(x)=\frac{x^۲+۲}{x^۲+۲} \\ g(x)=\frac{۲x^۲+۳}{۲x^۲+۳} \end{cases}$
ب) $\begin{cases} f(x)=\sqrt{x(x-۲)} \\ g(x)=\sqrt{x}\times\sqrt{x-۲} \end{cases}$
پ) $\begin{cases} f(x)=\sqrt{x^۲} \\ g(x)=\sqrt[۳]{x^۳} \end{cases}$

۱) ۳
۲) ۲
۳) ۱
۴) صفر

۴ آیا توابع زیر برابرند؟

$f(x)=\sqrt{۲-x}\times\sqrt{۲x+۴}$
$g(x)=\sqrt{۸-۲x^۲}$

۵ کدام دو تابع زیر، باهم برابرند؟

۱) $\begin{cases} f(x) = \frac{x}{x} \\ g(x) = ۱ \end{cases}$

۲) $\begin{cases} f(x) = \sqrt{x^۲} \\ g(x) = x \end{cases}$

۳) $\begin{cases} f(x) = \frac{x^۲ + ۱}{x^۲ + ۱} \\ g(x) = ۱ \end{cases}$

۴) $\begin{cases} f(x) = \sqrt{x(x-۱)} \\ g(x) = \sqrt{x} \times \sqrt{x-۱} \end{cases}$

۶ باتوجه‌به توابع زیر، کدام تساوی درست است؟

$$f(x) = \sqrt{x}.\sqrt{x-۱} \ , \quad g(x) = \sqrt{x^۲ - x}$$

$$\begin{cases} h : [۱, +\infty) \to \mathbb{R} \\ h(x) = \sqrt{x^۲ - x} \end{cases} , \quad \begin{cases} s : \mathbb{R} - [۰, ۱] \to \mathbb{R} \\ s(x) = \sqrt{x^۲ - x} \end{cases}$$

۱) $f = h$

۲) $g = s$

۳) $f = g$

۴) گزینه‌های "۱" و "۲"

۷ کدام دو تابع زیر، باهم برابرند؟

۱) $f(x) = \frac{x}{|x|} \ , \quad g(x) = \begin{cases} ۱ & ; x < ۰ \\ -۱ & ; x > ۰ \end{cases}$

۲) $f(x) = \frac{x^۲ - ۱}{x - ۱} \ , \quad g(x) = x + ۱$

۳) $f(x) = \sqrt{x^۲ - x} \ , \quad g(x) = \sqrt{x} \times \sqrt{x-۱}$

۴) $\begin{cases} f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \\ f(x) = \cos(۱۸۰^\circ x) \end{cases} , \quad \begin{cases} g : \mathbb{N} \to \{-۱, ۱\} \\ g(x) = (-۱)^x \end{cases}$

۸ چه تعداد از تابع‌های زیر مساوی هستند؟

آ) $f(x) = \sqrt{x^۲ - ۴}$ و $g(x) = \sqrt{x-۲}\sqrt{x+۲}$

ب) $f(x) = |x^۲ - ۹|$ و $g(x) = |x-۳||x+۳|$

پ) $f(x) = [x] + ۲$ و $g(x) = [x+۲]$

ت) $f(x) = \frac{x^۲ + ۲}{x^۳ + ۲x}$ و $g(x) = \frac{۱}{x}$

۱) ۴

۲) ۳

۳) ۲

۴) ۱

۹ تابع $y = |x-۲|$ با کدام‌یک از توابع زیر مساوی است؟

۱) $y = |\frac{x^۲ - ۴}{x+۲}|$

۲) $y = |\frac{۴x + ۸}{۴}|$

۳) $y = |\frac{۶x - ۱۲}{۶}|$

۴) $y = |\frac{(x-۲)^۲}{x-۲}|$

پاسخ Homework (2)

۱ گزینه ۴

برای تساوی دو تابع ابتدا باید دامنهٔ برابری داشته باشند، درنتیجه عدد ۲ باید ریشهٔ مضاعف $x^۲ + cx + d$ باشد:

$$\begin{cases} c = -۴ \\ d = ۴ \end{cases} \Rightarrow x^۲ - ۴x + ۴ = (x-۲)^۲$$

حال باید ضابطهٔ برابر داشته باشند. در این صورت عبارت $ax + b$ باید برابر $(x-۲)$ شود:

$$\begin{cases} a = ۱ \\ b = -۲ \end{cases} \Rightarrow \frac{b}{d} - \frac{a}{c} = \frac{-۲}{۴} - (\frac{۱}{-۴}) = \frac{-۲}{۴} + \frac{۱}{۴} = \frac{-۱}{۴}$$

۲ گزینه ۳

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ "۱":

$$D_g = \mathbb{R}\ ,\ D_f = \mathbb{R} - \{۰\} \Rightarrow D_f \neq D_g$$

گزینهٔ "۲":

$$D_f = D_g = \mathbb{R} \quad , \quad \begin{cases} f(x) = |x| \\ g(x) = x \end{cases}$$

ولی شرط دوم را ندارد.

مثال نقض: به ازای $x = -۲$:

$$\begin{cases} f(-۲) = ۲ \\ g(-۲) = -۲ \end{cases} \Rightarrow f(-۲) \neq g(-۲)$$

گزینهٔ "۳":

$$\begin{cases} D_f = \mathbb{R} \\ D_g = \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow D_f = D_g$$

$$f(x) = \frac{x^۲ + ۳}{x^۲ + ۳} = ۱$$

$$f(x) = g(x) = ۱$$

پس دو تابع مساوی‌اند.

گزینهٔ "۴":

$$D_g = [۲\ ,\ +\infty)$$

$$x(x-۲) \geq ۰ \Rightarrow D_f = (-\infty\ ,\ ۰] \cup [۲\ ,\ +\infty)$$

$$D_f \neq D_g$$

۳ گزینه ۳

الف) $D_f = D_g = \mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} f(x) = ۱ \\ g(x) = ۱ \end{cases} \Rightarrow f(x) = g(x)$

دو تابع مساوی هستند.

ب) $D_f = (-\infty , ۰] \cup [۲ , +\infty) \neq D_g = [۲ , +\infty)$

پس دو تابع مساوی نیستند.

پ) $D_f = D_g = \mathbb{R}$

$$\begin{cases} f(x) = |x| \\ g(x) = x \end{cases} \Rightarrow f(x) \neq g(x)$$

پس دو تابع مساوی نیستند.

۴

$$D_f : \begin{cases} ۲ - x \geq ۰ \Rightarrow x \leq ۲ \\ ۲x + ۴ \geq ۰ \Rightarrow x \geq -۲ \end{cases} \Rightarrow D_f = [-۲, ۲]$$

$$D_g : ۸ - ۲x^۲ \geq ۰ \Rightarrow -۲ \leq x \leq ۲ \Rightarrow D_g = [-۲, ۲]$$

$$D_f = D_g$$

$$f(x) = \sqrt{۲ - x} \times \sqrt{۲x + ۴} = \sqrt{۲(۲ + x)(۲ - x)}$$

$$= \sqrt{۲(۴ - x^۲)} = \sqrt{۸ - ۲x^۲} = g(x)$$

پس: $f = g$

۵ گزینه ۳

گزینه "۱": $D_f \neq D_g$

گزینه "۲": $f(-۱) \neq g(-۱)$

گزینه "۴": $D_f \neq D_g$

۶ گزینه ۱

$$\left.\begin{array}{l} D_f = [۱, +\infty) \\ D_g = (-\infty, ۰] \cup [۱, +\infty) = \mathbb{R} - (۰, ۱) \\ D_h = [۱, +\infty) \\ D_s = \mathbb{R} - [۰, ۱] \end{array}\right\} \Rightarrow f = g \ , \ g = s$$

۷ گزینه ۴

گزینه "۱": $f(۱)=g(۱)$

گزینه "۲": $D_f=D_g$

گزینه "۳": $D_f=D_g$

گزینه "۴": $D_f=D_g=\mathbb{N}$

$$\left.\begin{array}{l} x \text{ زوج} \Rightarrow \cos(۱۸۰^\circ x)=۱=(-۱)^x \\ x \text{ فرد} \Rightarrow \cos(۱۸۰^\circ x)=-۱=(-۱)^x \end{array}\right\} \Rightarrow f(x)=g(x)$$

۸ گزینه ۲

بررسی "آ":

$$\begin{cases} f(x)=\sqrt{x^۲-۴}=\sqrt{(x-۲)(x+۲)}=g(x) \\ D_f=(-\infty\,,\,-۲]\cup[۲\,,\,+\infty) \\ D_g=[۲\,,\,+\infty) \end{cases} \Rightarrow D_f\neq D_g \Rightarrow f\neq g$$

بررسی "ب":

$$\begin{cases} f(x)=|x^۲-۹|=|x-۳||x+۳|=g(x) \\ D_f=D_g=\mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow f=g$$

بررسی "پ":

$$\begin{cases} f(x)=[x]+۲=[x+۲]=g(x) \\ D_f=D_g=\mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow f=g$$

بررسی "ت":

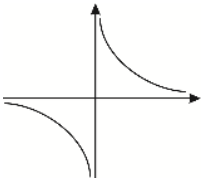
$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^۲+۲}{x^۳+۲x}=\dfrac{x^۲+۲}{x(x^۲+۲)}=\dfrac{۱}{x}=g(x) \\ D_f=D_g=\mathbb{R}-\{۰\} \end{cases} \Rightarrow f=g$$

۹ گزینه ۳

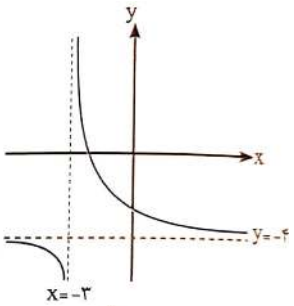
برای تساوی دو تابع ابتدا دامنهٔ آن دو باید برابر باشد و سپس ضابطهٔ آن‌ها. درنتیجه با این توضیحات تنها گزینهٔ "۳" درست است. (دامنهٔ هر دو تابع برابر با مجموعهٔ $\mathbb{R}$ می‌باشد و $y=|\dfrac{۶x-۱۲}{۶}|=|x-۲|$)

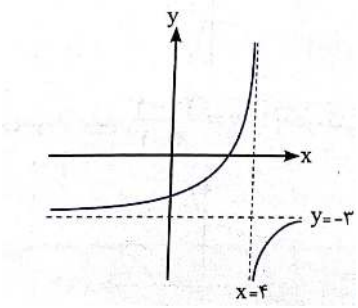
تابع گویا

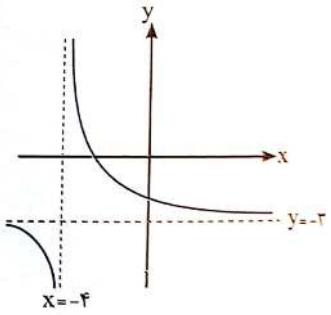
هر تابع کسری که صورت و مخرج آن چندجمله‌ای‌های جبری باشند به طوری که مخرج صفر نشود، تابع گویا نام دارد.

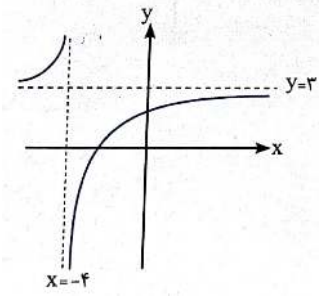
ساده‌ترین تابع گویا $f(x)=\frac{1}{x}$ با دامنه‌ی $\mathbb{R}-\{0\}$ است که به صورت  می‌باشد. حال با توجه به این تابع، بقیه را با استفاده از انتقال رسم می‌کنیم.

تمرین: نمودار $y=\frac{1}{x+4}-3$ در کدام گزینه به درستی نمایش داده شده است؟

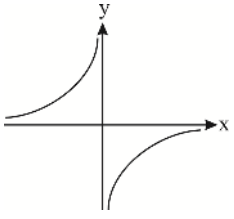
۱)


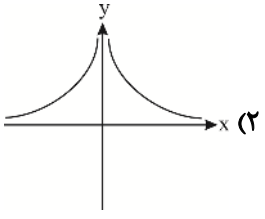
۲)


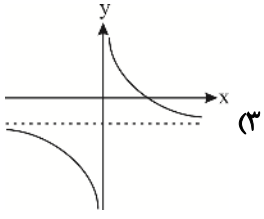
۳)


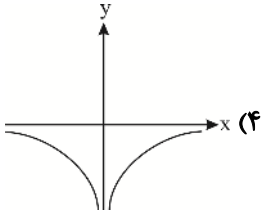
۴)


تمرین: در کدام گزینه، شکل تابع به درستی رسم نشده است؟ (مشابه تمرین کتاب درسی)

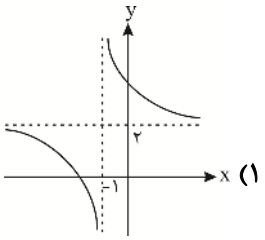
۱) $y=-\frac{1}{x}$


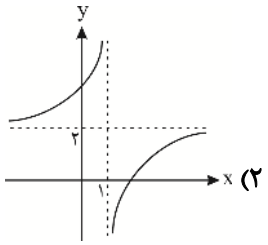
۲) $y=\frac{1}{|x|}$


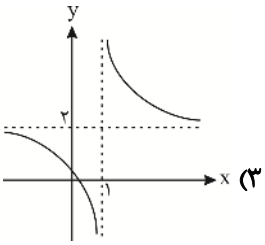
۳) $y=\frac{1}{x+1}$


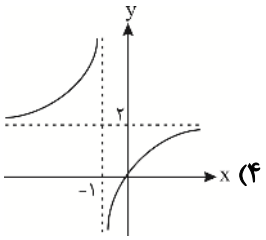
۴) $y=-\frac{1}{|-x|}$


تمرین: کدام‌یک از گزینه‌های زیر نمودار تابع $y=\frac{2x-1}{x-1}$ را به درستی نمایش می‌دهد؟

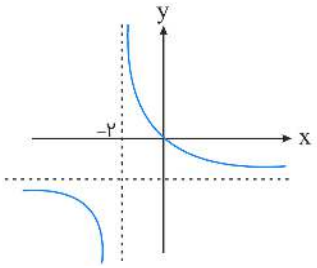
۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

تمرین: اگر نمودار تابع $f(x)=\frac{x+a}{bx-2}$ به صورت زیر باشد، $f(1)$ کدام است؟



۱) -1

۲) $-\frac{1}{2}$

۳) $-\frac{3}{2}$

۴) $-\frac{1}{3}$

اعمال روی توابع

اگر f و g دو تابع باشند، آن‌گاه جمع، تفاضل، ضرب و تقسیم این دو تابع به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x) \qquad (f-g)(x)=f(x)-g(x)$$

$$(f\cdot g)(x)=f(x)\times g(x) \qquad (\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$$

دامنه‌ی توابع $f\pm g$ و $f\cdot g$ اشتراک دامنه‌های f و g است و دامنه‌ی $\frac{f}{g}$ اشتراک دامنه‌های f و g است به‌جز نقاطی که $g(x)=0$.

اگر توابع f و g به‌صورت زوج‌های مرتب مطرح شوند، مثلاً $f=\{(a,b)\ ,\ (1,2)\}$ و $g=\{(a,c)\ ,\ (2,1)\}$، منظور از $f+g$ آن است که مؤلفه‌های دوم زوج‌های مرتبی از f و g را که دارای مؤلفه‌های اوّل یکی هستند (اشتراک دامنه‌ها)، با هم جمع کنیم. یعنی:

$$f+g=\{(a\ ,\ b+c)\}$$

و به همین ترتیب $f-g$، $f\cdot g$ و $\frac{f}{g}$ عبارت است از:

$$f-g=\{(a\ ,\ b-c)\} \quad , \quad f\cdot g=\{(a\ ,\ b\times c)\} \quad , \quad \frac{f}{g}=\left\{(a\ ,\ \frac{b}{c})\right\}\ ,\ c\neq 0$$

حواستون باشه که دو زوج مرتب $(۱,۲)$ و $(۲,۱)$ در f و g، چون مؤلفه‌های اوّل یکسان ندارن در $f \pm g$ و $f \cdot g$ و $\frac{f}{g}$ به بازی گرفته نمی‌شن!

تذکر: $(kf)(x) = kf(x)$ و $D_{kf} = D_f$ و منظور از $(kf)(x)$ آن است که اعضای برد f در k ضرب شوند. مثلاً:

$$f = \{(a,b) , (۱,۲)\} \quad \Rightarrow \quad ۳f = \{(a,۳b) , (۱,۶)\}$$

تمرین: اگر $f(x) = \sqrt{x+۱}$ و $g(x) = \frac{x+۱}{x-۲}$، مقدار $(۲f - g)(۳)$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) ۰ ۳) ۱ ۴) ۲

تمرین: اگر $f = \{(۱,۴),(۲,۳),(۵,۱),(۴,۲)\}$ و $g(x) = \frac{x+۱}{x-۱}$ باشد، کدام مجموعه‌ی زیر نشان‌دهنده‌ی تابع $f+g$ می‌باشد؟

۱) $\{(۲,۶),(۵,\frac{۵}{۲}),(۴,\frac{۱۱}{۳})\}$ ۲) $\{(۲,۶),(۵,\frac{۵}{۲})\}$

۳) $\{(۲,۶),(۵,۱۰),(۴,۱۱)\}$ ۴) $\{(۲,۴),(۵,۱),(۴,۱۰)\}$

تمرین: اگر $f = \{(۱,۲),(۲,۳),(۳,۴)\}$ و $g = \{(۱,۵),(۲,۶),(۳,۰)\}$ باشد، آن‌گاه تابع $\frac{۲f}{g}$ کدام است؟

۱) $\varnothing$ ۲) $\left\{(۱,\frac{۴}{۵}),(۳,۱)\right\}$ ۳) $\left\{(۱,\frac{۴}{۵}),(۲,\frac{۱}{۲})\right\}$ ۴) $\left\{(۲,۱),(۱,\frac{۴}{۵})\right\}$

تمرین: اگر $f=\{(۴,۳),(۳,۱),(۵,۴)\}$ و $۲f-g=\{(۳,۶),(۴,۴)\}$ باشد، تابع $\frac{f}{g}$ کدام است؟

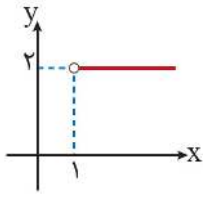
۱) $\{(۳,-\frac{۱}{۴}),(۴,\frac{۳}{۲})\}$

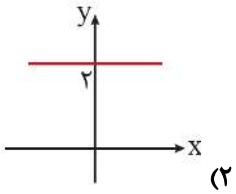
۲) $\{(۳,-\frac{۱}{۴})\}$

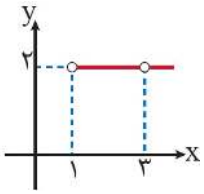
۳) $\{(۳,\frac{۳}{۸}),(۴,\frac{۳}{۲})\}$

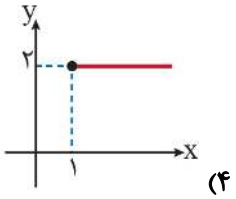
۴) $\{(۴,\frac{۳}{۲})\}$

تمرین: اگر $f(x)=\frac{\sqrt{x-۱}}{x-۳}$ و $g(x)=\frac{۲x-۶}{\sqrt{x-۱}}$، آن‌گاه نمودار تابع $f.g$ کدام است؟

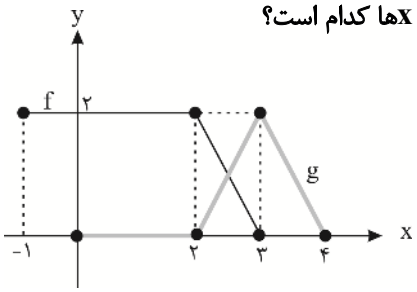
۱)


۲)


۳)


۴)


تمرین: اگر نمودار توابع f و g به صورت زیر باشد، مساحت محصور بین نمودار تابع $f+g$ و محور xها کدام است؟



۱) $\frac{۳}{۲}$

۲) ۶

۳) $\frac{۵}{۲}$

۴) ۱۸

تمرین: توابع $f(x)=\frac{x+1}{x}$ و $g(x)=\frac{x^2+1}{x}$ مفروض‌اند. برد تابع $f-g$ کدام است؟

۱) $\mathbb{R}-\{0\}$ ۲) $\mathbb{R}-\{1\}$ ۳) $\mathbb{R}-\{-1\}$ ۴) $\mathbb{R}$

تمرین: تابع $f(x)=\frac{x^3-x}{x-1}$ با دامنه‌ی $\mathbb{R}-\{a,b\}$ و برد $[c,+\infty)-\{2\}$ مفروض است. حاصل $a+b+c$ کدام است؟

۱) $\frac{7}{4}$ ۲) $-\frac{9}{4}$ ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) $-\frac{5}{4}$

۱ اگر توابع f و g به‌صورت زیر باشد، مجموعهٔ بُرد تابع $\frac{f}{f \times g}$ کدام است؟

$$f = \{(۱, -۱), (\sqrt{۲}, -۲), (\sqrt{۳}, -۳), (۲, ۲), (\sqrt{۵}, ۱)\}$$
$$g = \{(۳, -۱), (\sqrt{۲}, -۱), (-۳, ۴), (\sqrt{۵}, -۳), (\sqrt{۳}, ۲)\}$$

۱) $\{۲, -۳, -۱\}$
۲) $\{\frac{۱}{۲}, -\frac{۱}{۳}, -۱\}$
۳) $\{-۳, ۱, -۲\}$
۴) $\{-\frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۳}, -۱\}$

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۴۰۳

۲ تابع f همانی و $g(x) = [x] + [-x]$ با دامنه $-۱ \leq x \leq ۱$ است. به ازای چند مقدار صحیح x، اعضای مجموعه برد تابع $\frac{f}{g}$ مقداری صحیح است؟

۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۳

کنکور سراسری علوم انسانی خارج از کشور ۱۴۰۲

۳ تابع f، تابع ثابت و برای $m, n \in \mathbb{N}$ داریم $f(m) + f(n) = f(m)f(n)$. اگر دو زوج مرتب $(۲n^۲ - ۷n + ۱, -f(m))$ و $(m^۲ - ۴m + ۶, nf(n))$ روی نیمساز ناحیهٔ اول و سوم باشند، مقدار $[\frac{mn}{۵}]$ کدام است؟

۱) ۴
۲) ۳
۳) ۲
۴) ۱

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۴۰۲

۴ تابع $f(x) = [x] + [-x]$ با دامنه $-۳ \leq x \leq ۳$ و g تابع ثابت است. مقدار تابع $\frac{g}{f}$ در چند نقطه صحیح در دامنه برابر ۳ است؟

۱) ۶
۲) ۴
۳) ۲
۴) صفر

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۴۰۲

۵ تابع $f(x)=|۲x-۲|$ و $g(x)=[x]$ با دامنه $-۱\leq x\leq ۱$ است. اگر مجموعه A بُرد تابع $f.g$ باشد، کدام عدد عضو A است؟

۱) ۲
۲) ۳
۳) -۲
۴) -۳

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۴۰۲

۶ اگر $f(x)=۲-|x+۱|$ و $g(x)=x+|x|$، آنگاه برد تابع $(\frac{f}{g})(x)$ کدام است؟

۱) $(-\infty,\frac{۱}{۲})$
۲) $(-۱,+\infty)$
۳) $(-\frac{۱}{۲},+\infty)$
۴) $(۰,+\infty)$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۷

۷ دو تابع $f(x)=b-۳ax$ و $g(x)=c-(۳b-۳)x$ ثابت هستند. اگر $f+g=۵$ باشد، حاصل bc چقدر است؟

۱) -۶
۲) -۴
۳) ۴
۴) ۶

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

۸ دو تابع $f(x)=a+۳(b^۲-۱)x^۲$ و $g(x)=bx^۲-۲a+x^۲$ ثابت هستند. اگر $f\times g=-۸$ باشد، حاصل $|ab|$ کدام است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) صفر

کنکور سراسری علوم انسانی خارج از کشور ۱۴۰۱

۹ اگر $f(x)=(|a|-|b|)x$ تابع همانی، $g(x)=(b^۲-۱)x+(a^۲+۱)c$ تابعی ثابت و $(f-g)(x)=x+۵$ باشند، چند مقدار برای ac وجود دارد؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۴۰۱

۱۰ اگر $f=\{(۲,۵),(۳,۴),(۴,۶),(۱,۷)\}$ و $g=\{(۱,۳),(۲,۶),(۵,۲),(۴,۹)\}$ باشند، برد تابع $g-f$، کدام است؟

۱) $\{-۴,۱,۳\}$
۲) $\{-۴,۲,۳\}$
۳) $\{-۴,۱,۲,۳\}$
۴) $\{۱,۲,۳,۴\}$

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۳۹۸

۱۱ اگر $f=\{(۱,۲),(۲,۴),(۴,۵),(۳,۳)\}$ و $g=\{(۳,۲),(۲,۳),(۶,۱),(۱,۸)\}$ باشند، برد تابع $g\times f$ کدام است؟

۱) $\{۶,۸,۱۲\}$
۲) $\{۳,۶,۱۲,۱۶\}$
۳) $\{۶,۱۲,۱۶\}$
۴) $\{۶,۸,۱۲,۱۶\}$

کنکور سراسری علوم انسانی خارج از کشور ۱۳۹۸

۱۲ اگر $f=\{(۵,۳),(۱,۵),(۳,۴),(۶,۲)\}$ و $g=\{(۳,۲),(۵,۶),(۱,۲),(۲,۱)\}$ باشند، برد تابع $\frac{f+g}{f}$، کدام است؟

۱) $\{۱/۴,۱/۵,۳\}$
۲) $\{۱/۵,۱/۸,۳\}$
۳) $\{۱,۱/۴,۴\}$
۴) $\{۱,۲/۵,۴\}$

کنکور سراسری علوم انسانی خارج از کشور ۱۳۹۹

۱۳ اگر $f=\{(۳,۴),(۲,۶),(۵,۳),(۱,۵)\}$ و $g=\{(۵,۶),(۱,۲),(۳,۲),(۴,۱)\}$ باشند، برد تابع $\frac{f+g}{f-g}$، کدام است؟

۱) $\left\{\frac{۵}{۳},۲,-۳\right\}$
۲) $\left\{\frac{۷}{۳},۳,-۳\right\}$
۳) $\left\{\frac{۵}{۳},۴,-۲\right\}$
۴) $\left\{\frac{۷}{۳},۳,-۲\right\}$

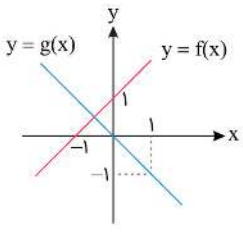
کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۳۹۹

۱۴ فرض کنید $f=\{(x,x^۲)|x=\pm۵,\pm۴,\ldots,\pm۱,۰\}$ و $g=\{(x,x^۳)|x=\pm۵,\pm۴,\ldots,\pm۱,۰\}$ دو تابع در صفحهٔ مختصات باشند. تعداد عناصر برد تابع $y=\frac{g}{f}(x)$، کدام است؟

۱) ۱۱
۲) ۱۰
۳) ۶
۴) ۵

کنکور سراسری علوم انسانی خارج از کشور ۱۴۰۰

۱۵ فرض کنید نمودار تابع‌های خط راست $y=f(x)$ و $y=g(x)$ در صفحهٔ مختصات مطابق شکل زیر داده شده باشند. قدرمطلق اختلاف جواب‌های معادلهٔ $\frac{f^۲(x)}{g(x)}=۲$، کدام است؟



۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$
۲) $\sqrt{۳}$
۳) $۲\sqrt{۳}$
۴) $۳\sqrt{۳}$

کنکور سراسری علوم انسانی خارج از کشور ۱۴۰۰

۱۶ اگر $f(x)=|x^۲-۵|$ و $g(x)=\frac{x}{۱+x^۲}$، مقدار $\frac{۱+f(-۲)}{g(۲)}$ کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۲}$ ۲) ۳

۳) ۴ ۴) ۵

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۳۸۷

۱۷ اگر $f(x)=x+|x|$ و $g(x)=|x+۱|+۱$؛ آنگاه برد تابع $(\frac{f}{g})(x)$، کدام است؟

۱) $[۰,۱)$ ۲) $[۰,۲)$

۳) $[۰,+\infty)$ ۴) $[۱,+\infty)$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۷

پاسخ Homework

۱ گزینه ۲

$$f \times g = \{(\sqrt{۲}, ۲), (\sqrt{۳}, -۶), (\sqrt{۵}, -۳)\}$$

$$\frac{f}{f \times g} = \{(\sqrt{۲}, -۱), (\sqrt{۳}, \frac{۱}{۲}), (\sqrt{۵}, -\frac{۱}{۳})\}$$

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۴۰۳

۲ گزینه ۱

برای تابع $g(x)$ می‌دانیم:

$$x \in \mathbb{Z} \Rightarrow [x] + [-x] = ۰ \Rightarrow g(x) = ۰$$

که در این حالت تابع $\frac{f}{g}$ تعریف نمی‌شود بنابراین هیچ مقدار صحیحی در تابع $\frac{f}{g}$ صدق نمی‌کند.

کنکور سراسری علوم انسانی خارج از کشور ۱۴۰۲

۳ گزینه ۳

اگر f ثابت باشد پس $f(x) = c$ بنابراین:

$$f(m) + f(n) = f(m).f(n) \Rightarrow c + c = c^۲ \Rightarrow c^۲ = ۲c \Rightarrow c = ۲ \Rightarrow f(x) = ۲$$

نیمساز ناحیه اول عبارت است از خط $y = x$ پس:

$$(۲n^۲ - ۷n + ۱, -۲) \Rightarrow -۲ = ۲n^۲ - ۷n + ۱ \Rightarrow ۲n^۲ - ۷n + ۳ = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta = ۴۹ - ۲۴ = ۲۵ \\ n = \frac{۷ \pm ۵}{۴} \Rightarrow \begin{cases} n = ۳ \\ n = \frac{۱}{۲} \quad \text{غ ق ق} \end{cases} \end{cases}$$

و بر روی نقطه دوم:

$$(m^۲ - ۴m + ۶, ۳ \times ۲) \Rightarrow ۶ = m^۲ - ۴m + ۶ \Rightarrow m(m - ۴) = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m = ۰ \quad \text{غ ق ق} \\ m = ۴ \end{cases}$$

بنابراین:

$$[\frac{mn}{۵}] = [\frac{۱۲}{۵}] = [۲/۴] = ۲$$

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۴۰۲

۴ گزینه ۴

برای تابع f می‌دانیم:

$$f(x) = [x] + [-x] = \begin{cases} ۰ & ; x \in \mathbb{Z} \\ ۱ & ; x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

بنابراین در تمام نقاط صحیح تابع $\frac{g}{f}$ تعریف نشده است و نمی‌تواند برابر ۳ شود.

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۴۰۲

۵ گزینه ۴

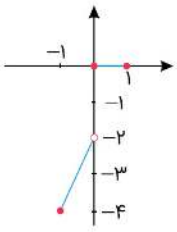
$$-۱ \leq x < ۰ \Rightarrow [x] = -۱ \Rightarrow f.g = (۲ - ۲x)(-۱) = ۲x - ۲$$

x	-۱	۰
y	-۴	-۲

$$۰ \leq x < ۱ \Rightarrow [x] = ۰ \Rightarrow f.g = (۲ - ۲x)(۰) = ۰$$

$$x = ۱ \Rightarrow f.g = ۰ \times ۱ = ۰$$

حال تابع $f.g$ را رسم می‌کنیم. باتوجه‌به شکل $y = -۳$ عضو برد این تابع خواهد بود.



کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۴۰۲

۶ گزینه ۳

$$f(x)=۲-|x+۱|=\begin{cases}x+۳ & ;x\le -۱\\ -x+۱ & ;x>-۱\end{cases}$$

$$g(x)=x+|x|=\begin{cases}۰ & ;x\le ۰\\ ۲x & ;x>۰\end{cases}$$

$$y=(\frac{f}{g})(x)=\frac{۲-|x+۱|}{x+|x|}=\begin{cases}\text{ت.ن} & ;x\le ۰\\ \frac{۱-x}{۲x} & ;x>۰\end{cases}$$

$$\Rightarrow y=\frac{۱}{۲x}-\frac{۱}{۲} \quad ;x>۰$$

$$x>۰\Rightarrow \frac{۱}{x}>۰\Rightarrow \frac{۱}{۲x}>۰\Rightarrow \frac{۱}{۲x}-\frac{۱}{۲}>-\frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow y>-\frac{۱}{۲}\Rightarrow R_y=(-\frac{۱}{۲},+\infty)$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۷

۷ گزینه ۳

$$\begin{cases}f(x)=b-۳ax \xrightarrow{\text{ثابت } f} ۳a=۰\Rightarrow a=۰\\ g(x)=c-(۳b-۳)x \xrightarrow{\text{ثابت } g} ۳b-۳=۰\Rightarrow b=۱\end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x)=۱\ ,\quad g(x)=c$$

$$f+g=۵\Rightarrow ۱+c=۵\Rightarrow c=۴$$

$$bc=۱\times ۴=۴$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

۸ گزینه ۲

$$\begin{cases}\text{ثابت } f(x)\Rightarrow ۳(b^۲-۱)=۰\Rightarrow b=\pm ۱\\ \text{ثابت } g(x)\Rightarrow (b+۱)=۰\Rightarrow b=-۱\end{cases}\Rightarrow b=-۱$$

توجه کنید که $g(x)$ به‌صورت $g(x)=(b+۱)x^۲-۲a$ است.

$$\begin{cases}f(x)=a\\ g(x)=-۲a\end{cases}\Rightarrow f\times g=-۲a^۲=-۸\Rightarrow a^۲=۴\Rightarrow a=\pm ۲$$

$$\Rightarrow |ab|=۲$$

کنکور سراسری علوم انسانی خارج از کشور ۱۴۰۱

۹ گزینه ۲

تابع همانی به‌صورت $y = x$ است، پس داریم:

$$f(x) = (|a| - |b|)x = x \Rightarrow |a| - |b| = ۱ \quad (I)$$

تابع ثابت به‌صورت $y = k$ است، پس داریم:

$$g(x) = (b^۲ - ۱)x + (a^۲ + ۱)c = k \Rightarrow b^۲ - ۱ = ۰ \Rightarrow b = \pm ۱$$

از قرار دادن این مقدار در رابطهٔ (I) داریم:

$$|a| - |b| = ۱ \Rightarrow |a| - |\pm ۱| = ۱ \Rightarrow |a| - ۱ = ۱ \Rightarrow |a| = ۲ \Rightarrow a = \pm ۲$$

از $(f - g)(x) = x + ۵$ نتیجه می‌گیریم:

$$f(x) - g(x) = x - (a^۲ + ۱)c = x + ۵ \Rightarrow -(a^۲ + ۱)c = ۵$$
$$\xrightarrow{a=\pm ۲} -۵c = ۵ \Rightarrow c = -۱$$

اما $a = ۲$ و $a = -۲$ هر دو پذیرفته هستند؛ پس داریم:

$$ac = -۲(-۱) = ۲$$
$$ac = ۲(-۱) = -۲$$

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۴۰۱

۱۰ گزینه ۱

$$D_{g-f} = D_g \cap D_f = \{۱, ۴, ۲\}$$
$$g - f = \{(۱, ۳ - ۷), (۲, ۶ - ۵), (۴, ۹ - ۶)\}$$
$$= \{(۱, -۴), (۲, ۱), (۴, ۳)\} \Rightarrow \text{برد} = \{-۴, ۱, ۳\}$$

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۳۹۸

۱۱ گزینه ۳

ابتدا دامنهٔ تابع $g \times f$ را به دست می‌آوریم:

$$D_{g \times f} = D_f \cap D_g = \{۱, ۲, ۴, ۳\} \cap \{۳, ۲, ۶, ۱\} = \{۱, ۲, ۳\}$$

مقادیر تابع $g \times f$ را به ازای دامنهٔ به‌دست‌آمده باتوجه‌به رابطهٔ $(g \times f)(x) = g(x) \times f(x)$ به دست می‌آوریم:

$$\Rightarrow g \times f = \{(۱, ۸ \times ۲), (۲, ۳ \times ۴), (۳, ۲ \times ۳)\}$$
$$\Rightarrow g \times f = \{(۱, ۱۶), (۲, ۱۲), (۳, ۶)\}$$
$$\Rightarrow g \times f \text{ برد} = \{۱۶, ۱۲, ۶\}$$

کنکور سراسری علوم انسانی خارج از کشور ۱۳۹۸

۱۲ گزینه ۱

نکته: اعمال جمع و تفریق و تقسیم روی توابع به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$$

$$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

همچنین دامنهٔ تعریف این توابع هم به‌صورت زیر است:

$$D_{f \pm g} = D_f \cap D_g \quad , \quad D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = ۰\}$$

با استفاده از روابط بالا ابتدا دامنهٔ تعریف توابع $f + g$ و $\frac{f+g}{f}$ را مشخص کرده، سپس برد تابع موردنظر را به دست می‌آوریم:

$$f = \{(۵, ۳), (۱, ۵), (۳, ۴), (۶, ۲)\} \Rightarrow D_f = \{۱, ۳, ۵, ۶\}$$

$$g = \{(۳, ۲), (۵, ۶), (۱, ۲), (۲, ۱)\} \Rightarrow D_g = \{۱, ۲, ۳, ۵\}$$

$$\Rightarrow D_{f+g} = \{۱, ۳, ۵\} \quad , \quad D_{\frac{f+g}{f}} = \{۱, ۳, ۵\}$$

$$f + g = \{(۱, ۵ + ۲), (۳, ۴ + ۲), (۵, ۳ + ۶)\} = \{(۱, ۷), (۳, ۶), (۵, ۹)\}$$

$$\Rightarrow \frac{f+g}{f} = \left\{(۱, \frac{۷}{۵}), (۳, \frac{۶}{۴}), (۵, \frac{۹}{۳})\right\} = \{(۱, ۱/۴), (۳, ۱/۵), (۵, ۳)\}$$

$$\Rightarrow R_{\frac{f+g}{f}} = \{۱/۴, ۱/۵, ۳\}$$

کنکور سراسری علوم انسانی خارج از کشور ۱۳۹۹

۱۳ گزینه ۲

نکته: عمل‌های جمع و تفریق و تقسیم روی دو تابع به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

همچنین دامنهٔ تعریف این توابع هم به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$D_{f\pm g} = D_f \cap D_g \quad D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x \,|\, g(x) = ۰\}$$

با استفاده از رابطهٔ بالا ابتدا دامنهٔ تعریف توابع $f+g$، $f-g$ و $\frac{f+g}{f-g}$ را به دست آورده و سپس برد تابع $\frac{f+g}{f-g}$ را به دست می‌آوریم.

$$f = \{(۳,۴),(۲,۶),(۵,۳),(۱,۵)\} \Rightarrow D_f = \{۱, ۲, ۳, ۵\}$$

$$g = \{(۵,۶),(۱,۲),(۳,۲),(۴,۱)\} \Rightarrow D_g = \{۱, ۳, ۴, ۵\}$$

$$\Rightarrow D_{f\pm g} = \{۱, ۳, ۵\}$$

$$D_{\frac{f+g}{f-g}} = D_{f+g} \cap D_{f-g} - \{x \,|\, (f-g)(x) = ۰\} = D_{f\pm g}$$

$$f+g = \{(۱, ۵+۲),(۳, ۴+۲),(۵, ۳+۶)\}$$

$$= \{(۱, ۷),(۳, ۶),(۵, ۹)\}$$

$$f-g = \{(۱, ۵-۲),(۳, ۴-۲),(۵, ۳-۶)\}$$

$$= \{(۱, ۳),(۳, ۲),(۵, -۳)\}$$

$$\frac{f+g}{f-g} = \left\{(۱, \frac{۷}{۳}),(۳, \frac{۶}{۲}),(۵, \frac{۹}{-۳})\right\}$$

$$= \left\{(۱, \frac{۷}{۳}),(۳, ۳),(۵, -۳)\right\}$$

$$\Rightarrow R_{\frac{f+g}{f-g}} = \left\{\frac{۷}{۳}, ۳, -۳\right\}$$

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۳۹۹

۱۴ گزینه ۲

ضابطهٔ $\frac{g}{f}(x)$ را تشکیل می‌دهیم:

$$y = \frac{g}{f}(x) = \frac{x^{۳}}{x^{۲}}$$

به‌ازای $x = ۰$ مخرج کسر تابع $\frac{g}{f}(x)$ صفر می‌شود، بنابراین $x = ۰$ عضو دامنهٔ تابع $\frac{g}{f}(x)$ نمی‌باشد، پس می‌توانیم $x^{۲}$ را از صورت و مخرج کسر ساده کنیم.

$$\frac{g}{f}(x) = x \ , \ (x \neq ۰)$$

می‌دانیم عملیات روی توابع در دامنهٔ مشترک انجام می‌شود. با شرط $x \neq ۰$ تعداد عضوهای مشترک دامنهٔ تابع f و g ده‌تا است.

$$D_{\frac{g}{f}} = D_f \cap D_g - \{۰\} = \{\pm ۵, \pm ۴, \pm ۳, \pm ۲, \pm ۱\}$$

از آنجایی که دامنه و برد تابع $y = x$ برابر است، پس تعداد اعضای مجموعهٔ برد این تابع نیز ۱۰تا می‌باشد.

کنکور سراسری علوم انسانی خارج از کشور ۱۴۰۰

۱۵ گزینه ۳

نمودار تابع $g(x)$ نیمساز ناحیهٔ دوم و چهارم یعنی $g(x) = -x$ است. اگر نمودار تابع $y = x$ را در یک واحد به سمت چپ در راستای محور xها منتقل کنیم نمودار تابع $f(x)$ به دست می‌آید بنابراین ضابطه آن $f(x) = x + ۱$ می‌باشد.

$$\frac{f^{۲}(x)}{g(x)} = ۲ \Rightarrow f^{۲}(x) = ۲g(x) \Rightarrow (x+۱)^{۲} = ۲(-x)$$
$$\Rightarrow x^{۲} + ۲x + ۱ = -۲x \Rightarrow x^{۲} + ۴x + ۱ = ۰$$
$$\Rightarrow |x_۲ - x_۱| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \frac{\sqrt{۴^{۲} - ۴(۱)(۱)}}{۱} = \sqrt{۱۶ - ۴} = \sqrt{۱۲} = \sqrt{۴ \times ۳} = ۲\sqrt{۳}$$

کنکور سراسری علوم انسانی خارج از کشور ۱۴۰۰

۱۶ گزینه ۴

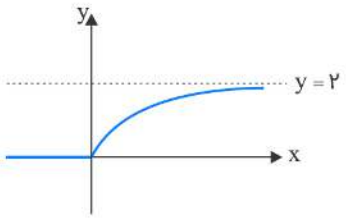
$$\begin{cases} f(-۲) = \left|(-۲)^{۲} - ۵\right| = |۴ - ۵| = |-۱| = ۱ \\ g(۲) = \frac{۲}{۱ + ۲^{۲}} = \frac{۲}{۱+۴} = \frac{۲}{۵} \end{cases}$$
$$\Rightarrow \frac{۱ + f(-۲)}{g(۲)} = \frac{۱+۱}{\frac{۲}{۵}} = \frac{۲}{\frac{۲}{۵}} = ۵$$

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۳۸۷

۱۷ گزینه ۲

$$(\frac{f}{g})(x)=\frac{x+|x|}{|x+۱|+۱}=\begin{cases}۰ & ;x\leq ۰\\ \frac{۲x}{x+۲} & ;x>۰\end{cases}$$

به کمک نمودار برد تابع راحت‌تر محاسبه می‌شود.

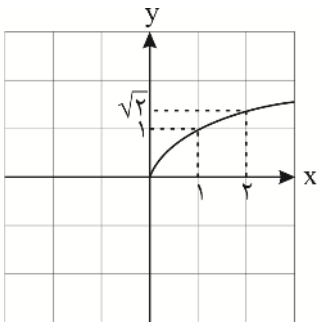


پس برد تابع $\frac{f}{g}(x)$ برابر $[۰,۲)$ خواهد بود.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۷

تابع رادیکالی

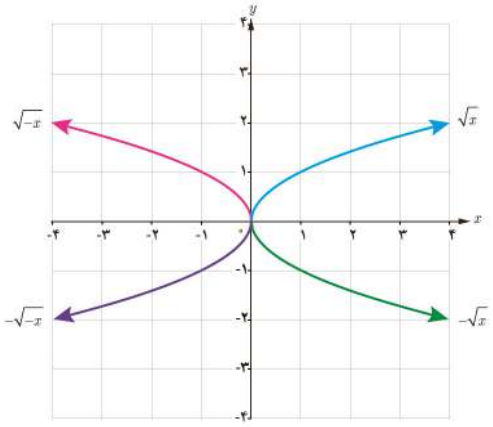
هر تابع به صورت $f(x)=\sqrt{p(x)}$ ($p(x)$ یک تابع از x است) را یک تابع رادیکالی (ریشه دوم) می‌نامیم. برای محاسبه دامنه‌ی این نوع توابع باید نامعادله‌ی $p(x)\geq 0$ را حل کرد. به طور مثال به تابع زیر و نمودار آن توجه کنید:



$$f(x)=\sqrt{x}$$

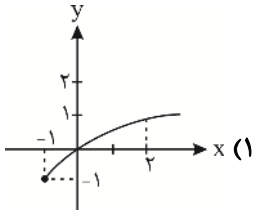
اکنون با استفاده از قوانین انتقال می‌توانیم توابع رادیکالی به صورت $k\sqrt{ax+b}$ را رسم کنیم.

تمرین: نمودار توابع $\sqrt{-x}$ و $-\sqrt{x}$ و $-\sqrt{-x}$ را به کمک نمودار تابع $\sqrt{x}$ رسم کنید.

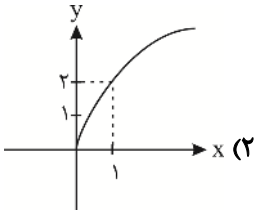


تمرین: در کدام گزینه، نمودار تابع صحیح رسم نشده است؟

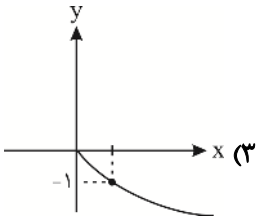
۱) $y=\sqrt{x+1}-1$



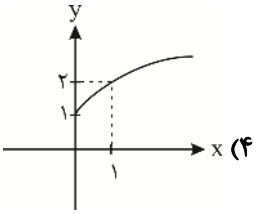
۲) $y=۲\sqrt{x}$



۳) $y=\sqrt{x}-1$



۴) $y=\sqrt{x}+1$



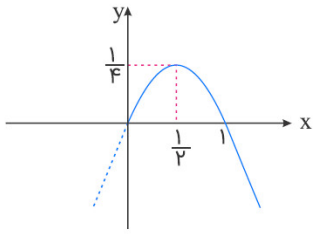
تمرین: برد تابع $f(x)=\sqrt{x-1}+1-x$ کدام است؟

۱) $(-\infty,\frac{1}{4}]$ ۲) $[0,+\infty)$ ۳) $(-\infty,\frac{1}{2}]$ ۴) $(-\infty,1]$

پاسخ: گزینهٔ «۱» ـ با تغییر متغیر $t=\sqrt{x-1}$ ضابطهٔ تابع به صورت زیر درمی‌آید:

$y=t-t^2$

برد سهمی فوق با دامنهٔ $(0,\infty]$، برابر برد تابع f است. این سهمی در شکل زیر رسم شده است:



برد سهمی فوق و در نتیجه برد f برابر $(-\infty,\frac{1}{4}]$ است.

تمرین: برد تابع $f(x)=\frac{\sqrt{x-2}-1}{|2-x|-x}$ کدام است؟

۱) $(-\infty,\frac{1}{2}]$ ۲) $[\frac{1}{2},+\infty)$ ۳) $(-\infty,1]$ ۴) $[1,+\infty)$

پاسخ: گزینهٔ «۱» ـ به ازای مقادیر $x\geq 2$ عبارت زیر رادیکال نامنفی است و داریم $|2-x|=x-2$ و تابع به صورت زیر ساده می‌شود:

$$f(x)=\frac{\sqrt{x-2}-1}{|2-x|-x}=\frac{\sqrt{x-2}-1}{x-2-x}=\frac{\sqrt{x-2}-1}{-2}$$

$$x\geq 2 \Rightarrow \sqrt{x-2}\geq 0 \Rightarrow \sqrt{x-2}-1\geq -1 \Rightarrow \frac{\sqrt{x-2}-1}{-2}\leq \frac{1}{2} \Rightarrow f(x)\leq \frac{1}{2} \Rightarrow R_f=(-\infty,\frac{1}{2}]$$

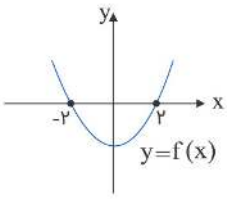
Homework

۱ اگر دامنهٔ دو تابعِ برابرِ $f(x)=\sqrt{x-۴}-b$ و $g(x)=\sqrt{۲b-x}+d$ برابر $\{۴\}$ باشد، مقدار d کدام است؟

۱) ۳ ۲) -۳

۳) ۲ ۴) -۲

۲ اگر نمودار $f(x)$ مطابق شکل زیر باشد، دامنهٔ تابع $g(x)=\sqrt{(x+۲).f(x)}$ کدام است؟



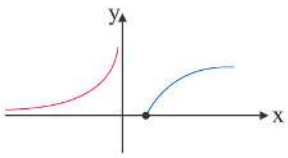
۱) $[۲\,,\,+\infty)\cup\{-۲\}$

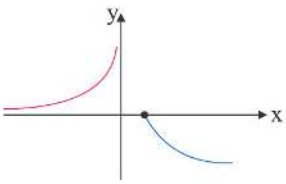
۲) $\mathbb{R}-(-۱\,,\,۱)$

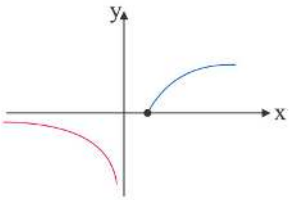
۳) $[-۲\,,\,+\infty)$

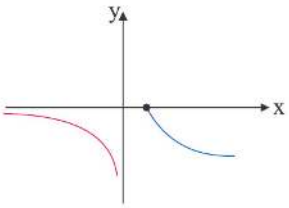
۴) $(-\infty\,,\,-۲]\cup\{۲\}$

۳ نمودار تابع $f(x)=\begin{cases}\frac{۱}{x} & ;x<۰\\ -\sqrt{x-۱} & ;x\geq ۱\end{cases}$ کدام است؟

۱)


۲)


۳)


۴)


۴ نمودار $y=\sqrt{x}$ را ابتدا ۳ واحد به‌سمت راست و سپس ۲ واحد در راستای عمودی به بالا ببرید، اشتراک دامنه و بُرد تابع تبدیل‌یافته کدام است؟

۱) $[۰\,,\,+\infty)$ ۲) $[۲\,,\,+\infty)$

۳) $[۳\,,\,+\infty)$ ۴) $[۱\,,\,+\infty)$

۵ دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{x-\sqrt{۲-x^۲}}$ بازهٔ $[a\ ,\ b]$ می‌باشد. حاصل $a+\sqrt{۲}b$ کدام است؟

۱) -۱
۲) ۳
۳) -۳
۴) ۱

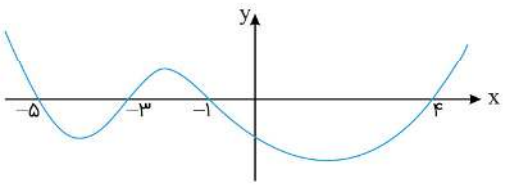
۶ اگر بُرد تابع $f(x)=b\sqrt{۱-x}+b^۲+۴b-۴$ بازهٔ $(-\infty\ ,\ ۱]$ باشد، b کدام است؟

۱) ۱
۲) -۵
۳) -۱
۴) ۵

۷ تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\frac{\sqrt{۱-x^۲}}{x}$ را در نظر بگیرید:

الف دامنهٔ تابع f را به دست آورید.

۸ باتوجه‌به نمودار تابع f، دامنهٔ تعریف تابع $y=\sqrt{\frac{x}{f(x)}}$ کدام است؟

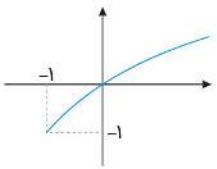


۱) $(-\infty\ ,\ -۵)\cup(-۳\ ,\ -۱)\cup(۴\ ,\ +\infty)$
۲) $(-\infty\ ,\ -۵)\cup(-۳\ ,\ -۱)\cup[۴\ ,\ +\infty)$
۳) $(-۵\ ,\ -۳)\cup(-۱\ ,\ ۰]\cup(۴\ ,\ +\infty)$
۴) $(-۵\ ,\ -۳)\cup(-۱\ ,\ ۰]\cup[۴\ ,\ +\infty)$

۹ دامنهٔ تابع $y=\sqrt{۴-\sqrt{۲x-۸}}$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۴
۲) ۵
۳) ۸
۴) ۹

۱۰ اگر نمودار زیر مربوط به تابع $f(x)=a+b\sqrt{x+۱}$ باشد، $f(۳)$ کدام است؟

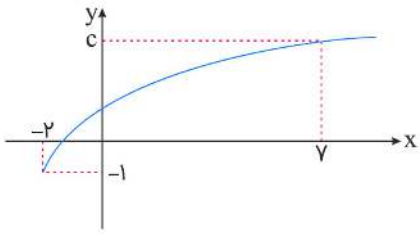


۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۱۱ دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{\frac{۳}{۲}-\frac{\sqrt{x}}{۳}}$ شامل چند عدد طبیعی است؟

۱) ۱۹
۲) ۲۰
۳) ۲۲
۴) ۴۰

۱۲ نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x+a}+b$ به‌صورت زیر می‌باشد. $a+b+c$ کدام است؟



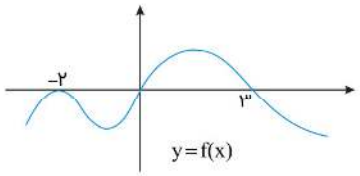
۱) ۲

۲) ۳

۳) ۴

۴) ۵

۱۳ اگر تابع $f(x)$ به‌صورت شکل زیر باشد، دامنهٔ تابع $g(x)=\sqrt{-xf(x)}$ شامل چند عدد صحیح منفی است؟



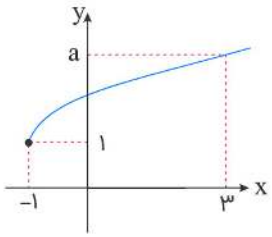
۱) ۱

۲) ۲

۳) ۴

۴) ۳

۱۴ نمودار تابع $f(x)=b+\sqrt{x+c}$ در شکل زیر رسم شده است. حاصل $a+b-c$ کدام می‌باشد؟



۱) صفر

۲) ۱

۳) ۲

۴) ۳

پاسخ Homework

۱ گزینه ۴

$$\left.\begin{array}{l} D_f : x - ۴ \geq ۰ \Rightarrow x \geq ۴ \\ D_g : ۲b - x \geq ۰ \Rightarrow x \leq ۲b \end{array}\right\} \xrightarrow{D_f = D_g} b = ۲$$

$$f(۴) = g(۴) \Rightarrow d = -b = -۲$$

۲ گزینه ۱

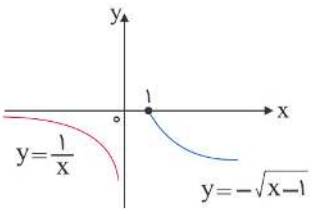
$$(x+۲).f(x) \geq ۰$$

$D_g = [۲\ ,\ +\infty) \cup \{-۲\}$

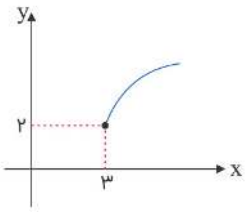
x	$-\infty$	-۲		۲	$+\infty$
$x+۲$	$-$	۰	$+$		$+$
$f(x)$	$+$	۰	$-$	۰	$+$
$(x+۲)f(x)$	$-$	۰	$-$	۰	$+$

۳ گزینه ۴

بنا به ضابطهٔ تابع $f(x)$، گزینهٔ "۴" صحیح است.



۴ گزینه ۳



۳ واحد به راست: $f(x-۳)=\sqrt{x-۳}$

۲ واحد به بالا ببرید: $y=\sqrt{x-۳}+۲$

دامنه: $D_f=[۳\ ,\ +\infty)$

بُرد: $R_f=[۲\ ,\ +\infty)$

$$D_f\cap R_f=[۳\ ,\ +\infty)$$

۵ گزینه ۲

$$\sqrt{۲-x^۲}:\ ۲-x^۲\geq ۰\Rightarrow x^۲\leq ۲\Rightarrow |x|\leq\sqrt{۲}$$

رابطهٔ (I): $-\sqrt{۲}\leq x\leq\sqrt{۲}$

$$x-\sqrt{۲-x^۲}\geq ۰\Rightarrow x^۲\geq ۲-x^۲$$

$$\Rightarrow ۲x^۲\geq ۲\Rightarrow x^۲\geq ۱\Rightarrow |x|\geq ۱$$

رابطهٔ (II): $x\geq ۱$، زیرا نباید $x<۰$ باشد.

$$(I)\cap(II)\Rightarrow D=[۱\ ,\ \sqrt{۲}]$$

$$a+\sqrt{۲}b=۱+\sqrt{۲}(\sqrt{۲})=۳$$

۶ گزینه ۲

$$\sqrt{۱-x}\geq ۰\xrightarrow{b<۰} b\sqrt{۱-x}\leq ۰\Rightarrow b\sqrt{۱-x}+b^۲+۴b-۴\leq b^۲+۴b-۴$$

$$\Rightarrow b^۲+۴b-۴=۱\ \Rightarrow b^۲+۴b-۵=۰\Rightarrow\begin{cases}b=۱\\ b=-۵\end{cases}$$

دقت کنید که در این مسئله b باید منفی باشد، پس $b=-۵$ قابل قبول است.

۷ **الف**

$$\left.\begin{array}{l}D_{\text{صورت}}:\ ۱-x^۲\geq ۰\Rightarrow x^۲\leq ۱\Rightarrow -۱\leq x\leq ۱\\ D_{\text{مخرج}}:\ \mathbb{R}-\{۰\}\end{array}\right\}\Rightarrow D_f=[-۱\ ,\ ۰)\cup(۰\ ,\ ۱]$$

۸ گزینه ۳

باید نامعادلهٔ $\frac{x}{f(x)} \geq ۰$ را حل کنیم. جواب‌هایی صحیح است که x و $f(x)$ هم‌علامت یا $x = ۰$ باشد که جواب تمام نقاط ناحیهٔ اول و سوم و $x = ۰$ است.

$$D_f = (-۵, -۳) \cup (-۱, ۰] \cup (۴, +\infty)$$

۹ گزینه ۴

$$۲x - ۸ \geq ۰ \Rightarrow ۲x \geq ۸ \Rightarrow x \geq ۴ \quad (۱)$$

$$۴ - \sqrt{۲x - ۸} \geq ۰ \Rightarrow \sqrt{۲x - ۸} \leq ۴ \Rightarrow ۰ \leq ۲x - ۸ \leq ۱۶$$

$$\Rightarrow ۸ \leq ۲x \leq ۲۴ \Rightarrow ۴ \leq x \leq ۱۲ \quad (۲)$$

دامنهٔ تابع اشتراک (۱) و (۲) است.

$$D = [۴, +\infty) \cap [۴, ۱۲] = [۴, ۱۲]$$

تعداد اعداد صحیح بازه ۹تا است.

۱۰ گزینه ۱

$$f(-۱) = -۱ \Rightarrow a = -۱$$

$$f(۰) = ۰ \Rightarrow a + b = ۰ \Rightarrow b = ۱$$

$$f(x) = -۱ + \sqrt{x+۱} \Rightarrow f(۳) = -۱ + ۲ = ۱$$

۱۱ گزینه ۲

$$\frac{۳}{۲} - \frac{\sqrt{x}}{۳} \geq ۰ \Rightarrow \frac{۳}{۲} \geq \frac{\sqrt{x}}{۳} \Rightarrow \sqrt{x} \leq \frac{۹}{۲} \Rightarrow x \leq \frac{۸۱}{۴}$$

ازطرفی $x \geq ۰$ است، پس:

$$D_f = [۰, \frac{۸۱}{۴}] = [۰, ۲۰/۲۵]$$

اعداد طبیعی موجود در دامنهٔ تابع $\{۱, ۲, \ldots, ۲۰\}$ است.

۱۲ گزینه ۲

بنا به شکل، $\sqrt{x}$ را دو واحد به چپ و یک واحد به پایین ببرید. شکل نمودار $f(x)$ مشخص می‌شود.

$$a = ۲, \; b = -۱$$

$$x = ۷ : y = \sqrt{۷+۲} - ۱ = ۲ \Rightarrow c = ۲$$

$$a + b + c = ۳$$

۱۳ گزینه ۱

$$-xf(x) \geq ۰ \Rightarrow xf(x) \leq ۰ \Rightarrow xy \leq ۰ \quad (۱)$$

رابطهٔ (۱) نشان می‌دهد که x و y مختلف‌العلامت و یا حداقل یکی از آن‌ها صفر است. یعنی نقاط برخورد با محورها و نقاطی که در ناحیهٔ دوم و چهارم واقع هستند جواب سوال است. باتوجه‌به صورت سوال، برای xهای صحیح منفی فقط $x = -۲$ جواب مسئله می‌باشد.

۱۴ گزینه ۴

تابع $\sqrt{x}$ یک واحد به سمت چپ و یک واحد به بالا منتقل شده است. درنتیجه:

$$\begin{cases} b = ۱ \\ c = ۱ \end{cases}$$

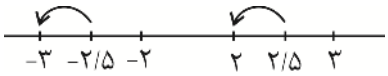
باتوجه‌به شکل داریم:

$$f(۳) = a \Rightarrow ۱ + \sqrt{۳ + ۱} = a \Rightarrow a = ۳$$

$$a + b - c = ۳ + ۱ - ۱ = ۳$$

جزء صحیح

جزء صحیح هر عددی مانند x را به شکل $[x]$ نمایش می‌دهیم و به این صورت تعریف می‌کنیم که اگر x عدد صحیح باشد جزء صحیح آن با خودش برابر است. مثلاً $[۲]=۲$ و اگر x عددی غیرصحیح باشد، اولین عدد صحیح قبل آن، برابر جزء صحیح x است. مثلاً $[۲/۵]=۲$ و $[-۲/۵]=-۳$ می‌باشد.



خاصیت جزء صحیح

۱) خروجی جزء صحیح همواره یک عدد صحیح است، یعنی برای هر $x\in\mathbb{R}:[x]\in\mathbb{Z}$ مثلاً $[۴]=۴$ و $[\pi=۳/۱۴]=۳$ و $[-۰/۶]=-۱$.

۲) اگر عبارت داخل جزء صحیح یک عدد صحیح باشد می‌توانیم جزء صحیح را حذف می‌کنیم. یعنی برای هر $x\in\mathbb{Z}$ داریم: $[x]=x$.

۳) اعداد ثابت و عبارت‌هایی که مطمئن هستیم صحیح هستند می‌توانیم از جزء صحیح خارج کنیم یعنی اگر $k\in\mathbb{Z}$ باشد $[x+k]=[x]+k$ است.

مثلاً $[x+۳]$ همان $[x]+۳$ است. به مثال‌های زیر توجه کنید:

۱) $[x+\overbrace{[x]}^{\in\mathbb{Z}}]=[x]+[x]=۲[x]$

۲) $[x+\underbrace{۲[x]}_{\in\mathbb{Z}}]=[x]+۲[x]=۳[x]$

۳) $[x-\underbrace{[x]}_{\in\mathbb{Z}}]=[x]-[x]=۰$

۴) خاصیت روبه‌رو در برخی از تست‌ها مورد استفاده قرار می‌گیرد: $[۲x]=[x]+[x+\frac{۱}{۲}]$

مثلاً اگر دامنهٔ تابع $y=\frac{۲x}{[۲x]-[x]}$ را بپرسند، داریم:

$$\text{مخرج}=۰\Rightarrow [۲x]-[x]=۰\xrightarrow{[۲x]=[x]+[x+\frac{۱}{۲}]}\cancel{[x]}+[x+\frac{۱}{۲}]-\cancel{[x]}=۰$$

$$\Rightarrow [x+\frac{۱}{۲}]=۰\xrightarrow[k\le u<k+۱]{[u]=k,k\in\mathbb{Z}}۰\le x+\frac{۱}{۲}<۱\xrightarrow{-\frac{۱}{۲}}\frac{-۱}{۲}\le x<\frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow D_f=\mathbb{R}-[\frac{-۱}{۲},\frac{۱}{۲})=(-\infty,\frac{-۱}{۲})\cup[\frac{۱}{۲},+\infty)$$

۵) برای هر $k\in\mathbb{Z}$ داریم: $[x]=k\Rightarrow k\le x<k+۱$ یعنی اگر $[x]=۲$ باشد، حدود x به صورت $۲\le x<۳$ است.

۶) مجموع عبارت‌های $[x]$ و $[-x]$ را می‌توان به صورت یک تابع دو ضابطه‌ای به شکل زیر نوشت:

$$[x]+[-x]=\begin{cases}۰ & x\in\mathbb{Z}\\ -۱ & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$$

اگر $[x]$ را به سمت راست تساوی ببریم، در این صورت داریم:

اگر $x\in\mathbb{Z}\Rightarrow [-x]=-[x]$

اگر $x\notin\mathbb{Z}\Rightarrow [-x]=-[x]-۱$

۷) همواره رابطهٔ $[x]+[y]\le[x+y]$ برقرار است.

به مقایسهٔ مقابل توجه کنید:

$$\begin{cases} |x+y| \le |x|+|y| \\ [x]+[y] \le [x+y] \end{cases}$$

۸) برای هر دو عدد حقیقی x و y، مقدار $[x+y]$ می‌تواند دو مقدار متمایز زیر را اختیار کند:

$$[x+y] = [x]+[y] \quad \text{یا} \quad [x]+[y]+1$$

تمرین: اگر $[\frac{x}{2}] = 1$ باشد، حاصل $\sqrt{x^2-4x+4}+\sqrt{x^2-8x+16}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

تمرین: در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = x^2 - 2[x]$، مقدار $f(-\frac{1}{2}f(\sqrt{3}))$ کدام است؟ (سراسری تجربی خارج از کشور ۹۰)

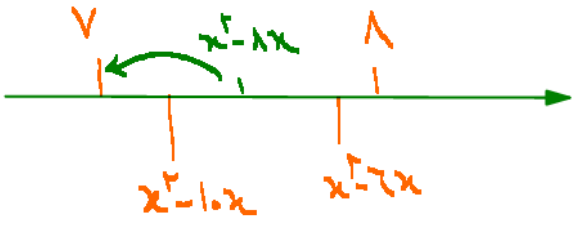
۱) ۱/۷۵ ۲) ۲/۲۵ ۳) ۲/۵ ۴) ۲/۷۵

$f(\sqrt{3}) = (\sqrt{3})^2 - 2[\sqrt{3}=1.7] = 3 - 2(1) = 1$

$f(-\frac{1}{2}) = (\frac{1}{2})^2 - 2[-\frac{1}{2}] = 0.25 + 2$ (-1)

تمرین: اگر $[x^2-10x] = [x^2-6x] = 7$ باشد، حاصل $[(x-4)^2]$ کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۱۶ ۳) ۲۴ ۴) ۲۳



$[x^2-8x+17] = [x^2-8x]+17 = 23$

7

تمرین: اگر $(1-\sqrt{2})^{6}=198$، جزء صحیح عدد $(1+\sqrt{2})^{6}+(1+\sqrt{2})^{6}$ کدام است؟

۱) ۱۹۵ ۲) ۱۹۶ ۳) ۱۹۷ ۴) ۱۹۸

$\left[(1+\sqrt{2})^{6}\right]=\left[198-(1-\sqrt{2})^{6}=\text{۱۹۷ / خوردی}\right]=197$

$1-1.4=-0.4$

تمرین: اگر $[x-2]=1$ باشد، نمودارهای دو تابع $f(x)=|x-3|-|x-4|$ و $g(x)=2x^{2}+x-17$ در چند نقطه مشترک هستند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) فاقد نقطه‌ی مشترک

$3\le x<4$

$[x]=3$

$[x]-2=1$

$y=x-3-(-x+4)=x-3+x-4=2x-7$

$2x^{2}+x-17=2x-7$

$2x^{2}-x-10=0$

$x_1=\frac{1+\sqrt{81}}{4}=\frac{10}{4}=\frac{5}{2}=2.5\in[3,4)$

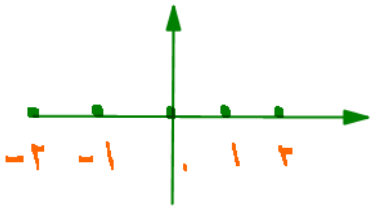
$x_2=\frac{1-\sqrt{81}}{4}=-2\notin[3,4)$

تمرین: دامنه و برد تابع $f(x)=\frac{x-[x]}{\sqrt{[x]+[-x]+1}}$، کدام است؟

$x-[x]=0 \Rightarrow x\in\mathbb{Z}$

۱) $D_f=\mathbb{N}, R_f=\{0\}$ ۲) $D_f=\mathbb{Z}, R_f=\{0\}$

۳) $D_f=\mathbb{R}-\mathbb{Z}, R_f=[0,1)$ ۴) $D_f=\mathbb{R}-\mathbb{N}, R_f=[0,1)$



$f(0)=\left[-\frac{1}{2}\right]+\left[\frac{3}{2}\right]=-1+1=0$

$f(1)=-1+1=0$

تمرین: حاصل عبارت $[\frac{3-x}{2}]+[\frac{x-1}{2}]$ چه اعدادی می‌تواند باشد؟

۱) صفر و ۱ ۲) صفر و ۱- ۳) ۱- و ۲- ۴) ۱ و ۲

پاسخ: گزینه‌ی «۱» صحیح است.

عبارت را ساده می‌کنیم و از خاصیت‌ها استفاده می‌کنیم:

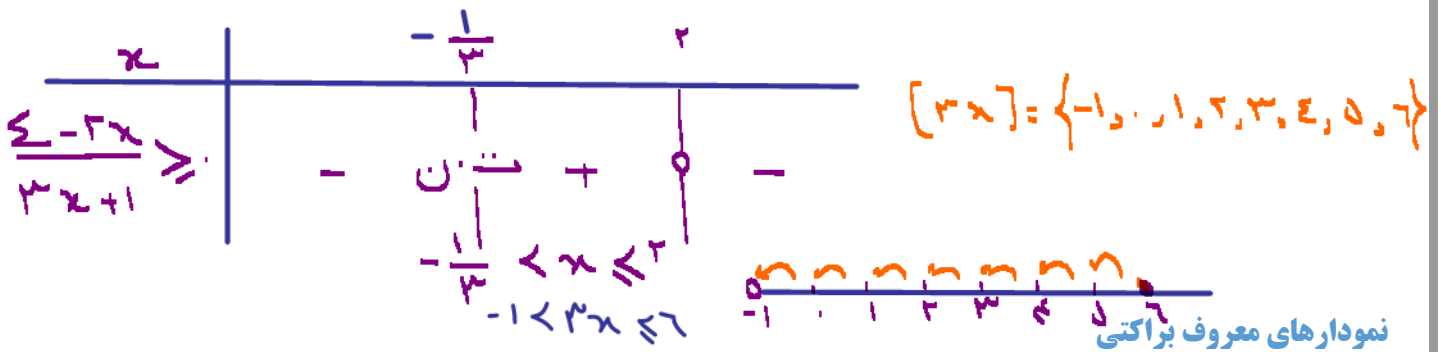
$$[\frac{x-1}{2}]+[\frac{3-x}{2}]=[\frac{x-1}{2}]+[\frac{2+1-x}{2}]=[\frac{x-1}{2}]+[\frac{1-x}{2}+1]=[\frac{x-1}{2}]+[\frac{1-x}{2}]+1$$

چون $[u]+[-u]=\begin{cases}0 & u\in\mathbb{Z}\\ -1 & u\notin\mathbb{Z}\end{cases}$، پس:

$\underbrace{[\frac{x-1}{2}]+[\frac{1-x}{2}]}_{\text{صفر یا ۱-}}+1=$ ۱ یا صفر

تمرین: اگر $\frac{۴-۲x}{۳x+۱} \geq ۰$ باشد، مجموعه مقادیر $[۳x]$ چند عضو دارد؟ (تجربی ۱۴۰۱)

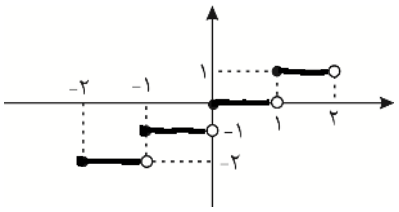
۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۵



نمودارهای معروف براکتی

شکل‌های بسیار مهم توابع معروف براکتی (شامل جزء صحیح)

۱) $y=[x]$

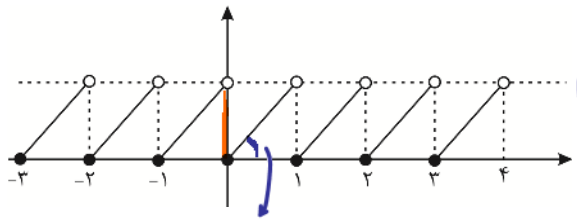


توجه کنید در تابع $y=[x]$، طول هر پله یک واحد است و نقاط سمت چپ همگی توپر می‌باشند. این‌جا به صورت دلخواه در بازهٔ $[-۲,۲)$ آن را رسم کردیم. اگر بازه به صورت $[-۲,۲]$ باشد (یعنی انتهای بازه بسته باشد) نقطهٔ $x=۲$ را جداگانه بررسی می‌کنیم و داریم:

$$x=۲ \Rightarrow y=[۲]=۲ \Rightarrow A(۲,۲)$$

و این یعنی به شکل بالا باید نقطهٔ $A(۲,۲)$ نیز اضافه شود.

۲) $y=x-[x]$



ویژگی‌های تابع $y=x-[x]$

۱) دامنهٔ $\mathbb{R}$

۲) برد $[۰,۱)$ یعنی: $۰ \leq x-[x] < ۱$

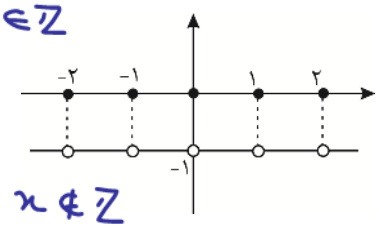
۳) در نقاط $x \in \mathbb{Z}$ حد ندارد و ناپیوسته است ولی در سایر نقاط حد دارد و پیوسته است.

۴) طول هر پله $\sqrt{۲}$ واحد است.

۵) متناوب است با دورهٔ تناوب $T=۱$

در این‌جا به طور دلخواه آن را در بازهٔ $[-۳,۴)$ رسم کردیم.

۳) $y=[x]+[-x]=\begin{cases} ۰ & x \in \mathbb{Z} \\ -۱ & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$



ویژگی‌های تابع $y=[x]+[-x]$

۱) دامنهٔ $\mathbb{R}$

۲) برد دو عضوی $R_f=\{-1,0\}$

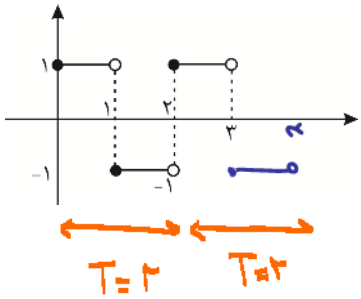
۳) در نقاط $x\in\mathbb{Z}$ ناپیوسته است.

۴) در تمام نقاط دارای حد ۱- است یعنی $\lim\limits_{x\to a\in\mathbb{R}}[x]+[-x]=-1$

۵) متناوب است با دورهٔ تناوب $T=1$.

۶) نمودار به ازای اعداد صحیح صفر می‌شود و ریشه می‌دهد و به ازای سایر اعداد، ۱- می‌شود.

۴) $y=(-1)^{[x]}$ $\quad 0\le x<3$



مراح پسند

ویژگی‌های $y=(-1)^{[x]}$

در این‌جا به طور مثال در بازهٔ $[0,3)$ رسمش کردیم.

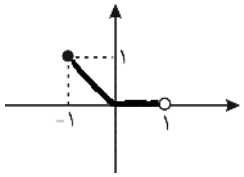
۱) دامنهٔ $\mathbb{R}$

۲) برد دو عضوی $R_f=\{-1,1\}$

۳) در نقاط $x\in\mathbb{Z}$ حد ندارد و ناپیوسته است.

۴) متناوب است با دورهٔ تناوب $T=2$.

۵) $y=x[x]$ $\quad -1\le x<1$



در این‌جا به طور مثال در بازهٔ $[-1,1)$ رسمش کردیم.

توجه کنید نقطهٔ $x=0$ برای این تابع، نقطهٔ گوشه به حساب می‌آید.

رسم نمودار $y=[ax]$

تابع $y=[ax]$ از روی تابع $y=[x]$ رسم می‌شود. فقط توجه کنید که طول هر پله $\frac{1}{|a|}$ برابر می‌شود. مثلاً در رسم $y=[\frac{x}{2}]$ که $a=\frac{1}{2}$ است طول پله‌ها $\frac{1}{\frac{1}{2}}=2$ برابر و در رسم $y=[2x]$ که $a=2$ است طول پله‌ها $\frac{1}{2}$ برابر می‌شود.

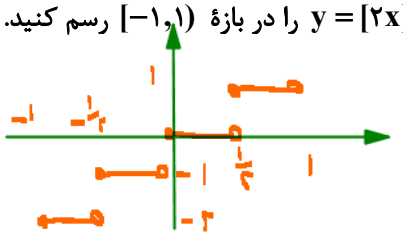
تمرین: تابع $y=[2x]$ را در بازهٔ $[-1,1)$ رسم کنید.

$-1\le x<-\frac{1}{2} \longrightarrow -2\le 2x<-1 \quad y=[2x]=-2$

$-\frac{1}{2}\le x<0 \quad -1\le 2x<0 \quad y=-1$

$0\le x<\frac{1}{2} \quad 0\le 2x<1 \quad y=0$

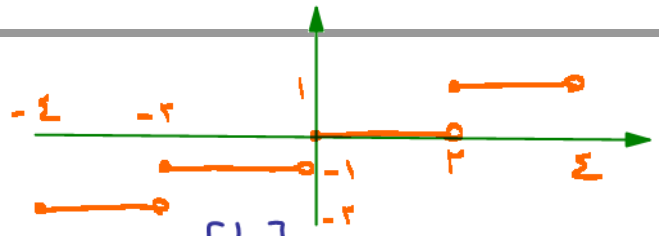
$\frac{1}{2}\le x<1 \quad 1\le 2x<2 \quad y=1$



تمرین: نمودار تابع $y=[\frac{x}{2}]$ را در بازهٔ $[-4,4)$ رسم کنید.

$y=\left[\left(\frac{1}{2}\right)^x\right]$

$\frac{1}{\frac{1}{2}}=2$ طول کف پله



$y=\left[\frac{1}{2}x\right]$

$-4\le x<-2 \longrightarrow -2\le\frac{1}{2}x<-1 \quad y=-2$

$-2\le x<0 \longrightarrow -1\le\frac{1}{2}x<0 \quad y=-1$

$0\le x<2 \longrightarrow 0\le\frac{1}{2}x<1 \quad y=0$

$2\le x<4 \longrightarrow 1\le\frac{1}{2}x<2 \quad y=1$

تمرین: معادله‌ی $x=\frac{1}{5}+[x]$ در فاصله‌ی $(-2,3)$ چند جواب دارد؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

$x-[x]=\frac{1}{5}=0.2$ اعداد با خودشان ۰.۲ در بازه $(-2,3)$:

$x=0.2+[x]$

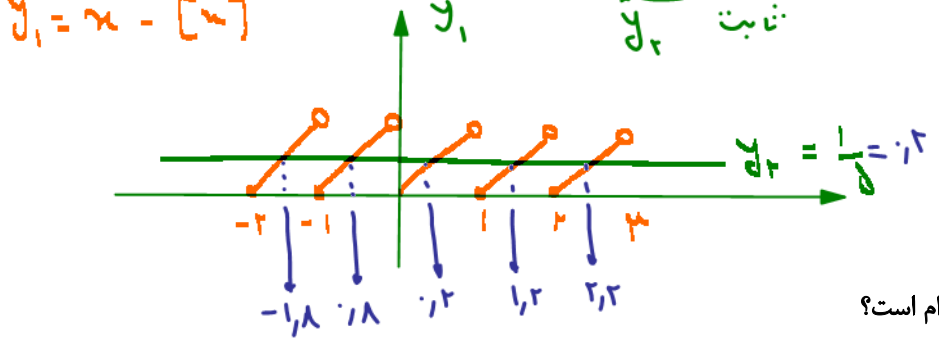
$x=0.2-2=-1.8$

$x=0.2-1=-0.8$

$x=0.2+0=0.2$

$x=0.2+1=1.2$

$x=0.2+2=2.2$



تمرین: برد تابع $y=x-2[\frac{x}{2}+1]$ کدام است؟

۱) $[-2,0)$ ۲) $[-1,2]$ ۳) $[0,2]$ ۴) $[-1,1)$

$y=x-2\left(\left[\frac{x}{2}\right]+1\right)=x-2\left[\frac{x}{2}\right]-2=2\left(\frac{x}{2}-\left[\frac{x}{2}\right]\right)-2$

$2(\text{عددی بین صفر و یک})-2$

$0\le 2\left(\frac{x}{2}-\left[\frac{x}{2}\right]\right)<2$

$-2\le 2(\quad)-2<0$

$-2\le y<0$

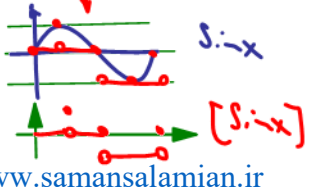
$R_f=[-2,0)$

$f(0)=-2$: راه‌تی

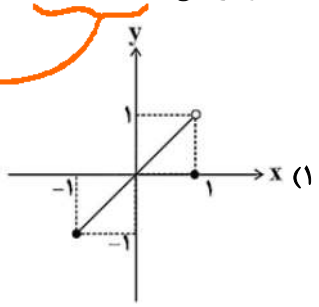
تنها گزینه ۲- دار

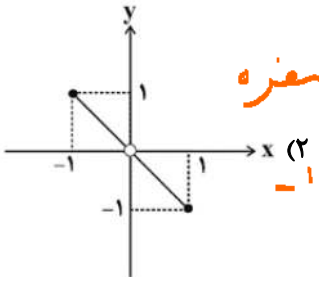
گزینه ① است.

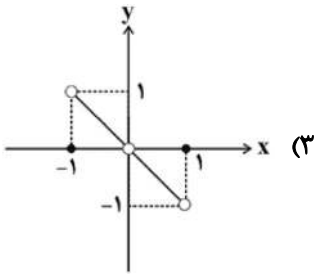
رسم $[u]$ با داشتن u: u را بگیر خط‌های افقی $y=k$ و $y=k+1$ که $k\in\mathbb{Z}$ را رسم کن. هرجا نمودار u بین این خطوط خورد را پیرامونش از بالا به شکل موربتابان سایه بزن تا بین خط متوالیه را روی خط پایینی ترکیش زیر همه نقطه پر را خالی کن که تابع بماند.

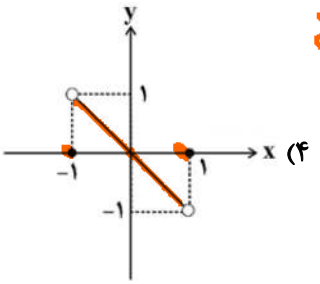


تمرین: نمودار تابع $y = x([-x]+[x])$ با دامنهٔ $-1 \le x \le 1$ کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

۱)


۲)


۳)


۴)


پاسخ: گزینهٔ «۴» ـ راه‌حل اول: عددگذاری:

$$x=1 \xrightarrow{\text{در ضابطهٔ تابع قرار می‌دهیم}} y=1([-1]+[1])=1\times\underbrace{(-1+1)}_{0}=0$$

$$x=0 \Rightarrow y=0$$

$$x=-1 \Rightarrow y=0$$

یعنی تابع در سه نقطهٔ دلخواهی که دادیم مقداری برابر با صفر دارد که این سه نقطه فقط در نمودار گزینهٔ (۴) صدق می‌کند.

راه‌حل دوم:

نکته:

$$y=[x]+[-x]=\begin{cases}-1 & x\notin\mathbb{Z}\\ 0 & x\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

با توجه به نکته داریم:

$$\begin{cases}-1<x<1 \xrightarrow[x\notin\mathbb{Z}]{x\neq 0} y=-x\\ x=-1,0,1 \Rightarrow y=0\end{cases}$$

تابع رسم‌شده در گزینهٔ (۴) در نقاط $x=-1,0,1$ مقداری برابر با صفر دارد و در $-1<x<1$ برابر با $y=-x$ است.

تمرین: نمودار تابع $y=2\left[\frac{x}{2}\right]+1 \; ; \; x\in[-2,6)$ ازچند پاره خط مساوی هم تشکیل شده است؟ (تجربی خارج)

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

Homework

۱ در تابع $f(x) = [x + \frac{۳}{۲}] - [-x]$، مقدار $f(\frac{۹}{۴}) + f(-\frac{۱}{۲})$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵

۳) ۶ ۴) ۷

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۳۹۸

۲ در تابع $f(x) = ۲[x] + [-x]$، مقدار $f(-\frac{۱}{۲}) + f(\frac{۳}{۲})$ کدام است؟

۱) -۲ ۲) -۱

۳) صفر ۴) ۱

کنکور سراسری علوم انسانی خارج از کشور ۱۳۹۸

۳ اگر $f(x) = [۱ - \frac{x}{۲}]$ باشد، مقدار $f(\sqrt{۲}) + f(-\frac{۳}{۲})$، کدام است؟

۱) صفر ۲) ۲

۳) -۱ ۴) ۱

کنکور سراسری علوم انسانی خارج از کشور ۱۳۹۹

۴ ضابطهٔ تابع $y = [-۲x + |x|] + x$ در دامنهٔ $-\frac{۱}{۳} < x < -\frac{۲}{۳}$، کدام است؟ ([ ] نماد جزء صحیح است)

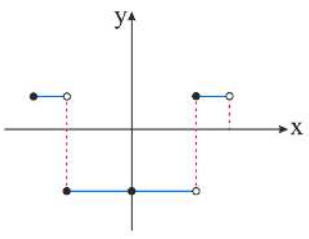
۱) $-۲x$ ۲) $x + ۱$

۳) $x - ۲$ ۴) $۲x + \frac{۸}{۳}$

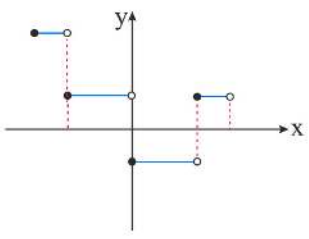
کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۴۰۰

۵ نمودار تابع $y = ۲|[۳x]| - ۱$ به‌ازای $-\frac{۱}{۲} \le x < \frac{۱}{۲}$، کدام است؟

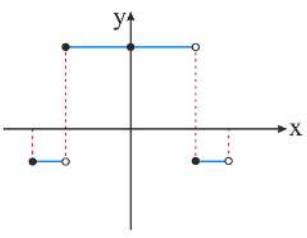
۱)



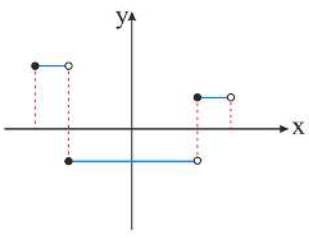
۲)



۳)



۴)



کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

۶ نمودار تابع $y = [x^۲]$، روی بازهٔ $x \in (-۲ , ۲)$ از چند پاره خط تشکیل‌شده است؟ (نماد $[\ ]$ به مفهوم جزء صحیح است)

۱) ۴
۲) ۵
۳) ۶
۴) ۷

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۱

۷ دو تابع با ضابطه های $f(x) = [x] + [-x]$ و $g(x) = x^۲ + x - ۲$ مفروض اند. اگر $g(f(x)) = -۲$ آنگاه مجموعهٔ مقادیر x کدام است؟

۱) $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$
۲) $\mathbb{Z}$
۳) $\mathbb{R}$
۴) $\varnothing$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۹

۸ اگر $x^۲ + x < ۰$ باشد، حاصل $[x] + [x^۲] + [x^۳] + [x^۴]$ کدام است؟

۱) -۲
۲) -۱
۳) صفر
۴) ۱

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۸

۹ برای هر عدد طبیعی $n > ۲$ حاصل $[\sqrt{۴n^۲ - ۳n + ۱}] - ۲[\sqrt{n^۲ - ۲n}]$ کدام است؟ (نماد $[\ ]$ به مفهوم جزء صحیح است.)

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۱

۱۰ اگر $[x - ۲] = ۱$ باشد، نمودارهای دو تابع $f(x) = |x - ۳| - |x - ۴|$ و $g(x) = ۲x^۲ + x - ۱۷$، در چند نقطه مشترک هستند؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) فاقد نقطهٔ مشترک

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۷

پاسخ Homework

۱ گزینه ۴

$$f(\frac{۹}{۴}) = [\frac{۹}{۴} + \frac{۳}{۲}] - [-\frac{۹}{۴}] = [\frac{۱۵}{۴}] - [-\frac{۹}{۴}] = ۳ - (-۳) = ۶$$

$$f(-\frac{۱}{۲}) = [-\frac{۱}{۲} + \frac{۳}{۲}] - [+\frac{۱}{۲}] = [۱] - [\frac{۱}{۲}] = ۱ - ۰ = ۱$$

$$\Rightarrow f(\frac{۹}{۴}) + f(-\frac{۱}{۲}) = ۶ + ۱ = ۷$$

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۳۹۸

۲ گزینه ۱

اعداد داده‌شده را در ضابطهٔ تابع قرار می‌دهیم:

$$f(x) = ۲[x] + [-x]$$

$$\Rightarrow f(-\frac{۱}{۲}) + f(\frac{۳}{۲}) = (۲[-\frac{۱}{۲}] + [-(-\frac{۱}{۲})]) + (۲[\frac{۳}{۲}] + [-\frac{۳}{۲}])$$

$$-۱ < -\frac{۱}{۲} < ۰ \Rightarrow [-\frac{۱}{۲}] = -۱ \ , \ ۰ < \frac{۱}{۲} < ۱ \Rightarrow [\frac{۱}{۲}] = ۰$$

$$-۲ < -\frac{۳}{۲} < -۱ \Rightarrow [-\frac{۳}{۲}] = -۲ \ , \ ۱ < \frac{۳}{۲} < ۲ \Rightarrow [\frac{۳}{۲}] = ۱$$

$$\Rightarrow f(-\frac{۱}{۲}) + f(\frac{۳}{۲}) = (۲ \times (-۱) + ۰) + (۲ \times ۱ + (-۲)) = -۲ + ۰ = -۲$$

کنکور سراسری علوم انسانی خارج از کشور ۱۳۹۸

۳ گزینه ۴

مقدار تابع را به ازای مقادیر خواسته‌شده محاسبه کرده و سپس مجموع را به دست می‌آوریم:

$$f(x) = [۱ - \frac{x}{۲}] \Rightarrow f(\sqrt{۲}) = [۱ - \frac{\sqrt{۲}}{۲}] = ۰$$

توجه کنید که:

$$۱ < \sqrt{۲} < ۲ \Rightarrow \frac{۱}{۲} < \frac{\sqrt{۲}}{۲} < ۱ \Rightarrow -۱ < -\frac{\sqrt{۲}}{۲} < -\frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow ۰ < ۱ - \frac{\sqrt{۲}}{۲} < \frac{۱}{۲} \Rightarrow [۱ - \frac{\sqrt{۲}}{۲}] = ۰$$

$$f(-\frac{۳}{۲}) = [۱ - \frac{(-\frac{۳}{۲})}{۲}] = [۱ + \frac{۳}{۴}] = [\frac{۷}{۴}] = ۱$$

$$\Rightarrow f(\sqrt{۲}) + f(-\frac{۳}{۲}) = ۰ + ۱ = ۱$$

کنکور سراسری علوم انسانی خارج از کشور ۱۳۹۹

۴ گزینه ۲

روش اول: تشریحی

طبق تعریف تابع قدرمطلق، در فاصلهٔ $-\frac{۲}{۳} < x < -\frac{۱}{۳}$ تابع $|x| = -x$ است.

$$y = [-۲x + (-x)] + x = [-۳x] + x$$

برای تعیین $[-۳x]$ باید محدودهٔ تغییرات $-۳x$ را مشخص کنیم.

$$-\frac{۲}{۳} < x < -\frac{۱}{۳} \xrightarrow{\times(-۳)} ۱ < -۳x < ۲ \Rightarrow [-۳x] = ۱$$

بنابراین ضابطهٔ تابع در دامنهٔ موردنظر به‌صورت زیر است:

$$y = [-۲x + |x|] + x = [-۳x] + x = ۱ + x$$

روش دوم : تستی (عددگذاری)

عدد $x = -\frac{۱}{۲} = -۰/۵$ را که در دامنهٔ تابع قرار دارد، در ضابطهٔ تابع و هریک از گزینه‌ها جایگذاری می‌کنیم.

$$y = [-۲(-۰/۵) + |-۰/۵|] + (-۰/۵) = [۱ + ۰/۵] - ۰/۵$$
$$= [۱/۵] - ۰/۵ = ۱ - ۰/۵ = ۰/۵$$

گزینهٔ ۱) $-۲(-۰/۵) = ۱$

گزینهٔ ۲) $-۰/۵ + ۱ = ۰/۵$

گزینهٔ ۳) $-۰/۵ - ۲ = -۲/۵$

گزینهٔ ۴) $۲(-۰/۵) + \frac{۸}{۳} = -۱ + \frac{۸}{۳} = \frac{۵}{۳}$

فقط مقدار به‌دست‌آمده از گزینهٔ "۲" با مقدار تابع برابر است.

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۴۰۰

۵ گزینه ۲

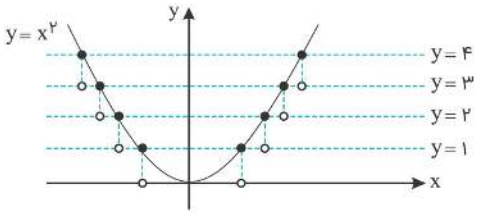
$$-\frac{۱}{۲} \le x < -\frac{۱}{۳} \Rightarrow -\frac{۳}{۲} \le ۳x < -۱ \Rightarrow [۳x] = -۲ \Rightarrow y = ۳$$
$$-\frac{۱}{۳} \le x < ۰ \Rightarrow -۱ \le ۳x < ۰ \Rightarrow [۳x] = -۱ \Rightarrow y = ۱$$
$$۰ \le x < \frac{۱}{۳} \Rightarrow ۰ \le ۳x < ۱ \Rightarrow [۳x] = ۰ \Rightarrow y = -۱$$
$$\frac{۱}{۳} \le x < \frac{۱}{۲} \Rightarrow ۱ \le ۳x < \frac{۳}{۲} \Rightarrow [۳x] = ۱ \Rightarrow y = ۱$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

۶ گزینه ۴

اول نمودار تابع $y = x^۲$ را در بازهٔ $(-۲ , ۲)$ رسم می کنیم.

برای به دست آوردن نمودار تابع $y = [x^۲]$ از روی نمودار تابع $y = x^۲$ در بازهٔ $(-۲ , ۲)$ خطوطی به موازات محور x ها رسم کرده و قسمت هایی از نمودار که بین دو خط متوالی $y = k$ و $y = k + ۱$ $(k \in \mathbb{Z})$ قرار می گیرند را بر روی خط $y = k$ تصویر می کنیم. درنهایت نقاط تلاقی خط و نمودار توپر خواهد شد.



با توجه به شکل، نمودار تابع $y = [x^۲]$ در بازهٔ $(-۲ , ۲)$ $x \in$ از هفت پاره خط تشکیل‌شده است.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۱

۷ گزینه ۳

مقدار $[x] + [-x]$ برای اعداد صحیح و غیرصحیح متفاوت است. بنابراین حواستان باشد که برای $f(x)$ دو مقدار به دست می آید، یک مقدار به ازای $x \in \mathbb{Z}$ است و مقدار دیگر به ازای $x \notin \mathbb{Z}$. یعنی:

$$f(x) = [x] + [-x] = \begin{cases} ۰ & ; x \in \mathbb{Z} \\ -۱ & ; x \notin \mathbb{Z} \ (x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}) \end{cases}$$

ضابطهٔ $g(f(x))$ را برای هر یک از این حالت ها تعیین می کنیم:

$$x \in \mathbb{Z} \Rightarrow f(x) = ۰ \Rightarrow g(f(x)) = g(۰) \xrightarrow{g(x)=x^۲+x-۲} g(۰) = ۰ + ۰ - ۲ = -۲$$

بنابراین به ازای $x \in \mathbb{Z}$ رابطهٔ $g(f(x)) = -۲$ برقرار است.

$$x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z} \Rightarrow f(x) = -۱ \Rightarrow g(f(x)) = g(-۱)$$
$$\xrightarrow{g(x)=x^۲+x-۲} g(-۱) = (-۱)^۲ + (-۱) - ۲ = ۱ - ۱ - ۲ = -۲ \Rightarrow g(f(x)) = -۲$$

پس رابطهٔ $g(f(x)) = -۲$ به ازای تمام xهای صحیح و غیرصحیح یعنی به ازای $\mathbb{R}$ برقرار است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۹

۸ گزینه ۱

اگر $x^۲ + x < ۰$ باشد، $-۱ < x < ۰$ خواهد بود، بنابراین:

$$-۱ < x < ۰ \Rightarrow [x] = -۱$$
$$-۱ < x < ۰ \Rightarrow ۰ < x^۲ < ۱ \Rightarrow [x^۲] = ۰$$
$$-۱ < x < ۰ \Rightarrow -۱ < x^۳ < ۰ \Rightarrow [x^۳] = -۱$$
$$-۱ < x < ۰ \Rightarrow ۰ < x^۴ < ۱ \Rightarrow [x^۴] = ۰$$
$$\Rightarrow [x] + [x^۲] + [x^۳] + [x^۴] = -۱ + ۰ - ۱ + ۰ = -۲$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۸

۹ گزینه ۳

بعضی از تست های جزء صحیح را با یک عددگذاری ساده می توانیم حل کنیم. حال این تست را به دو روش اصلی و عددگذاری حل می کنیم.

روش اول:

به ازای هر عدد طبیعی n داریم:

$$۴n^۲ - ۴n + ۱ < ۴n^۲ - ۳n + ۱ < ۴n^۲ \Rightarrow (۲n-۱)^۲ < ۴n^۲ - ۳n + ۱ < (۲n)^۲$$
$$\xrightarrow{\text{از نامعادله جذر می گیریم}} ۲n - ۱ < \sqrt{۴n^۲ - ۳n + ۱} < ۲n \Rightarrow [\sqrt{۴n^۲ - ۳n + ۱}] = ۲n - ۱$$

از طرف دیگر وقتی $n > ۲$ باشد، رابطهٔ زیر برقرار است:

$$n^۲ - ۴n + ۴ < n^۲ - ۲n < n^۲ - ۲n + ۱ \Rightarrow (n-۲)^۲ < n^۲ - ۲n < (n-۱)^۲$$
$$\xrightarrow{\text{از نامعادله جذر می گیریم}} n - ۲ < \sqrt{n^۲ - ۲n} < n - ۱ \Rightarrow [\sqrt{n^۲ - ۲n}] = n - ۲$$

پس حاصل عبارت داده‌شده به ازای $n > ۲$ برابر است با:

$$[\sqrt{۴n^۲ - ۳n + ۱}] - ۲[\sqrt{n^۲ - ۲n}] = ۲n - ۱ - ۲(n-۲) = ۲n - ۱ - ۲n + ۴ = ۳$$

روش دوم (روش عددگذاری):

در صورت تست به این نکته اشاره‌شده که به ازای هر عدد طبیعی بزرگ تر از ۲ حاصل عبارت یکسان است، کافی است یک عدد طبیعی بزرگ تر از ۲ را انتخاب کرده و حاصل عبارت داده‌شده را به ازای آن محاسبه کنیم. برای حل آسان‌تر، n را ۳ در نظر می گیریم:

$$A = [\sqrt{۴n^۲ - ۳n + ۱}] - ۲[\sqrt{n^۲ - ۲n}] \xrightarrow{n=۳} A = [\sqrt{۳۶ - ۹ + ۱}] - ۲[\sqrt{۹ - ۶}]$$
$$= [\sqrt{۲۸}] - ۲[\sqrt{۳}] = ۵ - ۲(۱) = ۵ - ۲ = ۳$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۱

۱۰ گزینه ۴

$$[x-۲]=۱ \Rightarrow ۱ \le x-۲ < ۲ \Rightarrow ۳ \le x < ۴$$

اگر $۳ \le x < ۴$ باشد، پس $x-۳ \ge ۰$ و $x-۴ < ۰$ خواهد بود.

$$f(x)=\underbrace{|x-۳|}_{\text{مثبت}}-\underbrace{|x-۴|}_{\text{منفی}}=x-۳+(x-۴)=۲x-۷$$

$$f(x)=g(x) \Rightarrow ۲x-۷=۲x^۲+x-۱۷ \Rightarrow ۲x^۲-x-۱۰=۰$$

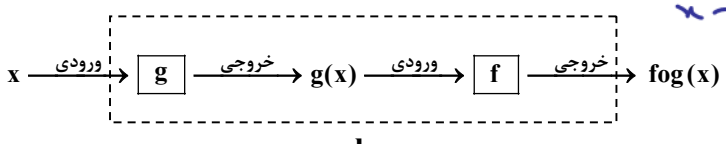
$$\Rightarrow (۲x-۵)(x+۲)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{۵}{۲} & \times \\ x=-۲ & \times \end{cases}$$

هیچ‌کدام از جواب‌های به‌دست‌آمده در فاصلهٔ $۳ \le x < ۴$ نیستند؛ پس معادلهٔ $f(x)=g(x)$ هیچ جوابی ندارد.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۷

تابع مرکّب

به شکل زیر دقّت کنید، می‌خواهیم با هم فرآیند آن را مرور کنیم. اگر x را به عنوان ورودی به ماشین g دهیم، خروجی آن $g(x)$ خواهد بود، حال این خروجی را به عنوان ورودی به ماشین f می‌دهیم و در نتیجه خروجی $f(g(x))$ حاصل می‌شود که ما آن را $fog(x)$ می‌نامیم. پس در واقع می‌توانیم بگوییم $fog(x)$، ماحصل رفتار ماشین h است وقتی به آن ورودی x را می‌دهیم.



تمرین: اگر $f=\{(1,2),(3,-1),(2,0),(-1,4),(5,-7)\}$ و $g=\{(0,-1),(5,2),(3,5),(-2,4)\}$، تابع fog را در صورت امکان بنویسید.

تمرین: اگر $f=\{(1,1),(2,3),(3,3),(4,2)\}$ و $g=\{(1,2),(2,3),(3,1),(4,6)\}$ باشد، برد تابع fog چند عضو دارد؟

۱) هیچ ۲) یک ۳) دو ۴) سه

پاسخ: گزینه‌ی «۳» ـ اول x را در g قرار می‌دهیم (چون در fog، تابع g تابع درونی است) و بعد حاصلش را در f:

$$۱ \xrightarrow{g} ۲ \xrightarrow{f} ۳ \Rightarrow (۱,۳) \qquad ۲ \xrightarrow{g} ۳ \xrightarrow{f} ۳ \Rightarrow (۲,۳)$$

$$۳ \xrightarrow{g} ۱ \xrightarrow{f} ۱ \Rightarrow (۳,۱) \qquad ۴ \xrightarrow{g} ۶ \xrightarrow{f} \boxtimes$$

پس fog به صورت $fog=\{(1,3),(2,3),(3,1)\}$ است که بردش برابر $R=\{1,3\}$ می‌باشد و دو عضو دارد.

تمرین: اگر $f=\{(1,2),(2,3),(3,4),(4,5)\}$ باشد، تابع $((fof)-f)$ چگونه تابعی است؟

۱) تهی ۲) همانی ۳) ثابت ۴) خطی

پاسخ: گزینه‌ی «۳» ـ ابتدا fof را پیدا می‌کنیم:

$$۱ \xrightarrow{f} ۲ \xrightarrow{f} ۳ \Rightarrow (۱,۳)$$
$$۲ \xrightarrow{f} ۳ \xrightarrow{f} ۴ \Rightarrow (۲,۴)$$
$$۳ \xrightarrow{f} ۴ \xrightarrow{f} ۵ \Rightarrow (۳,۵) \quad \Rightarrow fof=\{(1,3),(2,4),(3,5)\}$$
$$۴ \xrightarrow{f} ۵ \xrightarrow{f} \boxtimes$$

حالا $((fof)-f)$ را تشکیل می‌دهیم:

$$((fof)-f)=\{(1,1),(2,1),(3,1)\}$$

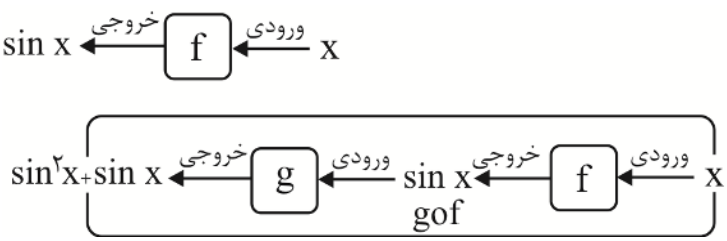
می‌بینیم که $((fof)-f)$ همواره مقداری ثابت یعنی برابر ۱ دارد؛ پس تابع ثابت است.

تمرین: $f=\{(2,1),(3,2),(4,5),(1,7)\}$ و $g=\{(1,2),(3,1),(a,3),(b,1)\}$ مفروض‌اند. اگر $(4,2)\in fog$ و $(4,1)\in gof$ باشند، دوتایی مرتب (a,b) کدام است؟ (سراسری ریاضی)

۱) $(3,4)$ ۲) $(4,3)$ ۳) $(4,5)$ ۴) $(5,4)$

ترکیب تابع با ایده‌ی ماشین

اگر هر تابع را به عنوان یک ماشین در نظر بگیریم که x را به عنوان یک مقدار ورودی می‌پذیرد و مقدار $f(x)$ را به عنوان خروجی تحویل می‌دهد می‌توانیم ترکیب تابع‌ها را به عنوان ترکیب ماشین‌ها که به دنبال هم روی یک مقدار ورودی x اثر می‌گذارند در نظر بگیریم. مثلن اگر $f(x)$ تابعی با ضابطه‌ی $f(x)=\sin x$ و $g(x)$ تابعی با ضابطه‌ی $g(x)=x^2+x$ باشد، ترکیب این دو تابع را می‌توانیم به شکل زیر نشان دهیم:



تمرین: اگر $f(x)=\frac{2x+3}{2-x}$ و $g(x)=\frac{1-3x}{x+2}$ باشند، ضابطه‌ی تابع $g(f(x))$ کدام است؟ (تجربی خارج ۹۶)

۱) x ۲) $-x$ ۳) $-x-1$ ۴) $x+1$

راه دوم: $g(f(x))=\frac{1-3\left(\frac{2x+3}{2-x}\right)}{\left(\frac{2x+3}{2-x}\right)+2}$ ساده کن $\xrightarrow{x=1}$ -2

راه اول: $\xrightarrow{x=1}$ $g(f(1)=5)=g(5)=\frac{-14}{7}=-2$

فقط گزینه ۳ $g(f(11))=-2$

تمرین: اگر $f(x)=2-|x-2|$ ، ضابطه‌ی تابع $f(f(x))$ برابر کدام است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور ۹۰)

۱) x ۲) $4-x$ ۳) $f(x)$ ✓ ۴) $2-f(x)$

$y=f(f(x))=2-|f(x)-2|=2-|2-|x-2|-2|=2-|x-2|=f(x)$

توضیح:

$=2-|-|x-2||$

$=2-||x-2||=2-|x-2|=f(x)$

تمرین: اگر $f(x)=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ و $g(x)=\cos x$ باشند، ضابطهٔ تابع $y=f(g(x))$ کدام است؟ (x در ربع سوم است.)

۱) $\cot x$ ۲) $\tan x$ ۳) $-\tan x$ ۴) $-\cot x$

پاسخ: گزینهٔ «۳» ـ ضابطهٔ تابع $y=f(g(x))$ را به دست می‌آوریم. ببینید:

$\sin^2x+\cos^2x=1 \Rightarrow \sin^2x=1-\cos^2x$

$$y=f(g(x))=f(\cos x)=\frac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{\cos x}=\frac{\sqrt{\sin^2 x}}{\cos x}=\frac{|\sin x|}{\cos x}=-\frac{\sin x}{\cos x}=-\tan x$$

از طرفی x در ربع سوم است، پس $\sin x$ عددی منفی است، در نتیجه خواهیم داشت:

$$y=f(g(x))=\frac{|\sin x|}{\cos x}=\frac{-\sin x}{\cos x}=-\tan x$$

تمرین: اگر خروجی ماشین مقابل $\frac{4}{3}$ باشد، مقدار ورودی کدام است؟ (سراسری ریاضی)

ورودی $\rightarrow \boxed{2x-2} \rightarrow \boxed{\frac{x}{\sqrt{x+1}}} \rightarrow$ خروجی

۱) $\frac{11}{9}$ ۲) $\frac{7}{2}$ ۳) ۳ ۴) ۴

با کنترل گزینه ها ورودی $x=3$ خروجی $\frac{4}{3}$ داریم.

تمرین: اگر $f(x)=\frac{x}{x-1}$ باشد، ضابطه تابع $f(x^2)-2f(x)+1$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{1-x^2}$ ۲) $\frac{2x}{x^2-1}$ ۳) $\frac{2x+1}{1-x^2}$ ۴) $\frac{2x-1}{x^2-1}$

راه تستی $x=2$ $f(4)-2f(2)+1=\frac{4}{3}-4+1=-\frac{5}{3}$

فقط گزینه ۲ با ورودی $x=2$ خروجی $-\frac{5}{3}$ دارد.

راه کلی $f(x^2)-2f(x)+1$

$\frac{x^2}{x^2-1}-\frac{2x}{x-1}+1=$ ساده کن $=-\frac{5}{3}$

تمرین: اگر $f(x)=x^3-6x^2+12x+5$ باشد، آن‌گاه $f(\sqrt[3]{3}+2)$ کدام است؟

۱) صفر ۲) $(\sqrt[3]{3}+1)^3-1$ ۳) ۵ ۴) ۱۶

$(x\pm 2)^3=x^3\pm 6x^2+12x\pm 8$

$f(x)=(x^3-6x^2+12x-8)+13$

$f(x)=(x-2)^3+13$

$f(\sqrt[3]{3}+2)=(\sqrt[3]{3}+2-2)^3+13=16$ گزینه ۴

راه ۱

$f(\sqrt{2})=\frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{2}-\sqrt{2}}=\frac{2}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ $f(\frac{1}{\sqrt{2}})=\frac{2(\frac{1}{\sqrt{2}})=1}{3(\frac{1}{\sqrt{2}})-\sqrt{2}=\frac{3-2=1}{\sqrt{2}}}=\sqrt{2}$ $f(\sqrt{2})=\frac{1}{\sqrt{2}}$

تمرین: اگر $f(x)=\frac{\sqrt{2}x}{3x-\sqrt{2}}$ باشد، حاصل $fofof(\sqrt{2})$ کدام است؟ (ریاضی ۱۴۰۱)

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ $f(f(f(\sqrt{2})))$ ۳) $\sqrt{2}$ ۴) ۲

ترکیب هر تابع با وارونش تابع همانی است.

$f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ ، $f^{-1}(x)=\frac{-dx+b}{cx-a}$ ، $a=-d \Rightarrow f=f^{-1}$ ، $a+d=0$

$f(f^{-1}(x))=x$

$f^{-1}(f(x))=x$

$f(x)=\frac{\sqrt{2}x}{3x-\sqrt{2}}$ ، $a+d=0 \Rightarrow f=f^{-1}$

$f\left(\underbrace{f(f(\sqrt{2}))}_{\sqrt{2}}\right)=f(\sqrt{2})=\frac{\sqrt{2}\sqrt{2}}{3\sqrt{2}-\sqrt{2}}=\frac{2}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

تمرین: تابع با ضابطه‌ی $g(x)=x-\sqrt{x}$ مفروض است. اگر نمودار تابع f، محور xها را در دو نقطه به طول‌های ۶ و $-\frac{1}{4}$ قطع کند، آنگاه، نمودار تابع fog، محور xها را با کدام طول قطع می‌کند؟ (سراسری ریاضی خارج ۹۴)

۱) $\frac{1}{4}$ و $\frac{1}{9}$ ۲) $\frac{1}{4}$ و ۹ ✓ ۳) $\frac{1}{4}$ و ۴ ۴) ۹ و ۴

$f(7)=0$

$f(-\frac{1}{4})=0$

$f(g(x))=0$ ، $g(x)=\frac{1}{4}$ یا 7

$g(x)=x-\sqrt{x}$ ، حدس از گزینه‌ها

$7=x-\sqrt{x} \Rightarrow x=9$

$-\frac{1}{4}=x-\sqrt{x} \Rightarrow x=\frac{1}{4}$

تمرین: اگر $5f(x-2)+f(2-x)=4x+1$ باشد، آن‌گاه $f(3)$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۴/۵ ۳) ۵ ۴) ۵/۵

پاسخ: گزینهٔ «۲»

$$\begin{cases} x=5: 5f(3)+f(-3)=21 \\ x=-1: 5f(-3)+f(3)=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -25f(3)-5f(-3)=-105 \\ 5f(-3)+f(3)=-3 \end{cases} \Rightarrow -24f(3)=-108 \Rightarrow f(3)=4/5$$

هر وقت بخواهیم از روی تابعِ (یه عبارتِ xدار)f ضابطه‌ی $f(x)$ رو پیدا کنیم، کافیه توی پرانتز رو t بگیریم و سپس x رو تنها کنیم و هرجا سمت راستِ مساوی x دیدیم مقدارش رو برحسب t جای‌گذاری کنیم و آخرش هم $t \to x$.

تمرین: اگر $f(2x-3)=4x^2-14x+13$ باشد، ضابطهٔ $f(x)$ برابر کدام است؟ (تجربی ۹۷)

۱) x^2-x+3 ۲) x^2-2x-1 ۳) x^2-2x+1 ۴) x^2-x+1

راه تستی

تنها گزینه‌ای که -3 به ۱۳ میبنه ۴ هست

$f(-3)=13$

اف اد نی هست که به ازای $x=-3$ به ۱۳ نه فقط تک در بیاد!

راه کلاسیک

$f(2x-3)=4x^2-14x+13=(2x-3)^2-2x+4$

$f(2x-3)=(2x-3)^2-(2x-3)+1$

$f(x)=x^2-x+1$ گزینه ۲

$f(2x-3)=4(\frac{t+3}{2})^2-14(\frac{t+3}{2})+13$

$2x-3=t$ ، $x=\frac{t+3}{2}$

$=(t+3)^2-7(t+3)+13$

$f(t)=t^2-t+1$

$f(x)=x^2-x+1$

تمرین: اگر $g(x)=2x-3$ و $(fog)(x)=4(x^2-4x+5)$ باشند، تابع $f(x)$ کدام است؟ (ریاضی داخل ۹۳)

۱) x^2-4x+3 ۲) x^2-4x+5 ۳) x^2-2x+5 ۴) x^2-2x+3

$f(g(x))=4(x^2-4x+5)$ ، $2x-3$

$x=0 \Rightarrow f(-3)=20$ فقط گزینه ۳

پاسخ: گزینهٔ «۳» ـ می‌دانیم $(fog)(x)$ همان $f(g(x))$ است. پس می‌توان نوشت:

$$f(g(x))=4(x^2-4x+5) \xrightarrow{g(x)=2x-3} f(2x-3)=4x^2-16x+20$$

حالا برای این‌که $f(x)$ را به دست آوریم، از تغییر متغیر $2x-3=t$ کمک می‌گیریم. پس داریم:

$$2x-3=t \Rightarrow 2x=t+3 \Rightarrow x=\frac{t+3}{2}$$

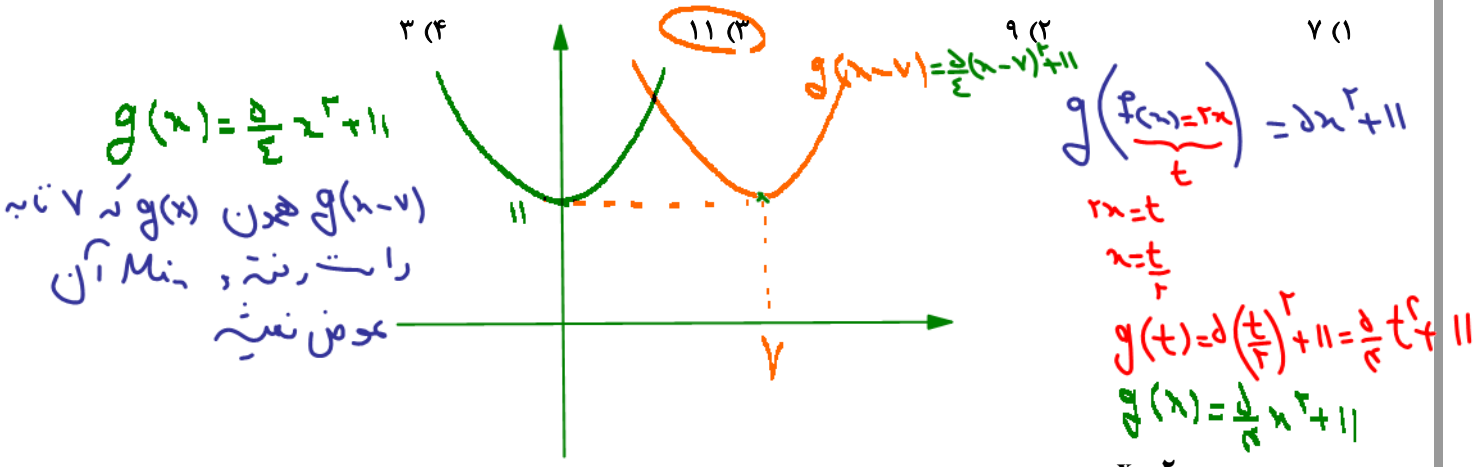
$$f(t)=4\left(\frac{t+3}{2}\right)^2-16\left(\frac{t+3}{2}\right)+20=4\left(\frac{t^2+6t+9}{4}\right)-8(t+3)+20$$

$$\Leftrightarrow f(t)=t^2+6t+9-8t-24+20=t^2-2t+5$$

پس ضابطهٔ تابع $f(x)$ به صورت $f(x)=x^2-2x+5$ است.

تمرین: اگر $gof(x)=5x^2+11$ و $f(x)=2x$ باشد، کم‌ترین مقدار $g(x-7)$ چقدر است؟ (تجربی ۱۴۰۱)

۱) ۷ ۲) ۹ ۳) ۱۱ ۴) ۳



تمرین: اگر $f\left(\frac{x-2}{x+1}\right)=x+1$ باشد، $f(x)$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{1-x}$ ۲) $\frac{3}{x-1}$ ۳) $\frac{1-x}{3}$ ۴) $\frac{x-1}{3}$

پاسخ: توی پرانتز رو t می‌گیریم.

$$\frac{x-2}{x+1}=t$$

پس $f(t)=x+1$ حالا باید x رو تنها کنیم:

$$x-2=tx+t \Rightarrow tx-x=-t-2 \Rightarrow x(t-1)=-t-2 \Rightarrow x=\frac{-t-2}{t-1} \quad (*)$$

حالا سمت راست هرجا x دیدیم $(*)$ رو می‌ذاریم:

$$f(t)=\frac{-t-2}{t-1}+1 \xrightarrow{t\to x} f(x)=\frac{-x-2}{x-1}+1=\frac{-x-2+x-1}{x-1}=\frac{-3}{x-1}=\frac{3}{1-x}$$

بعضی وقت‌ها هم نیازی به t نیست فقط کافیه از اتحادها استفاده کنیم:

$$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$$

$$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$$

$$a^2+b^2=(a-b)^2+2ab$$

۲ تا مثال خوب:

۱) $f\left(x-\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}-4$, $f(x)=?$

پاسخ:

$$f(x-\frac{1}{x})=(x-\frac{1}{x})^2+2x\frac{1}{x}-4=(x-\frac{1}{x})^2+2-4=(x-\frac{1}{x})^2-2$$

حالا $x-\frac{1}{x}=t$ پس:

$$f(t)=t^2-2\xrightarrow{t\to x}f(x)=x^2-2$$

واسه حلّش از اتحاد $\boxed{a^2+b^2=(a-b)^2+2ab}$ استفاده کردیم.

۲) $f(x+\frac{1}{x})=x^2+\frac{1}{x^2}-4$

پاسخ:

$$f(x+\frac{1}{x})=(x+\frac{1}{x})^2-2x\cdot\frac{1}{x}-4=(x+\frac{1}{x})^2-2-4=(x+\frac{1}{x})^2-6$$

حالا $x+\frac{1}{x}=t$ پس:

$$f(t)=t^2-6\xrightarrow{t\to x}f(x)=x^2-6$$

واسه حلّش از اتحاد $\boxed{a^2+b^2=(a+b)^2-2ab}$ استفاده کردیم.

تمرین: اگر $f(x+\frac{1}{x})=x^3+\frac{1}{x^3}$ ضابطه‌ی تابع $f(x)$ کدام است؟

۱) x^2+3x ۲) x^3-3x ۳) $(x-1)^3$ ۴) $(x+1)^3$

پاسخ: باید ببینیم f با ورودی‌های خود چه کرده است. یعنی دقیقاً بلایی که به سر $x+\frac{1}{x}$ اومده چیه؟

$$f(x+\frac{1}{x})=x^3+\frac{1}{x^3}=(x+\frac{1}{x})^3-3x\cdot\frac{1}{x}(x+\frac{1}{x})=(x+\frac{1}{x})^3-3(x+\frac{1}{x})$$

الان اگر $x+\frac{1}{x}=t$ بگیریم:

$$f(t)=t^3-3t$$

پس $t\to x$:

$$f(x)=x^3-3x$$

تذکر: چنانچه تابع fog و تابع بیرونی f را داشته باشیم و تابع درونی g را بخواهیم، ابتدا به جای xهای تابع f، $g(x)$ قرار می‌دهیم و تابع $f(g(x))$ را برحسب $g(x)$ می‌یابیم. از آنجا که تابع fog را هم داریم، با مقایسه‌ی این دو ضابطه، تابع g را بدست می‌آوریم.

تمرین: اگر f و g به عنوان ماشین به صورت $x\to f\to g\to 2x$ و $g(x)=3x+4$ باشند، آنگاه مقدار $f(5)$ کدام است؟

(سراسری تجربی خارج از کشور ۹۱)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

تمرین: اگر $f(x)=x^2-x-2$ و $f(g(x))=x^2+x-2$، آن‌گاه $(f+g)(x)$ کدام گزینه می‌تواند باشد؟

(خارج تجربی ۹۰)

۱) x^2-1 ۲) x^2+1 ۳) x^2-2x ۴) x^2+2x

تمرین: اگر $f(x)=x^2+1$ و $(fog)(x)=x^3-3x^2+3x$ باشد، با شرط $x\geq 1$، ضابطه‌ی $g(x)$ کدام است؟

۱) $\sqrt{x-1}$ ۲) $\sqrt[3]{x-1}$ ۳) $(x-1)\sqrt{x-1}$ ۴) $(x-1)\sqrt[3]{x-1}$

پاسخ: گزینه‌ی «۳» ـ $(fog)(x)$ یعنی $f(g(x))$ پس $(fog)(x)=g^2+1$، بنابراین:

$$g^2+1=x^3-3x^2+3x \Rightarrow g^2=x^3-3x^2+3x-1 \Rightarrow g^2=(x-1)^3 \Rightarrow g=\sqrt{(x-1)^3}$$

بنابراین ضابطه‌ی $g(x)$ به صورت $g(x)=|x-1|\sqrt{x-1}$ است. شرط $x\geq 1$ هم برای این داده شده که در این صورت

$$g(x)=(x-1)(\sqrt{x-1})$$

دامنه‌ی تابع مرکب

اگر f و g دو تابع باشند، آنگاه ترکیب آن‌ها یعنی $f(g(x))$ به شرطی تشکیل می‌شود که اولاً x اجازه داشته باشد به عنوان دامنه وارد g بشود $(x\in D_g)$ و ثانیاً، $g(x)$ هم اجازه داشته باشد تا به عنوان دامنه وارد $f(x)$ بشود $(g(x)\in D_f)$ و خواهیم داشت:

$$D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}$$

$$D_{gof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}$$

برای ترکیب $g(f(x))$ نیز داریم:

اگر نخواستید از راه تعریف، دامنه را بدست آورید، ضابطه‌ی fog یا gof را نوشته ولی به هیچ عنوان، آن را ساده نمی‌کنیم و از روی ضابطه، دامنه را بدست می‌آوریم.

تمرین: اگر $f(x)=\frac{2}{x-1}$ و $g(x)=\frac{3}{x}$، دامنه و ضابطه‌ی fog را به دست آورید.

تمرین: اگر $f(x)=\sqrt{1-x}$ و $g(x)=\sqrt{x-1}$، دامنه‌ی تابع fog کدام است؟

۱) $[0,1]$ ۲) $[0,2]$ ۳) $[1,2]$ ۴) $[1,3]$

تمرین: اگر $f(x)=4x^2-1$ و $g(x)=\sqrt{1-x^2}$ باشد، دامنه‌ی تعریف $fog(x)$ کدام است؟

۱) $[-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}]$ ۲) $[-1,1]$ ۳) $(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ ۴) $[-1,1)$

$y=f(g(x))=4g^2(x)-1=4(\sqrt{1-x^2})^2-1$

$1-x^2\geq 0$

$1\geq x^2$

$|x|\leq 1$

$-1\leq x\leq 1$

تمرین: اگر $f(x)=\frac{1+x^2}{1-x^2}$ و $g(x)=\sqrt{x-x^2}$ باشند، دامنه‌ی تابع gof، کدام است؟ (ریاضی ۹۶)

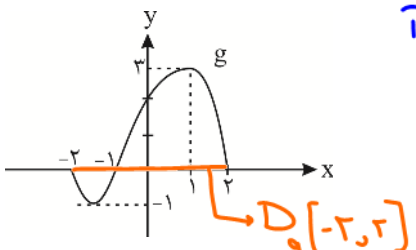
۱) $[0,1)$ ۲) $\{0\}$ ۳) $(-1,1)$ ۴) $\mathbb{R}-\{1,-1\}$

$y=g(f(x))=\sqrt{f(x)-f^2(x)}=\sqrt{(\frac{1+x^2}{1-x^2})-(\frac{1+x^2}{1-x^2})^2}$

$x=\frac{1}{2}\longrightarrow g(f(\frac{1}{2}))=\sqrt{(\frac{5}{3})-(\frac{5}{3})^2}=\frac{5}{3}-\frac{25}{9}=\frac{15-25}{9}=-\frac{10}{9}<0$ غ ق ق

هر بازه‌ی شامل $x=\frac{1}{2}$ غلط است پس فقط گزینه ۲ درست!

تمرین: اگر $f(x)=4x^2-2$ و نمودار تابع g به صورت زیر باشد، دامنه‌ی تعریف تابع gof کدام است؟



۱) $[-1,1]$ ✓

۲) $[\frac{1}{2},\frac{\sqrt{5}}{2}]$

۳) $[-\frac{\sqrt{5}}{2},-\frac{1}{2}]$

۴) $[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$

$D_{g(f(x))}=\{x\in D_f \;,\; f(x)\in D_g\}$

$x\in\mathbb{R}$ ، $-2\leq 4x^2-2\leq 2$

$0\leq 4x^2\leq 4$

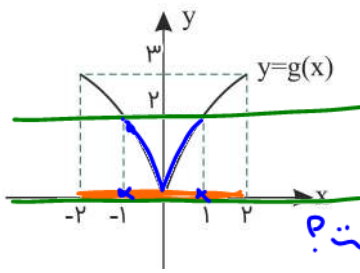
$0\leq x^2\leq 1$

$x\in\mathbb{R}$ $x^2\leq 1$

$|x|\leq 1$

$-1\leq x\leq 1$ $\Rightarrow$ $[-1,1]$ (ب) (ب) (ب)

تمرین: اگر $D_f=[0,2]$ باشد و نمودار تابع g به صورت زیر باشد، دامنهٔ fog کدام است؟



۱) $[-2,2]$

۲) $[-1,1]$

۳) $[-2,-1]\cup[1,2]$

۴) $[0,2]$

$D_{f(g(x))}=\{x\in D_g \;,\; g(x)\in D_f\}=(\text{ب})\cap(\text{ب})=[-1,1]$

$y=2$

$-2\leq g(x)\leq 2$ (ب)

$-1\leq x\leq 1$ (ب)

$y=0$

در کدام x ها تابع g بین خط افقی $y=0$ و $y=2$ است؟

مقایسه‌ی دامنه‌ی $f(x)$ و $f(g(x))$

۱) اگر دامنه‌ی تابع $f(x)$ بازه‌ی $[a,b]$ باشد و بخواهیم دامنه‌ی تابع $f(g(x))$ را پیدا کنیم، باید نامعادله‌ی $a \le g(x) \le b$ را حل کنیم. جواب آخر برابر اشتراک جواب این نامعادله و دامنه‌ی تابع g است.

۲) اگر دامنه‌ی تابع $f(g(x))$ بازه‌ی $[a,b]$ باشد و بخواهیم دامنه‌ی تابع $f(x)$ را پیدا کنیم، باید برد تابع g را به ازای xهای متعلق به بازه‌ی $[a,b]$ پیدا کنیم.

تمرین: اگر دامنه‌ی تابع f بازه‌ی $[۳,۱۲]$ باشد، دامنه‌ی تابع $f(\frac{x}{۳}-۳)$ کدام است؟

۱) $[-۲,۱]$ ۲) $[-۱,۲]$ ۳) $[۱۸,۴۵]$ ۴) $[۶,۳۹]$

پاسخ: گزینه‌ی «۳» ـ همان‌طور که گفتیم باید نامعادله‌ی $۳ \le \frac{x}{۳}-۳ \le ۱۲$ را حل کنیم:

$$۳ \le \frac{x}{۳}-۳ \le ۱۲ \Rightarrow ۶ \le \frac{x}{۳} \le ۱۵ \Rightarrow ۱۸ \le x \le ۴۵$$

پس دامنه‌ی تابع $f(\frac{x}{۳}-۱)$ برابر بازه‌ی $[۱۸,۴۵]$ است.

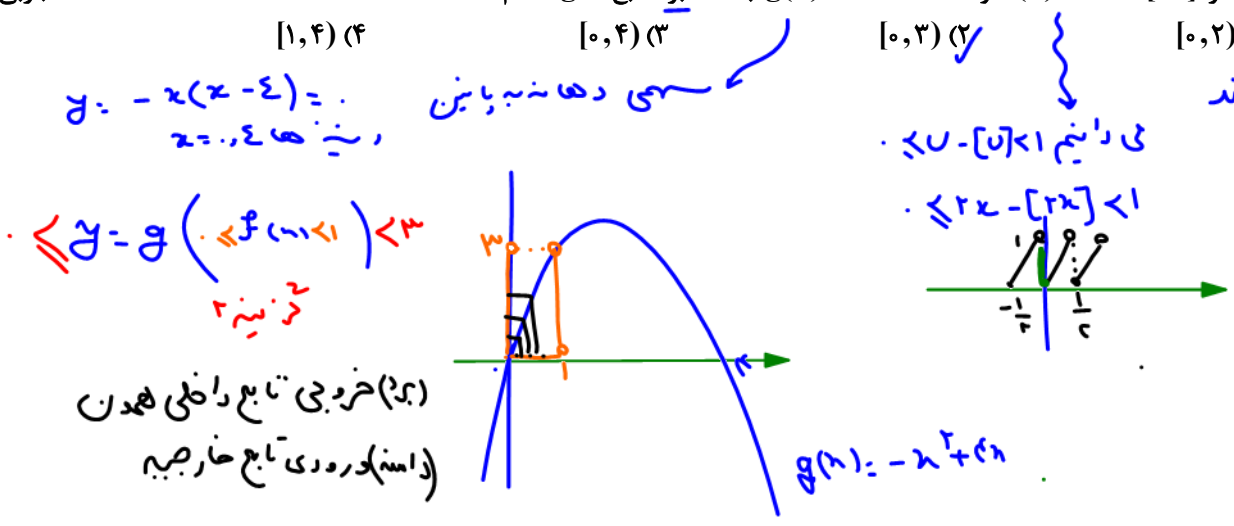
تمرین: اگر دامنه‌ی تابع $f([x])$ بازه‌ی $(۱,۵]$ باشد، دامنه‌ی تابع $f(\sqrt{x})$ حتماً شامل کدام مجموعه است؟

۱) $\{۱,۲,۳,۴\}$ ۲) $\{۱,۴,۹,۱۶\}$ ۳) $[۱,۱۶]$ ۴) $[۱,۲]$

پاسخ: گزینه‌ی «۲» ـ اول برد $[x]$ را به ازای $۱ \le x < ۵$ پیدا می‌کنیم. اگر $۱ \le x < ۵$ باشد، $[x]$ مقادیری برابر ۱، ۲، ۳ و ۴ دارد، پس دامنه‌ی تابع $f(x)$ مجموعه‌ی $\{۱,۲,۳,۴\}$ است. حالا دامنه‌ی تابع $f(\sqrt{x})$ را پیدا می‌کنیم. اگر $\sqrt{x}$ بخواهد برابر ۱ یا ۲ یا ۳ یا ۴ باشد x باید برابر ۱، ۴، ۹ و ۱۶ باشد، پس دامنه‌ی تابع $f(\sqrt{x})$ حتماً شامل اعضای مجموعه‌ی $\{۱,۴,۹,۱۶\}$ است. دقت کنید که دامنه‌ی تابع $\sqrt{x}$ ممکن است شامل تمام بازه‌ی $(۱,۱۶]$ هم باشد.

تمرین: اگر $f(x)=۲x-[۲x]$ و $g(x)=-x^۲+۴x$ باشند، برد تابع gof، کدام است؟ (تجربی ۹۹)

۱) $[۰,۲)$ ۲) $[۰,۳)$ ۳) $[۰,۴)$ ۴) $[۱,۴)$



Homework (1)

۱ اگر $f=\{(\frac{۱}{۹},-۱),(\frac{۱}{۳},۱),(-\frac{۱}{۴},۳),(\frac{۱}{۴},-۳)\}$ و $g(x)=-|x|\sqrt{x}$ باشد، مقدار a کدام $fog^{-۱}(a)=-۳$ است؟

۱) $-\frac{۱}{۹}$ ۲) $\frac{۱}{۹}$

۳) $-\frac{۱}{۸}$ ۴) $\frac{۱}{۸}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

۲ اگر $f(x)=x^{۲}-[x]$ و $f(af(\sqrt{۵}))=۲$ باشد، کدام می‌تواند مقدار a باشد؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $-\frac{۱}{۳}$

۳) $\frac{۱}{۵}$ ۴) $-\frac{۱}{۵}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۳

۳ اگر $f(x)=۲[x]-x$ و $g(x)=f([x+f(x)])$ باشد، $gof(-\frac{۵}{۳})$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) -۴

۳) -۶ ۴) ۶

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۴ اگر $f(x)=x+[x]$ و $g(x)=f([x-f(x)])$ باشد، $fog(-\frac{۱}{۳})$ کدام است؟

۱) -۲ ۲) ۲

۳) -۴ ۴) ۴

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

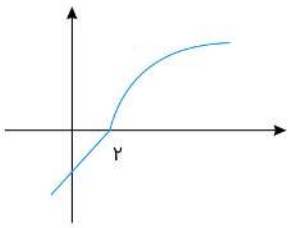
۵ اگر $g(x)$ وارون تابع $f(x)=۱+x-۲\sqrt{x}$، $x\geq ۱$ باشد، $(gog)(۱)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۴

۳) ۹ ۴) صفر

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۶ اگر $f(x)=\left|\frac{۱}{۲}x-۱\right|$ و شکل زیر نمودار تابع $g(x)$ باشد، معادلهٔ $g(f(g(x+۲)))=۰$ چند ریشه دارد؟



۱) ۱

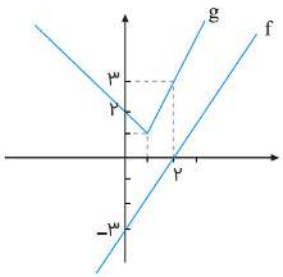
۲) ۲

۳) ۳

۴) ۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۲

۷ باتوجه‌به نمودارهای f و g در شکل زیر، حاصل $gog(۰)\times gof^{-۱}(-۲)$ کدام است؟



۱) ۶

۲) ۴

۳) -۴

۴) -۶

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

۸ اگر $f(x)=\frac{\sqrt{۲}x}{۳x-\sqrt{۲}}$ باشد، حاصل $fofof(\sqrt{۲})$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{\sqrt{۲}}$

۲) $\sqrt{۲}$

۳) ۲

۴) $\frac{۱}{۲}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۱

۹ اگر $gof(x)=۵x^{۲}+۱۱$ و $f(x)=۲x$ باشد، کمترین مقدار $g(x-۷)$ چقدر است؟

۱) ۳

۲) ۷

۳) ۹

۴) ۱۱

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

۱۰ فرض کنید $f(x)=\begin{cases}-۱ & ;x<-۱\\ x & ;-۱\le x\le ۱\\ ۱ & ;x>۱\end{cases}$ و $g(x)=۱-x^{۲}$، ماکزیمم مقدار تابع $gof-fog$، کدام است؟

۱) -۱

۲) صفر

۳) $\frac{۱}{۲}$

۴) ۱

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۰

پاسخ Homework (1)

۱ گزینه ۳

$$(fog^{-1})(a) = -۳ \Rightarrow f(g^{-1}(a)) = -۳ \Rightarrow g^{-1}(a) = \frac{۱}{۴}$$

$$\Rightarrow a = g(\frac{۱}{۴}) = -\frac{۱}{۴} \times \frac{۱}{۲} = -\frac{۱}{۸}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

۲ گزینه ۲

ابتدا $f(\sqrt{۵})$ را حساب می‌کنیم.

$$f(\sqrt{۵}) = ۵ - [\sqrt{۵}] = ۵ - ۲ = ۳$$

حال از رابطه جایگذاری شده a را به‌دست می‌آوریم.

$$f(۳a) = ۲ \Rightarrow ۹a^{۲} - [۳a] = ۲$$

مسلماً حل معادله بالا با جایگذاری گزینه‌ها راحت‌تر است که اگر گزینه ۲ انتخاب شود.

$$a = -\frac{۱}{۳} \Rightarrow ۹ \times \frac{۱}{۹} - [۳ \times \frac{-۱}{۳}] = ۱ - (-۱) = ۲$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۳

۳ گزینه ۳

$$gof(-\frac{۵}{۳}) = g(f(\frac{-۵}{۳})) = ?$$

$$f(-\frac{۵}{۳}) = ۲[-\frac{۵}{۳}] - (-\frac{۵}{۳}) = ۲(-۲) + \frac{۵}{۳} = -۴ + \frac{۵}{۳} = -\frac{۷}{۳}$$

$$f(-\frac{۷}{۳}) = ۲[-\frac{۷}{۳}] - (-\frac{۷}{۳}) = -۶ + \frac{۷}{۳} = -\frac{۱۱}{۳}$$

$$g(f(-\frac{۵}{۳})) = g(-\frac{۷}{۳}) = f([-\frac{۷}{۳} + f(-\frac{۷}{۳})]) = f([-\frac{۷}{۳} - \frac{۱۱}{۳}])$$

$$= f(-۶) = ۲[-۶] + ۶ = -۱۲ + ۶ = -۶$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۴ گزینه ۴

$$fog(-\frac{۱}{۳}) = f(g(-\frac{۱}{۳}))$$

$$g(-\frac{۱}{۳}) = f([-\frac{۱}{۳} - f(-\frac{۱}{۳})]) = f([-\frac{۱}{۳} + \frac{۴}{۳}]) = f([\frac{۳}{۳}]) = f(۱) = ۲$$

$$f(-\frac{۱}{۳}) = -\frac{۱}{۳} + (-۱) = -\frac{۴}{۳}$$

$$f(g(-\frac{۱}{۳})) = f(۲) = ۴$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

۵ گزینه ۳

$$f(x) = y = (\sqrt{x} - ۱)^۲ \Rightarrow |\sqrt{x} - ۱| = \sqrt{y} \xrightarrow{x \geq ۱} \sqrt{x} - ۱ = \sqrt{y}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{y} + ۱ \Rightarrow x = (\sqrt{y} + ۱)^۲$$

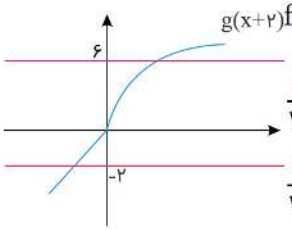
$$\Rightarrow g(x) = f^{-۱}(x) = (\sqrt{x} + ۱)^۲$$

$$(gog)(۱) = g(g(۱)) = g(۴) = ۹$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۶ گزینه ۲

$$g(x+۲)f(g(x+۲)) = ۲ \Rightarrow |\frac{۱}{۲}g(x+۲) - ۱| = ۲$$



$$\frac{۱}{۲}g(x+۲) - ۱ = ۲ \Rightarrow g(x+۲) = ۶$$

$$\frac{۱}{۲}g(x+۲) - ۱ = -۲ \Rightarrow g(x+۲) = -۲$$

دو ریشه دارد.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۲

۷ گزینه ۲

$$gog(۰) = g(g(۰)) = g(۲) = ۳$$
$$gof^{-۱}(-۲) = g(f^{-۱}(-۲))$$

برای پیدا کردن $f^{-۱}(-۲)$، ابتدا باید ضابطهٔ تابع f را بیابیم:

$$\begin{cases} f(۰) = -۳ \\ f(۲) = ۰ \end{cases} \Rightarrow m = \frac{۰ - (-۳)}{۲ - ۰} = \frac{۳}{۲}$$

$$y - ۰ = \frac{۳}{۲}(x - ۲) \Rightarrow y = \frac{۳}{۲}x - ۳$$

$$f^{-۱}(-۲) = a \Rightarrow f(a) = -۲ \Rightarrow \frac{۳}{۲}a - ۳ = -۲ \Rightarrow \frac{۳}{۲}a = ۱ \Rightarrow a = \frac{۲}{۳}$$

$$\Rightarrow g(f^{-۱}(-۲)) = g(\frac{۲}{۳}) \quad (*)$$

حال به بررسی ضابطهٔ g برای $x \leq ۱$ می‌پردازیم:

$$g(۰) = ۲, g(۱) = ۱ \Rightarrow m = \frac{۱ - ۲}{۱ - ۰} = -۱$$

$$y - ۱ = -۱(x - ۱) \Rightarrow y - ۱ = -x + ۱ \Rightarrow y = -x + ۲; x \leq ۱$$

$$\Rightarrow g(\frac{۲}{۳}) = -\frac{۲}{۳} + ۲ = \frac{۴}{۳} \quad (**)$$

بنابراین:

$$\xrightarrow{(*),(**)} gof^{-۱}(-۲) = g(f^{-۱}(-۲)) = g(\frac{۲}{۳}) = \frac{۴}{۳}$$

$$gof^{-۱}(-۲) \times gog(۰) = \frac{۴}{۳} \times ۳ = ۴$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

۸ گزینه ۱

از داخلی‌ترین تابع شروع می‌کنیم:

$$fofof(\sqrt{۲}) = f(f(f(\sqrt{۲})))$$

$$f(\sqrt{۲}) = \frac{(\sqrt{۲})(\sqrt{۲})}{۳\sqrt{۲} - \sqrt{۲}} = \frac{۲}{۲\sqrt{۲}} = \frac{۱}{\sqrt{۲}}$$

$$f(\frac{۱}{\sqrt{۲}}) = \frac{(\sqrt{۲})(\frac{۱}{\sqrt{۲}})}{۳(\frac{۱}{\sqrt{۲}}) - \sqrt{۲}} = \frac{۱}{\frac{۱}{\sqrt{۲}}} = \sqrt{۲}$$

$$f(\sqrt{۲}) = \frac{۱}{\sqrt{۲}} \Rightarrow fofof(\sqrt{۲}) = \frac{۱}{\sqrt{۲}}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۱

۹ گزینه ۴

راه‌حل اول:

$$gof(x) = g(f(x)) = g(۲x) = ۵x^۲ + ۱۱$$

$$\Rightarrow g(x) = ۵(\frac{x}{۲})^۲ + ۱۱ = \frac{۵}{۴}x^۲ + ۱۱$$

$$\Rightarrow g(x - ۷) = \frac{۵}{۴}(x - ۷)^۲ + ۱۱ \Rightarrow g(x - ۷) \text{ حداقل} = ۱۱$$

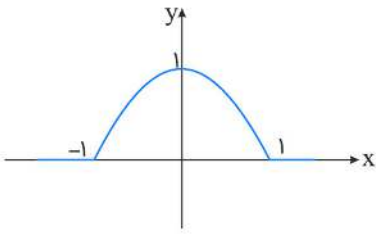
راه‌حل دوم: برای رسیدن از ضابطهٔ $g(۲x)$ به $g(x - ۷)$، تنها دامنه تغییر می‌کند و برد ثابت می‌ماند. بنابراین کمترین مقدار $g(x - ۷)$ برابر با کمترین مقدار $g(۲x) = ۵x^۲ + ۱۱$ است. پس برابر با ۱۱ می‌باشد.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

۱۰ گزینه ۴

$$(gof)(x) = g(f(x))$$
$$x < -۱ \Rightarrow f(x) = -۱ \Rightarrow (gof)(x) = g(-۱) = ۰$$
$$-۱ < x \leq ۱ \Rightarrow f(x) = x \Rightarrow (gof)(x) = g(x) = ۱ - x^۲$$
$$x > ۱ \Rightarrow f(x) = ۱ \Rightarrow (gof)(x) = g(۱) = ۰$$

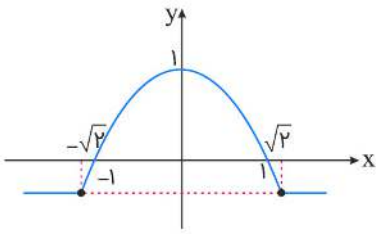
نمودار gof به صورت زیر است:



$$(fog)(x) = f(g(x)) = f(۱ - x^۲) = \begin{cases} -۱; & ۱ - x^۲ < -۱ \\ ۱ - x^۲; & -۱ \leq ۱ - x^۲ \leq ۱ \\ ۱; & ۱ - x^۲ > ۱ \end{cases}$$

$$\Rightarrow (fog)(x) = \begin{cases} -۱; & |x| > \sqrt{۲} \\ ۱ - x^۲; & |x| \leq \sqrt{۲} \end{cases}$$

نمودار fog به‌صورت زیر است:



ماکزیمم در نقطه‌ای به طول $\sqrt{۲}$ رخ می‌دهد:

$$x = \sqrt{۲} \Rightarrow \max(gof - fog) = ۰ - (-۱) = ۱$$

Homework (2)

۱ اگر $f(x) = x - ۲$ و $(gof)(x) = x^۲ - x$، ضابطهٔ $g(x)$ کدام است؟

۱) $g(x) = x^۲ + ۴x + ۲$
۲) $g(x) = x^۲ + ۳x$
۳) $g(x) = x^۲ + ۴x$
۴) $g(x) = x^۲ + ۳x + ۲$

۲ اگر $f(x) = \log_x(x + ۲)$ و $g(x) = \frac{x}{x - ۲}$ مفروض باشند، دامنهٔ تابع $y = gof(x)$ کدام است؟

۱) $(۰, +\infty) - \{۱, ۳\}$
۲) $(۱, +\infty)$
۳) $(۰, +\infty) - \{۱, ۲\}$
۴) $(۰, +\infty) - \{۲\}$

۳ اگر $fog(x) = (x - ۱)^۲ + ۲$ و $f(x) = x^۲ + ۲$، حاصل $(f + g)(۲)$ کدام است؟

۱) ۷
۲) ۸
۳) ۶
۴) ۹

۴ اگر $f(x) = \sqrt{x + ۲}$ و $g(x) = \sqrt{۳ - x}$ مفروض باشند، دامنهٔ تابع $y = gof(x)$ چند عدد صحیح دارد؟

۱) ۹
۲) ۱۰
۳) ۱۱
۴) ۱۲

۵ تابع $f = \{(۲, ۱), (۳, ۲), (۴, ۵), (۱, ۷)\}$ و $g = \{(۱, ۲), (۳, ۱), (a, ۳), (b, ۱)\}$ مفروض‌اند. اگر $(۴, ۲) \in fog$ و $(۴, ۱) \in gof$ باشند، دوتایی (a, b) کدام است؟

۱) $(۳, ۴)$
۲) $(۴, ۳)$
۳) $(۴, ۵)$
۴) $(۵, ۴)$

۶ اگر $f(x) = \sqrt{x^۲ - x - ۴}$ و $g = \{(-۱, -۴), (۵, ۰), (۱, ۴)\}$ باشد، حاصل $(gof^{-۱})(۴)$ کدام است؟

۱) -۴
۲) ۵
۳) صفر
۴) -۱

۷ در کدام گزینه ترکیب gof امکان‌پذیر نیست؟

۱) $\begin{cases} f(x) = x^{۲} \\ g(x) = \sqrt{-x} \end{cases}$

۲) $\begin{cases} f(x) = x + \frac{۱}{x} & ; x > ۰ \\ g(x) = \frac{۱}{\sqrt{۲ - x}} \end{cases}$

۳) $\begin{cases} f(x) = \sqrt{۱ - x} \\ g(x) = \sqrt{۱ - x^{۲}} \end{cases}$

۴) $\begin{cases} f(x) = x^{۲} + ۱ \\ g(x) = \frac{۱}{\sqrt{x}} \end{cases}$

۸ دو تابع $f = \{(۵ , ۲) , (۷ , ۳) , (۱ , ۴) , (۳ , ۶) , (۹ , ۱)$ و $g(x) = \sqrt{۵x + ۹}$ مفروض‌اند. اگر $(g^{-۱}of^{-۱})(a) = ۸$ باشد، مقدار a کدام است؟

۱) ۲

۲) ۳

۳) ۶

۴) ۷

پاسخ Homework (2)

۱ گزینه ۴

$$f(x)=t \Rightarrow x-۲=t \Rightarrow x=t+۲$$
$$g(f(x))=x^{۲}-x \Rightarrow g(t)=(t+۲)^{۲}-(t+۲)$$
$$g(t)=t^{۲}+۴t+۴-t-۲=t^{۲}+۳t+۲$$
$$g(x)=x^{۲}+۳x+۲$$

۲ گزینه ۳

$$\left.\begin{matrix} D_f: x+۲>۰ \\ x>۰ \\ x\neq ۱ \end{matrix}\right\} \Rightarrow D_f=(۰,+\infty)-\{۱\}$$
$$D_g=\mathbb{R}-\{۲\}$$
$$D_{gof}=\begin{cases} x\in D_f \Rightarrow x\in(۰,+\infty)-\{۱\} & (I) \\ f(x)\in D_g \Rightarrow \log_x(x+۲)\in\mathbb{R}-\{۲\} \end{cases}$$
$$\log_x(x+۲)\neq ۲ \Rightarrow x+۲\neq x^{۲}$$
$$x^{۲}-x-۲\neq ۰ \Rightarrow \begin{cases} x\neq -۱ \\ x\neq ۲ \end{cases} \quad (II)$$
$$(I)\cap(II) \Rightarrow D_{gof}=(۰,+\infty)-\{۱,۲\}$$

۳ گزینه ۱

$$fog(x)=g^{۲}+۲$$
$$g^{۲}+۲=(x-۱)^{۲}+۲ \Rightarrow g^{۲}=(x-۱)^{۲} \Rightarrow g(x)=|x-۱|$$
$$(f+g)(۲)=f(۲)+g(۲)=۲^{۲}+۲+|۲-۱|=۷$$

۴ گزینه ۲

$$x+۲\geq ۰\Rightarrow x\geq -۲\Rightarrow D_f=[-۲,+\infty)$$
$$۳-x\geq ۰\Rightarrow x\leq ۳\Rightarrow D_g=(-\infty,۳]$$
$$D_{gof}=\begin{cases}x\in D_f\Rightarrow x\in[-۲,+\infty) & (I)\\ f(x)\in D_g\Rightarrow \sqrt{x+۲}\in(-\infty,۳]\end{cases}$$
$$\sqrt{x+۲}\leq ۳\Rightarrow x+۲\leq ۹\Rightarrow x\leq ۷ \quad (II)$$
$$(I)\cap(II)\Rightarrow [-۲,۷]=D_{gof}$$

اعداد صحیح دامنه : $\{-۲,-۱,۰,۱,۲,...,۷\}$

۵ گزینه ۳

گام اول

دو فرض در مسئله در نظر گرفته شده است، یعنی اینکه $(۴,۲)\in fog$ و $(۴,۱)\in gof$ است. $(۴,۲)\in fog$ است، یعنی $f(g(۴))=۲$ و $(۴,۱)\in gof$ است. یعنی $g(f(۴))=۱$. حال این دو شرط را بررسی می کنیم.

گام دوم

تعیین a و b با استفاده از دو شرط $f(g(۴))=۲$ و $g(f(۴))=۱$:

$$f(g(۴))=۲\xrightarrow{f(۳)=۲}g(۴)=۳\xrightarrow{(a,۳)\in g}a=۴$$
$$g(f(۴))=۱\xrightarrow{f(۴)=۵}g(۵)=۱\xrightarrow{(b,۱)\in g}b=۵$$

پس دوتایی مرتب (a,b) به صورت $(۴,۵)$ درمی‌آید.

۶ گزینه ۳

$$(gof^{-۱})(۴)=g(f^{-۱}(۴))$$
$$f^{-۱}(۴)=a\Rightarrow f(a)=۴\Rightarrow \sqrt{a^۲-a-۴}=۴$$
$$\Rightarrow a^۲-a-۴=۱۶\Rightarrow a^۲-a-۲۰=۰$$
$$\Rightarrow (a-۵)(a+۴)=۰\Rightarrow \begin{cases}a=۵ \Rightarrow f^{-۱}(۴)=۵\Rightarrow g(f^{-۱}(۴))=g(۵)=۰\\ a=-۴\notin D_g \quad \text{غ ق ق}\end{cases}$$

۷ گزینه ۲

باید گزینه‌ای را مشخص کنیم که در آن $D_{gof} = \varnothing$ باشد. در گزینهٔ "۲" داریم:

$$D_f = (0, +\infty) \quad , \quad D_g = (-\infty, 2)$$

$$D_{gof} = \{x \in D_f | f(x) \in D_g\} = \{x \in (0, +\infty) | f(x) < 2\}$$

$$\Rightarrow \{x > 0 | \underbrace{x + \frac{1}{x} < 2}_{\text{جواب ندارد}}\} = \varnothing$$

دقت می‌کنیم که اگر $x > 0$، آنگاه $x + \frac{1}{x} \geq 2$ و لذا نامعادلهٔ $x + \frac{1}{x} < 2$ به ازای $x > 0$ جواب ندارد.

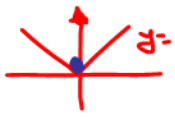
۸ گزینه ۲

$$(g^{-1}of^{-1})(a) = (fog)^{-1}(a) = 8 \Rightarrow (fog)(8) = a \Rightarrow f(g(8)) = a$$

$$\Rightarrow f(7) = a \Rightarrow a = 3$$

قدرمطلق

تابع $f(x)=\begin{cases} x & x\geq 0 \\ -x & x<0 \end{cases}$ را تابع قدرمطلق می‌خوانند و آن را با نماد $f(x)=|x|$ نمایش می‌دهند.



تذکر: $\sqrt{a^2}=|a|$

قدری که توش مثبته خودش میاد بیرون. قدری که توش منفیه قرینه‌اش!

$|\sqrt{3}-\sqrt{5}|=-\sqrt{3}+\sqrt{5}$

$|1-\sqrt{2}|=-1+\sqrt{2}$

$|\sqrt{3}-\sqrt{2}|=\sqrt{3}-\sqrt{2}$

$|\sin x-1|=-\sin x+1$

$|1-\cos x|=1-\cos x$

تمرین: اگر $a<0<b$ و $|b|<|a|$ باشد، حاصل $|a+b|+|a-b|+|a|+|b|$ کدام است؟

۱) $3a+b$ ۲) $a+3b$ ۳) $3b-a$ ۴) $b-3a$

پاسخ: گزینه‌ی «۴» ـ چون $a<0$ و $b>0$ است، پس $|a|=-a$ و $|b|=b$ و چون $|a|>|b|$ است (یعنی زور عدد منفی بیشتر است $|a+b|=-a-b$ و $|a-b|=-a+b$ پس:

$$|a+b|+|a-b|+|a|+|b|=-a-b-a+b-a+b=-3a+b$$

تمرین: هرگاه x و y دو عدد حقیقی ناصفر باشند و $|x|+|y|=x-y$ حاصل $\sqrt{x|x|+x|y|-y|x|-y|y|}$ کدام است؟

۱) $-x-y$ ۲) $y-x$ ۳) $x-y$ ۴) $x+y$

پاسخ: گزینه‌ی «۳» ـ چون $|x|+|y|=x-y$ شده است، پس $x>0$ و $y<0$ است و در نتیجه:

$$\sqrt{x|x|+x|y|-y|x|-y|y|}=\sqrt{x^2-xy-yx+y^2}=\sqrt{x^2-2xy+y^2}=\sqrt{(x-y)^2}=|x-y|=x-y$$

ویژگی‌های تابع قدرمطلق:

۱) $|x|\geq 0$ (مثبت یا صفر) نامنفی

۲) $\sqrt{u^2}=|u|$

۳) $|-x|=|x| \Rightarrow |a-b|=|b-a|$ یعنی داخل قدرمطلق را می‌توان در منفی ضرب نمود

۴) پرتکرار

$|u|=a \xrightarrow{a\geq 0} u=\pm a$ مثلاً $|x-1|=3 \Rightarrow x-1=\pm 3 \Rightarrow x=4,-2$

$|u|\leq a \xrightarrow{a\geq 0} -a\leq u\leq a$ مثلاً $|x-1|\leq 3 \Rightarrow -3\leq x-1\leq 3 \Rightarrow -2\leq x\leq 4$

$|u|\geq a \xrightarrow{a\geq 0} u\geq a$ یا $u\leq -a$ مثلاً $|x-1|\geq 3 \Rightarrow \begin{cases} x-1\geq 3 \Rightarrow x\geq 4 \\ \text{یا} \\ x-1\leq -3 \Rightarrow x\leq -2 \end{cases}$

۵) $|x|\geq x$ مثلاً $y=\sqrt{|x|-x}$ دامنه $|x|-x\geq 0 \Rightarrow |x|\geq x$ بدیهی $\Rightarrow D_f=\mathbb{R}$

۶) $|x|^2=|x^2|=x^2$

۷) نامساوی مثلثی $|x+y|\leq |x|+|y| \Rightarrow \begin{cases} |x+y|=|x|+|y| \Rightarrow xy\geq 0 & x \text{ و } y \text{ هم‌علامت} \\ |x+y|<|x|+|y| \Rightarrow xy<0 & x \text{ و } y \text{ مختلف‌العلامت} \end{cases}$

تذکر حمار (خر):

$|x|+|y|\geq|x+y|$

$|x|+|y|\geq|x-y|$

$|x|-|y|\leq|x+y|$

$|x|-|y|\leq|x-y|$

$|x|-|y|\leq|x|+|y|$

$|x|-|y|\geq|x|-|y|$

$|x|-|y|\leq|x-y|$

$|x|-|y|\leq|x+y|$

$|x|-|y|\leq|x|+|y|$

$|x|-|y|\geq|x|-|y|$

$5=|2+(-3)|=|-2|+|-3|=5$

$8=|-10+2|<|-10|+|2|=12$

تمرین: اگر به ازای هر $x \in \mathbb{R}$، $A = \dfrac{x^2 - x + 1}{|x^2 - 1| + |x - 2|}$ باشد، دقیق‌ترین محدوده‌ی A کدام است؟

۱) $A > 0$ ۲) $0 < A \leq 1$ ۳) $0 < A < 1$ ۴) $A \geq 1$

پاسخ: گزینه‌ی «۲» ـ با توجه به نامساوی مثلثی $|a+b| \leq |a| + |b|$ نتیجه می‌گیریم که:

$$0 \leq \frac{|a+b|}{|a|+|b|} \leq 1 \xrightarrow[b=2-x]{a=x^2-1} 0 \leq \frac{|x^2 - x + 1|}{|x^2 - 1| + |2 - x|} \leq 1$$

از طرفی $x^2 - x + 1$ یک عبارت همواره مثبت است چون $\Delta < 0$ و $a > 0$ می‌باشد:

$$0 < \frac{x^2 - x + 1}{|x^2 - 1| + |x - 2|} \leq 1 \Rightarrow 0 < A \leq 1$$

۸) $|xy| = |x||y| \xrightarrow{\text{مثلاً}} |x^2 - 1| = |x - 1||x + 1|$

۹) $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$

مثال: $\left|\dfrac{x-1}{x+2}\right| < 1$

یادت باشه: برای حل نامعادلهٔ قدرمطلقی $|u| < |v|$ می‌توانیم دو طرف را به توان ۲ برسانیم تا قدرمطلق‌ها از بین بروند:

$$|x-1| < |x+2| \xrightarrow{\text{توان ۲}} (x-1)^2 < (x+2)^2 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 < x^2 + 4x + 4 \Rightarrow -6x < 3 \Rightarrow x > \frac{-1}{2}$$

حل معادلات قدرمطلقی

۱) معادلات به فرم $|f(x)| = a$، $(a \geq 0)$: برای حل این معادله به صورت مقابل عمل می‌کنیم:

$$|f(x)| = a \Rightarrow f(x) = \pm a$$

مثلاً $|x - 3| = 2$ به صورت $x - 3 = \pm 2$ حل می‌شود که یک‌بار $x = 5$ و یک‌بار $x = 1$ به دست می‌آید.

۲) معادلات به فرم $|f(x)| = |g(x)|$: حل این مدل از معادلات به صورت زیر است: $|f(x)| = |g(x)| \Rightarrow f(x) = \pm g(x)$

مثلاً برای حل معادلهٔ $|2x - 1| = |x|$ داریم:

$$|2x-1| = |x| \Rightarrow 2x - 1 = \pm x \Rightarrow \begin{cases} 2x - 1 = x \Rightarrow x = 1 \\ 2x - 1 = -x \Rightarrow 3x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{3} \end{cases}$$

۳) معادلات به فرم $|f(x)| = g(x)$: در حل این دسته از معادلات چون طرف چپ، یک عبارت نامنفی است پس برای برقرار بودن تساوی باید عبارت سمت راست هم، نامنفی باشد یعنی $g(x) \geq 0$. حالا با این شرط، جاب‌ها را به صورت زیر می‌یابیم:

$$|f(x)| = g(x) \Rightarrow f(x) = \pm g(x)$$

فقط xهایی قبول می‌شوند که $g(x)$ را منفی نکنند.

مثلاً برای حل معادلهٔ $|x - 1| = -2x$ داریم:

$$|x-1| = -2x \Rightarrow x - 1 = \pm 2x \Rightarrow \begin{cases} x - 1 = 2x \Rightarrow x = -1 \\ x - 1 = -2x \Rightarrow 3x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{3} \end{cases}$$

اگر $x=\frac{1}{3}$ باشد سمت راست تساوی یعنی $-2x$، منفی می‌شود پس $x=\frac{1}{3}$ قبول نیست ولی اگر $x=-1$ باشد سمت راست یعنی $-2x$، منفی نمی‌شود پس $x=-1$ قبول است.

۴) معادلات به فرم $|f(x)|=f(x)$: این دسته از معادلات زمانی برقرار هستند که $f(x)\geq 0$ باشد. مثلاً برای حل $|x-1|=x-1$ داریم:

$$|x-1|=x-1 \Rightarrow x-1\geq 0 \Rightarrow x\geq 1$$

۵) معادلات به فرم $|f(x)|=-f(x)$: این دسته از معادلات زمانی برقرار هستند که $f(x)\leq 0$ باشد. مثلاً برای حل $|x-2|=2-x$ داریم:

$$|x-2|=2-x \Rightarrow x-2\leq 0 \Rightarrow x\leq 2$$

۶) معادلات به فرم $|f(x)|+|g(x)|=0$: چون قدرمطلق یک عبارت همواره نامنفی است، از درسنامه معادلات گنگ فهمیدیم که جمع چند عبارت نامنفی زمانی صفر است که هر کدام از آن‌ها صفر باشد.

تمرین: معادله‌ی $|x-x^2|+|x^3-2x^2+4x-3|=0$ چند جواب دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

$x-x^2=0 \rightarrow x(1-x)=0 \rightarrow x=0$ و $x=1$

از ۰ و ۱ یک تنها $x=1$ داخل قدرمطلق دوم را صفر می‌کند پس جواب فقط $x=1$ است گزینه ۲

۷) اگر معادله با هیچ‌یک از ۶ حالت قبل تطابق نداشت، باید به کمک تعیین علامت جواب‌ها را در صورت وجود پیدا کنیم. مثلاً معادلهٔ $|x|+|2x-2|=x-3$ با هیچ‌یک از ۶ مورد فوق حل نمی‌شود پس به کمک تعیین علامت حلش می‌کنیم.

برای این منظور ابتدا ریشه‌های داخل قدرمطلق‌ها را به دست می‌آوریم که می‌شود $x=0$ و $x=1$ و سپس x را یک‌بار کوچک‌تر از ریشهٔ کوچک، یک‌بار بین دو ریشه و یک‌بار بزرگ‌تر از ریشهٔ بزرگ‌تر قرار می‌دهیم. سپس جواب به‌دست آمده را به شرطی قبول می‌کنیم که در محدودهٔ تعیین‌شده قرار گرفته باشد.

فرض

$x<0 \Rightarrow -x-(2x-2)=x-3 \Rightarrow -x-2x+2=x-3 \Rightarrow x=\frac{5}{4}$ غ ق ق

$x=\frac{5}{4}$ در محدودهٔ $x<0$ قرار ندارد و اشتراکشان $\varnothing$ شد پس $x=\frac{5}{4}$ قبول نمی‌شود.

$0\leq x<1 \Rightarrow x-(2x-2)=x-3 \Rightarrow x-2x+2=x-3 \Rightarrow -2x=-5 \Rightarrow x=\frac{5}{2}$ غ ق ق $\notin [0,1)$

اشتراکشان $\varnothing$ شد پس $x=\frac{5}{2}$ قبول نمی‌شود.

$x\geq 1 \Rightarrow x+2x-2=x-3 \Rightarrow 2x=-1 \Rightarrow x=-\frac{1}{2}$ غ ق ق $\notin [1,+\infty)$

اشتراکشان $\varnothing$ شد پس $x=\frac{-1}{2}$ قبول نمی‌شود.

پس این معادله جواب ندارد.

تمرین: مجموعه جواب معادله‌ی $|x^3-9x|+x^3-9x=0$ شامل چند عدد طبیعی می‌باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

$|x^3-9x|=9x-x^3 \longrightarrow x^3-9x\leq 0$

$x(x^2-9)\leq 0$

$x(x-3)(x+3)$

	-3	0	3
x	−	+	+
x^2-9	+	−	+
$x(x^2-9)$	−	+	−

$x\in(-\infty,-3]\cup[0,3]$

اعداد طبیعی : $1,2,3$

تمرین: مجموعه جواب معادلهٔ $x+\sqrt{x^2-x\sqrt{12}+3}=\sqrt{3}$ کدام است؟

$\sqrt{12}=\sqrt{3(4)}=2\sqrt{3}$

۱) $\mathbb{R}$ ۲) $\{\sqrt{3}\}$ ۳) $(-\infty,\sqrt{3}]$ ۴) $[\sqrt{3},+\infty)$

پاسخ: گزینهٔ «۳»

$x+\sqrt{x^2-2\sqrt{3}x+3}=\sqrt{3} \Rightarrow x+\sqrt{(x-\sqrt{3})^2}=\sqrt{3} \Rightarrow |x-\sqrt{3}|=\sqrt{3}-x$

می‌دانیم اگر $|u|=-u$ باشد، آن‌گاه $u\leq 0$ است؛ پس:

$x-\sqrt{3}\leq 0 \Rightarrow x\leq\sqrt{3} \Rightarrow x\in(-\infty,\sqrt{3}]$

تمرین: مجموعه‌ی جواب نامعادله‌ی $(-x^2-6)(5-|2x-1|)\leq 0$ کدام است؟

۱) $\mathbb{R}-(-2,3)$ ۲) $[-2,3]$ ۳) $(-2,3)$ ۴) $\mathbb{R}-[-2,3]$

$-(x^2+6)(5-|2x-1|)\leq 0$

$-(x^2+6)$ همواره منفی

$(5-|2x-1|)$ باید مثبت یا صفر

$5-|2x-1|\geq 0$

$5\geq|2x-1|$

$-5\leq 2x-1\leq 5$

$-4\leq 2x\leq 6$

$-2\leq x\leq 3$

تمرین: مجموع ریشه‌های معادلهٔ $3|x|-|x-1|+x=0$ کدام است؟

۱) $-\frac{4}{3}$ ۲) $-\frac{2}{15}$ ۳) $-\frac{7}{15}$ ۴) $-\frac{4}{5}$

$x=0$ ، $x=1$

فرض $x<0$: $-3x-(-x+1)+x=0 \longrightarrow -3x+x-1+x=0 \longrightarrow x=-1<0$ ok

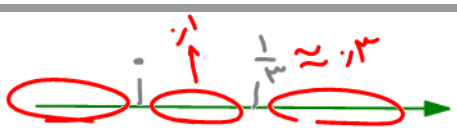
$0\leq x\leq 1$: $3x-(-x+1)+x=0 \longrightarrow 3x+x-1+x=0 \longrightarrow 5x=1 \longrightarrow x=\frac{1}{5}\in[0,1]$

$x>1$: $3x-(x-1)+x=0 \longrightarrow 3x-x+1+x=0 \longrightarrow x=-\frac{1}{3}\not>1$

ع ق ق

$(x_1=-1)+(x_2=\frac{1}{5})=-\frac{4}{5}$

$x=4$



تمرین: مجموعه جواب نامعادله‌ی $|x|+|3x-1|\leq 5$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) هیچ ۲) یک ۳) دو ۴) سه

پاسخ: گزینه‌ی «۴» ـ ریشه‌های قدرمطلق‌ها $x=0$ و $x=\frac{1}{3}$ است، پس:

$$|x|+|3x-1|\leq 5$$

$$\begin{cases} x\leq 0 \Rightarrow -x-3x+1\leq 5 \Rightarrow x\geq -1 \xrightarrow{\cap} -1\leq x\leq 0 \\ 0\leq x\leq \frac{1}{3} \Rightarrow x-3x+1\leq 5 \Rightarrow x\geq -2 \xrightarrow{\cap} 0\leq x\leq \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3}\leq x \Rightarrow x+3x-1\leq 5 \Rightarrow x\leq \frac{3}{2} \xrightarrow{\cap} \frac{1}{3}\leq x\leq \frac{3}{2} \end{cases} \xrightarrow{\cup} -1\leq x\leq \frac{3}{2}$$

پس مجموعه جواب نامعادله می‌شود بازه‌ی $[-1,\frac{3}{2}]$ که شامل ۳ عدد صحیح ۱-، ۰ و ۱ است.

تمرین: تمام جواب‌های نامعادله‌ی $|x-3|<|x-1|$ کدام است؟

۱) $x\leq 2$ ۲) $x>2$ ۳) $1\leq x\leq 3$ ۴) $x<2$

پاسخ: گزینه‌ی «۴» ـ طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$|x-1|<|x-3| \xrightarrow{\text{توان ۲}} x^2-2x+1<x^2-6x+9 \Rightarrow 4x<8 \Rightarrow x<2$$

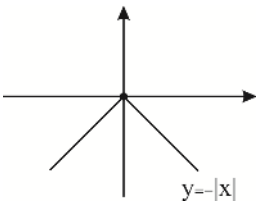
یا $|x-1|<|x-3| \Rightarrow (x-1)^2-(x-3)^2<0 \Rightarrow 2(2x-4)<0 \Rightarrow x<2$

تمرین: اگر مجموعه جواب نامعادلهٔ $|ax+b|>3$ به صورت $\mathbb{R}-[-1,2]$ باشد، $a+b$ کدام می‌تواند باشد؟

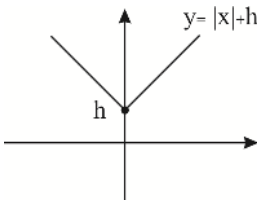
۱) ۱ ۲) ۲/۵ ۳) ۳ ۴) ۳/۵

نمودارهای قدرمطلقی

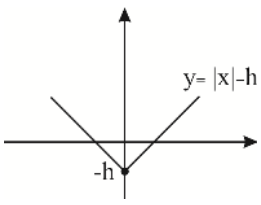
۱) رسم به کمک انتقال: این روش برای رسم تابع‌هایی به فرم $\pm|x\pm k|\pm h$ کاربرد دارد. به مثال‌های زیر توجه کنید:



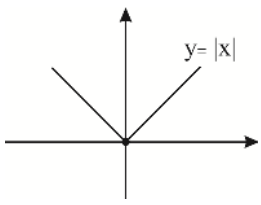
اگر $|x|$ را نسبت به محور xها قرینه کنیم به $-|x|$ می‌رسیم.

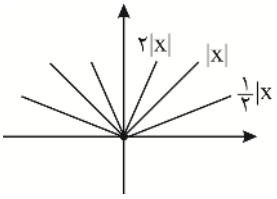


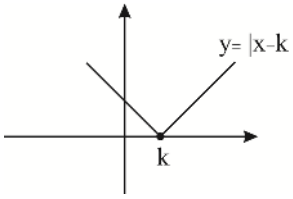
همان $|x|$ است که به اندازهٔ h بالا رفته است. $(h>0)$



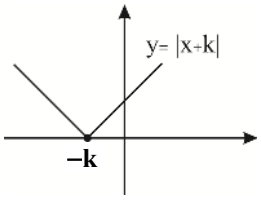
همان $|x|$ است که به اندازهٔ h پایین آمده است. $(h>0)$







همان $|x|$ است که به اندازهٔ k به راست رفته است. $(k>0)$



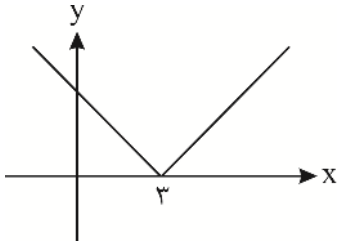
همان $|x|$ است که به اندازهٔ k به چپ رفته است. $(k>0)$

رسم چند تابع قدرمطلقی:

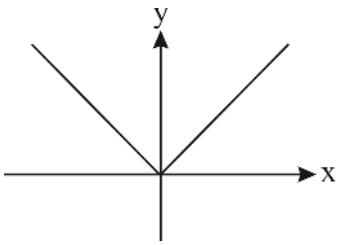
۱) در تابع‌های ساده مثل $y=|x-a|+k$ می‌شود نمودار را با انتقال نمودار تابع $y=|x|$ رسم کرد.

توجه: برای رسم نمودار تابع $f(x+a)$ نمودار $f(x)$ را به اندازهٔ $-a$ در امتداد محور xها انتقال می‌دهیم و برای رسم نمودار تابع $f(x)+k$ نمودار $f(x)$ را به اندازهٔ k در امتداد محور yها انتقال می‌دهیم. این مثال را ببینید: $f(x)=|x-۳|$

نمودار $y=|x|$ را به اندازهٔ ۳ واحد ($-a$ می‌شود $-(-۳)$) در امتداد محور xها انتقال می‌دهیم.



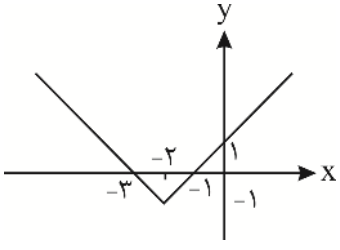
$y=|x-۳|$



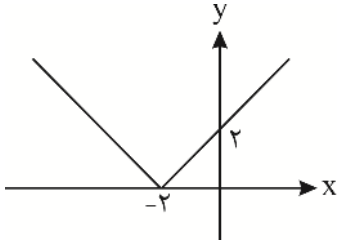
$y=|x|$

حالا یکی دیگر: $y=|x+۲|-۱$

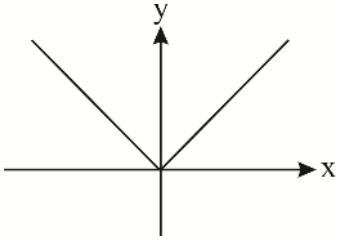
اول نمودار $|x|$ را به اندازهٔ ۲- واحد در امتداد محور xها انتقال می‌دهیم و بعد به اندازهٔ ۱- واحد در امتداد محور yها:



$y=|x+۲|-۱$



$y=|x+۲|$



$y=|x|$

از رسم نمودار توابع شامل قدرمطلق می‌توان برای پیداکردن مینیمم و ماکسیمم تابع (و در نتیجه برد تابع) استفاده کرد. کافی است نمودار را

رسم کنیم و سپس کم‌ترین یا بیشترین مقدار y را از روی نمودار پیدا کنیم.

تمرین: مساحت مثلث که بین نمودار تابع $y=|x-3|-2$ و محور طول‌ها تشکیل می‌شود، چند واحد سطح است؟

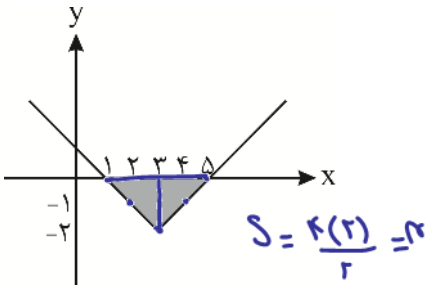
۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

پاسخ: گزینه‌ی «۳» ـ نمودار تابع را رسم می‌کنیم: $y=|x-3|-2 \Rightarrow (2,-1)\ (3,-2)\ (4,-1)$

مثلثی که بین نمودار تابع و محور xها تشکیل می‌شود، مثلثی است با قاعده‌ی به طول ۴ (نمودار محور xها را در $x=1$ و $x=5$ قطع کرده است (چرا؟)) و ارتفاع ۲ پس مساحتش برابر $\frac{4\times 2}{2}=4$ است.

$y=0 \rightarrow |x-3|-2=0 \rightarrow |x-3|=2$

$\begin{cases} x-3=2 & x=5 \\ x-3=-2 & x=1 \end{cases}$



$S=\frac{4(2)}{2}=4$

۲) برای رسم توابعی که به صورت $y=|a_1x-b_1|+|a_2x-b_2|+\cdots+|a_nx-b_n|+k$ هستند کافی است ریشه‌ی هر کدام از قدرمطلق‌ها را پیدا کنیم و بعد یک عدد کوچک‌تر از کوچک‌ترین ریشه و یک عدد بزرگ‌تر از بزرگ‌ترین ریشه در نظر بگیریم و بعد مختصات نقاطی را که این عددها و ریشه‌ها طول‌هایشان هستند، پیدا کنیم و آن‌ها را روی محور مختصات مشخص و به ترتیب به هم وصل کنیم و دو پاره‌خط اول و آخر را امتداد دهیم.

ریشه ساده داخل قدرمطلق طول نقطه زاویه‌دار یا گوشه (نوک تیز) است.

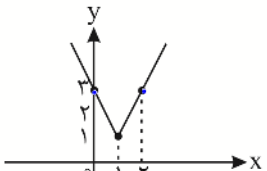
این مثال‌ها را ببینید:

$y=2|x-1|+1$ (x=1)

عدد کوچک‌تر — عدد بزرگ‌تر

$\Rightarrow (0,3),(1,1),(2,3)$

ریشه



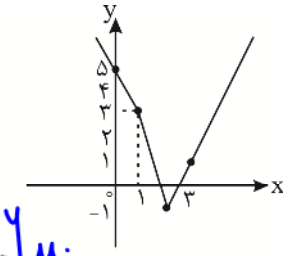
$y_{min}=1 \quad y\geq 1$

$y=3|x-2|-|x-1|$ (x=2، x=1)

عدد کوچک‌تر — عدد بزرگ‌تر

$\Rightarrow (0,5),(1,3),(2,-1),(3,1)$

ریشه‌ها



$y_{min}=-1$

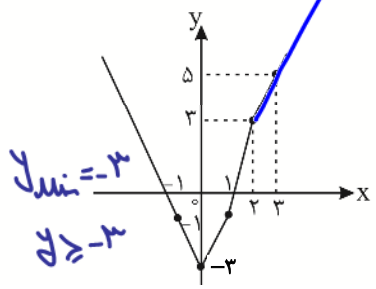
بزرگ $y\geq -1$

$y=2|x|-|x-2|+|x-1|-2$ (x=0، x=2، x=1)

عدد کوچک‌تر — عدد بزرگ‌تر

$\Rightarrow (-1,-1),(0,-3),(1,-1),(2,3),(3,5)$

ریشه‌ها

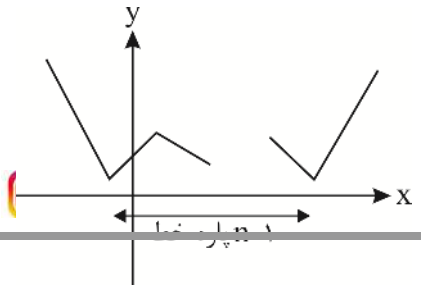


$y_{min}=-3 \quad y\geq -3$

اگر دقت کنید در این ضابطه‌ها پس از ساده‌کردن قدرمطلق‌ها و تعیین علامت آن‌ها در بازه‌های مختلف یک معادله خط در هر بازه باقی خواهد ماند و از آن‌جا که خطی که از هر دو نقطه می‌گذرد منحصربه‌فرد می‌باشد ما با این کار از هر خط دو نقطه را می‌دهیم که با وصل‌کردن آن‌ها به یکدیگر نمودار خط هر قسمت به دست می‌آید.

چند نکته در مورد نمودارهای توابع شامل قدرمطلق

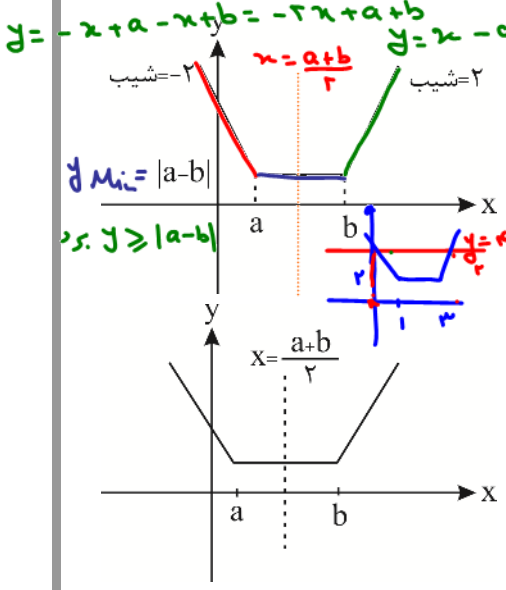
۱) با توجه به روش رسم نمودار تابع $y=|a_1x-b_1|+|a_2x-b_2|+\cdots+|a_nx-b_n|$ مشخص است که نمودار این تابع از $n-1$ پاره‌خط و دو نیم‌خط تشکیل شده است. (چرا؟)



پس کم‌ترین مقدار تابع همیشه به ازای یکی از ریشه‌ها به دست می‌آید.

بنابراین برای پیداکردن حداقل عبارت‌هایی مثل عبارت بالا کافی است مقدار تابع را به ازای ریشه‌ی هر کدام از قدرمطلق‌ها پیدا کنیم و کم‌ترین مقدار به دست‌آمده را انتخاب کنیم.

۲) نمودار تابع با ضابطه‌ی $y=|x-a|+|x-b|$ را می‌توانیم با همان روشی که تا الان یاد گرفته‌ایم، رسم کنیم. ولی در مورد این تابع می‌توانید این نکته را هم یاد بگیرید.



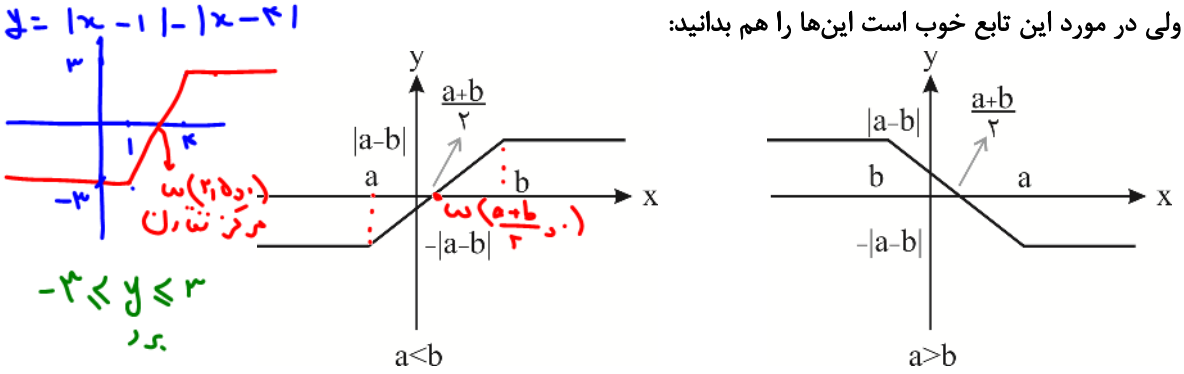
نمودار این تابع‌ها به صورت روبه‌رو است: (بعضی‌ها دوست دارند بگویند گلدانی است!)

کم‌ترین مقدار تابع برابر $|a-b|$ و طول نقاط زاویه‌دار نمودار ریشه‌های عبارت‌های داخل قدرمطلق است، شیب دو نیم‌خطی هم که در سمت چپ و راست پاره‌خط افقی رسم می‌شوند برابر ۲- و ۲ است. منحنی دارای یک محور تقارن است به معادله‌ی $x=\frac{a+b}{۲}$ یا «میانگین ریشه‌ها» $x=$

مثال: معادله $|x-۱|+|x-۳|=۴$ چند ریشه دارد؟

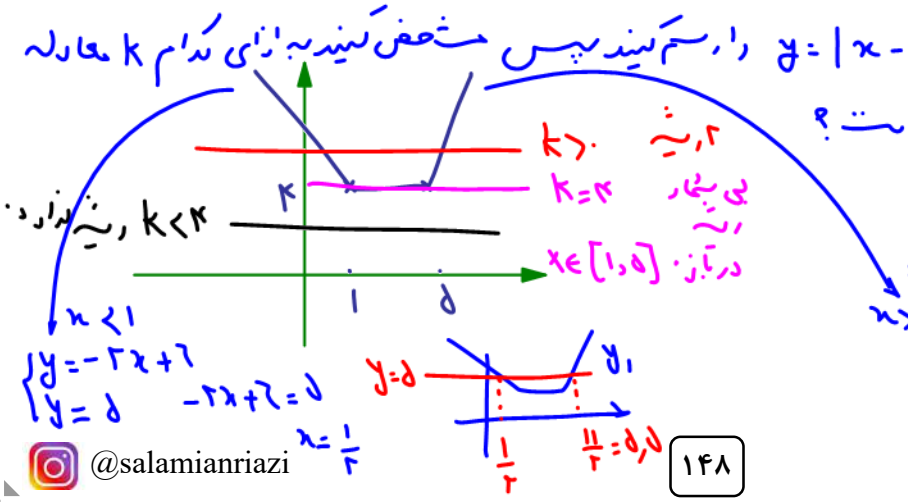
۳) محور تقارن تابع $y=|x-a|+|x-b|$ خط $x=\frac{a+b}{۲}$ است. اگر به نمودار نگاه کنید، می‌بینید محور تقارن در اصل همان میانگین ریشه‌ها است. پس به طور کلی معادله‌ی محور تقارن هر تابع با ضابطه‌ی $y=|a_۱x+b_۱|+|a_۲x+b_۲|$ (به شرط این‌که $|a_۱|=|a_۲|$ باشد) به صورت «میانگین ریشه‌ها» $x=$ است.

۴) نمودار تابع‌هایی با ضابطه‌ی $y=|x-a|-|x-b|$ را هم می‌توان با استفاده از روشی که برای رسم نمودار تابع‌های شامل قدرمطلق یاد گرفتید رسم کرد. ولی در مورد این تابع خوب است این‌ها را هم بدانید:



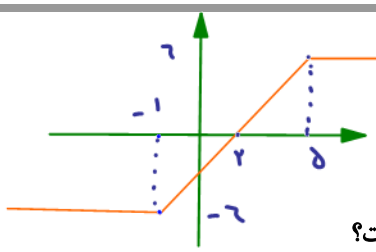
نمودار تابع به یکی از دو صورت بالا است (بعضی‌ها دوست دارند بگویند سرسره‌ای یا آبشاری!) تابع همواره بین $|a-b|$ و $-|a-b|$ است یعنی $-|a-b|\le y\le|a-b|$. نمودار تابع یک مرکز تقارن دارد که مختصاتش $(\frac{a+b}{۲},۰)$ است، شیب خطی که دو پاره‌خط افقی را به هم وصل می‌کند برابر ۲ یا ۲- است.

مثال: ابتدا بدون رسم نمودار $y=|x-۱|+|x-۵|$ مشخص کنید به ازای کدام k معادله $|x-۱|+|x-۵|=k$ دارای ۲، ۱ یا ۰ ریشه است؟



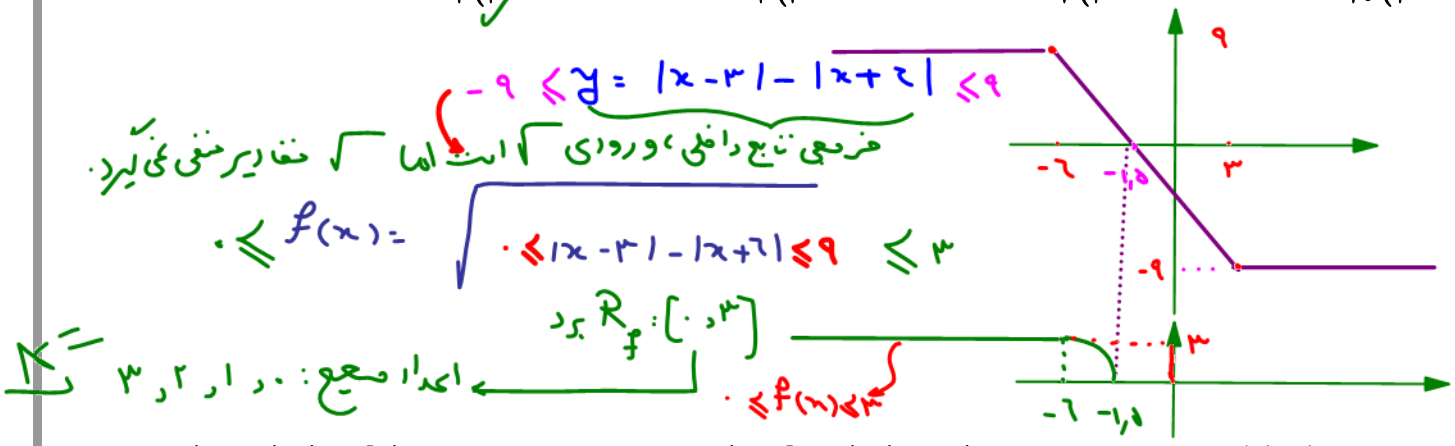
مثال: برای $k=۵$ ریشه‌ها را بیابید.

مثال: نمودار تابع $y=|x+1|-|x-5|$ را رسم کنید.



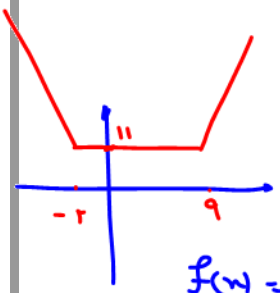
تمرین: برد تابع $f(x)=\sqrt{|x-3|-|x+6|}$ شامل چند عدد صحیح است؟

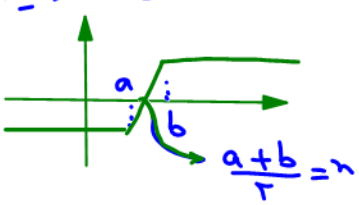
۱) ۱۰ ۲) ۷ ۳) ۳ ۴) ۴



تمرین: اگر $A(3,0)$ مرکز تقارن نمودار تابع $y=|x-k+1|-|x+2|$ باشد، کم‌ترین مقدار تابع $y=|x+2|+|x-k|$ کدام است؟

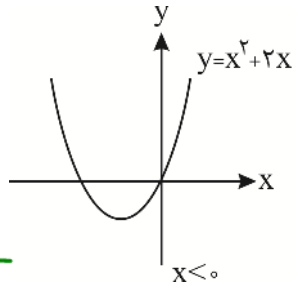
۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۱ ۴) ۱۲

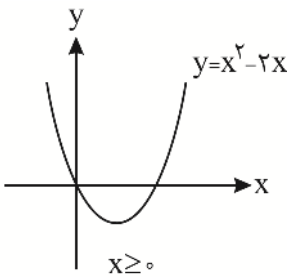




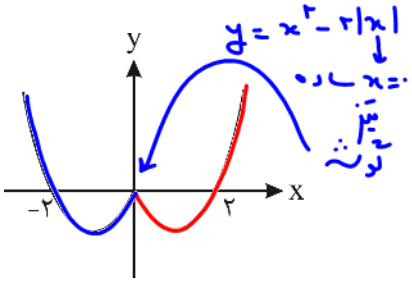
۳) راه اصلی رسم نمودار این توابع تعیین علامت عبارت داخل قدرمطلق است. به این مثال توجه کنید:

$$y=x^2-2|x|=\begin{cases}x^2-2x & x\geq 0\\ x^2+2x & x<0\end{cases}$$

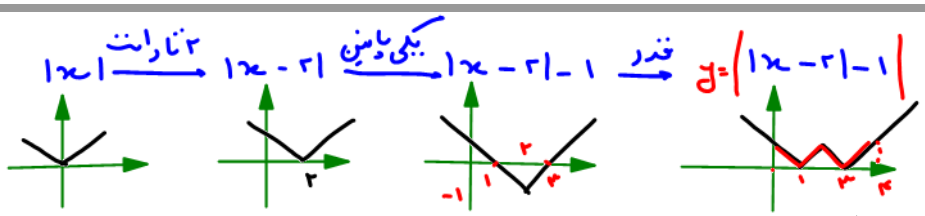




قسمتی از نمودار اول که $(x\geq 0)$ در ناحیه‌ی اول یا چهارم است را به قسمتی از نمودار دوم که $(x\leq 0)$ در ناحیه‌ی سوم یا دوم است متصل می‌کنیم.



۴) برای رسم نمودار تابع $y=|f(x)|$ ابتدا نمودار تابع $y=f(x)$ را رسم می‌کنیم و سپس قسمت‌های پایین محور طول‌ها را نسبت به

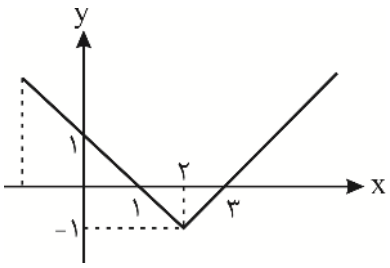


محور طول‌ها قرینه می‌کنیم.

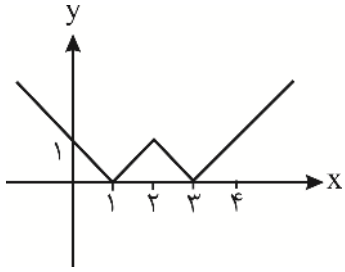
تمرین: مجموع طول پاره‌خط‌های تشکیل‌دهنده‌ی نمودار تابع $y = ||x-2|-1|$ در بازه‌ی $0 \le x \le 4$ کدام است؟

۱) $2\sqrt{2}$ ۲) $4\sqrt{2}$ ۳) $6\sqrt{2}$ ۴) $8\sqrt{2}$

پاسخ: گزینه‌ی «۲» ـ ابتدا نمودار تابع $f(x) = |x-2|-1$ را رسم می‌کنیم و سپس قسمت‌های پایین محور xها را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم:



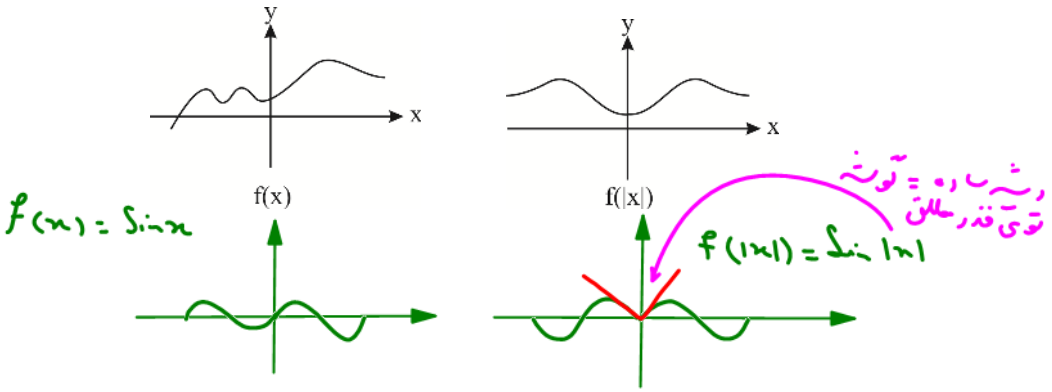
$y = |x-2|-1$



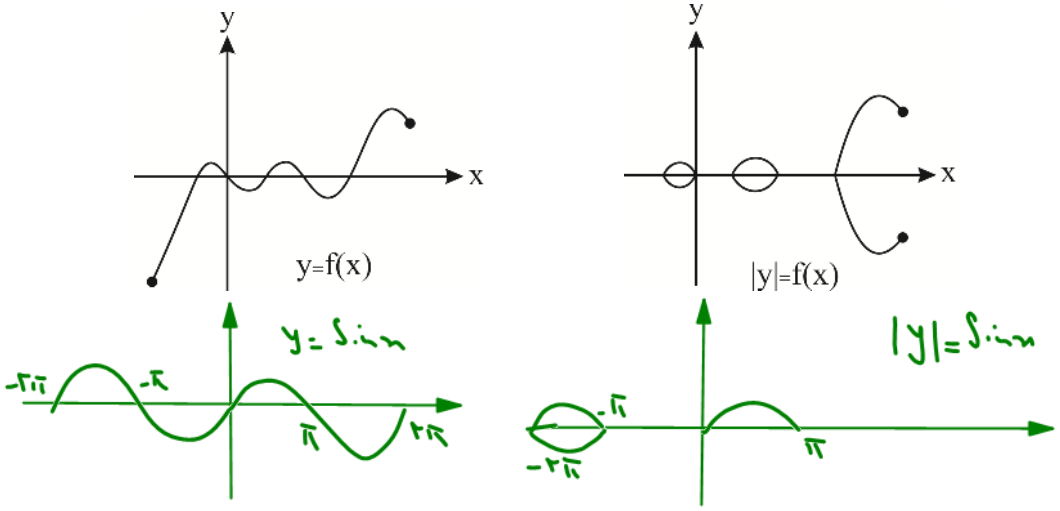
$y = ||x-2|-1|$

حالا برای آن که طول پاره‌خط‌ها را پیدا کنیم مختصات دو نقطه به طول $x=0$ و $x=4$ را پیدا می‌کنیم که می‌شود $(0,1)$ و $(4,1)$. حالا به شکل نگاه کنید نمودار از چهار پاره‌خط تشکیل شده که طول همه‌شان $\sqrt{2}$ است پس مجموع طول پاره‌خط‌ها می‌شود $4\sqrt{2}$.

۵) برای رسم نمودار تابع $y = f(|x|)$ ابتدا نمودار تابع $y = f(x)$ را رسم می‌کنیم و سپس قسمتی را که سمت چپ محور yها (یعنی $x < 0$) است، حذف می‌کنیم و قرینهٔ قسمت سمت راست (یعنی $x > 0$) را نسبت به محور yها رسم می‌کنیم.



۶) برای رسم نمودار ضابطه‌ی $|y| = f(x)$ که عموماً یک تابع نیست، ابتدا نمودار تابع $y = f(x)$ را رسم می‌کنیم و سپس قسمت زیر محور xها را حذف می‌کنیم و قرینه‌ی قسمت بالای محور xها را نسبت به محور xها رسم می‌کنیم.



Homework (1)

۱ دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $f(x)=\log_{۴}\ x^{۲}-۲\ -x$ کدام است؟

۱) $-\infty,-\sqrt{۲}\ \cup(۲,+\infty)$
۲) $(-\infty,۱)\cup\ \sqrt{۲},+\infty$
۳) $[-۱,۱)\cup\ \sqrt{۲},+\infty$
۴) $(-\infty,۱)\cup(۲,+\infty)$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

۲ اگر مجموعه جواب نامعادلهٔ $x^{۲}-۲\ <|x+۱|-۱$ بازهٔ (a,b) باشد، طول وسط این بازه کدام است؟

۱) ۰/۵
۲) ۱
۳) ۱/۵
۴) ۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۵

۳ مساحت ناحیهٔ محدود به نمودارهای دو تابع $y=|x|-x$ و $y=۲-\frac{۳}{۲}x$، کدام است؟

۱) $\frac{۸}{۳}$
۲) ۴
۳) $\frac{۱۶}{۳}$
۴) ۶

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

۴ مساحت ناحیهٔ محدود به نمودارهای دو تابع $y=۵-|x-۱|$ و $y=|x|$، کدام است؟

۱) ۸
۲) ۹
۳) ۱۰
۴) ۱۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۷

۵ نمودارهای دو تابع $y=|x-۲|+|x+۱|$ و $y=x+۷$، در دو نقطهٔ A و B متقاطع هستند. اندازهٔ پاره‌خط AB، کدام است؟

۱) $۸\sqrt{۲}$
۲) ۱۲
۳) ۱۳
۴) $۱۰\sqrt{۲}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

۶ اگر $f(x)=x^{۲}+x$ و $g(x)=\sqrt{۴x+۱}$ باشند، مساحت ناحیهٔ محدود به نمودار تابع gof و خط به معادلهٔ $y=۳$ کدام است؟

۱) ۳
۲) ۴
۳) ۴/۵
۴) ۶

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

۷ مساحت ناحیهٔ محدود به نمودارهای دو تابع $y = x + |x|$ و $y = ۲ - |x|$، کدام است؟

۱) ۲
۲) $\frac{۷}{۳}$
۳) $\frac{۸}{۳}$
۴) ۳

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

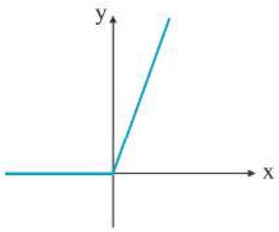
ریاضی

۸ اگر $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^۲ + ۳} + ۲a & ; |x| \leq ۱ \\ ax^۲ + ۵ & ; |x| \geq ۱ \end{cases}$، ضابطهٔ تابع f باشد، مقدار $f(a)$ کدام است؟

۱) ۴۶
۲) ۳۲
۳) ۲۵
۴) ۱۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

۹ شکل زیر، نمودار کدام تابع است؟



۱) $y = x - |x|$
۲) $y = x + |x|$
۳) $y = |x - ۱| - ۱$
۴) $y = ۱ - |x - ۱|$

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۳۹۸

۱۰ نمودار $y = \frac{|۲x|}{x}$ و خط $y = ۲x - ۱$ در دو نقطهٔ A و B، مشترک‌اند. میانگین طول نقاط A و B، کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۲}$
۲) صفر
۳) $\frac{۱}{۲}$
۴) ۱

کنکور سراسری علوم انسانی خارج از کشور ۱۳۹۹

۱۱ دو تابع با ضابطه‌های $f(x) = x^۲ - ۲x - ۲$ و $g(x) = \frac{|x|}{x}$، در نقطه‌ای با کدام طول، مشترک‌اند؟

۱) $۱ - \sqrt{۲}$ و ۳
۲) $۱ + \sqrt{۲}$ و -۱
۳) $۱ + \sqrt{۲}$ و ۳
۴) $۱ - \sqrt{۲}$ و -۱

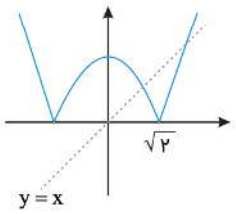
کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۳۹۹

پاسخ Homework (1)

۱ گزینه ۴

$$|x^۲ - ۲| - x > ۰ \Rightarrow |x^۲ - ۲| > x \quad (۱)$$

نمودار دو تابع را رسم می‌کنیم:



ملاحظه می‌کنید که یک برخورد در بازهٔ $(۰, \sqrt{۲})$ و یک برخورد در بازهٔ $(\sqrt{۲}, +\infty)$ است:

$$۰ < x < \sqrt{۲} \ : \ |x^۲ - ۲| = ۲ - x^۲$$
$$\Rightarrow ۲ - x^۲ = x \Rightarrow x^۲ + x - ۲ = ۰ \xrightarrow{۰<x<\sqrt{۲}} x = ۱$$
$$x > \sqrt{۲} \ : \ |x^۲ - ۲| = x^۲ - ۲$$
$$\Rightarrow x^۲ - ۲ = x \Rightarrow x^۲ - x - ۲ = ۰ \xrightarrow{x>\sqrt{۲}} x = ۲$$

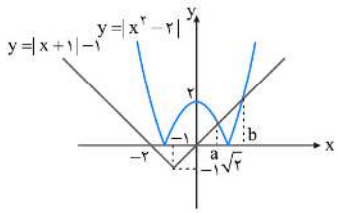
پس جواب نامعادلهٔ (۱) که همان دامنهٔ تابع است به‌صورت زیر خواهد بود:

$$D = (-\infty, ۱) \cup (۲, +\infty)$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

۲ گزینه ۳

دو منحنی $y_1 = |x+1| - 1$ و $y_2 = |x^2 - 2|$ را رسم می‌کنیم.



مجموعه جواب نامعادله (a, b) است. برای یافتن a، $0 < x < \sqrt{2}$ را در نظر می‌گیریم:

$$|x^2 - 2| = |x+1| - 1 \Rightarrow -(x^2 - 2) = x + 1 - 1 \Rightarrow -x^2 + 2 = x \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow (x+2)(x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 1 \end{cases} \xrightarrow{0<x<\sqrt{2}} x = a = 1$$

برای یافتن b، $x > \sqrt{2}$ را در نظر می‌گیریم:

$$x^2 - 2 = x + 1 - 1 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow (x-2)(x+1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -1 \end{cases} \xrightarrow{x>\sqrt{2}} x = b = 2$$

$$\text{مجموعهٔ جواب} = (a, b) = (1, 2) \Rightarrow \frac{a+b}{2} = \frac{2+1}{2} = 1/5$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۵

۳ گزینه ۳

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

گام اول

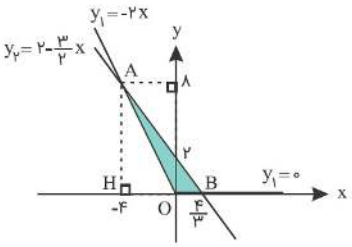
هر تابع شامل قدر مطلق را می‌توان به‌صورت یک تابع دو ضابطه‌ای نوشت. می‌دانیم: $|x| = \begin{cases} x & ; x \geq ۰ \\ -x & ; x < ۰ \end{cases}$

گام دوم

ابتدا ضابطهٔ تابع $y = |x| - x$ را برای مقادیر $x \geq ۰$ و $x < ۰$ به دست می‌آوریم:

$$y = |x| - x = \begin{cases} x - x = ۰ & ; x \geq ۰ \\ -x - x = -۲x & ; x < ۰ \end{cases}$$

نمودار هر دو تابع $y = |x| - x$ و $y = ۲ - \frac{۳}{۲}x$ را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم:



برای محاسبهٔ مساحت ناحیهٔ محصور بین دو منحنی ابتدا مختصات محل تلاقی؛ یعنی نقطهٔ A را با مساوی قرار دادن ضابطه‌ها تعیین می‌کنیم:

$$۲ - \frac{۳}{۲}x = -۲x \Rightarrow -۲x + \frac{۳}{۲}x = ۲ \Rightarrow -\frac{۱}{۲}x = ۲ \Rightarrow x = -۴$$
$$\xrightarrow{y=-۲x} y = ۸ \Rightarrow A(-۴, ۸)$$

بنابراین ارتفاع مثلث $\overset{\Delta}{ABO}$ برابر ۸ است و مساحتش به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

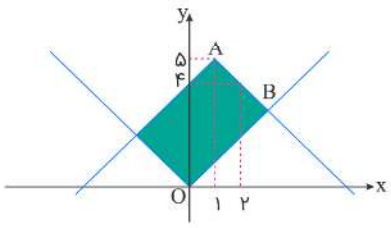
$$S_{\overset{\Delta}{ABO}} = \frac{۱}{۲} \times ۸ \times \frac{۴}{۳} = \frac{۱۶}{۳}$$

۴ گزینه ۴

نمودار دو تابع را رسم می‌کنیم.

x	۰	۱	۲
$y = ۵ - \lvert x - ۱ \rvert$	۴	۵	۴

x	-۱	۰	۱
$y = \lvert x \rvert$	۱	۰	۱



نقاط برخورد دو تابع را محاسبه می‌کنیم.

$$۵ - \lvert x - ۱ \rvert = \lvert x \rvert \Rightarrow \lvert x \rvert + \lvert x - ۱ \rvert = ۵ \Rightarrow \begin{cases} x + x - ۱ = ۵ \Rightarrow x = ۳ \\ -x - x + ۱ = ۵ \Rightarrow x = -۲ \end{cases}$$

خطوط بر هم عمودند، پس شکل موردنظر یک مستطیل است. فقط مختصات یکی از نقاط برخورد (مانند $B(۳, ۳)$) را لازم داریم تا مساحت مستطیل به دست آید. طول و عرض برابر است با:

$$|AB| = \sqrt{(۳ - ۱)^۲ + (۳ - ۵)^۲} = \sqrt{۴ + ۴} = ۲\sqrt{۲}$$

$$|BO| = \sqrt{۳^۲ + ۳^۲} = \sqrt{۱۸} = ۳\sqrt{۲}$$

$$S = |AB| \times |BO| = ۳\sqrt{۲} \times ۲\sqrt{۲} = ۱۲$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۷

۵ گزینه ۴

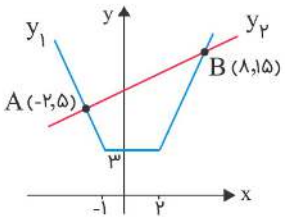
$$y_1 = |x-2| + |x+1| \quad , \quad y_2 = x+7$$

$$y_1 = \begin{cases} -x+2-x-1 & ; x \le -1 \\ -x+2+x+1 & ; -1 < x \le 2 \\ x-2+x+1 & ; x > 2 \end{cases} \Rightarrow y_1 = \begin{cases} -2x+1 & ; x \le -1 \\ 3 & ; -1 < x \le 2 \\ 2x-1 & ; x > 2 \end{cases}$$

حال نمودار دو تابع y_1 و y_2 را رسم می‌کنیم:

$$x > 2 : 2x-1 = x+7 \Rightarrow x = 8$$

$$x < -1 : -2x+1 = x+7 \Rightarrow x = -2$$



$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(8-(-2))^2 + (15-5)^2}$$
$$= \sqrt{100+100} = 10\sqrt{2}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

۶ گزینه ۳

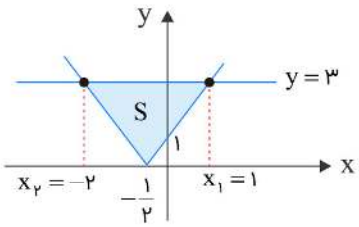
ابتدا تابع gof را به دست می‌آوریم:

$$(gof)(x) = g(f(x)) = g(x^۲ + x) = \sqrt{۴x^۲ + ۴x + ۱} \Rightarrow (gof)(x) = |۲x + ۱|$$

$$|۲x + ۱| = \begin{cases} ۲x + ۱ & ; x \geq -\frac{۱}{۲} \\ -۲x - ۱ & ; x < -\frac{۱}{۲} \end{cases}$$

نقاط برخورد تابع $|۲x + ۱|$ و خط $y = ۳$ را می‌یابیم.

$$۲x_۱ + ۱ = ۳ \Rightarrow x_۱ = ۱ \ , \ -۲x_۲ - ۱ = ۳ \Rightarrow x_۲ = -۲$$

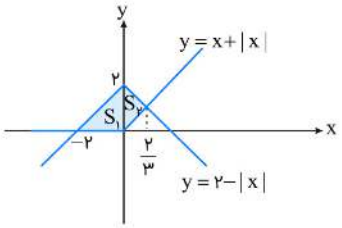


$$S = \frac{(|x_۱| + |x_۲|) \times ۳}{۲} = \frac{۹}{۲} = ۴/۵$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

۷ گزینه ۳

$$y = x + |x| = \begin{cases} ۲x & ; x \geq ۰ \\ ۰ & ; x < ۰ \end{cases} \ , \ y = ۲ - |x| = \begin{cases} ۲ - x & ; x \geq ۰ \\ x + ۲ & ; x < ۰ \end{cases}$$



$$۲ - x = ۲x \Rightarrow x = \frac{۲}{۳}$$

$$S = S_۱ + S_۲ = \frac{۱}{۲} \times ۲ \times ۲ + \frac{۱}{۲} \times \frac{۲}{۳} \times ۲ = ۲ + \frac{۲}{۳} = \frac{۸}{۳}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

۸ گزینه ۲

به ازای $x = ۱$ و $x = -۱$ دو ضابطه را برابر قرار می‌دهیم.

$$\sqrt{۱+۳} + ۲a = a + ۵ \Rightarrow a = ۳$$

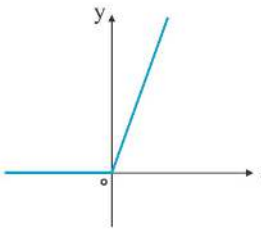
$$f(a) = f(۳) = ۳(۳)^۲ + ۵ = ۳۲$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

۹ گزینه ۲

$$y = x + |x| = \begin{cases} x + x & ; x \geq ۰ \\ x - x & ; x < ۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow y = \begin{cases} ۲x & ; x \geq ۰ \\ ۰ & ; x < ۰ \end{cases}$$



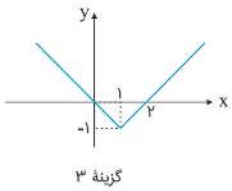
بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ ۱:

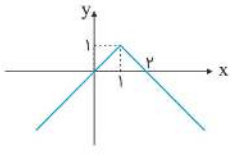
$$y = x - |x| = \begin{cases} x - x & ; x \geq ۰ \\ x + x & ; x < ۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow y = \begin{cases} ۰ & ; x \geq ۰ \\ ۲x & ; x < ۰ \end{cases}$$

گزینه‌های ۳ و ۴ نیز به‌صورت زیر می‌باشند:



گزینهٔ ۳



گزینهٔ ۴

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۳۹۸

۱۰ گزینه ۳

باتوجه‌به اطلاعات صورت تست نمودار و خط در دو نقطهٔ A و B متقاطع‌اند، بنابراین در این نقاط با یکدیگر برابرند.

ابتدا ضابطهٔ نمودار $y = \frac{|۲x|}{x}$ را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$y = \frac{|۲x|}{x} = \begin{cases} \frac{۲x}{x} = ۲ & ; x > ۰ \\ \frac{-۲x}{x} = -۲ & ; x < ۰ \end{cases}$$

نقاطی که ضابطهٔ دو تابع با یکدیگر برابر است را به دست می‌آوریم. داریم:

$$x > ۰ : ۲x - ۱ = ۲ \Rightarrow ۲x = ۳ \Rightarrow x = \frac{۳}{۲} \; ; \; y = ۲ \; ; \; A(\frac{۳}{۲}, ۲)$$

$$x < ۰ : \; ۲x - ۱ = -۲ \Rightarrow ۲x = -۱ \Rightarrow x = \frac{-۱}{۲} \; ; \; y = -۲ \; ; \; B(-\frac{۱}{۲}, -۲)$$

بنابراین دو نمودار و خط در نقاط A و B با مختصات ذکرشده متقاطع‌اند. میانگین طول نقاط A و B برابر است با:

$$\frac{\frac{۳}{۲} - \frac{۱}{۲}}{۲} = \frac{۱}{۲}$$

کنکور سراسری علوم انسانی خارج از کشور ۱۳۹۹

۱۱ گزینه ۱

نکته: در صورتی دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ در نقطه‌ای به طول a مشترک‌اند که رابطهٔ $f(a) = g(a)$ برقرار باشد.

ابتدا ضابطهٔ تابع $g(x)$ را به‌صورت زیر ساده می‌کنیم.

$$g(x) = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} ۱ & ; x > ۰ \\ -۱ & ; x < ۰ \end{cases}$$

بنابراین مقادیری که به ازای آن‌ها $f(x) = g(x)$ می‌باشد را به دست می‌آوریم.

$$x > ۰ : \; f(x) = g(x) \Rightarrow x^۲ - ۲x - ۲ = ۱ \Rightarrow x^۲ - ۲x - ۳ = ۰$$

$$(x+۱)(x-۳) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = -۱ & \text{غ ق ق} \\ x = ۳ & \text{ق ق} \end{cases}$$

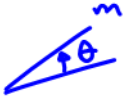
$$x < ۰ : f(x) = g(x) \Rightarrow x^۲ - ۲x - ۲ = -۱ \Rightarrow x^۲ - ۲x - ۱ = ۰$$

$$\Delta = ۴ - ۴(۱)(-۱) = ۸ \Rightarrow \begin{cases} x_۱ = \frac{۲ + ۲\sqrt{۲}}{۲} = ۱ + \sqrt{۲} & \text{غ ق ق} \\ x_۲ = \frac{۲ - ۲\sqrt{۲}}{۲} = ۱ - \sqrt{۲} & \text{ق ق} \end{cases}$$

بنابراین دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ در نقاط به طول $x = ۳$ و $x = ۱ - \sqrt{۲}$ با یکدیگر برابرند.

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۳۹۹

نکته



$\tan\theta = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right|$

θ زاویه حاده بین ۲ خط

m_1 و m_2 تنها خطوط

Homework (2)

۱ حاصل عبارت $||\sqrt{5} - ۳| - | - ۳ - \sqrt{5}||$ کدام است؟

۱) ۶
۲) صفر
۳) $۲\sqrt{5} + ۶$
۴) $۲\sqrt{5}$

۲ در تابع $f(x) = |x + ۱| - |۲x - ۳|$ حاصل $f(۲) + f(-۲)$ برابر با کدام گزینه است؟

۱) $f(۰)$
۲) $-f(۰)$
۳) $۲f(۰)$
۴) $\frac{f(۰)}{۲}$

۳ ضابطهٔ تابع $f(x) = | - ۲x + ۵| - ۸$ به‌صورت چندضابطه‌ای کدام است؟

۱) $f(x) = \begin{cases} ۲x - ۳ & ; x \le \frac{۵}{۲} \\ - ۲x - ۱۳ & ; x > \frac{۵}{۲} \end{cases}$

۲) $f(x) = \begin{cases} - ۲x - ۳ & ; x \le \frac{۵}{۲} \\ ۲x - ۱۳ & ; x > \frac{۵}{۲} \end{cases}$

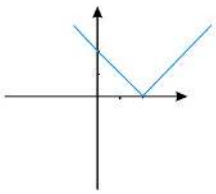
۳) $f(x) = \begin{cases} - ۲x - ۳ & ; x \le -\frac{۵}{۲} \\ ۲x - ۱۳ & ; x > -\frac{۵}{۲} \end{cases}$

۴) $f(x) = \begin{cases} ۲x + ۳ & ; x \le -\frac{۵}{۲} \\ - ۲x - ۱۳ & ; x > -\frac{۵}{۲} \end{cases}$

۴ حاصل عبارت $|\sqrt{5} - ۴| + |۲ + \sqrt{5}| - | - ۴|$ کدام است؟

۱) ۴
۲) $\sqrt{5}$
۳) $۲\sqrt{5}$
۴) ۲

۵ نمودار زیر مربوط به کدام گزینه است؟



۱) $y = |x| + ۲$
۲) $y = |x| - ۲$
۳) $y = |x + ۲|$
۴) $y = |x - ۲|$

۶ اگر $f(x) = |۳x - ۴|$ باشد، آن‌گاه مقدار $f(۱ + \sqrt{۲}) - f(۱ - \sqrt{۲})$ کدام است؟

۱) صفر
۲) $۶\sqrt{۲}$
۳) $-۶\sqrt{۲}$
۴) ۲

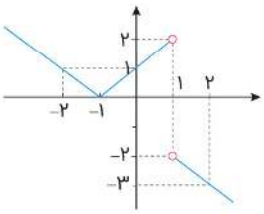
۷ کمترین مقدار تابع $f(x) = | - x^۲ - ۲| + ۳$ کدام است؟

۱) ۳
۲) ۲
۳) ۵
۴) ۱

۸ تابع $f(x) = |۳x - ۹|$ به‌صورت چندضابطه‌ای کدام است؟

۱) $f(x) = \begin{cases} ۳x + ۹ & ; x < ۳ \\ ۳x - ۹ & ; x \geq ۳ \end{cases}$
۲) $f(x) = \begin{cases} ۳x - ۹ & ; x < ۳ \\ -۳x + ۹ & ; x \geq ۳ \end{cases}$
۳) $f(x) = \begin{cases} ۳x - ۹ & ; x \geq ۳ \\ -۳x + ۹ & ; x < ۳ \end{cases}$
۴) $f(x) = \begin{cases} -۳x - ۹ & ; x \leq ۳ \\ -۳x + ۹ & ; x > ۳ \end{cases}$

۹ نمودار تابع f به‌صورت زیر است. ضابطهٔ آن کدام می‌تواند باشد؟

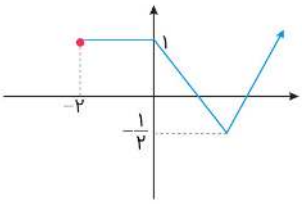


۱) $f(x) = |x + ۱|$
۲) $f(x) = \frac{|۱ - x^۲|}{۱ - x}$
۳) $f(x) = \frac{|x^۲ - ۱|}{x + ۱}$
۴) $f(x) = \begin{cases} x - ۱ & ; -۱ < x < ۱ \\ -(x - ۱) & ; x > ۱ , x < -۱ \end{cases}$

۱۰ برد تابع $f(x) = |x - ۲| - |x + ۱|$ کدام است؟

۱) $\mathbb{R}$
۲) $[-۳ , +۳]$
۳) $[۳ , +\infty]$
۴) $\mathbb{R} - (-۳ , +۳)$

۱۱ اگر نمودار $f(x)$ به‌صورت زیر باشد، دامنه و برد تابع g با ضابطهٔ $g(x) = ۲|f(\frac{۱}{۲}x)|$ کدام است؟



۱) $D_g = [-۴ , +\infty) , R_g = [۰ , +\infty)$
۲) $D_g = [-۲ , +\infty) , R_g = [۰ , +\infty)$
۳) $D_g = [-۱ , +\infty) , R_g = [۰ , +\infty)$
۴) $D_g = [۰ , +\infty) , R_g = [۰ , +\infty)$

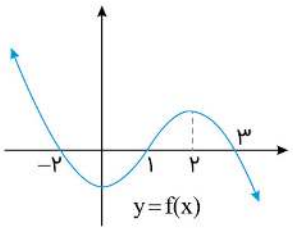
۱۲ نمودار تابع $y = |x^۳ - ۳x^۲ + ۳x|$ خط $y = x + ۱$ را در چند نقطه قطع می‌کند؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) صفر

۱۳ تابع $|\cos(x + \frac{\pi}{۴})|$ در کدام بازه نزولی اکید است؟

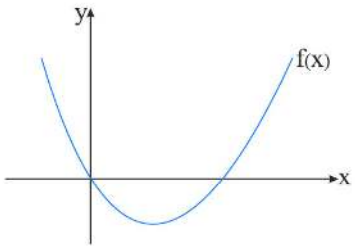
۱) $[۰, \frac{۳\pi}{۴}]$
۲) $[-\frac{\pi}{۴}, \frac{\pi}{۴}]$
۳) $[\frac{\pi}{۴}, \frac{۳\pi}{۴}]$
۴) $[\frac{۵\pi}{۴}, \frac{۷\pi}{۴}]$

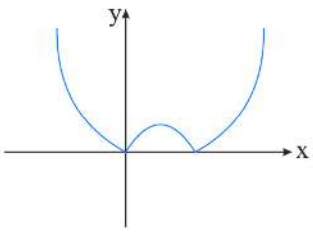
۱۴ تابع $f(x)$ به‌صورت زیر است. در چند بازه تابع $|f(x)|$ صعودی اکید است؟

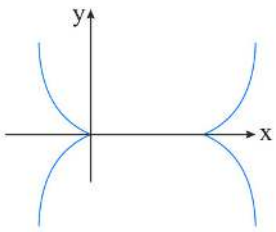


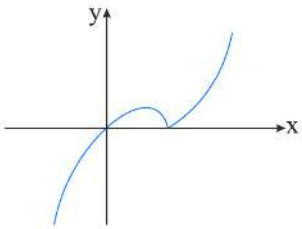
۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

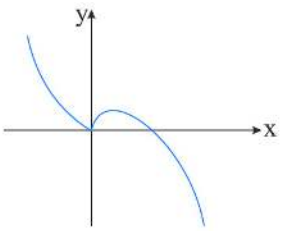
۱۵ اگر نمودار تابع $y = f(x)$ به‌صورت زیر باشد، نمودار $|y| = f(x)$ کدام است؟



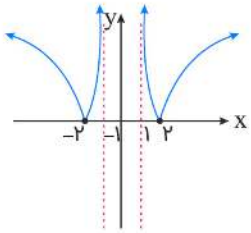
۱)


۲)


۳)


۴)


۱۶ شکل زیر، مربوط به نمودار کدام تابع است؟



۱) $|\log_2 |x+1||$

۲) $|\log_2 |x-1||$

۳) $|\log_2(|x|+1)|$

۴) $|\log_2(|x|-1)|$

۱۷ دو تابع $f(x) = ||x+2| - |x-2||$ و $g(x) = |\log x|$ چند نقطه مشترک دارند؟

۱) صفر

۲) یک

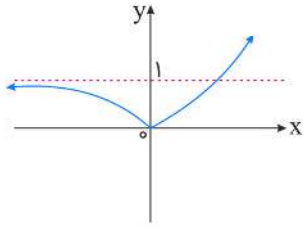
۳) دو

۴) سه

۱۸ نمودار تابع $|\log x|$ چگونه است؟

۱) صعودی اکید
۲) نزولی اکید
۳) ابتدا صعودی اکید، سپس نزولی اکید
۴) ابتدا نزولی اکید، سپس صعودی اکید

۱۹ کدام تابع، مربوط به نمودار زیر است؟

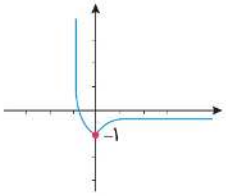


۱) $f(x) = |۲^{-x} + ۱|$
۲) $f(x) = |۲^{-x}| + ۱$
۳) $f(x) = |-۲^{x}| + ۱$
۴) $f(x) = |-۲^{x} + ۱|$

۲۰ نمودار $y = |\cos|x + \frac{\pi}{۸}||$ در چند نقطه خط $y = ۱$ را قطع می‌کند؟ (در بازه $[-۲\pi\ ,\ ۲\pi]$)

۱) ۳
۲) ۴
۳) ۵
۴) ۶

۲۱ معادلهٔ نمودار زیر کدام است؟

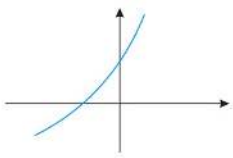


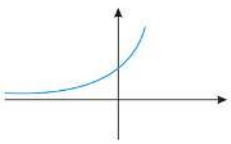
۱) $|\log(x+۱)| - ۱$
۲) $|x^{۳} - ۱|$
۳) $-|\log(x+۱) - ۱|$
۴) $|x^{۳}| - ۱$

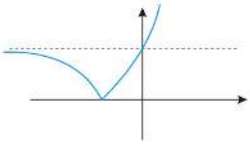
۲۲ معادلهٔ $|\sin x| - |\log|x|| = ۰$ دارای چند جواب است؟ (در $\mathbb{R}$)

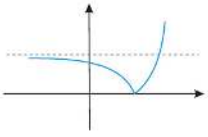
۱) ۴
۲) ۶
۳) ۱۲
۴) بی‌شمار

۲۳ نمودار تابع $y = \sqrt{۲^{۲x+۲} - ۲^{x+۲} + ۱}$ کدام است؟

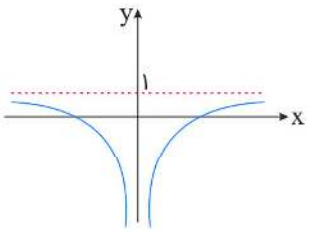
۱)


۲)


۳)


۴)


۲۴ نمودار زیر نشان‌دهندهٔ کدام‌یک از توابع زیر است؟



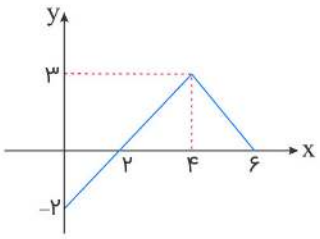
۱) $y = ۱ - \frac{۱}{x}$

۲) $y = ۱ - \frac{۱}{|x|}$

۳) $y = ۱ + \frac{۱}{x - ۱}$

۴) $y = ۱ + \frac{۱}{|x|}$

۲۵ نمودار تابع $y = f(x)$ مطابق شکل زیر می‌باشد. سطح محصور بین محور xها و $y = |f(x - ۲)|$ کدام است؟



۱) ۴

۲) ۸

۳) ۶

۴) ۱۰

پاسخ Homework (2)

۱ گزینه ۴

$$||\underbrace{\sqrt{۵}-۳}_{\text{منفی}}|-|\underbrace{-۳-\sqrt{۵}}_{\text{منفی}}|| = |-(\sqrt{۵}-۳)-(-(-۳-\sqrt{۵}))|$$

$$= |-\sqrt{۵}+۳-(۳+\sqrt{۵}|$$
$$= |-\sqrt{۵}+۳-۳-\sqrt{۵}|$$
$$= |-۲\sqrt{۵}|$$
$$= ۲\sqrt{۵}$$

* نکته:

تابع قدر مطلق : $f(x)=|x|=\begin{cases} x & x \geq ۰ \\ -x & x < ۰ \end{cases}$

۲ گزینه ۳

$$f(۲)=|۲+۱|-|۲\times ۲-۳|=|۳|-|۱|=۳-۱=۲$$

$$f(-۲)=|-۲+۱|-|۲\times(-۲)-۳|=|-۱|-|-۷|=۱-۷=-۶$$

$$f(۲)+f(-۲)=۲-۶=-۴$$

$$f(۰)=|۰+۱|-|۲\times ۰-۳|=|۱|-|-۳|=۱-۳=-۲ \Rightarrow ۲f(۰)=-۴$$

۳ گزینه ۲

تابع با ضابطهٔ $f(x)=|x|$ تابع قدرمطلق نامیده می‌شود و به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f(x)=\begin{cases} x & ;x\geq ۰ \\ -x & ;x<۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow |-۲x+۵|=\begin{cases} -۲x+۵ & ;-۲x+۵\geq ۰ \\ -(-۲x+۵) & ;-۲x+۵<۰ \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} -۲x+۵ & ;x\leq \frac{۵}{۲} \\ ۲x-۵ & ;x>\frac{۵}{۲} \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x)=\begin{cases} -۲x+۵-۸ & ;x\leq \frac{۵}{۲} \\ ۲x-۵-۸ & ;x>\frac{۵}{۲} \end{cases}\Rightarrow f(x)=\begin{cases} -۲x-۳ & ;x\leq \frac{۵}{۲} \\ ۲x-۱۳ & ;x>\frac{۵}{۲} \end{cases}$$

بنابراین گزینهٔ "۲" صحیح می‌باشد.

۴ گزینه ۴

$$\begin{cases} \sqrt{۵}<۴\Rightarrow |\underbrace{\sqrt{۵}-۴}_{\text{عددی منفی}}|=-(\sqrt{۵}-۴) \\ |\underbrace{۲+\sqrt{۵}}_{\text{عددی مثبت}}|=۲+\sqrt{۵} \\ |-۴|=-(-۴)=۴ \end{cases}$$

$$\Rightarrow |\sqrt{۵}-۴|+|۲+\sqrt{۵}|-|-۴|$$

$$=-(\sqrt{۵}-۴)+(۲+\sqrt{۵})-۴=-\sqrt{۵}+۴+۲+\sqrt{۵}-۴=۲$$

تابع قدرمطلق : $|x|=\begin{cases} x & x\geq ۰ \\ -x & x<۰ \end{cases}$

۵ گزینه ۴

نمودار رسم‌شده همان نمودار تابع $y=|x|$ است که ۲ واحد به سمت راست رفته است. اگر نمودار $y=|x|$ را a واحد به راست ببریم به ضابطهٔ $y=|x-a|$ می‌رسیم، درنتیجه داریم: $y=|x-۲|$ که ضابطهٔ نمودار رسم‌شده است.

۶ گزینه ۴

$$f(x)=|۳x-۴| \Rightarrow f(۱-\sqrt{۲})=|۳(۱-\sqrt{۲})-۴|=|۳-۳\sqrt{۲}-۴|$$

$$=|\underbrace{-۳\sqrt{۲}-۱}_{\text{عدد منفی}}|=-(-۳\sqrt{۲}-۱)=۳\sqrt{۲}+۱$$

$$f(۱+\sqrt{۲})=|۳(۱+\sqrt{۲})-۴|=|۳+۳\sqrt{۲}-۴|=|\underbrace{۳\sqrt{۲}-۱}_{\text{عدد مثبت}}|=۳\sqrt{۲}-۱$$

$$\Rightarrow f(۱-\sqrt{۲})-f(۱+\sqrt{۲})=(۳\sqrt{۲}+۱)-(۳\sqrt{۲}-۱)=\cancel{۳\sqrt{۲}}+۱-\cancel{۳\sqrt{۲}}+۱$$

$$\Rightarrow f(۱-\sqrt{۲})-f(۱+\sqrt{۲})=۲$$

نکته: $$|x|=\begin{cases}x & ;x>۰\\ -x & ;x<۰\end{cases}$$

۷ گزینه ۳

$$f(x)=|-x^۲-۲|+۳=|-\underbrace{(x^۲+۲)}_{+}|+۳=x^۲+۲+۳=x^۲+۵$$

حداقل مقدار تابع درجه دو از $\frac{-\Delta}{۴a}$ به‌دست می‌آید: $\frac{-\Delta}{۴a}=۵$

۸ گزینه ۳

باتوجه‌به تعریف قدر مطلق:

$$|u|=\begin{cases}u & ;u\geq ۰\\ -u & ;u<۰\end{cases}$$

$$f(x)=|۳x-۹|=\begin{cases}۳x-۹ & ;۳x-۹\geq ۰\\ -(۳x-۹) & ;۳x-۹<۰\end{cases}$$

$$=\begin{cases}۳x-۹ & ;x\geq ۳\\ -۳x+۹ & ;x<۳\end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x)=\begin{cases}۳x-۹ & ;x\geq ۳\\ -۳x+۹ & ;x<۳\end{cases}$$

۹ گزینه ۲

ضابطهٔ هر قسمت از نمودار را به دست می‌آوریم:

$$f(x)=\begin{cases}-x-1 & ;x\le -1\\ x+1 & ;-1<x<1\\ -x-1 & ;x>1\end{cases}$$

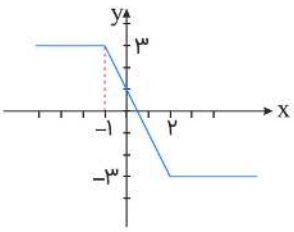
در بین گزینه‌ها، گزینه "۲" همان ضابطه‌ای که به دست آوردیم، است.

$$f(x)=\frac{|1-x^2|}{1-x}=\begin{cases}\frac{1-x^2}{1-x} & ;-1<x<1\\ \frac{-(1-x^2)}{1-x} & ;x>1,\ x\le -1\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\frac{(1-x)(1+x)}{1-x}=1+x & ;-1<x<1\\ \frac{-(1-x)(1+x)}{1-x}=-x-1 & ;x>1,\ x\le -1\end{cases}$$

۱۰ گزینه ۲

آسان‌ترین روش حل این سؤال رسم نمودار آن است:



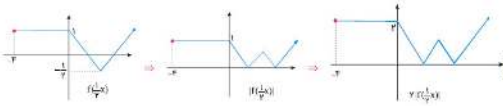
باتوجه‌به شکل نمودار برد تابع برابر است با بازه $[-۳\ ,\ +۳]$.

۱۱ گزینه ۱

مراحل تبدیل تابع به‌صورت زیر است.

$$f(x)\Rightarrow f(\frac{1}{2}x)\Rightarrow |f(\frac{1}{2}x)|\Rightarrow 2|f(\frac{1}{2}x)|$$

دامنه و برد به‌صورت زیر است:

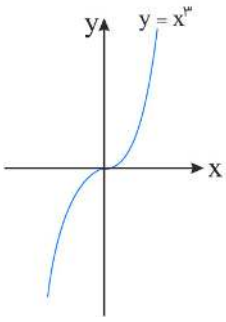


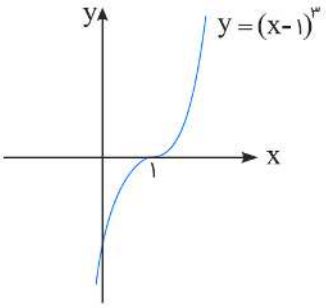
$$D_g=[-۴\ ,\ +\infty)\ ,\ R_g=[۰\ ,\ +\infty)$$

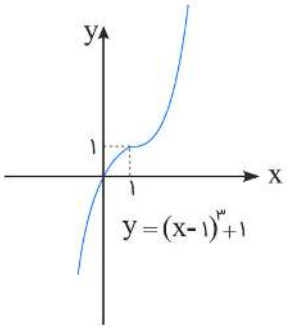
۱۲ گزینه ۲

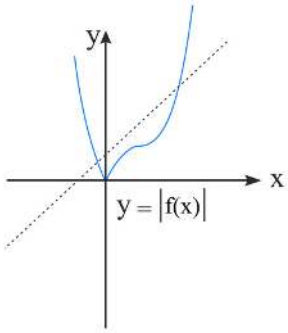
فرض می‌کنیم $f(x) = x^۳ - ۳x^۲ + ۳x$ باشد.

$$f(x) = x^۳ - ۳x^۲ + ۳x - ۱ + ۱ = (x-۱)^۳ + ۱$$





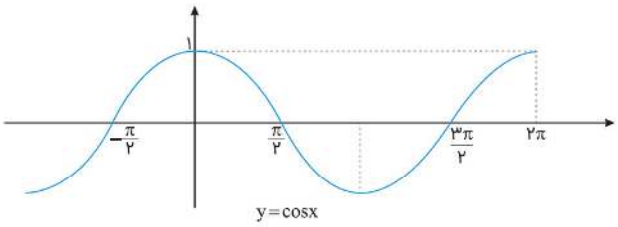


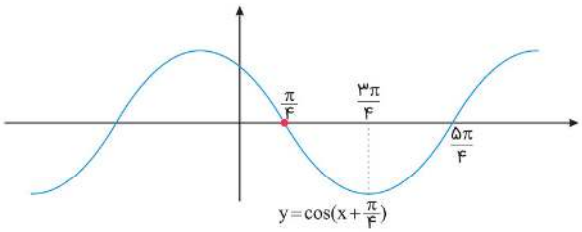


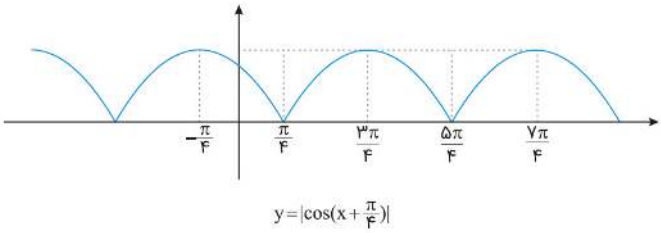
ملاحظه می‌کنید که در دو نقطه متقاطع‌اند.

۱۳ گزینه ۲

نمودار تابع را رسم می‌کنیم.





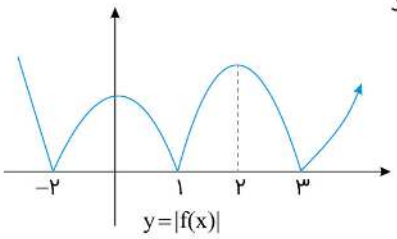


باتوجه‌به شکل، تابع در بازهٔ $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ نزولی اکید است.

۱۴ گزینه ۳

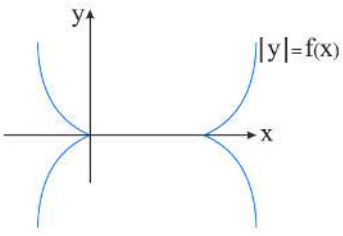
قسمت‌های زیر محور xها را به بالای محور xها متقارن می‌کنیم:

باتوجه‌به نمودار $|f(x)|$ در بازه‌های $[0, -2]$، $[2, 1]$ و $[3, +\infty)$ صعودی اکید است.

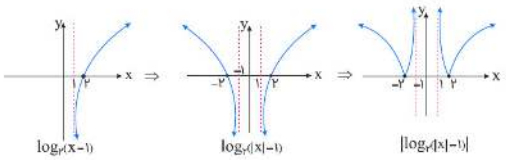


۱۵ گزینه ۲

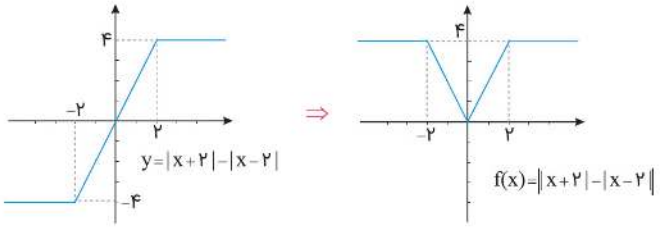
$$|y| = f(x) \Rightarrow \begin{cases} y \geq 0 \Rightarrow y = f(x) \\ y < 0 \Rightarrow -y = f(x) \end{cases}$$

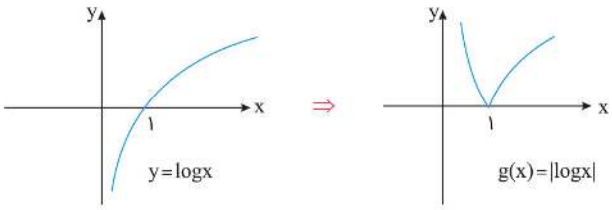


۱۶ گزینه ۴

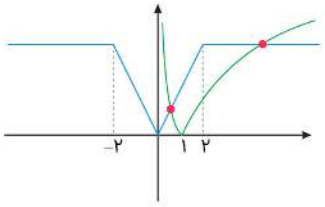


۱۷ گزینه ۳



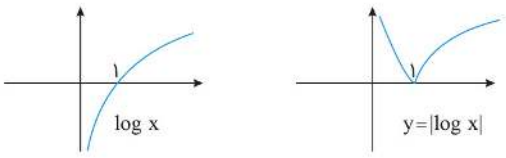


اگر دو تابع را در یک دستگاه رسم کنیم تعداد نقاط برخورد معلوم می‌شود.



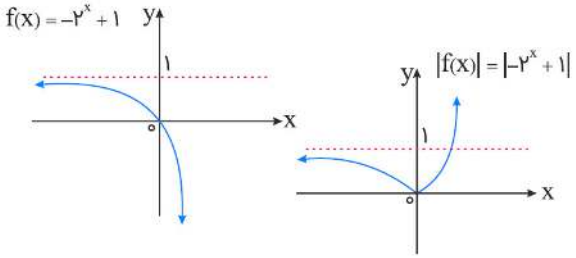
دو تابع در دو نقطه مشترک‌اند.

۱۸ گزینه ۴



تابع $|\log x|$ در بازهٔ $(0\ ,\ 1]$ نزولی اکید و در بازهٔ $[1\ ,\ +\infty)$ صعودی اکید است.

۱۹ گزینه ۴



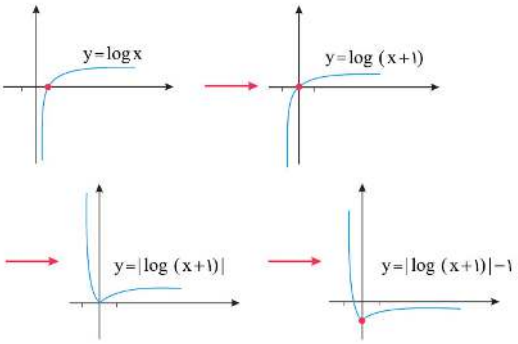
۲۰ گزینه ۲

باتوجه‌به اینکه $\cos(-x) = \cos x$، بنابراین $\cos|x+\frac{\pi}{۸}| = \cos(x+\frac{\pi}{۸})$.

$y=\cos(x+\frac{\pi}{۸})$ $y=|\cos(x+\frac{\pi}{۸})|$

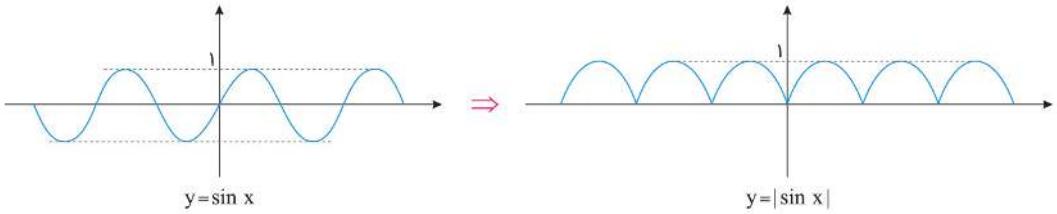
بنابراین دو تابع در چهار نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند.

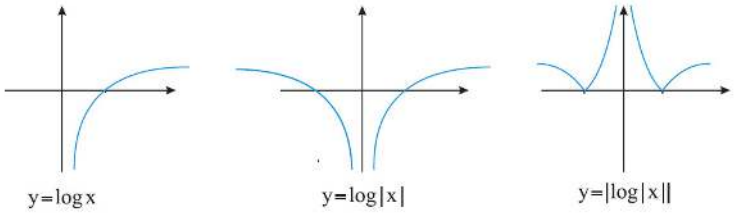
۲۱ گزینه ۱



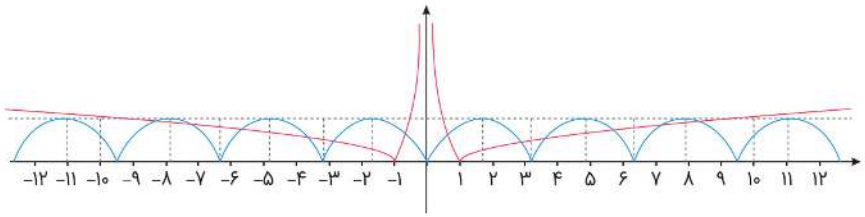
۲۲ گزینه ۳

نمودار هریک از توابع $y = |\sin x|$ و $y = |\log|x||$ را رسم می‌کنیم:





حال نمودار دو تابع را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم:

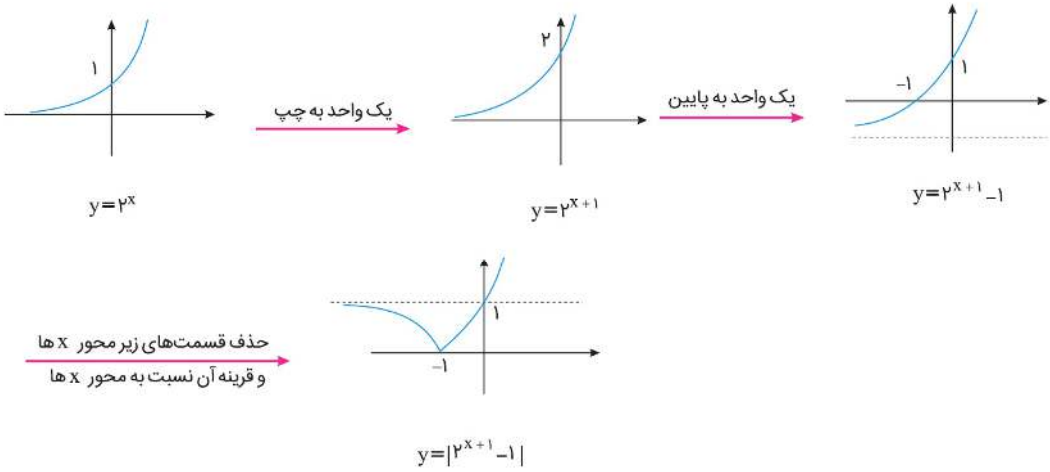


توجه کنید که $\log ۱۰ = ۱$، بنابراین به ازای $x = ۱۰$، مقدار log، یک می‌شود و پس از آن مقدار log افزایش یافته و دیگر با تابع $y = |\sin x|$ برخورد نخواهد داشت. بنابراین تعداد نقاط برخورد ۶ عدد در سمت راست و ۶ عدد در سمت چپ و در مجموع ۱۲تا است.

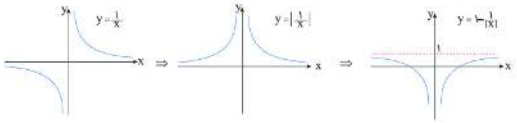
۲۳ گزینه ۳

$$y = \sqrt{۲^{۲x+۲} - ۲^{x+۲} + ۱} = \sqrt{۲^{۲(x+۱)} - ۲^{x+۱+۱} + ۱}$$

$$= \sqrt{(۲^{x+۱})^۲ - ۲(۲^{x+۱}) + ۱} = \sqrt{(۲^{x+۱} - ۱)^۲} = |۲^{x+۱} - ۱|$$



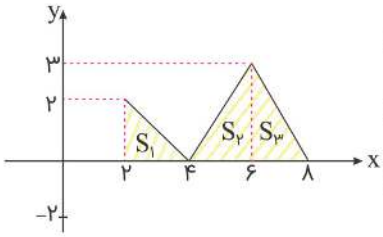
۲۴ گزینه ۲



۲۵ گزینه ۲

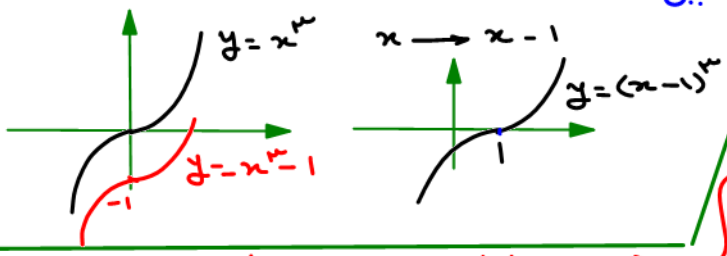
نمودار تابع $y = f(x)$ را دو واحد به‌سمت راست انتقال می‌دهیم تا به نمودار $f(x-۲)$ برسیم.

سپس $S_۱$ را از قسمت منفی به قسمت مثبت دستگاه مختصات تصویر می‌کنیم.



$$\left.\begin{array}{l} S_۱ = \dfrac{۲ \times ۲}{۲} = ۲ \\ S_۲ = \dfrac{۲ \times ۳}{۲} = ۳ \\ S_۳ = \dfrac{۲ \times ۳}{۲} = ۳ \end{array}\right\} \Rightarrow S_۱ + S_۲ + S_۳ = ۸$$

با تبدیل x به x-1 یک واحد به راست



مثال: تابع $y=x^2-4x$ را یک واحد به راست منتقل کنید.

$x \to x-1$

$y=(x-1)^2-4(x-1)$

جواب $y=x^2-6x+5$

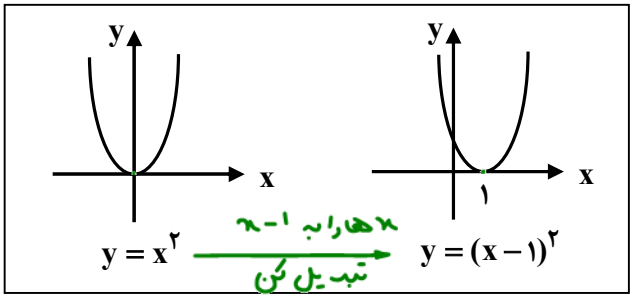
همه x ها را برای جاشون ۱- x می ذاری:

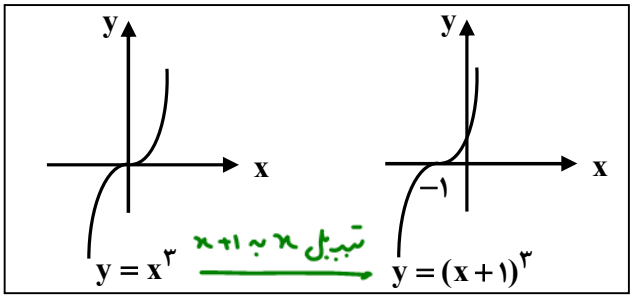
تبدیل نمودار توابع

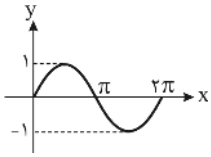
۱- انتقال افقی

۱) اگر $a>0$ باشد، نمودار $y=f(x-a)$ همان نمودار f است که a واحد به سمت راست انتقال داده شده است. در این حالت به مقادیر x، a واحد اضافه شده است. (دامنه تغییر می‌کند.)

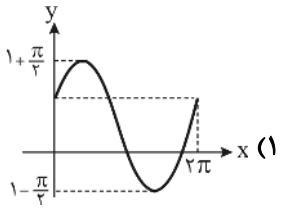
۲) اگر $a>0$ باشد نمودار $y=f(x+a)$ همان نمودار f است که a واحد به چپ انتقال داده شده است. در این حالت از مقادیر x، a واحد کم می‌شود. (دامنه تغییر می‌کند.)

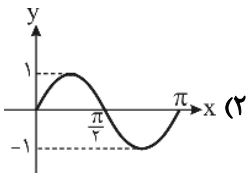


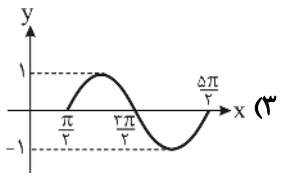


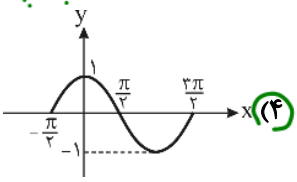
تمرین: نمودار تابع $y=f(x)$ به صورت  است، نمودار تابع $y=f(x+\frac{\pi}{2})$ کدام است؟

$\frac{\pi}{2}$ با $\frac{3.14}{2}=1.57$ به سمت چپ برود.

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

دقت: x ها رو برای جاشون مثلاً ۲- x می ذاریم: به عنوان مثال می خواهیم در صفحه مختصات تابع $y_1=x^3-4x^2+7x-8$ را ۲ واحد به راست ببریم (انتقال افقی به اندازه ۲ واحد به سمت x های مثبت) داریم:

$y_2=(x-2)^3-4(x-2)^2+7(x-2)-8$

y_2 همون y_1 هست که ۲ تا به راست رفته.

تمرین: اگر نقطهٔ $A(3,4)$ روی تابع $f(x)$ قرار گیرد، در این صورت کدام نقطهٔ زیر، روی تابع $y=f(x+m)$ قرار می‌گیرد؟

۱) $(3+m,4)$ ۲) $(3-m,4-m)$ ۳) $(3-m,4)$ ۴) $(3+m,4+m)$

همون x هست که m واحد به چپ رفته یعنی x آن به $x-m$ تبدیل میشه

$A\left|\begin{matrix}3\\4\end{matrix}\right.$ $A_1\left|\begin{matrix}3-m\\4\end{matrix}\right.$

$(x\pm1)^3=x^3\pm3x^2+3x\pm1$

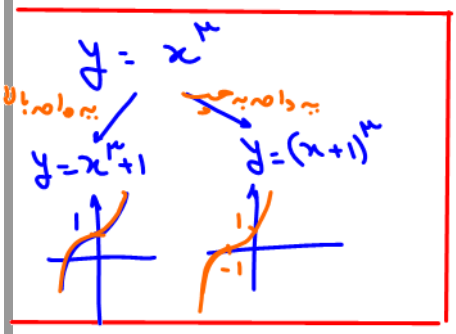
$(x\pm2)^3=x^3\pm6x^2+12x\pm8$

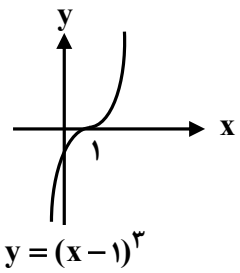
۲- انتقال عمودی

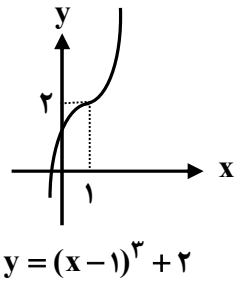
۱) اگر $a>0$ باشد نمودار $y=f(x)+a$ همان نمودار f است که a واحد به بالا انتقال داده شده است. در این حالت به مقادیر y (برد) a واحد اضافه می‌شود (برد تغییر می‌کند).

۲) اگر $a<0$ باشد نمدار $y=f(x)+a$ همان نمودار f است که a واحد به پایین انتقال داده شده است. در این حالت از مقادیر y (برد) a واحد کم می‌شود (برد تغییر می‌کند).

مثلاً برای رسم نمودار $y=x^3-3x^2+3x+1$ می‌نویسیم: $y=(x^2-3x^2+3x-1)+2=(x-1)^3+2$ حالا:

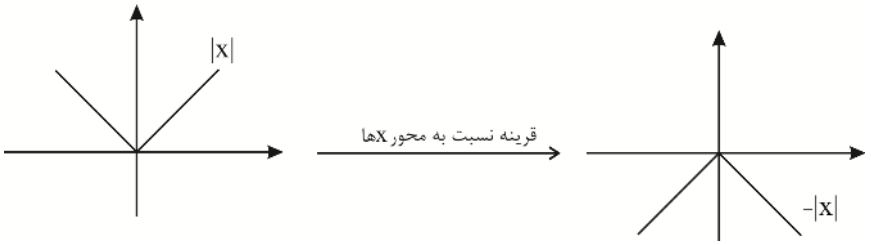




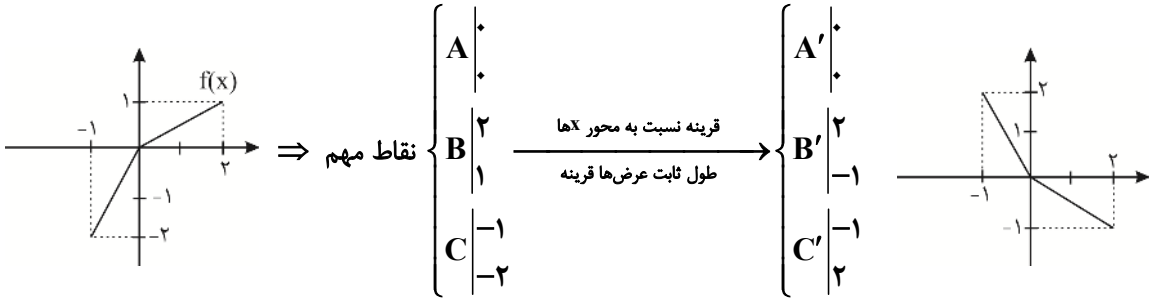


۳- رسم $-f(x)$:

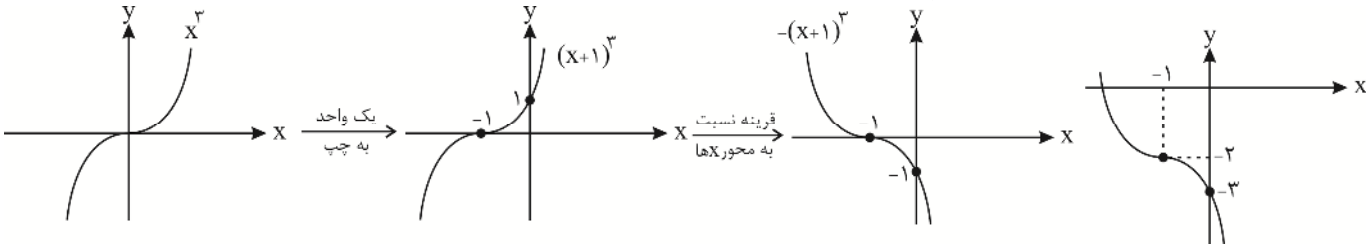
برای رسم $-f(x)$ کافی است نمودار f را نسبت به محور xها قرینه کنیم. توجه کنید در این حالت طول نقاط ثابت ولی عرضشان قرینه می‌شود. پس مقادیر دامنه ثابت ولی مقادیر برد قرینه خواهند شد. مثلاً برای رسم تابع $y=-|x|$ داریم:



و یا مثلاً اگر $f(x)$ به صورت مقابل باشد داریم:



برای رسم تابع $y=-(x+1)^3-2$، ابتدا x^3 را یک واحد به سمت چپ انتقال داده و سپس نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم و در نهایت کل نمودار را ۲ واحد به پایین منتقل می‌کنیم:



همان‌طور که دیدید اولویت با انتقال افقی، سپس با علامت منفی پشت تابع و در نهایت با انتقال عمودی است.

۴- رسم $f(-x)$:

برای رسم نمودار $f(-x)$ کافی است نمودار f را نسبت به محور yها قرینه کنیم. توجه کنید در این حالت طول نقاط قرینه شده ولی عرضشان ثابت می‌ماند. پس مقادیر دامنه قرینه خواهند شد ولی برد تغییری نمی‌کند.

مثلاً برای رسم $y=\sqrt{-x}$ داریم:

تابع $y=x^5-4x^3+x^2-7x$ را نسبت به محور yها قرینه کنید: xها رو برعکس داریم بخش xی داریم:

$y=(-x)^5-4(-x)^3+(-x)^2-7(-x)$

جواب $y=-x^5+4x^3+x+7x$

نکته: اگر xها رو برداشتی و xی گذاشتی و تابع عوض نشد آن‌گاه محور yها محور تقارن است (تابع زوج) یعنی خوده $f(-x)=f(x)$

مثل $y=\cos x$ ، $y=|x|$ ، $y=x^{2n}$

۵- رسم $y=af(x)$

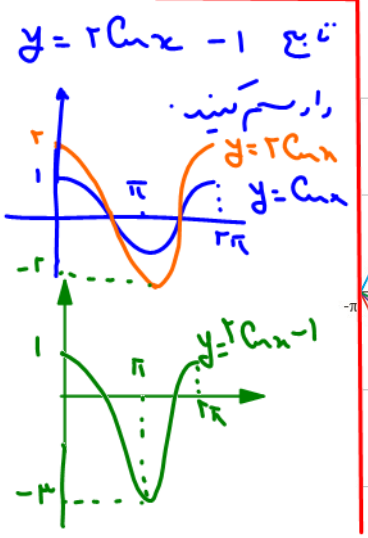
۱) اگر $a>1$ باشد، نمودار $f(x)$ در امتداد محور yها با ضریب a کشیده می‌شود که به آن انبساط عمودی می‌گوییم. در این حالت مقادیر برد (yها)، a برابر می‌شوند.

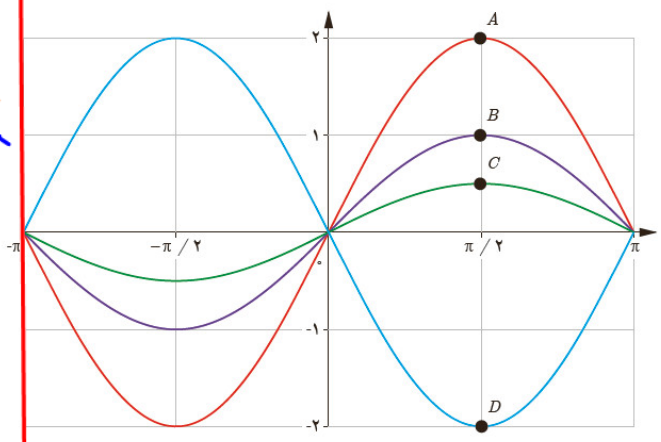
۲) اگر $0<a<1$ باشد، نمودار $f(x)$ در امتداد محور yها با ضریب a فشرده می‌شود که به آن انقباض عمودی می‌گوییم. در این حالت نیز مقادیر برد (yها)، a برابر می‌شوند.

۳) اگر پشت تابع یک عدد منفی ضرب شده باشد $(a<0)$ ابتدا تابع را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم که از منفی خلاص شویم و سپس عرض‌ها را در عدد مثبت a ضرب می‌کنیم (مثل ۲ حالت بالا).

تمرین: در شکل زیر نمودار توابع با ضابطه‌های $y=\sin x$ و $y=2\sin x$ و $y=-2\sin x$ و $y=\frac{1}{2}\sin x$ در بازه‌ی $[-\pi,\pi]$ رسم شده است. مشخص کنید هر کدام از ضابطه‌ها مربوط به کدام نمودار است. دامنه و برد هر کدام را مشخص کنید.

تابع $y=2\cos x-1$ را رسم کنید.





یادت باشه: در این نوع از توابع $(af(x))$، عرض نقاط در عدد a ضرب می‌شود اما xها (طول نقاط) ثابت می‌ماند.

دامنه ثابت

۶- رسم $f(ax)$

با فرض این که $a>0$ است، برای رسم $f(ax)$ کافی است طول هر نقطه از نمودار $f(x)$ را $\frac{1}{a}$ برابر کنیم.

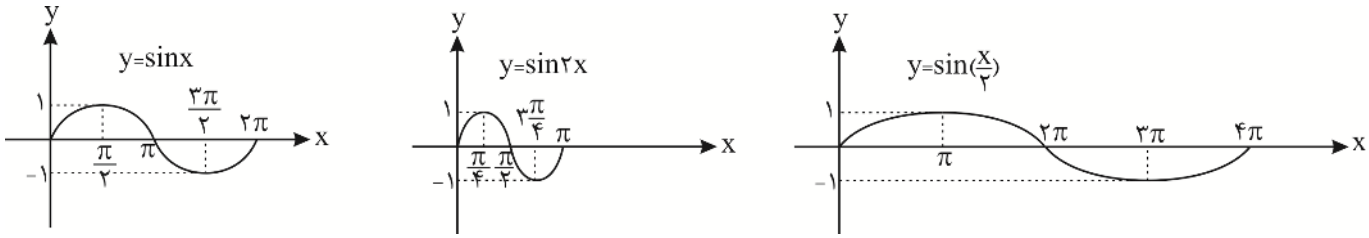
۱) اگر $a>1$ باشد منحنی با ضریب $\frac{1}{a}$ در امتداد محور xها منقبض (فشرده) می‌شود.

۲) اگر $0<a<1$ باشد منحنی با ضریب $\frac{1}{a}$ در امتداد محور xها کشیده می‌شود.

در هر دو حالت فوق، مقادیر دامنه $\frac{1}{a}$ برابر می‌شود.

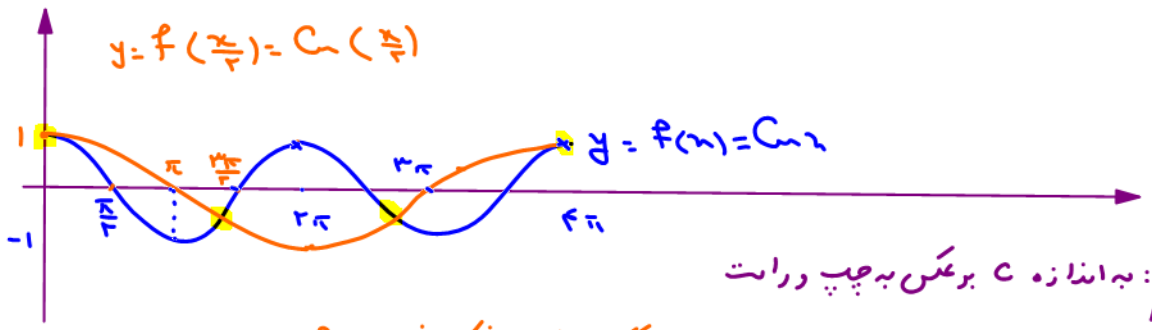
یادت باشه: در این مدل از توابع $(f(ax))$، طول نقاط در عدد $\frac{1}{a}$ ضرب می‌شود اما عرض نقاط ثابت می‌ماند. مثلاً اگر $f(x)=\sin x$ باشد برای رسم $f(\frac{x}{2})$ و $f(2x)$، به ترتیب طول نقاط را در ۲ و $\frac{1}{2}$ ضرب می‌کنیم:

برد ثابته



تمرین: اگر $f(x)=\cos x$ باشد، آن‌گاه نمودار دو تابع $y=f(x)$ و $y=f(\frac{x}{2})$ در بازهٔ $[0,4\pi]$ در چند نقطه مشترک‌اند؟

۱) ۲ ۲) ۵ ۳) ۳ ۴) ۴



۷- رسم $y=Af(bx+c)+D$

بهترین و کامل‌ترین روش رسم، همین مورد است که تمام موارد قبلی را شامل می‌شود.

مراحل رسم:

۱) ابتدا انتقال عدد ثابت c را انجام می‌دهیم.

۲) با توجه به مقدار b نمودار را در راستای افقی یعنی محور xها منبسط یا منقبض می‌کنیم.

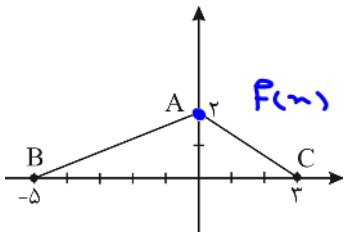
۳) اگر b منفی باشد، در پایان، نمودار را نسبت به محور yها قرینه می‌کنیم.

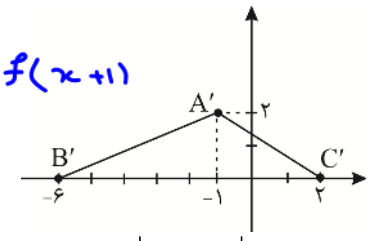
۴) با توجه به مقدار A نمودار در راستای محور yها کشیده و یا فشرده می‌کنیم (عرض نقاط را در A ضرب می‌کنیم).

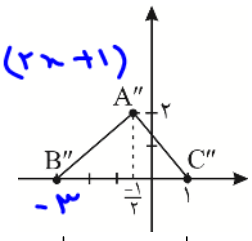
۵) اگر A منفی باشد پس از آن که عرض نقاط را در عدد مثبت پشت تابع ضرب کردیم، تابع را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم (یعنی با ثابت نگه داشتن xها، عرض نقاط را در منفی ضرب می‌کنیم).

۶) انتقال عمودی عدد D را انجام می‌دهیم.

تمرین: اگر $f(x)$ به صورت زیر باشد، نمودار $y=-2f(1-2x)$ را رسم کنید.







$$A\left|\begin{matrix}0\\2\end{matrix}\right. \to A_1\left|\begin{matrix}-1\\2\end{matrix}\right. \to A_2\left|\begin{matrix}-\frac{1}{2}\\2\end{matrix}\right. \to A_3\left|\begin{matrix}\frac{1}{2}\\2\end{matrix}\right.$$

$$A_4\left|\begin{matrix}\frac{1}{2}\\4\end{matrix}\right. \to A_5\left|\begin{matrix}\frac{1}{2}\\-4\end{matrix}\right.$$

دوی شکل آخر

$$A\left|\begin{matrix}0\\2\end{matrix}\right. \to A'\left|\begin{matrix}-1\\2\end{matrix}\right.$$

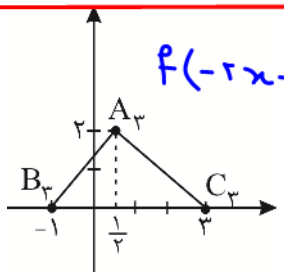
$$B\left|\begin{matrix}-5\\0\end{matrix}\right. \to B'\left|\begin{matrix}-6\\0\end{matrix}\right.$$

$$C\left|\begin{matrix}3\\0\end{matrix}\right. \to C'\left|\begin{matrix}2\\0\end{matrix}\right.$$

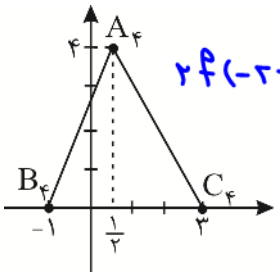
$$B'\left|\begin{matrix}-6\\0\end{matrix}\right. \to B''\left|\begin{matrix}-3\\0\end{matrix}\right.$$

$$C'\left|\begin{matrix}2\\0\end{matrix}\right. \to C''\left|\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right.$$

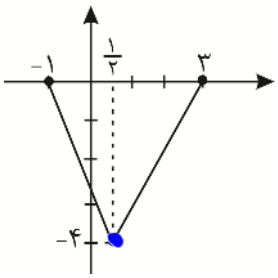
$$A'\left|\begin{matrix}-1\\2\end{matrix}\right. \to A''\left|\begin{matrix}-\frac{1}{2}\\2\end{matrix}\right.$$



عرض‌ها دو برابر می‌شوند



تقارن عمودی



$$B''\left|\begin{matrix}-3\\0\end{matrix}\right. \to B_3\left|\begin{matrix}3\\0\end{matrix}\right.$$

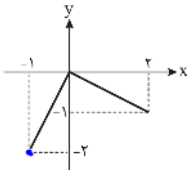
$$A''\left|\begin{matrix}-\frac{1}{2}\\2\end{matrix}\right. \to A_3\left|\begin{matrix}\frac{1}{2}\\2\end{matrix}\right.$$

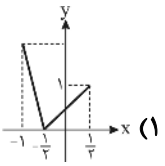
$$C''\left|\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right. \to C_3\left|\begin{matrix}-1\\0\end{matrix}\right.$$

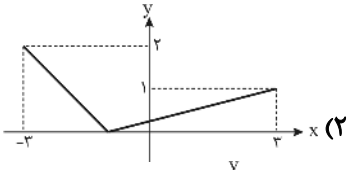
$$C_3\left|\begin{matrix}-1\\0\end{matrix}\right. \to C_4\left|\begin{matrix}-1\\0\end{matrix}\right.$$

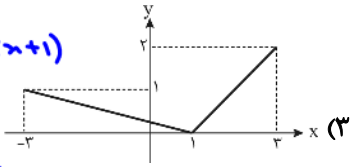
$$B_3\left|\begin{matrix}3\\0\end{matrix}\right. \to B_4\left|\begin{matrix}3\\0\end{matrix}\right.$$

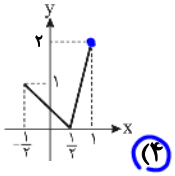
$$A_3\left|\begin{matrix}\frac{1}{2}\\2\end{matrix}\right. \to A_4\left|\begin{matrix}\frac{1}{2}\\4\end{matrix}\right.$$

تمرین: نمودار تابع $y=f(x)$ به صورت  است، نمودار تابع $y=-f(1-2x)$ کدام است؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

$A\left|\begin{matrix}-1\\-2\end{matrix}\right. \in f(x)$

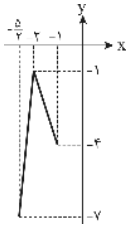
$A\left|\begin{matrix}-2\\-2\end{matrix}\right. \in f(x+1)$

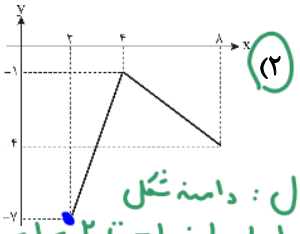
$A\left|\begin{matrix}-1\\-2\end{matrix}\right. \quad f(2x+1)$

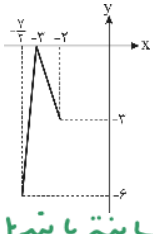
$A\left|\begin{matrix}1\\-2\end{matrix}\right. \quad f(-2x+1)$

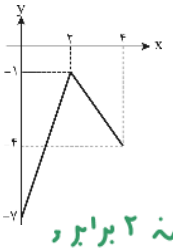
$A\left|\begin{matrix}1\\2\end{matrix}\right. \quad -f(-2x+1)$

تمرین: بر اساس نمودار تابع $y=f(x)$ در تست قبلی، نمودار تابع $y=3f(\frac{x}{2}-2)-1$ کدام است؟

۱) 

۲) 

۳) 

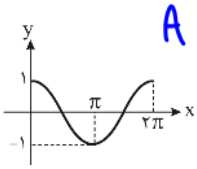
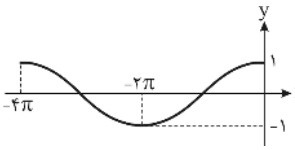
۴) 

راه اول: دامنه شکل ۲ برابر، دامنه ۲ برابر، x به $\frac{x}{2}$ یعنی ۱ تا ۲ برابر، ۳ تا ۶ برابر (واحد) (برنت) ۲ تا نقطه می‌شود و ۲ تا نقطه

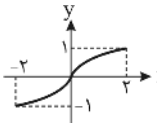
$A\left|\begin{matrix}-1\\-2\end{matrix}\right. \in f(x) \rightarrow A\left|\begin{matrix}1\\-2\end{matrix}\right. \in f(x-2) \quad A\left|\begin{matrix}2\\-2\end{matrix}\right. \in f(\frac{x}{2}-2) \quad A\left|\begin{matrix}2\\-6\end{matrix}\right. \in 3f(\frac{x}{2}-2)$

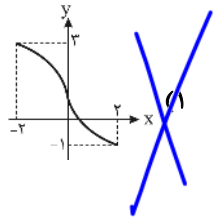
راه دوم:

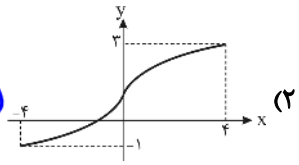
$A\left|\begin{matrix}2\\-7\end{matrix}\right. \in 3f(\frac{x}{2}-2)-1$ فقط ۲ تا

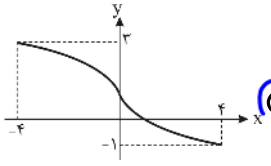
تمرین: نمودار تابع $y=f(x)$ به شکل  است، ضابطه‌ی نمودار  کدام است؟

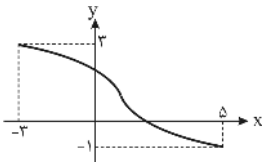
۱) $y=f(\frac{x}{2})$ ۲) $y=f(-\frac{x}{2})$ ۳) $y=f(2x)$ ۴) $y=f(-2x)$

تمرین: نمودار تابع $y=f(x)$ به صورت  است، نمودار تابع $y=-2f(\frac{x}{2})+1$ کدام است؟

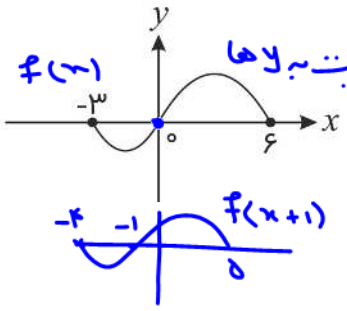
۱) 

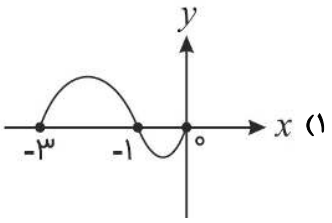
۲) 

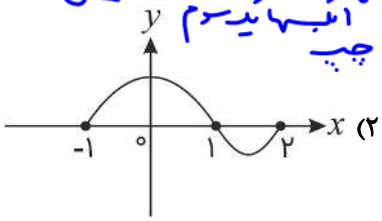
۳) 

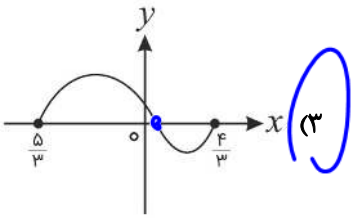
۴) 

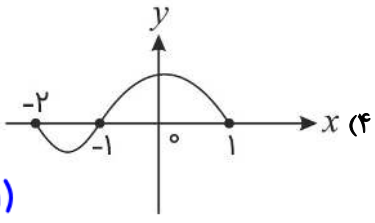
تمرین: اگر نمودار $y=f(x)$ به صورت زیر باشد، نمودار تابع $y=f(1-3x)$ کدام است؟



۱) 

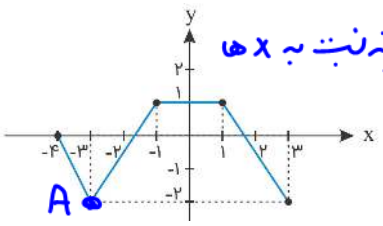
۲) 

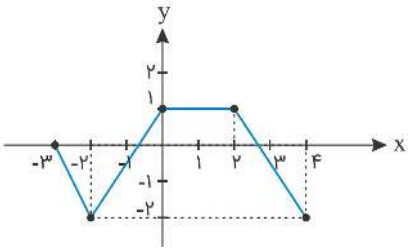
۳) 

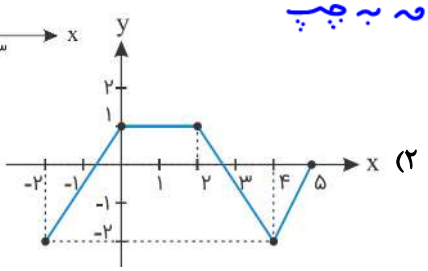
۴) 

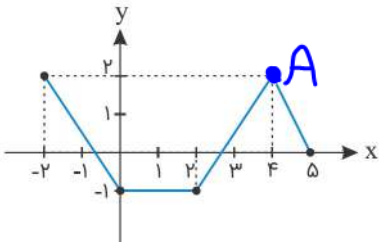
پاسخ: گزینهٔ «۳» ـ باید تابع نسبت به محور yها قرینه شود و همچنین xهای آن $\frac{1}{3}$ گردد و در آخر نمودار $\frac{1}{3}$ به سمت راست منتقل گردد.

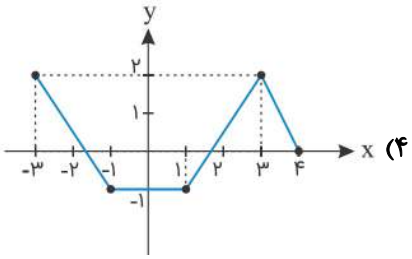
تمرین: اگر نمودار تابع $f(x)$ به صورت زیر باشد، نمودار $-f(-x+1)$ کدام است؟



۱)


۲)


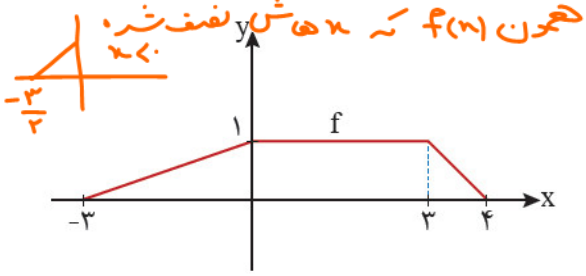
۳)


۴)


پاسخ: گزینهٔ «۳» ـ برای رسم نمودار تابع $-f(-x+1)$ باید مراحل زیر را انجام داد:

ابتدا نمودار ۱ واحد به سمت چپ انتقال داده شود و نمودار نسبت به محور yها قرینه شود، سپس برای این که نمودار $-f(-x+1)$ را رسم کنید باید نمودار را نسبت به محور xها قرینه کنید که در نهایت به گزینهٔ (۳) می‌رسیم.

تمرین: اگر نمودار تابع f به صورت شکل زیر و $g(x)=\begin{cases} f(x+1) & x \geq 0 \\ f(2x) & x < 0 \end{cases}$ باشد، مساحت سطح محدود بین نمودار تابع g و محور xها کدام است؟

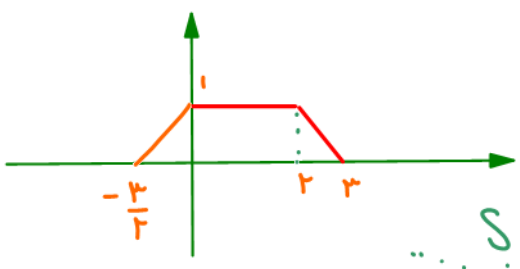


۱) $\frac{7}{4}$

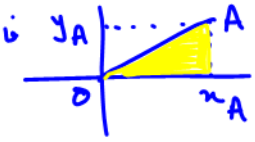
۲) $\frac{11}{4}$

۳) $\frac{13}{4}$ ✓

۴) $\frac{15}{4}$



فاصله نقطه $A(x_A, y_A)$ از مبداء $O(0,0)$: $\sqrt{x_A^2+y_A^2}$



$x \longrightarrow x-1$

تمرین: نمودار تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ را در امتداد محور xها یک واحد در جهت مثبت و سپس قرینهٔ آن نسبت به محور xها را در امتداد محور yها ۲ واحد د رجهت منفی انتقال می‌دهیم. فاصله نقطه‌های برخورد منحنی حاصل با نمودار تابع f، از مبدأ مختصات کدام است؟ (خارج ۱۴۰۱)

۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۲) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ ۳) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ ۴) $\frac{\sqrt{10}}{2}$

تابع جدید — تابع قدیم

$-\left(\frac{1}{x-1}\right)-2=\frac{1}{x}$

$\frac{-1}{x-1}-\frac{1}{x}=2 \rightarrow \frac{-x-x+1}{x(x-1)}=2 \rightarrow -2x+1=2x(x-1) \rightarrow -2x+1=2x^2-2x \rightarrow x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

$A\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\sqrt{2}\right)\quad A'\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\sqrt{2}\right)$

$OA=\sqrt{x_A^2+y_A^2}=\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+(\sqrt{2})^2}=\sqrt{\frac{5}{2}}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{10}}{2}$ گزینه ۴

تمرین: نقطهٔ $A(-1,3)$ روی نمودار تابع $f(x)$ و نقطهٔ متناظر با آن یعنی $A'(a,b)$ روی نمودار تابع $y=3f(2x-5)-7$ قرار دارد. $a-b$ کدام است؟

۱) ۲- ۲) صفر ۳) ۲ ۴) ۴

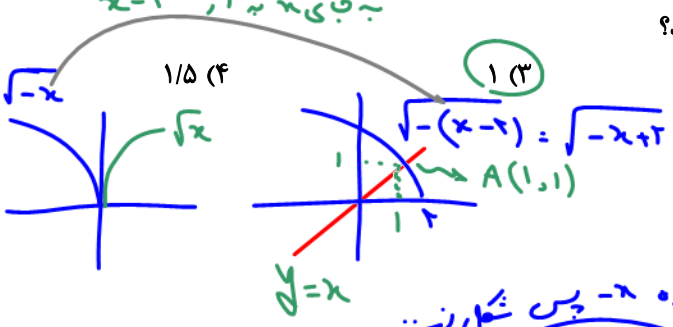
پاسخ: گزینهٔ «۲»

$$A\begin{vmatrix}-1\\3\end{vmatrix} \xrightarrow{\text{۵واحد به راست}} \begin{vmatrix}4\\3\end{vmatrix} \xrightarrow{\text{انقباض طولی}} \begin{vmatrix}2\\3\end{vmatrix} \xrightarrow{\text{انبساط عرضی}} \begin{vmatrix}2\\9\end{vmatrix} \xrightarrow{\text{انتقال به پایین}} \begin{vmatrix}2=a\\2=b\end{vmatrix}$$

$\Rightarrow A'(2,2) \Rightarrow a-b=2-2=0$

تمرین: قرینهٔ نمودار $f(x)=\sqrt{x}$ را نسبت به محور yها تعیین کرده، سپس ۲ واحد به طرف xهای مثبت انتقال می‌دهیم. نمودار حاصل، نیمساز ناحیهٔ اول و سوم را با کدام طول قطع می‌کند؟ (خارج تجربی ۹۷)

۱) ۲- ۲) ۰/۵ ۳) ۱ ۴) ۱/۵



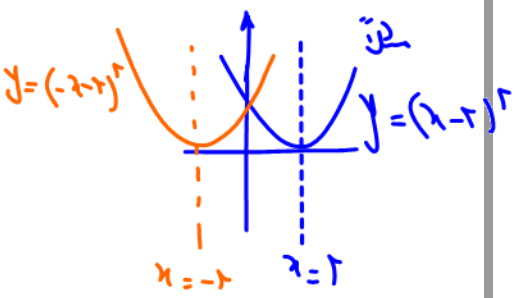
به جای x بنویس x-2

x شده x- پس شکل نسبت به محور y ها قرینه شده

$y=f(-x+1)$

تمرین: اگر $x=2$ محور تقارن $y=f(x+1)$ باشد، محور تقارن $y=f(1-x)$ کدام است؟

۱) $x=-4$ ۲) $x=4$ ۳) $x=-2$ ۴) $x=-1$



$y=f(-x+1)$, $y=f(x+1)$

x شده x- پس شکل نسبت به y ها قرینه شده پس محور تقارنش هم نسبت به محور y ها قرینه شده پس حول $x=-2$

اول قرینه نسبت به محور y ها سپس نسبت به محور x ها

$f(x) \leftarrow f(-x) \leftarrow -f(-x)$

تمرین: ابتدا قرینه نمودار تابع $f(x)=(x-1)^2$ را نسبت به مبدأ مختصات رسم کرده، سپس منحنی حاصل را ۴ واحد به سمت بالا انتقال می‌دهیم. طول نقاط تلاقی منحنی اخیر با منحنی اصلی کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۹)

۱) ۰، ۲ ۲) ۱-، ۱ ۳) ۱، ۲ ۴) ۲-، ۱

تابع جدید $-(-x-1)^2+4$ = تابع اصلی $(x-1)^2$

کنترل گزینه ها

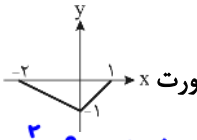
$x=\pm 1$

$\frac{-2}{2}$

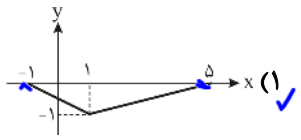
نکته:

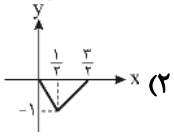
$f(x)$ قرینه $-f(-x)$ نسبت به مبداء

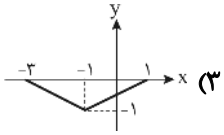
گاهی اوقات نمودار انتقال‌یافته رو میدن و نمودار خود $f(x)$ رو می‌پرسن. باید مراحل را از آخر به اول و به صورت برعکس انجام دهیم.

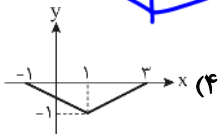
تمرین: نمودار $y=f(1-2x)$ به صورت  است، نمودار $y=f(x)$ کدام است؟

$f(x)$ $f(1+x)$ $f(1+2x)$

۱)  ✓

۲) 

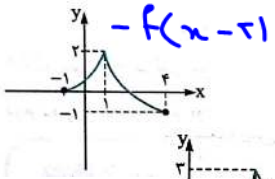
۳) 

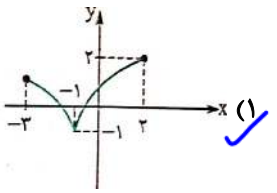
۴) 

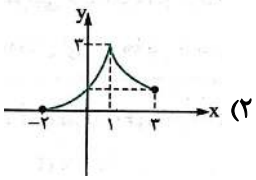
راه سریع: دامنه $f(1-2x)$ از ۲- تا برابر ۳ واحد است در $f(x)$ دامنه باید آنقدر باشد و تنها گزینه درست ① است

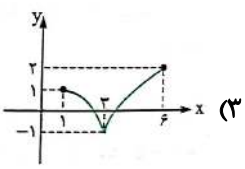
تمرین: اگر نمودار تابع $y=-f(x-2)$ به شکل مقابل باشد، نمودار تابع $y=1+f(x)$ کدام است؟

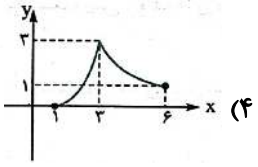
$-f(x-2)$



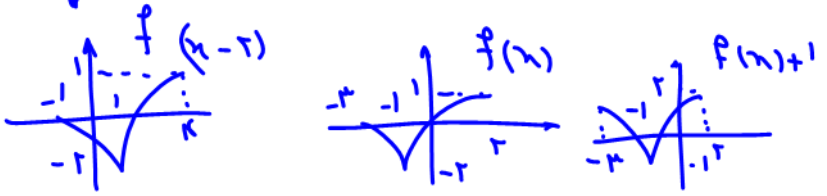
۱)  ✓

۲) 

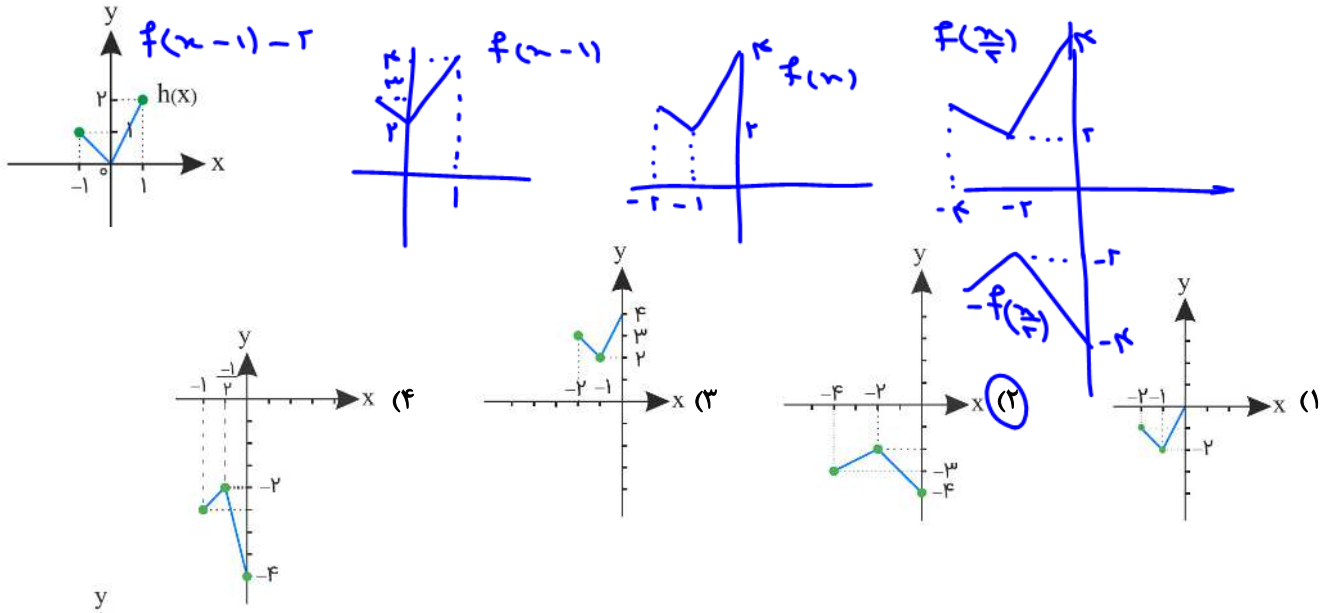
۳) 

۴) 

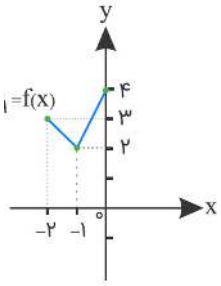
$f(x-2)$ $f(x)$ $f(x)+1$



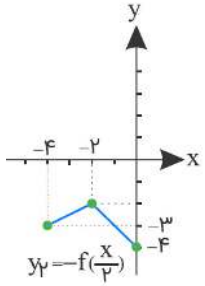
تمرین: نمودار تابع $h(x)=f(x-1)-2$ مطابق شکل زیر است. کدام گزینه نمودار تابع $-f(\frac{x}{2})$ را به درستی نشان می‌دهد؟



پاسخ: گزینهٔ «۲» ـ ابتدا باید نمودار تابع $y_1=f(x)$ را به دست آوریم. برای این منظور، کافی است نمودار $y=h(x)$ را یک واحد به سمت چپ و دو واحد به سمت بالا انتقال دهیم؛ بنابراین:



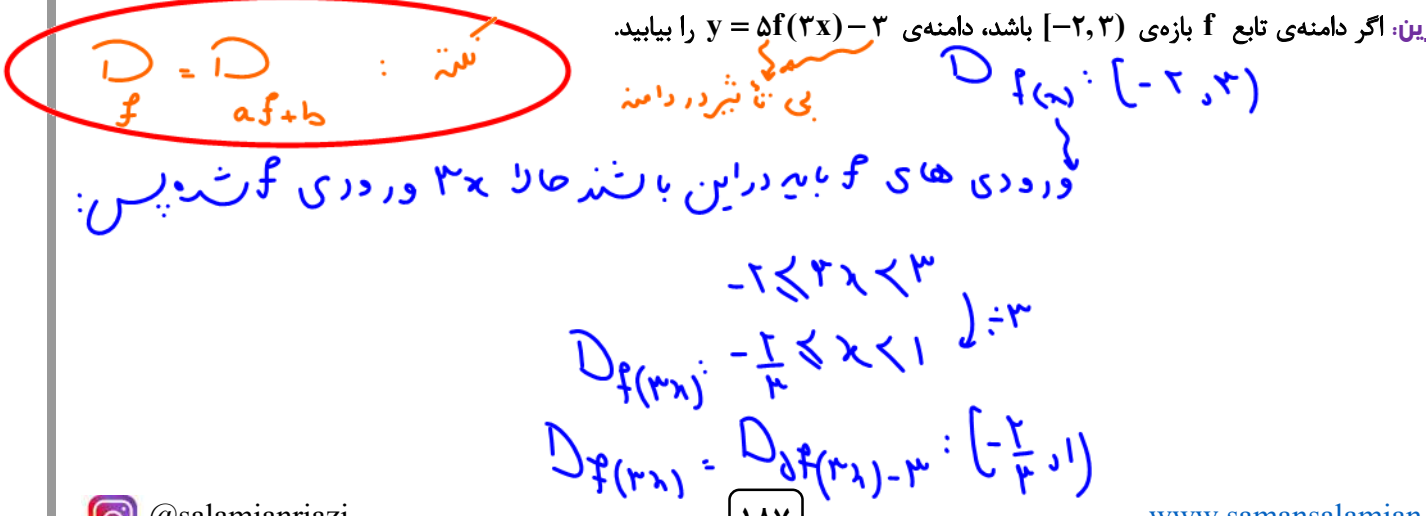
حال برای رسم $y_2=-f(\frac{x}{2})$ کافی است نمودار تابع $y_1=f(x)$ را در راستای افقی دو برابر منبسط و سپس نسبت به محور xها قرینه کنیم؛ در نتیجه تابع $y_2=-f(\frac{x}{2})$ به صورت زیر به دست می‌آید:



«تاثیر انتقال روی دامنه و برد تابع»

۱) اگر دامنه‌ی f ،بازه‌ی $[a,b]$ باشد، برای یافتن دامنه‌ی $A.f(Bx+c)+D$ کافی است نامعادله‌ی $a\le Bx+c\le b$ را حل کنید.

تمرین: اگر دامنه‌ی تابع f بازه‌ی $[-2,3)$ باشد، دامنه‌ی $y=5f(3x)-3$ را بیابید.



۲) اگر دامنه‌ی $A.f(Bx+c)+D$ بازه‌ی $[a,b]$ باشد، برای یافتن دامنه‌ی $f(x)$ با قرار دادن $a \le x \le b$ ، عبارت $Bx+c$ را بسازیم و محدوده‌اش را بیابیم.

تمرین: اگر دامنه‌ی $y=-2f(4x-1)$ بازه‌ی $(-3,3]$ باشد، دامنه‌ی f را بیابید.

$-3 < x \le 3$ ×۴
$-12 < 4x \le 12$ −۱
$-13 < 4x-1 \le 11$

جواب: $D_{f(x)} = (-13,11]$

۳) اگر برد f، بازه‌ی $[a,b]$ باشد، برای یافتن برد $A.f(Bx+c)+D$ کافی است برد f را در A ضرب کنیم و سپس با D جمع می‌کنیم.

تمرین: اگر برد تابع f برابر $R_f=[-\sqrt{3},2]$ باشد، برد تابع $y=\sqrt{2}f(x-1)+1$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۵ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) ۲

تابع $f(x)$ را یک واحد به راست برده و برد عوض نمی‌شه
بی تأثیر در برد

$-\sqrt{3} \le f(x) \le 2$
$-\sqrt{3} \le f(x-1) \le 2$ ×$\sqrt{2}$
$-\sqrt{6} \le \sqrt{2}f(x-1) \le 2\sqrt{2}$ +۱
$-\sqrt{6}+1 \le \sqrt{2}f(x-1)+1 \le 2\sqrt{2}+1 = 3,8$
$-1,... =$

۵ تا عدد صحیح: ۳ و ۲ و ۱ و ۰ و ۱- در برد هست

تمرین: دامنهٔ تابع $y=\frac{-f(x)}{2}$ به صورت $[0,4)$ است. دامنهٔ تابع $y=-f(\frac{-x}{2})$ کدام است؟

۱) $[-8,0]$ ۲) $(-8,0]$ ۳) $[0,8]$ ۴) $[0,8)$

$D_{-\frac{1}{2}f(x)} = D_{f(x)}$
$D_f : [0,4)$ $y=-\frac{1}{2}f(x)$
$0 \le -\frac{x}{2} < 4$

پاسخ: گزینهٔ «۲» ـ می‌دانیم دامنهٔ توابع $y=\frac{-f(x)}{2}$ و $y=f(x)$ برابر است. (قبوله؟) پس داریم: $D_{\frac{-f(x)}{2}} = D_{f(x)} = [0,4)$

از طرفی برای محاسبهٔ دامنهٔ تابع $y=-f(\frac{-x}{2})$ می‌توان نوشت: $0 \le -\frac{x}{2} < 4 \xrightarrow{\times(-2)} -8 < x \le 0$

$0 \le -x < 8$
$0 \ge x > -8$
$x \in (-8,0]$ گزینه ۲

پس دامنهٔ تابع $y=-f(-\frac{x}{2})$ برابر $(-8,0]$ است.

تمرین: اگر برد تابع $y=f(x-1)$ به صورت $[0,2)$ باشد، برد تابع $y=-3f(2-x)+1$ کدام است؟

۱) $(-1,5]$ ۲) $[-1,5)$ ۳) $(-5,1]$ ۴) $[-5,1)$

$0 \le f(x) < 2$ ×(−۳)
$0 \ge -3f(x) > -6$ +۱
$1 \ge -3f(x)+1 > -5$

بی تأثیر در برد — همون برد f

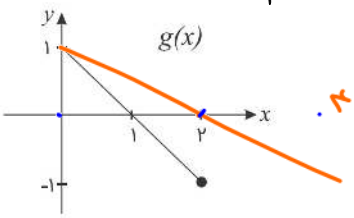
پاسخ: گزینهٔ «۳» ـ می‌دانیم انتقال افقی روی برد تابع اثر ندارد یعنی برد دو تابع $f(x-1)$ و $f(2-x)$ یکی است. حالا شروع می‌کنیم و محدودهٔ برد تابع خواسته‌شده را پیدا می‌کنیم، پس داریم:

$0 \le f(2-x) < 2 \xrightarrow{\times(-3)} -6 < -3f(2-x) \le 0 \xrightarrow{+1} -5 < -3f(2-x)+1 \le 1$

پس برد تابع $y=-3f(2-x)+1$ بازهٔ $(-5,1]$ است.

$1 \ge -3f(2-x)+1 > -5$
جواب $y \in (-5,1]$

تمرین: اگر نمودار توابع f و g به صورت زیر باشند، دامنهٔ تابع $\frac{f(2x)}{g(\frac{1}{2}x)}$ کدام است؟



۱) $[0,3)-\{2\}$

۲) $[0,3]-\{2\}$

۳) $[0,3)-\{1\}$

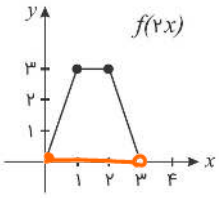
۴) $[0,3]-\{1\}$

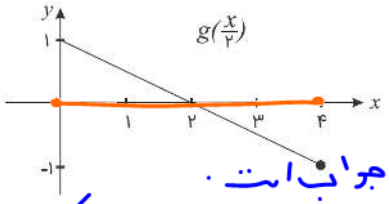
پاسخ: گزینهٔ «۱»

$$D_{f(2x)}=[0,3)\Rightarrow D_{g(\frac{x}{2})}=[0,4]$$

$$D_{\frac{f(2x)}{g(\frac{x}{2})}}=[0,3)\cap[0,4]-\{x\mid g(\frac{x}{2})=0\}=[0,3)-\{2\}$$

نکته: اگر دامنهٔ $f(x)$ تقسیم بر k شود، دامنهٔ $f(kx)$ به دست می‌آید و اگر $0<k<1$ باشد، این دامنه بزرگ‌تر و اگر $k>1$ باشد، این دامنه کوچک‌تر می‌شود.





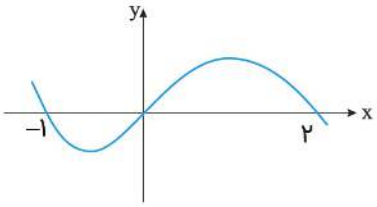
Homework (1)

۱ نمودار تابع $y = ۲^{|\sin x|}$ را ابتدا به اندازهٔ $\frac{\pi}{۲}$ در امتداد محور xها در جهت مثبت و سپس $\frac{۳}{۲}$ در امتداد محور yها در جهت منفی انتقال می‌دهیم، تعداد محل تقاطع نمودار حاصل با محور xها در فاصلهٔ $[۰, \pi]$ کدام است؟

۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

۲ شکل زیر، نمودار $f(x-۲)$ را نشان می‌دهد. دامنهٔ تابع $g(x) = \sqrt{\frac{f(۱-x)}{f(x+۱)}}$، شامل چند عدد صحیح است؟



۱) ۴
۲) ۲
۳) صفر
۴) بیش از ۴

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

۳ نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x) = ۴x - x^۲$ را در امتداد محور xها، ۲ واحد در جهت منفی انتقال می‌دهیم. فاصلهٔ نقطهٔ برخورد منحنی حاصل با نمودار تابع f، از مبدأ مختصات کدام است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) $۲\sqrt{۵}$
۴) $\sqrt{۱۰}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

۴ نمودار منحنی $y = \sqrt{\sqrt{x} + ۳}$ را k واحد در راستای قائم چنان انتقال می‌دهیم، که منحنی جدید وارون تابع خود را در نقطه‌ای با عرض ۱ قطع کند. سپس منحنی حاصل را نسبت به محور xها قرینه کرده و ۴ واحد در جهت افقی به سمت چپ انتقال می‌دهیم. کدام‌یک از نقاط زیر، روی نمودار منحنی به دست آمده قرار دارد؟

۱) $۱-\sqrt{۵}, ۰$
۲) $-\sqrt{۵}, ۰$
۳) $۰, ۱-\sqrt{۵}$
۴) $۰, -\sqrt{۵}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۰

۵ نمودار تابع $y = x^۲ - x - ۳$ را ۲ واحد به طرف xهای منفی، سپس ۹ واحد به طرف yهای منفی انتقال می‌دهیم. نمودار جدید، در کدام بازه، زیر محور xها است؟

۱) $(-۵, ۲)$
۲) $(-۵, ۳)$
۳) $(-۲, ۳)$
۴) $(-۲, ۵)$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۸

۶ نمودار تابع $y = -x^۲ + ۲x + ۵$ را ۳ واحد به طرف xهای مثبت، سپس ۲ واحد به طرف yهای منفی انتقال می‌دهیم. نمودار جدید در کدام بازه، بالای نیمساز ربع اول است؟

۱) $(۳, ۴)$
۲) $(۲, ۵)$
۳) $(۳, ۵)$
۴) $(۲, ۶)$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۸

۷ نمودار منحنی $y = \sqrt{۴ - x}$ را k واحد در راستای قائم و $k - ۲$ واحد در جهت افقی چنان انتقال می‌دهیم که منحنی جدید وارون تابع خود را در نقطه‌ای با عرض ۱ قطع کند. سپس منحنی حاصل را یک واحد در راستای قائم به سمت پایین انتقال می‌دهیم. طول نقطهٔ برخورد منحنی به‌دست‌آمده با محور xها، کدام است؟

۱) -۴
۲) -۳
۳) ۱
۴) ۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۰

۸ نمودار تابع $f(x) = \frac{۱}{x}$ را در امتداد محور xها، ۱ واحد در جهت مثبت و سپس قرینه آن نسبت به محور xها را در امتداد محور yها، ۲ واحد در جهت منفی انتقال می‌دهیم. فاصله نقطه‌های برخورد منحنی حاصل با نمودار تابع f، از مبدأ مختصات کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$
۲) $\frac{\sqrt{۵}}{۲}$
۳) $\frac{۳\sqrt{۲}}{۲}$
۴) $\frac{\sqrt{۱۰}}{۲}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

۹ تابع $y = ۲^{x+|x|}$ را ۳ واحد در امتداد محور xها در جهت منفی و سپس در امتداد محور yها ۲ واحد در جهت منفی انتقال می‌دهیم. منحنی حاصل، محور xها را با کدام طول، قطع می‌کند؟

۱) $-\frac{۵}{۲}$
۲) $-\frac{۳}{۲}$
۳) $\frac{۵}{۲}$
۴) $\frac{۷}{۲}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

۱۰ نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x) = x^۲ - ۲x \; ; (x > ۱)$، مفروض است. قرینهٔ نمودار آن نسبت به محور xها را ۱۶ واحد در امتداد محور yها در جهت مثبت انتقال می‌دهیم. فاصلهٔ نقطه برخورد منحنی حاصل با نمودار تابع f، از مبدأ مختصات، کدام است؟

۱) $۴\sqrt{۵}$ ۲) $۶\sqrt{۲}$

۳) $۵\sqrt{۲}$ ۴) $۲\sqrt{۵}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۱۱ نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x) = \sqrt{x}$ را در امتداد محور xها، ۱۲ واحد در جهت مثبت و سپس در امتداد محور yها، ۲ واحد در جهت مثبت، انتقال می‌دهیم. فاصلهٔ نقطهٔ برخورد منحنی حاصل با نمودار تابع f، از مبدأ مختصات، کدام است؟

۱) $۴\sqrt{۱۵}$ ۲) $۶\sqrt{۷}$

۳) $۴\sqrt{۱۷}$ ۴) $۶\sqrt{۱۰}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

۱۲ قرینهٔ نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x}$ را نسبت به محور yها تعیین کرده، سپس ۲ واحد به‌طرف xهای مثبت انتقال می‌دهیم. نمودار حاصل، نیمساز ناحیهٔ اول و سوم را با کدام طول قطع می‌کند؟

۱) -۲ ۲) $۰/۵$

۳) ۱ ۴) $۱/۵$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۷

۱۳ ابتدا قرینهٔ نمودار تابع $f(x) = (x-۱)^۲$ را نسبت به مبدأ مختصات رسم کرده، سپس منحنی حاصل را ۴ واحد به‌سمت بالا انتقال می‌دهیم. طول نقاط تلاقی منحنی اخیر با منحنی اصلی، کدام است؟

۱) $۰, ۲$ ۲) $-۱, ۱$

۳) $-۱, ۲$ ۴) $-۲, ۱$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

۱۴ قرینهٔ نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x}$ را نسبت به محور yها تعیین کرده، سپس منحنی حاصل را ۴ واحد به‌سمت راست، انتقال می‌دهیم. منحنی اخیر و منحنی اصلی نسبت به کدام خط، متقارن هستند؟

۱) $x = ۱$ ۲) $x = ۱/۵$

۳) $x = ۲$ ۴) $x = ۲/۵$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۹

۱۵ نمودار $y = x^۲ + ۶x + ۵$ را حداقل چند واحد به‌سمت راست حرکت دهیم تا طول دو نقطهٔ مشترک آن با نمودار $y = |x|$، نامنفی باشد؟

۱) ۲ ۲) ۳

۳) ۴ ۴) ۵

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۴۰۱

۱۶ نمودار $\frac{۱}{f}$ را در امتداد محور xها، a واحد در جهت مثبت انتقال داده و آن را g می‌نامیم. سپس تابع $|g|$ را در امتداد محور yها، ۲ واحد در جهت منفی انتقال می‌دهیم. طول نقطهٔ برخورد منحنی حاصل با نمودار تابع $\frac{۱}{|f|}$ برابر $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ است. اگر f تابع همانی باشد، اختلاف مقادیر در تساوی $f(x+a)=۳$ کدام است؟

۱) $۲+\sqrt{۲}$ ۲) ۲

۳) $۲-\sqrt{۲}$ ۴) $\sqrt{۲}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۱۷ برای رسم نمودار تابع $y=-\frac{۱}{۲}|۲x+۱|$ به کمک نمودار $y=|x|$، کدام مورد برای کامل کردن جمله زیر، مناسب است؟

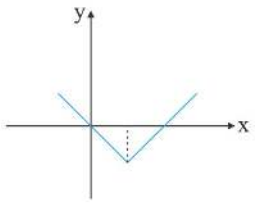
ابتدا نمودار تابع قدرمطلق را $\frac{۱}{۲}$ واحد به سمت ..... جابه‌جا کرده و سپس قرینه آن را نسبت به محور ..... رسم می‌کنیم.

۱) چپ- xها ۲) راست- xها

۳) بالا- yها ۴) پایین- yها

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۴۰۲

۱۸ شکل زیر، نمودار کدام تابع است؟



۱) $y=-|x-۲|+۲$

۲) $y=x+۲|x|$

۳) $y=۲x-|x|$

۴) $y=|x-۲|-۲$

کنکور سراسری علوم انسانی خارج از کشور ۱۳۹۸

پاسخ Homework (1)

۱ گزینه ۳

$$y = ۲^{|\sin x|} \xrightarrow{\text{سمت راست } \frac{\pi}{۲}} y = ۲^{|\sin(x-\frac{\pi}{۲})|} = ۲^{|\cos x|} \xrightarrow{\text{به پایین } \frac{۳}{۲}} y = ۲^{|\cos x|} - \frac{۳}{۲}$$

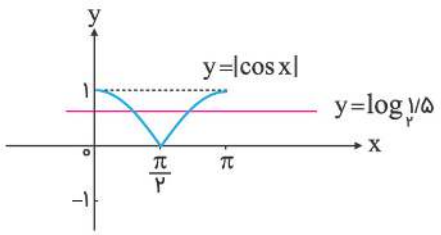
تعداد محل تقاطع نمودار با محور xها را می‌خواهیم، بنابراین تابع حاصل را برابر با صفر قرار می‌دهیم:

$$y = ۲^{|\cos x|} - \frac{۳}{۲} = ۰ \Rightarrow ۲^{|\cos x|} = \frac{۳}{۲}$$

حال از دو طرف $\log_۲$ می‌گیریم، درنتیجه:

$$|\cos x| = \log_۲ \frac{۳}{۲}$$

تابع $\log_۲ x$ صعودی است و $\log_۲ ۲ = ۱$ می‌باشد، بنابراین $۰ < \log_۲(۱/۵) < ۱$ است. حال نمودار $|\cos x|$ و $\log_۲(۱/۵)$ را رسم می‌کنیم:



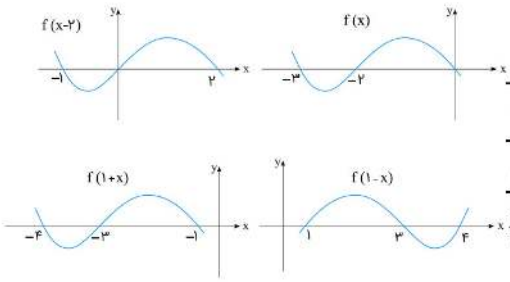
پس معادلهٔ $|\cos x| = \log_۲ \frac{۳}{۲}$ در فاصلهٔ $[۰, \pi]$ دو جواب دارد.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

۲ گزینه ۱

$$g(x)=\sqrt{\frac{f(1-x)}{f(x+1)}} \Rightarrow \frac{f(1-x)}{f(x+1)} \geq 0$$

باتوجه‌به نمودار $f(x-2)$، توابع $f(1-x)$ و $f(x+1)$ را رسم می‌کنیم:



x	$-\infty$	-4	-3	-1	1	3	4	$+\infty$
$f(1-x)$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x+1)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$
$\frac{f(1-x)}{f(x+1)}$	$-$	ت	$+$	ت	$-$	ت	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

حال داریم:

بنابراین دامنهٔ تابع $g(x)$ به‌صورت زیر است:

$$(-4,-3) \cup (-1,1] \cup [3,4)$$

اعداد صحیح قابل‌قبول عبارتند از:

$$x=0,\ x=1,\ x=3,\ x=4$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

۳ گزینه ۴

$$f(x)=4x-x^2$$

$$\xrightarrow[\text{منفی انتقال می‌دهیم}]{\text{۲ واحد در جهت}} f(x+2)=4(x+2)-(x+2)^2=-x^2+4$$

$$f(x)=f(x+2) \Rightarrow 4x-x^2=-x^2+4 \Rightarrow x=1$$

$$f(x)=4x-x^2 \xrightarrow{x=1} f(1)=3 \Rightarrow A(1,3)$$ نقطهٔ برخورد

$$OA=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

۴ گزینه ۳

$$g(x)=\sqrt{\sqrt{x}+3}+k \xrightarrow{g(1)=1} \sqrt{1+3}+k=1 \Rightarrow k=-1$$

$$g(x)=\sqrt{\sqrt{x}+3}-1 \Rightarrow -g(x)=1-\sqrt{\sqrt{x}+3} \Rightarrow -g(x+4)=1-\sqrt{\sqrt{x+4}+3}$$

$$\xrightarrow{x=0} y=1-\sqrt{2+3}=1-\sqrt{5}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۰

۵ گزینه ۱

اگر نمودار $y = x^۲ - x - ۳$ را ۲ واحد به‌طرف xهای منفی انتقال دهیم، $f(x) = (x+۲)^۲ - (x+۲) - ۳$ به دست می‌آید. حال $f(x)$ را ۹ واحد به‌طرف yهای منفی منتقل می‌کنیم، $g(x) = f(x) - ۹$ به دست می‌آید.

$$g(x) = x^۲ + ۴x + ۴ - x - ۲ - ۳ - ۹ = x^۲ + ۳x - ۱۰$$

حال $g(x)$ را کوچک‌تر از صفر قرار می‌دهیم.

$$x^۲ + ۳x - ۱۰ < ۰ \Rightarrow (x-۲)(x+۵) < ۰ \Rightarrow -۵ < x < ۲$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۸

۶ گزینه ۱

راه‌حل اول:

اگر تابع $y = -x^۲ + ۲x + ۵$ را ۳ واحد به طرف xهای مثبت انتقال دهیم، تابع به فرم $f(x) = -(x-۳)^۲ + ۲(x-۳) + ۵$ تبدیل می‌شود و اگر تابع $f(x)$ را دو واحد به سمت yهای منفی انتقال دهیم، نمودار جدید با ضابطهٔ $g(x) = f(x) - ۲$ خواهد بود.

$$g(x) = f(x) - ۲ = -(x-۳)^۲ + ۲(x-۳) + ۵ - ۲ = -\left(x^۲ - ۶x + ۹\right) + ۲x - ۶ + ۵ - ۲$$
$$\Rightarrow g(x) = -x^۲ + ۶x - ۹ + ۲x - ۳ = -x^۲ + ۸x - ۱۲$$

حال باید $g(x)$ بالای نیمساز ربع اول و سوم، یعنی $y = x$ قرار گیرد.

$$g(x) > x \Rightarrow -x^۲ + ۸x - ۱۲ > x$$
$$\Rightarrow x^۲ - ۷x + ۱۲ < ۰ \Rightarrow \underbrace{(x-۳)(x-۴)}_{h(x)} < ۰ \quad (*)$$

x	$-\infty$		۳		۴		$+\infty$
$h(x)$		$+$	۰	$-$	۰	$+$	

$$h(x) < ۰ \Rightarrow x \in (۳, ۴)$$

راه‌حل دوم: (عدد گذاری)

در صورتی که در (*) قرار دهیم $x = ۴$ ، داریم: $۰ < ۰$ که غیرقابل‌قبول است، بنابراین گزینه‌های ۲، ۳ و ۴ نادرست است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۸

۷ گزینه ۳

$$g(x)=\sqrt{۴-(x-k+۲)}+k=\sqrt{-x+k+۲}+k$$

تابع $g(x)$ وارون خود را در نقطه‌ای با عرض ۱ قطع کند و همچنین با فرض اینکه نقطهٔ برخورد تابع و وارونش بر روی خط $y=x$ قرار دارد، بنابراین $g(۱)=۱$. حال داریم:

$$A(۱,۱)\in g(x)\Rightarrow\sqrt{۱+k}+k=۱\Rightarrow k=۰$$

$$h(x)=y-۱\Rightarrow\sqrt{-x+۲}-۱=۰\Rightarrow x=۱$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۰

۸ گزینه ۴

$$\frac{۱}{x}\xrightarrow[\text{راست}]{\text{۱ واحد به سمت}}\frac{۱}{x-۱}\xrightarrow[\text{محور x ها}]{\text{قرینه نسبت به}}\frac{-۱}{x-۱}\xrightarrow[\text{پایین}]{\text{۲ واحد رو به}}\frac{-۱}{x-۱}-۲$$

$$\text{حالا : }\frac{۱}{x}=\frac{-۱}{x-۱}-۲\Rightarrow\frac{۱}{x}+\frac{۱}{x-۱}=-۲\Rightarrow\frac{x-۱+x}{x^۲-x}=-۲$$

$$-۲x^۲+۲x=۲x-۱\Rightarrow ۲x^۲=۱\Rightarrow x^۲=\frac{۱}{۲}\Rightarrow x=\pm\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\xrightarrow{\text{نقطه برخورد}}\begin{cases}(\frac{\sqrt{۲}}{۲},\sqrt{۲})\\(-\frac{\sqrt{۲}}{۲},-\sqrt{۲})\end{cases}\xrightarrow{\text{فاصله تا مبدأ}}\sqrt{(\frac{\sqrt{۲}}{۲}-۰)^۲+(\sqrt{۲}-۰)^۲}$$

$$=\sqrt{\frac{۱}{۲}+۲}=\sqrt{\frac{۵}{۲}}=\frac{\sqrt{۵}}{\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۱۰}}{۲}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

۹ گزینه ۱

$$۲^{x+۳+|x+۳|}-۲=۰\Rightarrow ۲^{x+۳+|x+۳|}=۲$$

$$\Rightarrow x+۳+|x+۳|=۱\Rightarrow|x+۳|=-x-۲$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x+۳=-x-۲\Rightarrow x=\frac{-۵}{۲}\\x+۳=x+۲\Rightarrow\text{فاقد جواب}\end{cases}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

۱۰ گزینه ۱

$$y = x^۲ - ۲x \xrightarrow[\text{محور } x \text{ها}]{\text{قرینه نسبت به}} y = -\left(x^۲ - ۲x\right) = -x^۲ + ۲x$$

$$\xrightarrow[\text{مثبت محور } y \text{ها}]{۱۶ \text{ واحد انتقال در جهت}} y_۱ = -x^۲ + ۲x + ۱۶$$

حال معادلهٔ جدید را با معادلهٔ قبلی مساوی قرار می‌دهیم تا نقطهٔ برخورد را به دست آوریم:

$$y = y_۱ \Rightarrow x^۲ - ۲x = -x^۲ + ۲x + ۱۶ \Rightarrow ۲x^۲ - ۴x - ۱۶ = ۰$$

$$\Rightarrow x^۲ - ۲x - ۸ = ۰ \Rightarrow (x-۴)(x+۲) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۴ & \text{ق.ق} \\ x = -۲ & (x > ۱ \text{ زیرا غ.ق.ق}) \end{cases}$$

$$x = ۴ \Rightarrow y = ۸ \Rightarrow A(۴, ۸)$$

فاصلهٔ نقطهٔ A از مبدأ مختصات را به دست می‌آوریم:

$$OA = \sqrt{۱۶ + ۶۴} = \sqrt{۱۶(۱+۴)} = ۴\sqrt{۵}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۱۱ گزینه ۳

$$y = \sqrt{x} \xrightarrow[\text{مثبت محور } x \text{ها}]{۱۲ \text{ واحد در جهت}} y = \sqrt{x-۱۲} \xrightarrow[\text{مثبت محور } y \text{ها}]{۲ \text{ واحد در جهت}} y = \sqrt{x-۱۲} + ۲$$

حال منحنی حاصل را با $f(x) = \sqrt{x}$ برابر قرار می‌دهیم تا محل برخورد به دست آید.

$$\sqrt{x-۱۲} + ۲ = \sqrt{x} \Rightarrow \sqrt{x-۱۲} = \sqrt{x} - ۲$$

$$\xrightarrow{\text{توان}۲} \cancel{x} - ۱۲ = \cancel{x} + ۴ - ۴\sqrt{x} \Rightarrow ۴\sqrt{x} = ۱۶ \Rightarrow x = ۱۶$$

$x = ۱۶$ را در $f(x) = \sqrt{x}$ جایگذاری می‌کنیم تا عرض محل برخورد نیز به دست آید:

$$f(۱۶) = \sqrt{۱۶} = ۴ \Rightarrow A(۱۶, ۴)$$

فاصلهٔ نقطهٔ A از مبدأ مختصات برابر است با:

$$OA = \sqrt{۱۶^۲ + ۴^۲} = \sqrt{۱۶(۱۶+۱)} = ۴\sqrt{۱۷}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

۱۲ گزینه ۳

$$f(x)=\sqrt{x} \xrightarrow[\text{محور } y\text{ها}]{\text{قرینه نسبت به}} y=\sqrt{-x}$$

$$\xrightarrow{\text{۲ واحد به راست}} y=\sqrt{-(x-۲)}=\sqrt{-x+۲}$$

برای یافتن نقاط تلاقی نمودار توابع $y=\sqrt{-x+۲}$ و $y=x$ (نیمساز ناحیهٔ اول و سوم)، آن‌ها را مساوی هم قرار می‌دهیم:

$$\sqrt{-x+۲}=x \quad (*) \xrightarrow{\text{به توان ۲}} -x+۲=x^۲ \Rightarrow x^۲+x-۲=۰$$

$$\Rightarrow (x+۲)(x-۱)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۱ \\ x=-۲ \quad \text{غ.ق.ق} \end{cases}$$

$x=-۲$ غیرقابل‌قبول است، زیرا در معادلهٔ $(*)$ صدق نمی‌کند.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۷

۱۳ گزینه ۲

$$f(x)=(x-۱)^۲ \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به مبدأ}} -(-x-۱)^۲=-(x+۱)^۲$$

$$\xrightarrow{\text{۴ واحد به بالا}} -(x+۱)^۲+۴$$

حال باید طول نقطهٔ تلاقی این دو منحنی را به دست آوریم؛ پس داریم:

$$(x-۱)^۲=-(x+۱)^۲+۴ \Rightarrow x^۲-۲x+۱=-(x^۲+۲x+۱)+۴$$

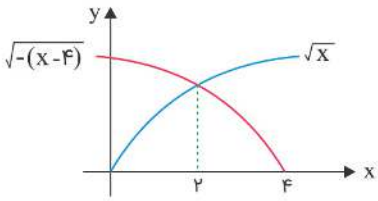
$$\Rightarrow ۲x^۲=۲ \Rightarrow x=\pm ۱$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

۱۴ گزینه ۳

$$f(x)=\sqrt{x} \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور y‌ها}} \sqrt{-x} \xrightarrow{\text{۴ واحد به راست}} \sqrt{-(x-۴)}$$

حال دو نمودار را رسم می‌کنیم:



$$\sqrt{x}=\sqrt{-(x-۴)} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} |x|=|-(x-۴)|=|x-۴|$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x=x-۴ \Rightarrow ۰=-۴ & \times \\ x=-x+۴ \Rightarrow ۲x=۴ \Rightarrow x=۲ & \text{ق.ق} \end{cases}$$

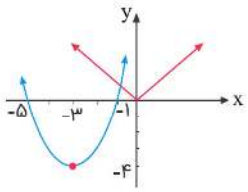
بنابراین $x=۲$ محور تقارن دو نمودار است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۹

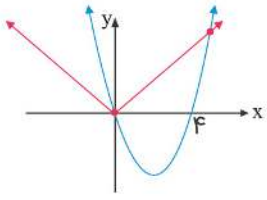
۱۵ گزینه ۴

$$y=x^۲+۶x+۵ \Rightarrow y=(x+۳)^۲-۴$$

هر دو نمودار را در یک دستگاه رسم می‌کنیم:



اگر ۵ واحد نمودار را به راست منتقل کنیم، دو تابع در $x=۰$ برخورد می‌کنند و به مطلوب سؤال می‌رسیم.



کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۴۰۱

۱۶ گزینه ۳

چون f تابع همانی است، پس $f(x)=x$ می‌باشد. اکنون تغییرات داده‌شده را اعمال می‌کنیم:

$$|\frac{۱}{f(x-a)}|-۲=\frac{۱}{|f(x)|}\Rightarrow|\frac{۱}{x-a}|-۲=|\frac{۱}{x}|\xrightarrow{x=\frac{\sqrt{۲}}{۲}}\frac{۱}{|\frac{\sqrt{۲}}{۲}-a|}-۲=\sqrt{۲}$$

$$\Rightarrow\frac{۲}{|\sqrt{۲}-۲a|}=۲+\sqrt{۲}$$

$$\Rightarrow|\sqrt{۲}-۲a|=\frac{۲}{۲+\sqrt{۲}}\times\frac{۲-\sqrt{۲}}{۲-\sqrt{۲}}=۲-\sqrt{۲}\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{۲}-۲a=۲-\sqrt{۲}\\ \sqrt{۲}-۲a=\sqrt{۲}-۲\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\sqrt{۲}-۱\\ a=۱\end{cases}$$

$$f(x+a)=۳\xrightarrow{a=۱}x+۱=۳\Rightarrow x=۲$$

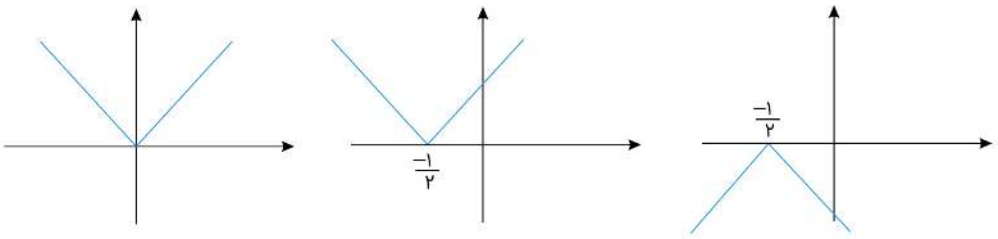
$$f(x+a)=۳\xrightarrow{a=\sqrt{۲}-۱}x-۱+\sqrt{۲}=۳\Rightarrow x=۴-\sqrt{۲}$$

$$\text{اختلاف مقادیر}=۴-\sqrt{۲}-۲=۲-\sqrt{۲}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۱۷ گزینه ۱

$$y=-\frac{۱}{۲}|۲(x+\frac{۱}{۲})|=-\frac{۱}{۲}\times۲|x+\frac{۱}{۲}|\Rightarrow y=-|x+\frac{۱}{۲}|$$



بنابراین گزینه ۱ صحیح است.

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۴۰۲

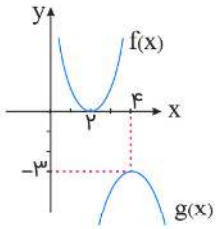
۱۸ گزینه ۴

اگر نمودار $y=|x|$ را دو واحد به سمت راست در راستای محور xها انتقال دهیم، نمودار $y_۱=|x-۲|$ به دست می‌آید و اگر نمودار $y_۱$ را دو واحد به سمت پایین در راستای محور yها انتقال دهیم، نمودار $y=|x-۲|-۲$ به دست می‌آید. پس ضابطهٔ نمودار رسم‌شده به‌صورت $y=|x-۲|-۲$ است.

کنکور سراسری علوم انسانی خارج از کشور ۱۳۹۸

Homework (2)

۱ نمودارهای توابع $f(x) = (x-۲)^۲$ و $g(x)$ به‌صورت زیر رسم شده است. ضابطهٔ $g(x)$ کدام است؟



۱) $x^۲ + ۸x - ۱۹$

۲) $x^۲ + ۴x + ۱$

۳) $-x^۲ + ۸x - ۱۹$

۴) $-x^۲ + ۴x + ۱$

۲ اگر نمودار سهمی $y = x^۲$ را ۲ واحد به چپ و ۳ واحد به پایین انتقال دهیم، سهمی حاصل محور yها را در نقطه‌ای با کدام عرض قطع می‌کند؟

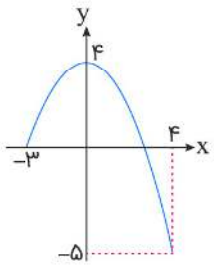
۱) ۷

۲) -۱

۳) ۱

۴) -۷

۳ هرگاه نمودار تابع $f(x)$ روی بازهٔ $[-۳\ ,\ ۴]$ مانند شکل زیر باشد، آنگاه برد تابع $g(x) = ۸f(x) - ۵$ در این بازه کدام است؟



۱) $[-۴۰\ ,\ ۱۶]$

۲) $[-۴۵\ ,\ ۲۷]$

۳) $[-۳۵\ ,\ ۹]$

۴) $[-۴۲\ ,\ ۱۸]$

۴ اگر تابع $f(x) = ۳x^۲ - ۶x + ۱$ را یک واحد به چپ در راستای محور xها و k واحد به سمت بالا در راستای محور yها انتقال بدهیم، ضابطه آن $g(x) = ۳x^۲$ خواهد شد. مقدار k چقدر است؟

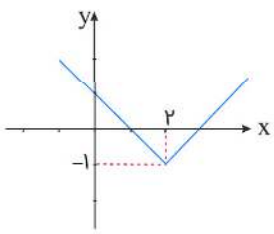
۱) ۳

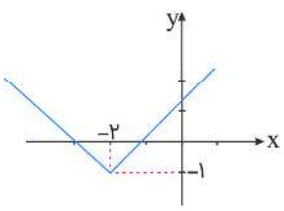
۲) ۴

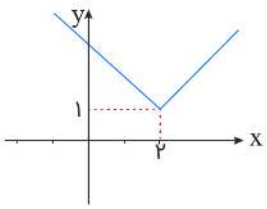
۳) ۱

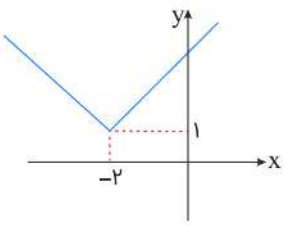
۴) ۲

۵ نمودار تابع $y = |x + ۲| - ۱$ کدام است؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۶ نمودار تابع $y = -(x - ۴)^۲ + ۲$ از کدام ناحیه نمی‌گذرد؟

۱) اول ۲) دوم

۳) سوم ۴) چهارم

۷ مساحت محدود به نمودار تابع $f(x) = ۳ - |x + ۴|$ و محور طول‌ها کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۹

۳) ۶ ۴) ۳

۸ نمودار توابع $f(x) = |x - ۱| + ۲$ و $g(x) = -(x - ۲)^۲ + ۴$، در چند نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند؟

۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۳ ۴) صفر

۹ کدام‌یک از عبارت‌های زیر نادرست است؟

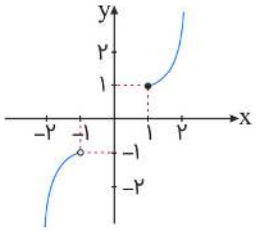
۱) به ازای هر x، $|-x| = |x|$

۲) اگر $f(x) = |x + ۴|$، آنگاه: $f(x) = \begin{cases} x + ۴ & ; x \geq -۴ \\ -x - ۴ & ; x < -۴ \end{cases}$

۳) دامنه و برد تابع قدر مطلق، مجموعهٔ اعداد حقیقی است.

۴) نمودار $f(x) = |x - a| - b$ از انتقال $f(x) = |x|$ به‌اندازهٔ a واحد به راست و b واحد به پایین به دست می‌آید. ($a, b > ۰$)

۱۰ کدام گزینه ضابطهٔ تابع رسم‌شده را نشان می‌دهد؟



۱) $f(x)=\begin{cases}(x-1)^2 & ;x\geq 1\\ -(x+1)^2 & ;x<-1\end{cases}$

۲) $f(x)=\begin{cases}x^2-1 & ;x\leq 1\\ -x^2+1 & ;x>-1\end{cases}$

۳) $f(x)=\begin{cases}(x-1)^2+1 & ;x\geq 1\\ -(x+1)^2-1 & ;x<-1\end{cases}$

۴) $f(x)=\begin{cases}-(x-1)^2-1 & ;x>1\\ (x+1)^2+1 & ;x\leq -1\end{cases}$

۱۱ نمودار تابع $y=|\frac{1}{2}x|-2$ را ۴ واحد به‌طرف xهای منفی و یک واحد به‌طرف yهای مثبت انتقال می‌دهیم. نمودار اولیه و نمودار جدید با کدام طول متقاطع‌اند؟

۱) $-3/5$ ۲) -۳

۳) $-2/5$ ۴) -۲

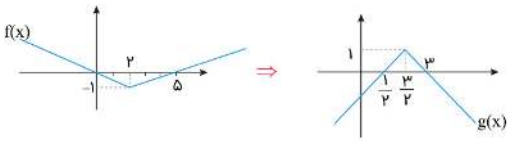
۱۲ هرگاه نمودار تابع $f(x)$ روی بازهٔ $[-2\ ,\ 3]$ باشد، برد تابع $g(x)=3f(x-1)-1$ کدام است؟

۱) $[-6\ ,\ 9]$ ۲) $[-7\ ,\ 8]$

۳) $[-5\ ,\ 10]$ ۴) $[-2\ ,\ 3]$

حسابان

۱۳ باتوجه‌به نمودارهای زیر، کدام‌یک از گزینه‌های زیر ضابطهٔ تابع g را نشان می‌دهد؟



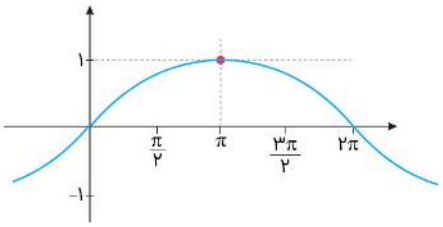
۱) $-f(2x-1)$

۲) $-f(\frac{1}{2}x-1)$

۳) $-f(2x-\frac{1}{2})$

۴) $f(2x-1)$

۱۴ نمودار تابع $f(x)$ به‌صورت زیر است. ضابطهٔ $f(x)$ کدام می‌تواند باشد؟



۱) $f(x) = \cos(۲x)$

۲) $f(x) = \sin(۲x)$

۳) $f(x) = \sin(\frac{x}{۲})$

۴) $f(x) = \cos(\frac{x}{۲})$

۱۵ اگر نقطه $A(-۱, ۲)$ روی تابع $y = f(\frac{۱-x}{۲})$ باشد، کدام نقطه روی تابع $g(x) = f(x) + f(۲x-۱)$ قرار دارد؟

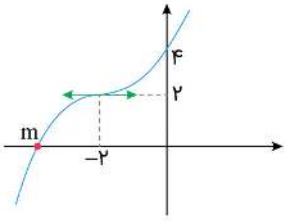
۱) $(۱, ۲)$

۲) $(۱, ۴)$

۳) $(۱, ۳)$

۴) $(۱, ۶)$

۱۶ نمودار زیر مربوط به تابع $f(x) = ax(x^۲ + ۶x + ۱۲) + ۸a + b$ است، مقدار m کدام است؟



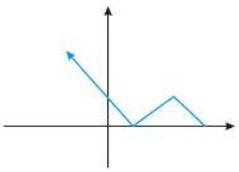
۱) -۳

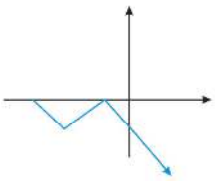
۲) -۴

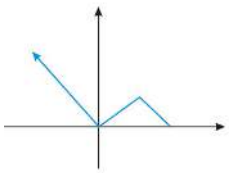
۳) -۵

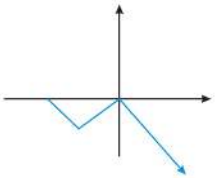
۴) -۶

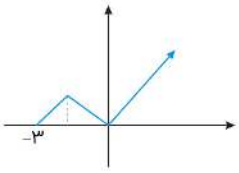
۱۷ اگر نمودار تابع $y = f(x-۲)$ به‌صورت زیر باشد، نمودار تابع $f(۱-x)$ کدام است؟

۱)


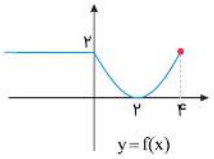
۲)


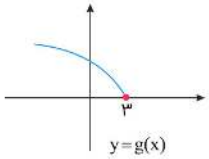
۳)


۴)




۱۸ نمودار دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ داده شده است. دامنهٔ تابع $y = \frac{f(x+۱)}{۲g(x)}$ کدام می‌باشد؟





۱) $(-\infty, ۳]$

۲) $(-\infty, ۳)$

۳) $[۳, +\infty)$

۴) $(-\infty, ۵] - \{۳\}$

۱۹ اگر برد تابع $y = f(\frac{x}{۲})$ در بازهٔ $[-۱ , ۲)$ باشد، برد تابع $y = ۲f(۱-x)+۱$ کدام است؟

۱) $[-۱ , ۳)$
۲) $[-۱ , ۲)$
۳) $[-۱ , ۵)$
۴) $[۱ , ۵)$

۲۰ اگر برد تابع $y = ۲f(x)-۱$ برابر با $(-۱ , ۴]$ باشد، برد تابع $y = \frac{۱}{۲}f(x+۱)-۱$ کدام است؟

۱) $(-\frac{۳}{۲} , ۱]$
۲) $(-۱ , \frac{۱}{۴}]$
۳) $(۰ , \frac{۱}{۴}]$
۴) $(-\frac{۳}{۲} , ۱)$

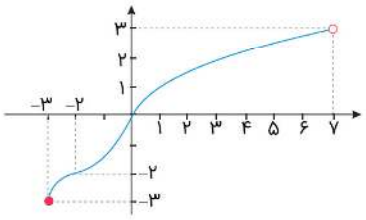
۲۱ اگر رأس سهمی $y = f(-\frac{x}{۲}+۱)$، نقطهٔ $(-۱ , ۲)$ باشد، رأس سهمی $y = f(x)$ کدام است؟

۱) $(\frac{۳}{۲} , ۲)$
۲) $(۳ , ۲)$
۳) $(-\frac{۱}{۲} , ۳)$
۴) $(\frac{-۱}{۲} , ۲)$

۲۲ چنانچه دامنهٔ $y = f(-۲x+۱)$ برابر با $[-۳ , ۶)$ باشد، دامنهٔ $y = f(-x+۲)$ کدام است؟

۱) $(۰ , ۴/۵]$
۲) $(-۵ , ۱۳]$
۳) $[۰ , ۴/۵]$
۴) $[-۵ , ۱۳)$

۲۳ اگر نمودار تابع $y = f(\frac{x}{۲}+۱)$ به شکل زیر باشد، دامنهٔ تابع $y = ۱-f(x)$ کدام است؟



۱) $[۱ , ۳]$
۲) $[-۸ , ۱۲)$
۳) $[-۳ , ۷)$
۴) $[-\frac{۱}{۲} , \frac{۹}{۲})$

۲۴ اگر نقطهٔ $A(۳ , m)$ روی تابع $y = ۱-۲f(۱-x)$ باشد، کدام نقطهٔ زیر الزاماً روی تابع $y = f(x)$ قرار دارد؟

۱) $(۲ , ۱-m)$
۲) $(۲ , \frac{۱-m}{۲})$
۳) $(-۲ , \frac{۱-m}{۲})$
۴) $(-۲ , ۱-m)$

۲۵ اگر نقطه $A(۱-a , ۲a+۱)$ روی تابع $y = f(x-۱)-۱$ قرار گیرد، آنگاه کدام نقطه روی تابع $g(x) = ۱-f(\frac{x}{۲})$ قرار می‌گیرد؟

۱) $(a , ۲a)$
۲) $(-a , ۲a+۲)$
۳) $(-a , -۱-۲a)$
۴) $(-۲a , -۱-۲a)$

پاسخ Homework (2)

۱ گزینه ۳

اگر $f(x)$ بیانگر $(x-۲)^۲$ باشد، در نمودار $g(x)$، xها دوتا به سمت مثبت رفته‌اند و yها سه واحد به سمت منفی، همچنین ضریب $x^۲$ منفی برابر شده است، داریم:

$$g(x) = -(x-۲-۲)^۲ - ۳$$

$$g(x) = -(x^۲ - ۸x + ۱۶) - ۳ = -x^۲ + ۸x - ۱۹$$

۲ گزینه ۳

$$y = x^۲ \xrightarrow{\text{۲واحد به چپ}} y = (x+۲)^۲ \xrightarrow{\text{۳واحد به پایین}} y = (x+۲)^۲ - ۳$$

برای پیدا کردن محل تلاقی نمودار سهمی با محور yها باید x را برابر صفر قرار دهیم:

$$x = ۰ \Rightarrow y = (۰+۲)^۲ - ۳ = ۴ - ۳ = ۱$$

۳ گزینه ۲

باتوجه‌به شکل نمودار، برد تابع f روی بازهٔ $[-۳\ ,\ ۴]$ برابر است با $[-۵\ ,\ ۴]$.

$$-۵ \le f(x) \le ۴ \Rightarrow -۴۰ \le ۸f(x) \le ۳۲$$

$$\Rightarrow -۴۰ - ۵ \le ۸f(x) - ۵ \le ۳۲ - ۵ \Rightarrow -۴۵ \le g(x) \le ۲۷$$

۴ گزینه ۴

در واقع باید تابع $f(x)$ را به‌صورت $f(x+۱)+k$ تبدیل کنیم:

$$f(x+۱) = ۳(x+۱)^۲ - ۶(x+۱) + ۱ = ۳(x^۲ + ۲x + ۱) - ۶x - ۶ + ۱ = ۳x^۲ - ۲$$

$$f(x+۱) + k = ۳x^۲ - ۲ + k = ۳x^۲$$

پس $k = ۲$ است.

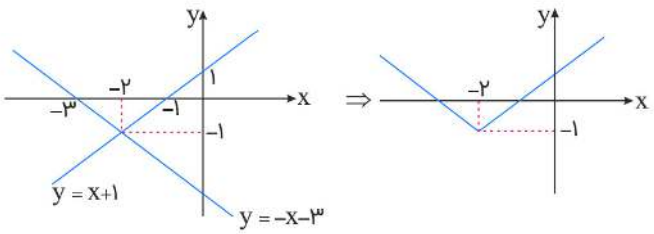
۵ گزینه ۲

باتوجه‌به تعریف قدر مطلق:

$$|u| = \begin{cases} u & ; u \geq ۰ \\ -u & ; u < ۰ \end{cases}$$

$$y = |x+۲| - ۱ \Rightarrow y = \begin{cases} (x+۲) - ۱ & ; x+۲ \geq ۰ \\ -(x+۲) - ۱ & ; x+۲ < ۰ \end{cases}$$

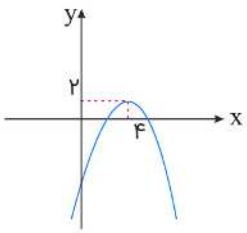
$$\Rightarrow y = \begin{cases} x+۱ & ; x \geq -۲ \\ -x-۳ & ; x < -۲ \end{cases}$$



بنابراین گزینهٔ "۳" صحیح است.

۶ گزینه ۲

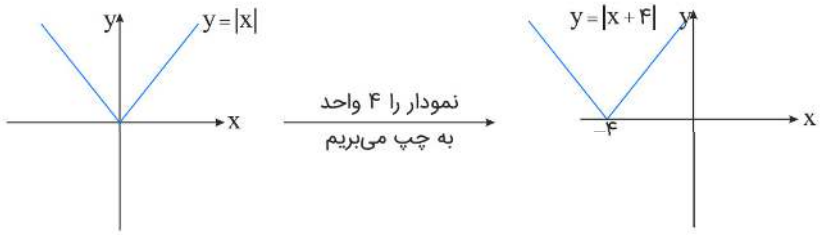
از نمودار $y = x^۲$ آغاز می‌کنیم پس نمودار را ۴ واحد به راست برده، نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم و در نهایت ۲ واحد به بالا می‌بریم:

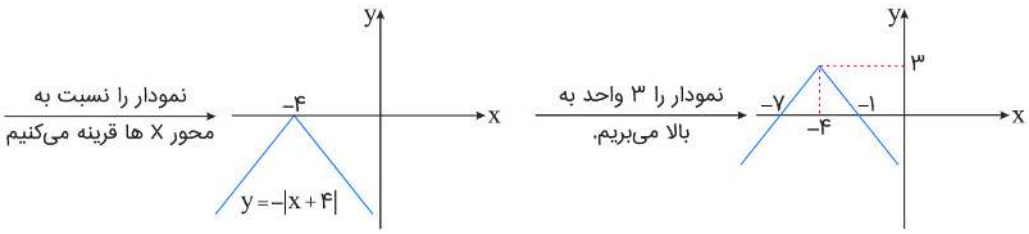


طبق شکل از ناحیه دوم عبور نمی‌کند.

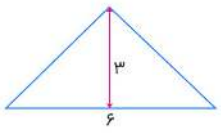
۷ گزینه ۲

با نمودار تابع $y = |x|$ شروع می‌کنیم و به کمک انتقال تابع را رسم می‌کنیم.





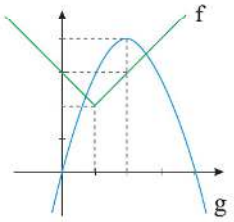
حال باید مساحت مثلثی را پیدا کنیم که قاعده آن ۶، $(۶ = (-۷) - -۱)$ و ارتفاع آن ۳ است.



$$s = \frac{۶ \times ۳}{۲} = ۹$$

۸ گزینه ۲

نمودار دو تابع را باهم رسم می‌کنیم:



همان‌طور که می‌بینیم، دو تابع در دو نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند.

۹ گزینه ۳

دامنهٔ تابع قدر مطلق، مجموعهٔ اعداد حقیقی است. اما برد آن فقط شامل اعداد حقیقی مثبت و صفر است.

۱۰ گزینه ۳

نمودار، شامل دو سهمی روبه‌بالا و روبه‌پایین در بازه‌های مختلف است. نمودار بالا در شکل یک سهمی را نشان می‌دهد که رأس آن در $x = ۱$ می‌باشد. درواقع $y = x^۲$ می‌باشد که یک واحد به سمت راست و یک واحد به بالا انتقال یافته است. بنابراین داریم $y = (x-۱)^۲ + ۱$ که برای $x \geq ۱$ تعریف شده است.

نمودار پایین در شکل یک سهمی روبه‌پایین را نشان می‌دهد که رأس آن در $x = -۱$ است و درواقع نمودار $y = -x^۲$ می‌باشد که یک واحد به‌سمت چپ و یک واحد به‌سمت پایین انتقال یافته است. بنابراین داریم: $y = -(x+۱)^۲ - ۱$ که برای $x < -۱$ تعریف شده است. چون نقطه توپر نیست، $x = -۱$ را شامل نمی‌شود. بنابراین گزینهٔ "۳" صحیح است.

۱۱ گزینه ۲

چون نمودار ۴ واحد به‌طرف xهای منفی یا چپ منتقل‌شده به‌جای xها، $x+۴$ قرار می‌دهیم و چون یک واحد به سمت بالا منتقل‌شده کل تابع را با یک جمع می‌کنیم:

$$f(x) = |\frac{۱}{۲}(x+۴)| - ۲ + ۱ = |\frac{۱}{۲}(x+۴)| - ۱$$

$$\text{تقاطع دو تابع} \Rightarrow |\frac{۱}{۲}(x+۴)| - ۱ = |\frac{۱}{۲}x| - ۲ \xrightarrow{\text{جایگذاری گزینه‌ها}} x = -۳$$

۱۲ گزینه ۲

نمودار تابع نشان‌دهندهٔ برد تابع خواهد بود.

$$-۲ \leq f(x) \leq ۳ \Rightarrow -۲ \leq f(x-۱) \leq ۳ \Rightarrow -۶ \leq ۳f(x-۱) \leq ۹$$

$$\Rightarrow -۷ \leq ۳f(x-۱) - ۱ \leq ۸$$

حسابان

۱۳ گزینه ۱

می‌دانیم در نمودار داده‌شده $f(۵)$ و $f(۰)$ صفر می‌باشد. حال با جایگذاری، گزینه‌های "۲" و "۳" حذف می‌شوند. همچنین $f(۲) = -۱$، پس گزینه "۴" هم حذف می‌شود.

۱۴ گزینه ۳

اولاً اینکه تابع به فرم سینوسی است چرا که در نقطهٔ صفر برابر با صفر شده است. پس گزینهٔ "۱" و "۴" حذف می‌شوند زیرا اگر $x = ۰$ در آن‌ها جایگذاری شود، مقدار $\cos(۰)$ به دست می‌آید که برابر با یک است. ازطرفی تابع در نقطهٔ π برابر با ۱ است که می‌توان به سادگی بررسی کرد که گزینهٔ "۳" صحیح است.

۱۵ گزینه ۲

$$A \in (y = f(\frac{۱ - x}{۲})) \Rightarrow f(\frac{۱ + ۱}{۲}) \Rightarrow f(۱) = ۲ \Rightarrow (۱ , ۲) \in f(x)$$

در تابع $g(x) = f(x) + f(۲x - ۱)$ به جای x عدد ۱ قرار می‌دهیم:

$$g(۱) = f(۱) + f(۱) = ۲f(۱) = ۲ \times ۲ = ۴ \Rightarrow (۱ , ۴) \in g$$

۱۶ گزینه ۲

چون نمودار از تبدیل تابع $x^۳$ ساخته شده است، پس ضابطهٔ آن به‌صورت $a(x + ۲)^۳ + ۲$ خواهد بود.

$$ax(x^۲ + ۶x + ۱۲) + ۸a + b = a(x + ۲)^۳ + ۲$$

با مقایسه، $b = ۲$ به دست می‌آید. از طرفی تابع f محور عرض‌ها را در نقطه‌ای به عرض ۴ قطع کرده است.

$$f(۰) = ۴ \Rightarrow a(۰ + ۲)^۳ + ۲ = ۴ \Rightarrow ۸a = ۲ \Rightarrow a = \frac{۱}{۴}$$

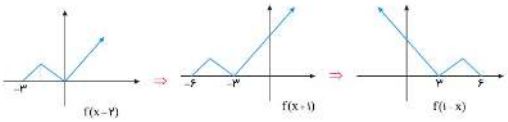
$$f(x) = ۰ \Rightarrow \frac{۱}{۴}(x + ۲)^۳ + ۲ = ۰ \Rightarrow (x + ۲)^۳ = -۸$$

$$\Rightarrow x + ۲ = -۲ \Rightarrow x = -۴ \Rightarrow m = -۴$$

۱۷ گزینه ۱

مسیر رسم شکل به‌صورت زیر است:

$$f(x - ۲) \xrightarrow{\text{۳ واحد به چپ}} f(x + ۱) \xrightarrow{\text{xها قرینه}} f(۱ - x)$$



۱۸ گزینه ۲

دامنهٔ تابع $f(x)$ برابر $(-\infty , ۴]$ است، پس دامنهٔ تابع $f(x + ۱)$ برابر $(-\infty , ۳]$ خواهد بود. دامنهٔ $g(x)$ و $۲g(x)$ برابر $(-\infty , ۳)$ است.

$$D_{\frac{f(x+۱)}{۲g(x)}} = D_{f(x+۱)} \cap D_g - \{x | g(x) = ۰\} = (-\infty , ۳)$$

۱۹ گزینه ۳

$$R_{f(\frac{x}{۲})} = R_{f(x)} = R_{f(۱-x)} = [-۱ , ۲)$$

$$\Rightarrow R_{۲f(۱-x)+۱} = [۲(-۱) + ۱ , ۲(۲) + ۱) = [-۱ , ۵)$$

۲۰ گزینه ۲

$$-۱ < ۲f(x) - ۱ \leq ۴ \Rightarrow ۰ < ۲f(x) \leq ۵ \Rightarrow ۰ < \frac{۱}{۲}f(x) \leq \frac{۵}{۴}$$

$$\Rightarrow -۱ < \frac{۱}{۲}f(x) - ۱ \leq \frac{۱}{۴} \Rightarrow -۱ < \frac{۱}{۲}f(x+۱) - ۱ \leq \frac{۱}{۴}$$

۲۱ گزینه ۱

$$y = f(-\frac{x}{۲} + ۱) \xrightarrow{x \to -x} f(\frac{x}{۲} + ۱) \xrightarrow{x \to ۲x} f(x+۱)$$
$$\xrightarrow{x \to x-۱} f(x)$$

$$(-۱\ ,\ ۲) \xrightarrow{\text{طول قرینه}} (۱\ ,\ ۲) \xrightarrow{\text{طول نصف}} (\frac{۱}{۲}\ ,\ ۲)$$
$$\xrightarrow{\text{طول به‌اضافهٔ یک}} (\frac{۳}{۲}\ ,\ ۲)$$

۲۲ گزینه ۴

$$-۳ \leq x < ۶ \Rightarrow -۱۲ < -۲x \leq ۶ \Rightarrow -۱۱ < -۲x + ۱ \leq ۷$$

$$\Rightarrow -۱۱ < -x + ۲ \leq ۷ \Rightarrow -۱۳ < -x \leq ۵ \Rightarrow -۵ \leq x < ۱۳$$

۲۳ گزینه ۴

$$D_y = D_{f(x)} \quad , \quad -۳ \leq x < ۷$$
$$\Rightarrow \frac{-۱}{۲} \leq \frac{x}{۲} + ۱ < \frac{۹}{۲} \Rightarrow D_f = [-\frac{۱}{۲}\ ,\ \frac{۹}{۲})$$

۲۴ گزینه ۳

اگر نقطهٔ $A(۳\ ,\ m)$ روی تابع $y = ۱ - ۲f(۱ - x)$ قرار گیرد، باید در آن صدق کند.

$$m = ۱ - ۲f(۱ - ۳) \Rightarrow f(-۲) = \frac{۱ - m}{۲} \Rightarrow (-۲\ ,\ \frac{۱ - m}{۲}) \in f(x)$$

۲۵ گزینه ۴

$$۲a + ۱ = f(۱ - a - ۱) - ۱ \Rightarrow f(-a) = ۲(a+۱)$$

$$\frac{x}{۲} = -a \Rightarrow x = -۲a \xrightarrow{g} g(-۲a) = ۱ - f(-a)$$

$$\Rightarrow g(-۲a) = ۱ - ۲(a+۱) = -۱ - ۲a \Rightarrow (-۲a\ ,\ -۱ - ۲a) \in g$$

توابع چندجمله‌ای

در سال‌های گذشته با توابع خطی آشنا شدید. هر تابع به صورت $f(x)=ax+b$ را یک تابع خطی می‌نامیم. اگر $a=0$، تابع به صورت $f(x)=b$ درمی‌آید که آن را تابع ثابت می‌نامیم. تابع ثابت و تابع خطی حالت خاصی از توابعی هستند که توابع چندجمله‌ای نام دارند. توابع درجه دوم نیز حالت خاصی از توابع چندجمله‌ای هستند.

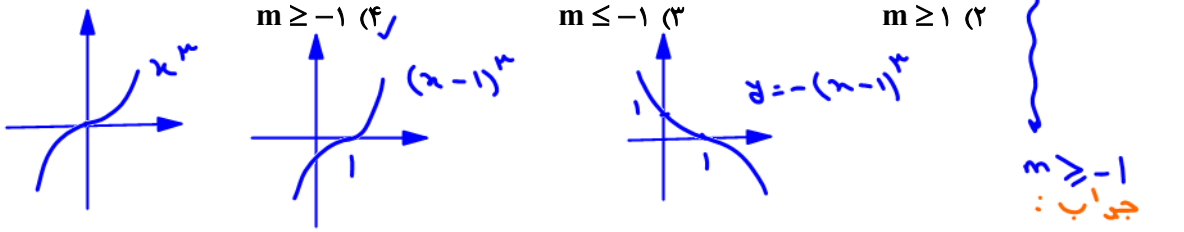
هر تابع به صورت $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0$ را که در آن a_n و a_{n-1} و ... و a_2 و a_1 و a_0 اعداد حقیقی و n یک عدد صحیح نامنفی و $a_n\neq 0$، یک تابع چندجمله‌ای از درجه‌ی n می‌نامند. دامنه‌ی توابع چندجمله‌ای مجموعه‌ی اعداد حقیقی است. نکته: برد چند جمله‌ای درجه فرد با دامنه $\mathbb{R}$ همان $\mathbb{R}$ است.

تمرین: توابع زیر نمونه‌ای از توابع چندجمله‌ای هستند که به ترتیب از درجه‌ی ۱، ۲، ۳ و ۵ هستند.

$$y=3x+5 \quad , \quad y=-8x^2+2x-\frac{1}{2} \quad , \quad y=\sqrt{2}x^3-\frac{3}{4}x \quad , \quad y=2x^5-4x^3+\sqrt{7}x^2$$

تمرین: نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=-(x-1)^3+m$ به ازای چه مقادیری از m، از ناحیهٔ سوم عبور نمی‌کند؟

۱) $m\leq 1$ ۲) $m\geq 1$ ۳) $m\leq -1$ ۴) $m\geq -1$



جواب: $m\geq -1$

تمرین: نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=x^3-3(x^2-x)+2$ از کدام ناحیهٔ دستگاه مختصات عبور نمی‌کند؟

۱) اول ۲) دوم ۳) سوم ۴) چهارم

بازو بستن کردن شاخه: $y=a(x-\alpha)^3+\beta$

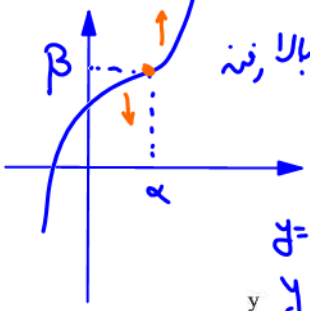
نقطهٔ عطف: نقطهٔ عطف چند جمله‌ای درجه ۳

$y=x^3-3x^2+3x+2$

$y=(x^3-3x^2+3x-1)+3$

همون x^3 که به واحد به راست و ۳ واحد بالا رفته $y=(x-1)^3+3$

(۱,۳) نقطهٔ عطف که نقطه مشترکی عوض نمیشه.

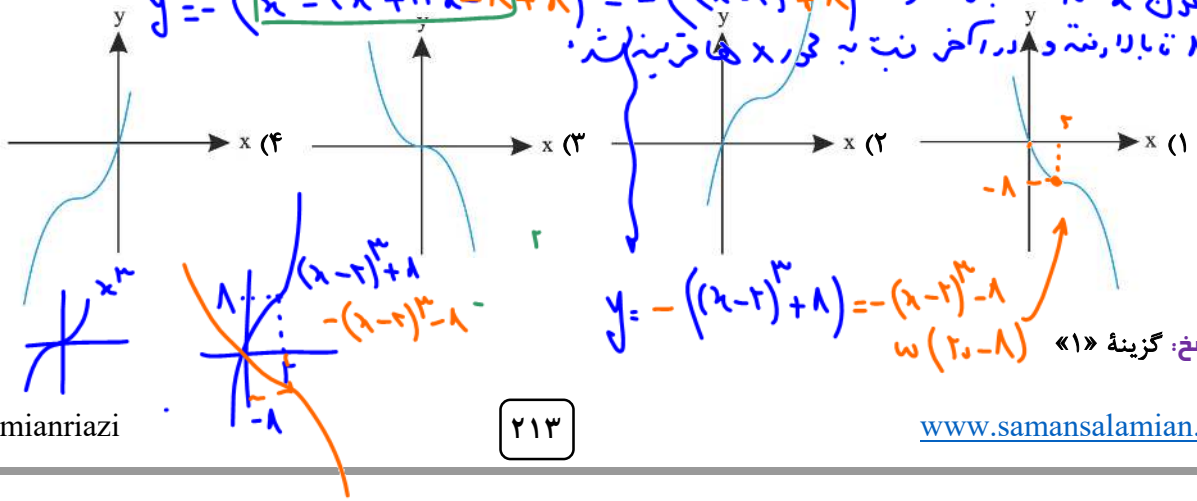


تمرین: نمودار تابع $f(x)=6x^2-x^3-12x$ شبیه کدام گزینه است؟

$y=-(x^3-6x^2+12x)$

$y=-(x^3-6x^2+12x-8+8)=-((x-2)^3+8)$

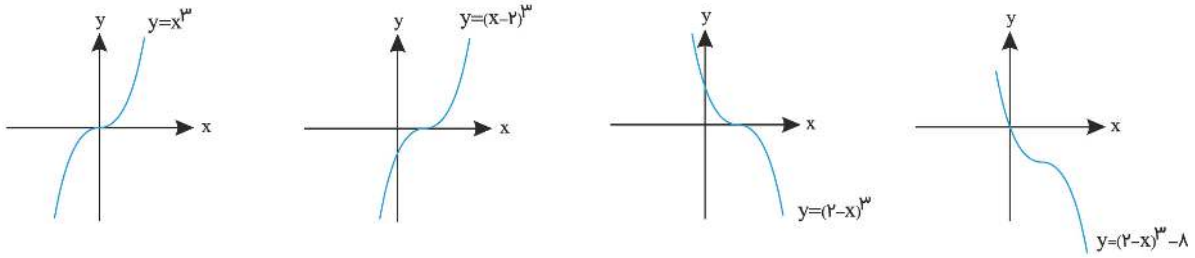
همون x^3 که ۲ تا به راست و ۸ تا پایین رفته و در آخر نسبت به محور x ها قرینه شده.



پاسخ: گزینهٔ «۱»

$$f(x)=\underbrace{۶x^۲-x^۳-۱۲x+۸}_{(۲-x)^۳}-۸=(۲-x)^۳-۸$$

حالا مرحله به مرحله نمودار تابع را رسم می‌کنیم:

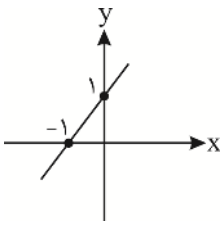


تابع‌های خطی، ثابت، همانی

۱- تابع خطی

به هر تابع که بتوان ضابطهٔ آن را به شکل $f(x)=ax+b$ نوشت یک تابع خطی می‌نامند. برای یافتن معادلهٔ یک تابع خطی کافی است دو نقطه از آن را داشته باشیم. نمودار یک تابع خطی به صورت یک خط راست می‌باشد. مثلاً برای رسم تابع $f(x)=x+۱$ دو نقطه را به شکل زیر در نظر گرفته و آن را رسم می‌کنیم:

بهتر است یک بار $x=۰$ داده و y را پیدا کنیم و بار دیگر $y=۰$ داده و x را پیدا کنیم.

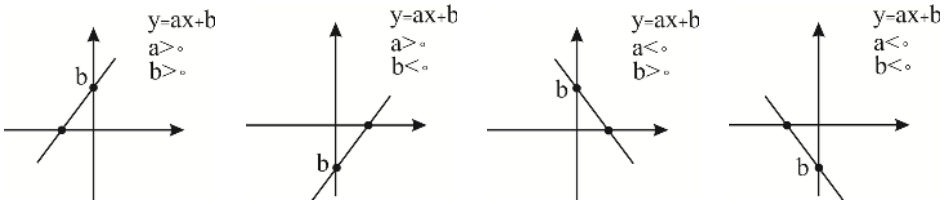


$y=x+۱$

x	۰	-۱
y	۱	۰

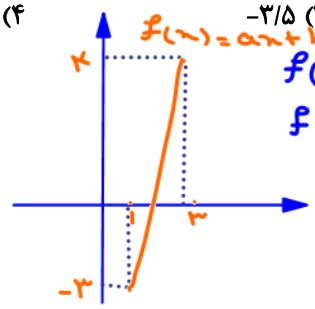
در تابع خطی $f(x)=ax+b$، a شیب تابع و b عرض از مبدأ آن است. در این نوع توابع با افزایش منظم در xها، yها به طور منظم تغییر می‌کنند. برای تشخیص خطی بودن یک تابع باید بفهمیم که نسبت تغییرات y به x (همان $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ یا شیب) ثابت است یا خیر.

به شکل‌های زیر توجه کنید:

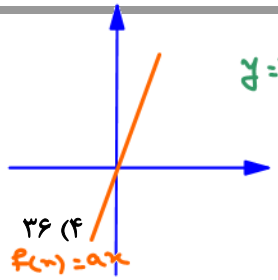


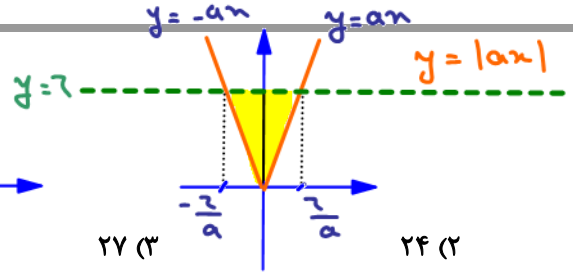
تعرین: اگر برد تابع خطی $f(x)=ax+b$ با دامنهٔ $[۱,۳]$ برابر $[-۳,۴]$ باشد با فرض مثبت بودن a مقدار b کدام است؟

۱) ۶/۵ ۲) -۶/۵ ۳) -۳/۵ ۴) ۳/۵



تعرین: تابع خطی f برای هر x در تساوی $f(۲x)=۲f(x)$ صدق می‌کند. اگر مساحت محدود به $y=|f(x)|$ و خط $y=۶$ برابر ۱۲ باشد، مقدار $f(۹)$ کدام می‌تواند باشد؟





۱) ۱۸ ۲) ۲۴ ۳) ۲۷ ۴) ۳۶

$f(x)=ax+b$

$f(2x)=2f(x)$

$2ax+b=2ax+2b$

$\Rightarrow b=0 \rightarrow f(x)=ax$

مساحت مثلث $S=\frac{1}{2}(\text{قاعده}=\frac{12}{a})(\text{ارتفاع}=6)=\frac{36}{a}=12$

$f(x)=ax=3x$

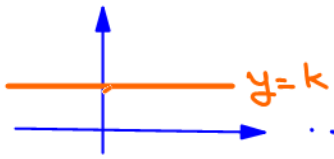
$f(9)=3(9)=27$

جواب ۳

$a=3$

$D_f: \mathbb{R}$

$R_f: \{k\}$



۲- تابع ثابت دامنه نامتناهی $x\in\mathbb{R}$، برد متناهی (فقط یک عدد) است.

به تابعی گفته می‌شود که برد آن فقط شامل یک عضو است. نمایش این تابع به صورت $f(x)=c$ است مثل $f(x)=0$، $f(x)=2$. اگر این تابع را رسم کنیم به صورت یک خط افقی درمی‌آید. نمودار تابع ثابت با دامنهٔ $\mathbb{R}$، خط افقی است ولی اگر دامنهٔ تابع $\mathbb{R}$ نباشد نمودار تابع بخشی از یک خط افقی و یا نقاطی روی آن است.

در تابع خطی $f(x)=ax+b$ اگر $a=0$ باشد به تابع ثابت می‌رسیم.

تمرین: اگر تابع $f(x)=(a+1)x^2-(b+2)x+a-2b$ یک تابع ثابت باشد، حاصل $f(5)$ کدام است؟

۱) ۳- ۲) ۵ ۳) ۵- ۴) ۳

صفر $a+1=0 \Rightarrow a=-1$

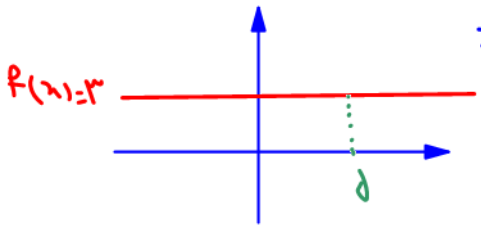
صفر $b+2=0 \Rightarrow b=-2$

متغیر ندارد یعنی عدد

$f(x)=a-2b=-1+4=3$

$f(x)=3$

$f(5)=3$



تمرین: مجموع دو تابع $f(x)-4$ و $f(4-x)$ تابعی ثابت است. ضابطه‌ی $f(x)$ کدام می‌تواند باشد؟

۱) x^2+2x ۲) x^2-2x ۳) x^2-4x ۴) x^2+4x

با توجه به گزینه‌ها می‌بینم که همگی x^2+mx هستند ما باید m را بیابیم:

$f(x)=x^2+mx$

$f(x)+f(4-x)=k$

$x^2+mx+(4-x)^2+m(4-x)=k$

$x^2+mx+16-8x+x^2+4m-mx=k$

$(-2m-8)x+20+4m=k$

طرف راست تساوی x ندارد $\Rightarrow -2m-8=0$

طرف چپ هم باید x نداشته باشد $\Rightarrow -2m=8 \Rightarrow m=-4$

$f(x)=x^2+mx$

$f(x)=x^2-4x$

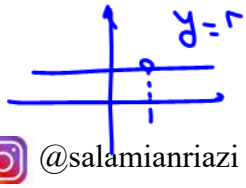
تمرین: به ازای کدام مقدار a، نمودار تابع $y=\frac{(a-2)x+3}{a+5-2x}$، نمایش یک خط افقی با حذف یک نقطهٔ آن است؟ (سنجش جامع)

۱) ۴- و ۱ ۲) ۳ و ۱- ۳) ۵ و ۱- ۴) ۵- و ۱-

$\frac{a-2}{-2}=\frac{3}{a+5}$

$y=\frac{(a-2)x+3}{-2x+(a+5)}$

$y=\frac{2x-2}{|x-1|}=\frac{2(x-1)}{x-1}=2$



$f(x)=\dfrac{(a-2)x+3}{a+5-2x}$

$f(x)=\dfrac{(a-2)x+3}{-2x+(a+5)}$

$\dfrac{a-2}{-2}=\dfrac{+3}{a+5}$

$(a-2)(a+5)=-6$

$a^2+3a-10+6=0$

$a^2+3a-4=0$ $\quad a=1,-4$

تابع همه‌جا مثبت $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ با شرط $\dfrac{a}{c}=\dfrac{b}{d}$ یا $ad-bc=0$ یا $ad=bc$

تبدیل به تابع ثابت (حذف اصلی) می‌شود که دوریشه خارج توخالی است.

$y=\dfrac{2x-1}{x-1}=\dfrac{2(x-1)}{x-1}=2$ $\quad y=2$

$\dfrac{2}{1}=\dfrac{-2}{-1}$

تمرین: اگر $f(x)=(ax+2)(b-x)-7x^2$ ضابطهٔ یک تابع ثابت باشد، برد f کدام است؟ (خارج ۱۴۰۱)

متغیر ندارد — فاقد متغیر است

۱) $-\dfrac{2}{7}$ ۲) $\dfrac{2}{7}$ ۳) $-\dfrac{4}{7}$ ۴) $\dfrac{4}{7}$

$f(x)=abx-ax^2+2b-2x-7x^2$

$f(x)=x^2(-7-a)+(ab-2)x+(2b)$

$-7-a=0 \rightarrow -7=a$ $\quad ab=2$ $\quad -7b=2$ $\quad b=-\dfrac{2}{7}$

$f(x)=-\dfrac{4}{7}$ $\quad R=\{-\dfrac{4}{7}\}$

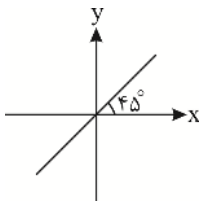
$y=-\dfrac{4}{7}$

۳ – تابع همانی

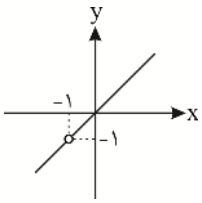
اگر در یک تابع، هر عضو از دامنه، دقیقاً به همان عضو از برد نظیر شود، تابع همانی است. ضابطهٔ تابع همانی $f(x)=x$ است.

نمودار تابع همانی با دامنهٔ $\mathbb{R}$، خط $y=x$ (نیمساز ناحیه اول و سوم) است. ولی اگر دامنه $\mathbb{R}$ نباشد، نمودار بخشی از $y=x$ و یا نقاطی بر روی ان است. توابع زیر همگی همانی هستند:

۱) $f(x)=x \;,\; D_f=\mathbb{R}$

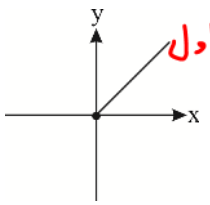


۲) $f(x)=\dfrac{x^2+x}{x+1}=\dfrac{x(x+1)}{(x+1)}=x$



این تابع روی دامنه‌اش یعنی $\mathbb{R}-\{-1\}$ همانی است.

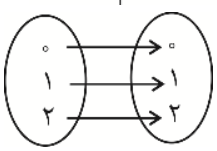
۳) $f(x)=(\sqrt{x})^2=x$



نیم ناحیه اول

$y=(\sqrt{x})^2=x$

۴) $\{(0,0)(1,1)(2,2)\}$ یا



این تابع نیز روی دامنه‌اش یعنی $[0,+\infty)$ همانی است.

تمرین: اگر $f(x)=\dfrac{ax+2b+6}{(b+3)x+2}$ ضابطهٔ یک تابع همانی باشد $a+b$ کدام است؟

$(b+3)x^2+2x=ax+(2b+6)$

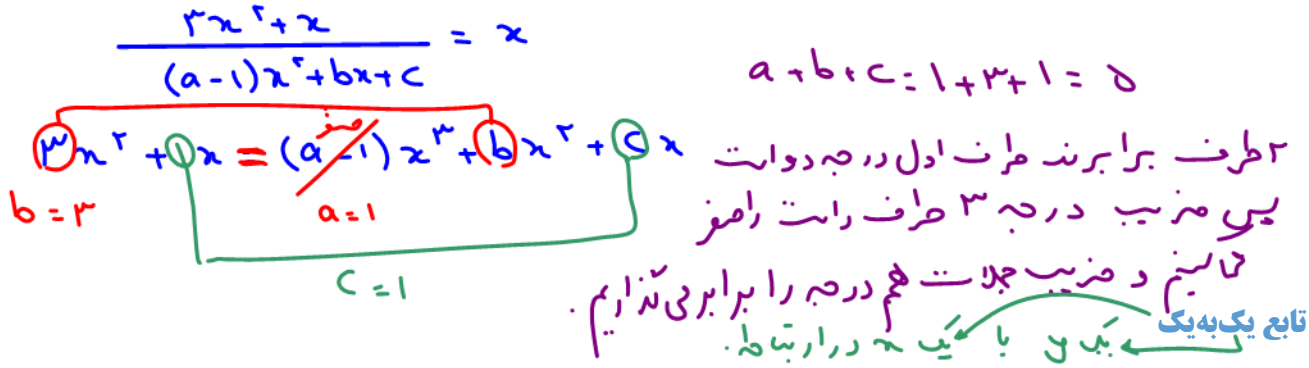
$b=-3$ $\quad a=2$

ضریب جملات هم درجه باید برابر باشد.

۱) صفر ۲) -۱ ۳) ۱ ۴) -۲

تمرین: اگر تابع $y=\frac{۳x^۲+x}{(a-۱)x^۲+bx+c}$ یک تابع همانی باشد، حاصل $a+b+c$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶



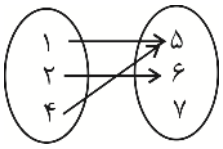
تابع یک‌به‌یک

۱) تابعی که در آن هیچ دو زوج متمایزی، مولفهٔ دوم تکراری نداشته باشد، یک‌به‌یک می‌گویند. تابع یک‌به‌یک دارای تعداد عضوهای یکسان دامنه و برد است.

برای پیدا کردن مجهول در تست‌های مربوط به تابع یک‌به‌یک، ابتدا سراغ مولفه‌های دوم یکسان می‌رویم و مولفه‌های اولشان را برابر می‌گذاریم. مثلاً در $f=\{(۲,۵)(۳,۱)(m,۵)\}$ به سراغ $(۲,\underline{۵}),(m,\underline{۵})$ می‌رویم و مولفه‌های اولشان را مساوی قرار می‌دهیم: $m=۲$

توجه کنید در این مدل از سؤالات شرط تابع‌بودن را نیز کنترل کنید. مثلاً $f=\{(۱,۵)(۱,۶)\}$ اصلاً تابع نیست پس شرط یک‌به‌یک‌بودن را کنترل نمی‌کنیم.

۲) در نمودار ون چنان‌چه بیش از یک فلش به مولفه‌های دوم وارد شود، تابع دیگر یک‌به‌یک نخواهد بود. مثلاً:



یک‌به‌یک نیست چون $(۱,۵),(۴,۵)$ دارای مولفهٔ دوم تکراری هستند.

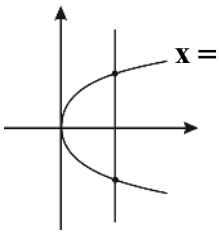
۳) در نمودار دکارتی، تابعی یک‌به‌یک است که در آن هر خط به موازات محور xها، نمودار تابع را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

یک‌به‌یک است. چون هر خط افقی دلخواه،	یک‌به‌یک نیست، چون یک خط افقی نمودار	یک‌به‌یک نیست چون یک خط افقی نمودار

نکته: هر تابع اکیدیکنوا (اکیدصعودی یا اکیدنزولی) یک به یک است. اما عکس دانستن درست نیست زیرا مثلاً $y=\frac{1}{x}$ یک به یک است اما اکیدیکنوا نیست.

حداکثر در یک نقطه نمودار تابع را قطع کرده است.	تابع را در بیشتر از یک نقطه قطع کرده است.	تابع را در بیشتر از یک نقطه قطع کرده است.

توجه کنید نمودار اصلاً بیانگر یک تابع نیست پس شرط یک‌به‌یک‌بودن را اصلاً کنترل نمی‌کنیم.



نکته: تابع ثابت، تابع مثلثاتی یا تابعی که دارای محور تقارن قائم باشد یک به یک نیستند.

$y=k$ $y=\sin x$ $y=(x-3)^2$ $y=|x-3|$

یادت باشه: معمولاً وجود x^2، $|x|$، $[x]$ یا نسبت‌های مثلثاتی $\sin x$، $\cos x$، $\tan x$ و $\cot x$ تابع را غیریک‌به‌یک می‌کند.

چند نکتهٔ مهم:

۱) تابع خطی $y=ax+b$ با شرط $a\neq 0$ (شیب غیرصفر، خطی که افقی نباشد) همواره یک‌به‌یک است.

۲) تابع $f(x)=ax^2+bx+c$ در فاصلهٔ طول رأس به بعد و یا طول رأس به قبل، یک‌به‌یک است یعنی در این فاصله‌ها: $[\frac{-b}{2a},+\infty)$ یا $(-\infty,\frac{-b}{2a}]$

با کمک دامنه یک به یک میشه!

$x_S=\frac{-b}{2a}$ $x_S=\frac{-b}{2a}$

۳) توابع چند جمله‌ای از درجه زوج (بزرگ‌توان x زوج است) غیر یک‌به‌یک هستند.

۴) توابع $|x|-x$، $x-|x|$، $x+|x|$، $\frac{|x|}{x}$ یا $\frac{x}{|x|}$ با توجه به نمودارشان که در درس‌نامهٔ قدرمطلق دیدیم، یک‌به‌یک نیستند چون در بخشی از نمودارشان به شکل یک خط افقی درمی‌آیند و هروقت قسمتی از نمودار به شکل یک خط افقی باشد تابع حتماً غیریک‌به‌یک است.

۵) توابع $[x]$، $x-[x]$، $[x]+[-x]$ و $(-1)^{[x]}$ به دلیل مشابه مورد بالا، غیریک‌به‌یک هستند.

۶) تابع $x+[x]$ یک‌به‌یک است.

$y=x+[x]$ یک به یک است

۷) تابع هموگرافیک $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ با شرط $ad-bc\neq 0$ یک‌به‌یک است.

۸) در بررسی یک‌به‌یک بودن توابع دو یا چند ضابطه‌ای ابتدا یک‌به‌یک بودن ضابطه را در دامنهٔ آن بررسی کرده و سپس بررسی می‌کنیم که هر خط افقی بیشتر از یک مرتبه نمودار تابع را قطع نکند (برد ضابطه‌ها با هم اشتراک نداشته باشد)، مثلاً تابع $y=\begin{cases}\sqrt{x} & x\geq 0\\ -x^2 & x<0\end{cases}$ یک‌به‌یک است چون طبق نمودار هر خط افقی فقط در یک نقطهٔ نمودار تابع را قطع می‌کند.

$\sqrt{x}\ ;\ x\geq 0$

$-x^2\ ;\ x<0$

$y=\begin{cases}\sqrt{x} & x\geq 0\\ -x^2+2 & x<0\end{cases}$ یک به یک نیست

$-x^2+2$

۹) توابع $x|x|$ و $x+\sqrt{x}$ یک‌به‌یک و توابع $x-\sqrt{x}$ و $\frac{ax}{x^2+1}$ غیر یک‌به‌یک هستند.

$y=\frac{ax}{x^2+1}\ (a>0)$ پیچ نیوتن

$y=x|x|$

$y=x+\sqrt{x}$

$y=x-\sqrt{x}$

$D_f=[0,+\infty)$

$y=(\sqrt{x}-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}$ $y_{min}=-\frac{1}{4}$ برد $y\geq -\frac{1}{4}$

تمرین: اگر تابع $f=\{(-1,1),(1,2),(2,3),(a,m-1),(a+2,n),(m,3)\}$ یک‌به‌یک باشد، مقدار n کدام است؟

۱) -۱ ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) ۲

تمرین: تابع $f:R\longrightarrow R$ با کدام ضابطه، یک به یک است؟

۱) $f(x)=x-|x|$ ۲) $f(x)=x+|x|$ ۳) $f(x)=x|x|$ ۴) $f(x)=\frac{|x|}{x}$

تمرین: اگر تابع $f(x)=\begin{cases}3x+2 & x\geq 1\\ 2x-a & x<1\end{cases}$ یک‌به‌یک باشد، حدود a کدام است؟

۱) $\mathbb{R}$ ۲) $\varnothing$ ۳) $[-3,+\infty)$ ۴) $(-\infty,-3]$

تمرین: اگر تابع $f(x)=a|x|+2x$ یک‌به‌یک باشد، حدود a کدام است؟

۱) $(2,+\infty)$ ۲) $(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$ ۳) $(0,2)$ ۴) $(-2,2)$

تابع معکوس (تابع وارون)

تابع یک‌به‌یک f، در زیر داده شده است. اگر جای مولفه‌های اول و دوم زوج‌های مرتب f را عوض کنیم، تابع دیگری مانند g به دست می‌آید:

$$f=\{(1,2)(0,-3)(4,7)\}\ ,\ g=\{(2,1)(-3,0)(7,4)\}$$

دو تابع f و g را معکوس هم می‌نامند اگر برد و دامنهٔ دو تابع بالا را مقایسه کنید که دامنهٔ f برابر برد g و برد f مساوی دامنهٔ g است:

$$D_f=R_g=\{1,0,4\}\ ,\ R_f=D_g=\{2,-3,7\}$$

هرگاه $f:A\to B$ یک‌به‌یک باشد، تابع معکوس f را که با نماد f^{-1} نشان می‌دهیم به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$f^{-1}=\{(y,x)\,|\,(x,y)\in f\}$

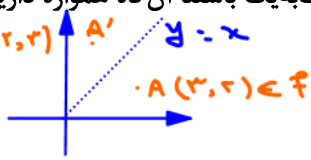
همان‌طور که در مثال دیدیم، می‌توانیم بگوییم که همواره $D_f=R_{f^{-1}}$ و $R_f=D_{f^{-1}}$ می‌باشد.

توجه کنید که شرط لازم و کافی برای آن که f^{-1} تابع باشد (f معکوس‌پذیر باشد) آن است که f یک‌به‌یک باشد. پس اگر در یک سؤال از ما شرط وارون‌پذیری بپرسند، در واقع منظور همان شرط یک‌به‌یک بودن است که در درس‌نامهٔ قبلی بسیار کامل بررسی کردیم.

نکتهٔ مهم در معکوس توابع مرکب: اگر f و g دو تابع یک‌به‌یک باشند آن‌گاه همواره داریم:

۱) $(g^{-1}of^{-1})(x)=(fog)^{-1}(x)$

۲) $(f^{-1}og^{-1})(x)=(gof)^{-1}(x)$



تذکر: اگر نقطهٔ $A(a,b)$ روی تابع f باشد، نقطهٔ $A'(b,a)$ روی f^{-1} است یعنی:

$f(a)=b \Rightarrow f^{-1}(b)=a$

مثلاً اگر $A(۲,۳)\in f$ باشد:

$f(۲)=۳ \Rightarrow f^{-1}(۳)=۲$

تمرین: در تابع $f=\{(۱,۲),(۲,۳),(۴,۵),(۳,۴)\}$ و $g=\{(۲,۱),(۳,۲),(۵,۴)\}$ مفروض‌اند. تابع $g^{-1}of^{-1}$ کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۰)

۱) $\{(۴,۴),(۱,۱),(۳,۴)\}$

۲) $\{(۳,۳),(۵,۵),(۴,۳)\}$

۳) $\{(۲,۲),(۱,۱),(۴,۴)\}$

۴) $\{(۲,۲),(۳,۳),(۵,۵)\}$ ✓

تمرین: دو تابع $f=\{(۵,۲),(۷,۳),(۱,۴),(۳,۶),(۹,۱)\}$ و $g(x)=\sqrt{۵x+۹}$ مفروض‌اند. اگر $(g^{-1}of^{-1})(a)=۸$ باشد، a کدام است؟ (تجربی خارج ۹۶)

۱) ۲ ۲) ۳ ✓ ۳) ۶ ۴) ۷

تمرین: دو تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & x\geq ۰\\ -\sqrt{-x} & x<۰\end{cases}$ و $g=\{(۲,-۱),(-۱,۴),(۳,-۲),(-۴,-۳)\}$ مفروض‌اند. اگر $g^{-1}(f(a))=۳$ باشد، a کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۳)

۱) -۴ ✓ ۲) -۱ ۳) ۲ ۴) ۴

۷) اگر $f^{-1}(a)$ را بپرسند، اسم آن را x گذاشته و $f(x)=a$ را حل می‌کنیم. x همان جواب مسئله است. مثلاً اگر $f(x)=-x+\sqrt{-2x}$ و $f^{-1}(4)$ را بپرسند:

$f^{-1}(4)=x \Rightarrow f(x)=4 \Rightarrow -x+\sqrt{-2x}=4$

$\Rightarrow \sqrt{-2x}=x+4 \xrightarrow[x=-2]{\text{حدس}} \sqrt{-2(-2)}=-2+4 \Rightarrow 2=2$ ✓

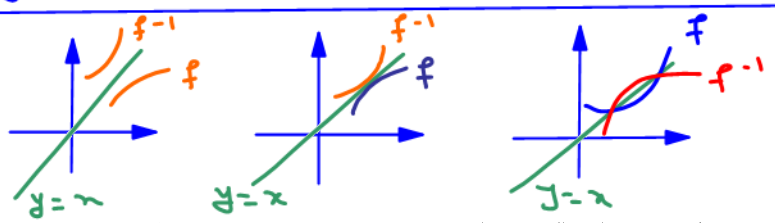
پس $x=-2$ جواب مسئله است. (ریاضی ۸۸)

تمرین: فرض کنید $g(x)$ وارون تابع $f(x)=x+2\sqrt{x}$ باشد. حاصل $g(3)+g(15)$ کدام است؟ (تجربی خارج ۹۹)

۱) ۱۲ ۲) ۱۱ ۳) ۱۰ ۴) ۸

تمرین: اگر $f(x)=x+\sqrt{x}$ و $g(x)=\frac{9x+6}{1-x}$ باشند، مقدار $(g^{-1}of^{-1})(20)$، کدام است؟ (ریاضی ۹۹)

۱) $\frac{2}{5}$ ۲) $\frac{3}{5}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{3}{4}$



نکته: اگر f اکیداً صعودی باشد وارون خود را روی $y=x$ قطع می‌کند.

۱) نمودار تابع‌های f، f^{-1} نسبت به خط $y=x$ قرینهٔ یکدیگرند. بنابراین اگر نمودار یک تابع یک‌به‌یک نسبت به خط $y=x$ متقارن باشد، آن‌گاه تابع و وارونش با هم برابرند.

۲) اگر $f(a)=b$، آن‌گاه $f^{-1}(b)=a$ به عبارت دیگر اگر نقطهٔ (a,b) روی نمودار تابع f باشد، آن‌گاه نقطهٔ (b,a) روی نمودار f^{-1} است.

نکته: بعضی توابع وارون پذیرند ولی ضابطهٔ وارون آن‌ها را نمی‌توان یافت مثل: $y=x+\sin x$

۳) $(f^{-1})^{-1}(x)=f(x)$

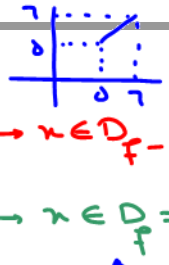
۴) اگر نمودارهای f و f^{-1}، یکدیگر را در نقطهٔ (a,b) قطع کنند آن‌گاه $f(a)=b$ و $f(b)=a$. یعنی هم (a,b) و هم (b,a)، نقاط

نکته: ترکیب هر تابع با وارونش تابع همانی است ولی:

$y=f(f^{-1}(x))=x \rightarrow x\in D_{f^{-1}}=R_f$

$y=f^{-1}(f(x))=x \rightarrow x\in D_f$

مثال: اگر $D_f=[1,3]$ و $R_f=[5,7]$ باشد $y=f\circ f^{-1}(x)$ و $y=f^{-1}\circ f(x)$ را رسم کنید.



تقاطع هستند.

۵) اگر f تابعی وارون‌پذیر باشد، آن‌گاه:

الف) $(f^{-1}of)(x)=x \quad , \quad x\in D_f$ یا $x\in R_{f^{-1}}$

فرقی نمی‌کند، اگر f را داشتید دامنه‌اش و اگر f^{-1} را داشتید بردش را حساب می‌کنید.

ب) $(fof^{-1})(x)=x \quad , \quad x\in D_{f^{-1}}$ یا $x\in R_f$

فرقی نمی‌کند، اگر f را داشتید بردش و اگر f^{-1} را داشتید دامنه‌اش را حساب می‌کنید.

۶) دو تابع fof^{-1} و $f^{-1}of$ فقط به شرطی با هم مساوی هستند که f وارون‌پذیر باشد و دامنه و برد f یکسان باشد. بعضی‌ها فکر می‌کنند که چون $f^{-1}(f(x))=x$ و $f(f^{-1}(x))=x$ هستند پس این دو همیشه برابرند.

مثال: در تابع $f(x)=-x+1$ با شرط $-1\le x\le 2$، $f^{-1}of=fof^{-1}$ است چون برد این تابع در محدودهٔ دامنهٔ $[-1,2]$، برابر $[-1,2]$ است.

۷) اگر دو تابع f و g وارون یکدیگر باشند، ترکیب آن‌ها همانی است اما عکس موضوع همواره برقرار نیست.

تمرین: ضابطه‌ی وارون $y=\frac{x}{1+|x|}$ کدام است؟ (تجربی ۹۱)

$f(\alpha)=\beta$

$f^{-1}(\beta)=\alpha$

$f(0)=0$

$f^{-1}(0)=0\in$ گزینه ۱

۱) $y=\frac{x}{1-|x|}, |x|<1$

۲) $y=\frac{1-|x|}{|x|}, |x|>1$

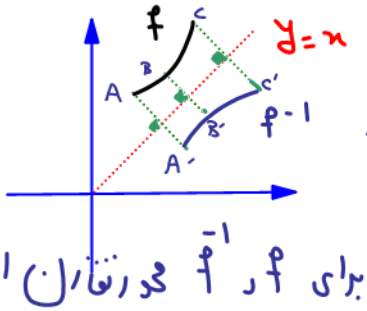
۳) $y=\frac{x}{|x|-1}, |x|>1$

۴) $y=\frac{|x|-1}{x}, |x|<1$

روش کلاسیک یافتن ضابطه f^{-1}: تابع $f(x)$ را برابر y در نظر بگیرید x را برحسب y حساب کنید (x را تنها کنید) سپس جای x و y را عوض کنید. مثلاً

$f(x)=2x+3 \rightarrow y=2x+3 \rightarrow x=\frac{y-3}{2} \rightarrow y=\frac{x-3}{2}=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$

نکته: $\begin{cases} f(x)=ax+b \\ f^{-1}(x)=\frac{1}{a}x-\frac{b}{a} \end{cases}$



روش کلاسیک یافتن شکل f^{-1} با داشتن شکل f:

کافی است از هر نقطه f به $y=x$ عمود کرده به اندازه خود امتداد دهیم تا نقطه متناظر روی f^{-1} حاصل شود

قرینه محوری f نسبت به خط $y=x$ را رسم کنید. $y=x$ برای f و f^{-1} محور تقارن است.

نکته: f و f^{-1} از نظر اینکه بیضوی یا سهمی هستند یکی هستند. مثلاً در شکل بالا f و f^{-1} هر دو اینکه سهمی‌اند

تمرین: ضابطه‌ی معکوس $y=\begin{cases}\frac{|x|}{x}\sqrt{|x|} & , \ x\neq 0\\ 0 & , \ x=0\end{cases}$ به کدام صورت است؟ (تجربی خارج ۹۲)

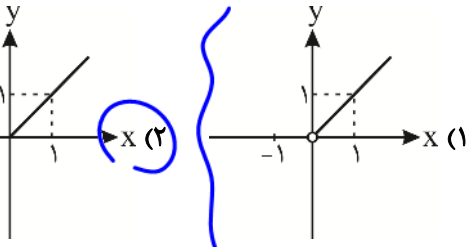
۱) $y=x\sqrt{|x|} \ , \ x\in\mathbb{R}$

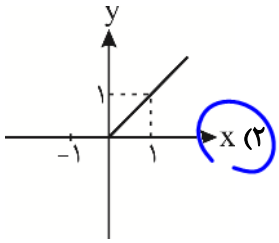
۲) $y=x\sqrt{|x|} \ , \ x\in\mathbb{R}-\{0\}$

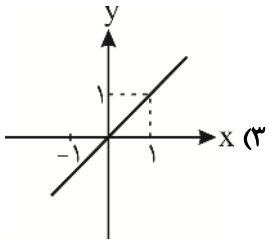
۳) $y=x|x| \ , \ x\in\mathbb{R}-\{0\}$

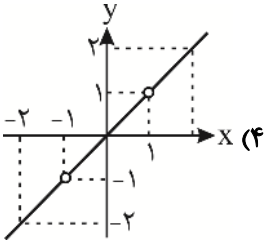
۴) $y=x|x| \ , \ x\in\mathbb{R}$

تمرین: اگر $f(x)=\sqrt{1-x}$ باشد، نمودار $(fof^{-1})(x)$ کدام است؟

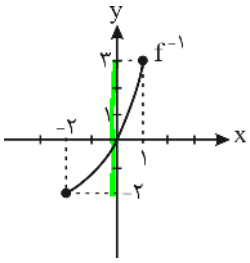
۱) 

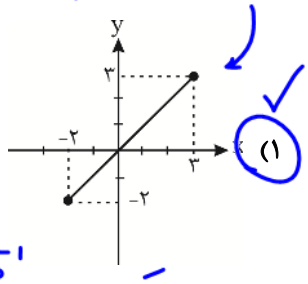
۲) 

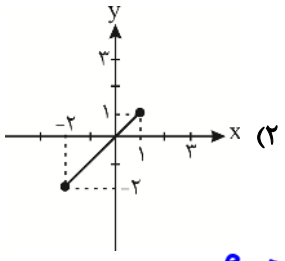
۳) 

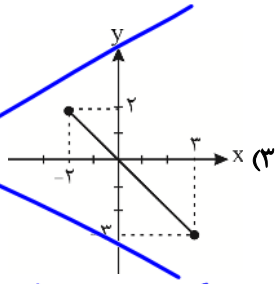
۴) 

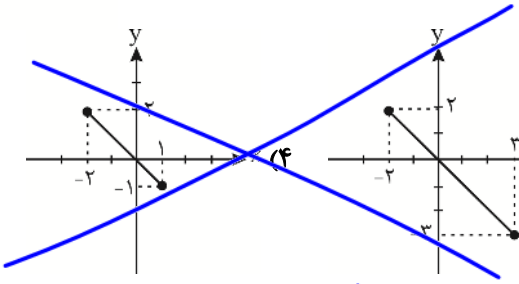
تمرین: نمودار تابع f^{-1} به صورت زیر است. نمودار تابع $y=f^{-1}of(x)$ کدام است؟



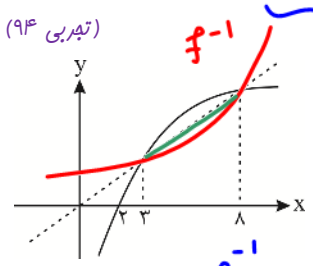
۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

تمرین: شکل روبه‌رو، نمودار تابع $y=f(x)$ و نیمساز ناحیه اول و سوم است. دامنه تابع با ضابطه‌ی $\sqrt{x-f^{-1}(x)}$، کدام است؟ (تجربی ۹۴)



۱) $(0,2]$
۲) $[2,3]$
۳) $[2,8]$
۴) $[3,8]$ ✓

به دست آوردن ضابطه‌ی وارون

برای به دست آوردن ضابطه‌ی تابع وارون (البته تابع اصلی باید یک‌به‌یک باشد) این ۳ کار رو می‌کنیم:

۱- به جای $f(x)$ می‌نویسیم y.

۲- x رو تنها می‌کنیم.

۳- وقتی x تنها شد، به جای x قرار می‌دهیم $f^{-1}(x)$ و به جای y می‌ذاریم x.

۱) $f(x)=2x-3 \Rightarrow y=2x-3 \Rightarrow y+3=2x \xrightarrow{\div 2} \frac{y+3}{2}=x \xrightarrow{\text{تعویض } x \text{ و } y} \frac{x+3}{2}=y \Rightarrow \frac{x+3}{2}=f^{-1}(x)$

$f^{-1}(x)=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$

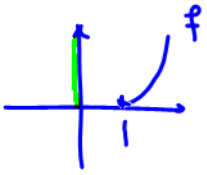
۲) $f(x)=\frac{1}{x-1} \Rightarrow y=\frac{1}{x-1} \Rightarrow x-1=\frac{1}{y} \Rightarrow x=\frac{1}{y}+1 \Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{1}{x}+1=\frac{x+1}{x}$

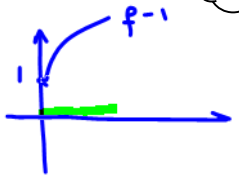
۳) $f(x)=(x-1)^2;x\geq 1 \Rightarrow y=(x-1)^2 \xrightarrow{\text{جذر می‌گیریم تا از شر توان ۲ واسه } x \text{ خلاص بشیم.}} \sqrt{y}=|x-1| \xrightarrow[|x-1|=x-1]{\text{خودش گفته } x\geq 1 \text{ پس}} \sqrt{y}=x-1$

خودش +

$\Rightarrow x=\sqrt{y}+1 \xrightarrow{\text{مرحله‌ی سوم}} f^{-1}(x)=\sqrt{x}+1$

$x\geq 0 = D_{f^{-1}}=R_f$





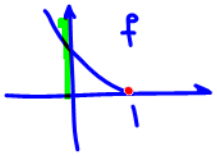
۴) $f(x)=(x-1)^2 \;;\; x<1$

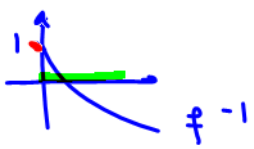
$\Rightarrow y=(x-1)^2 \xrightarrow{\sqrt{}} \sqrt{y}=|x-1| \xrightarrow[|x-1|=1-x]{\text{خودش گفته } x<1} \sqrt{y}=1-x \Rightarrow x=1-\sqrt{y}$

قرینش −

$\xrightarrow{\text{مرحله‌ی سوم}} f^{-1}(x)=1-\sqrt{x}$

$x\geq 0 = D_{f^{-1}}=R_f$

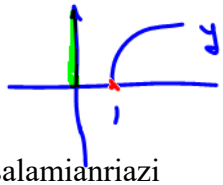


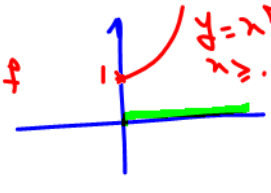


۵) $f(x)=\sqrt{x-1} \Rightarrow y=\sqrt{x-1} \xrightarrow[\text{رادیکال خلاص بشیم و } x \text{ آزاد بشه}]{\text{به توان ۲ می‌رسونیم تا از شرّ}} y^2=x-1 \Rightarrow x=y^2+1$

$\xrightarrow{\text{مرحله‌ی سوم}} f^{-1}(x)=x^2+1$

$x\geq 0 = D_{f^{-1}}=R_f$

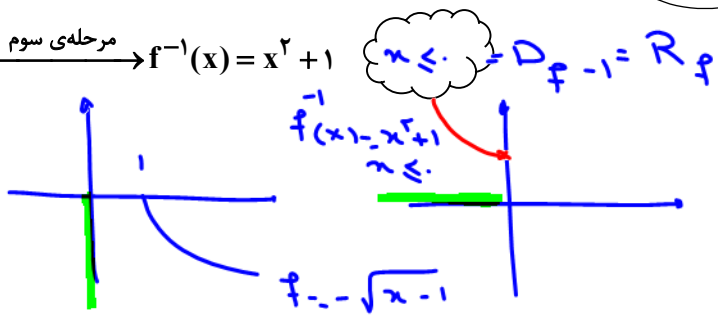




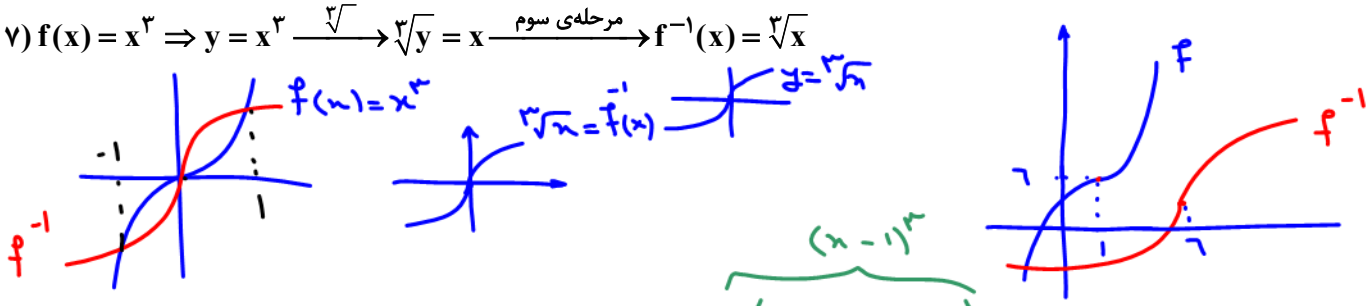
توان ۲

۶) $f(x)=-\sqrt{x-1} \Rightarrow y=-\sqrt{x-1} \longrightarrow y^2=(-\sqrt{x-1})^2=+(x-1) \Rightarrow x=y^2+1$

$\xrightarrow{\text{مرحله‌ی سوم}} f^{-1}(x)=x^2+1$



۷) $f(x)=x^3 \Rightarrow y=x^3 \xrightarrow{\sqrt[3]{}} \sqrt[3]{y}=x \xrightarrow{\text{مرحله‌ی سوم}} f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x}$



۸) $f(x)=x^3-3x^2+3x+5 \Rightarrow y=x^3-3x^2+3x+5 \Rightarrow y=(x^3-3x^2+3x-1)+6 \Rightarrow y=(x-1)^3+6$

حالا عبارت xدار رو تنها کن.

$(x-1)^3=y-6 \xrightarrow{\sqrt[3]{}} x-1=\sqrt[3]{y-6} \Rightarrow x=\sqrt[3]{y-6}+1 \xrightarrow{\text{مرحله‌ی سوم}} f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x-6}+1$

تمرین: قرینهٔ خط به معادلهٔ $3y-2x=4$ را نسبت به خط $y=x$، خط d می‌نامیم. عرض از مبدأ خط d کدام است؟

(سراسری تجربی داخل ۹۷)

۱) -2 ۲) -1 ۳) ۱ ۴) ۲

تمرین: درباره‌ی تابع خطی f به ازای هر مقدار حقیقی x می‌دانیم $f^{-1}(x)=f(x-10)$. مقدار $f(7)$ کدام است؟

۱) -3 ۲) ۲ ۳) ۱۷ ۴) ۱۲

۱) وارون تابع هموگرافیک $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ با شرط $ad-bc\neq 0$ به شکل $f^{-1}(x)=\frac{-dx+b}{cx-a}$ است.

$f(x)=y=\frac{ax+b}{cx+d} \longrightarrow ycx+dy=ax+b \longrightarrow cxy-ax=b-dy$

$x(cy-a)=-dy+b$

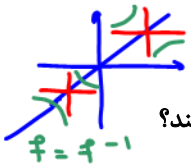
$x=\frac{-dy+b}{cy-a} \longrightarrow y=\frac{-dx+b}{cx-a}$

$f^{-1}(x)=\frac{-dx+b}{cx-a}$ → اگر $a=-d$

$f^{-1}=f$ ⇐ $a+d=0$ و $ad-bc\neq 0$

۲) در تابع هموگرافیک $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ با شرط $ad-bc\neq 0$ اگر $a+d=0$ باشد، تابع و وارونش بر یکدیگر منطبق هستند یعنی:

$f(x)=f^{-1}(x)$



مثال $f=f^{-1} \longleftarrow f:y=\frac{2x+9}{5x-2}$

تمرین: نمودار تابع $f(x)=\frac{x+4}{x-2}$، با دامنه‌ی $\mathbb{R}-\{2\}$، نمودار وارون خود را با کدام طول قطع می‌کند؟ (تجربی خارج ۹۶)

۱) $-1,-4$ ۲) $-1,4$ ۳) $1,-4$ ۴) $1,4$

$\frac{x+4}{x-2}=\frac{2x+4}{x-1}$

تمرین: قرینه‌ی نمودار تابع $y=2+\sqrt{x-1}$ را نسبت به خط $y=x$ رسم کرده و سپس نمودار حاصل را ۲ واحد در جهت مثبت محور xها و ۳ واحد در جهت منفی محور yها انتقال می‌دهیم و آن را $y=g(x)$ می‌نامیم. مقدار $g(4)$ کدام است؟ (تجربی ۱۴۰۰)

۱) ۳ ۲) -۳ ۳) -۲ ۴) -۴

f^{-1} را پیدا کن

$x \longrightarrow x-2$

$y-2=\sqrt{x-1} \longrightarrow (y-2)^2=x-1 \longrightarrow x=1+(y-2)^2 \longrightarrow y=1+(x-2)^2=f^{-1}(x)$

$g(x)=1+(x-2-2)^2-3$

$g(x)=(x-4)^2-2$

$g(4)=-2$

تمرین: تابع $f(x)=x^2\sqrt{x^2}$ در یک بازه نزولی است. ضابطه‌ی وارون تابع در این بازه کدام است؟ (ریاضی ۱۴۰۱)

۱) $-\sqrt[3]{x}\ ;\ x\geq 0$ ۲) $-\sqrt{x^3}\ ;\ x\leq 0$ ۳) $-\sqrt[3]{x}\ ;\ x\leq 0$ ۴) $-\sqrt{x^3}\ ;\ x\geq 0$

$f(x)=x^2|x|=\begin{cases}x^3 & x\geq 0\\ -x^3 & x<0\end{cases}$

نزدیک $\begin{cases}x\leq 0\\ y=-x^3\end{cases}$

$-y=x^3$

$\sqrt[3]{-y}=x$

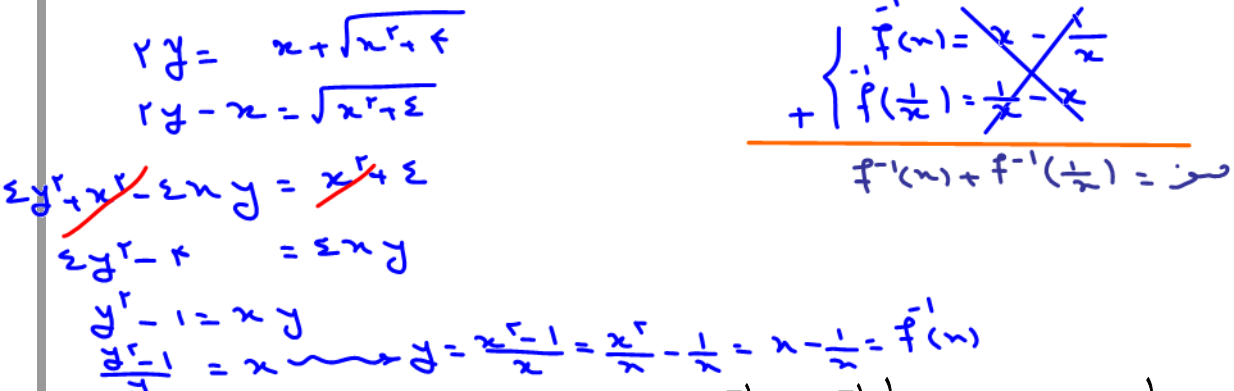
$-\sqrt[3]{x}=y=f^{-1}(x) \quad x\geq 0$

تمرین: وارون تابع $y=x^3-x+1$ از کدام نقطه عبور می‌کند؟ (تجربی ۱۴۰۱)

۱) $(\frac{5}{8},\frac{1}{2})$ ۲) $(1,2)$ ۳) $(-\frac{1}{2},-\frac{11}{8})$ ۴) $(-1,-2)$

f^{-1} ∈

$f(\frac{1}{2})=\frac{1}{8}-\frac{4}{8}+\frac{8}{8}=\frac{5}{8}$



تمرین: اگر $f(x)=\frac{1}{2}(x+\sqrt{x^2+4})$ باشد، حاصل $f^{-1}(x)+f^{-1}(\frac{1}{x})$ کدام است؟ (سراسری داخل ۹۵)

۱) $2x$ ۲) $\frac{2}{x}$ ۳) x^2-1 ۴) صفر

پاسخ: گزینهٔ «۴» ـ ابتدا باید $f^{-1}(x)$ را به دست آوریم، پس می‌توان نوشت:

$$y=\frac{1}{2}(x+\sqrt{x^2+4}) \xrightarrow{\times 2} 2y=x+\sqrt{x^2+4} \Rightarrow 2y-x=\sqrt{x^2+4} \xrightarrow{\text{توان‌دو}} 4y^2+x^2-4xy=x^2+4$$

$$\Rightarrow 4y=4y^2-4 \xrightarrow{\div 4} xy=y^2-1 \Rightarrow x=\frac{y^2-1}{y} \Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{x^2-1}{x}=x-\frac{1}{x}$$

همچنین $f^{-1}(\frac{1}{x})=\frac{1}{x}-\frac{1}{\frac{1}{x}}=\frac{1}{x}-x$ است، پس داریم:

$$f^{-1}(x)+f^{-1}(\frac{1}{x})=(x-\frac{1}{x})+(\frac{1}{x}-x)=0$$

Homework (1)

منبع:

ریاضی

۱ تابع f با ضابطهٔ $f(x) = x - \frac{۱}{۲x}$ بر دامنهٔ $(۰, +\infty)$ مفروض است. نمودار تابع $f^{-۱}$ نیمساز ناحیهٔ دوم را با کدام طول قطع می‌کند؟

۱) $-\frac{۳}{۲}$
۲) $-\frac{۳}{۴}$
۳) -۱
۴) $-\frac{۱}{۲}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۲ وارون تابع $y = x^۳ - x + ۱$ از کدام نقطه عبور می‌کند؟

۱) $(-۱, -۲)$
۲) $(\frac{۵}{۸}, \frac{۱}{۲})$
۳) $(۱, ۲)$
۴) $(-\frac{۱}{۲}, -\frac{۱۱}{۸})$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

۳ تابع f با ضابطهٔ $f(x) = x - \frac{۲}{x}$ در دامنهٔ $D_f = (-\infty, ۰)$ را در نظر بگیرید. نمودار تابع $f^{-۱}$ نیمساز ناحیهٔ چهارم را با کدام طول، قطع می‌کند؟

۱) $\frac{۳}{۴}$
۲) ۱
۳) $\frac{۳}{۲}$
۴) ۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

۴ توابع $f(x) = \log(۲x - ۵)$ و $g(x) = x + \sqrt{۲x - ۴}$ را در نظر بگیرید. اگر نمودار $y = g^{-۱}of^{-۱}(x)$ محور yها را در α قطع کند، مقدار α کدام است؟

۱) $۴ - \sqrt{۲}$
۲) $۴ - \sqrt{۳}$
۳) $۴ + \sqrt{۲}$
۴) $۴ + \sqrt{۳}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۲

۵ اگر $y = \frac{x+۲}{۴} - \frac{\sqrt{x+۱}}{۲}$ ضابطهٔ تابع وارون $y = ax + a\sqrt{x}$ باشد، مقدار a کدام است؟

۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۹

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

۶ اگر $f = \{(\frac{۱}{۹}, -۱), (\frac{۱}{۳}, ۱), (-\frac{۱}{۴}, ۳), (\frac{۱}{۴}, -۳)\}$ و $g(x) = -|x|\sqrt{x}$ ، $fog^{-۱}(a) = -۳$ باشد، مقدار a کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۹}$
۲) $\frac{۱}{۹}$
۳) $-\frac{۱}{۸}$
۴) $\frac{۱}{۸}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

۷ تابع با ضابطهٔ $y = \sqrt{(x+۱)^۲} - |۳x - ۶|$ در یک بازه نزولی است. ضابطهٔ وارون تابع در این بازه، کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۲}x - ۷, x \geq ۲$
۲) $-\frac{۱}{۲}x + \frac{۷}{۲}, x \leq ۳$
۳) $-۲x + ۱۴, x \leq ۳$
۴) $-۲x - \frac{۱۴}{۳}, x \geq ۲$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۱

۸ تابع $f(x) = \begin{cases} ۲ - ۳x & ; ۲x + ۳ \leq ۰ \\ ۲ + ۲mx - x^۲ & ; ۲x + ۳ > ۰ \end{cases}$ روی دامنه تعریف خود، وارون‌پذیر است. اگر $f^{-۱}$ وارون تابع f به ازای مقدار صحیح m باشد، مقدار $f^{-۱}(-۱۹)$ کدام است؟

۱) ۳
۲) ۲
۳) ۱
۴) صفر

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۹ تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{۱}{۲}x - \frac{۳}{۲} & ; ۲x - ۵ \geq ۰ \\ -۲x^۲ + ax - ۲۱ & ; ۲x - ۵ < ۰ \end{cases}$ روی دامنهٔ تعریف خود، وارون‌پذیر است. اگر $f^{-۱}$ وارون تابع f به ازای بزرگ‌ترین مقدار صحیح a باشد، مقدار $f^{-۱}(-۳)$ کدام است؟

۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۱

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

۱۰ وارون تابع $f(x)=\sqrt{x}\sqrt{mx-1}$ در دامنه محدود، خط $5y-10x=12$ را در نقطه‌ای به عرض $7/2$ قطع می‌کند. مقدار $f(\frac{4}{m})$ کدام است؟

۱) $2\sqrt{3}$ ۲) $4\sqrt{3}$

۳) $4\sqrt{15}$ ۴) $2\sqrt{15}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۲

۱۱ وارون تابع $f(x)=\sqrt{x-2\sqrt{mx-1}}$ در دامنهٔ محدود، خط $y=12-x$ را در نقطه‌ای به عرض ۱۰ قطع می‌کند. مقدار $f(m+4)$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{4}$

۳) ۲ ۴) ۱

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۲

۱۲ اگر $g(x)$ وارون تابع $f(x)=x+\sqrt{x}$ باشد، مقدار $g(6)+g(12)$، کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۱

۳) ۱۳ ۴) ۱۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

۱۳ قرینهٔ نمودار تابع $y=2+\sqrt{x-1}$ را نسبت به خط $y=x$ رسم کرده و سپس نمودار حاصل را ۲ واحد در جهت مثبت محور xها و ۳ واحد در جهت منفی محور yها انتقال می‌دهیم و آن را $y=g(x)$ می‌نامیم. مقدار $g(4)$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) -3

۳) -2 ۴) -4

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

۱۴ اگر $g(x)$ وارون تابع $x\geq 1$، $f(x)=1+x-2\sqrt{x}$ باشد، $(gog)(1)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۴

۳) ۹ ۴) صفر

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۱۵ تابع $f(x)=x^2\sqrt{x^2}$ در یک بازه نزولی است. ضابطهٔ وارون تابع در این بازه، کدام است؟

۱) $-\sqrt{x^3}\ ,\ x\leq 0$ ۲) $-\sqrt[3]{x}\ ,\ x\leq 0$

۳) $-\sqrt{x^3}\ ,\ x\geq 0$ ۴) $-\sqrt[3]{x}\ ,\ x\geq 0$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۱

۱۶ فرض کنید $g(x)$ وارون تابع $f(x) = x + ۲\sqrt{x}$ باشد. حاصل $g(۳) + g(۱۵)$، کدام است؟

۱) ۱۲
۲) ۱۱
۳) ۱۰
۴) ۸

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۱۷ به‌ازای کدام مقدار a، نمودار تابع وارون تابع $f(x) = x^۳ + ۶x^۲ + ax + ۱$ خط $۱۰y - x = -۱۰$ را در نقطه‌ای به عرض ۱ قطع می‌کند؟

۱) ۱۵
۲) ۱۲
۳) ۹
۴) ۵

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۳

۱۸ نمودار $f(x) = ۲ + ۲^{b-ax}$ نمودار تابع $g(x) = -x^۲ - ۳x + ۸$ را در نقطه‌ای به طول ۱ قطع می‌کند. اگر $f^{-۱}(۱۰) = -۱$ باشد، مقدار $۲b - a$ کدام است؟

۱) ۳
۲) ۲
۳) -۳
۴) -۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۲

منبع:

ریاضی

۱ گزینه ۴

نیمساز ناحیهٔ دوم : $y=-x \;;\; x<0$

نمودار تابع f^{-1} نیمساز ناحیهٔ دوم را قطع می‌کند، پس:

$$f^{-1}(x)=-x \Rightarrow f(-x)=x$$

$$\Rightarrow -x+\frac{1}{2x}=x \Rightarrow \frac{1}{2x}=2x \Rightarrow 4x^2=1 \Rightarrow x^2=\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow x=\pm\frac{1}{2} \xrightarrow{x<0} x=-\frac{1}{2}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۲ گزینه ۲

$$(a,b)\in f(x) \Rightarrow (b,a)\in f^{-1}(x)$$

بنابراین کافی است مؤلفه‌های هر نقطه را جابه‌جا کنیم و در تابع $y=x^3-x+1$ صدق دهیم.

گزینهٔ ۱ : $(-2)^3-(-2)+1\neq -1$ ×

گزینهٔ ۲ : $(\frac{1}{2})^3-(\frac{1}{2})+1=\frac{5}{8}$ ✓

گزینهٔ ۳ : $2^3-2+1\neq 1$ ×

گزینهٔ ۴ : $(-\frac{11}{8})^3-(-\frac{11}{8})+1\neq -\frac{1}{2}$ ×

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

۳ گزینه ۲

نیمساز ناحیهٔ چهارم : $y = -x \;;\; x > ۰$

نمودار $f^{-۱}$ نیمساز ناحیهٔ چهارم را قطع می‌کند، بنابراین:

$$f^{-۱}(x) = -x \Rightarrow f(-x) = x \Rightarrow -x + \frac{۲}{x} = x \Rightarrow ۲x = \frac{۲}{x}$$

$$\Rightarrow x^{۲} = ۱ \Rightarrow x = \pm ۱ \xrightarrow{x>۰} x = ۱$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

۴ گزینه ۲

$$y = (g^{-۱} o f^{-۱})(x) = g^{-۱}(f^{-۱}(x))$$

$$\xrightarrow[A(۰,\alpha)]{\text{محل تلاقی با محور } y \text{ ها}} g^{-۱}(f^{-۱}(۰)) = \alpha$$

$$f^{-۱}(۰) = x \Rightarrow f(x) = ۰ \Rightarrow \log(۲x - ۵) = ۰$$

$$\Rightarrow ۲x - ۵ = ۱۰^{۰} \Rightarrow ۲x = ۶ \Rightarrow x = ۳ \Rightarrow f^{-۱}(۰) = ۳$$

$$g^{-۱}(۳) = \alpha \Rightarrow g(\alpha) = ۳ \Rightarrow \alpha + \sqrt{۲\alpha - ۴} = ۳ \xrightarrow[\alpha \le ۳]{۳-\alpha \ge ۰} ۲\alpha - ۴ = ۹ + \alpha^{۲} - ۶\alpha$$

$$\Rightarrow \alpha^{۲} - ۸\alpha + ۱۳ = ۰ \Rightarrow \alpha = \frac{۴ \pm \sqrt{۱۶ - ۱۳}}{۱} \Rightarrow \alpha = ۴ \pm \sqrt{۳} \Rightarrow \alpha = ۴ - \sqrt{۳}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۲

۵ گزینه ۳

چون دو تابع وارون یکدیگرند، بنابراین با یک نقطه می‌توانیم a را حساب کنیم.

$$y = \frac{x + ۲}{۴} - \frac{\sqrt{x + ۱}}{۲} \xrightarrow{x=۳} y = \frac{۵}{۴} - ۱ = \frac{۱}{۴} \Rightarrow (۳, \frac{۱}{۴})$$

بنابراین نقطهٔ $(\frac{۱}{۴}, ۳)$ روی تابع $y = ax + a\sqrt{x}$ قرار دارد.

$$۳ = \frac{a}{۴} + \frac{a}{۲} \Rightarrow a = ۴$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

۶ گزینه ۳

$$(fog^{-1})(a) = -3 \Rightarrow f(g^{-1}(a)) = -3 \Rightarrow g^{-1}(a) = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow a = g(\frac{1}{4}) = -\frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = -\frac{1}{8}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

۷ گزینه ۲

$$y = |x+1| - |3x-6|$$

$$\xrightarrow[\text{بازه‌بندی}]{\text{حذف قدرمطلق}} y = \begin{cases} 2x-7 & ; x < -1 \\ 4x-5 & ; -1 \le x < 2 \\ -2x+7 & ; x \ge 2 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{نزولی}} y = -2x+7\,,\ x \ge 2$$

وارون تابع را می‌یابیم:

$$y = -2x+7 \Rightarrow 2x = -y+7 \Rightarrow x = \frac{-y}{2} + \frac{7}{2}$$

$$\Rightarrow y^{-1} = \frac{-1}{2}x + \frac{7}{2}\,,\ x \le 3$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۱

۸ گزینه ۱

f برد ضابطه اول : $R_1 = [\frac{13}{2}, +\infty)$

f ضابطه دوم : $y_2 = -x^2 + 2mx + 2 \Rightarrow x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{-2m}{-2} = m$

$\Rightarrow x_S = m$ رأس سهمی

برای اینکه $f(x)$ وارون‌پذیر باشد، نباید رأس سهمی در دامنه تعریف ضابطه دوم باشد، یعنی:

$$x_S = m \le -\frac{3}{2}\,,\ m^2 + 2 < \frac{13}{2} \Rightarrow m = -2 (m \in \mathbb{Z})$$

$$\Rightarrow y_2 = -x^2 - 4x + 2$$

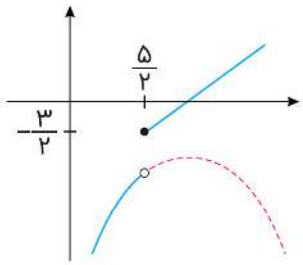
$$f^{-1}(-19) = ? \Rightarrow -x^2 - 4x + 2 = -19 \Rightarrow x^2 + 4x - 21 = 0 \Rightarrow x = 3\,,\ x = -7$$

چون $x > -\frac{3}{2}$ مورد قبول است پس $x = 3$ پاسخ سؤال است.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۹ گزینه ۱

توابع یک‌به‌یک، وارون‌پذیرند. طول رأس تابع درجهٔ دوم باید از $x = \frac{۵}{۲}$ کمتر نباشد تا یک‌به‌یک شود.



$$x_{\text{رأس}} = -\frac{b'}{۲a'} \geq \frac{۵}{۲} \Rightarrow \frac{-a}{-۴} = \frac{a}{۴} \geq \frac{۵}{۲} \Rightarrow a \geq ۱۰$$

مقدار تابع درجهٔ دوم را در $x = \frac{۵}{۲}$ محاسبه می‌کنیم که عرض رأس سهمی و بیشترین مقدار سهمی است:

$$-۲(\frac{۵}{۲})^۲ + \frac{۵}{۲}a - ۲۱ < \frac{۱}{۲}(\frac{۵}{۲}) - \frac{۳}{۲} \Rightarrow \frac{۵}{۲}a < ۳۲ + \frac{۵}{۴} \Rightarrow a < ۱۳/۳$$

پس بزرگ‌ترین مقدار صحیح a، ۱۳ است.

$$f^{-۱}(-۳) = \alpha \Rightarrow f(\alpha) = -۳$$

باتوجه‌به شکل، $f(\alpha) = -۳$ در ضابطهٔ پایینی اتفاق می‌افتد، بنابراین:

$$-۲\alpha^۲ + ۱۳\alpha - ۲۱ = -۳ \Rightarrow ۲\alpha^۲ - ۱۳\alpha + ۱۸ = ۰ \Rightarrow \alpha = ۴/۵ \ , \ \alpha = ۲$$

α باید از $۲/۵ = \frac{۵}{۲}$ کمتر باشد، پس $\alpha = ۲$ مورد قبول است.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

۱۰ گزینه ۲

$$۵y - ۱۰x = ۱۲ \xrightarrow{y=۷/۲} ۵(۷/۲) - ۱۰x = ۱۲$$
$$\Rightarrow x = ۲/۴ \Rightarrow A'(۲/۴, ۷/۲) \in f^{-۱}(x) \Rightarrow (۷/۲, ۲/۴) \in f(x)$$
$$\Rightarrow f(۷/۲) = ۲/۴ \Rightarrow \sqrt{۷/۲}\sqrt{m(۷/۲) - ۱} = ۲/۴$$
$$\xrightarrow{\text{به توان دو}} (۷/۲)(۷/۲m - ۱) = (۲/۴)(۲/۴)$$

$$\Rightarrow ۷/۲m - ۱ = ۰/۸ \Rightarrow m = \frac{۱}{۴}$$
$$f(\frac{۴}{m}) = f(۱۶) = \sqrt{۱۶}\sqrt{(۱۶)(\frac{۱}{۴}) - ۱} = ۴\sqrt{۳}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۲

۱۱ گزینه ۴

نقطه به عرض ۱۰ روی خط $y = ۱۲ - x$ دارای طول زیر است:

$$۱۰ = ۱۲ - x \Rightarrow x = ۲ \Rightarrow A(۲, ۱۰)$$

اگر A روی تابع وارون باشد، پس $A'(۱۰, ۲)$ روی f است، یعنی:

$$۲ = \sqrt{۱۰ - ۲\sqrt{۱۰m - ۱}} \Rightarrow ۴ = ۱۰ - ۲\sqrt{۱۰m - ۱} \Rightarrow \sqrt{۱۰m - ۱} = ۳$$
$$\Rightarrow ۱۰m - ۱ = ۹ \Rightarrow m = ۱$$

بنابراین:

$$f(m + ۴) = f(۵) = \sqrt{۵ - ۲\sqrt{۵ - ۱}} = \sqrt{۵ - ۴} = ۱$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۲

۱۲ گزینه ۳

$g(x)$ وارون تابع $f(x)$ است، بنابراین:

$$g(x) = f^{-۱}(x)$$
$$g(۶) = f^{-۱}(۶) = a \Rightarrow f(a) = ۶ \Rightarrow a + \sqrt{a} = ۶ \Rightarrow a + \sqrt{a} - ۶ = ۰$$
$$\Rightarrow (\sqrt{a} - ۲)(\sqrt{a} + ۳) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{a} = ۲ \Rightarrow a = ۴ \\ \sqrt{a} = -۳ \text{ غ ق ق} \end{cases} \Rightarrow g(۶) = ۴$$
$$g(۱۲) = f^{-۱}(۱۲) = b \Rightarrow f(b) = ۱۲ \Rightarrow b + \sqrt{b} = ۱۲ \Rightarrow b + \sqrt{b} - ۱۲ = ۰$$
$$\Rightarrow (\sqrt{b} + ۴)(\sqrt{b} - ۳) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{b} = -۴ \text{ غ ق ق} \\ \sqrt{b} = ۳ \Rightarrow b = ۹ \end{cases} \Rightarrow g(۱۲) = ۹$$

بنابراین داریم:

$$g(۶) + g(۱۲) = ۴ + ۹ = ۱۳$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

۱۳ گزینه ۳

منظور سوال از قرینهٔ نمودار تابع نسبت به خط $y = x$ وارون تابع است:

$$y = ۲ + \sqrt{x - ۱} \Rightarrow y - ۲ = \sqrt{x - ۱} \Rightarrow (y - ۲)^۲ = x - ۱ \Rightarrow x = (y - ۲)^۲ + ۱$$
$$f^{-۱}(x) = (x - ۲)^۲ + ۱ \xrightarrow{\text{۲ واحد به راست}} (x - ۴)^۲ + ۱ \xrightarrow{\text{۳ واحد پایین}} (x - ۴)^۲ + ۱ - ۳ = (x - ۴)^۲ - ۲$$
$$g(۴) = -۲$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

۱۴ گزینه ۳

$$f(x)=y=(\sqrt{x}-۱)^۲ \Rightarrow |\sqrt{x}-۱|=\sqrt{y} \xrightarrow{x\geq ۱} \sqrt{x}-۱=\sqrt{y}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x}=\sqrt{y}+۱ \Rightarrow x=(\sqrt{y}+۱)^۲$$

$$\Rightarrow g(x)=f^{-۱}(x)=(\sqrt{x}+۱)^۲$$

$$(gog)(۱)=g(g(۱))=g(۴)=۹$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۱۵ گزینه ۴

$$x^۲\sqrt{x^۲}=x^۲|x|=\begin{cases} x^۳ & ;x\geq ۰ \quad \text{اکیداً صعودی} \\ -x^۳ & ;x<۰ \quad \text{اکیداً نزولی} \end{cases}$$

پس باید وارون تابع ضابطهٔ پایینی را حساب کنیم:

$$y=-x^۳ \Rightarrow x^۳=-y \Rightarrow x=\sqrt[۳]{-y} \Rightarrow f^{-۱}(x)=-\sqrt[۳]{x}$$

$$D_f=R_{f^{-۱}},\ D_{f^{-۱}}=R_f$$

$$R_f=[۰,+\infty]=D_{f^{-۱}} \Rightarrow D_{f^{-۱}}: x\geq ۰$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۱

۱۶ گزینه ۳

$g(x)$ وارون تابع $f(x)$ است، بنابراین:

$$g(x)=f^{-۱}(x)$$

$$g(۳)=f^{-۱}(۳)=a \Rightarrow f(a)=۳ \Rightarrow a+۲\sqrt{a}=۳ \Rightarrow a+۲\sqrt{a}-۳=۰$$

$$\Rightarrow (\sqrt{a}-۱)(\sqrt{a}+۳)=۰ \begin{cases} \sqrt{a}=۱ \Rightarrow a=۱ \\ \sqrt{a}=-۳ \quad \text{غ ق ق} \end{cases} \Rightarrow g(۳)=۱$$

$$g(۱۵)=f^{-۱}(۱۵)=b \Rightarrow f(b)=۱۵ \Rightarrow b+۲\sqrt{b}=۱۵ \Rightarrow b+۲\sqrt{b}-۱۵=۰$$

$$\Rightarrow (\sqrt{b}-۳)(\sqrt{b}+۵)=۰ \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{b}=۳ \Rightarrow b=۹ \\ \sqrt{b}=-۵ \quad \text{غ ق ق} \end{cases} \Rightarrow g(۱۵)=۹$$

بنابراین داریم:

$$g(۳)+g(۱۵)=۱+۹=۱۰$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۱۷ گزینه ۲

ابتدا با عرض داده شده نقطه را کامل می‌کنیم.

$$y = ۱ \Rightarrow ۱۰y - x = -۱۰ \Rightarrow ۱۰ - x = -۱۰ \Rightarrow x = ۲۰$$
$$\Rightarrow A'(۲۰, ۱)$$

حال نقطه متناظر $A(۱, ۲۰)$ باید روی تابع f باشد پس:

$$y = x^۳ + ۶x^۲ + ax + ۱ \Rightarrow ۲۰ = ۱ + ۶ + a + ۱ \Rightarrow a = ۱۲$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۳

۱۸ گزینه ۱

$$\left.\begin{array}{l} x = ۱ \Rightarrow -۱ - ۳ + ۸ = ۲ + ۲^{b-a} \Rightarrow ۲^{b-a} = ۲ \Rightarrow b - a = ۱ \\ f(-۱) = ۱۰ \Rightarrow ۲ + ۲^{b+a} = ۱۰ \Rightarrow b + a = ۳ \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} b = ۲ \\ a = ۱ \end{array} \Rightarrow ۲b - a = ۳$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۲

Homework (2)

حسابان

۱ باتوجه‌به نمودار تابع $f(x) = x^۲ - ۴x + ۳$، تابع $f(x)$ در کدام بازه یک‌به‌یک است؟

۱) $[۰ , +\infty)$ ۲) $[۲ , +\infty)$

۳) $(-\infty , ۳]$ ۴) $[۱ , ۳]$

۲ اگر $f(x) = x + \sqrt{x+۱}$، حاصل $f^{-۱}(۵) + f^{-۱}(۱۱)$ کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۱۱

۳) ۵ ۴) ۱۲

۳ اگر $f(x) = \begin{cases} ۴x - ۱ & ; x \geq ۱ \\ x + k & ; x < ۱ \end{cases}$ یک تابع یک‌به‌یک باشد، حدود k کدام است؟

۱) $k \leq ۴$ ۲) $k \geq ۴$

۳) $k \leq ۲$ ۴) $k \geq ۲$

۴ اگر رابطهٔ $f = \{(۳,۲), (a,۵), (۳, a^۲ - a), (b,۲), (-۱,۴)\}$ تابع یک به یک باشد، دوتایی (a,b) کدام است؟

۱) $(-۱,۱)$ ۲) $(-۱,۳)$

۳) $(۲,۱)$ ۴) $(۲,۳)$

۵ اگر $f(x) = ۳^{۱-x} + ۲$ و $f^{-۱}(x) = \log_k \frac{k}{x-m}$ باشد، مقدار km چقدر است؟

۱) ۶ ۲) ۱۲

۳) ۸ ۴) ۵

۶ اگر $f(x) = ۱ - \sqrt{x}$ باشد، در کدام بازه نمودار دو تابع $(f^{-۱}of)(x)$ و $(fof^{-۱})(x)$ بر هم منطبق‌اند؟

۱) $(-\infty , ۱]$ ۲) $[۰ , +\infty)$

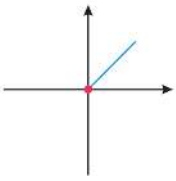
۳) $[۰ , ۱]$ ۴) $[۱ , +\infty)$

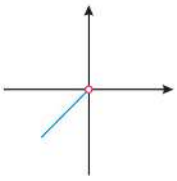
۷ اگر $f(x) = x^۲ - ۴x$ باشد دامنهٔ f را طوری محدود کنید که تابع یک به یک شود و سپس ضابطهٔ معکوس آن را به دست آورید.

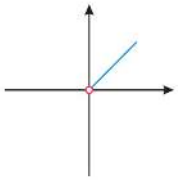
۸ درصورتی‌که $g(x) = ۱ - \sqrt{۲x}$ باشد، ضابطهٔ $۲g^{-۱}(۲x)$ کدام است؟

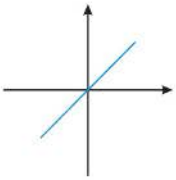
۱) $(۲x+۱)^۲$
۲) $(۴-۲x)^۲$
۳) $(۲x-۱)^۲$
۴) $(۴+۲x)^۲$

۹ اگر $f(x) = \log x$ باشد، نمودار تابع $(f^{-۱}of)(x)$ کدام است؟

۱)


۲)


۳)


۴)


۱۰ اگر $f(x) = x + ۲$ و $g(x) = x - ۴$ باشد، ضابطهٔ وارون تابع $f^{-۱}(x) \times g^{-۱}(x)$ با شرط $x \leq -۱$ کدام است؟

۱) $-۱ + \sqrt{x+۹}$
۲) $-۱ - \sqrt{x+۹}$
۳) $۱ + \sqrt{x+۹}$
۴) $۱ - \sqrt{x+۹}$

۱۱ تابع $f(x) = x^۲ + x + ۱$، $x \geq ۱$ وارون خود را با کدام طول قطع می‌کند؟

۱) ۱
۲) $\frac{۳}{۲}$
۳) ۲
۴) متقاطع نیستند.

۱۲ ضابطه وارون تابع $f(x) = \frac{۴x-۱}{x+۲}$ کدام است؟

۱) $\frac{۲x+۱}{x-۴}$
۲) $\frac{۲x+۳}{۴-x}$
۳) $\frac{x+۱}{۴-x}$
۴) $\frac{۲x+۱}{۴-x}$

۱۳ اگر $f(x) = x\sqrt{x}$ و $f^{-۱}(x)f(x) = \sqrt[۶]{x^a}$، مقدار a کدام است؟

۱) ۱۱
۲) ۱۳
۳) ۱۲
۴) ۱۴

۱۴ اگر $f(x) = ۲x^۳ + ۱$، حاصل $f^{-۱}(۲x+۱)$ کدام است؟

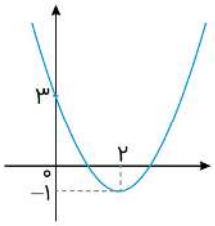
۱) $\sqrt{x}$
۲) $\sqrt[۳]{x}$
۳) $\sqrt[۳]{۲x}$
۴) $\sqrt{۲x}$

حسابان

۱ گزینه ۲

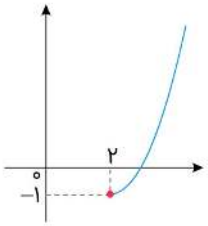
$$f(x) = x^۲ - ۴x + ۴ - ۱ = (x-۲)^۲ - ۱$$

نمودار $f(x)$ مطابق شکل زیر است:



تابع در بازه‌ای یک‌به‌یک است که اگر خطوطی موازی محور xها رسم نمایید، منحنی تابع را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

گزینهٔ "۲": $x \in [۲ , +\infty)$



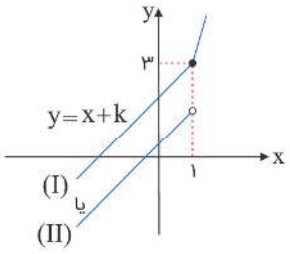
۲ گزینه ۲

$$f^{-۱}(۵) : x + \sqrt{x+۱} = ۵ \Rightarrow x = ۳ \Rightarrow f^{-۱}(۵) = ۳$$

$$f^{-۱}(۱۱) : x + \sqrt{x+۱} = ۱۱ \Rightarrow x = ۸ \Rightarrow f^{-۱}(۱۱) = ۸$$

$$f^{-۱}(۵) + f^{-۱}(۱۱) = ۳ + ۸ = ۱۱$$

۳ گزینه ۳



$$x = ۱ : y = x + k \leq ۳ \Rightarrow ۱ + k \leq ۳ \Rightarrow k \leq ۲$$

۴ گزینه ۴

یک تابع به صورت مجموعه ای از زوج مرتب‌ها نمایش داده شده است، برای این که تابع یک به یک شود، باید هیچ دو زوج مرتب متمایزی مؤلفهٔ دوم برابر نداشته باشند. اگر مؤلفه‌های دوم دو زوج مرتب با هم برابر بود باید مؤلفه های اول آن‌ها هم برابر باشد. هم چنین شرط تابع‌بودن در حل این گونه سؤال ها فراموش نشود. این که زوج مرتب‌ها نباید مؤلفهٔ اول تکراری داشته باشند و اگر تکراری بود باید مؤلفه های دوم هم برابر شود.

در رابطهٔ داده شده دو زوج مرتب $(۳, ۲)$ و $(۳, a^۲ - a)$ مشاهده می شود. برای این که رابطه در وهلهٔ اول یک تابع باشد، باید مؤلفه های دوم با هم برابر باشند:

$$a^۲ - a = ۲ \Rightarrow a^۲ - a - ۲ = ۰ \Rightarrow (a - ۲)(a + ۱) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} a = ۲ \\ a = -۱ \end{cases}$$

حالا باید بررسی کنیم به ازای کدام یک از این مقادیر تابع یک به یک می شود:

$$a = -۱ \Rightarrow (-۱, ۵) \in f \ , \ (-۱, ۴) \in f \Rightarrow \text{تابع یک به یک نیست}$$

بنابراین فقط $a = ۲$ قابل قبول است. حالا مقدار b را به دست می آوریم:

$$(۳, ۲) \in f \ , \ (b, ۲) \in f \xrightarrow{\text{تابع f یک به یک است}} b = ۳$$

پس دوتایی (a, b) به صورت $(۲, ۳)$ درمی آید.

۵ گزینه ۱

$$y = f(x) = ۳^{۱-x} + ۲ \Rightarrow y - ۲ = ۳^{۱-x} \Rightarrow ۱ - x = \log_۳(y - ۲)$$
$$\Rightarrow x = ۱ - \log_۳(y - ۲) = \log_۳ ۳ - \log_۳(y - ۲)$$

$$= \log_۳ \frac{۳}{y - ۲} \Rightarrow f^{-۱}(x) = \log_۳ \frac{۳}{x - ۲} \Rightarrow \begin{cases} k = ۳ \\ m = ۲ \end{cases} \Rightarrow km = ۶$$

۶ گزینه ۳

مفهوم سؤال اشتراک دامنه و برد تابع $f(x)$ است.

$$D_f = [0, +\infty) \ , \ R_f = (-\infty, 1]$$

$$D_f \cap R_f = [0 \ , \ 1]$$

۷

$$x \geq 2 \ \text{یا} \ x \leq 2$$

$$y = (x-2)^2 - 4 \Rightarrow (x-2)^2 = y + 4$$
$$\Rightarrow x - 2 = \pm\sqrt{y+4} \Rightarrow x = 2 \pm \sqrt{y+4} \Rightarrow f^{-1}(x) = 2 \pm \sqrt{x+4}$$

۸ گزینه ۳

$$y = 1 - \sqrt{2x} \Rightarrow \sqrt{2x} = 1 - y \Rightarrow 2x = 1 - 2y + y^2 \Rightarrow g^{-1}(x) = \frac{1 - 2x + x^2}{2}$$

$$2g^{-1}(2x) = 1 - 4x + 4x^2 = (2x-1)^2$$

۹ گزینه ۳

برای $x \in D_f$ همواره $(f^{-1}of)(x) = x$ است.

$$f(x) = \log x \Rightarrow D_f = (0 \ , \ +\infty)$$

۱۰ گزینه ۲

$$f(x) = x + 2 \Rightarrow f^{-1}(x) = x - 2$$
$$g(x) = x - 4 \Rightarrow g^{-1}(x) = x + 4$$
$$h(x) = f^{-1}(x) \times g^{-1}(x) = (x-2)(x+4) = x^2 + 2x - 8$$
$$y = h(x) = (x+1)^2 - 9 \Rightarrow (x+1)^2 = y + 9$$
$$\Rightarrow |x+1| = \sqrt{y+9} \xrightarrow{x \leq -1} x + 1 = -\sqrt{y+9}$$
$$\Rightarrow x = -1 - \sqrt{y+9} \Rightarrow h^{-1}(x) = -1 - \sqrt{x+9}$$

۱۱ گزینه ۴

$$f(x) = x \Rightarrow x^2 + x + 1 = x \Rightarrow x^2 = -1$$

(فاقد ریشه حقیقی)

بنابراین تابع f و f^{-1} متقاطع نیستند.

۱۲ گزینه ۴

$$y = \frac{۴x - ۱}{x + ۲} \Rightarrow yx + ۲y = ۴x - ۱ \Rightarrow yx - ۴x = -۱ - ۲y$$

$$\Rightarrow x(y - ۴) = -۱ - ۲y \Rightarrow x = \frac{۲y + ۱}{۴ - y} \Rightarrow f^{-۱}(x) = \frac{۲x + ۱}{۴ - x}$$

۱۳ گزینه ۲

$$y = x\sqrt{x} \Rightarrow y^{۲} = x^{۳} \Rightarrow x = \sqrt[۳]{y^{۲}} \Rightarrow f^{-۱}(x) = \sqrt[۳]{x^{۲}}$$

$$f(x)f^{-۱}(x) = (x\sqrt{x})(\sqrt[۳]{x^{۲}}) = x^{\frac{۳}{۲}}x^{\frac{۲}{۳}} = x^{\frac{۱۳}{۶}} = \sqrt[۶]{x^{۱۳}}$$

مقدار a برابر ۱۳ است.

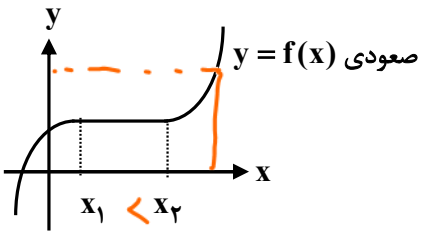
۱۴ گزینه ۲

$$f(x) = y = ۲x^{۳} + ۱ \Rightarrow x^{۳} = \frac{y - ۱}{۲} \Rightarrow x = \sqrt[۳]{\frac{y - ۱}{۲}} \Rightarrow f^{-۱}(x) = \sqrt[۳]{\frac{x - ۱}{۲}}$$

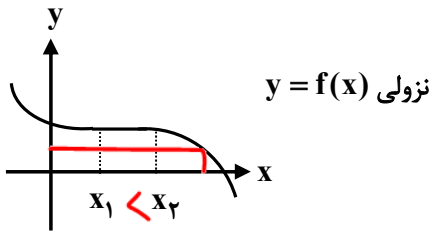
$$\Rightarrow f^{-۱}(۲x + ۱) = \sqrt[۳]{\frac{۲x + ۱ - ۱}{۲}} \Rightarrow f^{-۱}(۲x + ۱) = \sqrt[۳]{x}$$

توابع صعودی و نزولی

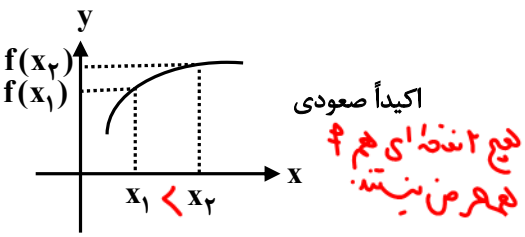
اگر با افزایش x ، مقادیر y افزایش یافته و یا تغییر نکند، تابع صعودی و اگر با افزایش x مقادیر y کاهش یافته و یا تغییر نکند، تابع نزولی است. توابع صعودی یا نزولی را (یکنوا) نیز می‌گویند.



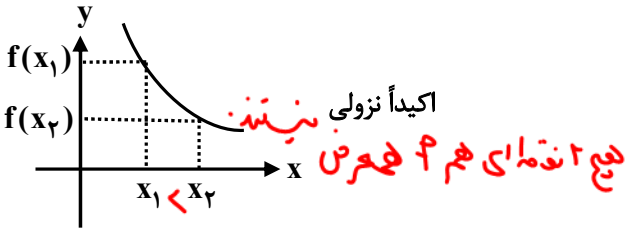
$$x_1, x_2 \in D_f : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$



$$x_1, x_2 \in D_f : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$



$$x_1, x_2 \in D_f : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

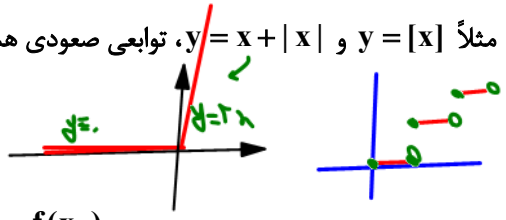


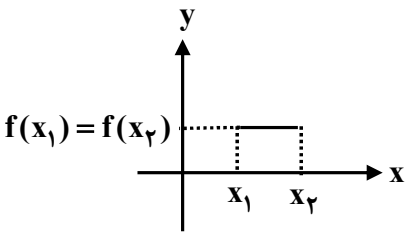
$$x_1, x_2 \in D_f : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

۱) تابعی که اکیداً صعودی یا نزولی باشد، اکیداً یکنوا نام دارد.

۲) توابع ثابت هم صعودی و هم نزولی‌اند ولی اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی نیستند.

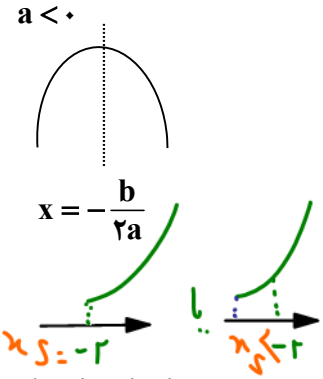
مثلاً $y = [x]$ و $y = x + |x|$، توابعی صعودی هستند.





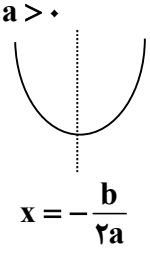
$$x_1, x_2 \in D_f : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$$

۳) توابع درجه دوم $y = ax^2 + bx + c$ در کل روی R نه صعودی است و نه نزولی، اما از راس سهمی به قبل و یا از راس سهمی به بعد اکیداً یکنوا (اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی) هستند.



صعودی اکید: $(-\infty, -\frac{b}{2a}]$

نزولی اکید: $[-\frac{b}{2a}, +\infty)$



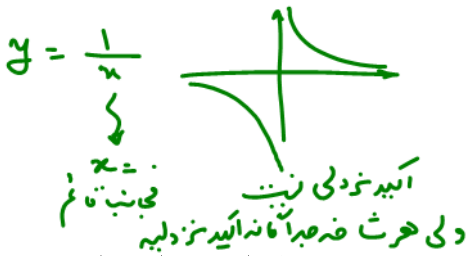
نزولی اکید: $(-\infty, -\frac{b}{2a}]$

صعودی اکید: $[-\frac{b}{2a}, +\infty)$

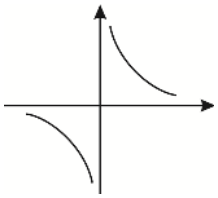
تمرین: تابع $f(x) = 3x^2 + kx + 3k^2$ در بازهٔ $[-2, +\infty)$ صعودی است. حدود k کدام است؟

$x_s = -\frac{b}{2a} = -\frac{k}{6} \leq -2$ ، $-k \leq -12$ ، $k \geq 12$

۱) $k \geq -۱۲$ ۲) $k \leq -۱۲$ ۳) $k \geq ۱۲$ ۴) $k \leq ۱۲$



۴) اگر تابع در قسمت‌هایی از دامنه صعودی و در قسمت‌های دیگر نزولی باشد می‌گوییم نه صعودی و نه نزولی است. به این توابع غیریکنوا گفته می‌شود.



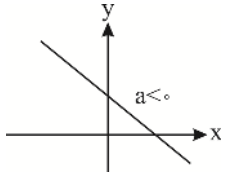
۵) ممکن است یک تابع در دامنه‌اش نه صعودی و نه نزولی باشد ولی در بازه‌هایی از دامنه‌اش صعودی و یا نزولی باشد. مثلاً $y = \frac{۱}{x}$ در فاصلهٔ $(۰,+\infty)$ و یا در فاصلهٔ $(-\infty,۰)$ اکیداً نزولی است ولی روی دامنه‌اش نه صعودی و نه نزولی است.

۶) توابع $y = a^x$ و $y = \log_a x$ به ازای $a > ۱$ اکیداً صعودی هستند.

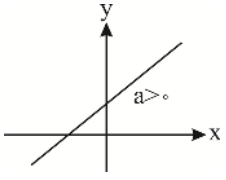
۷) توابع $y = a^x$ و $y = \log_a x$ به ازای $۰ < a < ۱$ اکیداً نزولی هستند.

۸) تابع خطی $f(x) = ax + b$ با شرط $a \neq ۰$ اکیداً یکنوا است و اگر $a = ۰$ باشد به صورت یک خط افقی درمی‌آید که هم صعودی و هم نزولی است اما اکیداً صعودی و یا اکیداً نزولی نیست.

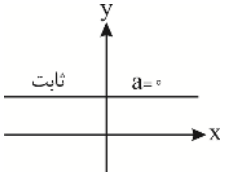
در خصوص دو مورد قبلی در بخش توابع نمایی و لگاریتمی صحبت کرده‌ایم.



اکیداً نزولی



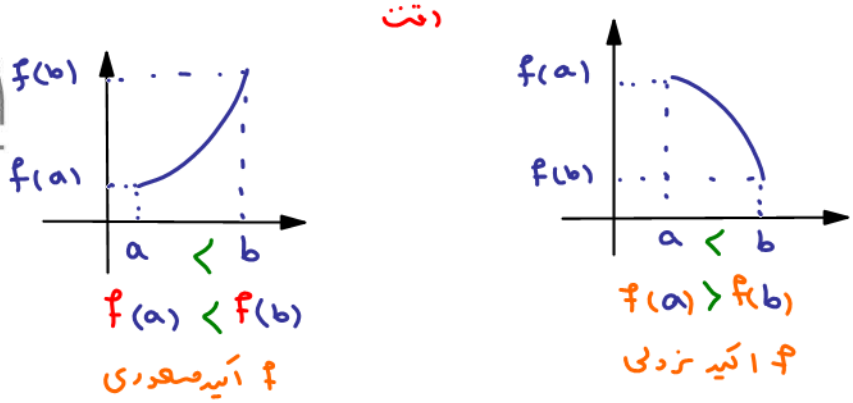
اکیداً صعودی



هم صعودی، هم نزولی

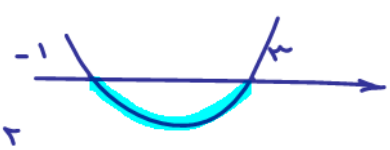
تمرین: اگر $f = \{(-۳,۴)(۰,-۲m+۱)(-۱,m)\}$ نزولی باشد، حدود m کدام است؟

۱) $(-\infty,۴)$ ۲) $(\frac{۱}{۳},۴)$ ۳) $[\frac{۱}{۳},۴]$ ۴) $[\frac{۱}{۳},+\infty)$



تمرین: تابع با ضابطهٔ $f(x)=x^2-2x-3$ با دامنهٔ $\{x:|x-1|<2\}$، همواره چگونه است؟ (ریاضی ۹۱)

۱) منفی ۲) مثبت ۳) صعودی ۴) نزولی



$-2<x-1<2$
$-1<x<3$

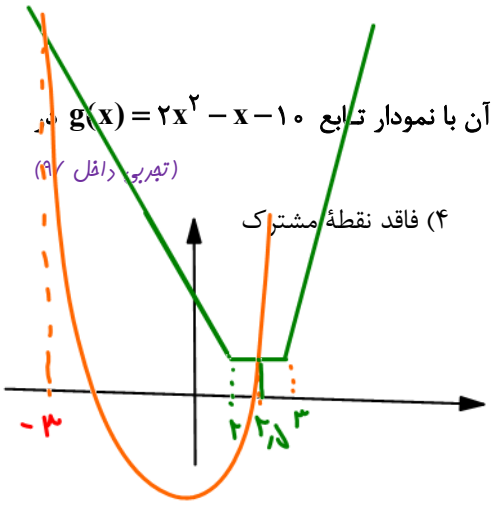
تمرین: در بازه‌ای که تابع با ضابطهٔ $f(x)=|x-2|+|x-3|$ اکیداً نزولی است، نمودار آن با نمودار تابع $g(x)=2x^2-x-10$ در چند نقطه مشترک هستند؟ (تجربی داخل ۹۷)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) فاقد نقطهٔ مشترک

$-x+2-x+3$
$x<2$
$-2x+5$

$\begin{cases} y=-2x+5 \\ y=2x^2-x-10 \end{cases}$

$2x^2-x-10=-2x+5$
$2x^2+x-15=0 \rightarrow \begin{cases} x_1=\frac{5}{2}=2.5 \\ x_2=\frac{-6}{2}=-3<2 \end{cases}$
$x^2+x-30=0$
$(x+6)(x-5)=0$
$x=-6 \quad x=5$
$x=-3$



اگر $x_1,x_2\in D_f: x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$ یعنی f تابعی است اکیداً صعودی و اگر $x_1,x_2\in D_f: x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$ یعنی f تابعی است اکیداً نزولی پس اگر مثلاً داشته باشیم $f(x^2)>f(x)$ و f تابعی اکیداً صعودی باشد نتیجه می‌گیریم که $x^2>x$ است و داریم $x^2>x\Rightarrow x^2-x>0\Rightarrow x<0$ یا $x>1$ و اگر مثلا داشته باشیم $f(x^2)>f(x)$ و f تابعی اکیداً نزولی باشد نتیجه می‌گیریم که $x^2<x$ است و داریم:

$x^2<x\Rightarrow x^2-x<0\Rightarrow 0<x<1$

$x(x-1)<0$

در واقع در تابع اکیداً نزولی با حذف fها، جهت نامساوی عوض می‌شود و در تابع اکیداً صعودی با حذف fها جهت نامساوی عوض نمی‌شود.

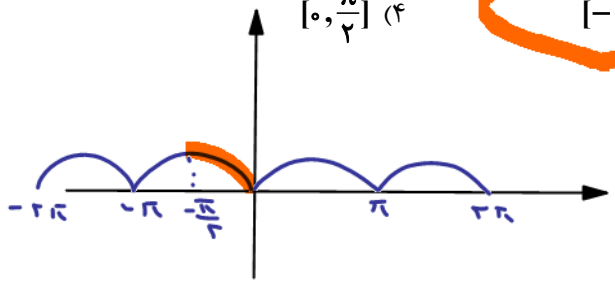
تمرین: اگر f تابعی نزولی اکید با دامنه‌ی R باشد، دامنه‌ی تعریف $y=\sqrt{f(|x-2|)-f(|2x-1|)}$ کدام است؟

۱) $[1,+\infty)$ ۲) R ۳) $[-1,1]$ ۴) $(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$

$f(|x-2|)\geq f(|2x-1|)$
$|x-2|\leq|2x-1| \rightarrow$
$x^2-4x+4\leq 4x^2-4x+1$
$0\leq 3x^2-3=3(x^2-1)$
$x^2-1\geq 0$
$x^2\geq 1$
$|x|\geq 1$

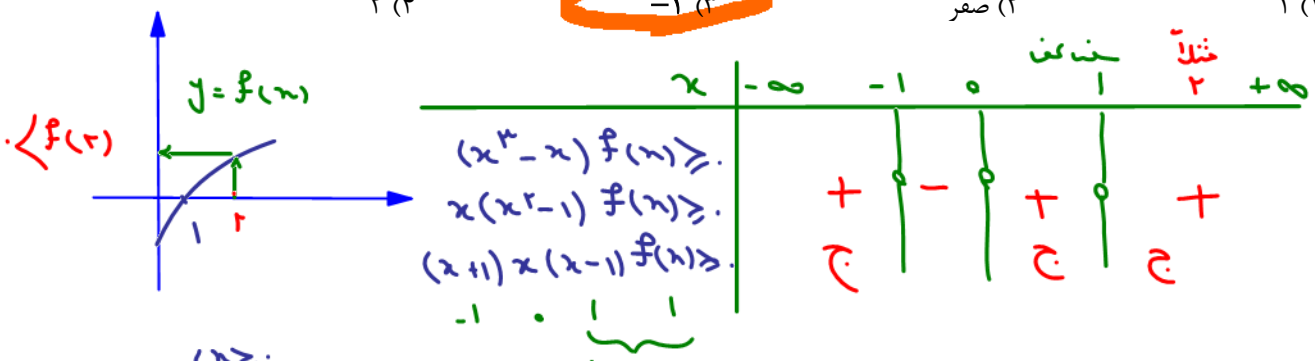
تمرین: تابع $f(x)=|\sin x|$ مفروض است. در کدام‌یک از بازه‌های زیر، برای هر x_1 و x_2 عضو این بازه، رابطهٔ $x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$ برقرار است؟

۱) $(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})$ ۲) $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ ۳) $[-\frac{\pi}{2},0]$ ۴) $[0,\frac{\pi}{2}]$



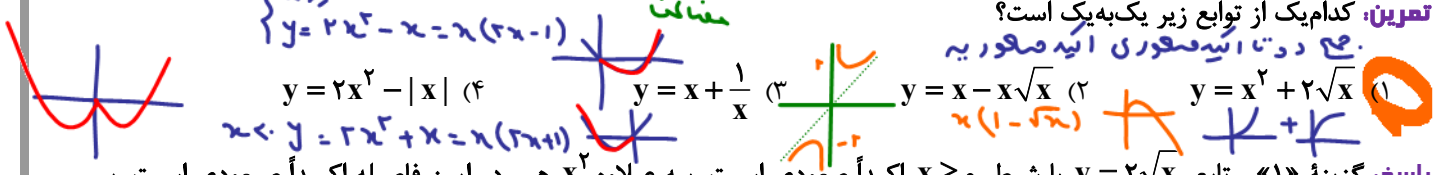
تمرین: اگر تابع f اکیداً صعودی و $f(1)=0$ باشد، آن‌گاه دامنهٔ $\sqrt{(x^3-x)f(x)}$ برابر با $\mathbb{R}-(a,b)$ است. حاصل $a+b$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) صفر ۳) -1 ۴) ۲



تمرین: کدام‌یک از توابع زیر یک‌به‌یک است؟

۱) $y=x^2+2\sqrt{x}$ ۲) $y=x-x\sqrt{x}$ ۳) $y=x+\frac{1}{x}$ ۴) $y=2x^2-|x|$



پاسخ: گزینهٔ «۱» ـ تابع $y=2\sqrt{x}$ با شرط $x\geq 0$ اکیداً صعودی است، به علاوه x^2 هم در این فاصله اکیداً صعودی است. پس $y=x^2+2\sqrt{x}$ اکیداً صعودی خواهد بود و در نتیجه یک‌به‌یک است.

گزینهٔ (۲): یک‌به‌یک نیست.

$$y=x(1-\sqrt{x})\ ,\ y=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \end{cases}$$

گزینهٔ (۳):

$$y=x+\frac{1}{x}=\frac{x^2+1}{x}\ ,\ y=3 \Rightarrow \frac{x^2+1}{x}=3 \Rightarrow x^2-3x+1=0 \Rightarrow \Delta>0$$

به ازای دو مقدار از x مقدار تابع ۳ می‌شود پس تابع یک‌به‌یک نیست.

گزینهٔ (۴):

$$y = 2x^2 - |x| = |x|(2|x| - 1)\ ,\ y = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\frac{1}{2} \end{cases}$$

به ازای سه مقدار از x مقدار تابع صفر می‌شود و یک‌به‌یک نیست.

تمرین: اگر $f(x) = \frac{x^4 - 1}{\sqrt{x-2}}$ و $g(x) = \frac{\sqrt{x-2}}{x^2 - 1}$، آن‌گاه نمودار تابع $y = (f.g)(x)$ چگونه است؟

۱) صعودی ۲) نزولی ۳) ابتدا صعودی، سپس نزولی ۴) ابتدا نزولی، سپس صعودی

پاسخ: گزینهٔ «۱» ـ ابتدا دامنهٔ تابع $y = (f.g)(x)$ را می‌یابیم:

$$\left.\begin{array}{l} D_{f.g} = D_f \cap D_g \\ D_f : x - 2 > 0 \Rightarrow x \in (2, +\infty) \\ D_g : \begin{cases} x - 2 \geq 0 \\ x^2 - 1 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow x \in [2, +\infty) \end{array}\right\} \Rightarrow D_{f.g} = (2, +\infty)$$

$$y = (f.g)(x) = f(x) \times g(x) = \frac{x^4 - 1}{\sqrt{x-2}} \times \frac{\sqrt{x-2}}{x^2 - 1} = \frac{x^4 - 1}{x^2 - 1} = \frac{(x^2 - 1)(x^2 + 1)}{x^2 - 1} \Rightarrow y = (f.g)(x) = x^2 + 1$$

این تابع در بازهٔ $(2, +\infty)$ صعودی است.

تمرین: تابع $f(x) = (-9 + k^2)x^3 + 5$ اکیداً نزولی است. مجموع مقادیر صحیح k چقدر است؟ (تجربی ۱۴۰۱)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۶ ۴) صفر

تمرین: اگر تابع $f(x) = \begin{cases} -3x + 1 & x \geq 0 \\ ax + a + 4 & x < 0 \end{cases}$ در تمام دامنه‌اش نزولی اکید باشد، مجموعهٔ تمام مقادیر ممکن برای a کدام است؟

۱) $a \leq 0$ ۲) $-3 \leq a \leq 0$ ۳) $-3 \leq a < 0$ ۴) $a < 0$

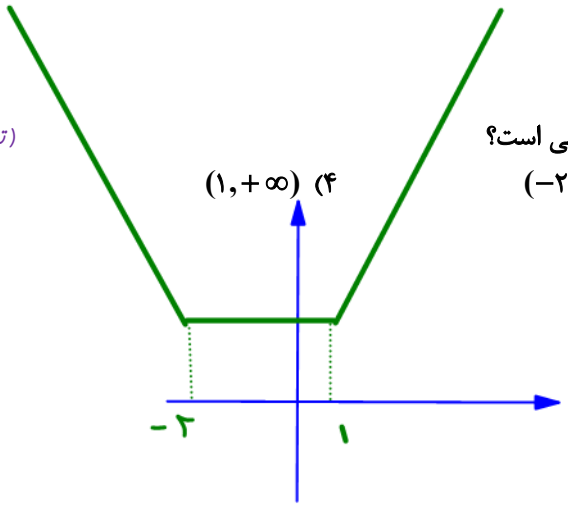
تمرین: تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & x \geq 0 \\ 1 - x^2 & x < 0 \end{cases}$، بر روی مجموعه اعداد حقیقی چگونه است؟

۱) یکنوا ـ یک به یک ۲) غیریکنوا ـ یک به یک ۳) یکنوا ـ غیر یک به یک ۴) غیریکنوا ـ غیر یک به یک

دو ضابطه‌ای ها را بکش!

تعرین: تابع با ضابطهٔ $f(x)=|x+2|+|x-1|$ در کدام بازه اکیداً نزولی است؟ (تجربی ۹۸)

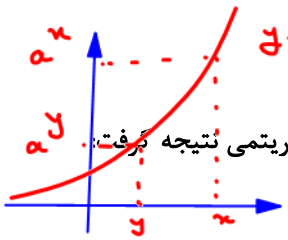
۱) $(-\infty,-2)$ ۲) $(-\infty,1)$ ۳) $(-2,1)$ ۴) $(1,+\infty)$



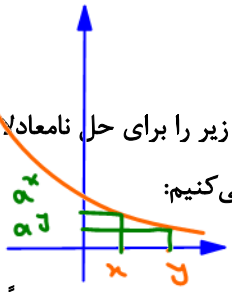
نامعادلات نمایی و لگاریتمی

با توجه به مفهوم یکنوایی توابع $y=a^x$ و $y=\log_a x$ می‌توان نکات زیر را برای حل نامعادلات نمایی و لگاریتمی نتیجه گرفت:

نامعادلات نمایی: در حل نامعادلات توابع نمایی از روابط زیر استفاده می‌کنیم:



۱) $a^x > a^y \xleftrightarrow{a>1} x > y$



۲) $a^x > a^y \xleftrightarrow{0<a<1} x < y$

یعنی در حل نامعادلات نمایی، اگر پایه بین صفر و یک باشد، جهت نامساوی عوض می‌شود. (حتماً می‌دانید که دلیل این تغییر جهت آن است که تابع $y=a^x$ با شرط $0<a<1$ اکیداً نزولی است.)

نامعادلات لگاریتمی: در حل نامعادلات لگاریتمی از روابط زیر استفاده می‌کنیم:

۱) $\log_a x > y \xleftrightarrow{a>1} x > a^y$

۲) $\log_a x > y \xleftrightarrow{0<a<1} x < a^y$

۳) $\log_a x > \log_a y \xleftrightarrow{a>1} x > y$

۴) $\log_a x > \log_a y \xleftrightarrow{0<a<1} x < y$

ترتیب لگاریتم را در حالت نامساوی هم می‌توان بگاریم فقط و فقط مبنا بین صفر و یک است جهت نامساوی را عوض می‌کنیم.

$\log_a^x = y \to a^y = x$

دامنه $f(x)=\sqrt{\log_{0.5}^{2-x}}$ را بیابید.

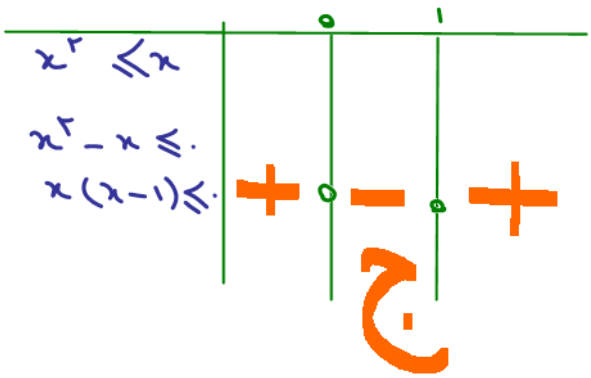
$\log$ شرط: $2-x>0$ ⟹ $x<2$

$\sqrt{\ }$ شرط: $\log_{0.5}^{2-x} \geq 0$ ⟹ $2-x \leq (0.5)^0 = 1$ ⟹ $x \geq 1$

$1 \leq x < 2$ ⟹ $D_f = [1,2)$

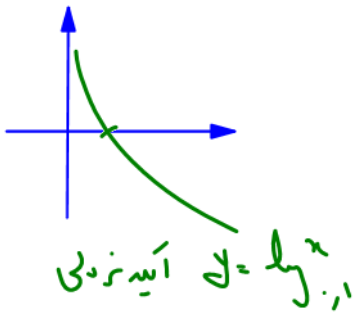
تمرین: مجموعه جواب نامعادلهٔ $(\frac{\sqrt{2}}{2})^{x^2} \geq (\frac{\sqrt{2}}{2})^{x}$ به کدام صورت است؟

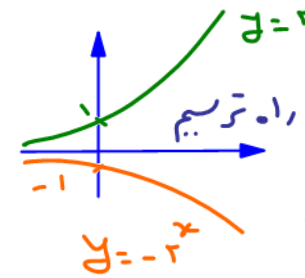
۱) $[0,+\infty)$ ۲) $\mathbb{R}-(0,1)$ ۳) $[0,1]$ ۴) $(-\infty,1]$



تمرین: مجموعه جواب نامعادلهٔ $\log_{0/1}(x-3) \geq \log_{0/1}(5-x)$ شامل چند عدد طبیعی است؟

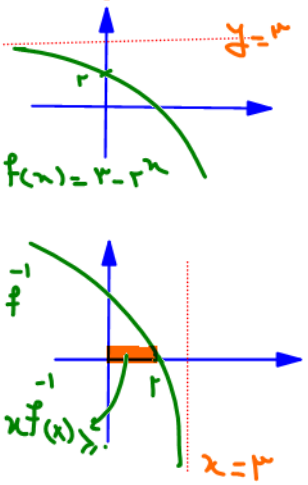
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴





تمرین: اگر $f(x)=3-2^x$ باشد، دامنهٔ تابع $g(x)=\sqrt{xf^{-1}(x)}$ کدام است؟

۱) $[0,2]$ ۲) $[0,3)$ ۳) $[2,3)$ ۴) $[1,3)$

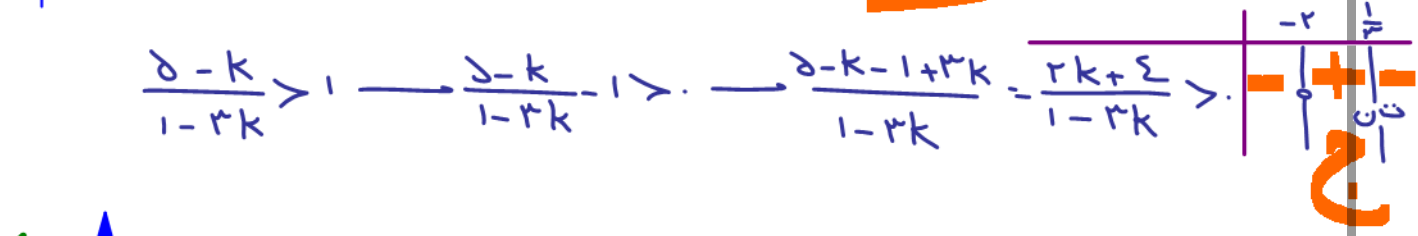


$y=a^x \quad a>1$

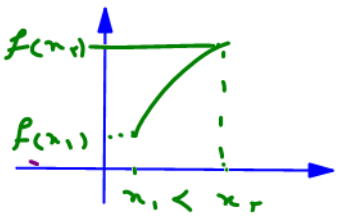
تمرین: بزرگ‌ترین بازه برای k که در آن تابع نمایی $y=(\frac{5-k}{1-3k})^x$ همواره اکیداً صعودی باشد، کدام است؟

۱) $(-1,\frac{1}{3})$ ۲) $(-2,\frac{1}{3})$ ۳) $(-3,\frac{1}{3})$ ۴) $(-4,\frac{1}{3})$

$\frac{5-k}{1-3k}>1 \rightarrow \frac{5-k}{1-3k}-1>0 \rightarrow \frac{5-k-1+3k}{1-3k}=\frac{2k+4}{1-3k}>0$



ج



تمرین: تابع $f(x)=\begin{cases} a-\log_{\frac{1}{3}} x & x\geq 3 \\ 2x+1 & x<3 \end{cases}$ به ازای چه حدودی از a همواره در شرط $x_2>x_1 \Rightarrow f(x_2)\geq f(x_1)$ صدق می‌کند؟

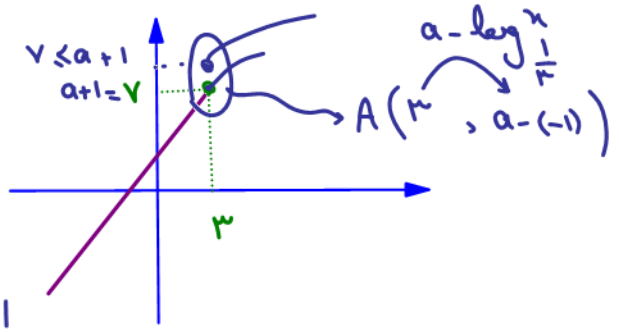
صعودی

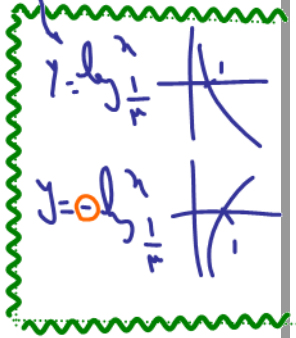
۱) $a\leq 6$ ۲) $a\geq 6$ ۳) هیچ مقدار a ۴) فقط $a=6$

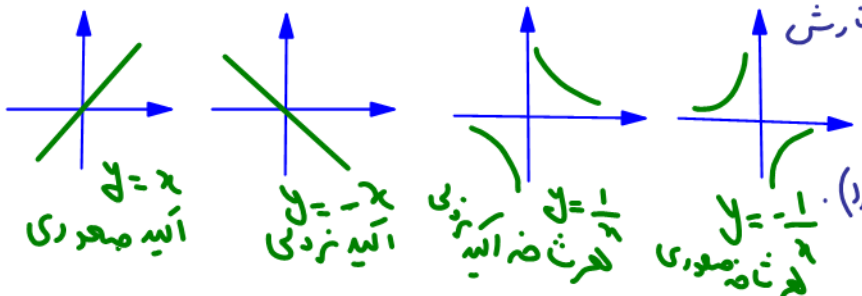
صعودی

$a+1\geq 7$

$a\geq 6$







نکته: اگر f قرینه یا عکس شود رفتارش (صعودی، نزولی) عوض می‌شود و بعد از عکس و قرینه همان رفتار را دارد. (هر شاخه همان رفتار را دارد).

مثال نکته زیر حل شده: اکیداً صعودی

$y=\log_{\frac{1}{2}}(-x^3)$ $(-)$ $(+)$ $=(+)$

نکته: اگر f اکیداً نزولی باشد با علامت $(-)$ و اگر اکیداً صعودی بود با علامت $(+)$ عاملش را بنویسید. علامت‌ها را هم ضرب کنید تا رفتار به دست آید اگر $(+)$ شد اکیداً صعودی و اگر $(-)$ شد اکیداً نزولی است.

$y=f(g(x))$

f	g	$f\circ g$
−	−	+
−	+	−
+	−	−
+	+	+

$y=f\circ g=f(g(x))$

مثال: f و g هر دو اکیداً نزولی‌اند، ثابت کنید $f\circ g$ اکیداً صعودی است.

$x_1<x_2 \rightarrow f(x_1)>f(x_2) \rightarrow g(f(x_1))<g(f(x_2))$

$f\circ g$ اکیداً صعودی

Homework (1)

منبع:

ریاضی

۱ تابع $y = (x-۱)|x|$ در بازهٔ (a, b) اکیداً نزولی است. مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$

۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

۲ تابع $f(x) = mx^۲ - nx - k$ در هر بازه، هم صعودی و هم نزولی است. اگر مجموعهٔ زیر، تابع باشد، مقدار $f(\sqrt{۵})$ کدام است؟

$$\{(m, n-۱), (۰, k), (n-۱, m^۲ + ۲m - ۱), (۳k+۲, ۲k+۱)\}$$

۱) -۱ ۲) $-\sqrt{۵}$

۳) ۱ ۴) $\sqrt{۵}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۳ تابع f اکیداً صعودی و دامنه آن، مجموعه‌ای از مقادیر مثبت است. اگر $f(۲m^۲ - ۹m - ۲) < f(m^۲ - ۴m + ۴)$ باشد، m دارای چند مقدار صحیح است؟

۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۵ ۴) ۶

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۲

۴ تابع f اکیداً نزولی و دامنهٔ آن مجموعه‌ای از مقادیر منفی است. اگر $f(m^۲ - m - ۵) < f(-۳ + ۲m - m^۲)$ باشد، m دارای چند مقدار صحیح است؟

۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۳ ۴) صفر

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۲

۵ تابع f روی $\mathbb{R}$ اکیداً نزولی است. اگر $f(۳) = ۰$ باشد، دامنه $g(x) = \sqrt{x^۲ f(x)}$ شامل چند عدد صحیح نامنفی است؟

۱) صفر ۲) ۲

۳) ۳ ۴) ۴

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

۶ فاصلهٔ نقطهٔ تقاطع تابع $y = x^3 + 3x - 12$ با وارون خود، از مبدأ مختصات کدام است؟

۱) $2\sqrt{3}$ ۲) $\sqrt{3}$

۳) $2\sqrt{2}$ ۴) $\sqrt{2}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۱

۷ تابع $f(x) = (-9 + k^2)x^3 + 5$ اکیداً نزولی است. مجموع مقادیر صحیح k، چقدر است؟

۱) صفر ۲) ۱

۳) ۲ ۴) ۶

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

۸ در بازه‌ای که تابع با ضابطهٔ $f(x) = |x-2| + |x-3|$ اکیداً نزولی است، نمودار آن با نمودار تابع $g(x) = 2x^2 - x - 10$ در چند نقطه مشترک هستند؟

۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۳ ۴) فاقد نقطهٔ مشترک

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۷

۹ فرض کنید برد تابع $f(x) = 2\sqrt[3]{9\cos^2(x)-1} - 2\sqrt[3]{1-9\cos^2(x)}$ به صورت $[a, b]$ باشد. مقدار $b - a$، کدام است؟

۱) $\frac{9}{4}$ ۲) $\frac{15}{4}$

۳) $\frac{9}{2}$ ۴) $\frac{21}{4}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۰

۱۰ تابع با ضابطهٔ $f(x) = |x+2| + |x-1|$ در کدام بازه اکیداً نزولی است؟

۱) $(-\infty, -2)$ ۲) $(-\infty, 1)$

۳) $(-2, 1)$ ۴) $(1, +\infty)$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۱۱ تابع با ضابطهٔ $f(x) = |x+1| - |x-2|$، در کدام بازه، اکیداً صعودی است؟

۱) $(-\infty, 2)$ ۲) $(-1, +\infty)$

۳) $(-1, 2)$ ۴) $(2, +\infty)$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

منبع:

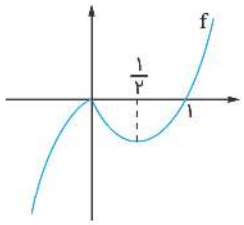
ریاضی

۱ گزینه ۲

(تذکر: صورت سوال ایراد دارد. باتوجه‌به اینکه کلید سنجش گزینهٔ "۲" است، شکل درست آن به این صورت باید باشد:
تابع $y = (x-۱)|x|$ در بزرگ‌ترین بازهٔ $[a, b]$ اکیداً نزولی است. مقدار $a+b$ کدام است؟)

$$y = (x-۱)|x| = \begin{cases} x^۲ - x & ; x \geq ۰ \\ -x^۲ + x & ; x < ۰ \end{cases}$$

نمودار تابع را رسم می‌کنیم:



تابع f در بزرگ‌ترین بازهٔ $[۰, \frac{۱}{۲}]$ اکیداً نزولی است، بنابراین:

$$a+b = \frac{۱}{۲}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

۲ گزینه ۳

منظور سؤال این است که $f(x)$ تابع ثابت است، پس $m = n = ۰$ است. حال تابع داده‌شده را مرتب می‌کنیم:

$$g = \{(۰, -۱), (۰, k), (-۱, -۱), (۳k + ۲, ۲k + ۱)\}$$

زوج مرتب‌های $(۰, -۱)$ و $(۰, k)$ مولفهٔ اول برابر دارند، برای تابع بودن باید مولفهٔ دوم نیز برابر باشد. بنابراین برای آنکه g تابع باشد باید $k = -۱$ باشد. تابع g به‌صورت زیر در می‌آید:

$$g = \{(۰, -۱), (-۱, -۱)\}$$

$f(x) = -k = ۱$ خواهد بود و درنتیجه $f(\sqrt{۵}) = ۱$ می‌باشد.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۳ گزینه ۱

تابع f اکیداً صعودی است و دامنهٔ آن، مجموعه‌ای از مقادیر مثبت است، بنابراین داریم:

$$۲m^۲ - ۹m - ۲ > ۰ \Rightarrow \begin{cases} m > \frac{۹ + \sqrt{۹۷}}{۴} \\ m < \frac{۹ - \sqrt{۹۷}}{۴} \end{cases} \quad (۱)$$

$$m^۲ - ۴m + ۴ > ۰ \Rightarrow (m - ۲)^۲ > ۰ \Rightarrow m \in \mathbb{R} - \{۲\} \quad (۲)$$

$$f(۲m^۲ - ۹m - ۲) < f(m^۲ - ۴m + ۴)$$

$$\xrightarrow{\text{صعودی اکید}} ۲m^۲ - ۹m - ۲ < m^۲ - ۴m + ۴$$

$$\Rightarrow m^۲ - ۵m - ۶ < ۰ \Rightarrow (m + ۱)(m - ۶) < ۰ \Rightarrow m \in (-۱, ۶) \quad (۳)$$

$$(۱) \cap (۲) \cap (۳) \Rightarrow m \in (-۱, \frac{۹ - \sqrt{۹۷}}{۴}) \cup (\frac{۹ + \sqrt{۹۷}}{۴}, ۶) \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m = ۵$$

در بازهٔ به‌دست‌آمده، فقط یک عدد صحیح ۵ وجود دارد.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۲

۴ گزینه ۱

چون تابع اکیداً نزولی است، پس:

$$m^۲ - m - ۵ > -۳ + ۲m - m^۲ \Rightarrow ۲m^۲ - ۳m - ۲ > ۰$$

ریشه‌های عبارت فوق عبارت‌اند از:

$$m = \frac{۳ \pm \sqrt{۹ + ۱۶}}{۴} \Rightarrow \begin{cases} m = ۲ \\ m = -\frac{۱}{۲} \end{cases}$$

m	$-\infty$	$\frac{-۱}{۲}$		۲		$+\infty$
P(x)	+	۰	−	۰	+	

$$p(x) > ۰ \Rightarrow m \in (-\infty, -\frac{۱}{۲}) \cup (۲, +\infty)$$

چون دامنه منفی است، پس:

$$m^۲ - m - ۵ < ۰ \Rightarrow m = \frac{۱ \pm \sqrt{۲۱}}{۲} \xrightarrow{\sqrt{۲۱} \simeq ۴/۵} -۱/۷۵ < m < ۲/۷۵$$
$$-m^۲ + ۲m - ۳ < ۰ \Rightarrow \Delta < ۰ \Rightarrow m \in \mathbb{R}$$

لازم است در کل $-۰/۵ < m < -۱/۷۵$ یا $۲ < m < ۲/۷۵$ باشد، یعنی فقط $m = -۱$ قابل‌قبول است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۲

۵ گزینه ۴

جدول تعیین علامت g به صورت زیر است.

x		۰		۳	
$x^۲$	+	۰	+		+
f(x)	+		+	۰	−
$\sqrt{x^۲ f(x)}$	+		+		−

$$\Rightarrow D_{\sqrt{x^۲ f(x)}} = (-\infty, ۳]$$

$$x = ۰, ۱, ۲, ۳$$

اعداد ۰، ۱، ۲ و ۳ پذیرفته هستند.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

۶ گزینه ۳

تابع داده‌شده اکیداً صعودی است و وارون خود را روی خط $y = x$ ملاقات می‌کند. بنابراین:

$$x^۳ + ۳x - ۱۲ = x \Rightarrow x^۳ + ۲x - ۱۲ = ۰ \Rightarrow x = ۲$$

حقیقتاً ریشهٔ $x = ۲$ را حدس زدیم!

$$x^۳ + ۳x - ۱۲ = (x - ۲)(x^۲ + ۲x + ۶)$$

نقطهٔ $(۲, ۲)$ محل تقاطع است. فاصله تا مبدأ برابر است با:

$$\sqrt{(۲ - ۰)^۲ + (۲ - ۰)^۲} = \sqrt{۸} = ۲\sqrt{۲}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۱

۷ گزینه ۱

تابع f اکیداً نزولی می‌باشد، بنابراین کافی است ضریب $x^۳$ منفی باشد:

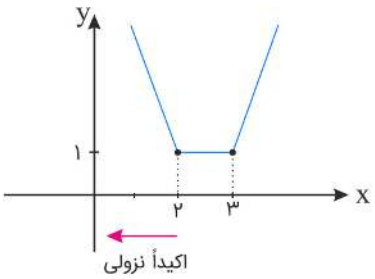
$$-۹ + k^۲ < ۰ \Rightarrow k^۲ < ۹ \Rightarrow -۳ < k < ۳$$

$$\xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} k = ۰, \pm ۱, \pm ۲ \Rightarrow \text{مجموع مقادیر } k = ۰$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

۸ گزینه ۱

$$x \le ۲ \Rightarrow f(x) = -(x-۲) - (x-۳) = -۲x + ۵$$
$$۲ < x < ۳ \Rightarrow f(x) = (x-۲) - (x-۳) = ۱$$
$$x \ge ۳ \Rightarrow f(x) = x - ۲ + x - ۳ = ۲x - ۵$$



بنابراین:

$$x \le ۲ \Rightarrow -۲x + ۵ = ۲x^۲ - x - ۱۰ \Rightarrow ۲x^۲ + x - ۱۵ = ۰$$

$$(۲x-۵)(x+۳) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = -۳ & \checkmark \\ x = \frac{۵}{۲} & \times \end{cases}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۷

۹ گزینه ۴

فرض می‌کنیم $A = \sqrt[۳]{۹\cos^۲(x) - ۱}$ باشد.

$$۰ \le \cos^۲ x \le ۱ \Rightarrow -۱ \le ۹\cos^۲(x) - ۱ \le ۸ \Rightarrow -۱ \le A \le ۲$$

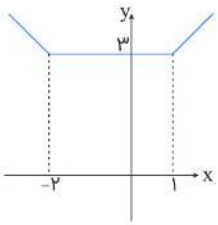
تابع موردنظر به صورت $g(A) = ۲^A - ۲^{-A}$ است. هر دو تابع ۲^A و -۲^{-A} صعودی اکیدند، پس مجموع آن‌ها صعودی اکید خواهد بود.

$$b = g(۲) = ۲^۲ - ۲^{-۲} = ۴ - \frac{۱}{۴} = \frac{۱۵}{۴}$$
$$a = g(-۱) = ۲^{-۱} - ۲^۱ = \frac{۱}{۲} - ۲ = -\frac{۳}{۲} \Rightarrow b - a = \frac{۱۵}{۴} + \frac{۳}{۲} = \frac{۲۱}{۴}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۰

۱۰ گزینه ۱

$$f(x)=|x+۲|+|x-۱|=\begin{cases}۲x+۱ & ;x>۱\\ ۳ & ;-۲\le x\le ۱\\ -۲x-۱ & ;x<-۲\end{cases}$$



باتوجه‌به نمودار تابع گلدانی $y=|x+۲|+|x-۱|$، در فاصلهٔ $(-\infty,-۲)$ تابع نزولی اکید است.

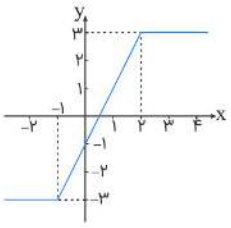
کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۱۱ گزینه ۳

x		-۱		۲	
x+۱	-	۰	+		+
x-۲	-		-	۰	+

$$x\le -۱: f(x)=-x-۱+x-۲=-۳$$
$$-۱<x\le ۲: f(x)=x+۱+x-۲=۲x-۱$$
$$x>۲: f(x)=x+۱-x+۲=۳$$

نمودار تابع را رسم می‌کنیم:



مطابق شکل در فاصلهٔ $(-۱,۲)$ اکیداً صعودی است.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

Homework (2)

منبع:

حسابان

۱ تابع $y = (x-۱)|x|$ در بازهٔ (a, b) اکیداً نزولی است. مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$

۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

۲ تابع با ضابطهٔ $y = \sqrt{(x+۱)^۲} - |۳x-۶|$ در یک بازه نزولی است. ضابطهٔ وارون تابع در این بازه، کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۲}x - ۷\,,\ x \geq ۲$ ۲) $-\frac{۱}{۲}x + \frac{۷}{۲}\,,\ x \leq ۳$

۳) $-۲x + ۱۴\,,\ x \leq ۳$ ۴) $-۲x - \frac{۱۴}{۳}\,,\ x \geq ۲$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۱

۳ اگر $f(x) = (\frac{۱}{۲})^{x^۳} + \log_{۰/۵} x$ باشد، مجموعه‌جواب نامعادلهٔ $(fof)(x) < f(۲^{-۳x})$ زیرمجموعهٔ کدام بازه است؟ (با تغییر)

۱) $(۱, \frac{۱۱}{۸})$ ۲) $(۱, +\infty)$

۳) $(\frac{۱۱}{۸}, +\infty)$ ۴) $(۰, ۱)$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

۴ اگر $f(x) = (x + \log x)^۵$ باشد، مجموعه‌جواب نامعادلهٔ $(fof)(x) < f(x^۵)$ زیرمجموعهٔ کدام بازه است؟ (با تغییر)

۱) $(۱, ۵)$ ۲) $(۰, ۱)$

۳) $(۵, +\infty)$ ۴) $(۱, +\infty)$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۵ تابع $f(x) = mx^۲ - nx - k$ در هر بازه، هم صعودی و هم نزولی است. اگر مجموعهٔ زیر، تابع باشد، مقدار $f(\sqrt{۵})$ کدام است؟

$$\{(m, n-۱), (۰, k), (n-۱, m^۲ + ۲m - ۱), (۳k + ۲, ۲k + ۱)\}$$

۱) -۱ ۲) $-\sqrt{۵}$

۳) ۱ ۴) $\sqrt{۵}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۶ تابع f اکیداً صعودی و دامنه آن، مجموعه‌ای از مقادیر مثبت است. اگر $f(۲m^۲ - ۹m - ۲) < f(m^۲ - ۴m + ۴)$ باشد، m دارای چند مقدار صحیح است؟

۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۵ ۴) ۶

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۲

۷ تابع f اکیداً نزولی و دامنهٔ آن مجموعه‌ای از مقادیر منفی است. اگر $f(m^۲ - m - ۵) < f(-۳ + ۲m - m^۲)$ باشد، m دارای چند مقدار صحیح است؟

۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۳ ۴) صفر

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۲

۸ تابع با ضابطهٔ $y = x|x-۲|$ در یک بازه نزولی است. ضابطهٔ معکوس آن کدام است؟

۱) $۱ - \sqrt{۱+x}\ ;\ x < ۰$ ۲) $۱ - \sqrt{۱-x}\ ;\ x < ۱$

۳) $۱ + \sqrt{۱-x}\ ;\ ۰ \le x \le ۱$ ۴) $۱ - \sqrt{۱-x}\ ;\ ۰ < x < ۱$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۴

۹ تابع با ضابطهٔ $f(x) = |۲x-۶| - |x+۱|$، در یک بازه، صعودی است. ضابطهٔ معکوس آن، در این بازه، کدام است؟

۱) $-x + ۷\ ;\ x > ۸$ ۲) $\frac{۱}{۳}x + ۲\ ;\ x > ۳$

۳) $x + ۷\ ;\ x > -۴$ ۴) $\frac{۱}{۲}x - ۲\ ;\ -۴ < x < ۸$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۴

۱۰ نمودار تابع $x + |x+۴| - |۲x-۶|$ در یک بازه اکیداً نزولی است. ضابطهٔ معکوس آن در این بازه کدام است؟

۱) $-x + ۶\ ;\ x < -۴$ ۲) $-x + ۵\ ;\ x > ۲$

۳) $-\frac{۱}{۲}x + ۱\ ;\ -۴ < x < ۳$ ۴) $-\frac{۱}{۲}x + ۱\ ;\ -۴ < x < ۱۰$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۴

۱۱ تابع $f(x) = x^{۲}\sqrt{x^{۲}}$ در یک بازه نزولی است. ضابطهٔ وارون تابع در این بازه، کدام است؟

۱) $-\sqrt{x^{۳}}\ ,\ x \leq ۰$
۲) $-\sqrt[۳]{x}\ ,\ x \leq ۰$
۳) $-\sqrt{x^{۳}}\ ,\ x \geq ۰$
۴) $-\sqrt[۳]{x}\ ,\ x \geq ۰$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۱

۱۲ تابع f روی $\mathbb{R}$ اکیداً نزولی است. اگر $f(۳) = ۰$ باشد، دامنه $g(x) = \sqrt{x^{۲}f(x)}$ شامل چند عدد صحیح نامنفی است؟

۱) صفر
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

۱۳ فاصلهٔ نقطهٔ تقاطع تابع $y = x^{۳} + ۳x - ۱۲$ با وارون خود، از مبدأ مختصات کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۳}$
۲) $\sqrt{۳}$
۳) $۲\sqrt{۲}$
۴) $\sqrt{۲}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۱

۱۴ تابع $f(x) = (-۹ + k^{۲})x^{۳} + ۵$ اکیداً نزولی است. مجموع مقادیر صحیح k، چقدر است؟

۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۶

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

۱۵ در بازه‌ای که تابع با ضابطهٔ $f(x) = |x - ۲| + |x - ۳|$ اکیداً نزولی است، نمودار آن با نمودار تابع $g(x) = ۲x^{۲} - x - ۱۰$ در چند نقطه مشترک هستند؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) فاقد نقطهٔ مشترک

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۷

۱۶ تابع با ضابطهٔ $f(x) = |x^{۳}|$ با دامنهٔ $\mathbb{R}$، چگونه است؟

۱) نزولی
۲) صعودی
۳) وارون‌ناپذیر
۴) یک‌به‌یک

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

۱۷ فرض کنید برد تابع $f(x) = ۲\sqrt[۳]{۹\cos^۲(x)-۱} - ۲\sqrt[۳]{۱-۹\cos^۲(x)}$ به صورت $[a, b]$ باشد. مقدار $b - a$، کدام است؟

۱) $\frac{۹}{۴}$
۲) $\frac{۱۵}{۴}$
۳) $\frac{۹}{۲}$
۴) $\frac{۲۱}{۴}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۰

۱۸ تابع با ضابطهٔ $f(x) = |x+۲| + |x-۱|$ در کدام بازه اکیداً نزولی است؟

۱) $(-\infty, -۲)$
۲) $(-\infty, ۱)$
۳) $(-۲, ۱)$
۴) $(۱, +\infty)$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۱۹ تابع با ضابطهٔ $f(x) = |x+۱| - |x-۲|$، در کدام بازه، اکیداً صعودی است؟

۱) $(-\infty, ۲)$
۲) $(-۱, +\infty)$
۳) $(-۱, ۲)$
۴) $(۲, +\infty)$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

منبع:

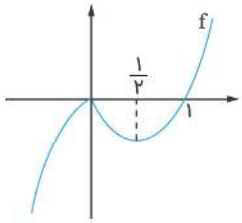
حسابان

۱ گزینه ۲

(تذکر: صورت سوال ایراد دارد. باتوجه‌به اینکه کلید سنجش گزینهٔ "۲" است، شکل درست آن به این صورت باید باشد:
تابع $y = (x-۱)|x|$ در بزرگ‌ترین بازهٔ $[a, b]$ اکیداً نزولی است. مقدار $a+b$ کدام است؟)

$$y = (x-۱)|x| = \begin{cases} x^۲ - x & ; x \geq ۰ \\ -x^۲ + x & ; x < ۰ \end{cases}$$

نمودار تابع را رسم می‌کنیم:



تابع f در بزرگ‌ترین بازهٔ $[۰, \frac{۱}{۲}]$ اکیداً نزولی است، بنابراین:

$$a+b = \frac{۱}{۲}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

۲ گزینه ۲

$$y = |x+۱| - |۳x-۶|$$

$$\xrightarrow[\text{بازه‌بندی}]{\text{حذف قدرمطلق}} y = \begin{cases} ۲x-۷ & ; x < -۱ \\ ۴x-۵ & ; -۱ \le x < ۲ \\ -۲x+۷ & ; x \ge ۲ \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{نزولی}} y = -۲x+۷\ ,\ x \ge ۲$$

وارون تابع را می‌یابیم:

$$y = -۲x+۷ \Rightarrow ۲x = -y+۷ \Rightarrow x = \frac{-y}{۲} + \frac{۷}{۲}$$

$$\Rightarrow y^{-۱} = \frac{-۱}{۲}x + \frac{۷}{۲}\ ,\ x \le ۳$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۱

۳ گزینه ۴

توابع $(\frac{۱}{۲})^x$ و $\log_{۰/۵}x$ هر دو اکیداً نزولی هستند، پس مجموع آن‌ها اکیداً نزولی است. تابع $x^۳$ اکیداً صعودی است، پس ترکیب این تابع با $(\frac{۱}{۲})^x + \log_{۰/۵}x$ اکیداً نزولی خواهد بود. یعنی تابع $f(x)$ اکیداً نزولی است. حال داریم:

$$(fof)(x) < f(۲^{-۳x}) \Rightarrow f(f(x)) < f((۲^{-x})^۳)$$

$$\xrightarrow{f \text{ اکیداً نزولی}} f(x) > (۲^{-x})^۳$$

$$\Rightarrow ((\frac{۱}{۲})^x + \log_{۰/۵}x)^۳ > (۲^{-x})^۳ = ((\frac{۱}{۲})^x)^۳$$

$$\Rightarrow (\frac{۱}{۲})^x + \log_{۰/۵}x > (\frac{۱}{۲})^x \Rightarrow \log_{۰/۵}x > ۰$$

$\log_{۰/۵}x$ در بازهٔ $(۰,۱)$ مثبت است، بنابراین مجموعه‌جواب نامعادلهٔ $(fof)(x) < f(۲^{-۳x})$ زیرمجموعهٔ بازهٔ $(۰,۱)$ می‌باشد.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

۴ گزینه ۲

x و $\log x$ دو تابع اکیداً صعودی هستند، پس مجموع آن‌ها یعنی $x + \log x$ اکیداً صعودی است.
تابع x^5 نیز اکیداً صعودی است و همچنین می‌دانیم ترکیب دو تابع اکیداً صعودی، اکیداً صعودی می‌باشد، بنابراین $f(x)$ اکیداً صعودی است.

$$(fof)(x) = f(f(x)) < f(x^5) \Rightarrow f(x) < x^5 \Rightarrow (x + \log x)^5 < x^5$$

$$\Rightarrow x + \log x < x \Rightarrow \log x < 0$$

$\log x$ در بازهٔ $(0, 1)$ منفی است، بنابراین مجموعه‌جواب نامعادلهٔ $(fof)(x) < f(x^5)$ زیرمجموعهٔ بازهٔ $(0, 1)$ می‌باشد.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۵ گزینه ۳

منظور سؤال این است که $f(x)$ تابع ثابت است، پس $m = n = 0$ است. حال تابع داده‌شده را مرتب می‌کنیم:

$$g = \{(0, -1), (0, k), (-1, -1), (3k + 2, 2k + 1)\}$$

زوج مرتب‌های $(0, -1)$ و $(0, k)$ مولفهٔ اول برابر دارند، برای تابع بودن باید مولفهٔ دوم نیز برابر باشد. بنابراین برای آنکه g تابع باشد باید $k = -1$ باشد. تابع g به‌صورت زیر در می‌آید:

$$g = \{(0, -1), (-1, -1)\}$$

$f(x) = -k = 1$ خواهد بود و درنتیجه $f(\sqrt{5}) = 1$ می‌باشد.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۶ گزینه ۱

تابع f اکیداً صعودی است و دامنهٔ آن، مجموعه‌ای از مقادیر مثبت است، بنابراین داریم:

$$2m^2 - 9m - 2 > 0 \Rightarrow \begin{cases} m > \frac{9 + \sqrt{97}}{4} \\ m < \frac{9 - \sqrt{97}}{4} \end{cases} \quad (1)$$

$$m^2 - 4m + 4 > 0 \Rightarrow (m - 2)^2 > 0 \Rightarrow m \in \mathbb{R} - \{2\} \quad (2)$$

$$f(2m^2 - 9m - 2) < f(m^2 - 4m + 4)$$

$$\xrightarrow{\text{صعودی اکید}} 2m^2 - 9m - 2 < m^2 - 4m + 4$$

$$\Rightarrow m^2 - 5m - 6 < 0 \Rightarrow (m + 1)(m - 6) < 0 \Rightarrow m \in (-1, 6) \quad (3)$$

$$(1) \cap (2) \cap (3) \Rightarrow m \in (-1, \frac{9 - \sqrt{97}}{4}) \cup (\frac{9 + \sqrt{97}}{4}, 6) \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m = 5$$

در بازهٔ به‌دست‌آمده، فقط یک عدد صحیح ۵ وجود دارد.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۲

۷ گزینه ۱

چون تابع اکیداً نزولی است، پس:

$$m^۲ - m - ۵ > -۳ + ۲m - m^۲ \Rightarrow ۲m^۲ - ۳m - ۲ > ۰$$

ریشه‌های عبارت فوق عبارت‌اند از:

$$m = \frac{۳ \pm \sqrt{۹ + ۱۶}}{۴} \Rightarrow \begin{cases} m = ۲ \\ m = -\frac{۱}{۲} \end{cases}$$

m	$-\infty$	$\frac{-۱}{۲}$		۲		$+\infty$
P(x)	+	۰	−	۰	+	

$$p(x) > ۰ \Rightarrow m \in (-\infty, -\frac{۱}{۲}) \cup (۲, +\infty)$$

چون دامنه منفی است، پس:

$$m^۲ - m - ۵ < ۰ \Rightarrow m = \frac{۱ \pm \sqrt{۲۱}}{۲} \xrightarrow{\sqrt{۲۱} \simeq ۴/۵} -۱/۷۵ < m < ۲/۷۵$$
$$-m^۲ + ۲m - ۳ < ۰ \Rightarrow \Delta < ۰ \Rightarrow m \in \mathbb{R}$$

لازم است در کل $-۰/۵ > m > -۱/۷۵$ یا $۲ < m < ۲/۷۵$ باشد، یعنی فقط $m = -۱$ قابل‌قبول است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۲

۸ گزینه ۳

برای حل سؤال به صورت زیر عمل می‌کنیم:

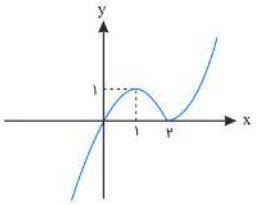
الف) ابتدا قدرمطلق را ساده می‌کنیم و ضابطهٔ تابع را به صورت تفکیک‌شده می‌نویسیم. (یک بار فرض می کنیم $x \geq ۲$ و بار دیگر فرض می‌کنیم $x < ۲$ باشد و ضابطهٔ تابع را تعیین می‌کنیم.)

ب) نمودار تابع را رسم کرده و بازه‌ای که در آن تابع نزولی است را مشخص می‌کنیم.

ج) باتوجه‌به این نکته که $D_{f^{-۱}} = R_f$، دامنهٔ تعریف تابع معکوس را مشخص کرده و ضابطهٔ آن را نیز تعیین می‌کنیم.

$$f(x) = x|x-۲| \Rightarrow \begin{cases} x \geq ۲ \Rightarrow |x-۲| = x-۲ \Rightarrow y = x(x-۲) \\ x < ۲ \Rightarrow |x-۲| = -(x-۲) \Rightarrow y = -x(x-۲) \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} x^۲ - ۲x & ; x \geq ۲ \\ -x^۲ + ۲x & ; x < ۲ \end{cases}$$



تنها بازه‌ای که در آن تابع نزولی باشد، بازهٔ $[۱, ۲]$ است. برد تابع در این بازه $[۰, ۱]$ است. پس $D_{f^{-۱}} = [۰, ۱]$ (رد گزینه های ۱ و ۲). حال در محدودهٔ مشخص‌شده ضابطهٔ $f^{-۱}(x)$ را تعیین می‌کنیم:

$$۱ < x < ۲ \Rightarrow f(x) = -x^۲ + ۲x \Rightarrow y = -x^۲ + ۲x \Rightarrow -y = x^۲ - ۲x$$

$$\xrightarrow{+۱} ۱ - y = x^۲ - ۲x + ۱ \Rightarrow ۱ - y = (x-۱)^۲ \Rightarrow x - ۱ = \sqrt{۱-y}$$

$$\Rightarrow x = ۱ + \sqrt{۱-y} \Rightarrow f^{-۱}(x) = ۱ + \sqrt{۱-x} \; ; \; ۰ \leq x \leq ۱$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۴

۹ گزینه ۳

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۴

گام اول

الف) ابتدا ضابطهٔ تابع $f(x)$ را باتوجه‌به محدوده‌هایی که برای x در نظر می‌گیریم، ساده می‌کنیم. محدودهٔ x بر اساس ریشهٔ عبارت‌های داخل قدر مطلق تعیین می‌شود.

ب) بازه‌ای که در آن تابع $f(x)$ صعودی است (مقدار $f(x)$ به ازای افزایش x در حال افزایش است) را تعیین کرده و در آن بازه ضابطهٔ $f^{-1}(x)$ را به دست می‌آوریم.

گام دوم

ریشهٔ عبارت‌های درون قدر مطلق، $x=-1$ و $x=3$ است. داریم:

$$x<-1: f(x)=-2x+6-(-x-1)=-2x+6+x+1=-x+7$$

$$-1\le x\le 3: f(x)=-2x+6-(x+1)=-3x+5$$

$$x>3: f(x)=2x-6-(x+1)=x-7$$

در بازهٔ $x>3$ تابع $f(x)=x-7$ یک تابع صعودی است. در این بازه ضابطهٔ $f^{-1}(x)$ را به دست می‌آوریم:

$$y=x-7\Rightarrow x=y+7\Rightarrow f^{-1}(x)=x+7\ ,\ x>-4$$

۱۰ گزینه ۴

در حل تست به نکات زیر توجه داشته باشید:

الف) در توابع شامل قدر مطلق ابتدا باتوجه‌به ریشه‌های عبارت درون قدر مطلق، ضابطهٔ تابع را به‌صورت ساده‌شده می‌نویسیم.

ب) تعیین می‌کنیم تابع در کدام بازه اکیداً نزولی است.

ج) برای تعیین ضابطهٔ تابع معکوس، x را برحسب y به دست آورده و درنهایت به جای x، $f^{-1}(x)$ و به جای y، x را جایگزین می‌کنیم. به این نکته توجه کنید که دامنهٔ تابع معکوس برابر برد تابع اصلی است.

$$f(x)=|2x-6|-|x+4|+x$$

$$=\begin{cases} x\le -4: -(2x-6)+(x+4)+x=10 \\ -4<x<3: -(2x-6)-(x+4)+x=-2x+2 \\ x\ge 3: (2x-6)-(x+4)+x=2x-10 \end{cases}$$

تابع در بازهٔ $(-4,3)$ اکیداً نزولی است. ضابطهٔ تابع معکوس را به دست می‌آوریم:

$$y=-2x+2\Rightarrow y-2=-2x\Rightarrow x=-\frac{1}{2}y+1\Rightarrow f^{-1}(x)=-\frac{1}{2}x+1$$

در ضابطهٔ تابع اصلی وقتی $-4<x<3$ باشد، $-4<y<10$ است. پس دامنهٔ تابع معکوس به‌صورت $(-4,10)$ درمی‌آید. بنابراین گزینهٔ ۴ درست است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۴

۱۱ گزینه ۴

$$x^{۲}\sqrt{x^{۲}} = x^{۲}|x| = \begin{cases} x^{۳} & ; x \geq ۰ \quad \text{اکیداً صعودی} \\ -x^{۳} & ; x < ۰ \quad \text{اکیداً نزولی} \end{cases}$$

پس باید وارون تابع ضابطهٔ پایینی را حساب کنیم:

$$y = -x^{۳} \Rightarrow x^{۳} = -y \Rightarrow x = \sqrt[۳]{-y} \Rightarrow f^{-۱}(x) = -\sqrt[۳]{x}$$
$$D_f = R_{f^{-۱}}\ ,\ D_{f^{-۱}} = R_f$$
$$R_f = [۰\ ,\ +\infty] = D_{f^{-۱}} \Rightarrow D_{f^{-۱}} : x \geq ۰$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۱

۱۲ گزینه ۴

جدول تعیین علامت g به صورت زیر است.

x		۰		۳	
$x^{۲}$	$+$	۰	$+$		$+$
$f(x)$	$+$		$+$	۰	$-$
$\sqrt{x^{۲}f(x)}$	$+$		$+$		$-$

$$\Rightarrow D_{\sqrt{x^{۲}f(x)}} = (-\infty, ۳]$$

$$x = ۰, ۱, ۲, ۳$$

اعداد ۰، ۱، ۲ و ۳ پذیرفته هستند.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

۱۳ گزینه ۳

تابع داده‌شده اکیداً صعودی است و وارون خود را روی خط $y = x$ ملاقات می‌کند. بنابراین:

$$x^{۳} + ۳x - ۱۲ = x \Rightarrow x^{۳} + ۲x - ۱۲ = ۰ \Rightarrow x = ۲$$

حقیقتاً ریشهٔ $x = ۲$ را حدس زدیم!

$$x^{۳} + ۳x - ۱۲ = (x - ۲)(x^{۲} + ۲x + ۶)$$

نقطهٔ $(۲\ ,\ ۲)$ محل تقاطع است. فاصله تا مبدأ برابر است با:

$$\sqrt{(۲ - ۰)^{۲} + (۲ - ۰)^{۲}} = \sqrt{۸} = ۲\sqrt{۲}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۱

۱۴ گزینه ۱

تابع f اکیداً نزولی می‌باشد، بنابراین کافی است ضریب $x^۳$ منفی باشد:

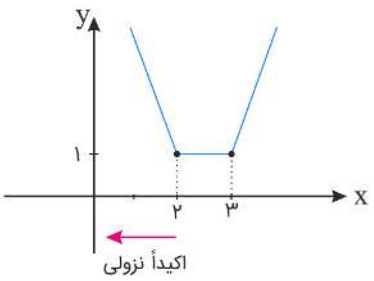
$$-۹+k^۲<۰\Rightarrow k^۲<۹\Rightarrow -۳<k<۳$$

$$\xrightarrow{k\in\mathbb{Z}} k=۰,\pm۱,\pm۲\Rightarrow \text{مجموع مقادیر } k=۰$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

۱۵ گزینه ۱

$$x\le ۲\Rightarrow f(x)=-(x-۲)-(x-۳)=-۲x+۵$$
$$۲<x<۳\Rightarrow f(x)=(x-۲)-(x-۳)=۱$$
$$x\ge ۳\Rightarrow f(x)=x-۲+x-۳=۲x-۵$$



بنابراین:

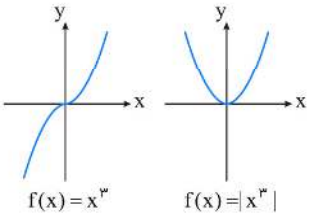
$$x\le ۲\Rightarrow -۲x+۵=۲x^۲-x-۱۰\Rightarrow ۲x^۲+x-۱۵=۰$$

$$(۲x-۵)(x+۳)=۰\Rightarrow \begin{cases} x=-۳ & \checkmark \\ x=\frac{۵}{۲} & \times \end{cases}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۷

۱۶ گزینه ۳

با رسم نمودار تابع $f(x)=|x^{۳}|$ به سؤال پاسخ می‌دهیم. ابتدا نمودار $y=x^{۳}$ را رسم و آن قسمت از منحنی که در پایین محور xها قرار دارد را نسبت به این محور قرینه می‌کنیم.



با توجه به نمودار رسم‌شده، این تابع نه صعودی است و نه نزولی. این تابع یک‌به‌یک هم نیست، درنتیجه وارون‌ناپذیر می‌شود؛ بنابراین فقط گزینهٔ ۳ می‌تواند درست باشد.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

۱۷ گزینه ۴

فرض می‌کنیم $A=\sqrt[۳]{۹\cos^{۲}(x)-۱}$ باشد.

$$۰\le \cos^{۲}x\le ۱\Rightarrow -۱\le ۹\cos^{۲}(x)-۱\le ۸\Rightarrow -۱\le A\le ۲$$

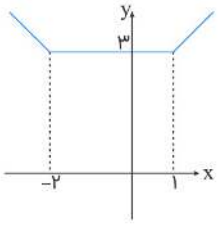
تابع موردنظر به صورت $g(A)=۲^{A}-۲^{-A}$ است. هر دو تابع ۲^{A} و -۲^{-A} صعودی اکیدند، پس مجموع آن‌ها صعودی اکید خواهد بود.

$$b=g(۲)=۲^{۲}-۲^{-۲}=۴-\frac{۱}{۴}=\frac{۱۵}{۴}$$
$$a=g(-۱)=۲^{-۱}-۲^{۱}=\frac{۱}{۲}-۲=-\frac{۳}{۲}\Rightarrow b-a=\frac{۱۵}{۴}+\frac{۳}{۲}=\frac{۲۱}{۴}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۰

۱۸ گزینه ۱

$$f(x)=|x+۲|+|x-۱|=\begin{cases}۲x+۱ & ;x>۱\\ ۳ & ;-۲\le x\le ۱\\ -۲x-۱ & ;x<-۲\end{cases}$$



باتوجه‌به نمودار تابع گلدانی $y=|x+۲|+|x-۱|$، در فاصلهٔ $(-\infty,-۲)$ تابع نزولی اکید است.

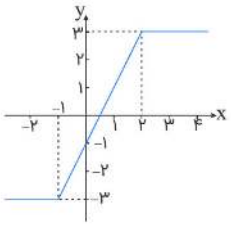
کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۱۹ گزینه ۳

x		-۱		۲	
x+۱	-	۰	+		+
x-۲	-		-	۰	+

$$x\le -۱: f(x)=-x-۱+x-۲=-۳$$
$$-۱<x\le ۲: f(x)=x+۱+x-۲=۲x-۱$$
$$x>۲: f(x)=x+۱-x+۲=۳$$

نمودار تابع را رسم می‌کنیم:



مطابق شکل در فاصلهٔ $(-۱,۲)$ اکیداً صعودی است.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

Homework (3)

ریاضی

۱ اگر تابع $y = x^۳ + x^۲ + \frac{x}{k}$ اکیداً صعودی باشد، حدود کامل k کدام است؟

۱) $(۰, ۳]$
۲) $[-۱, ۳]$
۳) $(۰, ۲]$
۴) $[-۱, ۰)$

۲ تابع $f(x) = \begin{cases} ۲x - x^۲ & ; x \geq ۱ \\ ۱ - (x-۱)^۳ & ; x < ۱ \end{cases}$ از نظر یکنوایی چگونه است؟

۱) صعودی اکید
۲) نزولی اکید
۳) صعودی
۴) غیریکنوا

۳ اگر $\frac{۱}{۶۴} \leq (\frac{۱}{۲})^{۳x-۲}$، حدود x را به‌دست آورید.

۴ اگر $\frac{۱}{۶۴} \leq (\frac{۱}{۲})^{۳x-۲}$ ، حدود x را به دست آورید.

۵ اگر تابع $f(x) = \frac{m-۱}{m+۱}\log(-x)$ صعودی اکید باشد، حدود m کدام است؟

۱) $|m| < ۱$
۲) $|m| > ۱$
۳) $|m| < ۲$
۴) $|m| > ۲$

۶ یکنوایی تابع $f(x) = x - |۲x|$ را بررسی کنید.

۷ اگر تابع $f(x) = \frac{۱۴-m}{m+۲}\log_۵ x$ اکیداً صعودی باشد، چند مقدار طبیعی برای m یافت می‌شود؟

۱) ۱۱
۲) ۱۲
۳) ۱۳
۴) ۱۴

۸ در مورد تابع $f(x) = |۲x-۲| - |x| - x$ کدام گزینه صحیح است؟

۱) صعودی اکید است.
۲) صعودی است.
۳) نزولی اکید است.
۴) نزولی است.

۹ تابع $f(x)=\begin{cases} -x^{۲}-۸x & ;x\le ۰ \\ -x^{۳} & ;x>۰ \end{cases}$ روی بازهٔ $[a\ ,\ +\infty)$ نزولی اکید است. حداقل مقدار a کدام می‌باشد؟

۱) -۳
۲) ۳
۳) ۴
۴) -۴

۱۰ اگر تابع $f(x)$ پیوسته و صعودی اکید با دامنهٔ $\mathbb{R}$ از مبدأ مختصات عبور کند، جواب نامعادلهٔ $f(x^{۲}-|x|)\le ۰$ کدام است؟

۱) $-۱\le x\le ۱$
۲) $x\le -۱$
۳) $x\ge ۱$
۴) $\mathbb{R}-(-۱\ ,\ ۱)$

۱۱ اگر تابع f با دامنهٔ $\mathbb{R}$، صعودی اکید باشد، جواب نامعادلهٔ $f(۲x+۱)-f(۳x^{۲})>۰$ کدام است؟

۱) $(\frac{۱}{۳}\ ,\ ۱)$
۲) $(-۱\ ,\ \frac{۱}{۳})$
۳) $(-\frac{۱}{۳}\ ,\ ۱)$
۴) $(-۱\ ,\ -\frac{۱}{۳})$

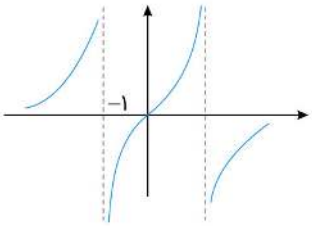
۱۲ اگر تابع $f(x)=|x-|x||+x^{۲}$ در بازهٔ $[a\ ,\ +\infty)$ صعودی اکید باشد، حداقل مقدار a کدام است؟

۱) صفر
۲) -۱
۳) ۱
۴) ۲

۱۳ اگر تابع $f(x)=|x-|x||+x^{۲}$ در بازهٔ $[a\ ,\ +\infty)$ صعودی اکید باشد، حداقل مقدار a کدام است؟

۱) صفر
۲) -۱
۳) ۱
۴) ۲

۱۴ در مورد تابع زیر کدام گزینه صحیح است؟



۱) در بازه $(۰\ ,\ +\infty)$ صعودی اکید است.
۲) بازه‌ای وجود دارد که تابع نزولی اکید باشد.
۳) در سه بازه صعودی اکید است.
۴) روی دامنه خود صعودی اکید است.

۱۵ تابع $f(x)=|x-۲|-|x+۳|$ در کدام بازه صعودی اکید است؟

۱) $[-۳\ ,\ ۲]$
۲) $[۲\ ,\ +\infty]$
۳) $(-\infty\ ,\ -۳]$
۴) هیچ بازه‌ای

۱۶ تابع $f(x)=\begin{cases}۲x-x^{۲} & ;x\geq ۰\\ -x^{۳} & ;x<۰\end{cases}$ در کدام بازه صعودی اکید است؟

۱) $[۰\,,+\infty)$ ۲) $[۱\,,+\infty)$

۳) $[۰\,,۱]$ ۴) $(-\infty\,,۰]$

۱۷ اگر تابع $y=|x-a|+|x+a+۱|$ در بازهٔ $[-۶\,,b]$ هم صعودی و هم نزولی باشد، مقدار b چقدر است؟ $(a>۰)$

۱) ۴ ۲) ۵

۳) ۶ ۴) ۷

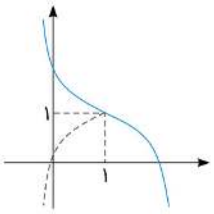
ریاضی

۱ گزینه ۱

$$y' = ۳x^۲ + ۲x + \frac{۱}{k} \geq ۰ \Rightarrow \Delta \leq ۰ \Rightarrow ۴ - ۴(۳)(\frac{۱}{k}) \leq ۰$$
$$\Rightarrow ۱ - \frac{۳}{k} \leq ۰ \Rightarrow \frac{k-۳}{k} \leq ۰ \Rightarrow ۰ < k \leq ۳$$

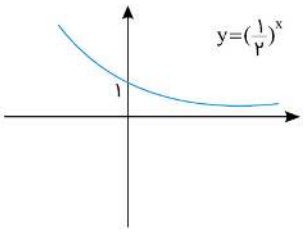
۲ گزینه ۲

نمودار تابع را رسم می‌کنیم:



ملاحظه می‌کنید که تابع نزولی اکید است.

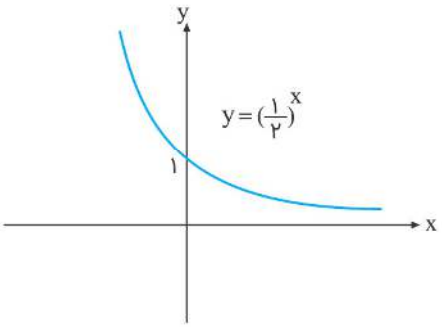
۳ تابع $y = (\frac{۱}{۲})^x$ تابعی اکیداً نزولی است.



و داریم:

$$\text{اکیداً نزولی } f \quad ; f(a) \leq f(b) \Rightarrow a \geq b$$
$$\text{اکیداً نزولی } y = (\frac{۱}{۲})^x \; ; \; (\frac{۱}{۲})^{۳x-۲} \leq (\frac{۱}{۲})^۶ \Rightarrow ۳x - ۲ \geq ۶ \Rightarrow ۳x \geq ۸ \Rightarrow x \geq \frac{۸}{۳}$$
$$\text{جواب} = [\frac{۸}{۳}, +\infty)$$

۴ تابع $y = (\frac{۱}{۲})^x$ تابعی اکیداً نزولی است.



و داریم:

f اکیداً نزولی ; $f(a) \le f(b) \Rightarrow a \ge b$

$y = (\frac{۱}{۲})^x$ اکیداً نزولی ; $(\frac{۱}{۲})^{۳x-۲} \le (\frac{۱}{۲})^{۶} \Rightarrow ۳x - ۲ \ge ۶ \Rightarrow ۳x \ge ۸ \Rightarrow x \ge \frac{۸}{۳}$

جواب $= [\frac{۸}{۳}, +\infty)$

۵ گزینه ۱

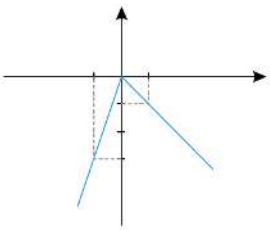
تابع $\log x$ صعودی اکید و درنتیجه تابع $\log(-x)$ نزولی اکید است؛ حال اگر $f(x)$ صعودی اکید باشد، بایستی:

$$\frac{m-۱}{m+۱} < ۰ \Rightarrow -۱ < m < ۱ \Rightarrow |m| < ۱$$

۶

$x \ge ۰ \Rightarrow y = -x$ اکیدا نزولی

$x < ۰ \Rightarrow y = ۳x$ اکیدا صعودی



۷ گزینه ۳

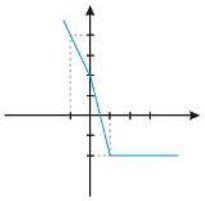
چون تابع $\log_{۵} x$ اکیداً صعودی است، پس برای آنکه $f(x)$ صعودی اکید باشد، باید $\frac{۱۴-m}{m+۲}$ مثبت باشد.

$$\frac{۱۴-m}{m+۲} > ۰ \Rightarrow -۲ < m < ۱۴ \xrightarrow{m\in\mathbb{N}} m \in \{۱, ۲, \cdots, ۱۳\}$$

پس به ازای ۱۳ عدد طبیعی m، تابع $f(x)$ اکیداً صعودی خواهد بود.

۸ گزینه ۴

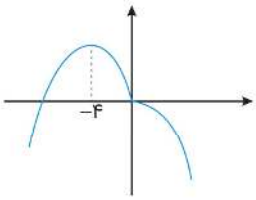
x	-۱	۰	۱	۲
y	۴	۲	-۲	-۲



باتوجه‌به نمودار، $f(x)$ تابعی نزولی است.

۹ گزینه ۴

نمودار ضابطهٔ اول یعنی $-x^{۲} - ۸x$ یک سهمی به طول رأس ۴- می‌باشد. ضابطهٔ دوم هم قرینهٔ تابع $x^{۳}$ نسبت به محور xها است. نمودار تابع به‌صورت زیر می‌باشد:



تابع در فاصلهٔ $[-۴, +\infty)$ نزولی اکید است. پس حداقل مقدار a برابر ۴- می‌باشد.

۱۰ گزینه ۱

چون $f(x)$ از مبدأ مختصات عبور می‌کند، $f(۰) = ۰$ است.

$$f(x^{۲} - |x|) \le f(۰) \xrightarrow{f \text{ صعودی است}} x^{۲} - |x| \le ۰ \Rightarrow |x|^{۲} - |x| \le ۰$$
$$\Rightarrow |x|(|x| - ۱) \le ۰ \xrightarrow[x=۰]{|x|\ge ۰} |x| \le ۱ \Rightarrow -۱ \le x \le ۱$$

۱۱ گزینه ۳

$$f(۲x+۱) > f(۳x^۲)$$

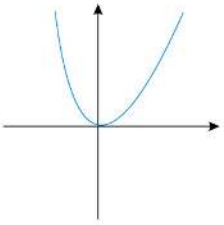
f صعودی اکید:

$$۲x+۱ > ۳x^۲ \Rightarrow ۳x^۲ - ۲x - ۱ < ۰ \Rightarrow -\frac{۱}{۳} < x < ۱$$

۱۲ گزینه ۱

$$x \geq ۰ \Rightarrow f(x) = x^۲$$
$$x < ۰ \Rightarrow f(x) = |x+x| + x^۲ = x^۲ - ۲x$$

نمودار تابع را رسم می‌کنیم:

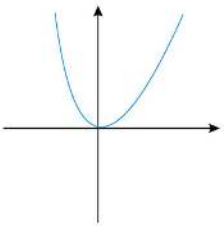


ملاحظه می‌کنید که تابع در بازهٔ $[۰ , +\infty)$ صعودی اکید است، پس حداقل مقدار a برابر صفر است.

۱۳ گزینه ۱

$$x \geq ۰ \Rightarrow f(x) = x^۲$$
$$x < ۰ \Rightarrow f(x) = |x+x| + x^۲ = x^۲ - ۲x$$

نمودار تابع را رسم می‌کنیم:



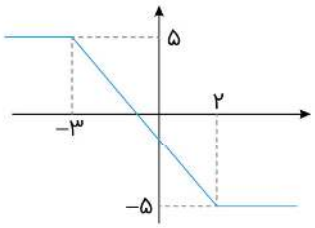
ملاحظه می‌کنید که تابع در بازه $[۰ , +\infty)$ صعودی اکید است، پس حداقل مقدار a برابر صفر است.

۱۴ گزینه ۳

تابع در سه بازه $(-\infty , -۱)$، $(-۱ , ۱)$ و $(۱ , +\infty)$ صعودی اکید است، اما در دامنه خود غیریکنوا است.

۱۵ گزینه ۴

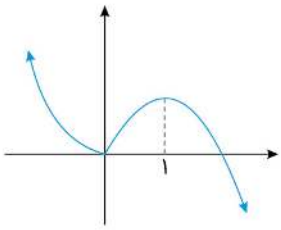
این تابع سرسره‌ای است.



همان‌طور که ملاحظه می‌کنید هیچ بازه‌ای یافت نمی‌شود که در آن تابع f صعودی اکید باشد.

۱۶ گزینه ۳

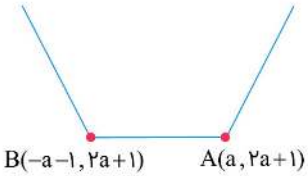
نمودار تابع را رسم می‌کنیم:



تابع موردنظر در بازهٔ $[۱ , ۰]$ صعودی اکید است.

۱۷ گزینه ۲

تابع موردنظر گلدانی شکل است. چون $a > ۰$ است، پس نمودار تقریبی به‌صورت زیر است:



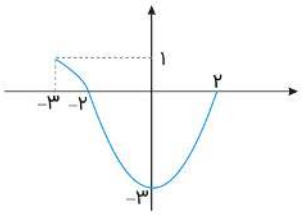
باتوجه‌به اطلاعات سؤال تابع در فاصلهٔ $[-a-۱ , a]$ ثابت (هم صعودی، هم نزولی) است.

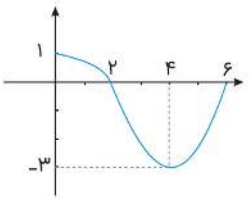
$$-a-۱=-۶ \Rightarrow a=۵$$

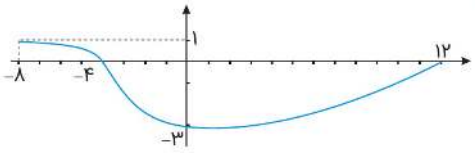
$$b=a=۵$$

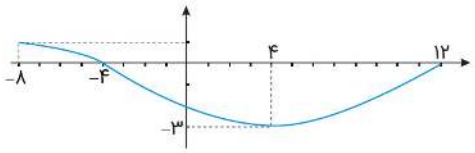
حسابان

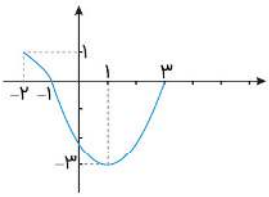
۱ اگر نمودار $y = f(2x+1)$ به‌صورت زیر باشد، نمودار $y = f(\frac{x}{2} - 1)$ کدام است؟



۱)


۲)


۳)


۴)


۲ تابع $f(x)$ با ضابطهٔ $f(x) = \sqrt{x+4} - \sqrt{1-x}$ یک‌به‌یک است. حاصل $f(1) + f^{-1}(1)$ کدام است؟

۱) $\sqrt{3}$
۲) $\sqrt{5}$
۳) $\sqrt{7}$
۴) $\sqrt{11}$

۳ تابع $y = \frac{x^2}{2} - 4x$ در یک فاصله نزولی اکید است. وارون این تابع در آن فاصله کدام است؟ (بیشترین فاصله مدنظر است)

۱) $f^{-1}(x) = 4 + \sqrt{2x+16}\ ;\ x \le 4$
۲) $f^{-1}(x) = 4 + \sqrt{2x+16}\ ;\ x \ge 4$
۳) $f^{-1}(x) = 4 - \sqrt{2x+16}\ ;\ x \ge -8$
۴) $f^{-1}(x) = 4 - \sqrt{2x+16}\ ;\ x \le -8$

۴ اگر $g = \{(۳ , -۱) , (۰ , \frac{۳}{۴})\}$ و $f(x) = x - \sqrt{x}$، تابع $(g^{-۱}of)^{-۱}$ کدام است؟

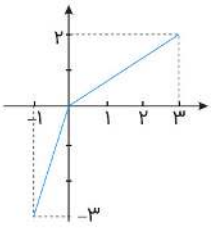
۱) $\{(\frac{۹}{۴} , ۰)\}$

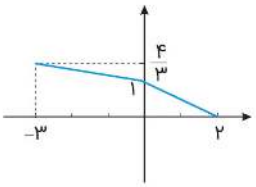
۲) $\{(۰ , \frac{۹}{۴})\}$

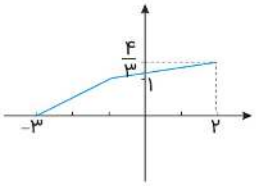
۳) $\{(۰ , \frac{۱}{۴})\}$

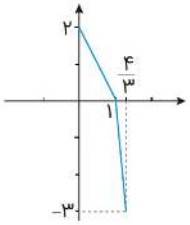
۴) $\{(۰ , \frac{۹}{۴}) , (۳ , \frac{۳}{۵})\}$

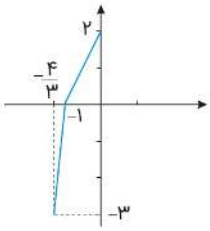
۵ اگر نمودار $y = f(-\frac{x}{۳} + ۱)$ به‌صورت زیر باشد، نمودار $f^{-۱}(x)$ کدام است؟



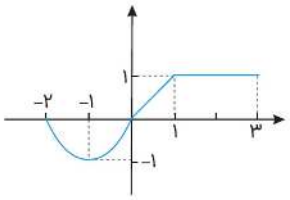
۱)


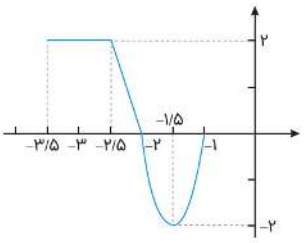
۲)


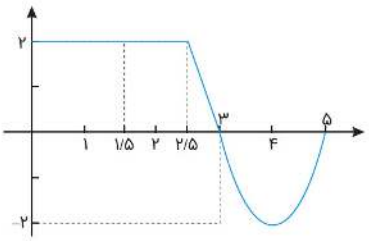
۳)


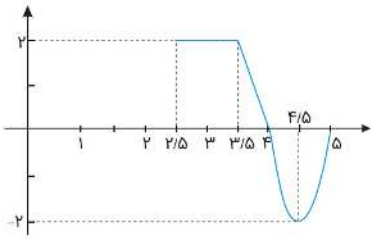
۴)


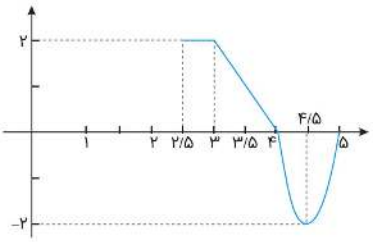
۶ اگر نمودار تابع $y = f(-\frac{x}{۲} + ۳)$ به‌صورت زیر باشد، نمودار تابع $y = ۲f(x - ۱)$ کدام است؟



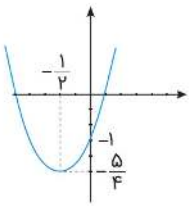
۱)


۲)


۳)


۴)


۷ $gof(x) = x^۴ - x^۲ - ۱$ و نمودار تابع g یک سهمی به شکل زیر است. ضابطهٔ تابع $f(x)$ کدام است؟



۱) $x^۲$

۲) $-x^۲$

۳) $-x^۲ - ۱$

۴) $x^۲ + ۱$

۸ اگر $f(x) = \frac{۱}{|x^۲ - ۱|}$ و $g(x) = \sqrt{x + ۲}$ باشد، معادلهٔ $fog(x) = g(x)$ دارای چند جواب است؟

۱) ۱

۲) ۲

۳) ۳

۴) صفر

۹ اگر $f(-۲x+۱)$ تابعی اکیداً نزولی و $f(-۱)=۰$ باشد، دامنهٔ تابع $y=\frac{۱}{\sqrt{(۱-x^۲)f(x-۱)}}$ شامل چند عدد صحیح مثبت است؟

۱) صفر
۲) ۲
۳) ۳
۴) بی‌شمار

۱۰ تابع $y=(۲x+|x+۱|)^۲$ در کدام بازه نزولی اکید است؟

۱) $(-\infty\ ,\ ۰]$
۲) $\mathbb{R}$
۳) $(-\infty\ ,\ -\frac{۱}{۳}]$
۴) $(-\infty\ ,\ -۱]$

۱۱ اگر $f(x)=\sqrt{x-۱}$ و $g(x)=\frac{۱}{\sqrt{-x+۲}}$ باشد، آنگاه دامنهٔ تابع $f\times g$ کدام است؟

۱) $[۱\ ,\ ۲]$
۲) $[۱\ ,\ ۲)$
۳) $[-۲\ ,\ ۱]$
۴) $(-۲\ ,\ ۱]$

۱۲ اگر $f=\{(-۱,۲),(-۳,a),(-۲,۵)\}$ و $g=\{(-۳,-۴),(-۲,b),(۱,-۱)\}$ و $f\times g=\{(-۳,\frac{۱}{۲}),(-۲,-۵)\}$ باشد، آنگاه حاصل $\frac{b}{a}$ کدام است؟

۱۳ اگر $f(x)=-|x-۱|$ و $g(x)=[۲x-۳]$، آنگاه حاصل $(\frac{g}{f})(\frac{۱}{۲})$ کدام است؟

۱۴ معادلهٔ $(x^۴+۲)([x^۲]+[-x^۲])(x-۳[\frac{x}{۳}])=۱$ چند جواب دارد؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) بی‌شمار
۴) صفر

ریاضی

۱۵ اگر برد تابع $\{(۸^{x-y}\ ,\ ۵^{۲x})\ ,\ (۲^{x+۳y}\ ,\ ۳^{x-y})\}=g$ مجموعهٔ $\{۴\}$ باشد، دامنهٔ آن را بنویسید. (ابتدا x و y را به دست آورید.)

۱۶ مساحت شش ضلعی منتظم که با S نمایش داده می‌شود به‌عنوان تابعی از طول ضلع a کدام است؟

۱) $S=\frac{۴a^۲\sqrt{۳}}{۳}$
۲) $S=\frac{۳a^۲\sqrt{۳}}{۲}$
۳) $S=\frac{a^۲\sqrt{۳}}{۲}$
۴) $S=\frac{a^۲\sqrt{۳}}{۴}$

۱۷ مساحت محدود به نمودار تابع $f(x)=۳-|x+۴|$ و محور طول‌ها کدام است؟

۱) ۱۲
۲) ۹
۳) ۶
۴) ۳

۱۸ چندجمله‌ای $g(x)$ مفروض است به‌طوری‌که $f(x)=\frac{x^۲+ax+b}{g(x)+x}$ یک تابع ثابت با دامنهٔ $\mathbb{R}-\{۱,۲\}$ می‌باشد. دوتایی (a,b) کدام است؟

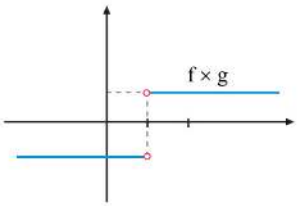
۱) $(۲,۳)$
۲) $(۲,-۳)$
۳) $(-۳,۲)$
۴) $(۳,-۲)$

۱۹ تابع $f(x)=|-۲x-۳|$ به‌صورت چندضابطه‌ای کدام است؟

۱) $f(x)=\begin{cases}۲x+۳ & ;x\geq -\frac{۳}{۲}\\ -۲x-۳ & ;x<-\frac{۳}{۲}\end{cases}$
۲) $f(x)=\begin{cases}۲x+۳ & ;x\leq -\frac{۳}{۲}\\ -۲x-۳ & ;x>-\frac{۳}{۲}\end{cases}$
۳) $f(x)=\begin{cases}-۲x-۳ & ;x\leq -\frac{۳}{۲}\\ ۲x+۳ & ;x>-\frac{۳}{۲}\end{cases}$
۴) $f(x)=\begin{cases}-۲x+۳ & ;x\geq -\frac{۳}{۲}\\ ۲x-۳ & ;x<-\frac{۳}{۲}\end{cases}$

حسابان

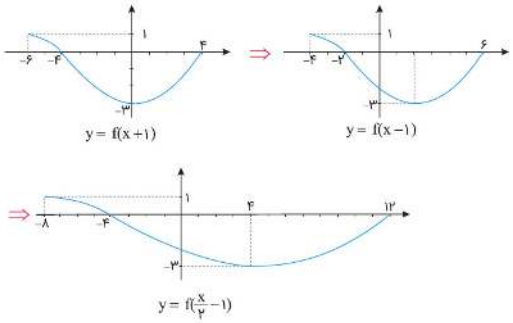
۲۰ اگر $f(x)=\frac{۱}{x-۱}$ و نمودار تابع $(f\times g)(x)$ به‌صورت زیر باشد، آنگاه تابع $g(x)$ کدام است؟



۱) $\frac{۱}{|x+۱|}$
۲) $\frac{۱}{|x-۱|}$
۳) $|x+۱|$
۴) $|x-۱|$

حسابان

۱ گزینه ۳



۲ گزینه ۲

$$f(x)=۱ \Rightarrow \sqrt{x+۴}-\sqrt{۱-x}=۱ \Rightarrow \sqrt{x+۴}=۱+\sqrt{۱-x}$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} x+۴=۱+۱-x+۲\sqrt{۱-x}$$

$$\Rightarrow ۲x+۲=۲\sqrt{۱-x} \xrightarrow{\div ۲} x+۱=\sqrt{۱-x}$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} x^{۲}+۲x+۱=۱-x \Rightarrow x^{۲}+۳x=۰ \Rightarrow x=۰\,,\,-۳$$

$x=-۳$ قابل‌قبول نیست.

$$f(۰)=۱ \Rightarrow f^{-۱}(۱)=۰$$

$$f(۱)+f^{-۱}(۱)=\sqrt{۵}+۰=\sqrt{۵}$$

۳ گزینه ۳

چون دهانه سهمی روبه‌بالا است پس سهمی در فاصله $(-\infty\ ,\ -\frac{b}{۲a}]$ اکیداً نزولی است.

$$-\frac{b}{۲a}=\frac{۴}{۲\times\frac{۱}{۲}}=۴\ \Rightarrow D_f=(-\infty\ ,\ ۴]$$

دراین‌حالت برد تابع f با دامنه محدودشده آن برابر $[-\frac{\Delta}{۴a}\ ,\ +\infty)$ یا $[f(۴)\ ,\ +\infty)$ خواهد بود.

$$f(۴)=\frac{۱۶}{۲}-۴\times۴=۸-۱۶=-۸\Rightarrow R_f=[-۸\ ,\ +\infty)$$

$$y=\frac{x^۲}{۲}-۴x\xrightarrow{\times۲}۲y=x^۲-۸x$$

$$\xrightarrow{+۱۶}۲y+۱۶=(x-۴)^۲\Rightarrow\sqrt{۲y+۱۶}=|x-۴|$$

$$\xrightarrow{x\le۴}\sqrt{۲y+۱۶}=۴-x\Rightarrow x=۴-\sqrt{۲y+۱۶}$$

$$\Rightarrow f^{-۱}(x)=۴-\sqrt{۲x+۱۶}$$

$$D_{f^{-۱}}=R_f=[-۸\ ,\ +\infty)$$

۴ گزینه ۲

$$(g^{-۱}of)^{-۱}(x)=(f^{-۱}og)(x)=f^{-۱}(g(x))$$

$$\xrightarrow{x=۰}g(۰)=\frac{۳}{۴}\Rightarrow(g^{-۱}of)^{-۱}(۰)=f^{-۱}(\frac{۳}{۴})$$

فرض می‌کنیم $f^{-۱}(\frac{۳}{۴})=x$، در این صورت $f(x)=\frac{۳}{۴}$، بنابراین:

$$x-\sqrt{x}=\frac{۳}{۴}\Rightarrow\sqrt{x}=x-\frac{۳}{۴}$$

$$\xrightarrow{\text{توان }۲}x=x^۲-\frac{۳}{۲}x+\frac{۹}{۱۶}$$

$$\Rightarrow x^۲-\frac{۵}{۲}x+\frac{۹}{۱۶}=۰$$

$$\Rightarrow x=\frac{۹}{۴}\ \text{ق ق}\ ,\ x=\frac{۱}{۴}\quad\text{غ ق ق}$$

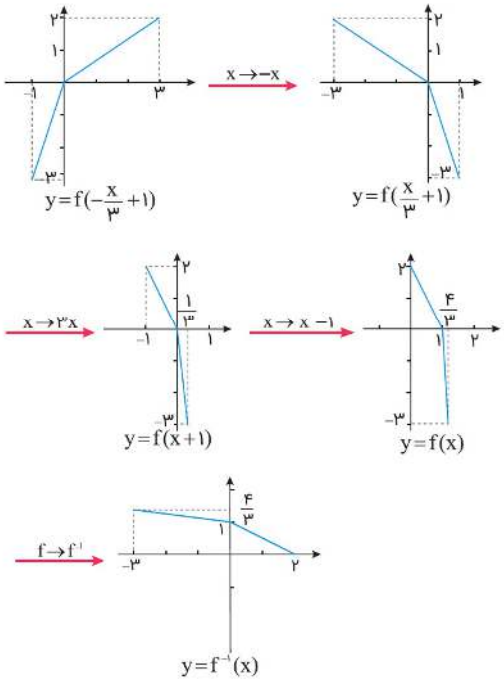
$$\xrightarrow{x=۳}g(۳)=-۱\Rightarrow(g^{-۱}of)^{-۱}(۳)=f^{-۱}(-۱)$$

اگر $f^{-۱}(-۱)=x$، آنگاه $f(x)=-۱$. در این صورت:

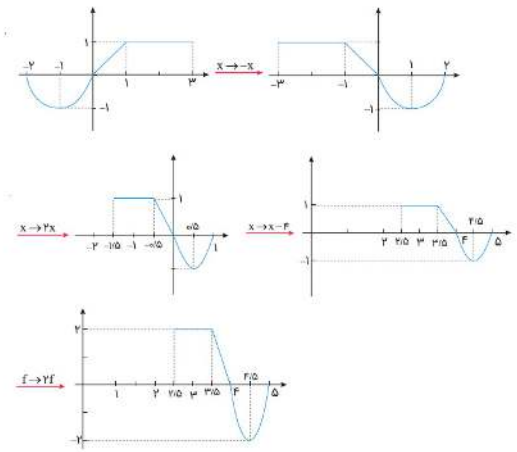
$$x-\sqrt{x}=-۱\Rightarrow x+۱=\sqrt{x}\Rightarrow x^۲+x+۱=۰\Rightarrow\Delta=-۳<۰\quad\text{غ ق ق}$$

$$\Rightarrow(g^{-۱}of)^{-۱}=\{(۰\ ,\ \frac{۹}{۴})\}$$

۵ گزینه ۱



۶ گزینه ۳



۷ گزینه ۲

باتوجه‌به نمودار داده‌شده نمودار g به‌صورت $g(x)=a(x+\frac{۱}{۲})^{۲}-\frac{۵}{۴}$ است، باتوجه‌به اینکه $g(۰)=-۱$ است مقدار a برابر ۱ به دست می‌آید. پس:

$$g(x)=(x+\frac{۱}{۲})^{۲}-\frac{۵}{۴}=x^{۲}+x-۱$$

حال داریم:

$$\begin{cases} gof(x)=f^{۲}(x)+f(x)-۱ \\ gof(x)=x^{۴}-x^{۲}-۱ \end{cases} \Rightarrow f^{۲}(x)+f(x)-۱=x^{۴}-x^{۲}-۱$$

$$\Rightarrow f^{۲}(x)+f(x)-x^{۴}+x^{۲}=۰$$
$$\Rightarrow (f(x)+x^{۲})(f(x)-x^{۲}+۱)=۰$$

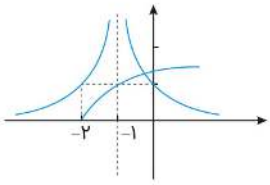
$$\Rightarrow \begin{cases} f(x)=-x^{۲} \\ f(x)=x^{۲}-۱ \end{cases}$$

۸ گزینه ۱

$$fog(x)=f(g(x))=\frac{۱}{|(\sqrt{x+۲})^{۲}-۱|}=\frac{۱}{|x+۱|}$$

$$\xrightarrow{fog(x)=g(x)} \frac{۱}{|x+۱|}=\sqrt{x+۲}$$

برای به دست آوردن تعداد جواب‌ها از روش رسم استفاده می‌کنیم:



همان‌طور که می‌بینیم معادله دارای یک جواب است.

۹ گزینه ۱

نکته: اگر f تابع اکیداً نزولی و g تابع اکیداً صعودی باشد، $f(g(x))$ تابعی اکیداً نزولی است. به‌طور کلی می‌توان برای توابع صعودی علامت $(+)$ و برای توابع نزولی علامت $(-)$ در نظر گرفت و با ضرب کردن علامت‌ها، صعودی یا نزولی بودن تابع مرکب را تعیین کرد.

ازآنجاکه $f(-۲x+۱)$ و $y=-۲x+۱$ توابعی اکیداً نزولی هستند، تابع f باید اکیداً صعودی باشد. مجدداً طبق همان نکته چون f و $y=x-۱$ اکیداً صعودی هستند، تابع $f(x-۱)$ اکیداً صعودی خواهد بود.

$$۱-x^۲=۰ \Rightarrow x=\pm ۱$$

$$f(x-۱)=۰ \xrightarrow{f(-۱)=۰} x-۱=-۱ \Rightarrow x=۰$$

$$\Rightarrow x<۰ \xrightarrow{f(x-۱) \text{ اکیداً صعودی}} f(x-۱)<f(-۱)=۰ \Rightarrow x<۰ \Rightarrow f(x-۱)<۰$$

	$-\infty$	-۱	۰	۱	$+\infty$
$f(x-۱)$	$-$	$-$	$+$	$+$	
$۱-x^۲$	$-$	$+$	$+$	$-$	
y	$+$ ج	ث	$-$ ث	$+$ ج	ث $-$

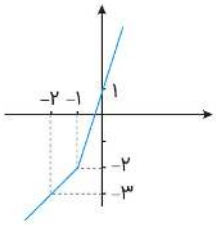
$$D_y=(-\infty\ ,\ -۱)\cup(۰\ ,\ ۱)$$

بنابراین دامنهٔ تابع y شامل هیچ صحیح مثبتی نیست.

۱۰ گزینه ۳

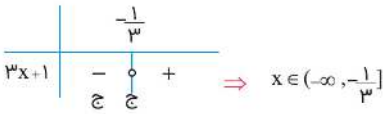
نکته: اگر f تابع اکیداً نزولی و g تابع اکیداً صعودی باشد، $f(g(x))$ تابعی اکیداً نزولی است. به‌طور کلی می‌توان برای توابع صعودی علامت $(+)$ و برای توابع نزولی علامت $(-)$ در نظر گرفت و با ضرب کردن علامت‌ها، صعودی یا نزولی بودن تابع مرکب را تعیین کرد.

$$f(x) = ۲x + |x+۱| = \begin{cases} ۳x+۱ & ; x \geq -۱ \\ x-۱ & ; x < -۱ \end{cases}$$



همان‌طور که می‌بینیم شیب هردو ضابطهٔ نمودار تابع f مثبت و درنتیجه اکیداً صعودی است. همچنین می‌دانیم تابع $g(x) = x^۲$ به ازای $x \leq ۰$ اکیداً نزولی است. بنابراین طبق نکته تابع $y = (۲x + |x+۱|)^۲$ به ازای xهایی که $۲x + |x+۱| \leq ۰$ هستند، اکیداً نزولی خواهد بود.

$$۲x + |x+۱| = ۰ \Rightarrow \begin{cases} ۳x+۱ = ۰ \Rightarrow x = -\frac{۱}{۳} \text{ ق ق} \\ x-۱ = ۰ \Rightarrow x = ۱ \text{ غ ق ق} \end{cases}$$



$\Rightarrow x \in (-\infty, -\frac{۱}{۳}]$

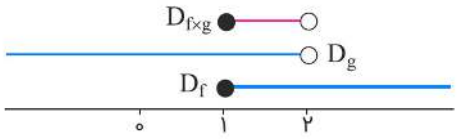
۱۱ گزینه ۲

$$D_{f\times g} = D_f \cap D_g$$

$$f(x) = \sqrt{x-۱} \;;\; x-۱ \geq ۰ \Rightarrow x \geq ۱ \Rightarrow D_f : [۱ , +\infty)$$

$$g(x) = \frac{۱}{\sqrt{-x+۲}} \;\;;\;\; -x+۲ > ۰ \Rightarrow x < ۲ \Rightarrow D_g : (-\infty , ۲)$$

$$D_{f\times g} = [۱ , +\infty) \cap (-\infty , ۲) = [۱ , ۲)$$



۱۲

$$D_f = \{-۱, -۳, -۲\} \quad , \quad D_g = \{-۳, -۲, ۱\}$$

$$D_{f\times g} = D_f \cap D_g = \{-۳, -۲\}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(-۳) = a \\ g(-۳) = -۴ \\ (f\times g)(-۳) = \frac{۱}{۲} \end{cases} \Rightarrow -۴a = \frac{۱}{۲} \Rightarrow a = -\frac{۱}{۸}$$

$$\begin{cases} f(-۲) = ۵ \\ g(-۲) = b \\ (f\times g)(-۲) = -۵ \end{cases} \Rightarrow ۵b = -۵ \Rightarrow b = -۱ \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{-۱}{-\frac{۱}{۸}} = ۸$$

۱۳

$$f(\tfrac{۱}{۲}) = -|\tfrac{۱}{۲} - ۱| = -|-\tfrac{۱}{۲}| = -\tfrac{۱}{۲}$$

$$g(\tfrac{۱}{۲}) = [۲(\tfrac{۱}{۲}) - ۳] = [۱ - ۳] = [-۲] = -۲$$

$$(\frac{g}{f})(\tfrac{۱}{۲}) = \frac{g(\frac{۱}{۲})}{f(\frac{۱}{۲})} = \frac{-۲}{-\frac{۱}{۲}} = ۴$$

۱۴ گزینه ۴

می‌دانیم:

$$۰ \le x - [x] < ۱ \Rightarrow ۰ \le ۳(\frac{x}{۳} - [\frac{x}{۳}]) < ۳$$

$$[x^۲] + [-x^۲] = \begin{cases} ۰ & ; x \in \mathbb{Z} \\ -۱ & ; x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

اگر $x \in \mathbb{Z}$ باشد، باتوجه‌به اینکه $[x^۲] + [-x^۲] = ۰$، به رابطهٔ $۰ = ۱$ می‌رسیم که غیرممکن است.

اگر $x \notin \mathbb{Z}$ باشد، داریم:

$$\underbrace{\underbrace{(x - ۳[\frac{x}{۳}])}_{\text{مثبت}} \underbrace{([x^۲] + [-x^۲])}_{-۱} \underbrace{(x^۴ + ۲)}_{\text{مثبت}}}_{\text{منفی}} = ۱$$

می‌بینیم که در این حالت هم به یک رابطهٔ غیرممکن می‌رسیم.

ریاضی

۱۵

$$D = \{۳^{x-y}\ ,\ ۵^{۲x}\}$$

$$R = \{۲^{x+۳y}\ ,\ ۸^{x-y}\} = \{۴\}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۲^{x+۳y} = ۴ \Rightarrow ۲^{x+۳y} = ۲^۲ \Rightarrow \begin{cases} x + ۳y = ۲ \\ ۳x - ۳y = ۲ \end{cases} \\ ۸^{x-y} = ۴ \Rightarrow ۲^{۳x-۳y} = ۲^۲ \end{cases}$$

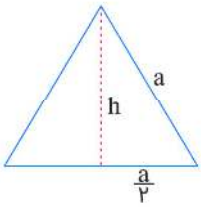
$$۴x = ۴ \Rightarrow x = ۱$$

$$۱ + ۳y = ۲ \Rightarrow ۳y = ۱ \Rightarrow y = \frac{۱}{۳}$$

$$D = \{۳^{۱-\frac{۱}{۳}}\ ,\ ۵^{۲(۱)}\} = \{۳^{\frac{۲}{۳}}\ ,\ ۲۵\}$$

۱۶ گزینه ۲

می‌دانیم هر شش ضلعی منتظم متشکل است از شش مثلث متساوی‌الاضلاع.



مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع:

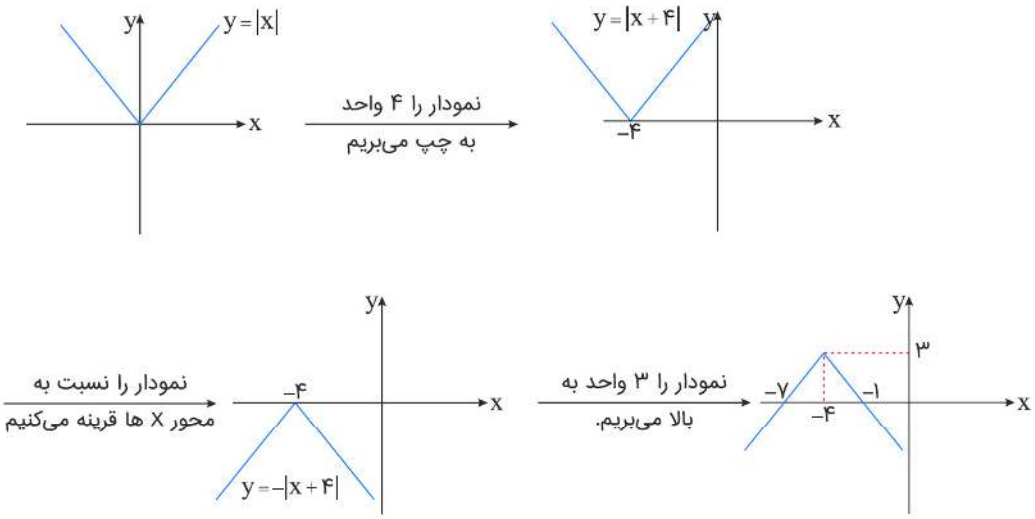
$$a^۲ = h^۲ + \frac{a^۲}{۴} \Rightarrow h^۲ = ۳\frac{a^۲}{۴} \Rightarrow h = \frac{a\sqrt{۳}}{۲}$$

$$S_{\text{مثلث}} = \frac{h \times a}{۲} = \frac{۱}{۲} \times \frac{a^۲\sqrt{۳}}{۲} = a^۲\frac{\sqrt{۳}}{۴}$$

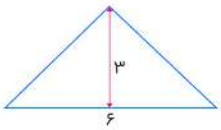
$$\Rightarrow S_{\text{شش ضلعی}} = ۶ \times \frac{a^۲\sqrt{۳}}{۴} = \frac{۳a^۲\sqrt{۳}}{۲}$$

۱۷ گزینه ۲

با نمودار تابع $y = |x|$ شروع می‌کنیم و به کمک انتقال تابع را رسم می‌کنیم.



حال باید مساحت مثلثی را پیدا کنیم که قاعده آن ۶، $(۶ = (-۷) - -۱)$ و ارتفاع آن ۳ است.



$$s = \frac{۶ \times ۳}{۲} = ۹$$

۱۸ گزینه ۳

باتوجه‌به اینکه صورت کسر درجهٔ دوم است، پس باید مخرج هم درجهٔ دوم باشد. $g(x) + x$ را باید طوری انتخاب کنیم که ریشه‌هایش ۱ و ۲ باشد، پس مخرج را $A(x-۱)(x-۲)$ در نظر می‌گیریم.

$$f(x) = \frac{x^۲ + ax + b}{A(x-۱)(x-۲)} = \frac{x^۲ + ax + b}{Ax^۲ - ۳Ax + ۲A}$$

چون $f(x)$ تابع ثابت است، پس:

$$\frac{۱}{A} = \frac{a}{-۳A} = \frac{b}{۲A} \Rightarrow ۱ = \frac{a}{-۳} = \frac{b}{۲} \Rightarrow a = -۳\ ,\ b = ۲$$

۱۹ گزینه ۳

تابع قدر مطلق به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$|x| = \begin{cases} x & ; x \geq ۰ \\ -x & ; x < ۰ \end{cases} \quad , \quad f(x) = |-۲x - ۳|$$

اگر $-۲x - ۳$ مثبت یا صفر باشد $(-۲x - ۳ \geq ۰)$، خروجی خود $-۲x - ۳$ است. اگر $-۲x - ۳$ منفی باشد $(-۲x - ۳ < ۰)$، خروجی قرینهٔ $-۲x - ۳$ است:

$$\begin{cases} -۲x - ۳ \geq ۰ \Rightarrow f(x) = -۲x - ۳ \\ -۲x - ۳ < ۰ \Rightarrow f(x) = -(-۲x - ۳) = ۲x + ۳ \end{cases}$$

$$f(x) = |-۲x - ۳| = \begin{cases} -۲x - ۳ & ; -۲x - ۳ \geq ۰ \\ ۲x + ۳ & ; -۲x - ۳ < ۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} -۲x - ۳ & ; x \leq -\frac{۳}{۲} \\ ۲x + ۳ & ; x > -\frac{۳}{۲} \end{cases}$$

حسابان

۲۰ گزینه ۴

از نمودار $f \times g$ نتیجه می‌گیریم:

$$(f \times g)(x) = \begin{cases} ۱ & ; x > ۱ \\ -۱ & ; x < ۱ \end{cases} \Rightarrow (f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$$

$$\begin{cases} (f \times g)(x) = ۱ \xrightarrow{x>۱} ۱ = \frac{۱}{x-۱} \times g(x) \xrightarrow{x>۱} g(x) = x - ۱ \\ (f \times g)(x) = -۱ \xrightarrow{x<۱} -۱ = \frac{۱}{x-۱} \times g(x) \xrightarrow{x<۱} g(x) = -(x-۱) \end{cases} \Rightarrow g(x) = |x - ۱|$$

معادله درجه دو، سهمی، معادله گویا و گنگ

تعریف معادلهٔ درجه دوم ــ حل معادلهٔ درجه دوم

هر معادله به شکل $ax^۲+bx+c=۰$ را که در آن a، b و c اعداد حقیقی و $a\neq ۰$ می‌باشد را یک معادلهٔ درجه دوم برحسب x می‌نامیم (مانند معادلات $x^۲-۱۳x+۳۶=۰$ و $۲x^۲+۵x-۳=۰$).

۱) حل معادلهٔ درجه دوم به روش تجزیه: در این روش، عبارت درجه دوم را با استفاده از فاکتورگیری یا اتحادها به حاصلضرب دو عبارت تجزیه می‌کنیم و بعد هر یک از آن‌ها را برابر صفر می‌گذاریم. اگر A و B دو عبارت جبری باشند $AB=۰$ زمانی اتفاق می‌افتد که حداقل یکی از عبارت‌های A یا B صفر شوند یعنی $A=۰$ یا $B=۰$.

مثال:

۱) $x^۲+۲x-۸=۰$

* در حل برخی معادلات، تجزیه کردن به علت بزرگ بودن عدد ضرب سخت می‌شود. برای آن که این کار راحت انجام شود کافی است عدد ضرب را تا حد امکان تجزیه کنید.

۲) $x^۲-۳x-۱۸۰=۰$

۳) $x^۲-۳۱x-۱۸۰=۰$

تمرین: یکی از ریشه‌های معادلهٔ $(m+۱)x^۲-۲mx+m-۵=۰$ ، $x=۲$ است. ریشه دیگر این معادله کدام است؟

اگر $x^۲$ ضریب داشته باشد، می‌توانیم از روش زیر، معادله را در صورت داشتن ریشه تجزیه کنیم:

تمرین: $۳x^۲+۵x-۲=۰ \Rightarrow x^۲+۵x-۶=۰ \xrightarrow{\text{تجزیه}} (x+۶)(x-۱)=۰ \Rightarrow (x+\frac{۶}{③})(③x-۱)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=-۲ \\ x=\frac{۱}{۳} \end{cases}$

اصلاً اهمیتی ندارد که عدد ۳در پرانتز اول و دوم به ترتیب پشت x و زیر عدد ثابت قرار بگیرد، یعنی تجزیه به صورت $(x-\frac{۱}{③})(③x+۶)$ گناه ندارد.

۴) $۷x^۲+۱۶x+۴=۰$ (کنکور ۹۸)

۵) $۱۵x^۲+۷۳x+۱۴=۰$ (کنکور ۱۴۰۲)

* در معادلهٔ درجه دوم $ax^۲+bx+c=۰$ اگر $a+b+c=۰$، آن‌گاه یکی از ریشه‌ها برابر ۱ و ریشهٔ دیگر برابر $\frac{c}{a}$ است.

اثبات:

$a+b+c=۰ \Rightarrow c=-a-b$

$\Rightarrow ax^۲+bx+c=ax^۲+bx-a-b=۰ \Rightarrow \underbrace{a(x^۲-۱)}_{(x-۱)(x+۱)}+b(x-۱)=۰ \Rightarrow (x-۱)(ax+a+b)=۰$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-1=0 \Rightarrow x=1 \\ ax+a+b=0 \Rightarrow ax=\underbrace{-a-b}_{c} \Rightarrow ax=c \Rightarrow x=\frac{c}{a} \end{cases}$$

* در معادلهٔ درجه دوم $ax^2+bx+c=0$ اگر $a+c=b$، آن‌گاه یکی از ریشه‌ها -1 و ریشهٔ دیگر $-\frac{c}{a}$ است.

اثبات:

$$a+c=b \Rightarrow c=b-a$$

$$\Rightarrow ax^2+bx+c=ax^2+bx+b-a=a\underbrace{(x^2-1)}_{(x-1)(x+1)}+b(x+1)=0 \Rightarrow (x+1)(ax-a+b)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+1=0 \Rightarrow x=-1 \\ ax-a+b=0 \Rightarrow ax=a-b \Rightarrow ax=-c \Rightarrow x=-\frac{c}{a} \end{cases}$$

۲) حل معادلهٔ درجه دوم به کمک ریشه‌گیری: بر اساس این روش، اگر a یک عدد حقیقی نامنفی (بزرگ‌تر یا مساوی صفر) باشد، ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم $x^2=a$ عبارت‌اند از: $x=\sqrt{a}$ و $x=-\sqrt{a}$.

۶) $x^2-4=0$

۷) $(x-2)^2-16=0$

۸) $(17-x)^2-25=0$

۳) در معادله درجه دوم با فرض $\Delta=b^2-4ac$:

$\Delta>0 \Rightarrow$ معادله دو ریشه متمایز دارد : $x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$

$\Delta=0 \Rightarrow$ معادله یک ریشه مضاعف دارد : $x=\frac{-b}{2a}$

$\Delta<0 \Rightarrow$ معادله ریشه ندارد

۹) $x^2-x-1=0$

* توجه کنید که اگر b بر ۲ بخش‌پذیر باشد و نصف آن را b' بنامیم:

$$\Delta'=b'^2-ac \Rightarrow x=\frac{-b'\pm\sqrt{\Delta'}}{a}$$

۱۰) $x^2-4x+2=0$

اگر بدانیم x_0 ریشه مضاعف معادله درجه ۲ است، باید به ۴ نکته توجه کنید:

الف) ریشه در معادله صدق می‌کند.

ب) $x_0 = \frac{-b}{2a}$

پ) $\Delta = 0$

ت) $ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$

تمرین: به ازای کدام مقدار m، در معادلهٔ درجه دوم $(m-2)x^2 - 3x + m + 2 = 0$ هر دو ریشه برابرند؟

۱) $\pm\frac{1}{2}$ ۲) $\pm\frac{3}{4}$ ۳) $\pm\frac{5}{4}$ ۴) $\pm\frac{5}{2}$

تمرین: اگر معادله $2x^2 + ax + b = 0$ دارای ریشه مضاعف $x = 3$ باشد، حاصل $a + b$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

حل معادلهٔ درجه ۳ و ۴ با تجزیه و فاکتورگیری:

۱۱) $x^3 - x^2 - 4x + 4 =$

۱۲) $x^3 - x^2 - x + 1 = 0$

۱۳) $x^4 - 3x^3 + 6x - 4 = 0$

* اگر بتوانیم ریشه را حدس بزنیم آن‌وقت عملیات تجزیه بسیار ساده خواهد بود:

۱۴) $x^3 + 2x^2 - 4x + 1 = 0 \quad (x = 1)$

۱۵) $x^3 - 2x^2 - 4x - 1 = 0 \quad (x = -1)$

منبع:

ریاضی

۱ در یک دنبالهٔ هندسی با جملهٔ اول a، تساوی $\frac{a_۶}{a_۲{}^۳} + \frac{a_۲}{a^۲} = ۲$ برقرار است. نسبت $a^۲$ به جملهٔ دوم کدام می‌تواند باشد؟

۱) -۲
۲) ۲
۳) $\frac{۱}{۲}$
۴) $-\frac{۱}{۲}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

۲ مثلثی که رئوس آن مبدأ مختصات، نقطه‌ای با عرض c و نقطه‌ای با طول یکی از ریشه‌های معادله $-x^۲ + ۲x + c = ۰$ روی محورهای مختصات باشد را در نظر بگیرید. اگر مساحت مثلث برابر $c^۲$ باشد، مقدار c کدام است؟

۱) ۰/۷۵
۲) ۰/۸
۳) ۱/۲
۴) ۱/۲۵

کنکور سراسری علوم انسانی خارج از کشور ۱۴۰۲

۳ مثلثی که رئوس آن مبدأ مختصات، نقطه‌ای با عرض c و نقطه‌ای با طول یکی از ریشه‌های معادله $x^۲ + ۵x + c = ۰$ روی محورهای مختصات باشد را در نظر بگیرید. اگر مساحت مثلث برابر $c^۲$ باشد، مقدار c کدام است؟ $(c \neq ۰)$

۱) ۱/۷۵
۲) ۲/۷۵
۳) -۱/۷۵
۴) -۲/۷۵

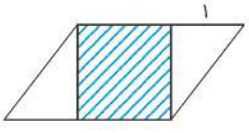
کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۴۰۲

۴ خط $(m^۲ - ۱)y = ۳ + ۲mx$، به‌ازای دو مقدار m با جهت مثبت محور xها زاویهٔ ۶۰ درجه می‌سازد. اختلاف مقادیر m کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۳}$
۲) $۴\sqrt{۳}$
۳) $\frac{۲}{\sqrt{۳}}$
۴) $\frac{۴}{\sqrt{۳}}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

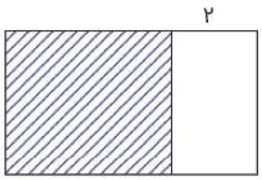
۵ در شکل زیر مساحت مربع هاشورخورده از $\frac{۳}{۴}$ مساحت یکی از مثلث‌ها به‌اندازهٔ $\frac{۲۷}{۳۲}$ واحد مربع بیشتر است. اندازهٔ قاعدهٔ متوازی‌الاضلاع، کدام است؟



۱) $\frac{۹}{۸}$
۲) $\frac{۳}{۲}$
۳) $\frac{۱۷}{۸}$
۴) $\frac{۵}{۲}$

کنکور سراسری علوم انسانی خارج از کشور ۱۳۹۹

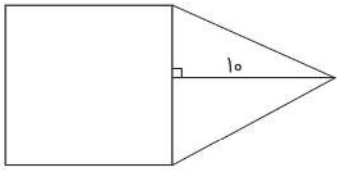
۶ در شکل زیر، مساحت مربع از $\frac{۳}{۴}$ مساحت مستطیل بزرگ‌تر، ۱۸ واحد مربع بیشتر است. محیط مستطیل بزرگ‌تر کدام است؟



۱) ۴۴
۲) ۴۸
۳) ۵۲
۴) ۵۴

کنکور سراسری علوم انسانی خارج از کشور ۱۳۹۹

۷ در شکل زیر، مساحت مثلث متساوی‌الساقین، از $\frac{۲}{۳}$ مساحت مربع به اندازهٔ $\frac{۸}{۳}$ واحد مربع، کمتر است. مساحت مثلث، کدام است؟



۱) ۳۰
۲) ۳۵
۳) ۴۰
۴) ۴۵

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۳۹۹

۸ طول یک مستطیل ۲ واحد کمتر از ۱/۵ برابر عرض آن است. اگر مساحت مستطیل ۱۹۲ واحد مربع باشد، محیط آن کدام است؟

۱) ۵۲
۲) ۵۶
۳) ۶۰
۴) ۶۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

۹ مجموع پول علی و اکرم ۱۰۰ تومان است. اگر علی ۱۰ تومان از پولش را به اکرم بدهد، آنگاه حاصل‌ضرب پول‌های باقی‌ماندهٔ آن‌ها ۴۷۵ تومان خواهد شد. پول اولیهٔ اکرم، کدام است؟

۱) ۹
۲) ۱۵
۳) ۸۵
۴) ۹۱

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

منبع:

ریاضی

۱ گزینه ۴

$$a_n = ar^{n-1}$$

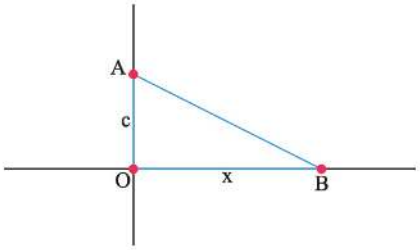
$$\frac{a_6}{a_2^3} + \frac{a_2}{a^2} = 2 \Rightarrow \frac{ar^5}{a^3r^3} + \frac{ar}{a^2} = 2 \Rightarrow \left(\frac{r}{a}\right)^2 + \frac{r}{a} - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{r}{a} = 1 \\ \frac{r}{a} = -2 \end{cases}$$

$$\frac{a^2}{a_2} = \frac{a^2}{ar} = \frac{a}{r} \Rightarrow \frac{a}{r} = 1 \quad \text{یا} \quad \frac{a}{r} = -\frac{1}{2}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

۲ گزینه ۴

مثلث OAB به اضلاع c و x روی محورهای مختصات نشان داده شده است. پس:



$$S_{OAB} = c^2 \Rightarrow \frac{1}{2}c \times x = c^2 \Rightarrow x = 2c$$

مقدار x ریشه معادله است و در آن صدق می‌کند، یعنی:

$$-x^2 + 2x + c = 0 \xrightarrow{x=2c} -4c^2 + 4c + c = 0 \Rightarrow -4c^2 + 5c = 0$$

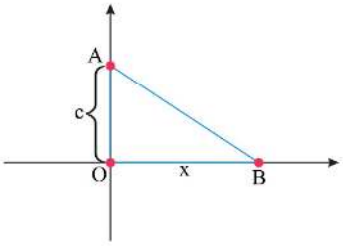
$$c(-4c + 5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} c = 0 \\ -4c + 5 = 0 \Rightarrow c = \frac{5}{4} = 1/25 \end{cases}$$

کنکور سراسری علوم انسانی خارج از کشور ۱۴۰۲

۳ گزینه ۴

رابطه مساحت مثلث قائم الزاویه عبارت است از:

$$S = \frac{۱}{۲}OA \times OB \Rightarrow c^۲ = \frac{۱}{۲} \times c \times x \Rightarrow x = ۲c$$



در معادله قرار می‌دهیم:

$$x^۲ + ۵x + c = ۰ \Rightarrow ۴c^۲ + ۱۰c + c = ۰ \Rightarrow ۴c^۲ + ۱۱c = ۰ \Rightarrow \begin{cases} c = ۰ \\ c = -\frac{۱۱}{۴} = -۲/۷۵ \end{cases}$$

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۴۰۲

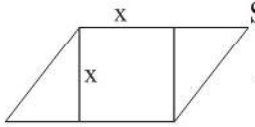
۴ گزینه ۴

$$\tan ۶۰^\circ = \frac{-۲m}{m^۲ - ۱} \Rightarrow \sqrt{۳} = \frac{-۲m}{m^۲ - ۱} \Rightarrow \sqrt{۳}m^۲ + ۲m - \sqrt{۳} = ۰$$

$$\Rightarrow |m_۱ - m_۲| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \frac{\sqrt{۴ + ۱۲}}{\sqrt{۳}} = \frac{۴}{\sqrt{۳}}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۵ گزینه ۳



$$S_{\text{مربع}} = \frac{۳}{۴}S_{\text{مثلث}} + \frac{۲۷}{۳۲} \Rightarrow x^۲ = \frac{۳}{۴}\left(\frac{x}{۲}\right) + \frac{۲۷}{۳۲}$$

$$\xrightarrow{\times ۳۲} ۳۲x^۲ = ۱۲x + ۲۷ \Rightarrow ۳۲x^۲ - ۱۲x - ۲۷ = ۰$$

$$\Rightarrow \Delta = ۱۴۴ + ۴(۳۲)(۲۷) = ۳۶۰۰ \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{۲a}$$

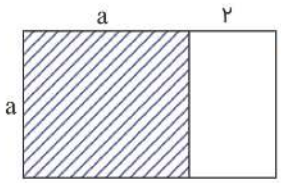
$$\Rightarrow x = \frac{۱۲ \pm ۶۰}{۶۴} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{۹}{۸} \\ x = \frac{۱۲ - ۶۰}{۶۴} < ۰ \Rightarrow \text{غ.ق.ق} \end{cases}$$

$$\text{اندازهٔ قاعده} = x + ۱ = \frac{۹}{۸} + ۱ = \frac{۱۷}{۸}$$

کنکور سراسری علوم انسانی خارج از کشور ۱۴۰۱

۶ گزینه ۳

طول ضلع مربع را a در نظر می‌گیریم. بنابراین رابطهٔ زیر بین مساحت مربع و مستطیل برقرار است:



$$\text{مساحت مربع} = \frac{۳}{۴}(\text{مساحت مستطیل}) + ۱۸$$

ضلع مربع به‌علاوهٔ ۲ برابر با طول مستطیل است $(a + ۲)$:

$$\Rightarrow a^۲ = \frac{۳}{۴}(a(a+۲)) + ۱۸ \xrightarrow{\times ۴} ۴a^۲ = ۳(a^۲ + ۲a) + ۷۲$$

$$\Rightarrow ۴a^۲ - ۳a^۲ - ۶a - ۷۲ = ۰$$

$$\Rightarrow a^۲ - ۶a - ۷۲ = ۰ \Rightarrow (a+۶)(a-۱۲) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} a = ۱۲ & \text{ق ق} \\ a = -۶ & \text{غ ق ق} \end{cases}$$

بنابراین طول ضلع مربع برابر با ۱۲ است. باتوجه‌به شکل طول و عرض مستطیل بزرگ‌تر برابر با $a + ۲ = ۱۴$ و $a = ۱۲$ می‌باشد. بنابراین محیط مستطیل بزرگ‌تر برابر است با:

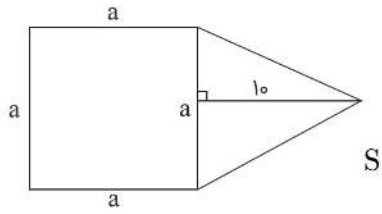
$$\text{محیط مستطیل بزرگ} = ۲(a + (a+۲)) = ۲(۱۲ + ۱۴) = ۲(۲۶) = ۵۲$$

کنکور سراسری علوم انسانی خارج از کشور ۱۳۹۹

۷ گزینه ۳

باتوجه‌به اطلاعات داده‌شده در صورت تست؛ رابطهٔ زیر بین مساحت مربع و مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع برقرار است:

$$\text{مساحت مثلث}\,(S_{\triangle}) = \frac{۲}{۳}(\text{مساحت مربع}\ (S_{\square})) - \frac{۸}{۳} \quad (*)$$



می‌دانیم:

$$S_{\square} = a^{۲}$$

$$S_{\Delta} = \frac{۱}{۲} \times ۱۰ \times a = ۵a$$

بنابراین:

$$\xrightarrow{(*)} ۵a = \frac{۲}{۳}(a^{۲}) - \frac{۸}{۳}$$

طرفین را در ۳ ضرب می‌کنیم:

$$۱۵a = ۲a^{۲} - ۸ \Rightarrow ۲a^{۲} - ۱۵a - ۸ = ۰$$

$$\Delta = (۱۵)^{۲} - ۴(۲)(-۸) = ۲۲۵ + ۶۴ = ۲۸۹$$

$$\Rightarrow a = \frac{۱۵ \pm \sqrt{۲۸۹}}{۴} = \frac{۱۵ \pm ۱۷}{۴} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{۳۲}{۴} = ۸ \\ a = \frac{-۲}{۴} \quad \text{غ ق ق} \end{cases}$$

بنابراین $a = ۸$ می‌باشد، پس قاعدهٔ مثلث برابر ۸ است. مساحت مثلث را به دست می‌آوریم:

$$S_{\Delta} = ۵a = ۵(۸) = ۴۰$$

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۳۹۹

۸ گزینه ۲

عرض مستطیل را x فرض می‌کنیم؛ پس طول آن برابر $\frac{۳}{۲}x - ۲$ است. داریم:

$$\text{مساحت مستطیل} = ۱۹۲ \Rightarrow x(\frac{۳}{۲}x - ۲) = ۱۹۲ \Rightarrow \frac{۳}{۲}x^۲ - ۲x = ۱۹۲$$
$$\xrightarrow{\times ۲} ۳x^۲ - ۴x - ۳۸۴ = ۰ \Rightarrow \Delta = ۱۶ + ۴ \times ۳ \times ۳۸۴ = ۱۶ + ۱۶ \times ۲۸۸ = ۱۶ \times ۲۸۹$$
$$\xrightarrow{x>۰} x = \frac{۴ + \sqrt{۱۶ \times ۲۸۹}}{۶} = \frac{۴ + ۴ \times ۱۷}{۶} = \frac{۲ + ۳۴}{۳} = ۱۲ \quad (*)$$
$$\Rightarrow \text{محیط مستطیل} = ۲((\frac{۳}{۲}x - ۲) + x) \xrightarrow{(*)} \text{محیط مستطیل} = ۲((۱۸ - ۲) + ۱۲) = ۵۶$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

۹ گزینه ۳

پول علی و اکرم را به‌ترتیب x و y در نظر می‌گیریم:

$$x + y = ۱۰۰ \Rightarrow x = ۱۰۰ - y$$
$$(x - ۱۰)(y + ۱۰) = ۴۷۵ \xrightarrow{x=۱۰۰-y} (۱۰۰ - y - ۱۰)(y + ۱۰) = ۴۷۵$$
$$\Rightarrow y^۲ - ۸۰y - ۴۲۵ = ۰ \Rightarrow (y - ۸۵)(y + ۵) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} y = ۸۵ \\ y = -۵ \end{cases}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

رابطه‌ی بین ریشه‌های یک معادله‌ی درجه دوم

۱) مجموع ریشه ها $= x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = S$

۲) حاصل ضرب ریشه ها $= x_1 . x_2 = \frac{c}{a} = P$

۳) قدر مطلق تفاضل ریشه ها $= |x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$

۴) مجموع مربعات ریشه ها $= x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = S^2 - 2P$

۵) مجموع مکعبات ریشه ها $= x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = S^3 - 3SP$

۶) مجموع جذر ریشه های مثبت $= \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = \sqrt{S + 2\sqrt{P}}$

۷) قدر مطلق تفاضل جذر ریشه های مثبت $= |\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}| = \sqrt{S - 2\sqrt{P}}$

۸) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_2 + x_1}{x_1x_2} = \frac{S}{P}$

۹) $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1x_2} = \frac{S^2 - 2P}{P}$

۱۰) $x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2)^2 + (x_2^2)^2 = (x_1^2 + x_2)^2 - 2x_1^2x_2^2$

تمرین: اگر a و b ریشه‌های معادلهٔ $x^2 - 7x + 3 = 0$ باشند، حاصل $\frac{a}{b^2} + \frac{b}{a^2}$ را بیابید.

دو حالت مهم:

الف) اگر $S = 0$ باشد یعنی دو ریشهٔ قرینه داریم.

ب) اگر $P=1$ باشد، یعنی دو ریشهٔ معکوس داریم.

یادت باشه: در تمامی موارد گفته‌شده معمولاً پس از نوشتن این روابط به دو یا چند مقدار برای m یا هر متغیر دیگری که مجهول است می‌رسیم. توجه داشته باشید mهایی قبول هستند که به ازای آن‌ها دلتای معادلهٔ داده‌شده منفی نشود.

تمرین: معادله درجه دوّم $3x^2+(2m-1)x+2-m=0$ دارای ۲ ریشهٔ حقیقی است. اگر مجموع ریشه‌ها با معکوس حاصل ضرب آن دو ریشه برابر باشد، مقدار m کدام است؟ *(سراسری تجربی ۹۹)*

۱) $\frac{7}{2}$ ۲) ۳ ۳) -1 ۴) $-\frac{5}{2}$

۱) برای آن که هر دو ریشهٔ معادلات $ax^2+bx+c=0$ و $a'x^2+b'x+c'=0$ مشترک باشند، باید: $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$

تمرین: به ازای چه مقدار m و n هر دو ریشهٔ معادلات $\begin{cases} mx^2-18x+24=0 \\ x^2-6x+n=0 \end{cases}$ مشترک هستند؟

۲) اگر دو معادله درجه دوم دارای یک ریشه مشترک باشند، جملهٔ x^2 را بین دو معادله حذف می‌کنیم.

تمرین: اگر دو معادلهٔ $mx^2+5x-7=0$ و $3mx^2-10x+4=0$ دارای یک ریشه مشترک باشند، مقدار m کدام است؟

۱) ۲ ۲) -۲ ۳) ۱ ۴) -۱

تمرین: معادله‌های $x^2+6x+m=0$ و $x^2+2x-3m=0$ یک ریشه مشترک غیرصفر دارند. اختلاف ریشه‌ای غیرمشترک کدام است؟ *(ریاضی ۱۴۰۲ مرحله اول)*

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۷

بررسی علامت ریشه‌های معادله درجه دوم

ابتدا $\frac{c}{a}$ را حساب می‌کنیم. اگر $\frac{c}{a} < 0$ باشد، معادله دارای دو ریشهٔ مختلف‌العلامت است. اما اگر $\frac{c}{a} > 0$ باشد، باید Δ را به دست آوریم. اگر $\Delta < 0$ باشد، معادله فاقد ریشه حقیقی است اما اگر Δ منفی نباشد معادله دارای ریشه حقیقی است.

شرایط دو ریشه‌ی مثبت	شرایط دو ریشه‌ی منفی
۱) $\Delta > 0$	۱) $\Delta > 0$
۲) $S > 0$	۲) $S < 0$
۳) $P > 0$	۳) $P > 0$
$\Delta > 0$ چون ۲ ریشه داری.	$\Delta > 0$ چون ۲ ریشه داری.
$S > 0$ چون جفتشون مثبته!	$S < 0$ چون جفتشون منفیه!
$P > 0$ چون جفتشون مثبته!	$P > 0$ چون جفتشون منفیه!

تمرین: به ازای کدام مقادیر m، معادله‌ی درجه‌ی دوم $(m-6)x^2 - 2mx - 3 = 0$ دارای ۲ ریشه‌ی حقیقی منفی است؟ (تجربی ۹۶)

۱) $m < -6$ ۲) $m > 3$ ۳) $0 < m < 3$ ۴) $3 < m < 6$

اگه صحبتی از دو ریشه‌ی قرینه یا دوریشه‌ی معکوس نکرد و گفت توی معادله‌ی درجه دوممون بین ریشه‌هاش رابطه‌ی خاصی برقراره، باید اون رابطه رو بنویسی. مثلاً توی تست می‌گه:

✓ یکی از ریشه‌ها ۵ واحد از ریشه‌ی دیگر کم‌تر است	$\alpha = \beta - 5$
✓ یکی از ریشه‌ها از نصف ریشه‌ی دیگر ۳ واحد بیشتر است	$\alpha = \frac{1}{2}\beta + 3$
✓ یکی از ریشه‌ها نصف ریشه‌ی دیگر است	$\alpha = \frac{1}{2}\beta$
✓ یکی از ریشه‌ها از ۷ برابر ریشه‌ی دیگر ۴ واحد کم‌تر است	$\alpha = 7\beta - 4$

بعد از این که رابطشون رو نوشتی، با استفاده از S یا P ، دو معادله و دو مجهول تشکیل میدی و حلش می‌کنی. ببین:

تمرین: در معادله‌ی $x^2 - 8x + m = 0$ یک ریشه از نصف ریشه‌ی دیگر ۵ واحد بیشتر است. m کدام است؟ *(سراسری ریاضی خارج از کشور ۹۱)*

۱) ۱۰ ۲) ۱۲ ۳) ۱۴ ۴) ۱۵

تمرین: ریشه‌های معادله‌ی $2x^2 + mx + 12 = 0$ را α و β می‌نامیم. اگر $\beta^2 = \frac{3}{\alpha}$، آن‌گاه ریشه‌ی کوچک‌تر این معادله کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) -2

تمرین: به ازای ۲ مقدار a یک ریشه معادلهٔ $3x^2 - ax + 4 = 0$ سه برابر ریشهٔ دیگر است. اختلاف این دو مقدار a کدام است؟ (تیر ۱۴۰۱)

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۶ ۴) ۱۸

تمرین: به ازای کدام مقادیر b، بین ریشه‌های معادله‌ی $x^۲+bx+۳=۰$ رابطه‌ی $-۱<x_۱<۱<x_۲$ برقرار است؟

۱) $b>۴$ ۲) $b<-۴$ ۳) $b>۴$ یا $b<-۴$ ۴) $-۴<b<۴$

پاسخ: گزینهٔ «۲» ـ فرض کنید:

$$\begin{cases} x_۱<۱<x_۲ \Rightarrow af(۱)<۰ \xrightarrow{a=۱} f(۱)<۰ \Rightarrow ۱+b+۳<۰ \Rightarrow b<-۴ \\ -۱<x_۱<x_۲ \Rightarrow af(-۱)>۰ \xrightarrow{a=۱} f(-۱)>۰ \Rightarrow ۱-b+۳>۰ \Rightarrow b<۴ \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک جواب‌ها}} b<-۴$$

تشکیل معادله‌ی درجه‌ی دوم

خوب به معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^۲+bx+c=۰$ دقّت کنید، حال من طرفین این معادله را بر a تقسیم می‌کنم که در این صورت به $x^۲+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=۰$ تبدیل می‌شود. می‌دانیم مجموع ریشه‌ها یا همان S، مساوی $-\frac{b}{a}$ و حاصل‌ضرب آن‌ها یعنی P برابر $\frac{c}{a}$ است، بنابراین:

$$x^۲+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=۰ \xrightarrow{\text{یک تغییر کوچک}} x^۲-(-\frac{b}{a})x+\frac{c}{a}=۰ \xrightarrow{-\frac{b}{a}=S\ ,\ \frac{c}{a}=P} x^۲-Sx+P=۰$$

پس اگر مجموع ریشه‌ها در یک معادله‌ی درجه‌ی دوم، S و حاصل‌ضرب ریشه‌ها P باشد، آن معادله به‌صورت زیر خواهد بود:

$$x^۲-Sx+P=۰$$

تمرین: در مستطیلی به محیط $۲۳\ cm$ و مساحت $۲۸\ cm^۲$ اختلاف طول و عرض چند سانتی‌متر است؟

۱) $۲/۵$ ۲) $۳/۵$ ۳) $۴/۵$ ۴) $۵/۵$

اگر یک ریشه‌ی معادله‌ی درجه دومی با ضرایب گویا $m+\sqrt{n}$ باشد، ریشه‌ی دیگر آن $m-\sqrt{n}$ است.

تمرین: معادله‌ی درجه دومی با ضرایب گویا که یک جواب آن $۵+۲\sqrt{۳}$ است ، کدام است ؟

۱) $x^۲-۱۰x-۱۳=۰$ ۲) $x^۲-۱۰x+۱۳=۰$

۳) $x^۲+۱۰x+۱۲=۰$ ۴) $x^۲-۱۰x+۱۲=۰$

ارتباط بین جواب‌های دو معادلهٔ درجه دوم

این مدل سوالات توی کتابتون کم‌رنگ شده ولی قلم‌چی و گزینه‌ی (۲) ازش سوال اومده پس ما هم می‌گیم: یک معادله‌ی درجه دوم به مـا می‌دن و می‌گن از روی این معادله، به معادله‌ی جدید بنویس.

مثلاً می‌گن معادله‌ی درجه دومی بنویسید که هر کدام از ریشه هایش از هر کدام از ریشه های معادله‌ی $x^2+6x-5=0$ یک واحد بیشتر باشد :

α' , β' را ریشـه هـای معادلـه‌ی جدیـد مـی‌نـامیم کـه قـرار اسـت $\alpha'=\alpha+1$, $\beta'=\beta+1$ باشـد کـه α , β ریشـه هـای معادلـه‌ی $x^2+6x-5=0$ است.

$$\begin{cases}\alpha'=\alpha+1\\ \beta'=\beta+1\end{cases}\rightarrow\begin{cases}S'=\alpha'+\beta'=(\alpha+1)+(\beta+1)=\underbrace{(\alpha+\beta)}_{S}+2=S+2\\ P'=\alpha'\beta'=(\alpha+1)(\beta+1)=\underbrace{\alpha\beta}_{P}+\underbrace{\alpha+\beta}_{S}+1=P+S+1\end{cases}$$

$$\xrightarrow[P=\frac{-5}{1}=-5]{S=\frac{-6}{1}=-6}\begin{cases}S'=S+2=-6+2=-4\\ P'=P+S+1=-5-6+1=-10\end{cases}$$

حالا با داشتن S', P' معادله‌ی جدید به صورت $x^2-S'x+P'=0$ است که یعنی $x^2-(-4)x-10=0$ الان هر کدام از ریشه هـای $x^2+4x-10=0$ از هر کدام از ریشه های x^2+6x-5 یک واحد بیشتر است.

تمرین: ریشه های کدام معادله از معکوس ریشه های معادله‌ی درجه دوم $2x^2-3x-1=0$ یک واحد کمتر است ؟ *(سراسری تجربی ۹۴)*

۱) $x^2-5x+1=0$ ۲) $x^2+5x+1=0$ ۳) $x^2-5x+2=0$ ۴) $x^2+5x+2=0$

تمرین: جواب‌های کدام معادله، قرینه و معکوس جواب‌های معادلهٔ $2x^2-3x-1=0$ است؟

۱) $x^2-3x+2=0$ ۲) $x^2+3x+2=0$ ۳) $x^2+3x-2=0$ ۴) $x^2-3x-2=0$

ریشهٔ هر معادله‌ای در آن معادله صدق می‌کند

تمرین: اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $x^2+x-1=0$ باشند، حاصل عبارت $\frac{\beta^5}{(\alpha+1)^5}+\frac{\alpha^3}{(\beta+1)^3}$ کدام است؟

۱) -2 ۲) 2 ۳) -8 ۴) 8

تمرین: فرض کنید x_1 و x_2 ریشه‌های معادلهٔ $x=5-x^2$ باشند. $\frac{1}{(x_2+1)^3}$ و $\frac{1}{(x_1+1)^3}$ ریشه‌های کدام معادله هستند؟

(سراسری تجربی ۱۴۰۰)

۱) $125x^2+16x=1$ ۲) $125x^2=16x+1$ ۳) $125x^2=12x+1$ ۴) $125x^2+12x=1$

منبع:

ریاضی

۱ اختلاف ریشه‌های معادله $x^۲ + ۲kx + ۵ = ۰$ برابر $\frac{۴}{۳}k$ است. مقدار $\left[\frac{k^۲}{۲}\right]$ کدام است؟

۱) صفر
۲) ۱
۳) ۳
۴) ۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۳

۲ اگر $\sqrt{۳}$ واسطهٔ هندسی ریشه‌های معادلهٔ $mx^۲ - ۴x + m^۲ - ۴ = ۰$ باشد، مجموع ریشه‌های این معادله کدام است؟

۱) ۱
۲) -۱
۳) ۴
۴) -۴

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۴۰۳

۳ فرض کنید $x_۱$ و $x_۲$ ریشه‌های معادلهٔ $x = x^۲ - ۴$ باشند. ریشه‌های کدام معادله $x_۱^۳ + \frac{۱}{x_۲}$ و $x_۲^۳ + \frac{۱}{x_۱}$، است؟

۱) $۴x^۲ = ۵۱x + ۲۲۱$
۲) $۴x^۲ + ۵۱x = ۲۲۱$
۳) $۴x^۲ = ۵۱x + ۱۹۷$
۴) $۴x^۲ + ۵۱x = ۱۹۷$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

۴ فرض کنید $x_۱$ و $x_۲$ ریشه‌های معادلهٔ $x = ۵ - x^۲$ باشند. $\frac{۱}{(x_۲ + ۱)^۳}$ و $\frac{۱}{(x_۱ + ۱)^۳}$ ریشه‌های کدام معادله هستند؟

۱) $۱۲۵x^۲ + ۱۶x = ۱$
۲) $۱۲۵x^۲ = ۱۶x + ۱$
۳) $۱۲۵x^۲ = ۱۲x + ۱$
۴) $۱۲۵x^۲ + ۱۲x = ۱$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

۵ ریشه‌های معادلهٔ $x^۲ - (a + ۱)x + a = ۰$ دو عدد فرد متوالی طبیعی و ریشه‌های معادلهٔ $x^۲ - (۳a + ۱)x + b = ۰$ دو عدد زوج متوالی است. اختلاف حاصل‌ضرب ریشه‌های دو معادله کدام است؟

۱) ۳۳
۲) ۲۱
۳) ۱۳
۴) ۹

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

۶ اگر α و β ریشه‌های معادله $3x^2 - 12x - a = 0$ و $2\alpha^2 + \beta^2 - 4\alpha = 7$ باشد، مقدار a چند برابر ریشه بزرگ‌تر معادله است؟

۱) ۳
۲) -۳
۳) ۹
۴) -۹

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۲

۷ مجموع ریشه‌های معادله $ax^2 + (a + \frac{4}{3})x + 2 = 0$ با حاصل ضرب ریشه‌های معادله $3x^2 - 4x - a = 0$ برابر است. محور تقارن سهمی $y = -ax^2 - (1 + \frac{5}{2}a)x - 1$ کدام است؟

۱) $x = \frac{3}{4}$
۲) $x = -\frac{3}{4}$
۳) $x = \frac{11}{8}$
۴) $x = -\frac{11}{8}$

کنکور سراسری علوم انسانی خارج از کشور ۱۴۰۲

۸ مجموع ریشه‌های معادله $x^2 - ax - 1 = 0$ با حاصل‌ضرب ریشه‌های معادله $ax^2 - 4x + a + 2 = 0$ برابر است. طول رأس سهمی $y = x^2 + (1 - 2a)x - 3$ کدام است؟

۱) -۱/۵
۲) -۳
۳) ۱/۵
۴) ۳

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۴۰۲

۹ اگر α و β ریشه‌های متمایز معادلهٔ $ax^2 - ax - b = 0$ و $20\alpha^2 - 20\beta = 17$ و $40\beta^2$ باشد، اختلاف ریشه‌های این معادله کدام است؟

۱) $\frac{1}{5}$
۲) $\frac{2}{5}$
۳) $\frac{1}{\sqrt{5}}$
۴) $\frac{2}{\sqrt{5}}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۲

۱۰ نقاط $A(3, y)$ و $B(-5, y)$ روی یک سهمی واقع شده‌اند و عرض رأس سهمی برابر ۱ است. اگر این سهمی، محور xها را در نقاطی با طول‌های α و β قطع کند و $\alpha^2 + \beta^2 = 5$ باشد، این سهمی محور yها را در نقطه‌ای با کدام عرض قطع می‌کند؟

۱) $-\frac{1}{3}$
۲) $-\frac{2}{3}$
۳) $\frac{1}{3}$
۴) $\frac{2}{3}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۲

۱۱ ضرایب معادله $۲kx^۲ - ۴x - ۴k - ۵ = ۰$ صحیح هستند. اگر به ازای مقدار k، حاصل‌ضرب ریشه‌های این معادله دارای بیشترین مقدار باشد، مقدار Δ کدام است؟

۱) ۴
۲) ۵
۳) ۷
۴) ۲۸

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۴۰۲

۱۲ اگر α و β ریشه‌های معادله $x^۲ + ۷x - ۳ = ۰$ و $\alpha > ۰$ باشد، حاصل $|\alpha + ۲\beta| + |\alpha| - |\beta|$ کدام است؟

۱) $۲\alpha + ۳\beta$
۲) $-۲\alpha - ۳\beta$
۳) $-\beta$
۴) β

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۴۰۲

۱۳ اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^۲ + ۲(a+۱)x + ۲a - ۱ = ۰$ باشند، به ازای کدام مقدار a، به ترتیب سه عدد α، a و β تشکیل دنبالهٔ هندسی می‌دهند؟

۱) -۲
۲) ۲
۳) -۱
۴) ۱

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۱

۱۴ اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $۴x^۳ + kx^۲ - ۹x - ۲ = ۰$، $\alpha + \beta = ۱$ و $\alpha\beta = -۲$ باشد، مقدار k چقدر است؟

۱) $-\frac{۲۷}{۵}$
۲) $\frac{۲۷}{۵}$
۳) -۳
۴) ۳

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۱

۱۵ α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^۲ + ۶x + a = ۰$ هستند. اگر $\alpha < \beta < ۰$ و $۳\alpha^۲ + ۲\beta^۲ = ۱۲\sqrt{۲} + ۸۵$ باشد، مقدار a چقدر است؟

۱) ۱
۲) $\frac{۱۳}{۴}$
۳) $\frac{۲۱}{۵}$
۴) ۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۱

۱۶ به ازای دو مقدار a، یک ریشهٔ معادلهٔ $۳x^۲ - ax + ۴ = ۰$، سه برابر ریشهٔ دیگر است. اختلاف این دو مقدار a، کدام است؟

۱) ۸
۲) ۹
۳) ۱۶
۴) ۱۸

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

۱۷ اگر a و b اعداد طبیعی و ریشه‌های معادلهٔ $x^۲ - (a^۲ + b^۲ - ۱۲)x + a + b - ۱ = ۰$ باشند، مقدار $a + b$ کدام است؟

۱) ۲
۲) ۵
۳) ۹
۴) ۱۲

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

۱۸ فرض کنید $a, b, c \in \{۱, ۲, ..., ۹\}$. چند معادلهٔ درجهٔ دوم به‌صورت $ax^۲ + bx - c = ۰$ می‌توان نوشت که فاصلهٔ حاصل‌ضرب ریشه‌های هر معادله با جمع ریشه‌های آن معادله، دو واحد باشد؟

۱) ۲۴
۲) ۲۸
۳) ۳۲
۴) ۳۶

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

۱۹ فرض کنید $a, b, c \in \{۱, ۲, ..., ۹\}$. چند معادلهٔ درجه دوم به‌صورت $ax^۲ + bx - c = ۰$ می‌توان تشکیل داد، به‌طوری‌که مجموع ریشه‌های هر معادله از حاصل‌ضرب ریشه‌های همان معادله، دو واحد بیشتر باشد؟

۱) ۱۴
۲) ۱۵
۳) ۱۶
۴) ۱۸

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

۲۰ فرض کنید $x_۱$ و $x_۲$ جواب‌های معادلهٔ $(\sqrt[۳]{x^۲} - ۱)(\sqrt[۳]{x^۲} + \frac{۱}{\sqrt[۳]{x^۲}} + ۱) = ۲\sqrt[۳]{x}$ باشند. مقدار $x_۱ + x_۲$ کدام است؟

۱) -۱
۲) صفر
۳) ۱
۴) ۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

۲۱ اگر مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌های حقیقی معادلهٔ $x^۴ - ۷x^۲ - ۵ = ۰$ به ترتیب S و P باشند، حاصل عبارت $۲P^۲ - ۳SP + ۲S$، کدام است؟

۱) $۵۹ - ۷\sqrt{۶۹}$
۲) $۷ + \sqrt{۶۹}$
۳) ۵۰
۴) $۵۹ + ۷\sqrt{۶۹}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۰

۲۲ معادلهٔ درجهٔ دوم $۳x^۲ + (۲m - ۱)x + ۲ - m = ۰$ دارای دو ریشهٔ حقیقی است. اگر مجموع ریشه‌ها با معکوس حاصل‌ضرب آن دو ریشه برابر باشد، مقدار m کدام است؟

۱) $\frac{۷}{۲}$
۲) ۳
۳) -۱
۴) $-\frac{۵}{۲}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

منبع:

ریاضی

۱ گزینه ۴

اختلاف ریشه‌های معادله درجه دوم عبارتند از:

$$D = |\alpha - \beta| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} \Rightarrow \frac{\sqrt{۴k^۲ - ۲۰}}{۱} = \frac{۴}{۳}k$$
$$\xrightarrow{k \geq ۰} ۴k^۲ - ۲۰ = \frac{۱۶}{۹}k^۲ \Rightarrow ۳۶k^۲ - ۱۸۰ = ۱۶k^۲$$
$$\Rightarrow ۲۰k^۲ = ۱۸۰ \Rightarrow k^۲ = ۹ \Rightarrow k = \pm ۳ \xrightarrow{k \geq ۰} k = ۳$$

بنابراین:

$$\left[\frac{k^۲}{۲}\right] = \left[\frac{۹}{۲}\right] = ۴$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۳

۲ گزینه ۴

$$mx^۲ - ۴x + m^۲ - ۴ = ۰$$
$$\frac{c}{a} = \frac{m^۲ - ۴}{m} \xrightarrow{\text{واسطه } \sqrt{۳}} \frac{m^۲ - ۴}{m} = \sqrt{۳}^۲ \Rightarrow m^۲ - ۴ = ۳m$$
$$\Rightarrow m^۲ - ۳m - ۴ = ۰ \Rightarrow (m+۱)(m-۴) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} m = -۱ \\ m = ۴ \end{cases}$$
$$\xrightarrow{m=-۱} -x^۲ - ۴x - ۳ = ۰ \Rightarrow S = -\frac{b}{a} = -۴$$
$$\xrightarrow{m=۴} ۴x^۲ - ۴x + ۱۲ = ۰ \xrightarrow{\Delta < ۰} \text{ریشه ندارد}$$

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۴۰۳

۳ گزینه ۱

$$x^۲ - x - ۴ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} S = x_۱ + x_۲ = ۱ \\ P = x_۱ x_۲ = -۴ \end{cases}$$

ریشه‌های معادلهٔ جدید را α و β می‌نامیم. داریم:

$$S_{new} = \alpha + \beta = (x_۲^{۳} + \frac{۱}{x_۱}) + (x_۱^{۳} + \frac{۱}{x_۲}) = x_۱^{۳} + x_۲^{۳} + \frac{x_۱ + x_۲}{x_۱ x_۲}$$
$$= S^{۳} - ۳SP + \frac{S}{P} = ۱ - ۳(-۴) - \frac{۱}{۴} = ۱۳ - \frac{۱}{۴} = \frac{۵۱}{۴}$$
$$P_{new} = (x_۲^{۳} + \frac{۱}{x_۱})(x_۱^{۳} + \frac{۱}{x_۲}) = (x_۱ x_۲)^{۳} + x_۲^{۲} + x_۱^{۲} + \frac{۱}{x_۱ x_۲}$$
$$= P^{۳} + S^{۲} - ۲P + \frac{۱}{P} = (-۴)^{۳} + (۱)^{۲} - ۲(-۴) + \frac{۱}{-۴}$$
$$= -۶۴ + ۱ + ۸ - \frac{۱}{۴} = -۵۵ - \frac{۱}{۴} = \frac{-۲۲۱}{۴}$$

با S_{new} و P_{new} به دست آمده معادلهٔ جدید را می‌سازیم:

$$x^۲ - S_{new} x + P_{new} = ۰ \Rightarrow x^۲ - \frac{۵۱}{۴}x - \frac{۲۲۱}{۴} = ۰ \Rightarrow ۴x^۲ = ۵۱x + ۲۲۱$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

۴ گزینه ۱

$$x^۲ + x - ۵ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x_۱ + x_۲ = -۱ \\ x_۱ x_۲ = -۵ \end{cases}$$

ابتدا معادله‌ای می‌سازیم که ریشه‌های آن $x_۱ + ۱$ و $x_۲ + ۱$ باشد برای این منظور کافی است از xها یک واحد کم کنیم:

$$(x-۱)^۲ + (x-۱) - ۵ = ۰ \Rightarrow x^۲ - x - ۵ = ۰$$

اگر ریشه‌ها α و β باشد:

$$(\alpha+\beta) = ۱ \quad , \quad \alpha\beta = -۵$$

حال معادله‌ای می‌سازیم که ریشه‌های آن $\frac{۱}{\alpha^۳}$ و $\frac{۱}{\beta^۳}$ باشد:

$$S_{New} = \frac{۱}{\alpha^۳} + \frac{۱}{\beta^۳} = \frac{\alpha^۳ + \beta^۳}{(\alpha\beta)^۳} = \frac{(\alpha+\beta)^۳ - ۳(\alpha+\beta)(\alpha\beta)}{(\alpha\beta)^۳}$$

$$= \frac{(۱)^۳ - ۳(۱)(-۵)}{-۱۲۵} = -\frac{۱۶}{۱۲۵}$$

$$P_{New} = \frac{۱}{\alpha^۳} \times \frac{۱}{\beta^۳} = \frac{۱}{(\alpha\beta)^۳} = -\frac{۱}{۱۲۵}$$

$$\Rightarrow x^۲ - (-\frac{۱۶}{۱۲۵})x - \frac{۱}{۱۲۵} \Rightarrow ۱۲۵x^۲ + ۱۶x - ۱ = ۰$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

۵ گزینه ۲

در معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^۲ + bx + c = ۰$ اگر مجموع ضرایب صفر باشد، یکی از ریشه‌ها $x = ۱$ و دیگری $x = \frac{c}{a}$ است:

$$x^۲ - (a+۱)x + a = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۱ \\ x = a \end{cases} \Rightarrow a = ۳$$

$$x^۲ - (۳a+۱)x + b = ۰ \xrightarrow{a=۳} x^۲ - ۱۰x + b = ۰$$

مجموع ریشه‌های معادلهٔ داده‌شده برابر $S = -\frac{-۱۰}{۱} = ۱۰$ است و ریشه‌ها باید دو عدد زوج متوالی باشند، پس: $x = ۴$ و $x = ۶$

$$|(۱ \times ۳) - (۴ \times ۶)| = ۲۱$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

۶ گزینه ۲

نکته: اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ درجه‌دوم $ax^۲+bx+c=۰$ باشند، مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌ها از روابط زیر به دست می‌آید:

$$S=\alpha+\beta=-\frac{b}{a} \qquad P=\alpha.\beta=\frac{c}{a}$$

بنابراین داریم:

$$۳x^۲-۱۲x-a=۰$$

$$S=\alpha+\beta=\frac{-b}{a}=\frac{-(-۱۲)}{۳}=۴\Rightarrow\beta=۴-\alpha \quad (۱)$$

$$\text{طبق فرض}: ۲\alpha^۲+\beta^۲-۴\alpha=۷\xrightarrow{(۱)}۲\alpha^۲+(۴-\alpha)^۲-۴\alpha=۷$$

$$\Rightarrow ۳\alpha^۲-۱۲\alpha+۹=۰\,(*)\Rightarrow\begin{cases}\alpha=۱\\ \alpha=۳\end{cases}$$

با مقایسهٔ (*) با معادلهٔ داده‌شده مقدار $a=-۹$ به دست می‌آید، داریم:

$$\frac{a}{\text{ریشهٔ بزرگ‌تر}}=\frac{-۹}{۳}=-۳$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۲

۷ گزینه ۲

مجموع ریشه‌های معادله اول $S=-\frac{a+\frac{۴}{۳}}{a}$ و حاصل ضرب ریشه‌های معادله دوم $P=\frac{-a}{۳}$ است پس:

$$\frac{-a}{۳}=-\frac{\frac{۳a+۴}{۳}}{a}\Rightarrow\frac{a}{۳}=\frac{۳a+۴}{۳a}\Rightarrow\frac{a}{۱}=\frac{۳a+۴}{a}\Rightarrow a^۲=۳a+۴$$

$$\Rightarrow a^۲-۳a-۴=۰\Rightarrow\begin{cases}a=-۱\\ a=۴\end{cases}$$

دقت شود $a=۴$، Δ معادله اول را منفی می‌کند و قابل قبول نیست، پس محور تقارن سهمی عبارت است از:

$$x=\frac{-b}{۲a}=\frac{۱+\frac{۵}{۲}a}{-۲a}=\frac{۱-\frac{۵}{۲}}{۲}=\frac{-۳}{۴}$$

کنکور سراسری علوم انسانی خارج از کشور ۱۴۰۲

۸ گزینه ۱

مجموع ریشه‌های معادله اول برابر است با:

$$S = -\frac{b}{a} = a$$

و حاصل‌ضرب ریشه‌های معادله دوم عبارتست از:

$$P = \frac{c}{a} = \frac{a+۲}{a}$$

$$S = P \Rightarrow \frac{a+۲}{a} = a \Rightarrow a^۲ - a - ۲ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} a = -۱ \\ a = ۲ \end{cases}$$

برای تشخیص a درست لازم است هر دو Δ معادلات مثبت باشد یعنی:

$\Delta_۱ = a^۲ + ۴ \Rightarrow$ همواره مثبت است

$\Delta_۲ = ۱۶ - ۴a(a+۲) \Rightarrow a = -۱ \Rightarrow \Delta_۲ = ۱۶ + ۴ + ۱$ ق ق

پس به ازای $a = -۱$ رأس سهمی عبارتست از:

$$x = -\frac{b}{۲a} = -\frac{۱-۲a}{۲} = -۱/۵$$

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۴۰۲

۹ گزینه ۴

اگر به معادله دقت شود، مشخص می‌شود که:

$$S = ۱\ ,\ P = -\frac{b}{a}\ ,\ \Delta = a^۲ + ۴ab$$

اختلاف ریشه‌ها برابر است با:

$$D = |\alpha - \beta| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \frac{\sqrt{a^۲ + ۴ab}}{|a|} = \frac{|a|\sqrt{۱ + ۴\frac{b}{a}}}{|a|} = \sqrt{۱ + ۴\frac{b}{a}}$$

در ضمن می‌دانیم که:

$$۴۰\beta^۲ + ۲۰\alpha^۲ - ۲۰\beta = ۱۷ \Rightarrow ۲۰(\alpha^۲ + \beta^۲) + ۲۰\beta^۲ - ۲۰\beta = ۱۷$$
$$\Rightarrow ۲۰(\alpha^۲ + \beta^۲) + ۲۰(\beta^۲ - \beta) = ۱۷$$

چون β ریشهٔ معادله است، پس در آن صدق می‌کند. یعنی:

$$a\beta^۲ - a\beta - b = ۰ \xrightarrow{\div a} \beta^۲ - \beta = \frac{b}{a} = -P$$

بنابراین:

$$۲۰(S^۲ - ۲P) - ۲۰P = ۱۷ \Rightarrow ۲۰ - ۴۰P - ۲۰P = ۱۷ \Rightarrow P = \frac{۱}{۲۰}$$

پس:

$$D = \sqrt{۱ - ۴ \times \frac{۱}{۲۰}} = \sqrt{\frac{۴}{۵}} = \frac{۲}{\sqrt{۵}}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۲

۱۰ گزینه ۳

چون نقاط A و B هم‌عرض هستند، پس طول رأس سهمی وسط طول‌های آن‌ها است، یعنی:

$$x_S = \frac{-۵+۳}{۲} = -۱ \Rightarrow x = \frac{-b}{۲a} \Rightarrow -۱ = \frac{-b}{۲a} \Rightarrow b = ۲a \quad (۱)$$

در ضمن:

$$y = ax^۲ + bx + c\ ,\ S(-۱,۱) \Rightarrow ۱ = a - b + c$$
$$\xrightarrow{(۱)} ۱ = a - ۲a + c \Rightarrow c - a = ۱$$

ازطرفی می‌دانیم:

$$\alpha^۲ + \beta^۲ = ۵ \Rightarrow (\alpha+\beta)^۲ - ۲\alpha.\beta = ۵ \Rightarrow S^۲ - ۲P = ۵$$
$$\Rightarrow (-\frac{b}{a})^۲ - ۲P = ۵ \Rightarrow \frac{b^۲}{a^۲} - ۲P = ۵$$
$$\xrightarrow{(۱)} \frac{۴a^۲}{a^۲} - ۲P = ۵ \Rightarrow P = -\frac{۱}{۲}$$

یعنی داریم:

$$\frac{c}{a} = -\frac{۱}{۲} \Rightarrow a = -۲c \quad (۲)$$
$$c - a = ۱ \xrightarrow{(۲)} ۳c = ۱ \Rightarrow c = \frac{۱}{۳}$$

که باتوجه‌به معادلهٔ سهمی یعنی $y = ax^۲ + bx + c$، c همان محل برخورد سهمی با محور عرض‌ها است، زیرا:

$$x = ۰ \Rightarrow y = c = \frac{۱}{۳}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۲

۱۱ گزینه ۱

$$۲kx^۲ - ۴x - ۴k - ۵ = ۰$$

$$\text{حاصل‌ضرب ریشه‌ها} : P = \alpha\beta = \frac{-۴k-۵}{۲k} = -۲ - \frac{۵}{۲k}$$

چون قرار است $۲k$ عدد صحیح باشد و $۲k$ باید حداکثر مقدار صحیح منفی باشد، پس: $۲k = -۱$

$$\xrightarrow{k=-\frac{۱}{۲}} ۲(-\frac{۱}{۲})x^۲ - ۴x - ۴(-\frac{۱}{۲}) - ۵ = ۰ \Rightarrow -x^۲ - ۴x - ۳ = ۰$$

$$\Rightarrow \Delta = b^۲ - ۴ac = (-۴)^۲ - ۴(-۱)(-۳) = ۴$$

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۴۰۲

۱۲ گزینه ۳

$$x^{۲}+۷x-۳=۰\Rightarrow S=-۷\,,\ P=-۳$$

یعنی حاصل‌جمع ریشه‌ها منفی و حاصل‌ضربشان منفی است پس یکی از ریشه‌ها منفی و دیگری مثبت خواهد بود و باتوجه‌به اینکه $S<۰$ است یعنی $|\alpha|<|\beta|$ درنتیجه ریشه منفی مقدار بزرگتری داشته است.

$$|\alpha+۲\beta|+|\alpha|-|\beta|\xrightarrow{\alpha>۰\,,\beta<۰}|\underbrace{\alpha+\beta}_{S}+\beta|+|\underbrace{\alpha}_{+\alpha}|-|\underbrace{\beta}_{-\beta}|$$

$$=|-۷+\beta|+\alpha+\beta=۷-\beta+(-۷)=-\beta$$

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۴۰۲

۱۳ گزینه ۴

$$\alpha\,,\ a\,,\ \beta\xrightarrow{\text{دنبالهٔ هندسی}}\alpha\beta=a^{۲}\quad(*)$$

ازطرفی در معادلهٔ داده‌شده می‌دانیم $\alpha\beta=\frac{c}{a}$ یعنی:

$$\alpha\beta=\frac{۲a-۱}{۱}\xrightarrow{(*)}a^{۲}=۲a-۱\Rightarrow a^{۲}-۲a+۱=۰\Rightarrow a=۱$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۱

۱۴ گزینه ۳

روش اول:

$$\alpha+\beta=۱\Rightarrow\alpha=۱-\beta,\alpha\beta=-۲$$
$$\Rightarrow(۱-\beta)\beta=-۲\Rightarrow\beta^{۲}-\beta-۲=۰\Rightarrow\begin{cases}\beta=۲\Rightarrow\alpha=-۱\\\beta=-۱\Rightarrow\alpha=۲\end{cases}$$

حال با جایگذاری α یا β در معادلهٔ سؤال داریم:

$$-۴+k+۹-۲=۰\Rightarrow۳+k=۰\Rightarrow k=-۳$$

روش دوم:

نکته: حاصل‌ضرب و حاصل‌جمع ریشه‌های معادلهٔ درجه ۳، $y=ax^{۳}+bx^{۲}+cx+d$ به صورت $S=\frac{-b}{a}$ و $P=\frac{-d}{a}$ است.

فرض می‌کنیم این معادله ریشهٔ دیگری به نام γ دارد. پس:

$$\alpha\beta\gamma=\frac{۲}{۴}\Rightarrow\alpha\beta\gamma=\frac{۱}{۲}$$

چون می‌دانیم $\alpha\beta=-۲$، پس:

$$\alpha\beta\gamma=\frac{۱}{۲}\xrightarrow{\alpha\beta=-۲}-۲\gamma=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\gamma=\frac{-۱}{۴}$$

ازطرفی می‌دانیم:

$$\alpha+\beta+\gamma=\frac{-k}{۴}\xrightarrow[\gamma=\frac{-۱}{۴}]{\alpha+\beta=۱}۱+(\frac{-۱}{۴})=\frac{-k}{۴}$$
$$\Rightarrow\frac{۳}{۴}=\frac{-k}{۴}\Rightarrow k=-۳$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۱

۱۵ گزینه ۱

معادلهٔ استاندارد به‌صورت $a'x^۲ + b'x + c' = ۰$ است:

$$x^۲ + ۶x + a = ۰ \Rightarrow \begin{cases} S = \dfrac{-b'}{a'} = -۶ \\ P = \dfrac{c'}{a'} = a \end{cases}$$

$$|\alpha - \beta| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a'|} \xrightarrow{\alpha<\beta<۰} \alpha - \beta = \frac{\sqrt{\Delta}}{-a'} \xrightarrow{a'=۱} \alpha - \beta = -\sqrt{\Delta}$$

$$\Rightarrow \alpha - \beta = -\sqrt{۳۶ - ۴a}$$

$$۳\alpha^۲ + ۲\beta^۲ = \frac{۵}{۲}(\alpha^۲ + \beta^۲) + \frac{۱}{۲}(\alpha^۲ - \beta^۲) = ۱۲\sqrt{۲} + ۸۵$$

$$\Rightarrow \frac{۵}{۲}(\underbrace{\alpha^۲ + \beta^۲ + ۲\alpha\beta}_{(\alpha+\beta)^۲} - ۲\alpha\beta) + \frac{۱}{۲}((\alpha - \beta)(\alpha + \beta)) = ۱۲\sqrt{۲} + ۸۵$$

$$\Rightarrow \frac{۵}{۲}(S^۲ - ۲P) - \frac{۱}{۲}(S\sqrt{\Delta}) = ۱۲\sqrt{۲} + ۸۵$$

$$\Rightarrow \frac{۵}{۲}(۳۶ - ۲a) - \frac{۱}{۲}(-۶)(\sqrt{۳۶ - ۴a}) = ۱۲\sqrt{۲} + ۸۵$$

$$\Rightarrow ۹۰ - ۵a + ۳\sqrt{۳۶ - ۴a} = ۱۲\sqrt{۲} + ۸۵$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۹۰ - ۵a = ۸۵ \Rightarrow a = ۱ \\ ۳\sqrt{۳۶ - ۴a} = ۱۲\sqrt{۲} \Rightarrow ۳۶ - ۴a = ۳۲ \Rightarrow a = ۱ \end{cases}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۱

۱۶ گزینه ۳

ریشه‌های معادله را α و β در نظر می‌گیریم، حال داریم:

$$\alpha + \beta = \frac{a}{۳} \xrightarrow{\beta=۳\alpha} \alpha + ۳\alpha = \frac{a}{۳} \Rightarrow ۴\alpha = \frac{a}{۳} \Rightarrow a = ۱۲\alpha$$

$$\alpha.\beta = \frac{۴}{۳} \xrightarrow{\beta=۳\alpha} \alpha.۳\alpha = \frac{۴}{۳} \Rightarrow \alpha^۲ = \frac{۴}{۹} \Rightarrow \alpha = \pm\frac{۲}{۳}$$

$$a = ۱۲\alpha = ۱۲(\pm\frac{۲}{۳}) = \pm ۸ \Rightarrow ۸ - (-۸) = ۱۶$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

۱۷ گزینه ۲

$$S=\frac{-(-(a^{۲}+b^{۲}-۱۲))}{۱}\Rightarrow a+b=a^{۲}+b^{۲}-۱۲$$

$$a+b=(a+b)^{۲}-۲ab-۱۲(I)$$

$$\text{از طرفی : } P=\frac{a+b-۱}{۱}\Rightarrow ab=(a+b)-۱$$

$$\xrightarrow[(I)]{\text{جایگذاری در رابطهٔ}} a+b=(a+b)^{۲}-۲(a+b)+۲-۱۲$$

$$\Rightarrow (a+b)^{۲}-۳(a+b)-۱۰=۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b=\frac{۳+\sqrt{۴۹}}{۲}\Rightarrow a+b=۵ & \checkmark \text{ قابل‌قبول} \\ a+b=\frac{۳-\sqrt{۴۹}}{۲}\Rightarrow a+b=-۲ \end{cases}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

۱۸ گزینه ۳

$$|-\frac{b}{a}-(-\frac{c}{a})|=۲\Rightarrow |-\frac{b}{a}+\frac{c}{a}|=۲\Rightarrow |c-b|=۲a\Rightarrow \begin{cases} c-b=۲a \\ \text{یا} \\ c-b=-۲a\Rightarrow b-c=۲a \end{cases}$$

ابتدا حالتی که $c-b=۲a$ باشد را بررسی می‌کنیم، حالت دوم نیز مشابه است.

چون a یک رقم طبیعی است پس $۲a$ زوج و مثبت است. حالت‌های زیر رخ می‌دهد:

۱) اگر $c-b=۲$ باشد، آن‌گاه برای c مقادیر $\{۳,۴,۵,۶,۷,۸,۹\}$ وجود دارد. (۷ حالت)

۲) اگر $c-b=۴$ باشد، آن‌گاه برای c مقادیر $\{۵,۶,۷,۸,۹\}$ وجود دارد. (۵ حالت)

۳) اگر $c-b=۶$ باشد، آن‌گاه برای c مقادیر $\{۷,۸,۹\}$ وجود دارد. (۳ حالت)

۴) اگر $c-b=۸$ باشد، آن‌گاه برای c مقادیر $\{۹\}$ وجود دارد. (۱ حالت)

بنابراین کل حالت‌ها برابر است با:

$$۲(۱+۳+۵+۷)=۲\times ۱۶=۳۲$$

تذکر: باتوجه‌به اینکه به ازای $a,b,c\in\{۱,۲,\dots,۹\}$ دلتا همواره مثبت است، بنابراین کل حالات به‌دست‌آمده قابل‌قبول می‌باشد.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

۱۹ گزینه ۳

$$-\frac{b}{a}=-\frac{c}{a}+۲\Rightarrow b=c-۲a\Rightarrow ۲a=c-b$$
$$۲\le ۲a\le ۱۸\Rightarrow ۲\le c-b\le ۱۸$$

چون $c-b$ برابر با $۲a$ است، پس عددی زوج است:

اگر $c-b=۲$ باشد، ۷ حالت وجود دارد

اگر $c-b=۴$ باشد، ۵ حالت وجود دارد.

اگر $c-b=۶$ باشد، ۳ حالت وجود دارد.

اگر $c-b=۸$ باشد، ۱ حالت وجود دارد.

پس در کل ۱۶ حالت داریم.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

۲۰ گزینه ۴

$$\left(\sqrt[۳]{x^۲}+\frac{۱}{\sqrt[۳]{x^۲}}+۱\right)\left(\sqrt[۳]{x^۲}-۱\right)=۲\sqrt[۳]{x}$$
$$\left(\frac{\sqrt[۳]{x^۴}+\sqrt[۳]{x^۲}+۱}{\sqrt[۳]{x^۲}}\right)\left(\sqrt[۳]{x^۲}-۱\right)=۲\sqrt[۳]{x}$$
$$\xrightarrow{\times\sqrt[۳]{x^۲}}\left(\underbrace{\sqrt[۳]{x^۴}}_{a^۲}+\underbrace{\sqrt[۳]{x^۲}}_{ab}+\underbrace{۱}_{b^۲}\right)\left(\underbrace{\sqrt[۳]{x^۲}}_{a}-\underbrace{۱}_{b}\right)=۲x$$
$$\Rightarrow x^۲-۱=۲x\Rightarrow x^۲-۲x-۱=۰$$

جمع ریشه‌ها برابر $\frac{-b}{a}$ است: $\frac{-b}{a}=۲$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

۲۱ گزینه ۴

چون توان‌های xهای استفاده‌شده در معادله، همگی زوج هستند، پس اگر α جواب این معادله باشد، $-\alpha$ هم حتماً جواب معادله است. درنتیجه مجموع جواب‌های این معادله، حتماً صفر است: $S = ۰$

الان باید حاصل‌ضرب ریشه‌های این معادله را حساب کنیم. با فرض $x^۲ = t$، داریم:

$$t^۲ - ۷t - ۵ = ۰ \xrightarrow{\Delta=۶۹} t = \frac{۷ \pm \sqrt{۶۹}}{۲}$$

چون $x^۲ \geq ۰$ است، پس جواب‌های منفی t، قابل‌قبول نیستند و درنتیجه فقط $t = \frac{۷ + \sqrt{۶۹}}{۲}$ قابل‌قبول است.

$$x^۲ = \frac{۷ + \sqrt{۶۹}}{۲} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{۷ + \sqrt{۶۹}}{۲}}$$

پس:

$$P = -\sqrt{\frac{۷ + \sqrt{۶۹}}{۲}} \times \sqrt{\frac{۷ + \sqrt{۶۹}}{۲}} = -\frac{۷ + \sqrt{۶۹}}{۲}$$

مقدار عبارت خواسته‌شده، برابر است با:

$$۲P^۲ - \underbrace{۳SP}_{۰} + \underbrace{۲S}_{۰} = ۲\left(-\frac{۷ + \sqrt{۶۹}}{۲}\right)^۲ = ۲\left(\frac{۴۹ + ۶۹ + ۱۴\sqrt{۶۹}}{۴}\right) = ۵۹ + ۷\sqrt{۶۹}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۰

۲۲ گزینه ۱

می‌دانیم اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^۲+bx+c=۰$ باشد، آنگاه داریم:

$$s=\alpha+\beta=-\frac{b}{a}\ ,\ \ p=\alpha\beta=\frac{c}{a}$$

مجموع ریشه‌ها با معکوس حاصل‌ضرب ریشه‌ها برابر است، پس داریم:

$$s=\frac{۱}{p}\Rightarrow\alpha+\beta=\frac{۱}{\alpha\beta}$$

$$\Rightarrow -\frac{۲m-۱}{۳}=\frac{۱}{\frac{(۲-m)}{۳}}\Rightarrow\frac{-۲m+۱}{۳}=\frac{۳}{۲-m}$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} -۴m+۲m^۲+۲-m=۹\Rightarrow ۲m^۲-۵m-۷=۰$$

$$\xrightarrow{a+c=b}\begin{cases}m=-۱\\ m=-\frac{c}{a}=\frac{۷}{۲}\end{cases}$$

طبق صورت مسئله، معادلهٔ داده‌شده دارای دو ریشهٔ حقیقی است، پس باید $\Delta>۰$ باشد. حال مقدار m را در معادله جایگذاری می‌کنیم:

$$\begin{cases}m=-۱\Rightarrow ۳x^۲+(-۲-۱)x+۲+۱=۰\Rightarrow ۳x^۲-۳x+۳=۰\Rightarrow\Delta<۰ & \text{غ ق ق}\\ m=\frac{۷}{۲}\Rightarrow ۳x^۲+(۲\times\frac{۷}{۲}-۱)x+۲-\frac{۷}{۲}=۰\Rightarrow ۳x^۲+۶x-\frac{۳}{۲}=۰\Rightarrow\Delta>۰ & \text{ق ق}\end{cases}$$

بنابراین $m=\frac{۷}{۲}$ است.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

معادله‌ی دو مجذوری (درجه چهار) به شکل $ax^4+bx^2+c=0$

واسه حل این معادله کافیه از تغییر متغیر $x^2=t$ استفاده کنیم. پس داریم: $at^2+bt+c=0$

به مثال‌های زیر دقت کن:

تمرین:

$x^4-x^2-6=0$

تمرین: اگر معادله‌ی $x^4-(m+2)x^2+m+5=0$ دارای ۴ریشه حقیقی متمایز باشد، مجموعه مقادیر m به کدام صورت است ؟ (سراسری تجربی ۸۵)

۱) $m<-4$ ۲) $m>4$ ۳) $-4<m<4$ ۴) $4<m<9$

معادلات به شکل $ax+b\sqrt{x}+c=0$

واسه حل این معادله‌ها از تغییر $\sqrt{x}=t$ استفاده می‌کنیم. واسه این حالت هم نیازی نیست فرمول حفظ کنی.

تمرین:

$x+4\sqrt{x}-5=0$

به این مثال از کتاب درسی توجه کنید:

مثال ۶۰:

$4x^6+1=5x^3$

تمرین: فرض کنید x_1 و x_2 جواب‌های معادلهٔ $(\sqrt[3]{x^2}+\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}+1)(\sqrt[3]{x^2}-1)=2\sqrt[3]{x}$ باشند، مقدار x_1+x_2 کدام است؟ (سراسری تجربی ۱۴۰۰)

۱) ۱- ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ۲

ویژه علاقه‌مندان به ریاضی **روابط بین ضرائب و ریشه‌ها در معادله‌ی درجه‌ی سوم** $ax^3+bx^2+cx+d=0$

فرض کنید این معادله سه ریشه به نام‌های α، β و γ داشته باشد، بنابراین:

$$ax^3+bx^2+cx+d=a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$$

حال عبارت حاصل‌ضربی را کمی ساده می‌کنیم:

$$a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)=a\left(x^3-(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha\gamma+\beta\alpha+\gamma\beta)x-\alpha\beta\gamma\right)$$

شرط برابری آن است که ضرائب جملات هم‌توان، در طرفین تساوی با یک‌دیگر مساوی باشد و در نتیجه:

۱) $\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a}$	۲) $\alpha\gamma+\beta\gamma+\alpha\beta=\frac{c}{a}$	۳) $\alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}$

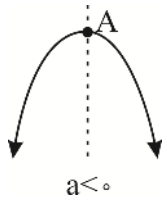
حل مسأله با استفاده از معادلهٔ درجه دوم

تمرین: از یک رشته سیم به طول ۵۰ متر، می‌خواهیم یک مستطیل به مساحت ۱۴۴ مترمربع بسازیم. طول مستطیل چند متر بیشتر از عرض آن است؟ *(مثال کتاب درسی)*

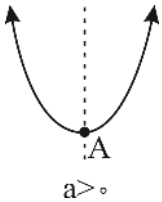
۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

سهمی

سهمی: نمودار هر معادله به شکل $y=ax^2+bx+c$ که در آن a، b و c اعداد حقیقی هستند و $a\neq 0$ را یک سهمی می‌نامیم که نمودار آن به یکی از دو شکل زیر می‌باشد:



سهمی رو به پایین یا سهمی دارای بالاترین نقطه باشد.



سهمی رو به بالا یا سهمی دارای پایین‌ترین نقطه باشد.

نقطهٔ A را در شکل‌های بالا رأس سهمی می‌گوییم و خط عمودی که از A می‌گذرد را خط تقارن یا محور تقارن سهمی می‌نامیم.

۱) اگر $a>0$ باشد، A پایین‌ترین نقطهٔ سهمی بوده و مقدار تابع در آن کم‌ترین مقدار خواهد شد که به آن مینیمم مقدار تابع می‌گوییم.

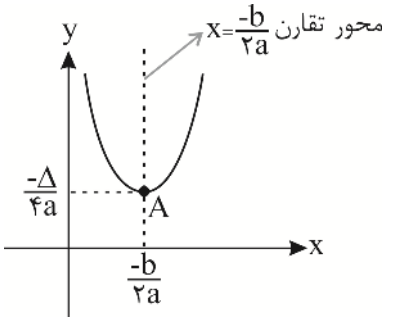
۲) اگر $a<0$ باشد، A بالاترین نقطهٔ سهمی بوده و مقدار تابع در آن بیشترین مقدار خواهد شد که به آن ماکزیمم مقدار تابع می‌گوییم.

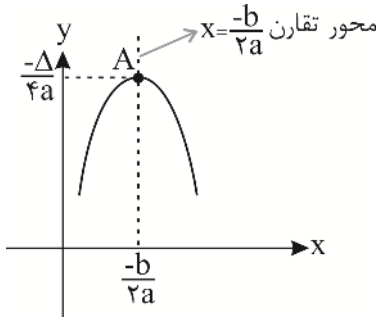
بعضی از خواص نمودار سهمی عبارت‌اند از:

۱) مختصات رأس سهمی به صورت $A(\frac{-b}{2a},-\frac{\Delta}{4a})$ می‌باشد.

۲) خط $x=-\frac{b}{2a}$ محور تقارن سهمی است. (محور تقارن خطی است که از رأس می‌گذرد و موازی محور yها است.)

۳) در حالت $a>0$، رأس سهمی پایین‌ترین نقطهٔ سهمی و در حالت $a<0$، رأس سهمی بالاترین نقطهٔ سهمی است.



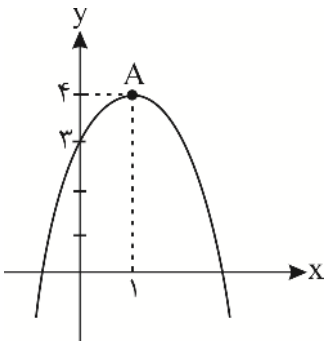


تذکر: برای یافتن عرض رأس سهمی کافی است $x=\frac{-b}{2a}$ را در معادلهٔ سهمی جایگزین کنیم. در واقع مقدار عرض نقطهٔ رأس سهمی به ازای $x=-\frac{b}{2a}$ به دست می‌آید که برابر همان $-\frac{\Delta}{4a}$ است.

تمرین: سهمی $y=-x^2+2x+3$ را با یافتن رأس آن رسم کنید.

پاسخ: چون $a<0$ پس سهمی رو به پایین است. از فرمول $x=-\frac{b}{2a}$ طول رأس سهمی و سپس با جای‌گذاری در معادلهٔ سهمی عرض آن را پیدا می‌کنیم:

$$x=-\frac{b}{2a}=-\frac{2}{2(-1)}=1 \Rightarrow y=-1+2+3=4 \Rightarrow \text{رأس: } A(1,4)$$



تمرین: نیمساز ناحیهٔ اول و سوم از رأس سهمی $y=ax^2-2x+2$ عبور می‌کند. مقدار a کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ «۱» ـ طول رأس سهمی برابر $-\frac{b}{2a}$ و عرض آن $-\frac{\Delta}{4a}$ است.

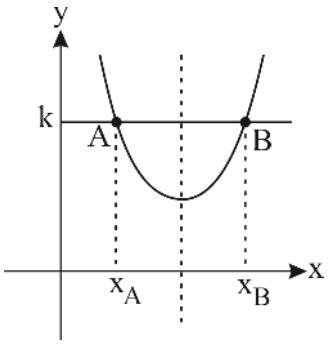
$$x=-\frac{b}{2a}=-\frac{-2}{2a}=\frac{1}{a}$$

$$y=-\frac{\Delta}{4a}=-\frac{4-8a}{4a}=\frac{-1+2a}{a}$$

مختصات رأس در معادلهٔ نیمساز یعنی $y=x$ صدق می‌کند.

$$y=x \Rightarrow \frac{-1+2a}{a}=\frac{1}{a} \Rightarrow -1+2a=1 \Rightarrow a=1$$

نکته: اگر خط افقی $y=k$ نمودار سهمی را در نقاط A و B قطع کند، آن‌گاه وسط A و B روی محور تقارن سهمی قرار دارد. به بیان دیگر محور تقارن سهمی همان خط $x=\frac{x_A+x_B}{2}$ است.



محور تقارن: $x=\frac{x_A+x_B}{2}$

تمرین: خط d نمودار سهمی $y=ax^2+bx+c$ را در نقاط $A(2,k)$ و $B(6,k)$ قطع می‌کند، مقدار $\frac{a}{b}$ را به دست آورید.

پاسخ: نقاط Aو B بر روی یک خط افقی قرار دارند، پس وسط آن‌ها روی محور تقارن است.

$$\text{محور تقارن}: x=\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{2+6}{2}=4$$

از طرفی محور تقارن همان خط $x=\frac{-b}{2a}$ است، پس $\frac{-b}{2a}=4$ و در نتیجه $\frac{a}{b}=\frac{-1}{8}$ است.

تمرین: محور تقارن سهمی‌های $y=x^2+ax-2$ و $y=-x^2-2x+b$ مشترک هستند. اگر از دو نقطه با عرض یکسان روی دو سهمی خط $y=1$ رسم شود، مقدار ab چقدر است؟ (کنکور دی‌ماه ۱۴۰۱)

۱) -8 ۲) -4 ۳) 8 ۴) 4

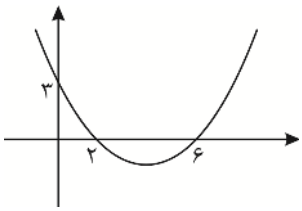
نوشتن معادلهٔ سهمی از روی نمودار آن

برای نوشتن معادلهٔ سهمی از روی نمودارش، به یکی از دو روش زیر عمل می‌کنیم:

الف) اگر نمودار سهمی در دو نقطه را به محور xها برخورد کرده باشد (دارای دو ریشه باشد) یکی از روش‌های خوب، نوشتن معادله به صورت مقابل است: $f(x)=a(x-\text{ریشهٔ اول})(x-\text{ریشهٔ دوم})$

عدد a را با استفاده از معلومات سؤال و یا شکل نمودار پیدا می‌کنیم. مثلاً می‌گویند $|a|=1$ است و یا مختصات یک نقطه که معمولاً محل برخورد منحنی با محور yها است در معادله جاگذاری می‌کنیم و a پیدا می‌شود.

تمرین: اگر نمودار سهمی $y=ax^2+bx+c$ به صورت زیر باشد، ضابطهٔ سهمی را مشخص کنید.



پاسخ: این سهمی در نقاط $x=2$ و $x=6$ به محور xها برخورد کرده است (ریشه‌ها)، پس:

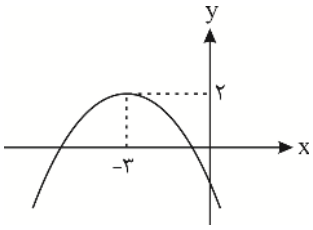
$$f(x)=a(x-2)(x-6)\xrightarrow[\text{در معادله صدق می‌کند}]{(0,3)}3=a(0-2)(0-6)\Rightarrow a=\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow f(x)=y=\frac{1}{4}(x-2)(x-6)=\frac{1}{4}(x^2-8x+12)=\frac{1}{4}x^2-2x+3$$

ب) مختصات رأس سهمی $S(x_S,y_S)$ که همان مختصات $\max$ و یا $\min$ است می‌دهند که در این حالت داریم:

$$f(x)=a(x-x_S)^2+y_S$$

تمرین: در شکل زیر نمودار سهمی به معادلهٔ $f(x)=ax^2+bx+c$ داده شده است. اگر $|a|=1$ باشد، b و c را پیدا کنید.



پاسخ: چون مختصات رأس را داریم پس معادله را به صورت مقابل می‌نویسیم: $f(x)=a(x-(-3))^2+2 \Rightarrow f(x)=a(x+3)^2+2$

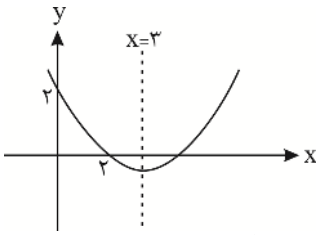
از طرفی در سؤال گفته شده که $|a|=1$ است پس $a=\pm 1$ و چون دهانه سهمی رو به پایین است $a=-1$ را انتخاب می‌کنیم:

$$f(x)=-(x+3)^2+2=-(x^2+6x+9)+2=-x^2-6x-9+2 \Rightarrow f(x)=-x^2-6x-7$$

پس $b=-6$ و $c=-7$ می‌باشد.

یادت باشه: یه مدل ترکیبی هم داریم. یعنی محور تقارن و یک ریشه را می‌دهد. در این حالت از خاصیت محور تقارن که $x_S=\frac{\text{ریشه دوم + ریشه اول}}{2}$ استفاده کرده و ریشهٔ دیگر را به دست می‌آوریم.

تمرین: معادلهٔ سهمی مقابل را بنویسید:



پاسخ: با توجه به شکل، $x=3$ محور تقارن است و چنان‌چه یک سهمی دارای دو ریشه باشد، محور تقارن دقیقاً از وسط ریشه‌ها عبور می‌کند:

$$x_S=\frac{x_1+x_2}{2} \Rightarrow 3=\frac{2+x_2}{2} \Rightarrow x_2=4$$

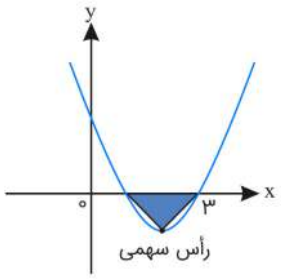
حالا با داشتن دو ریشه معادلهٔ سهمی را می‌نویسیم:

$$f(x)=a(x-2)(x-4) \xrightarrow[\text{در معادله صدق می‌کند}]{(0,2)} 2=a(0-2)(0-4) \Rightarrow a=\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{1}{4}(x-2)(x-4)=\frac{1}{4}(x^2-6x+8)=\frac{1}{4}x^2-\frac{3}{2}x+2$$

راستی چرا از $f(x)=a(x-x_S)^2+y_S$ استفاده نکردیم؟ چون y_S را نداشتیم.

تمرین: با توجه به نمودار تابع درجهٔ دوم $y=3x^2+ax+18$، مساحت مثلث سایه‌زده کدام است؟



۱) $\frac{3}{2}$

۲) $\frac{3}{4}$

۳) $\frac{3}{8}$

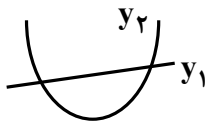
۴) $\frac{3}{16}$

وضعیت یک خط، نسبت به سهمی

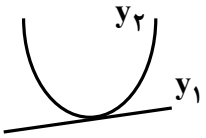
چنانچه خط $y_1 = a'x + b'$ را با سهمی $y_2 = ax^2 + bx + c$ قطع دهیم، معادله‌ی تلاقی آن ها به دست می‌آید. این معادله‌ی تلاقی از درجه‌ی دوم است.

$$\begin{cases} y_2 = ax^2 + bx + c \\ y_1 = a'x + b' \end{cases} \xrightarrow{\text{تلاقی}} ax^2 + bx + c = a'x + b' \Rightarrow ax^2 + (b - a')x + c - b' = 0$$

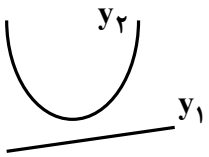
الف) چنانچه Δ در معادله‌ی تلاقی مثبت باشد $(\Delta > 0)$ ، خط سهمی را در دو نقطه قطع می‌کند.



ب) اگر Δ در معادله‌ی تلاقی صفر باشد $(\Delta = 0)$ ، خط بر سهمی مماس است.



ج) اگر Δ در معادله‌ی تلاقی منفی باشد $(\Delta < 0)$ ، خط و سهمی همدیگر را قطع نمی‌کنند.



تمرین: منحنی به معادله‌ی $y = (2x+1)(x+8)$ با خطوط $y = mx$ نقطه مشترک ندارد. مجموعه مقادیر m چگونه است ؟

(سراسری ریاضی ۸۸ و مشابه سراسری ریاضی ۹۰)

۱) $5 < m < 13$ ۲) $15 < m < 23$ ۳) $7 < m < 15$ ۴) $9 < m < 25$

تمرین: به ازای کدام مقدار m ، نمودار تابع $y = 2x^2 + (m+1)x + m + 6$ بر نیمساز ناحیه‌ی اول محورهای مختصات مماس است ؟

(سراسری تجربی خارج از کشور ۹۳)

۱) ۴- ۲) ۴ و ۱۲- ۳) ۴- و ۱۲ ۴) ۱۲

۱ اگر α و β صفرهای سهمی $y = ۲۵\alpha x^۲ + ۴x + \beta$ و $\beta > \alpha$ باشد، رأس این سهمی در کدام ناحیه از صفحهٔ مختصات قرار دارد؟

۱) اول
۲) دوم
۳) سوم
۴) چهارم

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

۲ نقاط $(۳, -۴)$ و $(-۱/۵, -۴)$ روی یک تابع درجه دوم واقع هستند. مجموع صفرهای این تابع کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۲}$
۲) $\frac{۳}{۴}$
۳) $\frac{۵}{۲}$
۴) $\frac{۵}{۴}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۳

۳ صفرهای تابع $y = ۲x^۲ - (m+۲)x + m$ و نقطه تقاطع آن با محور عرض‌ها، رئوس یک مثلث هستند. اگر مساحت این مثلث برابر $\frac{۳}{۴}$ باشد، کدام می‌تواند طول رأس سهمی $y = x^۲ - mx + ۱$ باشد؟

۱) $\frac{۱}{۴}$
۲) $\frac{۲}{۳}$
۳) $-\frac{۳}{۴}$
۴) $-\frac{۱}{۲}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۴ صفرهای تابع $y = mx^۲ - ۴x - (m+۴)$ و نقطهٔ تقاطع آن با محور yها، رئوس یک مثلث هستند. اگر مساحت این مثلث برابر ۳ باشد، اختلاف طول رأس سهمی‌های رسم‌شده توسط مقادیر مختلف m کدام است؟

۱) $\frac{۷}{۲}$
۲) $\frac{۹}{۴}$
۳) $\frac{۷}{۴}$
۴) $\frac{۹}{۲}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

۵ معادله‌های $x^۲ + ۶x + m = ۰$ و $x^۲ + ۲x - ۳m = ۰$ یک ریشهٔ مشترک غیرصفر دارند. اختلاف ریشه‌های غیرمشترک کدام است؟

۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۷

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۲

۶ کوتاه‌ترین فاصلهٔ سهمی $y^۲ = ۴x$ از نقطهٔ $M\ (۳, ۰)$، کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}$
۲) $\frac{۳}{۲}$
۳) $۲\sqrt{۲}$
۴) ۳

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

۷ محیط مستطیلی ۳۰ متر است. ماکزیمم مساحت این مستطیل، چقدر است؟

۱) ۲۲۵
۲) ۲۰۹
۳) ۵۶/۲۵
۴) ۱۱/۲۵

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۴۰۱

۸ به ازای چند مقدار a، سهمی $y = ax^۲ + (۳ + ۲a)x$ از ناحیهٔ سوم محورهای مختصات نمی‌گذرد؟

۱) هیچ مقدار a
۲) تمام مقادیر a
۳) ۱
۴) ۲

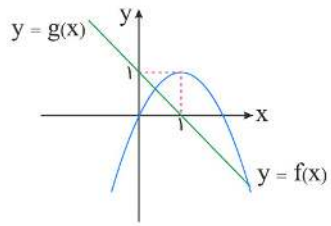
کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

۹ به ازای چند مقدار m، تابع $y = (۱ - ۱۸m)x^۲ + ۸(m^۲ + ۱)x + ۱۱$ در نقطه‌ای به طول $\frac{۱}{۲}$ دارای ماکسیمم است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) هیچ مقدار m
۴) تمام مقادیر m

کنکور سراسری علوم انسانی خارج از کشور ۱۴۰۱

۱۰ نمودار تابع با ضابطه‌های سهمی $y = f(x)$ و خط راست $y = g(x)$ در صفحه مختصات مطابق شکل زیر داده شده است. مجموع جواب‌های معادله $f(x) = g^۲(x)$، کدام است؟



۱) -۲
۲) $-\frac{۱}{۲}$
۳) $\frac{۱}{۲}$
۴) ۲

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۴۰۰

۱۱ معادلهٔ درجهٔ دوم $۲x^۲ + mx + m + ۶ = ۰$ دارای دو ریشهٔ مثبت است. بازهٔ مقادیر m، کدام است؟

۱) $(-۴, ۰)$
۲) $(-۴, -۲)$
۳) $(-۶, ۰)$
۴) $(-۶, -۴)$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

پاسخ Homework

۱ گزینه ۱

$$\alpha\beta = \frac{c}{a} \Rightarrow \alpha\beta = \frac{\beta}{۲۵\alpha} \Rightarrow \alpha^۲ = \frac{۱}{۲۵} \Rightarrow \alpha = \pm\frac{۱}{۵}$$

α ریشهٔ معادله است و دو حالت رخ می‌دهد:

$$\alpha = \frac{۱}{۵} \Rightarrow ۲۵ \times \frac{۱}{۵} \times \frac{۱}{۲۵} + \frac{۴}{۵} + \beta = ۰ \Rightarrow \beta = -۱ < \alpha \quad \times$$

$$\alpha = -\frac{۱}{۵} \Rightarrow ۲۵ \times \frac{-۱}{۵} \times \frac{۱}{۲۵} - \frac{۴}{۵} + \beta = ۰ \Rightarrow \beta = ۱ > \alpha \quad \checkmark$$

بنابراین $\alpha = -\frac{۱}{۵}$ و $\beta = ۱$ قابل‌قبول است.

$$y = -۵x^۲ + ۴x + ۱$$

$$x_S = \frac{-b}{۲a} = \frac{۲}{۵} \quad , \quad y_S = -۵(\frac{۲}{۵})^۲ + ۴(\frac{۲}{۵}) + ۱ = \frac{۹}{۵}$$

$$\Rightarrow S(\frac{۲}{۵}, \frac{۹}{۵})$$

بنابراین S در ناحیهٔ اول قرار دارد.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

۲ گزینه ۱

تابع درجه دوم را به‌صورت $y = ax^۲ + bx + c$ فرض کنیم. دقت شود نقاط داده شده دارای عرض‌های یکسان هستند پس طول رأس بین طول‌های آن‌هاست یعنی:

$$x_S = \frac{-۱/۵ + ۳}{۲} = \frac{۱/۵}{۲} = \frac{۳}{۴}$$

از طرفی طول رأس $x_S = -\frac{b}{۲a}$ است.

$$-\frac{b}{۲a} = \frac{۳}{۴}$$

مجموع ریشه‌های معادله درجه دوم برابر است با $-\frac{b}{a}$ بنابراین:

$$S = -\frac{b}{a} = \frac{۲ \times ۳}{۴} = \frac{۳}{۲}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۳

۳ گزینه ۴

در معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^۲ + bx + c = ۰$، اگر $a + b + c = ۰$، آنگاه $x = ۱$ و $x = \frac{c}{a}$ است. مجموع ضرایب در معادلهٔ درجهٔ دوم داده‌شده برابر صفر است، پس:

$$۲x^۲ - (m+۲)x + m = ۰ \Rightarrow x = ۱,\ x = \frac{m}{۲}$$

تقاطع با محور عرض‌ها $x = ۰ : y = m$

$$\Rightarrow S = \left|\frac{m(\frac{m}{۲} - ۱)}{۲}\right| = \frac{۳}{۴} \Rightarrow |m(m-۲)| = ۳$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m^۲ - ۲m - ۳ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} m = -۱ \\ m = ۳ \end{cases} \\ m^۲ - ۲m + ۳ = ۰ \text{ ریشه ندارد} \end{cases}$$

به ازای $m = -۱, ۳$ تابع $y = ۲x^۲ - (m+۲)x + m$ دو ریشه دارد، بنابراین هر دو مقدار قابل‌قبول است. حال داریم:

$$y = x^۲ - mx + ۱ \Rightarrow \begin{cases} m = -۱ : y = x^۲ + x + ۱ \Rightarrow x_S = \frac{-۱}{۲} \\ m = ۳ : y = x^۲ - ۳x + ۱ \Rightarrow x_S = \frac{۳}{۲} \end{cases}$$

در گزینه‌ها فقط $x = \frac{-۱}{۲}$ موجود است، پس گزینهٔ "۴" درست است.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۴ گزینه ۳

در معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^۲+bx+c=۰$ اگر $a+c=b$، آنگاه $x=-۱$ و $x=-\frac{c}{a}$ است.

$$y=mx^۲-۴x-(m+۴)\Rightarrow x=-۱,\ x=\frac{m+۴}{m}$$

$$f(۰)=-(m+۴)$$

$$|\frac{m+۴}{m}-(-۱)|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|m|}=\frac{\sqrt{۱۶+۴m^۲+۱۶m}}{|m|}=\frac{۲|m+۲|}{|m|}$$

$$S=\frac{|\frac{m+۴}{m}-(-۱)|\times|-(m+۴)|}{۲}=\frac{|\frac{۲(m+۲)}{m}\times(m+۴)|}{۲}=۳$$

$$\Rightarrow m^۲+۶m+۸=۳|m|$$

m باید کوچک‌تر از صفر باشد، زیرا برای mهای مثبت، معادلهٔ فوق جواب ندارد. پس داریم:

$$\xrightarrow{m<۰} m^۲+۹m+۸=-۳m\Rightarrow m^۲+۹m+۸=۰\Rightarrow m=-۱,\ m=-۸$$

$$x_{\text{رأس}}=\frac{-b}{۲a}=\frac{۴}{۲m}\Rightarrow\begin{cases}m=-۱\Rightarrow x_{\text{رأس}}=-۲\\ m=-۸\Rightarrow x_{\text{رأس}}=-\frac{۱}{۴}\end{cases}\Rightarrow|-۲+\frac{۱}{۴}|=\frac{۷}{۴}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

۵ گزینه ۳

$$x^۲+۶x+m=x^۲+۲x-۳m\Rightarrow ۴x=-۴m\Rightarrow x=-m$$

$$x^۲+۲x-۳m=۰\Rightarrow x^۲+۲x+۳x=۰\Rightarrow x=۰,\ x=-۵\Rightarrow m=۵$$

$$\begin{matrix}x^۲+۲x-۱۵=۰\Rightarrow(x+۵)(x-۳)=۰\Rightarrow x=۳,-۵\\ x^۲+۶x+۵=۰\Rightarrow(x+۵)(x+۱)=۰\Rightarrow x=-۱,-۵\end{matrix}\Rightarrow ۳-(-۱)=۴$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۲

۶ گزینه ۳

برای yهای مثبت داریم $y=۲\sqrt{x}$ و نقاط روی آن را $N(x,\ ۲\sqrt{x})$ در نظر می‌گیریم:

$$MN=\sqrt{(x-۳)^۲+(۲\sqrt{x}-۰)^۲}=\sqrt{x^۲-۲x+۹}$$

$$\min(MN)=\sqrt{\frac{-\Delta}{۴a}}=\sqrt{-\frac{۴-۳۶}{۴}}=\sqrt{۸}=۲\sqrt{۲}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

۷ گزینه ۳

روش اول:

محیط مستطیل $۲(a+b)$ و مساحت ab است.

$$\text{محیط} = ۲(a+b) = ۳۰ \Rightarrow a+b = ۱۵ \Rightarrow b = ۱۵ - a$$
$$\text{مساحت} = ab = a(۱۵-a) = -a^۲ + ۱۵a$$

برای به دست آوردن ماکزیمم این عبارت، رأس سهمی را می‌یابیم؛ توجه کنید که طول رأس سهمی $y = ax^۲ + bx + c$ برابر $x = \frac{-b}{۲a}$ است.

$$a = \frac{-۱۵}{-۲} = \frac{۱۵}{۲}$$

حال $a = \frac{۱۵}{۲}$ را در عبارت قرار می‌دهیم:

$$-(\frac{۱۵}{۲})^۲ + ۱۵(\frac{۱۵}{۲}) = -\frac{۲۲۵}{۴} + \frac{۲۲۵}{۲} = \frac{۲۲۵}{۴} = ۵۶/۲۵$$

روش دوم: به یاد داشته باشید در میان مستطیل‌هایی با محیط ثابت، بیشترین مساحت زمانی است که مربع باشد؛ پس:

$$۲(a+b) = ۳۰ \Rightarrow a+b = ۱۵ \xrightarrow{a=b} ۲a = ۱۵ \Rightarrow a = \frac{۱۵}{۲}$$

و ادامه حل مانند روش اول است.

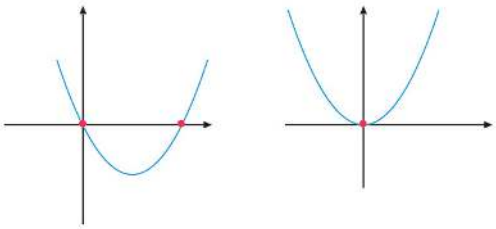
کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۴۰۱

۸ گزینه ۱

$$y = ax^۲ + (۳ + ۲a)x = x(ax + ۳ + ۲a) = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \\ ax + ۳ + ۲a = ۰ \Rightarrow x = -\dfrac{۳ + ۲a}{a} \end{cases}$$

سهمی از ناحیهٔ سوم عبور نمی‌کند، بنابراین به‌صورت شکل‌های زیر می‌تواند باشد:



سهمی روبه‌بالا $\Rightarrow a > ۰ \quad (*)$

ریشهٔ غیر صفر $> ۰ \Rightarrow -\dfrac{۳ + ۲a}{a} > ۰ \Rightarrow \dfrac{۳ + ۲a}{a} < ۰$

$\xrightarrow{a>۰} ۳ + ۲a < ۰ \Rightarrow a < -\dfrac{۳}{۲}$

بنابراین طبق (*) برای a مقداری یافت نشد.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

۹ گزینه ۲

تابع $y = ax^۲ + bx + c$ دارای ماکسیمم است اگر $a < ۰$ باشد و طول آن $x = \dfrac{-b}{۲a}$ است.

$$۱ - ۱۸m < ۰ \Rightarrow m > \frac{۱}{۱۸}$$

$$x = \frac{-۸(m^۲ + ۱)}{۲(۱ - ۱۸m)} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow ۱۶m^۲ - ۳۶m + ۱۸ = ۰$$

$$\Rightarrow (۴m - ۶)(۴m - ۳) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} m = \dfrac{۳}{۴} \\ m = \dfrac{۶}{۴} = \dfrac{۳}{۲} \end{cases}$$

هر دو مقدار بزرگ‌تر از $\frac{۱}{۱۸}$ هستند، بنابراین قابل‌قبول می‌باشند.

کنکور سراسری علوم انسانی خارج از کشور ۱۴۰۱

۱۰ گزینه ۴

اگر نمودار تابع $y=-x^{۲}$ را یک واحد در جهت مثبت محور xها و یک واحد در جهت مثبت محور yها انتقال دهیم، نمودار تابع $y=f(x)$ رسم می‌شود. طبق قوانین انتقال، ضابطه تابع $y=f(x)$ به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$y=-(x-۱)^{۲}+۱=-x^{۲}+۲x-۱+۱\Rightarrow f(x)=-x^{۲}+۲x$$

اگر نمودار تابع $y=-x$ را یک واحد به موازات محور xها و در جهت مثبت انتقال دهیم، نمودار تابع $y=g(x)$ رسم می‌شود.
بنابراین ضابطه تابع $g(x)$ به صورت $g(x)=-x+۱$ می‌باشد.
اکنون می‌توانیم معادله موردنظر را تشکیل داده و مجموع جواب‌های آن را به دست آوریم.

$$f(x)=g^{۲}(x)\Rightarrow -x^{۲}+۲x=(-x+۱)^{۲}\Rightarrow -x^{۲}+۲x=x^{۲}-۲x+۱\Rightarrow ۲x^{۲}-۴x+۱=۰$$
$$S=x_{۱}+x_{۲}=-\frac{b}{a}=-\frac{-۴}{۲}=۲$$

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۴۰۰

۱۱ گزینه ۴

برای اینکه معادلهٔ درجهٔ دوم دارای دو ریشهٔ مثبت باشد باید $\Delta>۰$، $p>۰$ و $s>۰$ باشد، بنابراین داریم:

$$۱)\ \Delta>۰\Rightarrow m^{۲}-۴\times ۲\times(m+۶)=m^{۲}-۸m-۴۸>۰$$
$$\Rightarrow \underbrace{(m-۱۲)(m+۴)}_{p}>۰$$

x	$-\infty$	-۴		۱۲	$+\infty$
p(x)	+	۰	−	۰	+

$$\Rightarrow m<-۴\ \text{یا}\ m>۱۲$$
$$۲)p>۰\Rightarrow p=-\frac{b}{a}=\frac{-m}{۲}>۰\Rightarrow m<۰$$
$$۳)s>۰\Rightarrow s=\frac{c}{a}=\frac{m+۶}{۲}>۰\Rightarrow m>-۶$$

حال از حدود m در (۱)، (۲) و (۳) اشتراک می‌گیریم، درنتیجه داریم:

$$m\in(-۶,-۴)$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

نامعادله‌ها

تعیین علامت

یکی از روش‌های اصلی حل نامعادله‌ها، تعیین علامت عبارت‌های جبری است. برای تعیین علامت یک عبارت جبری (به هر شکلی که باشد)، کارهای زیر را انجام می‌دهیم:

الف) ریشه‌ی عبارت‌ها را (چه در صورت و چه در مخرج) پیدا می‌کنیم.

ب) مرتبه‌ی ریشه‌ها را تعیین می‌کنیم.

پ) ریشه‌ها را به ترتیب در جدول تعیین علامت می‌نویسیم و ریشه‌های با مرتبه‌ی زوج را مشخص می‌کنیم (ما در این‌جا برای مشخص‌کردنشان، بالایشان یک * می‌گذاریم).

ت) عبارت در ریشه‌های صورت برابر صفر و در ریشه‌های مخرج تعریف‌نشده است. (بعضی‌ها روی خط ریشه‌های مخرج می‌نویسند ت.ن (تعریف‌نشده) ولی ما بر اساس آن‌چه متداول شده (ولی درست نیست) نماد ∞ می‌گذاریم.)

ث) علامت ضریب بزرگ‌ترین توان x را در صورت (بعد از ضرب‌کردن عامل‌ها) و علامت ضریب بزرگ‌ترین توان x را در مخرج، در هم ضرب می‌کنیم و نتیجه را می‌گذاریم توی اولین خانه‌ی سمت راست جدول.

ج) به سمت چپ حرکت می‌کنیم و با عبور از هر ریشه‌ی مرتبه‌ی فرد، علامت را عوض می‌کنیم؛ ولی با عبور از ریشه‌ی مرتبه‌ی زوج علامت را عوض نمی‌کنیم.

چ) ریشه‌ی قدرمطلق مثل ریشه‌ی مرتبه‌ی زوج عمل می‌کند.

برای حل یک نامعادله با روش تعیین علامت، اول همه‌ی اجزا را می‌آوریم یک‌طرف تا به یک نامعادله به شکل $A>0$ یا $A<0$ برسیم و سپس عبارت A را تعیین علامت می‌کنیم و با توجه به جهت نامعادله، مجموعه جواب را انتخاب می‌کنیم.

تمرین: مجموعه جواب نامعادله‌ی $\frac{x+1}{x-1}-\frac{x+6}{x+2}>1$، شامل چند عدد صحیح است؟

۱) هیچ ۲) یک ۳) دو ۴) بی‌شمار

پاسخ: گزینه‌ی «۳» ـ اول همه‌ی عوامل را می‌آوریم یک‌طرف و مخرج مشترک می‌گیریم:

$$\frac{x+1}{x-1}-\frac{x+6}{x+2}-1>0 \Rightarrow \frac{x^2+3x-2-x^2-5x+6-x^2-x+2}{(x-1)(x+2)}>0 \Rightarrow \frac{-x^2-3x+10}{(x-1)(x+2)}>0$$

$$-x^2-3x+10=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-5 \ (1) \\ x=2 \ (1) \end{cases} \qquad (x-1)(x+2)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \ (1) \\ x=-2 \ (1) \end{cases}$$

x	$-\infty$		-5		-2		1		2		$+\infty$
		$-$	0	$+$	∞	$-$	∞	$+$	0	$-$	

با توجه به جهت نامعادله، مجموعه جواب برابر است با $1<x<2$ یا $-5<x<-2$ که شامل اعداد صحیح ۴- و ۳- یعنی دو عدد صحیح است.

تمرین: طول بزرگ‌ترین بازه‌ای که نامساوی $\frac{x^4-3x+2}{(x-1)(x-2)}\leq 1$ در آن برقرار است، برابر کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

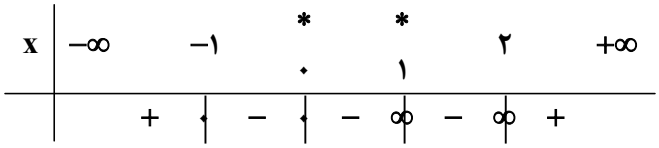
پاسخ: گزینه‌ی «۳» ـ اول همه را می‌آوریم یک طرف و مخرج‌مشترک می‌گیریم:

$$\frac{x^4-4x+2}{x^2-3x+2}-1\leq 0 \Rightarrow \frac{x^4-3x+2-x^2+3x-2}{x^2-3x+2}\leq 0 \Rightarrow \frac{x^4-x^2}{x^2-3x+2}\leq 0$$

حالا کسر به دست آمده را تعیین علامت می‌کنیم:

$$x^۴-x^۲=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۰ \ (۲) \\ x=۱ \ (۱) \\ x=-۱ \ (۱) \end{cases} \qquad x^۲-۳x+۲=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۱ \ (۱) \\ x=۲ \ (۱) \end{cases}$$

دقت کنید که چون ریشه‌ی $x=۱$ دو بار (یک بار در صورت و یک بار در مخرج) به دست آمده، پس مرتبه‌ی ریشه‌ی $x=۱$ زوج است؛ یعنی دو ریشه‌ی مرتبه‌ی زوج داریم: یکی $x=۰$ و دیگری $x=۱$:



بنابراین بازه‌های جواب نامعادله عبارت‌اند از $(-۱,۱]$ و $(۱,۲)$؛ پس طول بزرگ‌ترین بازه‌ی جواب نامعادله برابر طول بازه‌ی $(-۱,۱]$ یعنی ۲ است.

اگر بخواهیم عبارت درجه دوم $ax^۲+bx+c$ همواره مثبت یا همواره منفی یا همواره نامنفی یا همواره نامثبت باشد، باید داشته باشیم:

همواره منفی (کوچک‌تر از صفر) $\begin{cases} \Delta<۰ \\ a<۰ \end{cases}$ همواره مثبت (بزرگ‌تر از صفر) $\begin{cases} \Delta<۰ \\ a>۰ \end{cases}$

همواره نامثبت (کوچک‌تر یا مساوی صفر) $\begin{cases} \Delta\le۰ \\ a<۰ \end{cases}$ همواره نامنفی (بزرگ‌تر یا مساوی صفر) $\begin{cases} \Delta\le۰ \\ a>۰ \end{cases}$

تمرین: اگر نمودار تابع $y=(m+۳)x^۲+۲mx+۴$ به ازای تمام مقادیر x بالای محور xها قرار گیرد، حدود m کدام است؟

۱) $-۳<m<۲$ ۲) $-۳<m<۶$ ۳) $-۳<m<-۲$ ۴) $-۲<m<۶$

پاسخ: گزینه‌ی «۴» ـ با توجه به چیزهایی که در مورد تعیین علامت گفتیم، برای آن که عبارت درجه دوم $ax^۲+bx+c$ همواره مثبت باشد، باید ریشه نداشته باشد؛ یعنی $\Delta<۰$ و از طرفی عبارت هم‌لامت ضریب $x^۲$ یعنی a است یعنی برای مثبت‌بودن عبارت، باید $a>۰$ باشد:

$$\Delta<۰ \Rightarrow ۴m^۲-۱۶(m+۳)<۰ \Rightarrow ۴(m^۲-۴m-۱۲)<۰ \Rightarrow -۲<m<۶$$
$$a>۰ \Rightarrow m+۳>۰ \Rightarrow m>-۳$$

و اشتراک دو بازه‌ی $-۲<m<۶$ و $m>-۳$ می‌شود: $-۲<m<۶$.

تمرین: مجموعه جواب نامعادلهٔ $\frac{۲x-۳}{x+۱}<۳$ به کدام صورت است؟ *(تجربی ۹۸ و مشابه ۹۶)*

۱) $\mathbb{R}-[-۶,۴]$ ۲) $\mathbb{R}-[-۴,۶]$ ۳) $x>۴$ ۴) $x<-۶$

۱ سهمی $y = -mx^۲ + mx + ۱$ و خط $y = -m - x$ یکدیگر را در هیچ نقطه‌ای قطع نمی‌کنند. حدود m شامل چند مقدار صحیح است؟

۱) ۳ ۲) ۲

۳) ۱ ۴) صفر

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

۲ فرض کنید مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ $\frac{(m^۲ - ۱)(x^۲ - ۴mx + ۴)(۲x - ۳)}{x - ۳\sqrt{x} + ۲} \geq ۰$ فقط یک بازه باشد. مقدار m، کدام است؟ (با تغییر)

۱) -۱ ۲) $\frac{۱}{۳}$

۳) ۲ ۴) $\frac{۷}{۳}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۰

۳ فرض کنید مجموعه جواب نامعادلهٔ $\frac{((m^۲ - ۱)x^۲ - ۴mx + ۴)(x - ۳\sqrt{x} + ۲)}{۲x - ۳} > ۰$، به ازای $x > \frac{۳}{۲}$، بازهٔ $(۲, ۴)$ باشد. مقدار m، کدام است؟ (با تغییر)

۱) -۲ ۲) صفر

۳) ۱ ۴) ۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۰

۴ در بازهٔ (a, b) عبارت $۱۵x^۲ + ۷۳x + ۱۴$ منفی و عبارت $|\frac{x - ۱}{۲} - ۱|$ بزرگ‌تر از سه است. بیشترین مقدار $b - a$ کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۳}$ ۲) $\frac{۲۳}{۳}$

۳) $\frac{۴}{۱۵}$ ۴) $\frac{۶۷}{۱۵}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۵ نمودار تابع $y = \frac{۲}{x^۲ - ۳x + ۲}$، به ازای چند مقدار صحیح بین دو خط افقی $y = ۰$ و $y = -۲$ واقع می‌شود؟

۱) ۱
۲) ۳
۳) ۴
۴) صفر

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۲

۶ مجموعه جواب نامعادلهٔ $\frac{۲x - ۱}{x + ۱} > -۱$، کدام است؟

۱) $(۰, +\infty)$
۲) $(۴, +\infty)$
۳) $\mathbb{R} - [-۴, ۰]$
۴) $\mathbb{R} - [-۴, -۱]$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۷ در بازهٔ (a, b)، نمودار تابع $y = (x - ۱)^۲$ بالاتر از نمودار تابع $y = ۴x^۴$ است. بیشترین مقدار $b - a$، کدام است؟

۱) ۱
۲) $\frac{۳}{۲}$
۳) ۲
۴) $\frac{۵}{۲}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۸ در بازهٔ (a, b)، نمودار تابع با ضابطهٔ $y = |۲x^۲ - ۴|$ در زیر خط $y = ۲x$ واقع است. بیشترین مقدار $b - a$، کدام است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

۹ مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ $\frac{x + ۱}{۲x - ۱} > ۱$، کدام است؟

۱) $(۰/۶, ۱/۵)$
۲) $(۰/۸, ۱/۲)$
۳) $(۱, ۲)$
۴) $(۰/۸, ۲)$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

پاسخ Homework

۱ گزینه ۴

$$-mx^۲+mx+۱=-m-x\Rightarrow mx^۲-(۱+m)x-m-۱=۰$$

$$\Delta<۰\Rightarrow(۱+m)^۲+۴m(m+۱)<۰\Rightarrow(۱+m)(۱+۵m)<۰$$

$$\Rightarrow -۱<m<-\frac{۱}{۵}\xrightarrow{m\in\mathbb{Z}}\text{هیچ مقدار}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

۲ گزینه ۲

روش اول: با امتحان‌کردن گزینه‌ها به عدد $\frac{۱}{۳}$ می‌رسیم:

$$m=\frac{۱}{۳}\Rightarrow p(x)=\frac{-۴(x+۳)(۲x-۳)^۲}{۹(\sqrt{x}-۱)(\sqrt{x}-۲)}$$

x	۰		۱		$\frac{۳}{۲}$		۴		$+\infty$
p(x)	∄	−	۰	+	۰	+	∄	−	

روش دوم: عبارت موردنظر را به‌صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\frac{((m^۲-۱)x^۲-۴mx+۴)(۲x-۳)}{(\sqrt{x}-۱)(\sqrt{x}-۲)}\geq ۰$$

حال بدون درنظرگرفتن عبارت $(m^۲-۱)x^۲-۴mx+۴$ تعیین علامت می‌کنیم:

x	۰		۱		$\frac{۳}{۲}$		۴		$+\infty$
p(x)	∄	−	۰	+	۰	−	∄	+	

اگر به‌ازای مقادیر گفته‌شده برای m تعیین علامت انجام دهیم، فقط برای $m=\frac{۱}{۳}$ مجموعه جواب نامعادله به‌صورت بازهٔ $(۱,۴)$ است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۰

۳ گزینه ۲

پرانتز دوم صورت را با اتحاد جمله مشترک تجزیه می‌کنیم:

$$\frac{\left(\left(m^۲-۱\right)x^۲-۴mx+۴\right)\left(\sqrt{x}-۱\right)\left(\sqrt{x}-۲\right)}{۲x-۳}>۰$$

دو عبارت $\sqrt{x}-۱$ و $۲x-۳$، به ازای $x>\frac{۳}{۲}$، مثبت‌اند، پس می‌توانیم حذفشان کنیم:

$$\left(\left(m^۲-۱\right)x^۲-۴mx+۴\right)\left(\sqrt{x}-۲\right)>۰$$

ریشهٔ پرانتز دوم را حساب می‌کنیم:

$$\sqrt{x}-۲=۰\Rightarrow x=۴$$

جواب نامعادله به صورت $(۲,۴)$ بود، حالا که $x=۴$ ریشهٔ پرانتز دوم است، پس باید ریشهٔ پرانتز اول ۲ باشد:

$$۴\left(m^۲-۱\right)-۸m+۴=۰\Rightarrow ۴m^۲-۸m=۰\Rightarrow ۴m\left(m-۲\right)=۰\Rightarrow\begin{cases}m=۰\\m=۲\end{cases}$$

حالا به ازای هر دو مقدار m، نامعادلهٔ $\left(\left(m^۲-۱\right)x^۲-۴mx+۴\right)\left(\sqrt{x}-۲\right)>۰$ را می‌نویسیم:

۱) به ازای $m=۰$ نامعادله به شکل $\left(-x^۲+۴\right)\left(\sqrt{x}-۲\right)>۰$ در می‌آید.

۲) به ازای $m=۲$ نامعادله به شکل $\left(۳x^۲-۸x+۴\right)\left(\sqrt{x}-۲\right)>۰$ در می‌آید.

یک عدد در بازهٔ $(۲,۴)$، مثل $x=۳$ را در نامعادله‌ها چک می‌کنیم. این عدد فقط در نامعادلهٔ (۱)، صدق می‌کند، پس $m=۰$ قابل‌قبول است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۰

۴ گزینه ۱

$$۱۵x^۲+۷۳x+۱۴<۰\Rightarrow(۵x+۱)(۳x+۱۴)<۰\Rightarrow\frac{-۱۴}{۳}<x<\frac{-۱}{۵}\quad(۱)$$

$$\left|\frac{x-۱}{۲}-۱\right|>۳\Rightarrow\left|\frac{x-۳}{۲}\right|>۳\Rightarrow\begin{cases}\frac{x-۳}{۲}>۳\\ \text{یا}\\ \frac{x-۳}{۲}<-۳\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x>۹\\ \text{یا}\\ x<-۳\end{cases}\Rightarrow x\in(-\infty,-۳)\cup(۹,+\infty)\quad(۲)$$

اشتراک (۱) و (۲) برابر است با:

$$-\frac{۱۴}{۳}<x<-۳\Rightarrow\max(b-a)=\frac{۱۴}{۳}-۳=\frac{۵}{۳}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۵ گزینه ۴

$$-۲ < y < ۰ \Rightarrow -۲ < \frac{۲}{(x-۱)(x-۲)} < ۰ \Rightarrow \frac{۲}{(x-۱)(x-۲)} < ۰ \Rightarrow ۱ < x < ۲ \Rightarrow \text{هیچ مقدار}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۲

۶ گزینه ۳

$$-۱ < \frac{۲x-۱}{x+۱} < ۳ \Rightarrow \begin{cases} ۱) -۱ < \frac{۲x-۱}{x+۱} \\ ۲) \frac{۲x-۱}{x+۱} < ۳ \end{cases}$$

هر دو معادله را جداگانه حل می‌کنیم:

$$۱) \frac{۲x-۱}{x+۱} > -۱ \Rightarrow \frac{۲x-۱}{x+۱} + ۱ > ۰ \Rightarrow \frac{۲x-۱+x+۱}{x+۱} > ۰ \Rightarrow \underbrace{\frac{۳x}{x+۱}}_{p(x)} > ۰$$

x	$-\infty$	-۱	۰	$+\infty$
p(x)	+ ج	ت‌ن −	۰ ا	+ ج

$$\Rightarrow x < -۱ \quad \text{یا} \quad x > ۰ \quad (I)$$

$$۲) \frac{۲x-۱}{x+۱} < ۳ \Rightarrow \frac{۲x-۱}{x+۱} - ۳ < ۰ \Rightarrow \frac{۲x-۱-۳x-۳}{x+۱} < ۰ \Rightarrow \underbrace{\frac{-x-۴}{x+۱}}_{q(x)} < ۰$$

x	$-\infty$	-۴	-۱	$+\infty$
q(x)	− ج	۰ ا +	ت‌ن	− ج

$$\Rightarrow x < -۴ \quad \text{یا} \quad x > -۱ \quad (II)$$

حال اشتراک دو جواب (I) و (II) را به دست می‌آوریم:

$$\xrightarrow{(I)\cap(II)} x < -۴ \quad \text{یا} \quad x > ۰ \Rightarrow x \in \mathbb{R} - [-۴, ۰]$$

راه‌حل تستی: (عددگذاری)

حذف گزینهٔ "۴":

$$x = ۰ \Rightarrow -۱ < \frac{-۱}{۱} < ۳ \quad \times$$

حذف گزینه‌های "۱" و "۲" (عدد ۵- در این دو گزینه وجود ندارد):

$$x = -۵ \Rightarrow -۱ < \frac{-۱۱}{-۴} < ۳ \Rightarrow -۱ < \frac{۱۱}{۴} < ۳ \quad \checkmark$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۷ گزینه ۲

نمودار $y = (x-۱)^۲$ بالاتر از نمودار $y = ۴x^۴$ قرار دارد، پس:

$$(x-۱)^۲ > ۴x^۴ \xrightarrow{\text{جذر می‌گیریم}} |x-۱| > ۲x^۲$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۱)\ x-۱ > ۲x^۲ \\ \text{یا} \\ ۲)\ x-۱ < -۲x^۲ \end{cases}$$

دو نامعادلهٔ فوق را حل می‌کنیم:

$$۱)\ x-۱ > ۲x^۲ \Rightarrow ۲x^۲ - x + ۱ < ۰ \xrightarrow{a>۰, \Delta<۰} \text{غ‌ق‌ق}$$

$$۲)\ x-۱ < -۲x^۲ \Rightarrow \underbrace{۲x^۲ + x - ۱}_{p(x)} < ۰ \Rightarrow \Delta = ۹ \Rightarrow x = -۱\ ,\ \frac{۱}{۲}$$

x	$-\infty$	-۱		$\frac{۱}{۲}$	$+\infty$
p(x)	+	۰	−	۰	+

$$\Rightarrow x \in (-۱, \frac{۱}{۲})$$

برای اینکه $b-a$ بیشترین مقدار باشد باید $(a, b) = \left(-۱, \frac{۱}{۲}\right)$، درنتیجه:

$$b - a = \frac{۱}{۲} + ۱ = \frac{۳}{۲}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۸ گزینه ۱

نمودار $y = |۲x^۲ - ۴|$ در زیر خط $y = ۲x$ قرار دارد، بنابراین:

$$|۲x^۲ - ۴| < ۲x$$

$$\Rightarrow -۲x < ۲x^۲ - ۴ < ۲x \xrightarrow{\div ۲} -x < x^۲ - ۲ < x$$

سپس هرکدام از نامعادلات $-x < x^۲ - ۲$ و $x^۲ - ۲ < x$ را جداگانه حل می‌کنیم:

$$x^۲ - ۲ > -x \Rightarrow \underbrace{x^۲ + x - ۲}_{p(x)} > ۰$$

x	$-\infty$		-۲		۱		$+\infty$
p(x)		$+$	۰	$-$	۰	$+$	
		ج				ج	

$$\Rightarrow x < -۲ \text{ یا } x > ۱ \quad (۱)$$

$$x^۲ - ۲ < x \Rightarrow \underbrace{x^۲ - x - ۲}_{q(x)} < ۰$$

x	$-\infty$		-۱		۲		$+\infty$
q(x)		$+$	۰	$-$	۰	$+$	
				ج			

$$\Rightarrow -۱ < x < ۲ \quad (۲)$$

$$(۱) \cap (۲) \Rightarrow ۱ < x < ۲ \Rightarrow (a, b) = (۱, ۲)$$

بیشترین مقدار $b - a$ برابر است با:

$$۲ - ۱ = ۱$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

۹ گزینه ۴

$$۱ < \frac{x+۱}{۲x-۱} < ۳ \Rightarrow \begin{cases} ۱) \ \frac{x+۱}{۲x-۱} > ۱ \\ ۲) \ \frac{x+۱}{۲x-۱} < ۳ \end{cases}$$

ابتدا هردو نامساوی را جداگانه حل می‌کنیم:

$$۱) \ \frac{x+۱}{۲x-۱} > ۱ \Rightarrow \frac{x+۱}{۲x-۱} - ۱ > ۰ \Rightarrow \frac{x+۱-۲x+۱}{۲x-۱} = \underbrace{\frac{-x+۲}{۲x-۱}}_{p(x)} > ۰$$

x	$-\infty$		$\frac{۱}{۲}$		۲		$+\infty$
p(x)		−	ت.ن	+	ج	−	

$$\Rightarrow \frac{۱}{۲} < x < ۲ \quad (I)$$

$$۲) \ \frac{x+۱}{۲x-۱} < ۳ \Rightarrow \frac{x+۱}{۲x-۱} - ۳ < ۰ \Rightarrow \frac{x+۱-۶x+۳}{۲x-۱} = \underbrace{\frac{-۵x+۴}{۲x-۱}}_{q(x)} < ۰$$

x	$-\infty$		$\frac{۱}{۲}$		$\frac{۴}{۵}$		$+\infty$
q(x)		−	ت.ن	+	ج	−	

$$\Rightarrow x < \frac{۱}{۲} \text{ یا } x > \frac{۴}{۵} \quad (II)$$

حال اشتراک دو مجموعه جواب (I) و (II) را به دست می‌آوریم:

$$\xrightarrow{(I)\cap(II)} \frac{۴}{۵} < x < ۲ \Rightarrow x \in (۰/۸, ۲)$$

راه تستی (عددگذاری):

حذف گزینهٔ "۳":

$$x = ۱ \Rightarrow ۱ < \frac{۲}{۱} < ۳$$

حذف گزینهٔ "۱" و "۲":

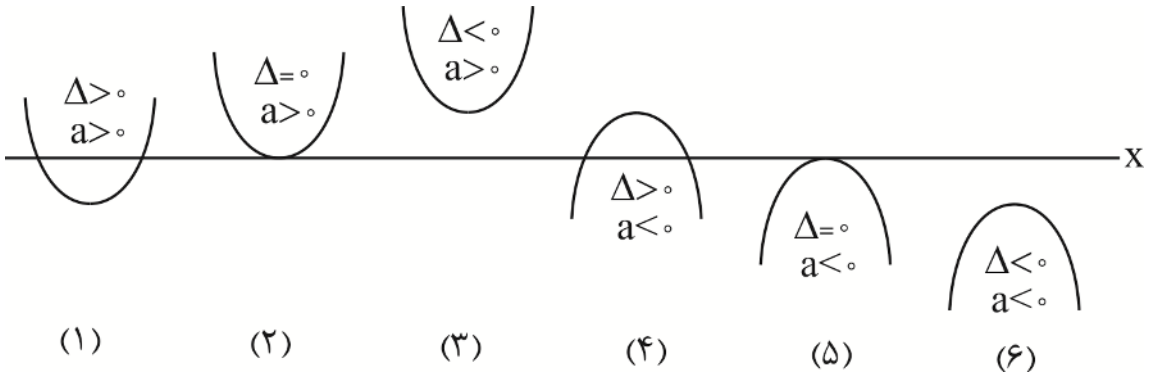
$$x = ۱/۵ \Rightarrow ۱ < \frac{۲/۵}{۲} < ۳$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

نمودار تابع درجه دوم

در منحنی نمودار توابع $y = ax^2 + bx + c$ که معرف یک سهمی است، چنانچه $a > 0$ باشد، دهانه سهمی رو به بالا و اگر $a < 0$ باشد، دهانه سهمی رو به پایین است.

۶ حالت برای نمایش منحنی تابع درجه دوم داریم :



(۱) : ۲ ریشه‌ی متمایز و دهانه رو به بالا

(۲) : یک ریشه مضاعف و دهانه رو به بالا. به این حالت نامنفی نیز می‌گویند.

(۳) : فاقد ریشه‌ی حقیقی و دهانه رو به بالا

(۴) : ۲ ریشه‌ی متمایز، دهانه رو به پایین

(۵) : یک ریشه مضاعف و دهانه رو به پایین. به این حالت، نامثبت نیز می‌گویند.

(۶) : فاقد ریشه‌ی حقیقی، دهانه رو به پایین.

در حالت (۳) می‌گوییم که تابع ، همواره مثبت است. یعنی $\Delta < 0$ و $a > 0$

در حالت (۶) می‌گوییم که تابع ، همواره منفی است. یعنی $\Delta < 0$ و $a < 0$

۳ تذکر مهم :

۱- اگر $\Delta < 0$ باشد، سهمی یا بالای محور x ها است یا پایین محور x ها است.

۲- اگر $\Delta = 0$ باشد، سهمی بر محور x ها مماس است.

۳- اگر $\Delta > 0$ باشد، سهمی محور xها را در دو نقطه قطع می‌کند.

تمرین: به ازای کدام مجموعه مقادیر m، سهمی به معادلهٔ $y = (1-m)x^2 + 2(m-3)x - 1$ همواره پایین محور xها است؟

(ریاضی خارج ۹۸، مشابه ریاضی ۹۱)

۱) $1 < m < 5$ ۲) $2 < m < 5$ ۳) $2 < m < 4$ ۴) $2 < m < 6$

تمرین: به ازای کدام مقادیر m ، نمودار تابع با ضابطه‌ی $y = (m-2)x^2 - 3x + m + 2$ بالای محور x ها و مماس بر آن است ؟

۱) -۳ ۲) $\frac{-۵}{۲}$ ۳) $\frac{۵}{۲}$ ۴) ۳

شگردهای وضعیت سهمی در دستگاه مختصات

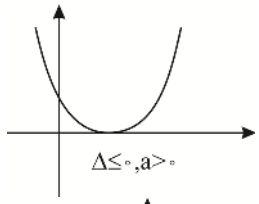
۱- اگر $a > ۰$ باشد سهمی قطعاً از ناحیه‌های ۱ و ۲ و اگر $a < ۰$ باشد قطعاً از ناحیه‌های ۳ و ۴ می‌گذرد.

۲- اگر $\frac{c}{a} < ۰$ باشد، سهمی از هر ۴ ناحیه می‌گذرد.

۳- اگر $\Delta \leq ۰$ باشد، سهمی فقط از دو ناحیه می‌گذرد. اگر در این حالت $a > ۰$ باشد، فقط از ناحیه اول و دوم و اگر $a < ۰$ باشد فقط از ناحیه سوم و چهارم می‌گذرد.

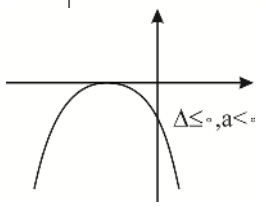
مثلاً اگر $\Delta \leq ۰$ و $a > ۰$ باشد می‌تواند به صورت مقابل باشد:

(الف)



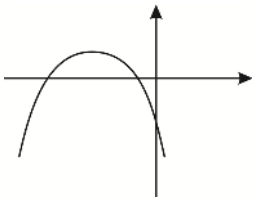
مثلاً اگر $\Delta \leq ۰$ و $a < ۰$ باشد می‌تواند به صورت مقابل باشد:

(ب)



البته این که در xهای مثبت و یا منفی بر محور xها مماس باشد تأثیری در عبور از ناحیه‌ها در این ۲ حالت (الف) و (ب) ندارد.

۴- سهمی که فقط از ناحیه اول نمی‌گذرد یعنی از ناحیه‌های دوم و سوم و چهارم می‌گذرد به صورت شکل مقابل است:



تمرین: به ازای کدام مجموعه‌ی مقادیر m ، منحنی به معادله‌ی $y=(m+2)x^2+3x+1-m$، محور xها را در هر دو طرف مبدأ مختصات قطع می‌کند؟ *(سراسری ریاضی خارج از کشور ۹۵)*

۱) $m>1$ یا $m<-2$ ۲) $-2<m<1$ ۳) فقط $m<-2$ ۴) فقط $m>1$

با استفاده از رأس سهمی می‌توانیم بیشترین یا کم‌ترین مقدار تابع درجه دوم را در مسائل مختلف پیدا کنیم.

یادت باشه: در مسائلی از شما بیشترین یا کم‌ترین مقدار پرسیده می‌شود در صورت امکان برای مسئله یک شکل فرضی رسم کنید و متغیرها را روی شکل نمایش دهید. اگر پای دو متغیر در میان بود ارتباط آن‌ها را بنویسید و یکی از آن‌ها را یک طرف تساوی تنها نگه دارید. اکنون خواسته مسئله را به صورت یک تابع شناسایی کنید و اسم آن را بگذارید تابع هدف. احتمالاً تابع هدف دو متغیره است که از قسمت اول رابطهٔ بین ۲ متغیر را نوشتید. کافی است این تابع را تک متغیره کنید. حالا شما به یک تابع درجه دوم رسیدید که مقدار ماکسیمم و مینیمم آن به راحتی از رابطهٔ $-\frac{\Delta}{4a}$ محاسبه می‌شود. برای این که تمام این مراحل را با هم ببینید به تست‌های زیر به شدت توجه کنید.

تمرین: نقطهٔ مینیمم تابع با ضابطهٔ $y=x^2+ax+2$ روی نیمساز ربع سوم قرار دارد. a کدام است؟

۱) ۴- ۲) ۲- ۳) ۲ ۴) ۴

معادلات و نامعادلات گویا

یک معادله‌ی گویا معادله‌ای است که صورت و مخرج کسرهای آن، عبارت های چند جمله‌ای باشد. روش کلی حل این معادلات به صورت زیر است :

روش اول :

۱- ابتدا ک . م . م مخرج ها را می‌یابیم.

۲- طرفین معادله را در ک.م.م. مخرج ها ضرب می‌کنیم و جواب های معادله‌ی حاصل را می‌یابیم.

۳- جواب‌هایی که مخرج کسرهای اصلی را صفر می‌کنند از جواب های حاصل از مرحله‌ی دوم حذف می‌کنیم.

روش دوم :

کاری کن که چپ مساوی فقط یک کسر و راستِ مساوی هم فقط یک کسر داشته باشی! یعنی این شکلی بشه:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{K(x)}{D(x)}$$

حالا ۳ حالت پیش میاد:

الف) بهت بگن مثلاً $\frac{x-2}{x-4}=\frac{x+1}{x+3}$ رو حل کن:

پاسخ: چپ و راست فقط یک کسر داریم. صورت‌های این کسر مثل هم نیستن. مخرج‌ها هم مثل هم نیستن، پس طرفین وسطین می‌کنیم:

$$(x-2)(x+3)=(x+1)(x-4)\Rightarrow x^2+x-6=x^2-3x-4\Rightarrow 4x=2\Rightarrow x=\frac{1}{2}$$

$\Rightarrow$ چون هیچ‌کدوم از مخرج‌ها رو صفر نمی‌کنه پس قبوله!

ب) بهت بگن $\frac{5}{x}-\frac{4}{x(x-2)}=\frac{x-4}{x-2}$ رو حل کن. این‌جا باید مخرج مشترک بگیری که چپ و راست یک کسر داشته باشی. ببینید:

$$\frac{5(x-2)-4}{x(x-2)}=\frac{x-4}{x-2}$$

و حالا چون عامل $x-2$ توی مخرجِ جفتشون هست، خیلی راحت حذفش کنی.

$$\frac{5x-14}{x}=\frac{x-4}{1}$$

حالا دیگه چیزی نیست که از دو طرف ساده بشه، طرفین وسطین کن:

$$5x-14=x^2-4x\Rightarrow x^2-9x+14=0\Rightarrow (x-7)(x-2)=0\Rightarrow \begin{cases} x=2 \Rightarrow \text{مخرج رو صفر می کنه پس غ.ق.ق} \\ x=7 \Rightarrow \text{قابل قبول} \end{cases}$$

حالا فرض کن ازت می‌پرسه معادله‌ی $\frac{3x+9}{x+3}=4$ چند تا جواب داره؟ خوب اگه طرفین وسطین کنیم، داریم:

$3x+9=4x+12\Rightarrow x=-3\Rightarrow$ مخرج رو صفر می‌کنه، پس غ.ق.ق است و معادله جواب ندارد.

ولی می‌تونستی کار بهتری کنی:

$$\frac{3(x+3)}{x+3}=4$$

اگه صورت و مخرج یک کسر مثل هم باشن، می‌تونی اونا رو با هم ساده کنی:

$$\frac{3\cancel{(x+3)}}{\cancel{(x+3)}}=4\Rightarrow 3=4\Rightarrow \text{مگه می‌شه؟}\Rightarrow \text{معادله جواب نداره}$$

پس یادت باشه: «صورت و مخرجِ یک کسر اگه مثل هم باشن ساده می‌شن، هیچ جوابی هم حذف نمی‌شه.»

حالا اگه معادله‌ی $\frac{x+4}{3x+12}=\frac{1}{3}$ رو دیدی این‌طوری حلش می‌کنی:

$$\frac{\cancel{x+4}}{3\cancel{(x+4)}}=\frac{1}{3}\Rightarrow \frac{1}{3}=\frac{1}{3}\Rightarrow \text{بدیهی}$$

این معادله بی‌شمار جواب داره، یعنی همه‌ی xها جواب این معادله هستن به غیر از $x=-4$ که مخرج رو صفر می‌کنه:

جواب : $x\in\mathbb{R}-\{-4\}$

پ) این از همه مهمتره!

بهت بگن معادله‌ی $\frac{x^2-7x+10}{x-4}=\frac{6(x^2-5x+6)}{x^2-7x+12}$ رو حل کن:

اولین کار اینه که تا جایی که می‌تونی تجزیه کنی:

$$\frac{(x-2)(x-5)}{(x-4)}=\frac{6(x-3)(x-2)}{(x-3)(x-4)}$$

از مثال‌های قبلی یاد گرفتیم که توی یک کسر صورت و مخرج اگر مثل هم باشن ساده می‌شن. مخرج‌های ۲ کسر هم اگر مثل هم باشن ساده می‌شن، پس داریم:

$$(x-2)(x-5)=6(x-2)$$

حالا یه نکته‌ی مهم: مخرج با هرچی که ساده می‌شه (با صورتِ بالای سرش یا با مخرج کسرِ دیگه) نگران جوابی نبودیم که حذف بشه، ما می‌تونیم صورتِ ۲ کسر هم اگه مثل هم بودن با هم ساده کنیم ولی این بار باید پرانتزِ حذف‌شده رو مساوی صفر قرار دهیم و جزو جواب‌ها به حساب بیاریم.

قبوله!

قبوله!

$$(x-2)(x-5)=6(x-2) \Rightarrow \begin{cases} x-5=6 \Rightarrow x=11 \Rightarrow \\ (x-2)=0 \Rightarrow x=2 \Rightarrow \end{cases}$$

تمرین: معادله‌ی $\frac{x^2-x}{x^2-1}=\frac{2x^3-x}{x^3+1}$ چند جواب حقیقی دارد؟

۱) صفر ۲) ۴ ۳) ۲ ۴) ۳

گاهی اوقات یکی از جواب‌ها رو بهتون میدن و به جاش یک مجهول مثل a یا b رو ازتون می‌پرسن و یا یکی از جواب‌ها رو می‌دن، با استفاده از اون شما a رو پیدا می‌کنید تا بتونید معادله رو از اول حل کنید تا جواب‌های دیگه هم به دست بیان:

تمرین: اگر $x=4$ یک جواب معادله‌ی $\frac{x-a}{x^2-x-6}-\frac{1}{x^2-4}=\frac{a-1}{2x-4}$ باشد، جواب دیگر آن کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۵ ۳) ۲ ۴) جواب دیگری ندارد.

پاسخ: چون $x=4$ جواب معادله است، پس در آن صدق می‌کند:

$$\frac{4-a}{16-4-6}-\frac{1}{16-4}=\frac{a-1}{8-4} \Rightarrow \frac{4-a}{6}-\frac{1}{12}=\frac{a-1}{4} \Rightarrow \frac{8-2a-1}{3}=\frac{a-1}{1} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} -2a+7=3a-3$$

$$\Rightarrow -5a=-10 \Rightarrow a=2$$

شکل جدید معادله اینطوریه:

$$\frac{x-2}{x^2-x-6}-\frac{1}{x^2-4}=\frac{1}{2x-4}$$

واسه راحتی کار در مخرج مشترک، $-\frac{1}{x^2-4}$ رو بیار سمت راست:

$$\frac{x-2}{x^2-x-6}=\frac{1}{2x-4}+\frac{1}{x^2-4}$$

حالا مخرج مشترک:

$$\frac{x-2}{(x-3)(x+2)}=\frac{x+2+2}{2(x-2)(x+2)} \Rightarrow \frac{x-2}{x-3}=\frac{x+4}{2(x-2)} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} 2(x-2)^2=(x+4)(x-3)$$

$$\Rightarrow 2(x^2-4x+4)=x^2+x-12 \Rightarrow 2x^2-8x+8=x^2+x-12 \Rightarrow x^2-9x+20=0 \Rightarrow (x-4)(x-5)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=4 & \text{قبوله!} \\ x=5 & \text{قبوله!} \end{cases}$$

به این دو مدل تست توجه کنید. سلیقه طراحان قلم‌چی این شکلیه. یک معادله به شما داده می‌شه و ازتون می‌پرسه a چگونه باشه تا این معادله جواب نداشته باشه. یا a و b را چنان بیابید که این معادله‌ی گویا بی‌شمار جواب داشته باشه:

تمرین: اگر معادله‌ی $\frac{a}{x}+\frac{2x-2}{x+1}=1$ جواب حقیقی نداشته باشد، آن‌گاه مجموعه‌ی مقادیر a کدام است؟

۱) $(۹,+\infty)$ ۲) $(۱,۹)$ ۳) $(-۱,۹)$ ۴) $\varnothing$

پاسخ: طبق معمول باید کاری کنیم چپ و راستِ مساوی فقط یک کسر داشته باشیم. حالا این به سلیقه‌ی شما بستگی داره که کدوم ۲ تا رو با هم بگیریم. من واسه سادگی در مخرج مشترک‌گیری این کار رو می‌کنم:

$$\frac{۲x-۲}{x+۱}=۱-\frac{a}{x} \Rightarrow \frac{۲x-۲}{x+۱}=\frac{x-a}{x} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} ۲x^۲-۲x=x^۲-ax+x-a \Rightarrow x^۲+(a-۳)x+a=۰$$

حالا می‌خواهیم این معادله جواب نداشته باشه! شرط این که معادله‌ی درجه دوم ریشه نداشته باشه اینه که $\Delta<۰$ باشه یادته که:

$$\Delta=(a-۳)^۲-۴(۱)(a)<۰ \Rightarrow a^۲-۶a+۹-۴a<۰ \Rightarrow a^۲-۱۰a+۹<۰ \Rightarrow ۱<a<۹$$

تمرین: معادله‌ی $\frac{۲-x}{x+۱}+\frac{x+۱}{x-۱}=\frac{ax+b}{x^۲-۱}$ بی‌شمار ریشه دارد. دوتایی (a,b) کدام است؟

۱) $(۵,-۱)$ ۲) $(۱,۱)$ ۳) $(۳,-۱)$ ۴) نمی‌تواند بی‌شمار ریشه داشته باشد.

پاسخ: مثل همیشه مخرج مشترک می‌گیریم تا چپ و راستِ مساوی فقط یک کسر داشته باشیم:

$$\frac{(۲-x)(x-۱)+(x+۱)^۲}{(x+۱)(x-۱)}=\frac{ax+b}{(x-۱)(x+۱)} \Rightarrow ۲x-۲-x^۲+x+x^۲+۲x+۱=ax+b \Rightarrow ۵x-۱=ax+b$$

برای این که این معادله بی‌شمار ریشه (به غیر از $x=\pm ۱$) داشته باشد باید چپ و راستِ این تساوی همیشه برقرار باشد:

$$\begin{matrix} ۵=a \\ -۱=b \end{matrix} \Rightarrow b=-۱ \Rightarrow (a,b)=(۵,-۱)$$

مدلِ آخر این معادلات اینطوریه که باید با تغییر متغیر حلّشون کنی. از این روش وقتی استفاده می‌کنی که بخشی از یک معادله و یا برعکسش رو دو بار ببینی.

تمرین: معادله‌ی $\frac{۲x^۲+۱}{۲x+۱}+\frac{۲x+۱}{۲x^۲+۱}=-۲$ دارای چند جواب حقیقی است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) صفر ۴) بی‌شمار

تمرین: سرعت یک قایق موتوری، در آب راکد ۱۰۰ متر در دقیقه است. این قایق فاصلهٔ ۱۲۰۰ متری در رودخانه را رفته و برگشته است. اختلاف زمان رفت و برگشت ۵ دقیقه است. سرعت آب رودخانه چند متر در دقیقه است؟ (تجربی ۹۸)

۱) ۱۲ ۲) ۱۵ ۳) ۲۰ ۴) ۲۵

یادت باشه: در مستطیلی به طول a و عرض b اگر $\frac{a}{b}=\frac{a+b}{a}$ برقرار باشد $\frac{a}{b}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ خواهد بود (نسبت طلایی).

تمرین: در یک مستطیل، نسبت مجموع طول و عرض آن به طول مستطیل برابر نسبت طول به عرض آن است. نسبت عرض به طول مستطیل برابر کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ ۲) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ ۳) $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ ۴) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

تمرین: معادلهٔ $\frac{6x}{x^2-2x+4}=\frac{1}{x+2}-\frac{x^2-9x-2}{x^3+8}$ دارای چند جواب مثبت است؟ *(کنکور ریاضی ۱۴۰۲ مرحله اول)*

۱) صفر ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

معادلات گنگ

معادلات گنگ معادلاتی هستند که در آن ها عبارت رادیکالی وجود داشته باشد. انواع روش های حل معادلات گنگ (اصم) به صورت زیر می‌باشد:

۱- $\sqrt{f(x)}=\sqrt{g(x)}$: باید رادیکال را از بین ببرید و حواستان باشد پس از حل، جواب هایی که زیر هر کدام رادیکال ها را منفی می‌کند، قابل قبول نیستند. به عبارتی باید دامنه را محاسبه کنید و جواب هایی را قبول کنید که عضو دامنه است.

تمرین: معادله‌ی $\sqrt{2-\sqrt{x+1}}-\sqrt{7-x}=0$ چند ریشه‌ی حقیقی دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ریشه ندارد

۲- $\sqrt{f(x)}+g(x)=h(x)$: باید رادیکال را حذف کنیم و استراتژی ما به این صورت است که $\sqrt{f(x)}$ را تنها می‌کنیم و طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم. ضمناً باید حواسمان باشد که چون $\sqrt{f(x)}\geq 0$ است لذا داریم : $\sqrt{f(x)}=h(x)-g(x)\geq 0$
یعنی x هایی قابل قبول هستند که در شرط $h(x)-g(x)\geq 0$ صدق کنند. حواستان باشد که به علت وجود رادیکال برای $f(x)$ باید شرط $f(x)\geq 0$ هم برقرار باشد تا زیر رادیکال هم منفی نشود.

تمرین: چند عدد صحیح وجود دارد که جمع آن ها با جذرشان برابر ۲۰ شود ؟ *(مثال کتاب)*

تمرین: اگر $3a+\sqrt{2a^2+4a}=2$ باشد، عدد $\frac{a+1}{a}$ کدام است؟ *(تجربی ۹۸)*

۱) ۱/۵ ۲) ۲/۵ ۳) ۳/۵ ۴) ۴/۵

۳- توجه به دامنه یا برد عبارت :

تمرین: معادله‌ی $\sqrt{x-2}+\sqrt{4-2x}=5$ چند ریشه دارد؟

۱) یک ریشه‌ی مثبت دارد. ۲) یک ریشه‌ی منفی دارد.
۳) دو ریشه‌ی مختلف‌العلامت دارد. ۴) ریشه ندارد.

تمرین: معادلهٔ $\sqrt{x^۲-۹}+۴\sqrt{۴-x^۲}=۸$ چند جواب دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

تمرین: معادلهٔ $۲x-۳=\sqrt{x+\sqrt{x-۲}}-\sqrt{۲-x}$ چند جواب حقیقی دارد؟ *(کنکور تجربی ۱۴۰۲ مرحله اول)*

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) صفر

تذکر: جمع چند عبارات نامنفی وقتی صفر می‌شه که تک‌تکشون صفر بشه و اون xای قبوله که همه‌ی عبارت‌ها رو صفر کنه. مثلاً:

تمرین: مجموعه مقادیر a برای اینکه معادله‌ی $\sqrt{x^۲-۱}+\sqrt{x^۳+۳x+a}=۰$ جواب داشته باشد کدام است ؟

۱) $\{\pm۱\}$ ۲) $\{\pm۴\}$ ۳) $\{۰,۲\}$ ۴) $\{-۲,۰\}$

گاهی اوقات با یک تغییر متغیر ساده مسئله به راحتی حل می‌شه. کِی از این روش برسیم؟ وقتی درجه‌ی عبارات بیشتر از یک هست و بخشی از معادله را دو بار می‌بینیم. یا، وقتی دو عبارت کسری داریم که زیر رادیکال هستن و برعکس همدیگه هم هستن؛

۱ یک کیک را ابتدا بین افراد حاضر در یک مهمانی به‌طور مساوی تقسیم کردیم. سپس چهار نفر این مهمانی را ترک کردند و دوباره کیکی به همان اندازه قبل را بین نفرات باقی‌مانده تقسیم کردیم که $\frac{۱}{۳}$ بیشتر از قبل به هر نفر رسید. اگر نصف کیک را بین نفرات ابتدایی تقسیم می‌کردیم به هر نفر چه سهمی از کیک می‌رسید؟

۱) $\frac{۱}{۶}$ ۲) $\frac{۱}{۱۶}$

۳) $\frac{۱}{۱۲}$ ۴) $\frac{۱}{۲۴}$

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۴۰۳

۲ برای چند مقدار صحیح و یک رقمی a، جواب معادله $\sqrt{x}+\sqrt{x-a}=a$، عددی صحیح است؟

۱) ۴ ۲) ۵

۳) ۶ ۴) ۷

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۳

۳ مجموع ریشه‌های معادلهٔ $\frac{۱}{x^۲}+\frac{۱}{(۱-x)^۲}=\frac{۱۶۰}{۹}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۱/۷۵

۳) ۲ ۴) ۲/۲۵

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۲

۴ دو شیر A و B به یک استخر متصل هستند. شیر A، ۱۵ ساعت دیرتر از شیر B استخر را پر می‌کند. اگر دو شیر باز باشند، استخر در ۴ ساعت پر می‌شود. چند شیر از نوع A به استخر اضافه کنیم تا وقتی همه شیرها به طور همزمان باز باشند، استخر در یک ساعت پر شود؟ (با تغییر)

۱) ۱۲ ۲) ۱۴

۳) ۱۵ ۴) ۱۸

کنکور سراسری علوم انسانی خارج از کشور ۱۴۰۲

۵ نسبت طول به عرض یک مستطیل، ۵ به ۴ است. با افزایش طول مستطیل، یک مستطیل طلایی خواهیم داشت. نسبت مساحت مستطیل طلایی به مستطیل اولیه کدام است؟

۱) $۰/۳+\sqrt{۵}$
۲) $۰/۲(۱+\sqrt{۵})$
۳) $۰/۶+۰/۲\sqrt{۵}$
۴) $۰/۴(۱+\sqrt{۵})$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۶ از تقسیم اندازهٔ قطر یک مستطیل به طول آن، عدد طلایی حاصل می‌شود. مجذور نسبت طول به عرض مستطیل کدام است؟

۱) $\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}$
۲) $\frac{۳+\sqrt{۵}}{۲}$
۳) $\frac{۲}{۱+\sqrt{۵}}$
۴) $\frac{۲}{۳+\sqrt{۵}}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

۷ مجموع ریشه‌های معادله $\frac{۱}{x^۲}+\frac{۱}{(۲-x)^۲}=\frac{۴۰}{۹}$ کدام است؟

۱) ۲
۲) ۲/۵
۳) ۴
۴) ۴/۵

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۲

۸ راننده یک خودرو باید مسیری ۲۰۰ کیلومتری را طی کند. اگر او سرعتش را ۲۰ کیلومتر بر ساعت کاهش دهد، ۵۰ دقیقه دیرتر به مقصد می‌رسد. نسبت سرعت اولیهٔ خودرو به سرعت خودرو پس از کاهش کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۲}$
۲) $\frac{۴}{۳}$
۳) $\frac{۵}{۴}$
۴) $\frac{۶}{۵}$

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۴۰۲

۹ معادلهٔ $\frac{۱}{x+۲}-\frac{x^۲-۹x-۲}{x^۳+۸}=\frac{۶x}{x^۲-۲x+۴}$ دارای چند جواب مثبت است؟

۱) صفر
۲) ۳
۳) ۲
۴) ۱

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۲

۱۰ معادلهٔ $\frac{۱}{\sqrt{۲-x}+۲}-\frac{۱}{۲-\sqrt{۲-x}}=\frac{۲-x}{۵\sqrt{۲-x}}$ چند ریشهٔ مثبت دارد؟

۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۳

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

۱۱ معادلهٔ $\sqrt{x+\sqrt{x-۲}}-\sqrt{۲-x}=\sqrt{۲x-۳}$ چند ریشهٔ حقیقی دارد؟

۱) ۳ ۲) ۲

۳) ۱ ۴) صفر

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۱۲ به ازای چند مقدار m، $x=۲$ جواب معادلهٔ $\frac{x+۱}{x-۳}-\frac{۲}{x}=\frac{۲m^{۲}}{x(x-۳)}$ است؟

۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۳ ۴) هیچ مقداری از m

کنکور سراسری علوم انسانی خارج از کشور ۱۴۰۱

۱۳ حاصل‌ضرب ریشه‌های معادلهٔ $\frac{x}{x-۲}-\frac{۳}{x+۳}=۲$ کدام است؟

۱) -۱۸ ۲) -۶/۵

۳) -۳ ۴) -۱/۵

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۴۰۱

۱۴ قدر مطلق تفاضل ریشه‌های معادلهٔ $\frac{x-۳}{x-۴}+\frac{۱}{۲x-۲}=\frac{۲}{۳}$، کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۴/۵

۳) ۵ ۴) ۵/۵

کنکور سراسری علوم انسانی خارج از کشور ۱۳۹۹

۱۵ مجموع ریشه‌های معادلهٔ $\frac{۲x-۱}{x+۲}-\frac{x-۳}{x-۲}=\frac{۲}{۳}$، کدام است؟

۱) -۴ ۲) ۴

۳) ۶ ۴) ۱۲

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۳۹۹

۱۶ اگر معادلهٔ $\frac{x^{۲}-a}{x+۳}=۲x-۱$ دارای دو ریشهٔ حقیقی متمایز باشد، محدودهٔ تغییرات a، کدام می‌تواند باشد؟

۱) $a<۹$ ۲) $a>۹$

۳) $a<\frac{۳۷}{۴}$ ۴) $a>\frac{۳۷}{۴}$

کنکور سراسری علوم انسانی خارج از کشور ۱۴۰۰

۱۷ اگر عبارت‌های گویا تعریف شده باشند، قدر مطلق تفاضل جواب‌های معادلهٔ $\frac{۹x^۲-(x+۳)^۲}{۲x-۳}-\frac{۲}{x}=۱$، کدام است؟

۱) صفر
۲) $\frac{۱}{۲}$
۳) ۱
۴) $\frac{۳}{۲}$

کنکور سراسری علوم انسانی خارج از کشور ۱۴۰۰

۱۸ معادلهٔ $\frac{ax^۳+۲x}{x+۱}=x^۲-x$ دارای سه ریشهٔ حقیقی متمایز است. کدام نامساوی زیر همواره برقرار است؟

۱) $a<-۲$
۲) $a\geq -۲$
۳) $a\leq ۱$
۴) $a<۱$

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۴۰۰

۱۹ تعداد جواب‌های معادلهٔ $\sqrt{x+\sqrt{-x^۳+۴x^۲+۲۵x-۱۰۰}}+\sqrt{x^۲+\sqrt{-x^۲+۶x-۸}}=x+۲$، کدام است؟

۱) ۳
۲) ۲
۳) ۱
۴) صفر

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۰

۲۰ فاصلهٔ نقطهٔ تلاقی منحنی‌های $۲y=x^۲$ و $x=\sqrt{y+۳}-\sqrt{y-۳}$ با مبدأ مختصات، کدام است؟

۱) $\sqrt{۳}$
۲) $\sqrt{۶}$
۳) $۲\sqrt{۳}$
۴) $\sqrt{۱۵}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

۲۱ اگر عبارت‌های گویا تعریف شده باشند، مجموع جواب‌های معادله $\frac{۴x^۲-(۲-x)^۲}{x+۲}-\frac{۷}{x}=۲$ کدام است؟

۱) -۱
۲) $\frac{۲}{۳}$
۳) $\frac{۴}{۳}$
۴) $\frac{۷}{۳}$

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۴۰۰

پاسخ Homework

۱ گزینه ۳

$$\frac{۱}{n-۴}-\frac{۱}{n}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow\frac{n-n+۴}{n^۲-۴n}=\frac{۱}{۳}$$
$$\Rightarrow\frac{۴}{n^۲-۴n}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow n^۲-۴n-۱۲=۰\Rightarrow(n+۲)(n-۶)=۰$$
$$\Rightarrow\begin{cases}n=-۲ & \times\\ n=۶ & \checkmark\end{cases}\xrightarrow{\text{تقسیم نصف کیک}}\frac{\frac{۱}{۲}}{۶}=\frac{۱}{۱۲}$$

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۴۰۳

۲ گزینه ۳

اولین شرط روی a نشان می‌دهد که $a\geq ۰$ پس:

$$\sqrt{x-a}=a-\sqrt{x}\Rightarrow x-a=a^۲+x-۲a\sqrt{x}$$
$$\Rightarrow ۲a\sqrt{x}=a^۲+a\Rightarrow\sqrt{x}=\frac{a^۲+a}{۲a}\Rightarrow x=(\frac{a+۱}{۲})^۲$$

پس لازم است $a+۱$ زوج باشد تا x صحیح به‌دست آید یعنی:

$$a=۱,۳,۵,۷,۹$$

اما دقت شود که $a=۰$ نیز جواب است زیرا:

$$a=۰\Rightarrow\sqrt{x}+\sqrt{x}=۰\Rightarrow x=۰$$

پس برای ۶ مقدار صحیح a معادله جواب صحیح دارد.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۳

۳ گزینه ۳

برای معادله به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\frac{(۱-x)^۲+x^۲}{x^۲(۱-x)^۲}=\frac{۱۶۰}{۹}\Rightarrow\frac{۲x^۲-۲x+۱}{(x-x^۲)^۲}=\frac{۱۶۰}{۹}$$

فرض می‌کنیم $x^۲-x=t$، پس:

$$\frac{۲t+۱}{t^۲}=\frac{۱۶۰}{۹}\Rightarrow ۱۶۰t^۲=۱۸t+۹\Rightarrow ۱۶۰t^۲-۱۸t-۹=۰$$

t را به دست می‌آوریم:

$$t=\frac{۹\pm\sqrt{۸۱+۱۴۴۰}}{۱۶۰}=\frac{۹\pm ۳۹}{۱۶۰}$$
$$\Rightarrow\begin{cases}t=-\frac{۳}{۱۶}\Rightarrow x^۲-x+\frac{۳}{۱۶}=۰\Rightarrow S_۱=۱\\ t=\frac{۳}{۱۰}\Rightarrow x^۲-x-\frac{۳}{۱۰}=۰\Rightarrow S_۲=۱\end{cases}\Rightarrow S=S_۱+S_۲=۱+۱=۲$$

دقت شود Δ هر دو معادله مثبت است و جواب دارد.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۲

۴ گزینه ۳

اگر مدت زمان پر شدن استخر توسط شیر B برابر x باشد پس برای A برابر $x+۱۵$ است پس:

$$\frac{۱}{x}+\frac{۱}{x+۱۵}=\frac{۱}{۴}\Rightarrow\frac{۲x+۱۵}{x^۲+۱۵x}=\frac{۱}{۴}$$
$$\Rightarrow x^۲+۱۵x=۸x+۶۰\Rightarrow x^۲+۷x-۶۰=۰$$
$$(x+۱۲)(x-۵)=۰\Rightarrow\begin{cases}x=۵\\ x=-۱۲\quad\times\end{cases}$$

یعنی شیر A در مدت ۲۰ ساعت استخر را پر می‌کند و شیر B در مدت ۵ ساعت. حال اگر n شیر از مدل A اضافه کنیم، پس:

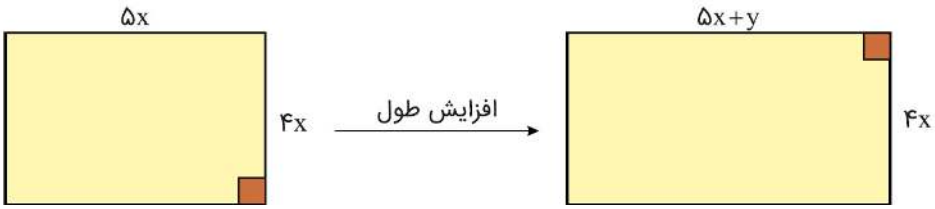
$$\frac{n+۱}{۲۰}+\frac{۱}{۵}=۱\Rightarrow\frac{n+۱}{۲۰}=\frac{۴}{۵}\Rightarrow n+۱=۱۶\Rightarrow n=۱۵$$

بنابراین ۱۵ شیر از نوع A باید اضافه کنیم.

کنکور سراسری علوم انسانی خارج از کشور ۱۴۰۲

۵ گزینه ۴

عدد طلایی $\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}$ است.



$$\frac{۵x+y}{۴x}=\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}\Rightarrow ۵x+y=۲x(۱+\sqrt{۵})$$

پس طول مستطیل طلایی را می‌توان $۲x(۱+\sqrt{۵})$ در نظر گرفت:

$$\frac{S_۲}{S_۱}=\frac{(۴x)(۲x(۱+\sqrt{۵}))}{(۴x)(۵x)}=\frac{۲(۱+\sqrt{۵})}{۵}=۰/۴(۱+\sqrt{۵})$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۶ گزینه ۳

به $\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}$ عدد طلایی می‌گوییم. در مستطیل به طول و عرض a و b، قطر برابر $\sqrt{a^۲+b^۲}$ است.

$$\frac{\sqrt{a^۲+b^۲}}{a}=\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}\xrightarrow{\text{به توان ۲ می‌رسانیم}}\frac{a^۲+b^۲}{a^۲}=\frac{۶+۲\sqrt{۵}}{۴}$$

$$\Rightarrow ۱+(\frac{b}{a})^۲=\frac{۶+۲\sqrt{۵}}{۴}\Rightarrow(\frac{b}{a})^۲=\frac{۲+۲\sqrt{۵}}{۴}$$

$$\Rightarrow(\frac{a}{b})^۲=\frac{۴}{۲+۲\sqrt{۵}}=\frac{۲}{۱+\sqrt{۵}}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

۷ گزینه ۳

راه‌حل اول:

$$\frac{۱}{x^۲}+\frac{۱}{(۲-x)^۲}=\frac{۴۰}{۹}\Rightarrow\frac{(۲-x)^۲+x^۲}{x^۲(۲-x)^۲}=\frac{۴۰}{۹}\Rightarrow\frac{۲x^۲-۴x+۴}{x^۲(۲-x)^۲}=\frac{۴۰}{۹}$$

$$۴۰x^۲(x-۲)^۲-۱۸x(x-۲)-۳۶=۰\xrightarrow{x(x-۲)=t}۴۰t^۲-۱۸t-۳۶=۰$$

$$\Rightarrow t_{۱,۲}=\frac{۱۸\pm\sqrt{(۱۸)^۲-۴(۴۰)(-۳۶)}}{۸۰}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}t_۱=\dfrac{۱۸+\sqrt{۶۰۸۴}}{۸۰}=\dfrac{۱۸+۷۸}{۸۰}=\dfrac{۹۶}{۸۰}=\dfrac{۶}{۵}\\ t_۲=\dfrac{۱۸-\sqrt{۶۰۸۴}}{۸۰}=\dfrac{۱۸-۷۸}{۸۰}=-\dfrac{۶۰}{۸۰}=\dfrac{-۳}{۴}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}t_۱=\dfrac{۶}{۵}\Rightarrow x(x-۲)=\dfrac{۶}{۵}\Rightarrow x^۲-۲x-\dfrac{۶}{۵}=۰\xrightarrow{\Delta>۰}S_۱=۲\\ t_۲=-\dfrac{۳}{۴}\Rightarrow x(x-۲)=-\dfrac{۳}{۴}\Rightarrow x^۲-۲x+\dfrac{۳}{۴}=۰\xrightarrow{\Delta>۰}S_۲=۲\end{cases}$$

$$\Rightarrow S=S_۱+S_۲=۴$$

راه‌حل دوم:

$$\frac{۱}{x^۲}+\frac{۱}{(۲-x)^۲}=\frac{۴۰}{۹}\Rightarrow\frac{(۲-x)^۲+x^۲}{(۲x-x^۲)^۲}=\frac{۴۰}{۹}$$

$$\Rightarrow\frac{۴+۲x^۲-۴x}{(۲x-x^۲)^۲}=\frac{۴۰}{۹}\Rightarrow\frac{۴-۲(۲x-x^۲)}{(۲x-x^۲)^۲}=\frac{۴۰}{۹}$$

$$\xrightarrow{t=(۲x-x^۲)}\frac{۴-۲t}{t^۲}=\frac{۴۰}{۹}\Rightarrow۲۰t^۲+۹t-۱۸=۰\Rightarrow t=\frac{-۹\pm\sqrt{۱۵۲۱}}{۴۰}\Rightarrow\begin{cases}t=\dfrac{۳}{۴}\\ t=-\dfrac{۶}{۵}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}۲x-x^۲=\dfrac{۳}{۴}\Rightarrow x^۲-۲x+\dfrac{۳}{۴}=۰\xrightarrow{\Delta>۰}S_۱=۲\\ ۲x-x^۲=-\dfrac{۶}{۵}\Rightarrow x^۲-۲x-\dfrac{۶}{۵}=۰\xrightarrow{\Delta>۰}S_۲=۲\end{cases}$$

$$\Rightarrow S=S_۱+S_۲=۴$$

بنابراین مجموع ۴ ریشه برابر با ۴ است.

۸ گزینه ۲

اولاً دقت شود هر ۵۰ دقیقه برابر $\frac{۵۰}{۶۰}$ یعنی $\frac{۵}{۶}$ ساعت است. اگر سرعت خودرو در حالت اول $v_۱$ باشد زمان طی مسیر ۲۰۰ کیلومتری برابر $\frac{۲۰۰}{v_۱}$ می‌شود اگر از سرعت ۲۰ کیلومتر بر ساعت کم شود یعنی $v_۱ - ۲۰$ داریم:

$$\frac{۲۰۰}{v_۱ - ۲۰} = \frac{۲۰۰}{v_۱} + \frac{۵}{۶} \Rightarrow \frac{۲۰۰}{v_۱ - ۲۰} = \frac{۱۲۰۰ + ۵v_۱}{۶v_۱}$$

$$\Rightarrow ۱۲۰۰v_۱ = ۱۲۰۰v_۱ - ۲۴۰۰۰ + ۵v_۱^۲ - ۱۰۰v_۱$$

$$۵v_۱^۲ - ۱۰۰v_۱ - ۲۴۰۰۰ = ۰ \Rightarrow v_۱^۲ - ۲۰v_۱ - ۴۸۰۰ = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta' = ۱۰۰ + ۴۸۰۰ = ۴۹۰۰ \\ v_۱ = \frac{۱۰ \pm ۷۰}{۱} \Rightarrow v_۱ = ۸۰ \, , \, v_۲ = ۶۰ \Rightarrow \frac{v_۱}{v_۲} = \frac{۸۰}{۶۰} = \frac{۴}{۳} \end{cases}$$

از دلتای معمولی هم می‌توان استفاده کرد فقط محاسبات کمی بیشتر می‌شود.

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۴۰۲

۹ گزینه ۴

$$\frac{x^۲ - ۲x + ۴ - x^۲ + ۹x + ۲}{(x+۲)(x^۲ - ۲x + ۴)} = \frac{۶x}{x^۲ - ۲x + ۴} \Rightarrow \frac{۷x + ۶}{x + ۲} = ۶x \Rightarrow ۶x^۲ + ۵x - ۶ = ۰$$

$$x = \frac{-۵ \pm \sqrt{۲۵ + ۱۴۴}}{۱۲} = \frac{-۵ \pm ۱۳}{۱۲} \qquad \text{یک جواب مثبت}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۲

۱۰ گزینه ۱

در سمت چپ مخرج مشترک می‌گیریم.

$$\frac{۲\sqrt{۲ - x}}{-x - ۲} = \frac{۲ - x}{۵\sqrt{۲ - x}}$$

با طرفین وسطین داریم:

$$۱۰(۲ - x) = (۲ - x)(-x - ۲)$$

$۲ - x$ را خط می‌زنیم و جواب $x = ۲$ حاصل می‌شود، اما چون ریشهٔ مخرج معادلهٔ اولیه است آن را نمی‌پذیریم.

$$-x - ۲ = ۱۰ \Rightarrow x = -۱۲$$

هیچ جواب مثبتی در کار نیست.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

۱۱ گزینه ۴

دامنهٔ معادله فقط $x = ۲$ است، بنابراین جواب معادله یا $x = ۲$ است و یا اینکه جواب حقیقی ندارد. $x = ۲$ را امتحان می‌کنیم:

$$x = ۲ \Rightarrow \sqrt{۴ - ۳} = \sqrt{۲ + ۰} - \sqrt{۲ - ۲} \Rightarrow ۱ = \sqrt{۲}$$

پس $x = ۲$ جواب معادله نیست و درنتیجه معادله جواب حقیقی ندارد.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۱۲ گزینه ۲

$x = ۲$ در معادله صدق می‌کند:

$$x = ۲ \Rightarrow -۳ - ۱ = \frac{۲m^۲}{-۲} \Rightarrow m^۲ = ۴ \Rightarrow m = \pm ۲$$

کنکور سراسری علوم انسانی خارج از کشور ۱۴۰۱

۱۳ گزینه ۱

طرفین معادله را در $(x - ۲)(x + ۳)$ ضرب می‌کنیم:

$$\begin{aligned} &x(x + ۳) - ۳(x - ۲) = ۲(x - ۲)(x + ۳) \\ &\Rightarrow x^۲ + ۳x - (۳x - ۶) = ۲(x^۲ + x - ۶) \\ &\Rightarrow x^۲ + ۶ = ۲x^۲ + ۲x - ۱۲ \Rightarrow x^۲ + ۲x - ۱۸ = ۰ \quad (*) \end{aligned}$$

جواب‌های این معادله نباید مخرج‌های معادلهٔ اولیه را صفر کند، یعنی $x = ۲$ و $x = -۳$ پذیرفته نیستند؛ آن‌ها را در معادلهٔ به‌دست‌آمده چک می‌کنیم.

$$\begin{aligned} &x = ۲ \Rightarrow ۲^۲ + ۲ \times ۲ - ۱۸ \neq ۰ \\ &x = -۳ \Rightarrow (-۳)^۲ + ۲(-۳) - ۱۸ \neq ۰ \end{aligned}$$

حاصل‌ضرب جواب‌های $ax^۲ + bx + c = ۰$ به شرط $\Delta > ۰$، به‌صورت $P = \frac{c}{a}$ است.
در معادلهٔ $(*)$، $\Delta > ۰$ است، بنابراین دو ریشه دارد و هر دو قابل‌قبول هستند. داریم:

$$P = \frac{c}{a} = \frac{-۱۸}{۱} = -۱۸$$

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۴۰۱

۱۴ گزینه ۲

طرفین معادله را در $۶(x-۴)(x-۱)$ ضرب می‌کنیم:

$$۶(x-۴)(x-۱)\times\left(\frac{x-۳}{x-۴}+\frac{۱}{۲x-۲}=\frac{۲}{۳}\right)$$

$$\Rightarrow ۶(x-۱)(x-۳)+۳(x-۴)=۴(x-۴)(x-۱)$$

$$\Rightarrow ۶(x^۲-۴x+۳)+۳x-۱۲=۴(x^۲-۵x+۴)$$

$$\Rightarrow ۶x^۲-۲۴x+۱۸+۳x-۱۲-۴x^۲+۲۰x-۱۶=۰$$

$$\Rightarrow ۲x^۲-x-۱۰=۰$$

$$\Delta=(-۱)^۲-۴(۲)(-۱۰)=۱+۸۰=۸۱\Rightarrow\begin{cases}x_۱=\frac{۱+\sqrt{۸۱}}{۴}=\frac{۱+۹}{۴}=\frac{۵}{۲}\\x_۲=\frac{۱-\sqrt{۸۱}}{۴}=\frac{۱-۹}{۴}=-۲\end{cases}$$

قدر مطلق تفاضل ریشه‌ها:

$$\left|\frac{۵}{۲}-(-۲)\right|=\left|\frac{۵}{۲}+۲\right|=\left|\frac{۹}{۲}\right|=۴/۵$$

کنکور سراسری علوم انسانی خارج از کشور ۱۳۹۹

۱۵ گزینه ۴

ابتدا از طرف چپ معادله مخرج مشترک می‌گیریم:

$$\frac{۲x-۱}{x+۲}-\frac{x-۳}{x-۲}=\frac{(۲x-۱)(x-۲)-(x-۳)(x+۲)}{(x+۲)(x-۲)}$$

$$=\frac{(۲x^۲-۵x+۲)-(x^۲-x-۶)}{(x+۲)(x-۲)}=\frac{x^۲-۴x+۸}{(x+۲)(x-۲)}=\frac{۲}{۳}$$

با فرض $x\neq\pm ۲$ طرفین وسطین انجام می‌دهیم.

$$۳x^۲-۱۲x+۲۴=۲x^۲-۸\Rightarrow x^۲-۱۲x+۳۲=۰$$

$$\text{مجموع ریشه‌ها}=\frac{-b}{a}=۱۲$$

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۳۹۹

۱۶ گزینه ۱

معادلهٔ داده‌شده را طرفین وسطین می‌کنیم، معادلهٔ درجه دوم می‌سازیم و دلتای آن را بزرگ‌تر از صفر قرار می‌دهیم.

$$\frac{x^۲-a}{x+۳}=۲x-۱\Rightarrow (x+۳)(۲x-۱)=x^۲-a$$
$$\Rightarrow ۲x^۲-x+۶x-۳=x^۲-a\Rightarrow x^۲+۵x+a-۳=۰$$
$$\Delta=(۵)^۲-۴(۱)(a-۳)>۰\Rightarrow ۲۵-۴a+۱۲>۰$$
$$\Rightarrow ۴a<۳۷\Rightarrow a<\frac{۳۷}{۴}$$

دقت کنید که به‌ازای $a=۹$ معادله به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{x^۲-۹}{x+۳}=۲x-۱\Rightarrow \frac{(x-۳)(x+۳)}{x+۳}=۲x-۱\Rightarrow x-۳=۲x-۱\Rightarrow x=-۲$$

ملاحظه می‌کنید که به‌ازای $a=۹$ معادله دارای دو ریشهٔ حقیقی متمایز نمی‌باشد، پس جواب کامل این سوال $a\neq ۹, a<\frac{۳۷}{۴}$ است. با این شرایط محدودهٔ مشخص‌شده در گزینهٔ "۱" می‌تواند محدودهٔ تغییرات a باشد.

کنکور سراسری علوم انسانی خارج از کشور ۱۴۰۰

۱۷ گزینه ۴

$$\frac{۹x^۲-(x+۳)^۲}{۲x-۳}-\frac{۲}{x}=۱\Rightarrow \frac{(۳x)^۲-(x+۳)^۲}{۲x-۳}-\frac{۲}{x}=۱$$
$$\Rightarrow \frac{(۳x-(x+۳))(۳x+x+۳)}{۲x-۳}-\frac{۲}{x}=۱$$
$$\Rightarrow \frac{(۲x-۳)(۴x+۳)}{۲x-۳}-\frac{۲}{x}=۱$$
$$\Rightarrow ۴x+۳-\frac{۲}{x}=۱\xrightarrow{\times x} ۴x^۲+۳x-۲=x$$
$$\Rightarrow ۴x^۲+۲x-۲=۰\xrightarrow{\div ۲} ۲x^۲+x-۱=۰$$

$$\xrightarrow{a+c=b}\begin{cases}x_۱=-۱\\ x_۲=\frac{-c}{a}=\frac{۱}{۲}\end{cases}\Rightarrow |x_۲-x_۱|=|\frac{۱}{۲}-(-۱)|=\frac{۳}{۲}$$

پس از تشکیل معادلهٔ درجه دوم برای تعیین قدرمطلق تفاضل جواب‌ها، می‌توان از رابطهٔ زیر هم استفاده کرد:

$$۲x^۲+x-۱=۰\Rightarrow |x_۲-x_۱|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}=\frac{\sqrt{۹}}{۲}=\frac{۳}{۲}$$

کنکور سراسری علوم انسانی خارج از کشور ۱۴۰۰

۱۸ گزینه ۱

راه‌حل اول:

$$\frac{ax^۳+۲x}{x+۱}=x^۲-x$$

$$x\neq -۱ : ax^۳+۲x=x^۳-x \Rightarrow (a-۱)x^۳+۳x=۰$$

$$\Rightarrow x((a-۱)x^۲+۳)=۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۱)\ x=۰ \\ ۲)\ (a-۱)x^۲+۳=۰ \Rightarrow x^۲=-\frac{۳}{a-۱} \Rightarrow x=\pm\sqrt{-\frac{۳}{a-۱}} \end{cases}$$

معادلهٔ صورت سوال دارای سه ریشهٔ حقیقی می‌باشد. $x=۰$ یکی از ریشه‌ها است، بنابراین (۲) نیز باید دو ریشه داشته باشد به‌طوری‌که $x\neq -۱$.

$$\begin{cases} x^۲=-\frac{۳}{a-۱}>۰ \Rightarrow \frac{۳}{a-۱}<۰ \Rightarrow a-۱<۰ \Rightarrow a<۱ \\ \frac{۳}{a-۱}\neq -۱ \Rightarrow a-۱\neq -۳ \Rightarrow a\neq -۲ \end{cases}$$

بنابراین گزینهٔ "۱" همواره برقرار است.

راه‌حل دوم: اگر $a=۱$ آنگاه $x=۰$ و معادله یک ریشه دارد که با فرض سوال در تناقض است، پس گزینهٔ ۲ و ۳ حذف می‌شوند. گزینهٔ ۴ شامل $a=-۲$ است اما در گزینهٔ ۱، $a<-۲$ است. پس حالت $a=-۲$ را بررسی می‌کنیم:

$$a=-۲ \Rightarrow \frac{-۲x^۳+۲x}{x+۱}=x^۲-x \Rightarrow \frac{-۲x\left(x^۲-۱\right)}{x+۱}=x\left(x-۱\right)$$

$$\frac{-۲x\cancel{(x+۱)}\left(x-۱\right)}{\cancel{x+۱}}=x(x-۱) \xrightarrow{x\neq -۱} -۲x(x-۱)=x\left(x-۱\right)$$

معادلهٔ حاصل درجه دوم می‌باشد که دارای دو ریشهٔ $x=۰$ و $x=۱$ است. در حالی‌که شرط سؤال این بود که معادلهٔ موردنظر دارای سه ریشه باشد، بنابراین $a=-۲$ قابل قبول نیست. پس گزینهٔ "۴" نیز رد می‌شود.

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۴۰۰

۱۹ گزینه ۳

زیر رادیکال‌ها نباید منفی شوند:

$$-x^۳ + ۴x^۲ + ۲۵x - ۱۰۰ \geq ۰ \Rightarrow -x^۲(x-۴) + ۲۵(x-۴) \geq ۰$$
$$\Rightarrow (x-۴)(۲۵ - x^۲) \geq ۰$$

x	$-\infty$	-۵	۴	۵	$+\infty$
p(x)	+ ۰	−	۰	+	۰ −

$$p(x) \geq ۰ \Rightarrow x \in (-\infty, -۵] \cup [۴, ۵] \quad (۱)$$
$$-x^۲ + ۶x - ۸ \geq ۰ \Rightarrow x^۲ - ۶x + ۸ \leq ۰ \Rightarrow (x-۲)(x-۴) \leq ۰$$
$$\Rightarrow ۲ \leq x \leq ۴ \quad (۲)$$

اشتراک (۱) و (۲) فقط عدد ۴ است و درنتیجه $x = ۴$ را امتحان می‌کنیم:

$$\sqrt{۴ + \sqrt{۰}} + \sqrt{۱۶ + \sqrt{۰}} = ۲ + ۴ \Rightarrow ۶ = ۶$$

$x = ۴$ در معادله صدق می‌کند و تنها جواب معادله است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۰

۲۰ گزینه ۴

$$x = \sqrt{y+۳} - \sqrt{y-۳} \Rightarrow x^۲ = y + ۳ + y - ۳ - ۲\sqrt{y^۲ - ۹}$$
$$\xrightarrow{۲y = x^۲} \sqrt{y^۲ - ۹} = ۰ \xrightarrow{y \geq ۳} y = ۳ \Rightarrow x = \sqrt{۶}$$

نقطهٔ تلاقی $A(\sqrt{۶}, ۳)$ است:

$$|AO| = \sqrt{۶ + ۹} = \sqrt{۱۵}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

۲۱ گزینه ۳

$$\frac{۴x^۲ - (۴ - ۴x + x^۲)}{x+۲} - \frac{۷}{x} = ۲ \Rightarrow \frac{۳x^۲ + ۴x - ۴}{x+۲} - \frac{۷}{x} = ۲ \Rightarrow \frac{(۳x-۲)(x+۲)}{x+۲} - \frac{۷}{x} = ۲$$

چون $x = -۲$ مخرج کسر را صفر می‌کند، نمی‌تواند ریشه معادله باشد، بنابراین $x + ۲$ را از صورت و مخرج کسر ساده می‌کنیم.

$$(۳x - ۲) - \frac{۷}{x} = ۲ \Rightarrow \frac{۳x^۲ - ۲x - ۷}{x} = ۲ \Rightarrow ۳x^۲ - ۲x - ۷ = ۲x$$
$$\Rightarrow ۳x^۲ - ۴x - ۷ = ۰ \Rightarrow S = x_۱ + x_۲ = -\frac{b}{a} = \frac{۴}{۳}$$

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۴۰۰

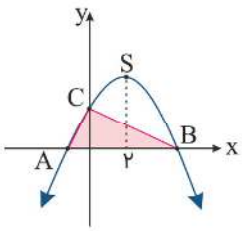
Homework نهایی درجه دو

۱ محیط یک مثلث متساوی‌الساقین برابر ۱۲ است. اگر زاویهٔ بین ساق و قاعدهٔ این مثلث برابر با ۳۰° باشد، بیشترین مساحت این مثلث کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵

۳) ۴/۵ ۴) ۵/۵

۲ در شکل زیر، مساحت مثلث ABC کدام است؟ (معادلهٔ سهمی به‌صورت $y = ax^۲ + ۳x + ۲$ است)



۱) $۴\sqrt{\frac{۳}{۵}}$

۲) $۳\sqrt{\frac{۴}{۵}}$

۳) $۳\sqrt{\frac{۵}{۴}}$

۴) $۴\sqrt{\frac{۵}{۳}}$

۳ اگر محیط یک زمین ورزشی مستطیل‌شکل برابر ۴ متر و اندازهٔ طول و عرض آن متناسب با نسبت طلایی باشد، مساحت این زمین چند متر مربع است؟

۱) $۴\sqrt{۲} - ۵$ ۲) $۴\sqrt{۵} - ۸$

۳) $۸\sqrt{۵} - ۴$ ۴) $۵\sqrt{۲} - ۴$

۴ حدود m کدام باشد تا تابع $f(x) = x^۴ + mx^۲ - ۴m$ دارای دو ریشهٔ حقیقی مختلف‌العلامت باشد؟

۱) $(۰ , +\infty)$ ۲) $(۰ , +\infty) \cup \{-۱۶\}$

۳) $(-\infty , ۰)$ ۴) $(-\infty , ۰) \cup \{۱۶\}$

۵ اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^۲ - ۳x + \frac{۱}{۴} = ۰$ باشند، مقدار k چقدر باشد تا مجموعه جواب معادلهٔ $x^۲ - kx + ۳ = ۰$ برابر با $\{\frac{۱}{\sqrt{\alpha}} , \frac{۱}{\sqrt{\beta}}\}$ باشد؟

۱) ۴ ۲) ۲

۳) ۱ ۴) ۳

۶ اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$ باشند، مجموعه جواب کدام معادله $\{\frac{1}{\alpha}\ ,\ \frac{1}{\beta}\}$ است؟

۱) $\frac{1}{a}x^2+\frac{1}{b}x+\frac{1}{c}=0$

۲) $cx^2+bx+a=0$

۳) $ax^2+cx+b=0$

۴) $bx^2+cx+a=0$

۷ اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^2-4x+1=0$ باشد، حاصل $\alpha^{\beta}\cdot\beta^{\alpha}$ کدام است؟

۱) $(2-\sqrt{3})^3$

۲) $(2+\sqrt{3})^3$

۳) $(7+4\sqrt{3})^{\sqrt{3}}$

۴) $(7-4\sqrt{3})^{\sqrt{3}}$

۸ اگر حاصل‌ضرب سه ریشه حقیقی معادله $(a-1)x^3+(4-a)x^2=4x-1$ برابر با $-\frac{1}{2}$ باشد، مقدار a کدام است؟

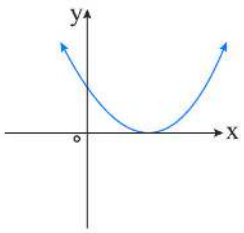
۱) ۲

۲) -2

۳) ۳

۴) -3

۹ به ازای چه مقدار از a، نمودار تابع $f(x)=(a+2)x^2-(a-1)x+1$ به‌صورت زیر است؟



۱) -1

۲) ۷

۳) $-1\ ,\ 7$

۴) هیچ مقدار a

۱۰ نقاطی را روی خط $x-y=6$ در نظر بگیرید که مجموع فواصل آن‌ها از مبدأ مختصات و نقطهٔ $A(2\ ,\ -2)$ برابر ۸ باشد. مجموع طول این نقاط کدام است؟

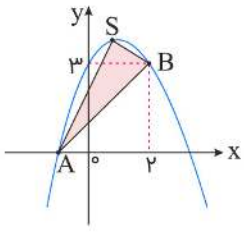
۱) ۸

۲) ۶

۳) -6

۴) -8

۱۱ باتوجه‌به شکل زیر که مربوط به نمودار تابع $y=ax^2+2x+c$ است، اگر تابع ماکزیمم مقدار خود را در S اختیار کند، طول میانه وارد بر ضلع AB کدام است؟



۱) $\frac{\sqrt{26}}{2}$

۲) $\frac{\sqrt{26}}{3}$

۳) $\frac{\sqrt{13}}{2}$

۴) $\frac{\sqrt{13}}{3}$

۱۲ اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $۳x^۲ - x = ۷$ باشند، حاصل $۳\beta^۲ + \alpha + \frac{۲۰}{۳}$ کدام است؟

۱) ۲۱
۲) $\frac{۴۳}{۳}$
۳) $\frac{۴۳}{۹}$
۴) ۱۴

۱۳ معادلهٔ $\sqrt{x^۲ + x + ۳} + \sqrt{x^۲ + x + ۱۰} = ۷$ چند جواب متمایز دارد؟

۱) صفر
۲) چهار
۳) دو
۴) سه

۱۴ حاصل‌ضرب ریشه‌های معادله $-۴\sqrt{x^۲ + ۲} + x^۲ = -۵$ کدام است؟

۱) ۷
۲) -۷
۳) ۶
۴) -۶

۱۵ مجموعه جواب نامعادله زیر را بیابید.

$$\frac{(x^۲ + ۹)(|x| + ۳)}{(x^۲ - ۱)(x^۲ - x + ۱)} \leq ۰$$

۱۶ اگر $A(-۱, -۴)$ رأس سهمی به معادلهٔ $y = ۳x^۲ + ax + b$ باشد، این سهمی محور yها را با کدام عرض قطع می‌کند؟

۱) -۳
۲) -۲
۳) -۱
۴) ۲

۱۷ نقطهٔ $A(-۱, -۴)$ رأس سهمی به معادلهٔ $f(x) = ۳x^۲ + ax + b$ است. این سهمی محور yها را با کدام عرض قطع می‌کند؟

۱) -۳
۲) -۲
۳) -۱
۴) ۲

۱۸ اگر نقطهٔ $(-۲, ۱)$ نقطهٔ رأس سهمی به معادلهٔ $y = -mx^۲ + nx$ باشد، مقدار $m + n$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۴}$
۲) $\frac{۳}{۲}$
۳) $-\frac{۳}{۲}$
۴) $-\frac{۳}{۴}$

۱۹ مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ $۳x + |x - ۵| > ۷$ کدام است؟

۱) $۱ < x < ۵$
۲) $x > ۱$
۳) $x > ۳$
۴) $x > ۵$

۲۰ مجموعهٔ جواب معادلهٔ $۴x^۲ - ۴x - ۱۵ = ۰$ کدام است؟

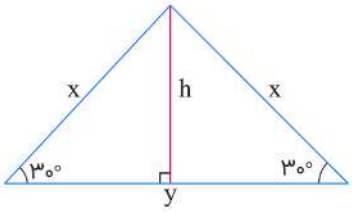
۱) $\{-\frac{۳}{۲}, -\frac{۵}{۲}\}$
۲) $\{\frac{۳}{۲}, -\frac{۵}{۲}\}$
۳) $\{\frac{۳}{۲}, \frac{۵}{۲}\}$
۴) $\{-\frac{۳}{۲}, \frac{۵}{۲}\}$

۲۱ اگر یکی از ریشه‌های معادلهٔ $-۵x^۲ - ۶kx + k - ۵ = ۰$ برابر ۱ باشد، آنگاه ریشهٔ دیگر کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۷}$
۲) $-\frac{۵}{۷}$
۳) $\frac{۷}{۵}$
۴) $-\frac{۷}{۵}$

پاسخ Homework نهایی درجه دو

۱ گزینه ۳



$$\sin ۳۰^\circ = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{h}{x} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow h = \frac{x}{۲} \quad (۱)$$

$$۲x + y = ۱۲ \Rightarrow y = ۱۲ - ۲x \quad (۲)$$

$$S = \frac{h \times y}{۲} \xrightarrow{(۱)\,,\,(۲)} S(x) = \frac{\frac{x}{۲}(۱۲ - ۲x)}{۲} \Rightarrow S(x) = -\frac{x^۲}{۲} + ۳x$$

$$S_{max} = -\frac{\Delta}{۴a} = -\frac{۹}{۴(-\frac{۱}{۲})} = \frac{۹}{۲} = ۴/۵$$

۲ گزینه ۴

S نقطه ماکزیمم سهمی است، بنابراین:

$$x_S = -\frac{b}{۲a} \Rightarrow ۲ = -\frac{۳}{۲a} \Rightarrow a = -\frac{۳}{۴} \Rightarrow y = -\frac{۳}{۴}x^۲ + ۳x + ۲$$

باتوجه‌به معادله سهمی، عرض از مبدأ سهمی ۲ است، بنابراین $C(۰\ ,\ ۲)$ است، پس:

$$S_{\overset{\Delta}{AB}C} = \frac{۲ \times |B - A|}{۲} = |\underbrace{B - A}_{\text{اختلاف صفرهای تابع}}| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$$

$$= \frac{\sqrt{۳^۲ - ۴(-\frac{۳}{۴})(۲)}}{|-\frac{۳}{۴}|} = \frac{\sqrt{۱۵}}{\frac{۳}{۴}} = ۴\sqrt{\frac{۵}{۳}}$$

۳ گزینه ۲

$$\left.\begin{matrix}\frac{L}{W}=\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}\\ L+W=۲\end{matrix}\right\}\Rightarrow\frac{L}{۲-L}=\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}\Rightarrow ۲L=۲+۲\sqrt{۵}-(۱+\sqrt{۵})L$$

$$\Rightarrow(۳+\sqrt{۵})L=۲+۲\sqrt{۵}\Rightarrow L=\frac{۲+۲\sqrt{۵}}{۳+\sqrt{۵}}\times\frac{۳-\sqrt{۵}}{۳-\sqrt{۵}}=\frac{-۴+۴\sqrt{۵}}{۴}$$

$$\Rightarrow L=\sqrt{۵}-۱\Rightarrow W=۲-(\sqrt{۵}-۱)=۳-\sqrt{۵}$$

$$\Rightarrow S=L\times W=(\sqrt{۵}-۱)(۳-\sqrt{۵})=۴\sqrt{۵}-۸$$

۴ گزینه ۲

اگر $x^۲=t$ باشد، داریم:

$$t^۲+mt-۴m=۰$$

اگر معادلهٔ فوق دارای دو ریشه با علامت‌های متفاوت یا یک ریشه با علامت مثبت باشد، شرایط مسئله برقرار است. بنابراین:

دو ریشه با علامت‌های متفاوت:

$$\Rightarrow P<۰\Rightarrow -۴m<۰\Rightarrow m>۰\ \ (۱)$$

یک ریشه با علامت مثبت:

$$\Rightarrow\begin{cases}\Delta=۰\Rightarrow m^۲+۱۶m=۰\Rightarrow m=-۱۶\ \text{یا}\ m=۰\ \ (۲)\\ ,\\ \frac{-b}{۲a}>۰\Rightarrow\frac{-m}{۲}>۰\Rightarrow m<۰\ \ (۳)\end{cases}$$

$$\left.\begin{matrix}\xrightarrow{(۱)} m>۰\\ \xrightarrow{(۲)\cap(۳)} m=-۱۶\end{matrix}\right\}\xrightarrow{\cup} m>۰\ \text{یا}\ m=-۱۶\Rightarrow(۰\ ,\ +\infty)\cup\{-۱۶\}$$

۵ گزینه ۱

$$x^۲-۳x+\frac{۱}{۴}=۰\Rightarrow\begin{cases}S=\alpha+\beta=۳\\ P=\alpha.\beta=\frac{۱}{۴}\end{cases}$$

$$k=\frac{۱}{\sqrt{\alpha}}+\frac{۱}{\sqrt{\beta}}=\frac{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha\beta}}=\frac{\sqrt{S+۲\sqrt{P}}}{\sqrt{P}}=\frac{\sqrt{۳+۱}}{\frac{۱}{۲}}=۴$$

۶ گزینه ۲

$$S=\frac{۱}{\alpha}+\frac{۱}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}}=-\frac{b}{c},\ P=\frac{۱}{\alpha\beta}=\frac{۱}{\frac{c}{a}}=\frac{a}{c}$$

$$\Rightarrow x^{۲}-Sx+P=۰\Rightarrow x^{۲}+\frac{b}{c}x+\frac{a}{c}=۰\Rightarrow cx^{۲}+bx+a=۰$$

۷ گزینه ۴

$$x^{۲}-۴x+۱=۰\Rightarrow x=\frac{۴\pm۲\sqrt{۳}}{۲}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=۲+\sqrt{۳}\\ \beta=۲-\sqrt{۳}\end{cases}$$

$$\alpha^{\beta}\beta^{\alpha}=(۲+\sqrt{۳})^{۲-\sqrt{۳}}\times(۲-\sqrt{۳})^{۲+\sqrt{۳}}=(۲+\sqrt{۳})^{۲-\sqrt{۳}}(\frac{۱}{۲+\sqrt{۳}})^{۲+\sqrt{۳}}$$

$$=(۲+\sqrt{۳})^{۲-\sqrt{۳}-۲-\sqrt{۳}}=(۲+\sqrt{۳})^{-۲\sqrt{۳}}=(\frac{۱}{۲+\sqrt{۳}})^{۲\sqrt{۳}}=(۲-\sqrt{۳})^{۲\sqrt{۳}}$$

$$=(۷-۴\sqrt{۳})^{\sqrt{۳}}$$

دقت کنید که چون $P=\alpha\cdot\beta=۱$، بنابراین α و β معکوس یکدیگرند و درنتیجه $\alpha^{\beta}\beta^{\alpha}$ نسبت به α و β دارای خاصیت جابه‌جایی است؛ پس فرقی نمی‌کند که α را ریشهٔ بزرگ‌تر در نظر بگیریم یا کوچک‌تر.

۸ گزینه ۳

$$(a-۱)x^{۳}+(۴-a)x^{۲}-۴x+۱=۰\Rightarrow \text{مجموع ضرایب}=۰$$

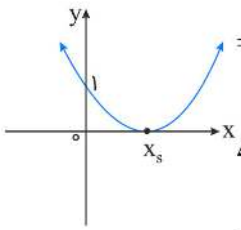
یکی از ریشه‌های معادله $x=۱$ است.

$$[(a-۱)x^{۳}+(۴-a)x^{۲}-۴x+۱]\div(x-۱)=\underbrace{(a-۱)x^{۲}+۳x-۱}_{P=\frac{-۱}{a-۱}}=۰$$

حاصل‌ضرب سه ریشه:

$$۱\times P=\frac{-۱}{a-۱}=\frac{-۱}{۲}\Rightarrow a-۱=۲\Rightarrow a=۳$$

۹ گزینه ۲



$$\Rightarrow \begin{cases} x_S > ۰ \\ x_S = -\frac{b}{۲a} \end{cases} \Rightarrow \frac{-(-(a-۱))}{۲(a+۲)} > ۰ \Rightarrow \frac{a-۱}{a+۲} > ۰ \Rightarrow a < -۲ \text{ یا } a > ۱$$

$$\Delta = ۰ \Rightarrow (a-۱)^۲ - ۴(a+۲) = ۰ \Rightarrow a^۲ - ۲a + ۱ - ۴a - ۸ = ۰$$

$$\Rightarrow a^۲ - ۶a - ۷ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} a = -۱ \\ a = ۷ \end{cases} \quad \text{غ ق ق} (a < -۲ \text{ یا } a > ۱)$$

۱۰ گزینه ۲

نقطه‌ای دلخواه روی خط $P(x\ ,\ x-۶) \Rightarrow x - y = ۶$

$$OP + PA = ۸ \Rightarrow \sqrt{x^۲ + (x-۶)^۲} + \sqrt{(x-۲)^۲ + (x-۴)^۲} = ۸$$

$$\Rightarrow \sqrt{\underbrace{۲x^۲ - ۱۲x + ۳۶}_{t+۱۶}} + \sqrt{\underbrace{۲x^۲ - ۱۲x + ۲۰}_{t}} = ۸ \Rightarrow \sqrt{t+۱۶} + \sqrt{t} = ۸$$

$$\Rightarrow t + ۱۶ + t + ۲\sqrt{t^۲ + ۱۶t} = ۶۴ \Rightarrow \sqrt{t^۲ + ۱۶t} = ۲۴ - t$$

$$\Rightarrow t^۲ + ۱۶t = ۵۷۶ - ۴۸t + t^۲ \Rightarrow ۶۴t = ۵۷۶ \Rightarrow t = ۹$$

$$\Rightarrow ۲x^۲ - ۱۲x + ۲۰ = ۹ \Rightarrow ۲x^۲ - ۱۲x + ۱۱ = ۰ \Rightarrow x = \frac{۱۲ \pm \sqrt{۵۶}}{۴}$$

هردو جواب، قابل‌قبول‌اند.

مجموع جواب‌ها: ۶

۱۱ گزینه ۱

$$x_S = \frac{۰+۲}{۲} = ۱ \ \Rightarrow -\frac{۲}{۲a} = ۱ \Rightarrow a = -۱$$

ازطرفی باتوجه‌به نمودار، عرض از مبدأ سهمی برابر ۳ است، بنابراین $c = ۳$ می‌باشد. لذا:

$$y = -x^۲ + ۲x + ۳ \xrightarrow{x_S = ۱} y_S = ۴ \Rightarrow S(۱\ ,\ ۴)$$

$$-x^۲ + ۲x + ۳ = ۰ \ \Rightarrow \begin{cases} x = -۱ \xrightarrow{x_A < ۰} x_A = -۱ \Rightarrow A(-۱\ ,\ ۰) \\ x = ۳ \end{cases}$$

$$M\left(\frac{x_A + x_B}{۲}\ ,\ \frac{y_A + y_B}{۲}\right) \Rightarrow M\left(\frac{-۱+۲}{۲}\ ,\ \frac{۰+۳}{۲}\right) \Rightarrow M\left(\frac{۱}{۲}\ ,\ \frac{۳}{۲}\right)$$

$$SM = \sqrt{\left(۱ - \frac{۱}{۲}\right)^۲ + \left(۴ - \frac{۳}{۲}\right)^۲} = \sqrt{\frac{۱}{۴} + \frac{۲۵}{۴}} = \frac{\sqrt{۲۶}}{۲}$$

۱۲ گزینه ۴

β ریشه است $\Rightarrow 3\beta^2 - \beta = 7 \Rightarrow 3\beta^2 = \beta + 7$

$$\Rightarrow 3\beta^2 + \alpha + \frac{20}{3} = \beta + 7 + \alpha + \frac{20}{3} = \underbrace{\beta + \alpha}_{S=-\frac{b}{a}=\frac{1}{3}} + 7 + \frac{20}{3}$$

$$= \frac{1}{3} + 7 + \frac{20}{3} = 14$$

۱۳ گزینه ۳

فرض می‌کنیم $x^2 + x + 3 = t$ باشد، در این صورت:

$$\sqrt{t} + \sqrt{t+7} = 7 \xrightarrow{\text{به توان ۲}} t + t + 7 + 2\sqrt{t^2 + 7t} = 49$$

$$\Rightarrow \sqrt{t^2 + 7t} = 21 - t$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} t^2 + 7t = 441 - 42t + t^2$$

$$\Rightarrow 49t = 441 \Rightarrow t = \frac{441}{49} \Rightarrow t = 9$$

$$\Rightarrow x^2 + x + 3 = 9 \Rightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 2 \end{cases}$$

پس هردو جواب، قابل‌قبول‌اند.

۱۴ گزینه ۲

$$-4\sqrt{x^2+2} + x^2 + 2 = -3 \xrightarrow{\sqrt{x^2+2}=t} -4t + t^2 = -3$$

$$\Rightarrow t^2 - 4t + 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 1 \Rightarrow \sqrt{x^2+2} = 1 \Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow \text{جواب ندارد} \\ t = 3 \Rightarrow \sqrt{x^2+2} = 3 \Rightarrow x^2 = 7 \Rightarrow x = \pm\sqrt{7} \end{cases}$$

هر دو جواب قابل‌قبول‌اند، بنابراین:

$$\text{ضرب ریشه‌ها} = \sqrt{7} \times (-\sqrt{7}) = -7$$

۱۵ عبارات $(x^2 + 9)$ و $(|x| + 3)$ همواره $+$ هستند!

بنابراین در تعیین علامت بی‌تأثیراند. عبارت $x^2 - x + 1$ نیز $\Delta < 0$ و $a > 0$ است پس همواره $+$ خواهد بود. بنابراین داریم:

$$\frac{1}{x^2 - 1} \leq 0 \xrightarrow{x^2-1 \neq 0} x^2 - 1 < 0 \Rightarrow -1 < x < 1$$

۱۶ گزینه ۳

مختصات نقطهٔ رأس $(-۱, -۴)$ است، پس خط $x = -۱$ محور تقارن آن است.

$$\text{محور}: x = \frac{-a}{۲ \times ۳} = \frac{-a}{۶} \xrightarrow{x=-۱} \frac{-a}{۶} = -۱ \Rightarrow a = ۶$$

$$y = ۳x^۲ + ax + b \xrightarrow{a=۶} y = ۳x^۲ + ۶x + b$$
$$\xrightarrow{(-۱,-۴)} -۴ = ۳ \times (-۱)^۲ + ۶ \times (-۱) + b \Rightarrow -۴ = ۳ - ۶ + b \Rightarrow b = -۱$$
$$\Rightarrow y = ۳x^۲ + ۶x - ۱ \xrightarrow{x=۰} y = -۱$$

۱۷ گزینه ۳

اگر (α , β) رأس سهمی باشند، می‌توان معادلهٔ آن را به‌صورت $y = k(x - \alpha)^۲ + \beta$ نوشت.
چون $(-۴ , -۱)$ رأس سهمی است، طبق نکتهٔ بالا داریم:

$$y = k(x - (-۱))^۲ - ۴ = kx^۲ + ۲kx + k - ۴$$

تک تک ضرایب y، باید دقیقاً برابر با ضرایب متناظر در $y = ۳x^۲ + ax + b$ باشند، پس $k = ۳$، لذا در $y = ۳(x + ۱)^۲ - ۴$ برای یافتن محل تقاطع با محور عرض‌ها $x = ۰$ قرار می‌دهیم، داریم:

$$y = ۳(۰ + ۱)^۲ - ۴ = -۱ \Rightarrow \text{عرض محل تلاقی با محور عرض‌ها} = -۱$$

۱۸ گزینه ۴

باتوجه‌به اینکه مبدأ مختصات یعنی $(۰, ۰)$ در ضابطهٔ $y = -mx^۲ + nx$ صدق می‌کند، پس تابع از $(۰, ۰)$ عبور می‌کند.

$$y = -m(x - h)^۲ + k \xrightarrow{\text{رأس } (-۲,۱)} y = -m(x - (-۲))^۲ + ۱ = -m(x + ۲)^۲ + ۱$$
$$\xrightarrow{(۰,۰)} ۰ = -m(۰ + ۲)^۲ + ۱ \Rightarrow -۴m + ۱ = ۰ \Rightarrow m = \frac{۱}{۴}$$

همچنین مختصات نقطهٔ رأس نیز در معادلهٔ سهمی صدق می‌کند، بنابراین:

$$y = -mx^۲ + nx \Rightarrow ۱ = -\frac{۱}{۴}(-۲)^۲ + n(-۲) \Rightarrow ۱ = -۱ - ۲n \Rightarrow n = -۱$$
$$m + n = \frac{۱}{۴} + (-۱) = -\frac{۳}{۴}$$

۱۹ گزینه ۲

$$x \geq ۵ \Rightarrow |x-۵| = x-۵ \Rightarrow ۳x + |x-۵| > ۷ \Rightarrow ۳x + x - ۵ > ۷ \Rightarrow ۴x > ۱۲$$
$$\Rightarrow x > ۳ \xrightarrow{x \geq ۵} x \geq ۵ \quad (I)$$
$$x < ۵ \Rightarrow |x-۵| = ۵ - x \Rightarrow ۳x + |x-۵| > ۷ \Rightarrow ۳x + ۵ - x > ۷ \Rightarrow ۲x > ۲$$
$$\Rightarrow x > ۱ \xrightarrow{x<۵} ۱ < x < ۵ \quad (II)$$
$$(I)\,,\,(II) \xrightarrow{\cup} \left.\begin{matrix} x \geq ۵ \\ ۱ < x < ۵ \end{matrix}\right\} \Rightarrow x > ۱$$

۲۰ گزینه ۴

معادله را به کمک اتحاد جمله مشترک تجزیه می‌کنیم:

$$۴x^۲ - ۴x - ۱۵ = ۰ \Rightarrow (۲x)^۲ - ۲(۲x) - ۱۵ = ۰$$
$$\Rightarrow (۲x)^۲ + (۳-۵)(۲x) + (۳)(-۵) = ۰ \Rightarrow (۲x+۳)(۲x-۵) = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۲x + ۳ = ۰ \Rightarrow x = -\frac{۳}{۲} \\ ۲x - ۵ = ۰ \Rightarrow x = \frac{۵}{۲} \end{cases} \Rightarrow \text{مجموعهٔ جواب} : \{-\frac{۳}{۲}\,,\,\frac{۵}{۲}\}$$

اتحاد جمله مشترک:

$$(x+a)(x+b) = x^۲ + (a+b)x + ab$$

۲۱ گزینه ۳

در هر معادلهٔ درجه دوم $ax^۲ + bx + c = ۰$ اگر مجموع ضرایب معادله برابر صفر باشد، آنگاه یکی از ریشه‌های معادله $x = ۱$ و دیگری $x = \frac{c}{a}$ است:

$$\xrightarrow{x=۱} -۵ - ۶k + k - ۵ = ۰ \Rightarrow k = -۲$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = -۵ \\ b = -۶k \\ c = k - ۵ \end{cases} \Rightarrow a + b + c = ۰$$
$$k = -۲ \Rightarrow -۵ + (-۶)(-۲) + (-۲) - ۵ = ۰$$

ریشهٔ دیگر:

$$\frac{c}{a} = \frac{k-۵}{-۵} = \frac{-۲-۵}{-۵} = \frac{۷}{۵}$$

تقسیم و روابط آن

یکی از سؤالات معروف در دوره‌ی اول این بود که «عدد ۳۱ را بر ۷ تقسیم کنید و خارج‌قسمت و باقی‌مانده را بیابید.»

باقی‌مانده + خارج‌قسمت × مقسوم‌علیه = مقسوم

$$۳۱ = ۷ \times ۴ + ۳$$

با استفاده از همین موضوع ساده، تقسیم چندجمله‌ای‌ها را به این صورت انجام می‌دهیم:

۱- مقسوم را بر اساس توان‌های نزولی از بزرگ به کوچک مرتب می‌کنیم.

۲- جمله‌ای که در مقسوم، بزرگ‌ترین درجه را دارد بر جمله‌ای از مقسوم‌علیه که بزرگ‌ترین درجه را دارد تقسیم می‌کنیم.

۳- عبارت به‌دست‌آمده در خارج‌قسمت را در مقسوم‌علیه ضرب می‌کنیم و علامتش را قرینه کرده با مقسوم جمع می‌کنیم.

۴- این مراحل سه‌گانه را تا جایی ادامه می‌دهیم که درجه‌ی به‌دست‌آمده در ردیف باقی‌مانده کم‌تر از درجه‌ی مقسوم‌علیه باشد.

مثلاً: عبارت $x^۳ + x^۲ - ۲$ را بر $x - ۱$ تقسیم می‌کنیم:

مقسوم	مقسوم‌علیه
$x^۳ + x^۲ - ۲$	$x - ۱$
$-x^۳ + x^۲$	$x^۲ + ۲x + ۲$
$۲x^۲ - ۲$	خارج‌قسمت
$-۲x^۲ + ۲x$	
$۲x - ۲$	
$-۲x + ۲$	
$۰ = R$	
باقی‌مانده	

با توجه به قانون تقسیم داریم:

باقی‌مانده + خارج‌قسمت × مقسوم‌علیه = مقسوم

$$x^۳ + x^۲ - ۲ = (x - ۱)(x^۲ + ۲x + ۲) + ۰$$

پس اگر مقسوم را با $P(x)$، مقسوم‌علیه را با $D(x)$، خارج‌قسمت را با $Q(x)$ و باقی‌مانده را با $R(x)$ نمایش دهیم، خواهیم داشت:

باقی‌مانده + خارج‌قسمت × مقسوم‌علیه = مقسوم

$$P(x) = D(x) \times Q(x) + R(x)$$

یادت باشه همواره باقی‌مانده حداقل یک درجه کم‌تر از مقسوم‌علیه است.

۱- محاسبه‌ی باقی‌مانده‌ی تقسیم $P(x)$ بر چندجمله‌ای درجه اول $ax + b$:

وقتی $P(x)$ را بر $ax + b$ تقسیم می‌کنیم کافی است، برای یافتن باقی‌مانده، به جای x قرار دهیم $\frac{-b}{a}$. به این ترتیب داریم:

$$ax + b = ۰ \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$$

باقی‌مانده $R = P(-\frac{b}{a})$

تمرین: باقی‌مانده‌ی تقسیم $x^4-ax^3+x^2+2ax+1$ بر $x+1$ برابر ۴ شده است. a کدام است؟ (سراسری ریاضی ۸۰)

پاسخ:

$$x+1=0 \Rightarrow x=-1$$

$$R=P(-1)=4 \Rightarrow (-1)^4-a(-1)^3+(-1)^2+2a(-1)+1=4 \Rightarrow 1+a+1-2a+1=4 \Rightarrow -a=1 \Rightarrow a=-1$$

تمرین: باقی‌مانده‌ی تقسیم $15x^2+14x-29$ را بر $x-1$ بیابید.

پاسخ:

$$x-1=0 \Rightarrow x=1$$

$$R=P(1)=15(1)^2+14(1)-29=29-29=0 \Rightarrow R=0$$

باقی‌مانده صفر شد، یعنی این که $15x^2+14x-29$ بر $x-1$ بخش‌پذیر است. پس عامل $x-1$ را در خود دارد.

۲- محاسبه‌ی باقی‌مانده‌ی تقسیم $P(x)$ بر یک چندجمله‌ای با درجه‌ی بیشتر از یک:

گفتیم برای پیدا کردن باقی‌مانده، مقسوم‌علیه را صفر می‌کنیم: $P(x)=\overbrace{D(x)}^{0}\times Q(x)+R(x)$

و این برای وقتی بود که مقسوم‌علیه از درجه‌ی اول بود. حال اگر مقسوم‌علیه از درجه‌ی اول نباشد باز هم آن را مساوی صفر قرار می‌دهیم. اما این‌جا، جمله‌های پرتوان را برحسب جمله‌های با توان کم‌تر می‌نویسیم و با ظاهر کردن جملات پرتوان در مقسوم، معادل کم‌توانشان را جاگذاری می‌کنیم.

تمرین: باقی‌مانده‌ی تقسیم $2x^9+x^5+2$ را بر x^3-1 بیابید.

پاسخ: ابتدا قرار می‌دهیم $x^3-1=0$ پس $x^3=1$ (این یک معادله نیست. یعنی نباید نتیجه بگیرید که $x=1$ است). حال در رابطه‌ی $2x^9+x^5+2$، x^3 می‌سازیم و به جایش $(x^3=1)$ قرار می‌دهیم.

$$2x^9+x^5+2=2(x^3)^3+(x^3)x^2+2 \overset{x^3=1}{=\!=} 2(1)^3+(1)x^2+2=x^2+4$$

یعنی باقی‌مانده، x^2+4 است.

۳- اگر باقی‌مانده‌ی تقسیم عبارت $P(x)$ بر $x-a$ و $x-b$ به ترتیب R_1 و R_2 باشد، باقی‌مانده‌ی تقسیم $P(x)$ بر $(x-a)(x-b)$ برابر است با $R(x)=Ax+B$ چرا که مقسوم‌علیه از درجه دو است و باقی‌مانده باید درجه‌اش از مقسوم‌علیه کم‌تر باشد:

$$\begin{array}{c|c} P(x) & (x-a)(x-b) \\ \hline R=Ax+B & Q(x) \end{array}$$

تمرین: اگر باقی‌مانده‌ی تقسیم $f(x)$ بر $x+1$ و $x-2$ به ترتیب -1 و 5 باشد، باقی‌مانده‌ی $f(x)$ بر x^2-x-2 کدام است؟

$$\begin{array}{c|c} f(x) & x^2-x-2 \\ \hline R=Ax+B & Q(x) \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+1=0 \Rightarrow x=-1 \Rightarrow R=f(-1)=-1 \Rightarrow A(-1)+B=-1 \quad (I) \\ x-2=0 \Rightarrow x=2 \Rightarrow R=f(2)=5 \Rightarrow A(2)+B=5 \quad (II) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} (I)\times 2 \\ (II) \end{matrix} \begin{cases} -2A+2B=-2 \\ 2A+B=5 \end{cases} \Rightarrow 3B=3 \Rightarrow B=1 \Rightarrow A=2 \Rightarrow R=Ax+B=2x+1$$

پس باقی‌مانده $R=2x+1$ است.

۴- هرگاه باقی‌مانده‌ی تقسیم عبارتی، اغلب با درجه بالاتر بر عبارتی مثل $x^2\pm x+1$ یا $x^2\pm 2x+4$ خواسته شود (مرتبط با اتحاد چاق و لاغر) کافی است عبارات فوق را در قسمت لاغر $(x\mp 1)$ یا $(x\mp 2)$ ضرب کنیم.

تمرین: باقی‌مانده‌ی تقسیم x^{27} بر x^2-x+1 کدام است؟

۱) -1 ۲) 1 ۳) $x-7$ ۴) $3x+1$

پاسخ: گزینه‌ی «۱»

یادت باشه

$(x^2-x+1)(x+1) \Rightarrow x^3+1=0 \Rightarrow x^3+1=0 \Rightarrow x^3=-1$ (این یک معادله نیست)

$\Rightarrow R=x^{27}=(x^3)^9=(-1)^9=-1$

این مورد را پس از فصل مشتق یادتان می‌دهم.

۵- اگر عبارت $P(x)$ بر $(x-a)^n$ بخش‌پذیر باشد، $x=a$ خود $P(x)$ و مشتقات متوالی آن را تا $(n-1)$ مرتبه صفر می‌کند.

$P(a)=P'(a)=P''(a)=\cdots=P^{(n-1)}(a)=0$

تمرین: به ازای چه مقدار از a و b عبارت ax^6+bx^5-1 بر $(x-1)^2$ بخش‌پذیر است؟

پاسخ:

$(x-1)^2=0 \Rightarrow x=1$ ($P(x)$ ریشه و $P'(x)$ ریشه)

$$P(x)=ax^6+bx^5-1 \Rightarrow P(1)=0 \Rightarrow a+b-1=0$$
$$P'(x)=6ax^5+5bx^4 \Rightarrow P'(1)=0 \Rightarrow 6a+5b=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b=1 \xrightarrow{-5} -5a-5b=-5 \ (I) \\ 6a+5b=0 \ (II) \end{cases} \xrightarrow[(I)+(II)]{\text{حل دستگاه}} a=-5\,,\ b=6$$

۶- اگر باقی‌مانده‌ی تقسیم عبارات $f(x)$ و $g(x)$ بر عبارت $h(x)$ به ترتیب R_1 و R_2 باشد، باقی‌مانده‌ی تقسیم $f(x)\cdot g(x)$ بر عبارت $h(x)$ برابر است با، باقی‌مانده‌ی تقسیم R_1R_2 بر $h(x)$.

تمرین: اگر باقی‌مانده‌ی تقسیم عبارت‌های $f(x)$ و $g(x)$ بر x^2-x-5 به ترتیب x و $x+2$ باشد، باقی‌مانده‌ی تقسیم $f(x)\cdot g(x)$ را بر x^2-x-5 بیابید.

پاسخ:

$$\begin{array}{r|l} R_1R_2=x(x+2)=x^2+2x & x^2-x-5 \\ \hline -x^2+x+5 & 1 \\ \hline 3x+5 & \end{array}$$

پس باقی‌مانده‌ی تقسیم $f(x)\cdot g(x)$ بر x^2-x-5 برابر است با $3x+5$.

۷- x^n-y^n همواره بر $x-y$ بخش‌پذیر است. چون: $P(x)=x^n-y^n$

$x-y=0 \Rightarrow x=y \Rightarrow P(y)=y^n-y^n=0$

$x^n-y^n=(x-y)(x^{n-1}+x^{n-2}y^1+x^{n-3}y^2+\cdots+xy^{n-2}+y^{n-1})$

۸- x^n-y^n زمانی بر $x+y$ بخش‌پذیر است که n زوج باشد. چون: $P(x)=x^n-y^n$

$x+y=0 \Rightarrow x=-y \Rightarrow P(-y)=(-y)^n-(y)^n \overset{n\ \text{زوج}}{=\!=} y^n-y^n=0$

$x^n-y^n=(x+y)(x^{n-1}-x^{n-2}y^1+\cdots+xy^{n-2}-y^{n-1})$

۹- x^n+y^n هیچ‌گاه بر $x-y$ بخش‌پذیر نیست.

۱۰- x^n+y^n زمانی بر $x+y$ بخش‌پذیر است که n فرد باشد، چون: $P(x)=x^n+y^n$

$$x+y=0 \Rightarrow x=-y \Rightarrow P(-y)=(-y)^n+y^n \overset{n\text{ فرد}}{=\!=} -y^n+y^n=0$$

تمرین: اگر عبارت x^4+ax^2-bx+4 بر $(x-1)^2$ بخش‌پذیر باشد، b کدام است؟ (سراسری ریاضی خارج ۹۴)

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

پاسخ: گزینه‌ی «۴»

بهت یاد دادم که اگر $P(x)$ بر $(x-a)^n$ بخش‌پذیر باشد، خودش و مشتق‌هاشو تا $(n-1)$ مرتبه صفر می‌کند. پس این‌جا $(x-1)^2=0 \Rightarrow x=1$، هم $P(x)$ و هم $P'(x)$ رو صفر می‌کند.

$$P(1)=0 \Rightarrow 1+a-b+4=0 \Rightarrow a-b=-5 \ (I)$$

$$P'(x)=4x^3+2ax-b \Rightarrow P'(1)=4+2a-b=0 \Rightarrow 2a-b=-4 \ (II)$$

$$(I)\times(-2)\ (II) \begin{cases} -2a+2b=10 \\ 2a-b=-4 \end{cases} \Rightarrow b=6, a=1$$

تمرین: به ازای مقداری از a، چندجمله‌ای $f(x)=x^4+ax^3-8x$ بر $x+2$ بخش‌پذیر است. کوچک‌ترین ریشه‌ی معادله‌ی $f(x)=0$ کدام است؟ (سراسری ریاضی ۹۴)

۱) $1-\sqrt{3}$ ۲) $1-\sqrt{5}$ ۳) $-1-\sqrt{3}$ ۴) $-1-\sqrt{5}$

پاسخ: گزینه‌ی «۴» ـ $f(x)$ بر $x+2$ بخش‌پذیره یعنی این که $f(-2)=0$، $x+2=0 \Rightarrow x=-2$ می‌شه پس:

$$f(-2)=(-2)^4+a(-2)^3-8(-2)=16-8a+16=0 \Rightarrow 8a=32 \Rightarrow a=4$$

حالا بیا $f(x)$ رو بنویس:

$$f(x)=x^4+4x^3-8x=0 \Rightarrow x(x^3+4x^2-8)=0$$

حالا چون صورت سؤال گفته $(x+2)$ یک عامل عبارت است، می‌تونیم عامل x^3+4x^2-8x رو به $x+2$ تقسیم کنیم و عامل درجه دوم حاصل رو حل کنیم و کوچک‌ترین ریشه رو به دست بیاریم.

$$\begin{array}{r|l} x^3+4x^2-8 & x+2 \\ \hline -x^3-2x^2 & x^2+2x-4 \\ \hline 2x^2-8 & \\ -2x^2-4x & \\ \hline -4x-8 & \\ 4x+8 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$\Rightarrow x^2+2x-4=0 \xrightarrow[\Delta=20]{\text{حل به روش دلتا}} x=\frac{-2\pm\sqrt{20}}{2}=\frac{-2\pm2\sqrt{5}}{2}=-1\pm\sqrt{5} \xrightarrow{\text{کوچک‌ترین ریشه}} -1-\sqrt{5}$$

ریشه‌های این معادله عبارت‌اند از: $0, -2, -1+\sqrt{5}, -1-\sqrt{5}$

تمرین: عبارت $x^4+4ax^2+2bx+1$ بر x^2-4 بخش‌پذیر است. $a+b$ کدام است؟ (سراسری ریاضی ۸۶)

۱) $-\frac{15}{8}$ ۲) $-\frac{17}{16}$ ۳) $\frac{17}{6}$ ۴) $\frac{15}{8}$

پاسخ: گزینه‌ی «۲»

مقسوم‌علیه را مساوی صفر قرار بده: $x^۲-۴=۰ \Rightarrow x^۲=۴$

حالا در مقسوم به جای $x^۲$، ۴ رو قرار بده و کل عبارت رو مساوی صفر بذار چون قراره بخش‌پذیر بشه پس باقی‌مانده صفر هست.

$$x^۴+۴ax^۲+۲bx+۱=(x^۲)^۲+۴a(x^۲)+۲bx+۱ \overset{x^۲=۴}{=\!=\!=} (۴)^۲+۴a(۴)+۲bx+۱=۱۶+۱۶a+۲bx+۱=۰$$

حالا چون این تساوی باید به ازای هر x برقرار باشد، پس این رابطه به x وابسته نیست و باید یه جوری x رو حذف کنیم. پس ضریب x رو صفر قرار می‌دهیم:

$$۲b=۰ \Rightarrow b=۰ \Rightarrow ۱۶+۱۶a+۱=۰ \Rightarrow ۱۶a=-۱۷ \Rightarrow a=-\frac{۱۷}{۱۶}$$

بنابراین: $a+b=۰-\frac{۱۷}{۱۶}=-\frac{۱۷}{۱۶}$

روش دوم: مقسوم‌علیه قابل تجزیه است. پس رابطه‌ی تقسیم رو این‌جوری می‌نویسیم:

$$x^۴+۴ax^۲+۲bx+۱=\underbrace{(x-۲)(x+۲)}_{x^۲-۴}Q(x)+\overset{۰}{\cancel{R(x)}}$$

حالا با قرار دادن $x=۲$ و $x=-۲$، $Q(x)$ رو حذف می‌کنیم.

$$\begin{matrix} x=۲ \Rightarrow ۱۶+۱۶a+۴b+۱=۰ \\ x=-۲ \Rightarrow ۱۶+۱۶a-۴b+۱=۰ \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} ۱۶a+۴b=-۱۷ \\ ۱۶a-۴b-۱۷ \end{cases} \xrightarrow{\text{جمع}} ۳۲a=-۳۴ \Rightarrow a=-\frac{۱۷}{۱۶} \Rightarrow b=۰$$

پس $a+b=-\frac{۱۷}{۱۶}$.

تمرین: چندجمله‌ای $۱۶a+۳x^۵+x^۶+۲x^{۳n}+x^{۳n+۱}$ به ازای هر عدد طبیعی n بر $x+۲$ بخش‌پذیر است. برای $n=۱$ باقی‌مانده تقسیم $P(x)$ بر $x^۲+۲x-۳$ کدام است؟ (ریاضی ۱۴۰۱)

۱) $-۱۵x+۲۴$ ۲) $-۵x+۳۴$ ۳) $-۱۵x+۱۴$ ۴) $-۵x+۴۴$

تمرین: اگر باقی‌مانده‌ی تقسیم $f(x)$ بر $x(x-۳)(x+۳)$ برابر $۵x^۲+۳x+۱$ باشد و باقی‌مانده‌ی تقسیم $f(x)$ بر $x^۲-۳x$ برابر $ax+b$ باشد، آن‌گاه $۲a+b$ کدام است؟

۱) ۲۰ ۲) ۳۷ ۳) -۲۳ ۴) ۱۹

پاسخ: گزینه‌ی «۲»

رابطه‌ی کلی تقسیم $P(x)$ به $Q(x)$ رو یادته؟

$$P(x)=\underset{\text{مقسوم‌علیه}}{D(x)}\ \underset{\text{خارج‌قسمت}}{Q(x)}+\underset{\text{باقی‌مانده}}{R(x)}$$

حالا این‌جا هم $f(x)$ مقسوم و $x(x-۳)(x+۳)$ مقسوم‌علیه و $۵x^۲+۳x+۱$ باقی‌مانده است. و در حالت بعدی $f(x)$ مقسوم، $x^۲-۳x$ مقسوم‌علیه و $ax+b$ باقی‌مانده است. پس:

$$\begin{cases} f(x)=x(x-۳)(x+۳)Q(x)+۵x^۲+۳x+۱ \ (I) \\ f(x)=(x^۲-۳x)Q'(x)+ax+b=x(x-۳)Q'(x)+ax+b \ (II) \\ (II): f(۰)=b\ ,\ f(۳)=۳a+b \\ (I): f(۰)=۱\ ,f(۳)=۵۵ \end{cases} \xrightarrow{\text{مقایسه}} b=۱\ ,\ ۳a+۱=۵۵ \Rightarrow ۳a=۵۴ \Rightarrow a=۱۸$$

بنابراین $۲a+b=۳۶+۱=۳۷$.

تمرین: باقی‌مانده‌ی تقسیم عبارت $f(x)=(x+۱)^۳(x-۱)^۲+x^۴-x^۲-۱$ بر $x^۲-۱$ کدام است؟

۱) $x+۱$ ۲) ۱ ۳) -۱ ۴) $-x-۱$

پاسخ: گزینه‌ی «۳» ـ برای یافتن باقی‌مانده بهت یاد دادم که مقسوم‌علیه رو صفر کنی $x^۲=۱ \Rightarrow x^۲-۱=۰$، و در مقسوم به جای $x^۲$، ۱ بذاری؛ اما اول $f(x)$ رو جمع و جورتر بنویس:

$$f(x)=(x+۱)\overbrace{(x+۱)^۲(x-۱)^۲}^{\text{مزدوج}}+x^۴-x^۲-۱=(x+۱)(x^۲-۱)^۲+x^۴-x^۲-۱=(x+۱)((x)^۲-۱)^۲+(x^۲)^۲-(x^۲)-۱$$

$$\overset{x^۲=۱}{=\!=}(x+۱)(۱-۱)^۲+(۱)^۲-۱-۱=-۱ \Rightarrow R=-۱$$

تمرین: عبارت $a^{۲۸}+b^{۲۸}$ بر کدام‌یک از عبارات زیر بخش‌پذیر است؟

۱) $a+b$ ۲) $a^۲+b^۲$ ۳) $a^۴+b^۴$ ۴) $a^۷+b^۷$

پاسخ: گزینه‌ی «۳»

یادته گفتم که x^n+y^n وقتی به $x+y$ بخش‌پذیره که n فرد باشد. حالا a^n+b^n وقتی به a^m+b^m بخش‌پذیره که n مضرب فرد و m طبیعی باشد. ۲۸ مضرب فرد و طبیعی از ۴ است (مضرب ۷) پس $a^{۲۸}+b^{۲۸}$ بر $a^۴+b^۴$ بخش‌پذیر است.

روش دوم: در گزینه‌ی «۳» داریم:

$$a^۴+b^۴=۰ \Rightarrow a^۴=-b^۴ \Rightarrow a^{۲۸}+b^{۲۸}=(a^۴)^۷+b^{۲۸}=(-b^۴)^۷+b^{۲۸}=-(b^{۲۸})+b^{۲۸}=۰$$

چون توان $(-b^۴)^۷$ فرد است، پس منفی رو پس می‌ده:

$$(-b^۴)^۷=-b^{۲۸}$$

تمرین: عبارت $x^{۲۴}+۱$ بر کدام عبارت زیر همواره بخش‌پذیر است؟

۱) $x^{۱۲}+۱$ ۲) $x^۳+۱$ ۳) $x^۶+۱$ ۴) $x^۸+۱$

پاسخ: گزینه‌ی «۴» ـ $x^{۲۴}+۱$ همان $x^{۲۴}+۱^{۲۴}$ است و مثل سؤال قبلی وقتی به $x^m+۱^m$ بخش‌پذیره که ۲۴ مضرب طبیعی و فرد از m باشد. درگزینه‌ی «۴»، ۲۴ بر ۸ می‌شه ۳ و مضرب فرد از اون هست.

روش دوم: دست تو جیب در گزینه‌ی «۴» داریم:

$$x^۸+۱=۰ \Rightarrow x^۸=-۱$$

$$x^{۲۴}+۱=(x^۸)^۳+۱=(-۱)^۳+۱=-۱+۱=۰$$

پس $x^{۲۴}+۱=۰$ بر $x^۸+۱$ بخش‌پذیره چون باقی‌مانده‌اش صفر شد.

تمرین: خارج‌قسمت $x^۹+۴x^۶+۲x-۱$ بر $x+۱$ را بر $x-۱$ تقسیم کرده‌ایم. باقی‌مانده کدام است؟

۱) -۱ ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینه‌ی «۳» ـ ابتدا باقی‌مانده $P(x)$ رو بر $x+۱$ پیدا می‌کنیم:

$x+1=0 \Rightarrow x=-1 \Rightarrow R=P(-1)=-1+4-2-1=0 \Rightarrow R=0$

حالا رابطه‌ی تقسیم رو می‌نویسیم: $x^9+4x^6+2x-1=(x+1)Q(x) \quad (I)$

حالا باید $Q(x)$ رو بر $x-1$ تقسیم کنیم: $Q(x)=(x-1)Q'(x)+R'$

از ما R' رو می‌خواد پس $Q'(x)$ رو حذف می‌کنیم: $\xrightarrow{x=1} Q(1)=\overbrace{(1-1)Q'(1)}^{0\times Q'(1)=0}+R' \Rightarrow Q(1)=R'$

از قسمت (I)، $Q(1)$ رو حساب می‌کنیم:

$\xrightarrow{x=1} 1+4+2-1=(1+1)Q(1) \Rightarrow 6=2Q(1) \Rightarrow Q(1)=3 \Rightarrow R'=3$

تمرین: اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر $x-1$ و $x-2$ به ترتیب ۳ و ۱- باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم $g(x)=x^2f(x)-2x+1$ بر x^2-3x+2 کدام است؟

۱) $11-9x$ ۲) $7-4x$ ۳) $7+4x$ ۴) $11+9x$

تمرین: در تقسیم $x^{15}+x^3+2x-11$ بر $x+1$، مجموع ضرایب خارج‌قسمت تقسیم کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۱۸ ۳) ۱۶ ۴) ۱۴

تمرین: حاصل خارج‌قسمت تقسیم x^9+1 بر $x+1$ به ازای $x=-1$ کدام است؟

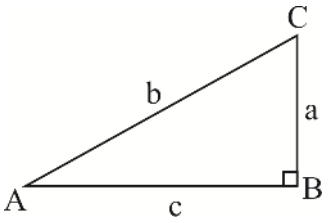
۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۱- ۴) ۹

نسبت‌های مثلثاتی

فرض می‌کنیم A یک زاویهٔ حادهٔ معلوم باشد، اگر مثلث قائم‌الزاویه‌ای را در نظر بگیریم که یکی از زاویه‌های غیرقائم آن A است، حاصل هر یک از کسرهای:

۱) $\frac{\text{طول ضلع مقابل به زاویهٔ A}}{\text{طول ضلع مجاور به زاویهٔ A}}$، ۲) $\frac{\text{طول ضلع مجاور به زاویهٔ A}}{\text{طول ضلع مقابل به زاویهٔ A}}$، ۳) $\frac{\text{طول ضلع مقابل به زاویهٔ A}}{\text{وتر}}$ و ۴) $\frac{\text{طول ضلع مجاور به زاویهٔ A}}{\text{وتر}}$

همواره مقداری ثابت می‌باشند؛ یعنی فقط مقدار زاویهٔ A مهم است و اندازهٔ اضلاع مثلث قائم‌الزاویه‌ای که یک زاویه‌اش برابر $\hat{A}$ است تأثیری در این مقادیر ندارد. به دلیل ثابت بودن این مقادیر برای زاویهٔ A، هر یک از آن‌ها را به ترتیب ۱) تانژانت زاویهٔ A، ۲) کتانژانت زاویهٔ A، ۳) سینوس زاویهٔ A و ۴) کسینوس زاویهٔ A می‌نامیم.

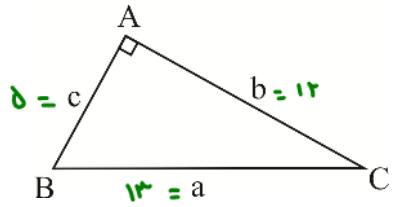


$$\sin\hat{A}=\frac{BC}{AC}=\frac{a}{b} \qquad \cos\hat{A}=\frac{AB}{AC}=\frac{c}{b}$$

$$\tan\hat{A}=\frac{BC}{AB}=\frac{a}{c} \qquad \cot\hat{A}=\frac{AB}{BC}=\frac{c}{a}$$

در یک مثلث قائم‌الزاویه، نسبت‌های سینوس، کسینوس، تانژانت و کتانژانت را نسبت‌های مثلثاتی می‌نامیم.

تمرین: در شکل مقابل $a+c=۱۸$ و $\cos\hat{B}=\frac{۵}{۱۳}$، مقدار $\tan\hat{C}$ کدام است؟



۱) $\frac{۵}{۱۲}$ ۲) $\frac{۱۲}{۵}$

۳) $\frac{۱۳}{۵}$ ۴) $\frac{۵}{۱۳}$

پاسخ: گزینهٔ «۱» ـ با توجه به تعریف کسینوس یک زاویه در مثلث قائم‌الزاویه، می‌توان نوشت:

$$\cos\hat{B}=\frac{c}{a}\Rightarrow\frac{۵}{۱۳}=\frac{c}{a}\xrightarrow{\times a}c=\frac{۵}{۱۳}a$$

از رابطهٔ $a+c=۱۸$ استفاده می‌کنیم:

$$a+c=۱۸\Rightarrow a+\frac{۵}{۱۳}a=۱۸\Rightarrow\frac{۱۸}{۱۳}a=۱۸\Rightarrow a=۱۳\Rightarrow c=۵$$

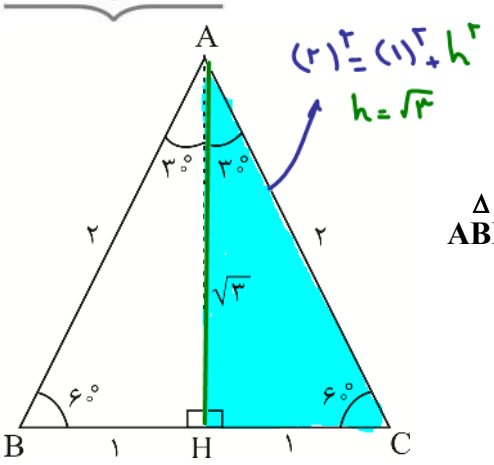
حال به کمک رابطهٔ فیثاغورس اندازهٔ b را محاسبه می‌کنیم:

$$a^۲=b^۲+c^۲\Rightarrow ۱۳^۲=b^۲+۵^۲\Rightarrow b^۲=۱۶۹-۲۵=۱۴۴\xrightarrow{\sqrt{\ }}b=۱۲$$

می‌دانیم که تانژانت یک زاویه، برابر نسبت ضلع مقابل به ضلع مجاور آن زاویه است.

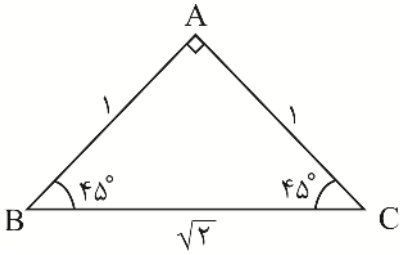
$$\tan\hat{C}=\frac{c}{b}\Rightarrow\tan\hat{C}=\frac{۵}{۱۲}$$

نکته: با در نظر گرفتن مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۲ واحد، می‌توان نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های ۳۰° و ۶۰° را به صورت زیر محاسبه کرد. در مثلث متساوی‌الاضلاع، ارتفاع، میانه، نیمساز و عمودمنصف وارد بر یک ضلع بر هم منطبق‌اند.



$$\overset{\Delta}{ABH}: \begin{cases} \sin ۳۰^\circ = \frac{BH}{AB} = \frac{۱}{۲} \\ \cos ۳۰^\circ = \frac{AH}{AB} = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \\ \tan ۳۰^\circ = \frac{BH}{AH} = \frac{۱}{\sqrt{۳}} = \frac{\sqrt{۳}}{۳} \\ \cot ۳۰^\circ = \frac{AH}{BH} = \sqrt{۳} \end{cases} , \begin{cases} \sin ۶۰^\circ = \frac{AH}{AB} = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \\ \cos ۶۰^\circ = \frac{BH}{AB} = \frac{۱}{۲} \\ \tan ۶۰^\circ = \frac{AH}{BH} = \sqrt{۳} \\ \cot ۶۰^\circ = \frac{BH}{AH} = \frac{۱}{\sqrt{۳}} = \frac{\sqrt{۳}}{۳} \end{cases}$$

با در نظر گرفتن مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین به اضلاع قائمه ۱ واحد می‌توان نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ ۴۵° (به عنوان مثال **B**) را به صورت زیر محاسبه کرد:



$$\sin ۴۵^\circ = \frac{AC}{BC} = \frac{۱}{\sqrt{۲}} = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \qquad \cos ۴۵^\circ = \frac{AB}{BC} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\tan ۴۵^\circ = \frac{AC}{AB} = ۱ \qquad \cot ۴۵^\circ = \frac{AB}{AC} = ۱$$

خلاصهٔ نسبت‌های مثلثاتی زوایای معروف $(۶۰^\circ, ۴۵^\circ, ۳۰^\circ)$

مقدار زاویهٔ θ / مقدار نسبت مثلثاتی	۳۰°	۴۵°	۶۰°
$\sin\theta$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$
$\cos\theta$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$
$\tan\theta$	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۱	$\sqrt{۳}$
$\cot\theta$	$\sqrt{۳}$	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$

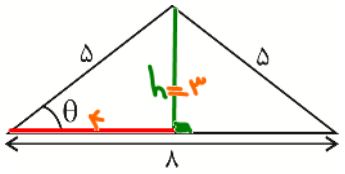
تمرین: مقدار x در تساوی $x\cos ۶۰^\circ = \frac{\sqrt{۳}\tan ۶۰^\circ - ۴\sin ۳۰^\circ}{۲\sqrt{۲}\cos ۴۵^\circ + \cot ۴۵^\circ}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) ۳ ۴) $\frac{۳}{۲}$

پاسخ: گزینهٔ «۲» ـ کافی است مقدار عددی هر یک از نسبت‌های مثلثاتی زوایای داده‌شده را جای‌گذاری کنیم:

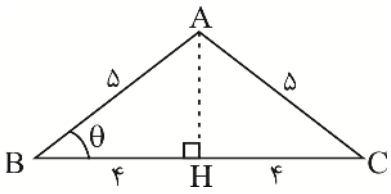
$$x \times \frac{۱}{۲} = \frac{\sqrt{۳} \times \sqrt{۳} - ۴ \times \frac{۱}{۲}}{۲\sqrt{۲} \times \frac{\sqrt{۲}}{۲} + ۱} \Rightarrow \frac{x}{۲} = \frac{۳-۲}{۲+۱} = \frac{۱}{۳} \xrightarrow{\times ۲} x = \frac{۲}{۳}$$

تمرین: در مثلث مقابل، مقدار $2\cos\theta+\sin\theta$ کدام است؟



۱) $\frac{۸}{۵}$ ۲) $\frac{۹}{۵}$ ۳) $\frac{۱۱}{۵}$ ۴) $\frac{۱۲}{۵}$

پاسخ: گزینهٔ «۳» ـ مثلث رسم‌شده، متساوی‌الساقین است. پس ارتفاع، میانه و نیمساز وارد بر قاعده بر هم منطبق‌اند. ارتفاع وارد بر قاعده را رسم می‌کنیم:



$$\overset{\Delta}{ABH}: AB^۲=AH^۲+BH^۲ \Rightarrow ۲۵=AH^۲+۱۶ \Rightarrow AH^۲=۹ \xrightarrow{\sqrt{}} AH=۳$$

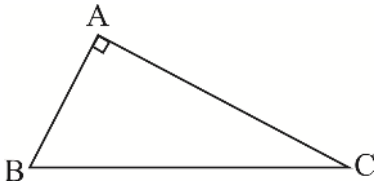
$$\sin\theta=\frac{AH}{AB}=\frac{۳}{۵}\ ,\ \cos\theta=\frac{BH}{AB}=\frac{۴}{۵}$$

در نتیجه مقدار خواسته‌شده برابر است با:

$$۲\cos\theta+\sin\theta=\frac{۸}{۵}+\frac{۳}{۵}=\frac{۱۱}{۵}$$

ارتباط بین نسبت‌های مثلثاتی زوایای متمم

اگر دو زاویه متمم هم باشند (مجموعشان ۹۰° باشد)، آن‌گاه سینوس یکی با کسینوس دیگری برابر است و برعکس، تانژانت یکی با کتانژانت دیگری برابر است و برعکس. در شکل زیر داریم:



$$\hat{B}+\hat{C}=۹۰^\circ$$

$$\sin\hat{B}=\frac{AC}{BC}=\cos\hat{C}\ ,\ \sin\hat{C}=\frac{AB}{BC}=\cos\hat{B}$$

$$\tan\hat{B}=\frac{AC}{AB}=\cot\hat{C}\ ,\ \tan\hat{C}=\frac{AB}{AC}=\cot\hat{B}$$

تمرین: حاصل عبارت $P=\frac{۵\sin۲^\circ\times\cot۸۳^\circ\times\tan۷۶^\circ}{۸\cot۱۴^\circ\times\cos۸۸^\circ\times\tan۷^\circ}$ کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۸}$ ۲) $-\frac{۵}{۸}$ ۳) $\frac{۸}{۵}$ ۴) $-\frac{۸}{۵}$

پاسخ: گزینهٔ «۱» ـ از روابط نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های متمم استفاده می‌کنیم:

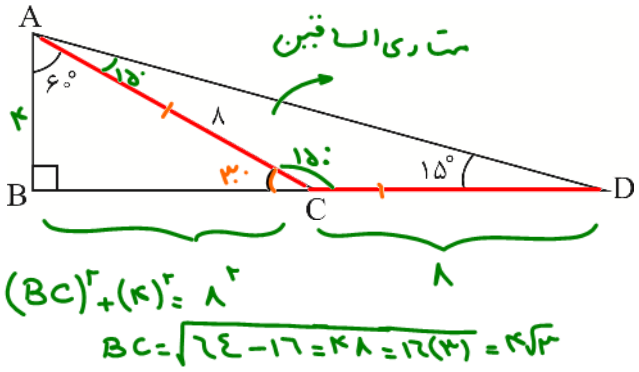
$$۷۶^\circ+۱۴^\circ=۹۰^\circ \Rightarrow \tan۷۶^\circ=\cot۱۴^\circ$$

$$۸۳^\circ+۷^\circ=۹۰^\circ \Rightarrow \cot۸۳^\circ=\tan۷^\circ$$

$$۲^\circ+۸۸^\circ=۹۰^\circ \Rightarrow \sin۲^\circ=\cos۸۸^\circ$$

$$P=\frac{۵\sin۲^\circ\times\cot۸۳^\circ\times\tan۷۶^\circ}{۸\tan۷۶^\circ\times\sin۲^\circ\times\cot۸۳^\circ}=\frac{۵}{۸}$$

تمرین: در شکل مقابل اندازهٔ پاره‌خط **BD** برابر است با:



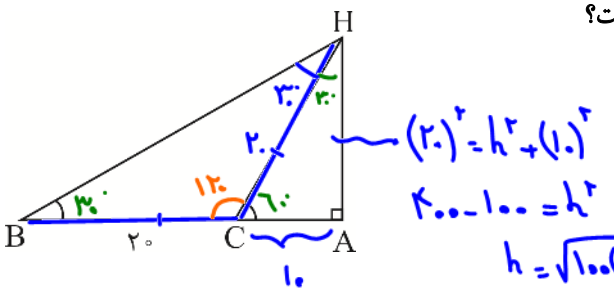
۱) $۴\sqrt{۳}+۴$

۲) $۴\sqrt{۳}+۸$

۳) $۴\sqrt{۳}+۱۲$

۴) ۱۶

تمرین: در شکل مقابل اگر $\hat{B}=۳۰^\circ$ و $\hat{C}=۶۰^\circ$، اندازهٔ **AH** کدام است؟



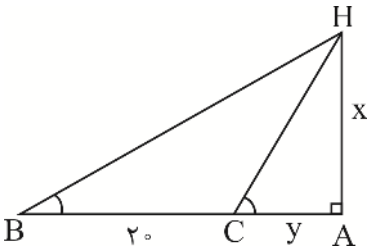
۱) ۱۰

۲) $۲۰\sqrt{۳}$

۳) $۱۰\sqrt{۳}$

۴) ۲۰

پاسخ: گزینهٔ «۳» ـ اگر فرض کنیم $AH=x$ و $AC=y$، آن‌گاه در شکل مقابل داریم:



$$\begin{cases}\tan\hat{B}=\dfrac{AH}{AB}=\dfrac{x}{۲۰+y} \Rightarrow \tan ۳۰^\circ=\dfrac{x}{y+۲۰}=\dfrac{\sqrt{۳}}{۳} \quad (*)\\ \tan\hat{C}=\dfrac{AH}{AC} \Rightarrow \tan ۶۰^\circ=\dfrac{x}{y} \Rightarrow \sqrt{۳}=\dfrac{x}{y}\end{cases}$$

$$x=y\sqrt{۳} \xrightarrow{(*)} \frac{y\sqrt{۳}}{y+۲۰}=\frac{\sqrt{۳}}{۳} \Rightarrow ۳y=y+۲۰ \Rightarrow y=۱۰ \Rightarrow x=۱۰\sqrt{۳} \Rightarrow AH=۱۰\sqrt{۳}$$

تمرین: در مثلث قائم‌الزاویهٔ **ABC** که $\hat{A}=۹۰^\circ$، حاصل $\dfrac{۱}{۱+\tan\hat{B}}+\dfrac{۱}{۱+\tan\hat{C}}$ کدام است؟

۱) ۱

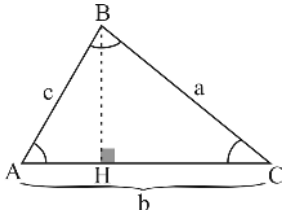
۲) $\frac{۱}{۲}$

۳) ۲

۴) ۴

حل مثلث و کاربردهای آن

به شکل روبه‌رو و اطلاعات زیر در مورد مثلث توجه کنید.

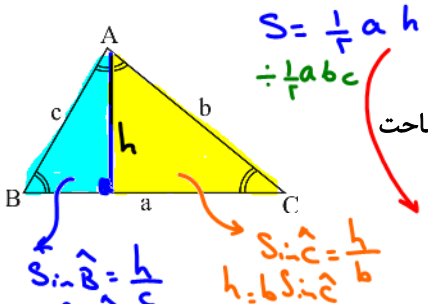


۱) $A+B+C=۱۸۰^\circ$

۲) محیط $=a+b+c$

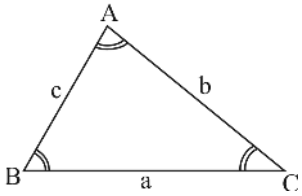
منظور از حل مثلث، یافتن همه‌ی زوایا و اضلاع آن است.

۱- مساحت مثلث: اگر دو ضلع یک مثلث و زاویه‌ی بین آن‌ها را داشته باشیم، آن‌گاه مساحت مثلث از رابطه‌ی زیر محاسبه می‌شود:



$$\text{مساحت}=\frac{۱}{۲}ab\sin C=\frac{۱}{۲}bc\sin A=\frac{۱}{۲}ac\sin B$$

۲- قانون سینوس‌ها: می‌دانیم مساحت یک مثلث برابر است با نصف حاصل‌ضرب دو ضلع در سینوس زاویه‌ی بین آن‌ها. پس:



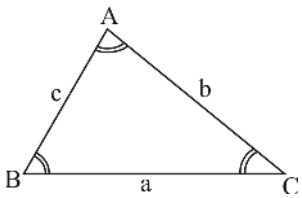
$$S=\frac{۱}{۲}ab\sin C=\frac{۱}{۲}ac\sin B=\frac{۱}{۲}bc\sin A$$

با تقسیم طرفین تساوی‌ها بر $\frac{۱}{۲}abc$ و معکوس کردن آن‌ها، داریم:

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$ (قانون سینوس‌ها)

توجه: قانون سینوس‌ها، برای حل مثلث‌هایی که در آن یک ضلع و زاویه‌ی روبه‌روی آن را داریم، بسیار سودمند خواهد بود.

۳- قانون کسینوس‌ها: وقتی دو ضلع یک مثلث و زاویه‌ی بین آن‌ها را داشته باشیم، قانون سینوس‌ها برای یافتن اضلاع و زوایا قابل استفاده نیست. در این حالت از «قانون کسینوس‌ها» استفاده می‌کنیم. (تعمیم فیثاغورس)

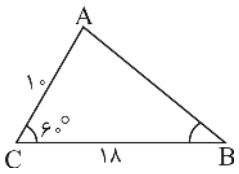


۱) $a^۲=b^۲+c^۲-۲bc\cos A$

۲) $b^۲=a^۲+c^۲-۲ac\cos B$

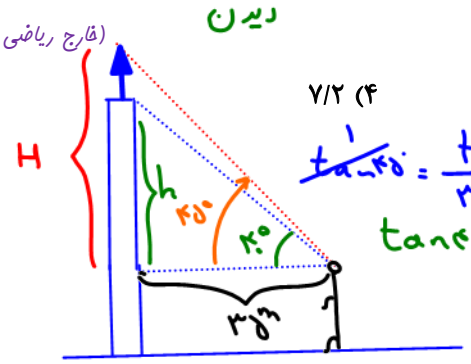
۳) $c^۲=a^۲+b^۲-۲ab\cos C$

تمرین: در شکل روبه‌رو، طول AB را بیابید.



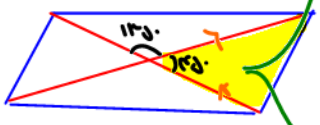
پاسخ: $AB^2 = ۱۰^2 + ۱۸^2 - ۲(۱۰)(۱۸)\cos ۶۰^\circ = ۱۰۰ + ۳۲۴ - ۳۶۰(\frac{۱}{۲}) = ۲۴۴ \Rightarrow AB = \sqrt{۲۴۴}$

تمرین: ناظری به فاصله‌ی ۳۵ متر از پای ستونی که بر روی آن مجسمه‌ای قرار دارد، ایستاده است. زاویه‌ی رؤیت انتها و ابتدای مجسمه با سطح افق ۴۵° و ۴۰° است. ارتفاع مجسمه کدام است؟ $(\tan ۴۰^\circ = ۰/۸)$ (خارج ریاضی ۹۴)



۱) ۶ ۲) ۶/۴ ۳) ۷ ۴) ۷/۲

تمرین: در متوازی‌الاضلاعی اندازه‌ی دو قطر ۱۲ و ۸ واحد و زاویه‌ی بین دو قطر ۱۳۵ درجه است. مساحت متوازی‌الاضلاع چند برابر $\sqrt{۲}$ است؟ (تجربی ۹۲ و تجربی خارج ۹۶)



۱) ۱۸ ۲) ۲۴ ۳) ۳۲ ۴) ۳۶

تمرین: مساحت مثلثی با دو ضلع ۱۶ و ۹ واحد برابر $۲۴\sqrt{۵}$ واحد مربع است. بزرگ‌ترین ضلع این مثلث کدام است؟ (ریاضی ۹۴)

۱) ۲۱ ۲) ۲۲ ۳) ۲۳ ۴) ۲۴

تمرین: مساحت مثلث به اضلاع ۷، ۹ و ۱۲ واحد کدام است؟ (ریاضی ۹۳)

۱) $۱۵\sqrt{۲}$ ۲) $۱۴\sqrt{۳}$ ۳) $۱۲\sqrt{۵}$ ۴) $۱۴\sqrt{۵}$

قاعده هرون
مساحت مثلث با داشتن طول ۳ ضلع

نصف محیط $p=\frac{a+b+c}{۲}=\frac{۱۲+۹+۷}{۲}=۱۴$

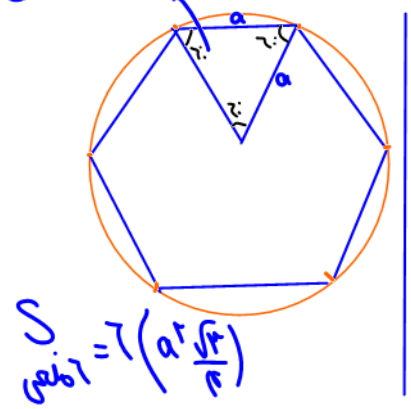
$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\sqrt{۱۴(۱۴-۱۲)(۱۴-۹)(۱۴-۷)}=۱۴\sqrt{۵}$ گزینه ۴

حواستون به شش‌ضلعی منتظم هم باشه.

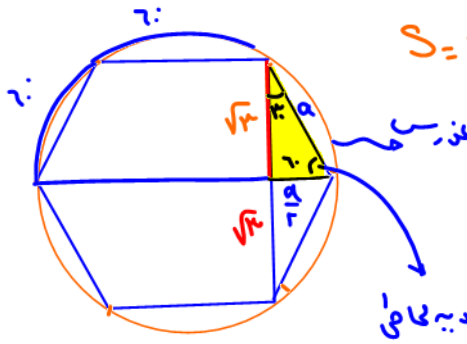
تمرین: اگر قطر کوچک یک شش‌ضلعی منتظم برابر با $۲\sqrt{۳}$ باشد، مساحت شش‌ضلعی منتظم کدام است؟ (قلم‌چی ۹۷)

۱) ۶ ۲) $۶\sqrt{۳}$ ۳) ۱۲ ۴) $۱۲\sqrt{۳}$

مساحت یک مثلث متساوی‌الاضلاع $=\frac{a^۲\sqrt{۳}}{۴}$



$S_{\text{شش‌ضلعی}}=۶\left(a^۲\frac{\sqrt{۳}}{۴}\right)$



$S=۶\left(a^۲\frac{\sqrt{۳}}{۴}\right)=۶\sqrt{۳}$

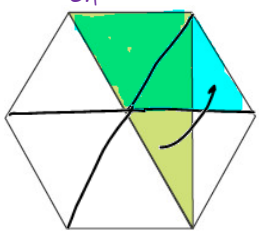
مثلث قائم‌الزاویه $a^۲=\left(\frac{a}{۲}\right)^۲+\left(\sqrt{۳}\right)^۲$

$۳\frac{a^۲}{۴}=۳$

$a^۲=۴$

زاویه محاطی نصف کمان روبه‌روست

تمرین: مساحت شش‌ضلعی منتظم موجود در شکل زیر $۱۸\sqrt{۳}$ است. مساحت ناحیهٔ رنگی چه‌قدر است؟ (قلم‌چی ۹۷ و ۹۹)



۱) ۱۲
۲) ۱۸
۳) $۶\sqrt{۳}$ ✓
۴) $۹\sqrt{۳}$

$۶\triangle=۱۸\sqrt{۳}$

$\triangle=۳\sqrt{۳}$

$\triangle$ دوتا $=۲(۳\sqrt{۳})=۶\sqrt{۳}$

Homework (1)

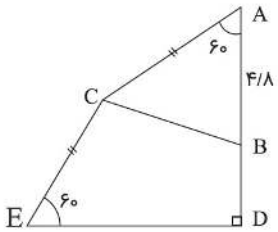
منبع:

۱ ناظری به فاصلهٔ ۳۵ متری از پای ستونی که بر روی آن مجسمه‌ای قرار دارد، ایستاده است. زاویهٔ دید بالا (از D به A) و پایین (از C به A) مجسمه با سطح افق 45° و 40° است. اگر $\tan 40^\circ = 0/8$، ارتفاع مجسمه کدام است؟

۱) ۶
۲) ۷
۳) ۶/۴
۴) ۷/۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۴

۲ در شکل زیر، مساحت مثلث ABC برابر $7/2\sqrt{3}$ است. فاصلهٔ D از C کدام است؟



۱) $6\sqrt{6}$
۲) $3\sqrt{6}$
۳) $2\sqrt{2}$
۴) $\sqrt{2}$

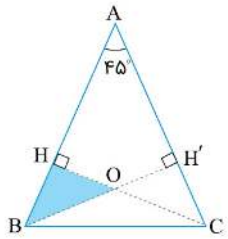
کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۳ اگر مساحت یک شش ضلعی منتظم برابر $9\sqrt{3}$ باشد، اندازهٔ قطر کوچک آن کدام است؟

۱) $2\sqrt{6}$
۲) $3\sqrt{2}$
۳) $2\sqrt{3}$
۴) ۳

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

۴ در شکل زیر مثلث ABC متساوی‌الساقین و طول ساق AB برابر ۸ واحد است. مساحت مثلث OHB، کدام است؟



۱) $\frac{۶}{۲+\sqrt{۳}}$

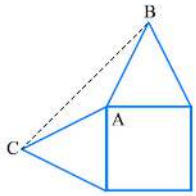
۲) $\frac{۸}{۲+\sqrt{۳}}$

۳) $\frac{۱۲}{۳+۲\sqrt{۲}}$

۴) $\frac{۱۶}{۳+۲\sqrt{۲}}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

۵ بر روی دو ضلع مجاور مربعی به ضلع ۲ واحد، مثلث‌های متساوی‌الاضلاع ساخته شده است. مساحت مثلث ABC، چند واحد مربع است؟



۱) $\sqrt{۳}-۱$

۲) $\frac{۱}{۲}\sqrt{۳}$

۳) ۱

۴) $\sqrt{۳}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۶

۶ در ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین، با زاویهٔ ۶۰ درجه، قاعدهٔ کوچک‌تر برابر ساق آن است. اگر محیط این ذوزنقه ۳۰ واحد باشد، مساحت آن کدام است؟

۱) $۲۴\sqrt{۳}$

۲) $۲۷\sqrt{۳}$

۳) ۴۸

۴) ۵۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

۷ اندازهٔ دو قطر از متوازی‌الاضلاع ۱۲ و $۸\sqrt{۳}$ واحد است. این دو قطر با زاویهٔ ۶۰ درجه متقاطع هستند. مساحت این متوازی‌الاضلاع کدام است؟

۱) ۴۸

۲) ۵۴

۳) ۶۴

۴) ۷۲

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۶

۸ در داخل یک مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع واحد، بزرگ‌ترین مربع ممکن را می‌سازیم، اندازهٔ ضلع مربع کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۳}-۳$

۲) $\sqrt{۳}-۱$

۳) $\sqrt{۳}-\frac{۱}{۲}$

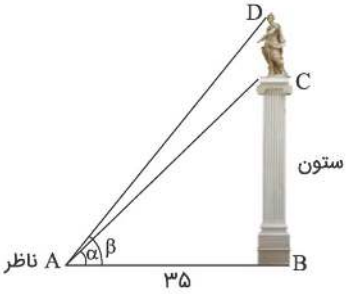
۴) $۲(\sqrt{۳}-۱)$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۲

پاسخ Homework (1)

۱ گزینه ۲

ابتدا مسئله را به مدل هندسی تبدیل می‌کنیم:



$$\alpha = ۴۰^\circ \ , \ \beta = ۴۵^\circ$$

$$\tan\beta = \frac{BD}{۳۵} \xrightarrow{\beta=۴۵^\circ} BD = ۳۵ \times \tan ۴۵^\circ = ۳۵$$

$$\tan\alpha = \frac{BC}{۳۵} \xrightarrow{\alpha=۴۰^\circ} BC = ۳۵ \times \tan ۴۰^\circ = \frac{۸}{۱۰} \times ۳۵ = ۲۸$$

بنابراین:

$$\text{ارتفاع مجسمه} : CD = BD - BC = ۳۵ - ۲۸ = ۷$$

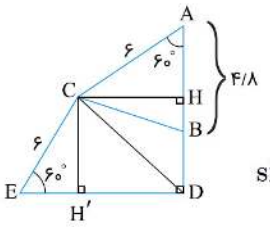
کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۴

۲ گزینه ۲

$$\frac{۱}{۲} \times AC \times AB \times \sin ۶۰^\circ = ۷/۲ \times \sqrt{۳}$$

$$\frac{۱}{۲} \times AC \times ۴/۸ \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} = ۷/۲ \times \sqrt{۳} \Rightarrow AC = ۶ \Rightarrow EC = ۶$$

در مثلث AHC داریم:



$$\sin ۶۰^\circ = \frac{CH}{۶} \Rightarrow CH = ۳\sqrt{۳}$$

دو مثلث CEH' و ACH هم‌نهشت‌اند، پس درنتیجه $CH' = ۳\sqrt{۳}$. بنابراین چهارضلعی $HCH'D$ مربع است و داریم:

$$DC = ۳\sqrt{۳} \times \sqrt{۲} = ۳\sqrt{۶}$$

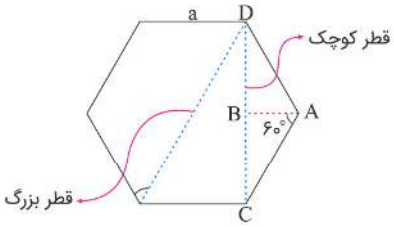
کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۳ گزینه ۲

شش ضلعی منتظم به ضلع a از شش مثلث متساوی‌الاضلاع به طول ضلع a تشکیل شده است، پس مساحت آن برابر است با:

$$S = ۶ \times \frac{۱}{۲} \times a \times a \times \sin ۶۰^\circ = \frac{۳\sqrt{۳}}{۲} a^۲$$

$$S = \frac{۳\sqrt{۳}}{۲} a^۲ = ۹\sqrt{۳} \Rightarrow a^۲ = ۶ \Rightarrow a = \sqrt{۶}$$



با استفاده از تقارن داریم:

$$DC = ۲BC = ۲AC \sin ۶۰^\circ = ۲\sqrt{۶} \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \sqrt{۱۸} = ۳\sqrt{۲}$$

نکته: در شش ضلعی منتظم به طول ضلع a داریم:

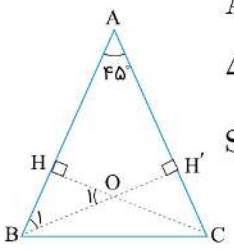
الف) طول قطر کوچک آن $a\sqrt{۳}$ است.

ب) طول قطر بزرگ آن $۲a$ است.

پ) مساحت آن $\frac{۳\sqrt{۳}}{۲} a^۲$ است.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

۴ گزینه ۴



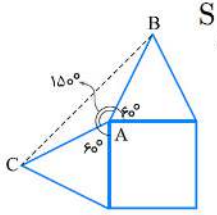
$$\hat{A} = ۴۵^\circ \Rightarrow \hat{O}_۱ = \hat{B}_۱ = ۴۵$$

$$\Delta AHC : AH = \frac{AC}{\sqrt{۲}} = \frac{۸}{\sqrt{۲}} = ۴\sqrt{۲} \Rightarrow HB = HO = ۸ - ۴\sqrt{۲}$$

$$S_{OHB} = \frac{۱}{۲}(۸ - ۴\sqrt{۲})^۲ = \frac{۱}{۲} \times ۱۶(۲ - \sqrt{۲})^۲ = ۸(۶ - ۴\sqrt{۲}) = ۱۶(۳ - ۲\sqrt{۲}) = \frac{۱۶}{۳ + ۲\sqrt{۲}}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

۵ گزینه ۳



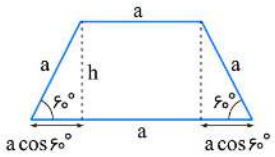
$$S_{\overset{\Delta}{ABC}} = \frac{۱}{۲} \times ۲ \times ۲ \times \sin ۱۵۰^\circ = \frac{۱}{۲} \times ۲ \times ۲ \times \sin ۳۰^\circ = \frac{۱}{۲} \times ۲ \times ۲ \times \frac{۱}{۲} = ۱$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۶

۶ گزینه ۲

$$(\text{محیط})\ P = ۳a + ۲a\cos ۶۰^\circ + a \Rightarrow ۳۰ = ۵a \Rightarrow a = ۶$$

$$S = \frac{(a+۲a)h}{۲} = \frac{۳a \times a\sin ۶۰^\circ}{۲} \xrightarrow{a=۶} S = \frac{۳\sqrt{۳} \times ۶^۲}{۴} = ۲۷\sqrt{۳}$$



کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

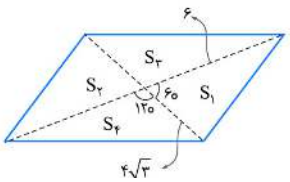
۷ گزینه ۴

نکته: در مثلث ABC با اضلاع a، b و c، اگر زاویهٔ بین اضلاع a و b برابر با α باشد، مساحت مثلث برابر است با:

$$S = \frac{۱}{۲} \times a \times b \times \sin\alpha$$

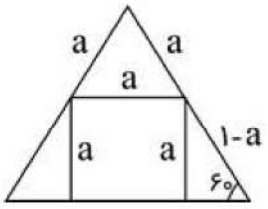
بااستفاده از نکتهٔ بالا داریم:

$$S_۱ = S_۲ \Rightarrow \frac{۱}{۲} \times ۶ \times ۴\sqrt{۳} \times \sin ۶۰^\circ = ۱۸$$
$$S_۳ = S_۴ \Rightarrow \frac{۱}{۲} \times ۶ \times ۴\sqrt{۳} \times \sin(۱۲۰^\circ) = ۱۸$$
$$S_۱ + S_۲ + S_۳ + S_۴ = ۴ \times ۱۸ = ۷۲$$



کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۶

۸ گزینه ۱

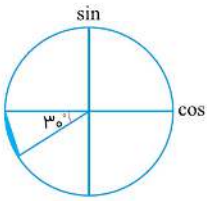


$$\sin ۶۰^\circ = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow \frac{a}{۱-a} = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow ۲a = \sqrt{۳} - \sqrt{۳}a \Rightarrow a = \frac{\sqrt{۳}}{۲+\sqrt{۳}} \Rightarrow a = ۲\sqrt{۳} - ۳$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۲

Homework (2)

۱ در دایرهٔ زیر، به شعاع ۳ واحد، مساحت ناحیهٔ رنگی کدام است؟



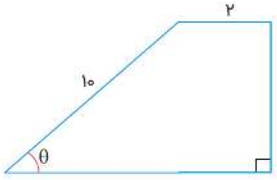
۱) $\frac{۳\pi}{۴}$

۲) $\frac{۳\pi}{۴} - ۱$

۳) $\frac{۳}{۴}(\pi - ۳)$

۴) $\frac{۹}{۴}$

۲ اگر $\sin\theta = \frac{۳}{۵}$ باشد، آنگاه مساحت ذوزنقهٔ زیر کدام است؟



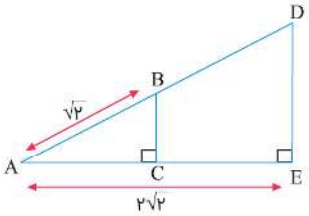
۱) ۱۲

۲) ۲۴

۳) ۳۶

۴) ۱۸

۳ در شکل زیر، X کدام است؟ $(X = AC \times AD)$



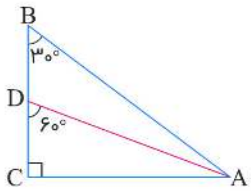
۱) ۲

۲) ۱۶

۳) ۸

۴) ۴

۴ در مثلث ABC شکل زیر، نسبت $\frac{AD}{BC}$ کدام است؟



۱) $\frac{۴\sqrt{۳}}{۳}$

۲) $\frac{۴}{۳}$

۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۴}$

۴) $\frac{۲}{۳}$

۵ به ازای کدام مقدار B تساوی $\frac{۱}{\cos^۴ x} + \frac{B}{\cos^۲ x} = \tan^۴ x - ۱$ برقرار است؟

۱) ۲

۲) ۱

۳) -۱

۴) -۲

پاسخ Homework (2)

۱ گزینه ۳

با محاسبهٔ مساحت این بخش از دایره و کم کردن مساحت مثلث از آن مساحت قسمت رنگی به دست می‌آید:

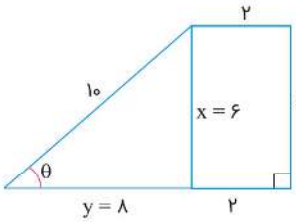
$$\frac{۳۶۰^\circ}{۳۰^\circ} = ۱۲ \Rightarrow \frac{S_{\text{دایره}}}{۱۲} = S_{\text{موردنظر}} = \frac{\pi r^۲}{۱۲} = \frac{۹\pi}{۱۲} = \frac{۳\pi}{۴}$$

$$S_{\text{مثلث}} = \frac{۱}{۲} \times ۳ \times ۳ \times \sin ۳۰ = \frac{۱}{۲} \times ۳ \times ۳ \times \frac{۱}{۲} = \frac{۹}{۴}$$

$$S_{\text{قسمت رنگی}} = \frac{۳\pi}{۴} - \frac{۹}{۴} = \frac{۳}{۴}(\pi - ۳)$$

۲ گزینه ۳

با تقسیم شکل به یک مثلث و یک مستطیل داریم:



$$\sin\theta = \frac{x}{۱۰} = \frac{۳}{۵} \Rightarrow x = ۶$$

$$x^۲ + y^۲ = ۱۰^۲ \Rightarrow ۳۶ + y^۲ = ۱۰۰ \Rightarrow y^۲ = ۶۴ \Rightarrow y = ۸$$

$$S_{\text{ذوزنقه}} = S_{\text{مثلث}} + S_{\text{مستطیل}}$$

$$\Rightarrow S_{\text{ذوزنقه}} = \frac{۱}{۲} \times ۶ \times ۸ + ۲ \times ۶ = ۲۴ + ۱۲ = ۳۶$$

۳ گزینه ۴

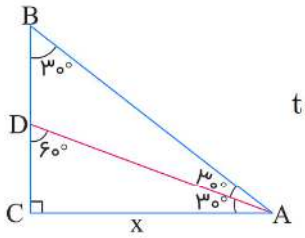
$$\cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{AE}{AD} \Rightarrow \frac{AC}{\sqrt{۲}} = \frac{۲\sqrt{۲}}{AD}$$

$$\Rightarrow AD \times AC = ۲\sqrt{۲} \times \sqrt{۲} = ۴$$

۴ گزینه ۴

طول پاره‌خط AC را x در نظر می‌گیریم:

در مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$:



$$\tan ۶۰^\circ = \frac{BC}{AC} = \sqrt{۳} \Rightarrow BC = x\sqrt{۳}$$

در مثلث $\overset{\Delta}{ACD}$:

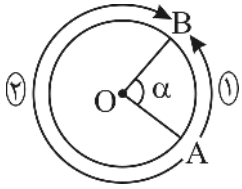
$$\sin ۶۰^\circ = \frac{AC}{AD} = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow AD = \frac{۲\sqrt{۳}}{۳}x \Rightarrow \frac{AD}{BC} = \frac{\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}x}{x\sqrt{۳}} = \frac{۲}{۳}$$

۵ گزینه ۴

به جای xها یک زاویهٔ دلخواه قرار می‌دهیم.

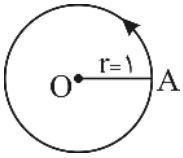
$$x = ۰ \Rightarrow ۱ + B = -۱ \Rightarrow B = -۲$$

تعریف جهت مثلثاتی



شکل مقابل را در نظر بگیرید. اگر بخواهیم از نقطه‌ی A به B برویم، یکی از دو مسیر ۱ یا ۲ را می‌توانیم انتخاب کنیم. در مثلثات جهت شماره‌ی ۱ را که خلاف حرکت عقربه‌های ساعت است (پادساعتگرد)، جهت مثبت و جهت شماره‌ی ۲ را که موافق حرکت عقربه‌های ساعت است (ساعتگرد)، جهت منفی می‌گویند.

تعریف دایره‌ی مثلثاتی



دایره‌ای است به شعاع واحد که در آن، با توجه به شکل، نقطه‌ی A به عنوان مبدأ کمان‌ها در نظر گرفته می‌شود و جهت آن مثبت می‌باشد (پادساعتگرد).

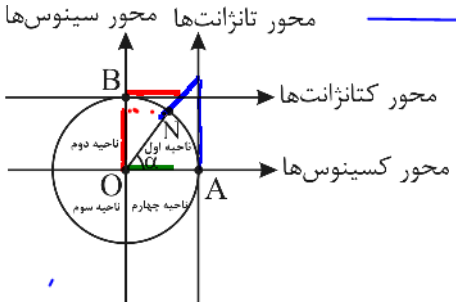
محورهای مثلثاتی

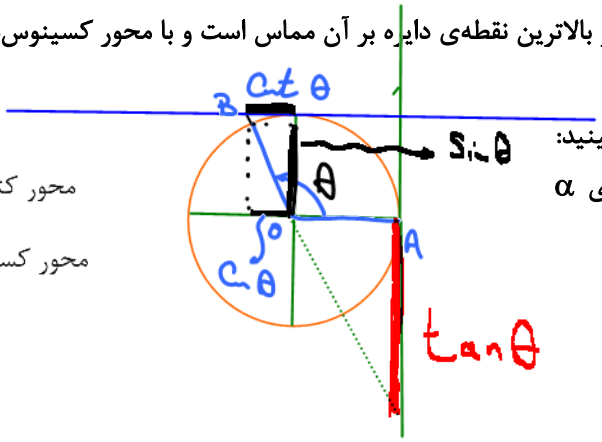
۱- محور کسینوس‌ها: محوری که از مرکز دایره‌ی مثلثاتی و مبدأ کمان‌ها (نقطه‌ی A) می‌گذرد.

۲- محور سینوس‌ها: محوری که در مرکز دایره‌ی مثلثاتی بر محور کسینوس‌ها عمود است.

۳- محور تانژانت‌ها: محوری که در مبدأ کمان‌ها (نقطه‌ی A) بر دایره‌ی مثلثاتی مماس است و موازی محور سینوس‌هاست.

۴- محور کتانژانت‌ها: محوری است که در بالاترین نقطه‌ی دایره بر آن مماس است و با محور کسینوس‌ها موازی و بر محور تانژانت‌ها و سینوس‌ها عمود است.





این چهار محور مثلثاتی را در روبه‌رو می‌بینید:

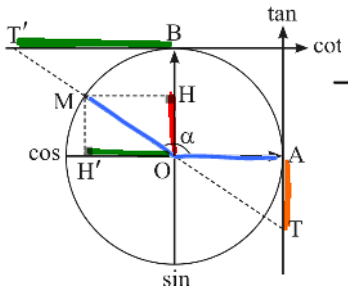
نقطه‌ی N : انتهای کمان روبه‌رو به زاویه‌ی α

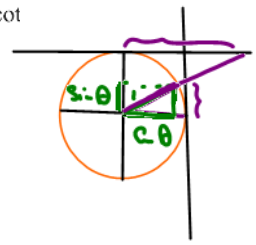
نقطه‌ی B : مبدأ محور cot

نقطه‌ی A : مبدأ محور tan

نقطه‌ی O : مبدأ محورهای sin و cos

روش به دست آوردن مقدار یک نسبت مثلثاتی از روی دایره‌ی مثلثاتی





فرض کنید، مطابق شکل روبه‌رو زاویه‌ای به اندازه‌ی α انتخاب کرده‌ایم.

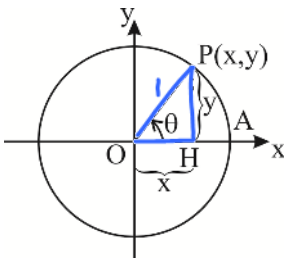
در این صورت از انتهای کمان بر محور sin و cos عمود می‌کنیم. داریم:

$$OH = \sin\alpha \quad , \quad OH' = -\cos\alpha$$

حال با امتداد OM به گونه‌ای که محور tan و cot قطع شود، داریم:

$$AT = -\tan\alpha \quad , \quad BT' = -\cot\alpha$$

در دایره‌ی مثلثاتی، زاویه‌ی دلخواه θ را در نظر می‌گیریم. با توجه به مثلث قائم‌الزاویه، مختصات نقطه‌ی $P(x,y)$ در این دایره برحسب زاویه‌ی θ برابر است با:



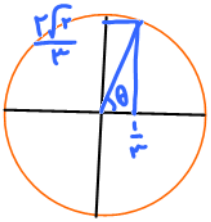
$$P(x,y) = P(\cos\theta, \sin\theta) \Rightarrow \begin{cases} x = \cos\theta \\ y = \sin\theta \end{cases}$$

$\tan\theta = \frac{y}{x}$

$x^2 + y^2 = 1$

تمرین: اگر زاویه‌ی θ، دایره‌ی مثلثاتی را در نقطه‌ی $P(\frac{۱}{۳},\frac{۲\sqrt{۲}}{۳})$ قطع کند، نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ی θ را بیابید.

پاسخ:



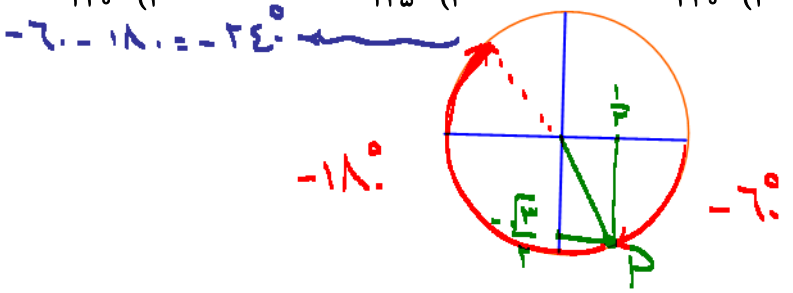
$$P(\frac{۱}{۳},\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}) = P(\cos\theta,\sin\theta)$$

پس: $x=\cos\theta=\frac{۱}{۳}\ ,\ y=\sin\theta=\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}$

از طرفی: $\tan\theta=\frac{y}{x}=۲\sqrt{۲}\ ,\ \cot\theta=\frac{x}{y}=\frac{۱}{۲\sqrt{۲}}$

تمرین: نقطه‌ی $P(\frac{۱}{۲},\frac{-\sqrt{۳}}{۲})$ روی دایره‌ی مثلثاتی را ۱۸۰° در جهت حرکت عقربه‌های ساعت حول مبدأ مختصات دوران می‌دهیم. نقطه‌ی جدید چه زاویه‌ای بر روی دایره‌ی مثلثاتی به وجود می‌آورد؟

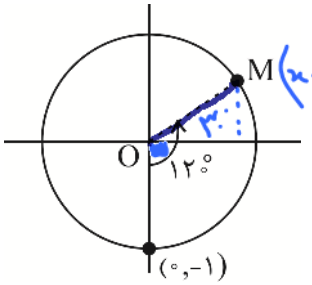
۱) -۲۴۰° ✓ ۲) ۲۴۰° ۳) ۱۳۵° ۴) -۱۲۰°



تمرین: نقطه‌ی $(۰,-۱)$ روی دایره‌ی مثلثاتی را حول مبدأ مختصات به اندازه‌ی ۱۲۰° در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت دوران می‌دهیم. مختصات نقطه‌ی جدید کدام است؟

۱) $(\frac{\sqrt{۳}}{۲},\frac{۱}{۲})$ ✓ ۲) $(\frac{-\sqrt{۳}}{۲},\frac{-۱}{۲})$ ۳) $(\frac{-\sqrt{۲}}{۲},\frac{۱}{۲})$ ۴) $(\frac{\sqrt{۳}}{۲},\frac{-۱}{۲})$

پاسخ: گزینه‌ی «۱» ـ نقطه‌ی $(۰,-۱)$ روی دایره‌ی مثلثاتی مطابق با شکل زیر است. اگر آن را ۱۲۰° در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت دوران دهیم، به نقطه‌ی M در ناحیه‌ی اول می‌رسیم.

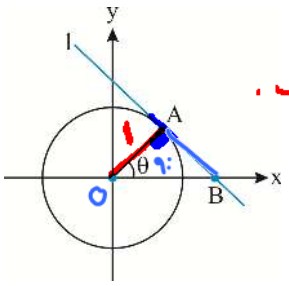


OM با محور طول‌ها، زاویه‌ی ۳۰° می‌سازد، بنابراین:

$$\begin{cases} x_M=\cos\theta \Rightarrow x_M=\cos۳۰^\circ=\frac{\sqrt{۳}}{۲} \\ y_M=\sin\theta \Rightarrow y_M=\sin۳۰^\circ=\frac{۱}{۲} \end{cases}$$

لذا $M(\frac{\sqrt{۳}}{۲},\frac{۱}{۲})$.

تمرین: در دایرهٔ مثلثاتی زیر، اندازهٔ AB کدام است؟ (خط l بر دایره مماس است.)



نکته: در نقطه تماس خط مماس بر شعاع محود است.

$\tan\theta = \frac{\text{ضلع مقابل} = AB}{\text{شعاع دایره} = \text{مجاور} = 1} = AB$

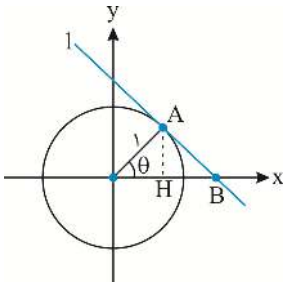
۱) $\cos\theta$

۲) $\frac{1}{\cos\theta}$

۳) $\tan\theta$ ✓

۴) $\frac{1}{\tan\theta}$

پاسخ: گزینهٔ «۳» ـ خط مماس بر دایره بر شعاع عمود است. حالا اگر از نقطهٔ A عمود بر محور طول‌ها رسم کنیم، طبق روباط طولی در مثلث قائم‌الزاویه داریم:



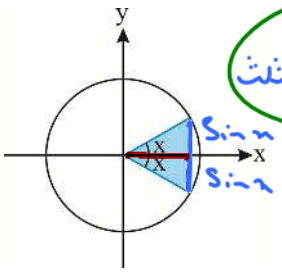
$$(1)^2 = OH \times OB \xrightarrow{OH=\cos\theta} 1 = \cos\theta \times OB \Rightarrow OB = \frac{1}{\cos\theta}$$

پس طبق قضیهٔ فیثاغورس در مثلث OAB می‌توان نوشت:

$$OB^2 = (1)^2 + AB^2 \Rightarrow \frac{1}{\cos^2\theta} = 1 + AB^2$$

$$\Rightarrow AB^2 = \frac{1}{\cos^2\theta} - 1 = \frac{1-\cos^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} = \tan^2\theta \Rightarrow AB = \tan\theta$$

تمرین: در دایرهٔ مثلثاتی زیر اگر مساحت ناحیهٔ رنگی برابر با A باشد، $A \times (\tan x + \cot x)$ کدام است؟



$A_{\text{مثلث}} = \frac{1}{2}(\text{قاعده} = \sin x)(\text{ارتفاع} = \cos x)$

$(A = \sin x \cos x)\left(\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x}\right) = \sin^2 x + \cos^2 x = 1$

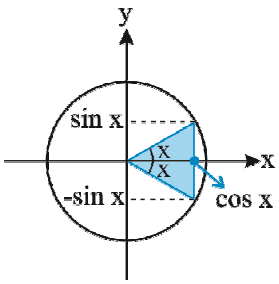
۱) $\frac{1}{2}$

۲) $\frac{1}{3}$

۳) $\frac{1}{4}$

۴) ۱ ✓

پاسخ: گزینهٔ «۴» ـ با توجه به شکل زیر، مساحت ناحیهٔ رنگی، مساحت یک مثلث با ارتفاع $\cos x$ و قاعدهٔ $2\sin x$ است. پس داریم:



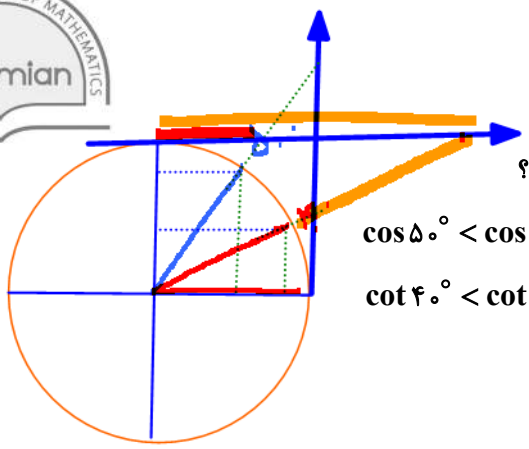
$$A = \frac{1}{2} \times (2\sin x)\cos x = \sin x \cos x$$

در نتیجه برای محاسبهٔ $A(\tan x + \cot x)$ می‌توان نوشت:

$$A(\tan x + \cot x) = \sin x \cos x\left(\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x}\right) = \sin x \cos x\left(\frac{\overbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}^{1}}{\sin x \cos x}\right)$$

$$= \sin x \cos x\left(\frac{1}{\sin x \cos x}\right) = 1$$

(سراسری)



تمرین: کدام یک از نامساوی‌های زیر بین زوایای ۴۰ و ۵۰ درجه برقرار است؟

۱) $\sin 50^\circ < \sin 40^\circ$

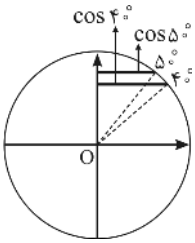
۲) $\cos 50^\circ < \cos 40^\circ$ ✓

۳) $\tan 50^\circ < \tan 40^\circ$

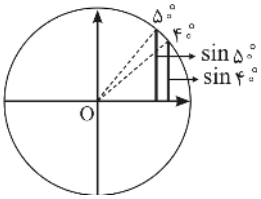
۴) $\cot 40^\circ < \cot 50^\circ$

تمرین: گزینه‌ی «۲»

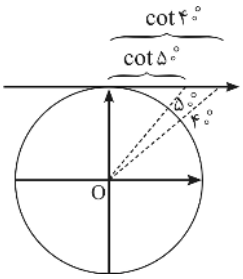
کافی است به دایره‌های مثلثاتی زیر خوب دقّت کنید:



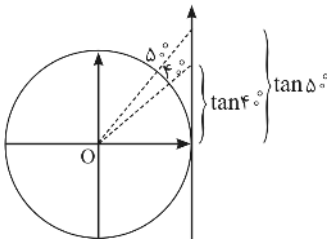
گزینه‌ی (۲) درست $\Rightarrow \cos 50^\circ < \cos 40^\circ$



گزینه‌ی (۱) نادرست $\Rightarrow \sin 50^\circ > \sin 40^\circ$



گزینه‌ی (۴) نادرست $\Rightarrow \cot 40^\circ > \cot 50^\circ$



گزینه‌ی (۳) نادرست $\Rightarrow \tan 50^\circ > \tan 40^\circ$

البته اگر به مفهوم صعود و نزول توابع نیز آشنا باشید، می‌توانید خیلی ساده‌تر پی به درستی گزینه‌ی (۲) ببرید.

$f(x) = \sin x$ در $(0 , \frac{\pi}{2})$ صعودی است. $\Rightarrow 50^\circ > 40^\circ \Rightarrow \sin 50^\circ > \sin 40^\circ$

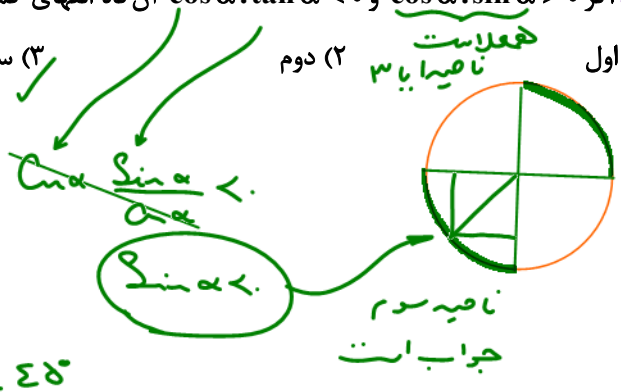
$f(x) = \cos x$ در $(0 , \frac{\pi}{2})$ نزولی است. $\Rightarrow 50^\circ > 40^\circ \Rightarrow \cos 50^\circ < \cos 40^\circ$

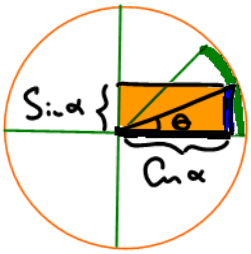
$f(x) = \tan x$ در $(0 , \frac{\pi}{2})$ صعودی است. $\Rightarrow 50^\circ > 40^\circ \Rightarrow \tan 50^\circ > \tan 40^\circ$

$f(x) = \cot x$ در $(0 , \frac{\pi}{2})$ نزولی است. $\Rightarrow 50^\circ > 40^\circ \Rightarrow \cot 50^\circ < \cot 40^\circ$

تمرین: اگر $\cos\alpha.\sin\alpha > 0$ و $\cos\alpha.\tan\alpha < 0$ آن‌گاه انتهای کمان α در کدام ناحیه‌ی مثلثاتی است؟

۱) اول ۲) دوم ۳) سوم ۴) چهارم





تمرین: حاصل عبارت $\frac{|\sin x-\cos x|}{۲}+\frac{\sin x+\cos x}{۲}$ که در آن $x\in[۰,\frac{\pi}{۴}]$ کدام است؟ (سراسری)

۱) $\sin x$ ۲) $\cos x$ ۳) $\sin x+\cos x$ ۴) $\cos x-\sin x$

پاسخ: گزینه‌ی «۲»

گفتیم در $[۰,\frac{\pi}{۴}]$ (زیر خط $y=x$)، $\cos x>\sin x$:

$$\frac{|\sin x-\cos x|}{۲}+\frac{\sin x+\cos x}{۲}=\frac{-(\sin x-\cos x)+(\sin x+\cos x)}{۲}=\cos x$$

تمرین: اگر $a\in\mathbb{R}$ و $\cos x=\sqrt{\frac{\cot x}{\cot x-a^۲}}$، انتهای کمان x در کدام ناحیه‌ی مثلثاتی است؟

۱) اول ۲) دوم ۳) سوم ۴) چهارم

پاسخ: گزینه‌ی «۴»

انتهای کمان x در ناحیه‌ی اوّل یا چهارم $\Rightarrow \cos x\geq ۰ \Rightarrow \cos x=\sqrt{\frac{\cot x}{\cot x-a^۲}}\geq ۰$

اما با انتخاب x در ناحیه‌ی اول، $\cot x>۰$ و در نتیجه به ازای مقادیر بزرگ $a^۲$ می‌تواند زیر رادیکال منفی شود ودر نتیجه فرض مسئله که به ازای هر $a\in\mathbb{R}$ ، تساوی برقرار است از بین می‌رود. پس x باید در ناحیه‌ی چهارم باشد که در این صورت همواره زیر رادیکال مثبت خواهد بود:

$$\begin{cases}\cot x\leq ۰\\ \cot x-a^۲<۰\end{cases}\Rightarrow \frac{\cot x}{\cot x-a^۲}\geq ۰$$

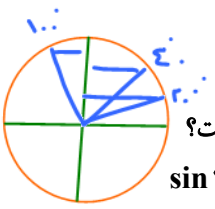
تمرین: کدام نامساوی زیر نادرست است؟

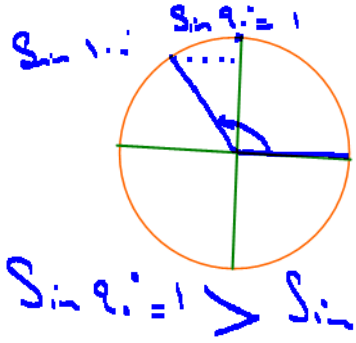
۱) $\sin ۲۰^\circ < \sin ۴۰^\circ < \sin ۱۰۰^\circ$

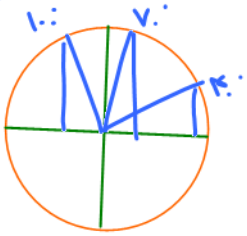
۲) $\cos ۱۰۰^\circ < \cos ۴۰^\circ < \cos ۲۰^\circ$

۳) $\sin ۴۰^\circ < \sin ۹۰^\circ < \sin ۱۰۰^\circ$

۴) $\cos ۱۰۰^\circ < \cos ۷۰^\circ < \cos ۴۰^\circ$

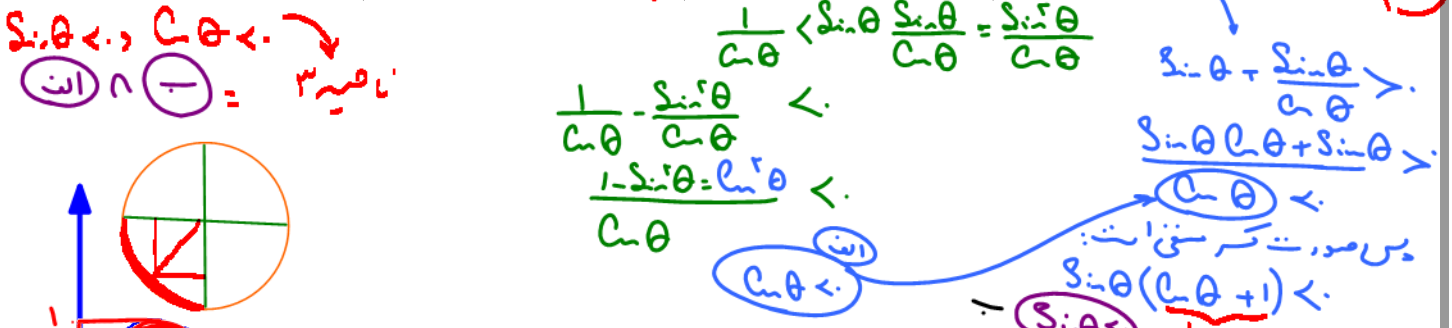






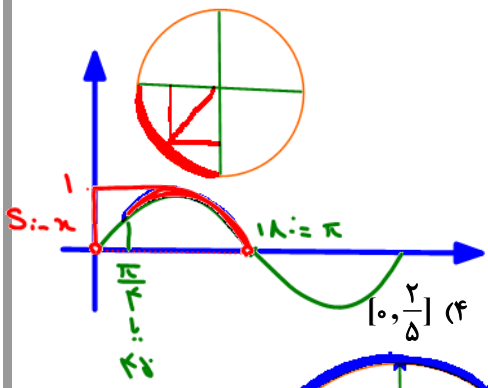
تمرین: اگر $\sin\theta + \tan\theta > ۰$ و $\sin\theta \times \tan\theta < \frac{۱}{\cos\theta}$ باشند، انتهای کمان θ در کدام ناحیه قرار دارد؟

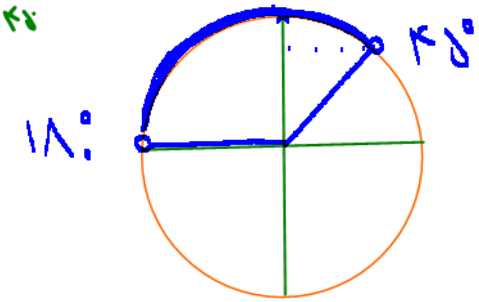
۱) اول ۲) دوم ۳) سوم ۴) چهارم

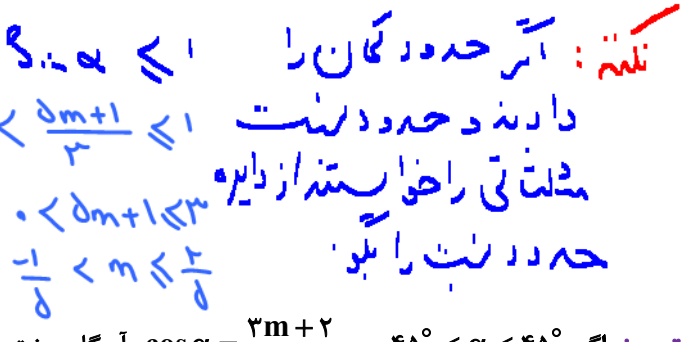


تمرین: اگر $۴۵^\circ < \alpha < ۱۸۰^\circ$ باشد و $\sin\alpha = \frac{۵m+۱}{۳}$، آن‌گاه حدود m کدام است؟

۱) $(-\frac{۱}{۵}, \frac{۲}{۵})$ ۲) $(-\frac{۱}{۵}, \frac{۲}{۵}]$ ۳) $(\frac{۱}{۵}, \frac{۲}{۵})$ ۴) $[۰, \frac{۲}{۵}]$

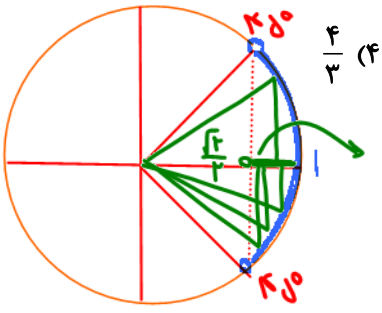


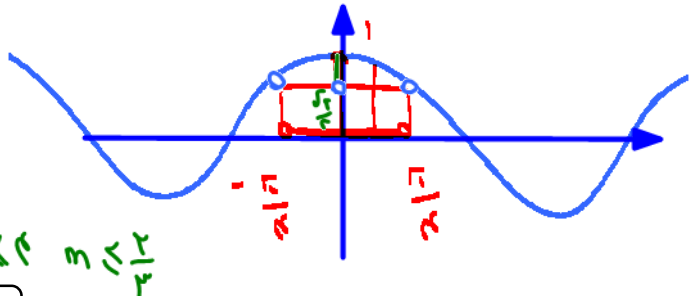




تمرین: اگر $-۴۵^\circ < \alpha < ۴۵^\circ$ و $\cos\alpha = \frac{۳m+۲}{۴}$، آن‌گاه بیشترین مقدار m برابر است با:

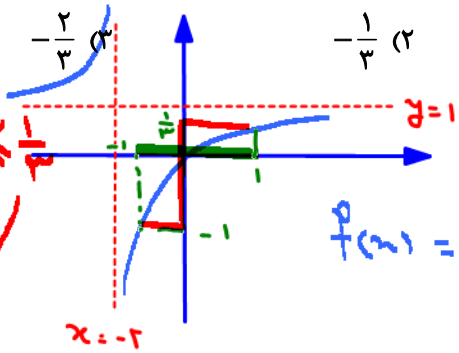
۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{۴}{۳}$





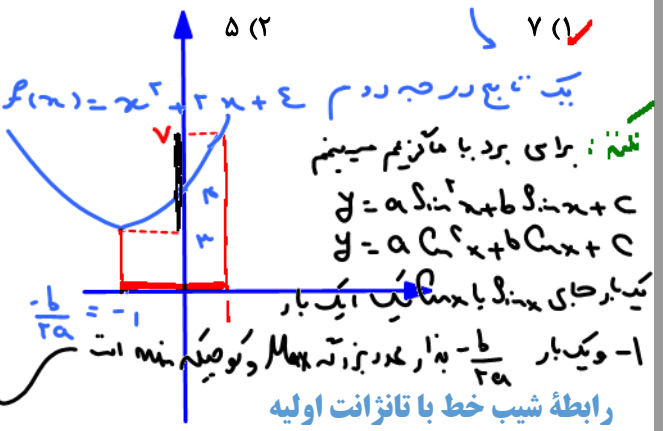
تمرین: مجموع حداقل و حداکثر مقدار عبارت $\frac{\cos\alpha}{2+\cos\alpha}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $-\frac{1}{3}$ ۳) $-\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{2}{3}$

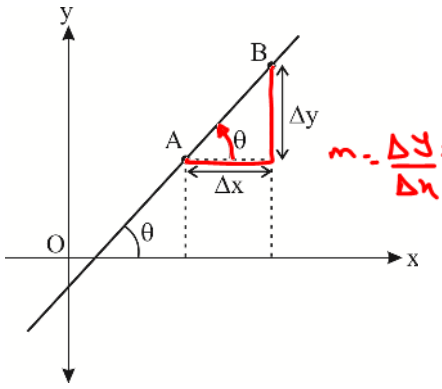


تمرین: بیشترین مقدار عبارت $4+\cos^2 x+2\cos x$ کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۵ ۳) ۴ ۴) ۳



رابطهٔ شیب خط با تانژانت اولیه



می‌دانیم که شیب هر خط، برابر نسبت تفاضل عرض‌های دو نقطهٔ واقع بر آن به تفاضل طول‌های همان دو نقطه است. حال اگر این خط محور xها را قطع کند، شیب خط برابر تانژانت زاویه‌ای است که خط با جهت مثبت محور xها می‌سازد، یعنی:

$$\tan\theta=\frac{\text{تفاضل عرض‌ها}}{\text{تفاضل طول‌ها}}=\frac{\Delta y}{\Delta x}=m$$

به طور کلی می‌توان گفت:

الف) اگر خطی موازی با محور xها باشد، شیب آن صفر است.

ب) اگر خطی عمود بر محور xها باشد، شیب آن تعریف نشده است.

معادلهٔ خط

با داشتن یک نقطه از خط، مانند $A(x_0,y_0)$ و شیب خط از معادلهٔ مقابل استفاده می‌کنیم:

$$y-y_0=m(x-x_0)$$

تمرین: معادلهٔ خطی که با قسمت مثبت محور xها زاویهٔ 45° می‌سازد و از نقطهٔ $A(2,3)$ می‌گذرد، کدام است؟

۱) $y=2x-1$ ۲) $y=2x+1$ ۳) $y=x-1$ ۴) $y=x+1$

پاسخ: گزینهٔ «۴» ـ شیب این خط برابر $m=\tan 45^\circ=1$ است، در نتیجه:

$$y-y_0=m(x-x_0)\Rightarrow y-3=1(x-2)\Rightarrow y=x+1$$

تمرین: اگر خط $(5t-3)x-2\sqrt{3}y=10$ با جهت مثبت محور xها زاویهٔ 30° بسازد، t کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ: گزینهٔ «۲»

یادآوری: شیب خط $ax+by=c$ برابر $-\frac{a}{b}$ است.

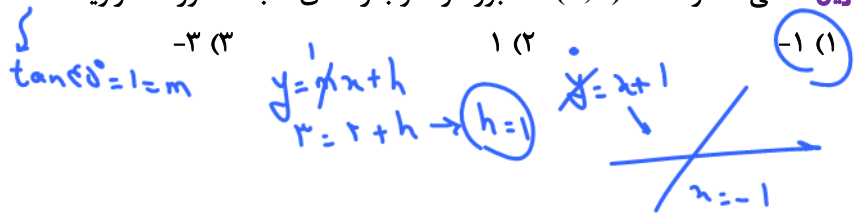
$$m=\frac{-a}{b} \Rightarrow \begin{cases} a=5t-3 \\ b=-2\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow m=\frac{-(5t-3)}{-2\sqrt{3}}=\frac{5t-3}{2\sqrt{3}}$$

شیب خط داده شده برابر $\frac{5t-3}{2\sqrt{3}}$ است، در نتیجه:

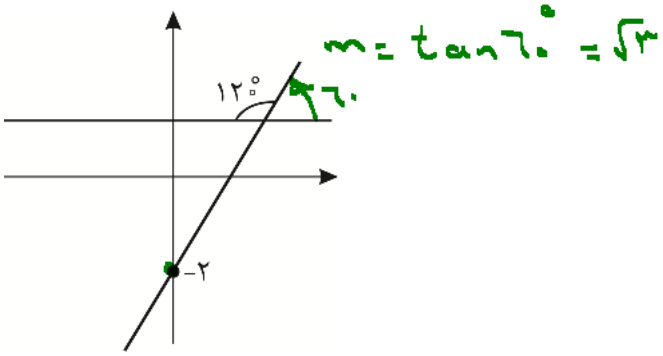
$$\tan 30^\circ=\frac{5t-3}{2\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{5t-3}{2\sqrt{3}} \Rightarrow 2\sqrt{3}\times\sqrt{3}=3(5t-3) \Rightarrow 6=15t-9 \Rightarrow 15t=15 \Rightarrow t=1$$

تمرین: خطی که از نقطهٔ $A(2,3)$ عبور کرده و با راستای مثبت محور xها زاویهٔ 45° می‌سازد، محور xها را با چه طولی قطع می‌کند؟

۱) ۱- ۲) ۱ ۳) ۳- ۴) ۳



تمرین: معادلهٔ خط مقابل کدام است؟



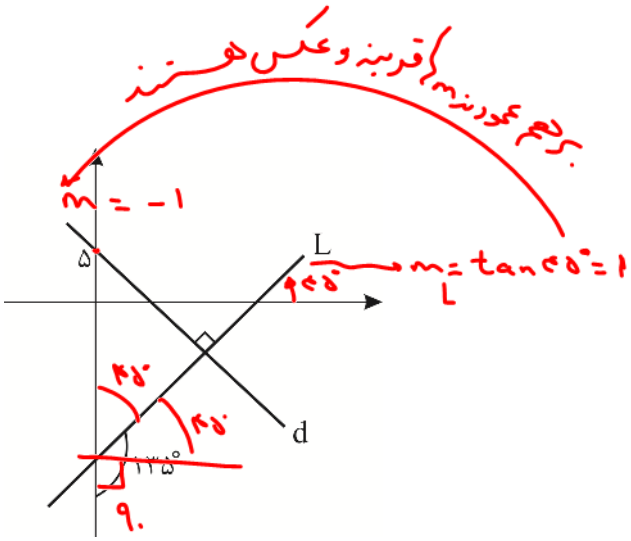
۱) $y+\sqrt{3}x=2$

۲) $y=\sqrt{3}x-2$

۳) $y-\sqrt{3}x-2=0$

۴) $y=-\sqrt{3}x-4$

تمرین: معادلهٔ خط d در شکل مقابل کدام است؟



۱) $y=-x+5$

۲) $y=x+5$

۳) $y=\sqrt{3}x+5$

۴) $y=-\sqrt{3}x+5$

Homework

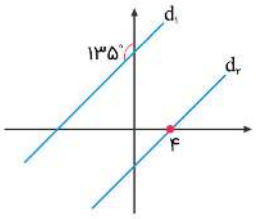
۱ زاویهٔ حادهٔ بین دو خط $d_1 : ۶x - ۶y + ۸ = ۰$ و $d_2 : y - \sqrt{۳}x + ۱ = ۰$ چند درجه است؟

۱) ۱۵°
۲) ۳۰°
۳) ۶۰°
۴) ۷۵°

۲ حدود k برای آنکه معادلهٔ $\sin x = k$ در فاصلهٔ $۶۰^\circ \le x \le ۱۲۰^\circ$ دارای جواب باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲} \le k \le \frac{\sqrt{۲}}{۲}$
۲) $-۱ \le k \le ۱$
۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۲} \le k \le ۱$
۴) $k > \frac{\sqrt{۲}}{۲}$

۳ دو خط d_1 و d_2 باهم موازی می‌باشند. معادلهٔ خط d_2 کدام است؟



۱) $y + x + ۴ = ۰$
۲) $y + x - ۴ = ۰$
۳) $y - x + ۴ = ۰$
۴) $y - x - ۴ = ۰$

۴ در مثلث ABC، طول اضلاع متناسب با اعداد ۶، ۳ و $\sqrt{۲۷}$ است. کسینوس زاویه مقابل به ضلع کوچک‌تر کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۳}$
۲) $+\frac{۱}{۲}$
۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۵}$
۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

۵ کدام‌یک از نامساوی‌های زیر درست است؟

۱) $\sin ۲۰^\circ > \sin ۱۷۰^\circ$
۲) $\cos ۲۰^\circ < \cos ۱۶۰^\circ$
۳) $\tan ۲۰^\circ < \sin ۲۰^\circ$
۴) $\cot ۲۰^\circ < \cos ۲۰^\circ$

۶ اگر $۱۲۰^\circ \le \alpha \le ۱۵۰^\circ$ و $\cos \alpha = ۲m - ۱$ باشد، آنگاه حدود تغییرات m کدام است؟

۱) $-۱ \le m \le ۱$
۲) $\frac{۱}{۲} \le m \le \frac{۱ + \sqrt{۳}}{۲}$
۳) $\frac{۲ - \sqrt{۳}}{۴} \le m \le \frac{۱}{۴}$
۴) $\frac{۱ - \sqrt{۳}}{۴} \le m \le \frac{\sqrt{۳}}{۴}$

۷ به ازای مقادیر دلخواه α، حاصل نسبت بیشترین مقدار به کمترین مقدار عبارت $A = \frac{۴\cos^۲\alpha - ۱}{۳}$ کدام است؟

۱) -۳
۲) ۳
۳) ۱
۴) $-\frac{۱}{۳}$

۸ علامت کدام‌یک از گزینه‌های زیر با سایر گزینه‌ها متفاوت است؟

۱) $\sin ۷۵^\circ$
۲) $\cos ۳۴۵^\circ$
۳) $\tan ۱۹۵^\circ$
۴) $\tan ۱۳۰^\circ$

۹ حداکثر عبارت $۴\sin\theta - ۱$ کدام است؟

۱) ۳
۲) ۵
۳) ۲
۴) صفر

۱۰ در یک چرخ‌وفلک دایره‌ای به شعاع ۱۰ متر، نقطهٔ اوج آن از سطح زمین ۲۵ متر فاصله دارد. اگر شخصی در پایین‌ترین نقطهٔ چرخ‌وفلک سوار شود، پس از طی حداقل چه زاویه‌ای فاصلهٔ او تا سطح زمین به ۲۰ متر می‌رسد؟

۱) ۱۳۵°
۲) ۱۵۰°
۳) ۱۲۰°
۴) ۱۸۰°

۱۱ با زیاد شدن زاویهٔ θ از ۴۵° تا ۱۸۰°، $\sin\theta$ چگونه تغییر می‌کند؟

۱) افزایش می‌یابد
۲) کاهش می‌یابد
۳) ابتدا افزایش سپس کاهش
۴) ابتدا کاهش سپس افزایش

۱۲ اگر $۰ < \tan x < ۱$ باشد، x چند درجه می‌تواند باشد؟

۱) ۸۲°
۲) ۱۷۲°
۳) ۱۹۲°
۴) ۲۵۲°

۱۳ با زیاد شدن θ از ۹۰° تا ۲۷۰°، $\sin\theta$ چگونه تغییر می‌کند؟

۱) همواره افزایش می‌یابد.
۲) همواره کاهش می‌یابد.
۳) ابتدا افزایش و سپس کاهش می‌یابد.
۴) ابتدا کاهش و سپس افزایش می‌یابد.

پاسخ Homework

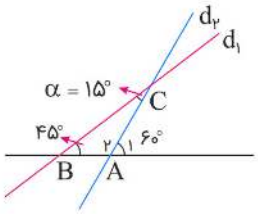
۱ گزینه ۱

$$d_۱ : ۶x - ۶y + ۸ = ۰ \Rightarrow y = x + \frac{۴}{۳} \Rightarrow m_۱ = ۱$$

$$\tan\theta_۱ = ۱ \Rightarrow \theta_۱ = ۴۵^\circ$$

$$d_۲ : y - \sqrt{۳}x + ۱ = ۰ \Rightarrow y = \sqrt{۳}x - ۱ \Rightarrow m_۲ = \sqrt{۳}$$

$$\tan\theta_۲ = \sqrt{۳} \Rightarrow \theta_۲ = ۶۰^\circ$$



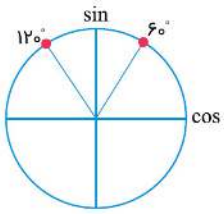
بنابراین طبق شکل:

$$\hat{A}_۱ = ۶۰^\circ \Rightarrow \hat{A}_۲ = ۱۲۰^\circ \ , \ B = ۴۵^\circ$$

$$\hat{A}_۲ + \hat{B} + \hat{C} = ۱۸۰^\circ \Rightarrow ۱۲۰^\circ + ۴۵^\circ + \hat{C} = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{C} = ۱۵^\circ$$

۲ گزینه ۳

باتوجه‌به شکل:

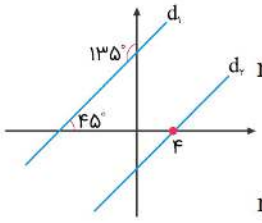


$$\frac{\sqrt{۳}}{۲} \leq \sin x \leq ۱$$

$$\frac{\sqrt{۳}}{۲} \leq k \leq ۱$$

۳ گزینه ۳

شیب خط $d_۱$ برابر است با:



$$m_۱ = \tan ۴۵^\circ = ۱$$

دو خط $d_۱$ و $d_۲$ باهم موازی هستند، بنابراین شیب آن‌ها برابر است.

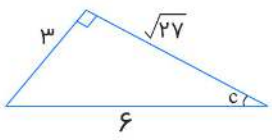
$$m_۱ = m_۲ \Rightarrow m_۲ = ۱$$

خط $d_۲$ از نقطهٔ $A(۴, ۰)$ عبور می‌کند، بنابراین معادلهٔ آن به‌صورت: $y - y_A = m(x - x_A)$ می‌باشد.

$$y - ۰ = ۱(x - ۴) \Rightarrow y = x - ۴ \Rightarrow y - x + ۴ = ۰$$

۴ گزینه ۴

با کمی دقت به مقادیر اضلاع مثلث متوجه می‌شویم که در رابطه فیثاغورس صدق می‌کنند، درنتیجه مثلث ما قائم‌الزاویه است.



$$\cos c = \frac{\sqrt{۲۷}}{۶} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

۵ گزینه ۱

گزینه ۱ درست است، زیرا: $\sin ۱۷۰^\circ = \sin ۱۰^\circ < \sin ۲۰^\circ$

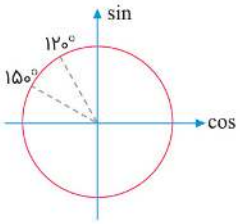
بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه "۲": نادرست است، زیرا: $\cos ۱۶۰^\circ = -\cos ۲۰^\circ$

گزینه "۳": نادرست است، زیرا می‌دانیم برای هر زاویهٔ حاده داریم: $\tan x > \sin x$

گزینه "۴": نادرست است، زیرا می‌دانیم برای هر زاویهٔ حاده داریم: $\cot x > \cos x$

۶ گزینه ۳



$$۱۲۰^\circ \le \alpha \le ۱۵۰^\circ$$

$$\cos ۱۵۰^\circ \le \cos \alpha \le \cos ۱۲۰^\circ \Rightarrow -\frac{\sqrt{۳}}{۲} \le \cos \alpha \le -\frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow -\frac{\sqrt{۳}}{۲} \le ۲m - ۱ \le -\frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{۲-\sqrt{۳}}{۲} \le ۲m \le \frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{۲-\sqrt{۳}}{۴} \le m \le \frac{۱}{۴}$$

۷ گزینه ۱

$$-۱ \le \cos \alpha \le ۱ \xrightarrow{\text{به توان ۲}} ۰ \le \cos^۲ \alpha \le ۱ \xrightarrow{\times ۴} ۰ \le ۴\cos^۲ \alpha \le ۴$$

$$\Rightarrow -۱ \le ۴\cos^۲ \alpha - ۱ \le ۳ \Rightarrow -\frac{۱}{۳} \le \frac{۴\cos^۲ \alpha - ۱}{۳} \le ۱$$

$$\begin{cases} \max = ۱ \\ \min = -\frac{۱}{۳} \end{cases} \Rightarrow \frac{۱}{-\frac{۱}{۳}} = -۳$$

۸ گزینه ۴

باتوجه‌به ناحیهٔ هریک از زوایا و دایرهٔ مثلثاتی، گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینهٔ "۱": $\sin ۷۵^\circ \xrightarrow{\text{ربع اول}} \sin ۷۵^\circ > ۰$

گزینهٔ "۲": $\cos ۳۴۵^\circ \xrightarrow{\text{ربع چهارم}} \cos ۳۴۵^\circ > ۰$

گزینهٔ "۳": $\tan ۱۹۵^\circ \xrightarrow{\text{ربع سوم}} \tan ۱۹۵^\circ > ۰$

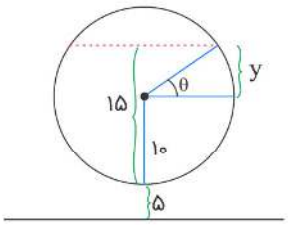
گزینهٔ "۴": $\tan ۱۳۰^\circ \xrightarrow{\text{ربع دوم}} \tan ۱۳۰^\circ < ۰$

۹ گزینه ۱

$$-۱ \le \sin\theta \le ۱ \xrightarrow{\times ۴} -۴ \le ۴\sin\theta \le ۴ \Rightarrow -۵ \le ۴\sin\theta - ۱ \le ۳$$

حداکثر مقدار عبارت برابر ۳ است.

۱۰ گزینه ۳



$$\sin\theta = \frac{y}{۱۰} \Rightarrow y = ۱۰\sin\theta$$

$$۲۰ = ۱۵ + ۱۰\sin\theta$$

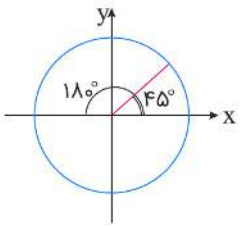
$$\sin\theta = \frac{۵}{۱۰} \Rightarrow \sin\theta = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \theta = ۳۰^\circ$$

لذا پس از طی ۱۲۰ درجه به ارتفاع ۲۰ متری می‌رسد.

(دقت کنید چون واژهٔ حداقل به کار برده شده است، حرکت چرخ‌وفلک را پادساعتگرد در نظر گرفتیم.)

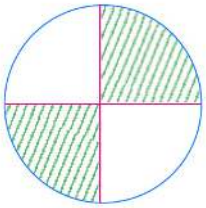
۱۱ گزینه ۳

باتوجه‌به دایرهٔ مثلثاتی: در زاویهٔ بین ۴۵° تا ۹۰°، $\sin\theta$ صعودی خواهد بود، این در حالی است که از ۹۰° تا ۱۸۰°، $\sin\theta$ کاهش می‌یابد.



۱۲ گزینه ۳

۱۷۲° در ربع دوم قرار دارد و در این ربع تانژانت منفی است، بنابراین گزینهٔ "۲" نادرست می‌باشد. در ربع اول اگر $۴۵^\circ < x < ۹۰^\circ$ باشد، آنگاه $\sin x > \cos x$ است.



$$۴۵^\circ < x < ۹۰^\circ \Rightarrow \sin x > \cos x$$
$$\xrightarrow[\cos x>۰]{\div \cos x} \tan x > ۱ \Rightarrow \tan ۸۲^\circ > ۱$$

بنابراین گزینهٔ "۱" نادرست است.

در ربع سوم اگر $۱۸۰^\circ < x < ۲۲۵^\circ$ باشد، $\sin x > \cos x$ است.

$$۱۸۰^\circ < x < ۲۲۵^\circ \Rightarrow \sin x > \cos x$$
$$\xrightarrow[\cos x<۰]{\div \cos x} \tan x < ۱ \Rightarrow ۰ < \tan ۱۹۲^\circ < ۱$$

توجه شود که در ربع سوم $\tan x > ۰$ است. بنابراین گزینهٔ "۳" صحیح می‌باشد.

در ربع سوم اگر $۲۲۵^\circ < x < ۲۷۰^\circ$ باشد، $\sin x < \cos x$ است.

$$۲۲۵^\circ < x < ۲۷۰^\circ \Rightarrow \sin x < \cos x$$
$$\xrightarrow[\cos x<۰]{\div \cos x} \tan x > ۱ \Rightarrow \tan ۲۵۲^\circ > ۱$$

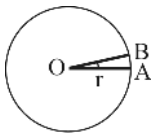
بنابراین گزینهٔ "۴" نادرست است.

۱۳ گزینه ۲

روی دایرهٔ مثلثاتی، $\sin$ معادل محور yها است. در ربع دوم با افزایش θ، تصویر نقطه روی محور yها کاهش پیدا می‌کند، در ۱۸۰° به کمترین مقدار خود یعنی صفر می‌رسد. $\sin ۱۸۰^\circ = ۰$ و در ربع سوم با افزایش θ، تصویر نقطه روی محور yها کاهش می‌یابد تا در ۲۷۰° به کمترین مقدار خود یعنی ۱- می‌رسد. $\sin ۲۷۰^\circ = -۱$، بنابراین با زیاد شدن زاویهٔ θ از ۹۰° تا ۲۷۰°، $\sin$ همواره کاهش پیدا می‌کند.

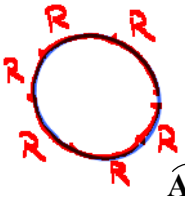
واحدهای کمان و زاویه

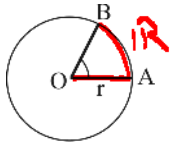
درجه: اگر محیط دایره را به ۳۶۰ قسمت مساوی تقسیم کنیم، هر قسمت کمانی به اندازه‌ی یک درجه است و زاویه‌ی مرکزی مقابل به آن مساوی ۱ درجه است. یعنی:



$\overset{\frown}{AB} = \frac{2\pi r}{360}$ $\qquad \hat{AOB}$ = ۱ درجه

رادیان: زاویه‌ی مرکزی روبه‌رو به کمانی که طول آن با شعاع دایره مساوی باشد را یک رادیان می‌نامیم. یعنی:





$\overset{\frown}{AB} = r$ $\qquad \hat{AOB}$ = ۱ رادیان

و به همین ترتیب ۲ رادیان، زاویه‌ی مرکزی روبه‌رو به کمانی است که طول آن ۲ برابر شعاع دایره باشد و 2π رادیان، زاویه‌ی مرکزی روبه‌رو به کمانی است که طول آن مساوی 2π برابر شعاع دایره (همان محیط دایره) باشد. جالب شد!

پس:

هر دایره با هر شعاعی، ۳۶۰ درجه یا 2π رادیان است.

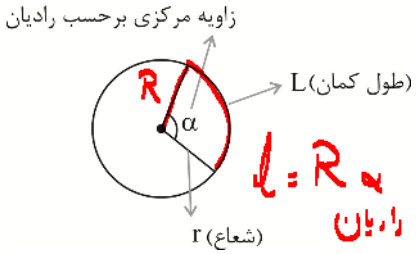
رابطه‌ی بین رادیان و درجه:

$$\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi}$$

R اندازه‌ی زاویه برحسب رادیان و D اندازه‌ی زاویه برحسب درجه است، مثلاً اگر $R = 1$ فرض شود، داریم:

$$D = \frac{180}{\pi} \xrightarrow{\pi \simeq 3/14} D \simeq 57^\circ$$

هر یک رادیان، تقریباً 57° است.



اگر طول کمان روبه‌رو به زاویه را با نماد L ، شعاع دایره را با r و اندازه‌ی زاویه را با α نشان دهیم، آن‌گاه رابطه‌ی بالا به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\alpha = \frac{L}{r}$$

تمرین: اگر در یک دایره، اندازه‌ی کمان مقابل به زاویه‌ی مرکزی $\theta = 50^\circ$ برابر ۱۰ سانتی‌متر باشد، مساحت این دایره چند برابر محیط آن است؟

۱) $\frac{1}{50}$ $\qquad$ ۲) $\frac{1}{10}$ $\qquad$ ۳) $\frac{18}{\pi}$ $\qquad$ ۴) $\frac{36}{\pi}$

تمرین: دایره‌ای به مساحت 4π مفروض است. قطاعی به محیط $7/14$ از آن جدا کرده‌ایم. زاویه‌ای که توسط این قطاع از دایره جدا می‌شود، چند درجه است؟ $(\pi \simeq 3/14)$

۱) ۱۸۰ ۲) ۹۰ ۳) ۴۵ ۴) ۱۲۰

$S = \pi R^2 = 4\pi \rightarrow R = 2$

محیط قطاع $= R + R + R\theta = 4 + 2\theta = 7/14$

$2\theta = 3/14$

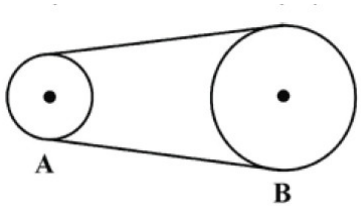
$\theta = \frac{3/14}{2} = \frac{\pi}{2} = 90$ رادیان

$L = R\theta = 2\theta$

$L = 2\pi \times \frac{90}{360} = \pi$

محیط $= 4 + 2\pi = 7/14$

تمرین: در شکل زیر چرخ‌دنده‌های A و B توسط نواری لاستیکی به هم وصل شده‌اند. شعاع چرخ‌دنده‌ی A، ۲۰ سانتی‌متر و شعاع چرخ‌دنده‌ی B برابر با ۱ متر است. اگر چرخ‌دنده‌ی B به اندازه‌ی $\frac{3\pi}{2}$ رادیان بچرخد، چرخ‌دنده‌ی A چند دور می‌زند؟



۱) ۲/۵
۲) ۵
۳) ۳/۷۵ ✓
۴) ۱۰

$L_A = L_B$

$R_A\theta_A = R_B\theta_B$

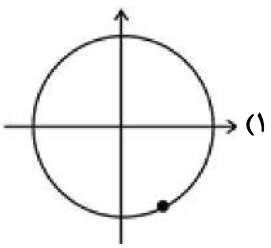
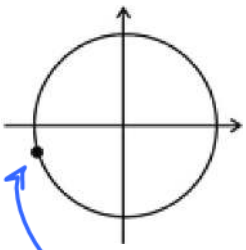
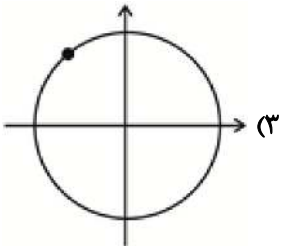
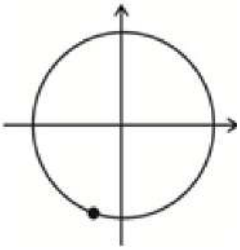
$(20)\theta_A = (100)\frac{3\pi}{2}$

$\theta_A = \frac{15\pi}{2}$ رادیان

به دور دایره	2π
؟	$\frac{15\pi}{2}$

$? = \frac{\frac{15\pi}{2}}{2\pi} = \frac{15}{4} = \frac{12}{4} + \frac{3}{4} = 3 + 0/75 = 3/75$

تمرین: مجموعه دو زاویه 72° و تفاضل آن دو زاویه $\frac{\pi}{15}$ رادیان است. اگر اندازه‌ی زاویه‌ی بزرگ‌تر برابر با x درجه باشد، زاویه‌ی $(5x - 10^\circ)$ به طور تقریبی روی دایره‌ی مثلثاتی کدام است؟

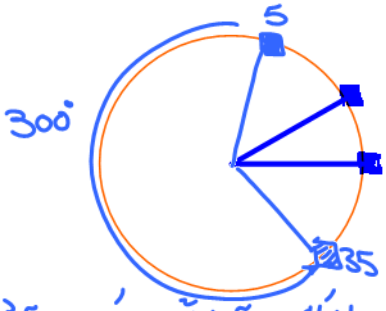
۱) 
۲) ✓ 
۳) 
۴) 

$\begin{cases} x + y = 72^\circ \\ x - y = \frac{\pi}{15} = \frac{180}{15} = 12^\circ \end{cases} +$

$2x = 84^\circ \rightarrow x = 42^\circ$ ⇝ $5x - 10 = 5(42) - 10^\circ = 200^\circ$

تمرین: چرخ و فلکی دارای ۳۶ کابین است و شما در کابین شماره‌ی پنجم قرار دارید. اگر چرخ و فلک به اندازه‌ی $\frac{11\pi}{3}$ رادیان در جهت مثبت مثلثاتی حرکت کند، در موقعیت اولیه‌ی کدام کابین قرار می‌گیرید؟ (شماره‌گذاری کابین‌ها در جهت مثبت مثلثاتی و فاصله‌ی کابین‌ها یکسان است.)

۱) ۲۵ ۲) ۳۰ ۳) ۳۴ ۴) ۳۵ ✓



۳۶۰ ÷ ۳۶ کابین = ۱۰ فاصله هر ۲ کابین

$\frac{11\pi}{3} = 11(60) = 660$

۶۶۰ − ۳۶۰ = ۳۰۰ یک دور دایره

۳۰۰ معادل ۳۰ تا ۱۰ فاصله است پس از کابین 5 اتفاقا به کابین 35 میرسیم

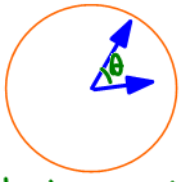
نکات ساعت

الف) عقربهٔ دقیقه‌شمار به ازای هر یک دقیقه ۶ درجه طی می‌کند.

ب) عقربهٔ ساعت‌شمار به ازای هر یک ساعت ۳۰ درجه طی می‌کند.

پ) عقربهٔ ساعت‌شمار به ازای هر یک دقیقه ۰/۵ درجه طی می‌کند.

ت) زاویهٔ بین عقربهٔ ساعت‌شمار و دقیقه‌شمار از دستور زیر پیدا می‌شود:



دقیقه minute

$\theta = |\frac{11m}{2} - 30h| = |30h - \frac{11}{2}m|$

hour

تمرین: چه مدت طول می‌کشد تا عقربه‌ی دقیقه‌شمار ساعت به اندازه‌ی $\frac{8\pi}{3}$ رادیان دوران کند؟

۱) یک ساعت ۲) یک ساعت و ۱۰ دقیقه

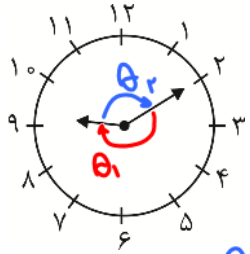
۳) یک ساعت و ۲۰ دقیقه ✓ ۴) یک ساعت و ۳۰ دقیقه

دقیقه‌شمار هر یک ساعت | ۳۶۰ = ۲π

؟ | $\frac{8\pi}{3}$

$? = \frac{8\pi}{3} \times \frac{2\pi}{360} = \frac{4}{3}$ ساعت = یک ساعت + $\left(20 = \frac{60}{3}\right)$ یک سوم ساعت

تمرین: زاویه بین عقربه‌های ساعت‌شمار و دقیقه‌شمار در ساعت ۹:۱۰′ چند رادیان است؟



۱) $\frac{9\pi}{5}$ ۲) $\frac{29\pi}{30}$

۳) $\frac{29\pi}{36}$ ✓ ۴) $\frac{145\pi}{36}$

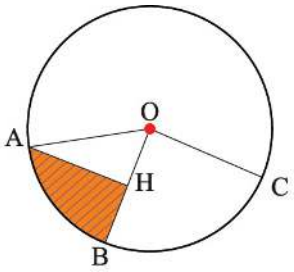
θ_2 یا θ_1 یا $\theta = |30h - \frac{11}{2}m| = |30(9) - \frac{11}{2}(10) = 270 - 55| = 215^\circ = \theta_1$

زاویه‌ها را حتما باید رادیان تبدیل کنیم.

$\frac{(D:215^\circ)\pi}{180} = \frac{43\pi}{36}$

$\theta_2 = 2\pi - \frac{43\pi}{36} = \frac{29\pi}{36}$ زاویه‌ها در جهت کل دایره

۱ مطابق شکل زیر، دایره به محیط ۲π و AH عمودمنصف OB است. محیط قسمت هاشورخورده چقدر از محیط مثلث $\overset{\frown}{OAH}$ بزرگ‌تر است؟



۱) $\frac{۲\pi - ۱}{۳}$

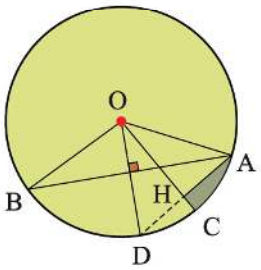
۲) $\frac{۲\pi - ۳}{۶}$

۳) $\frac{\pi - ۱}{۶}$

۴) $\frac{\pi - ۳}{۳}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

۲ مطابق شکل زیر، در دایره‌ای به مساحت π، $A\widehat{O}B = ۱۲۰^\circ$ و OH عمودمنصف AD است. اختلاف محیط مثلث AOH و محیط قسمت سایه زده شده کدام است؟



۱) $\sqrt{۳} - \frac{\pi}{۶}$

۲) $\sqrt{۲} - \frac{\pi}{۶}$

۳) $\pi - \sqrt{۳}$

۴) $\pi - \sqrt{۲}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۳ در یک مثلث، زاویه بین دو ضلع با اندازه‌های ۵ و ۱۲ برابر α است. اگر مساحت این مثلث ۱۵ باشد، اختلاف بیشترین و کمترین مقدار α کدام است؟

۱) $\frac{۲\pi}{۳}$

۲) $\frac{\pi}{۳}$

۳) $\frac{\pi}{۲}$

۴) $\frac{\pi}{۴}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۲

۴ مثلث ABC، با اضلاع $\sqrt{۳}$، ۶ و α (زاویهٔ بین آن‌ها) قابل رسم است. اگر مساحت این مثلث ۴/۵ باشد، بیشترین مقدار α چندبرابر کمترین مقدار α است؟

۱) ۲

۲) ۳

۳) ۴

۴) ۵

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۲

پاسخ Homework

۱ گزینه ۴

$$P = ۲\pi r \Rightarrow ۲\pi r = ۲\pi \Rightarrow r = ۱$$

$$OH = \frac{۱}{۲}OA = \frac{۱}{۲} \Rightarrow O\hat{A}H = ۳۰^\circ \Rightarrow A\hat{O}B = ۶۰^\circ$$

$$\Rightarrow AH = \sin ۶۰^\circ = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow |\overset{\frown}{AB}| = \frac{۱}{۶}(۲\pi) = \frac{\pi}{۳}$$

$$(\cancel{AH} + \cancel{BH} + \overset{\frown}{AB}) - (OA + \cancel{AH} + \cancel{OH}) = \frac{\pi}{۳} - ۱ = \frac{\pi - ۳}{۳}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

۲ گزینه ۱

$$\text{مساحت دایره} = \pi r^۲ = \pi \Rightarrow r = ۱$$

$$|OA| = |OB| = ۱\ ,\ |AH| = \frac{۱}{۲}$$

$$OH \text{ ارتفاع } AOD : |OH| = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$A\widehat{O}D = ۶۰^\circ \Rightarrow A\widehat{O}C = ۳۰^\circ \Rightarrow |\overset{\frown}{AC}| = \frac{۲\pi}{۱۲} = \frac{\pi}{۶}$$

$$|HC| = ۱ - |OH| = ۱ - \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\text{محیط مثلث } AOH = |OH| + |HA| + |OA| = \frac{\sqrt{۳}}{۲} + \frac{۱}{۲} + ۱ = \frac{۳ + \sqrt{۳}}{۲}$$

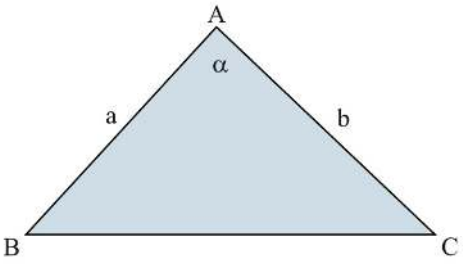
$$\text{محیط قسمت رنگی} : |HC| + |AH| + |\overset{\frown}{AC}| = ۱ - \frac{\sqrt{۳}}{۲} + \frac{۱}{۲} + \frac{\pi}{۶} = \frac{۳ - \sqrt{۳}}{۲} + \frac{\pi}{۶}$$

$$\text{محیط‌ها را از هم کم می‌کنیم} : \sqrt{۳} - \frac{\pi}{۶}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۳ گزینه ۱

نکته: در هر مثلث دلخواه رابطهٔ $S = \frac{۱}{۲}a \times b \times \sin\alpha$ برقرار است:



با استفاده از نکته بالا داریم:

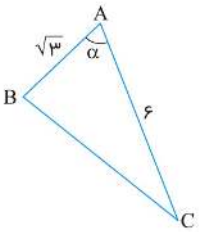
$$S = ۱۵ = \frac{۱}{۲} \times ۵ \times ۱۲ \times \sin\alpha$$

$$\Rightarrow \sin\alpha = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_۱ = ۳۰ \\ \alpha_۲ = ۱۵۰ \end{cases} \Rightarrow \alpha_۲ - \alpha_۱ = ۱۲۰^\circ = \frac{۲\pi}{۳}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۲

۴ گزینه ۱

مثلث ABC را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم:



مساحت مثلث عبارت است از:

$$S = \frac{۱}{۲}\sqrt{۳} \times ۶ \times \sin\alpha \Rightarrow ۴/۵ = ۳\sqrt{۳}\sin\alpha$$

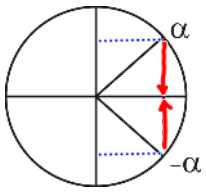
$$\sin\alpha = \frac{۹}{۶\sqrt{۳}} = \frac{۹\sqrt{۳}}{۱۸} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{۲\pi}{۳} \\ \alpha = \frac{\pi}{۳} \end{cases}$$

بنابراین:

$$\frac{\alpha_{max}}{\alpha_{min}} = \frac{\frac{۲\pi}{۳}}{\frac{\pi}{۳}} = ۲$$

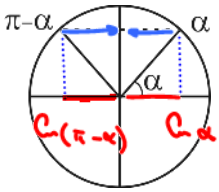
کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۲

نسبت‌های مثلثاتی α و $-\alpha$ (قرینه)



$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$$
$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$$
$$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$$
$$\cot(-\alpha) = -\cot\alpha$$

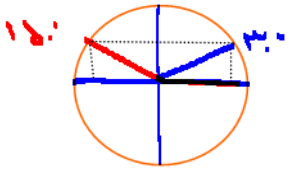
نسبت‌های مثلثاتی زوایای مکمل $(\alpha, \pi-\alpha)$



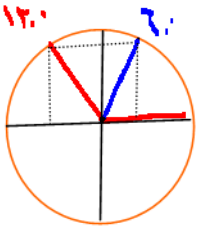
$$\sin(\pi-\alpha) = \sin\alpha$$
$$\cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha$$
$$\tan(\pi-\alpha) = -\tan\alpha$$
$$\cot(\pi-\alpha) = -\cot\alpha$$

یادت باشه: دو زاویه‌ای که مکمل هستند (جمع‌شان 180° است) سینوس‌های مساوی دارند، اما کسینوس و تانژانت و کتانژانت قرینه دارند. یعنی به عنوان مثال جمع کسینوس‌های دو زاویه مکمل برابر صفر است. (برای تانژانت و کتانژانت نیز به همین صورت، البته به شرطی که هیچ‌یک از دو زاویه باعث بی‌معنی شدن تانژانت و کتانژانت نشود.)

تمرین:



$$\sin 150 = \sin(\pi-30) = \frac{1}{2}$$
$$\cos 150 = \cos(\pi-30) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\tan 150 = \tan(\pi-30) = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$
$$\cot 150 = \cot(\pi-30) = -\sqrt{3}$$



$$\sin 120 = \sin(\pi-60) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\cos 120 = \cos(\pi-60) = -\frac{1}{2}$$
$$\tan 120 = \tan(\pi-60) = -\sqrt{3}$$
$$\cot 120 = \cot(\pi-60) = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

زاویه‌های مکمل

اگر $\alpha+\beta=\pi$ ، پس $\alpha=\pi-\beta$ و در نتیجه:

$$\sin\alpha = +\sin\beta \quad ، \quad \cos\alpha = -\cos\beta \quad ، \quad \tan\alpha = -\tan\beta \quad ، \quad \cot\alpha = -\cot\beta$$

بنابراین:

اگر دو زاویه مکمل باشند، مجموع کسینوس‌های آن، تانژانت‌های آن‌ها و کتانژانت‌های آن‌ها مساوی صفر است.

تمرین: حاصل $\cos\frac{\pi}{5}+\cos\frac{4\pi}{5}+\tan\frac{\pi}{7}+\tan\frac{6\pi}{7}$ مساوی صفر است، زیرا:

$$\frac{\pi}{7}+\frac{6\pi}{7}=\pi \quad \Rightarrow \quad \tan\frac{\pi}{7}+\tan\frac{6\pi}{7}=0 \qquad , \qquad \frac{\pi}{5}+\frac{4\pi}{5}=\pi \quad \Rightarrow \quad \cos\frac{\pi}{5}+\cos\frac{4\pi}{5}=0$$

تمرین: حاصل عبارت $\cos\frac{\pi}{n}+\cos\frac{2\pi}{n}+\cdots+\cos\frac{n-1}{n}\pi$ با فرض فردبودن n کدام است؟

۱) ۱ ۲) صفر ۳) n ۴) $-n$

پاسخ: گزینه‌ی «۲»

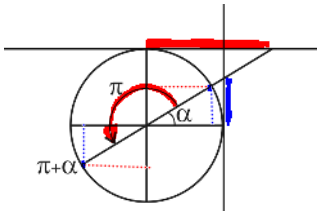
$$\cos\frac{\pi}{n}+\cos\frac{2\pi}{n}+\cdots+\cos\frac{(n-2)\pi}{n}+\cos\frac{(n-1)\pi}{n}$$

توی این مدل از سؤالات اولی و آخری رو با هم بگیرید و به همین ترتیب دومی رو با یکی مونده به آخری و ... . دقت کنید که اگر این زاویه‌ها را با هم جمع کنیم دو به دو جمعشان π می‌شود. یعنی مکمل هم هستند پس جمع کسینوس‌هایشان صفر می‌شود.

$$\frac{\pi}{n}+\frac{(n-1)\pi}{n}=\frac{\pi}{n}+\frac{n\pi-\pi}{n}=\frac{n\pi}{n}=\pi$$
$$\frac{2\pi}{n}+\frac{(n-2)\pi}{n}=\frac{2\pi}{n}+\frac{n\pi-2\pi}{n}=\frac{n\pi}{n}=\pi$$

پس جواب صفر است.

نسبت‌های مثلثاتی $(\alpha,\pi+\alpha)$



$$\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha$$
$$\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha$$
$$\tan(\pi+\alpha)=\tan\alpha$$
$$\cot(\pi+\alpha)=\cot\alpha$$

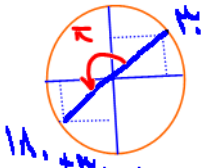
یادت باشه: اگر به زاویه‌ای π رادیان اضافه شود، سینوس و کسینوس قرینه می‌شود، اما تانژانت و کتانژانت ثابت می‌مانند.

تذکر: در سینوس و کسینوس از مضارب زوج π و در تانژانت و کتانژانت از همه مضارب π (چه فرد چه زوج) صرف نظر می‌کنیم.

$$\begin{cases}\sin(2k\pi+\alpha)=\sin\alpha\\ \cos(2k\pi+\alpha)=\cos\alpha\end{cases} \qquad \begin{cases}\tan(k\pi+\alpha)=\tan\alpha\\ \cot(k\pi+\alpha)=\cot\alpha\end{cases}$$

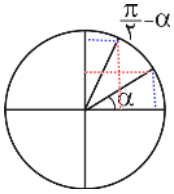
تمرین:

$$\sin 210^\circ=\sin(\pi+30^\circ)=-\frac{1}{2}$$
$$\cos 210^\circ=\cos(\pi+30^\circ)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\tan 210^\circ=\tan(\pi+30^\circ)=\frac{1}{\sqrt{3}}$$
$$\cot 210^\circ=\cot(\pi+30^\circ)=\sqrt{3}$$



$\sin(2k\pi+\theta)=\sin\theta$
$\tan(13\pi+\theta)=\tan\theta$
$\tan(14\pi+\theta)=\tan\theta$

نسبت‌های مثلثاتی دو زاویه متمم (جمع $\frac{\pi}{2}$)



$$\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\cos\alpha$$

$$\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\sin\alpha$$

$$\tan(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\cot\alpha$$

$$\cot(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\tan\alpha$$

یادت باشه: در مضارب فرد $\frac{\pi}{2}$ نام نسبت عوض می‌شود. $\sin \rightleftarrows \cos$ و $\tan \rightleftarrows \cot$

یادت باشه:

$$\sin(\frac{\pi}{2}+\alpha)=\cos\alpha \qquad \tan(\frac{\pi}{2}+\alpha)=-\cot\alpha$$

$$\cos(\frac{\pi}{2}+\alpha)=-\sin\alpha \qquad \cot(\frac{\pi}{2}+\alpha)=-\tan\alpha$$

تذکر: در تمامی حالات فوق، α را زاویه‌ای حادّه در نظر گرفتیم.

یادت باشه: برای شما نحوه‌ی $\cos(\frac{3\pi}{2}+\alpha)$ را توضیح می‌دم و بدانید که تمامی حالات فوق را باید با این روش بررسی کنید و حفظ کردن آن‌ها کار خوبی نیست. α زاویه‌ای حادّه است. $\frac{3\pi}{2}+\alpha$ یعنی در جهت مثبت مثلثاتی (خلاف جهت عقربه‌های ساعت) به اندازه‌ی $\frac{3\pi}{2}$ (۲۷۰ درجه) حرکت کنیم و سپس چون $+\alpha$ داریم یعنی مقداری دیگر نیز در این جهت جلو برویم. پس انتهای کمان، ربع سوم را رد کرد و در ربع چهارم قرار دارد. حالا می‌گوییم که در ربع چهارم، کسینوس مثبت است، پس خروجی حتماً مثبت است و ضمناً به دلیل وجود فرد $\frac{\pi}{2}$ $(\frac{3\pi}{2})$ نام نسبت عوض شده و تبدیل به سینوس می‌شود. پس:

$$\cos(\frac{3\pi}{2}+\alpha)=+\sin\alpha$$

محاسبه‌ی سریع نسبت‌های مثلثاتی $\frac{k\pi}{6}$، $\frac{k\pi}{4}$ و $\frac{k\pi}{3}$

ابتدا با استفاده از زاویه‌ی مربوطه علامت نسبت رو مشخص کرده، بعد k را ندید گرفته و حاصل نسبت $\frac{\pi}{6}$ یا $\frac{\pi}{4}$ یا $\frac{\pi}{3}$ خواسته شده را قرار می‌دهیم. به عنوان مثال ببینید:

$$\sin(\frac{7\pi}{6})=\sin(\underbrace{7\times\frac{\pi}{6}}_{\text{ربع سوم}})=-\sin(\frac{\pi}{6})=-\frac{1}{2}$$

$$\cot(-\frac{5\pi}{3})=-\cot(\underbrace{5\times\frac{\pi}{3}}_{\text{ربع چهارم}})=-\Big(-\cot(\frac{\pi}{3})\Big)=-(-\frac{\sqrt{3}}{3})=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

برای تشخیص ساده‌تر زاویه‌هایی مثل $\frac{7\pi}{6}$ یا $\frac{5\pi}{3}$ ، توصیه می‌کنم آن‌ها را در ذهنتان به درجه تبدیل کنید، یعنی:

$$7\times\frac{\pi}{6}=7\times30^\circ=210^\circ \qquad \text{یا} \qquad 5\times\frac{\pi}{3}=5\times60^\circ=300^\circ$$

تمرین: حاصل عبارت $\frac{\cos ۲۸۵^\circ - \sin ۲۵۵^\circ}{\sin ۵۲۵^\circ - \sin ۱۰۵^\circ}$، با فرض $\tan ۱۵^\circ = ۰/۲۸$ کدام است؟ (تجربی ۹۴)

۱) $-\frac{۱۶}{۹}$ ✓ ۲) $-\frac{۹}{۱۶}$ ۳) $\frac{۱۶}{۹}$ ۴) $\frac{۹}{۱۶}$

زاویه ها را برحسب ۱۵ بنویس:

$\cos(۲۸۵^\circ = ۲۷۰^\circ + ۱۵^\circ = \frac{۳\pi}{۲} + ۱۵^\circ) = \sin ۱۵^\circ$

$\sin(۲۵۵^\circ = ۲۷۰^\circ - ۱۵^\circ = \frac{۳\pi}{۲} - ۱۵^\circ) = -\cos ۱۵^\circ$

$\sin(۵۲۵^\circ = ۵۴۰^\circ - ۱۵^\circ = ۳\pi - ۱۵^\circ = ۲\pi + \pi - ۱۵^\circ) = \sin ۱۵^\circ$ (صرف نظر)

$\sin(۱۰۵^\circ = ۹۰^\circ + ۱۵^\circ = \frac{\pi}{۲} + ۱۵^\circ) = +\cos ۱۵^\circ$

$\text{عبارت} = \frac{\sin ۱۵^\circ - (-\cos ۱۵^\circ)}{\sin ۱۵^\circ - \cos ۱۵^\circ}$ — برای تولید $\tan ۱۵^\circ$ به $\frac{\sin}{\cos}$ است جمله صورت و مخرج را تقسیم بر $\cos$ می‌کنیم

$= \frac{\tan ۱۵^\circ + ۱}{\tan ۱۵^\circ - ۱} = \frac{۱/۲۸}{-۰/۷۲} = -\frac{۱۶}{۹}$

تمرین: حاصل عبارت $A = \tan ۱^\circ . \tan ۲^\circ . \tan ۸۸^\circ . \tan ۸۹^\circ$ کدام است؟

۱) تعریف‌نشده ۲) ۱ ✓ ۳) صفر ۴) $\frac{۱}{۲}$

$\tan ۴۵^\circ = ۱$

$\cot ۲^\circ \quad \cot ۱^\circ$

$۸۹ + ۱ = ۹۰^\circ$

$۸۸ + ۲ = ۹۰^\circ$

دو زاویه مجموعشان ۹۰°

یکی tan

دیگری cot !

چند نتیجه‌ی مهم از این سؤال: ۲ زاویه‌ای که متمم هستند، تانژانت و کتانژانت‌شان برابر است. $\tan \alpha = \cot \beta$ این اتفاق برای سینوس و کسینوس نیز صادق است، یعنی:

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{۲} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{۲} - \beta \Rightarrow \begin{cases} \sin \alpha = \cos \beta \\ \cos \alpha = \sin \beta \end{cases}$$

به عنوان مثال: $\sin ۱۵^\circ = \cos ۷۵^\circ$، $\cos ۵۳^\circ = \sin ۳۷^\circ$ و ... ضمناً برای دو زاویه‌ای که متمم هستن، داریم:

$$\tan \alpha . \tan \beta = ۱$$

تمرین: اگر $\tan ۱۵^\circ = a$ باشد، حاصل $\frac{۳\cos ۱۶۵^\circ - ۲\sin ۲۸۵^\circ}{۳\sin ۳۴۵^\circ - ۴\cos ۲۵۵^\circ}$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{a}$ ✓ ۲) $-a$ ۳) $-\frac{۲}{a}$ ۴) $-۲a$

تمرین: مقدار عبارت $\cos(۳۰۰^\circ)+\sin(۳۳۰^\circ)+\cot(۷۵۰^\circ)+\tan(-۸۴۰^\circ)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $۲\sqrt{۳}$ ✓ ۳) صفر ۴) $۲\frac{\sqrt{۳}}{۳}$

تمرین: حاصل عبارت $\sin^۲\frac{\pi}{۸}+\sin^۲\frac{۳\pi}{۸}+\sin^۲\frac{۵\pi}{۸}+\sin^۲\frac{۷\pi}{۸}$ کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۲}$ ۲) ۲ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) ۱

تمرین: حاصل عبارت $\sin(\frac{۱۷\pi}{۳})\cos(-\frac{۱۷\pi}{۶})+\tan(\frac{۱۹\pi}{۴})\sin(-\frac{۱۱\pi}{۶})$ کدام است؟

(تجربی ۹۸)

۱) $-\frac{۱}{۴}$ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ✓ ۴) $\frac{۱}{۲}$

تمرین: حاصل عبارت $\tan(۲۸۵^\circ)\tan(-۱۶۵^\circ)-\sin(۱۰۹۵^\circ)\cos(۲۵۵^\circ)$ کدام است؟

(خارج تجربی ۹۹)

۱) $\sin^۲(۱۵^\circ)$ ۲) $\cos^۲(۱۵^\circ)$ ۳) $-\sin^۲(۱۵^\circ)$ ۴) $-\cos^۲(۱۵^\circ)$ ✓

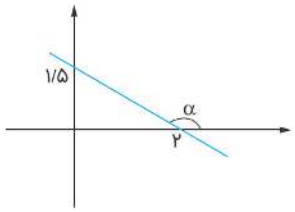
Homework

۱ حاصل عبارت $\frac{۳\cos(۲۴۸^\circ) - ۲\sin(۱۵۸^\circ)}{\sin(۲۰۲^\circ) - \cos(۲۹۲^\circ)}$ کدام است؟

۱) ۰/۵
۲) −۰/۵
۳) −۲/۵
۴) ۲/۵

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

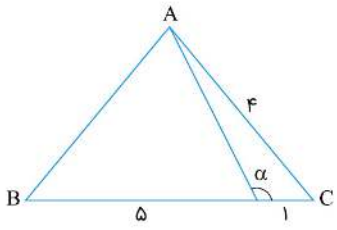
۲ در شکل زیر، زاویهٔ α مشخص شده است. مقدار $\tan(\frac{\pi}{۲} - \alpha)$ کدام است؟



۱) $\frac{۳}{۴}$
۲) $\frac{۴}{۳}$
۳) $-\frac{۳}{۴}$
۴) $-\frac{۴}{۳}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

۳ در شکل زیر، مثلث ABC متساوی‌الساقین است. مقدار $\tan\alpha$ کدام است؟



۱) $-\frac{۲}{۵}$
۲) $\frac{۲}{۵}$
۳) $-\frac{\sqrt{۷}}{۲}$
۴) $\frac{\sqrt{۷}}{۲}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۳

۴ اگر $\tan x + \cot x = -۳$ و $۳\pi < ۴x < ۴\pi$ باشد، حاصل $\frac{۱}{\cos^۳ x + \sin^۳ x}$ کدام است؟

۱) $-۰/۵\sqrt{۶}$
۲) $۰/۷۵\sqrt{۳}$
۳) $-۰/۷۵\sqrt{۳}$
۴) $۰/۵\sqrt{۶}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۵ اگر $\tan x + \cot x = ۴$ و $۵\pi < ۴x < ۶\pi$ باشد، حاصل $\frac{۱}{\sin^۳ x - \cos^۳ x}$ کدام است؟

۱) $-۰/۸\sqrt{۲}$
۲) $۰/۸\sqrt{۲}$
۳) $-\frac{۱/۶}{\sqrt{۳}}$
۴) $\frac{۱/۶}{\sqrt{۳}}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

۶ حاصل عبارت $\frac{\sin ۲۵۰^\circ + \sin ۷۰۰^\circ}{\cos ۵۶۰^\circ - \cos ۱۱۰^\circ}$، با فرض $\tan ۲۰^\circ = ۰/۴$، کدام است؟

۱) $-\frac{۳}{۴}$
۲) $\frac{۳}{۴}$
۳) $\frac{۷}{۳}$
۴) $\frac{۵}{۸}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۴

۷ اگر $\tan \theta = ۰/۲$ باشد، مقدار $\frac{\cos(\frac{۳\pi}{۲} + \theta) - \cos(\pi + \theta)}{\sin(\pi - \theta) - \sin(۳\pi + \theta)}$ کدام است؟

۱) -۲
۲) ۱/۲
۳) ۲
۴) ۳

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۱

۸ حاصل عبارت $\frac{\cos ۲۸۵^\circ - \sin ۲۵۵^\circ}{\sin ۵۲۵^\circ - \sin ۱۰۵^\circ}$، با فرض $\tan ۱۵^\circ = ۰/۲۸$، کدام است؟

۱) $-\frac{۱۶}{۹}$
۲) $-\frac{۹}{۱۶}$
۳) $\frac{۹}{۱۶}$
۴) $\frac{۱۶}{۹}$

علوی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۸ ۱۴۰۱
کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۴

۹ حاصل عبارت $\tan(۳۰۰)\cos(۲۱۰) + \tan(۴۸۰)\sin(۸۴۰)$، کدام است؟ (اعداد داده‌شده برحسب درجه هستند)

۱) $-\frac{۱}{۲}$
۲) صفر
۳) ۱
۴) ۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹
علوی علوم تجربی یازدهم آزمون شماره ۶ ۱۴۰۱
علوی علوم تجربی یازدهم آزمون شماره ۷ ۱۴۰۱

۱۰ فرض کنید زاویهٔ α در ناحیهٔ چهارم مثلثاتی و $\cos(\alpha) = \frac{۲}{۳}$ باشد، حاصل عبارت $\frac{\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{۲}\right) - \sin(\alpha - \pi)}{\left|\tan^۲(\alpha) - ۱\right|}$، کدام است؟

۱) $\frac{۴\left(۲ + \sqrt{۵}\right)}{۳}$

۲) $\frac{۴\left(-۲ + \sqrt{۵}\right)}{۳}$

۳) $\frac{۴\left(۲ - \sqrt{۵}\right)}{۳}$

۴) $-\frac{۴\left(۲ + \sqrt{۵}\right)}{۳}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

۱۱ حاصل عبارت $\cos(۲۵۵)\sin(۱۰۹۵) - \tan(-۱۶۵)\tan(۲۸۵)$، کدام است؟ (اعداد داده‌شده برحسب درجه هستند.)

۱) $\sin^۲(۱۵)$

۲) $\cos^۲(۱۵)$

۳) $-\sin^۲(۱۵)$

۴) $-\cos^۲(۱۵)$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۱۲ حاصل عبارت $\cos\frac{۱۰\pi}{۳} + \sin\frac{۱۱\pi}{۳}\tan\frac{۱۷\pi}{۶}$، کدام است؟

۱) -۱

۲) صفر

۳) ۱

۴) $\sqrt{۳}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۸

۱۳ اگر $\tan\alpha = \frac{۴}{۳}$ و انتهای کمان α در ربع سوم باشد، حاصل عبارت زیر کدام است؟

$$\sin\left(\frac{۹\pi}{۲} + \alpha\right)\cos\left(\frac{۷\pi}{۲} - \alpha\right) - \tan\left(\alpha - \frac{۳\pi}{۲}\right)$$

۱) -۱/۲۳

۲) -۰/۵۲

۳) ۰/۲۷

۴) ۰/۴۸

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

۱۴ اگر $\frac{\pi}{۲} < x < \pi$ باشد، حاصل عبارت $\frac{\tan x}{\sqrt{۱ + \tan^۲ x}}\left(\frac{۱}{\sin x} - \sin x\right)$، کدام است؟

۱) $-\cos^۲ x$

۲) $-\cos x$

۳) $\cos^۲ x$

۴) $\cos x$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

۱۵ حاصل عبارت $\sin(\frac{۱۷\pi}{۳})\cos(\frac{-۱۷\pi}{۶})+\tan(\frac{۱۹\pi}{۴})\sin(\frac{-۱۱\pi}{۶})$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۴}$ ۲) $-\frac{۱}{۲}$

۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۱۶ اگر $\pi < x < \frac{۳\pi}{۲}$ باشد، حاصل $\sqrt{۱+\tan^۲ x}(۲\sin^۲\frac{\pi}{۴}-\sin^۲ x)$ کدام است؟

۱) $\sin x$ ۲) $\cos x$

۳) $-\sin x$ ۴) $-\cos x$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۱۷ حاصل عبارت $\tan\frac{۱۱\pi}{۴}+\sin\frac{۱۵\pi}{۴}\cos\frac{۱۳\pi}{۴}$، کدام است؟

۱) $-\frac{۳}{۲}$ ۲) $-\frac{۱}{۲}$

۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۸

پاسخ Homework

۱ گزینه ۴

$$\frac{۳\cos(۲۴۸^\circ)-۲\sin(۱۵۸^\circ)}{\sin(۲۰۲^\circ)-\cos(۲۹۲^\circ)}=\frac{۳\cos(۲۷۰^\circ-۲۲^\circ)-۲\sin(۱۸۰^\circ-۲۲^\circ)}{\sin(۱۸۰^\circ+۲۲^\circ)-\cos(۲۷۰^\circ+۲۲^\circ)}$$
$$=\frac{-۳\sin ۲۲^\circ-۲\sin ۲۲^\circ}{-\sin ۲۲^\circ-\sin ۲۲^\circ}=\frac{۵}{۲}$$

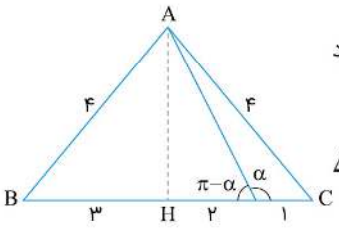
کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

۲ گزینه ۴

$$\tan(\pi-\alpha)=\frac{۱/۵}{۲}\Rightarrow\tan\alpha=-\frac{۳}{۴}$$
$$\tan(\frac{\pi}{۲}-\alpha)=\cot\alpha=\frac{۱}{\tan\alpha}=-\frac{۴}{۳}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

۳ گزینه ۳



اگر ارتفاع AH را رسم کنیم چون مثلث متساوی‌الساقین است این ارتفاع میانه نیز خواهد بود

پس:

$$\Delta AHC\Rightarrow AH^۲+۹=۱۶\Rightarrow AH^۲=۷\Rightarrow AH=\sqrt{۷}$$

پس:

$$\tan(\pi-\alpha)=\frac{\sqrt{۷}}{۲}\Rightarrow-\tan\alpha=\frac{\sqrt{۷}}{۲}\Rightarrow\tan\alpha=-\frac{\sqrt{۷}}{۲}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۳

۴ گزینه ۳

$$\tan x + \cot x = -۳ \Rightarrow \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = -۳$$

$$\Rightarrow \frac{\sin^۲ x + \cos^۲ x}{\sin x \cos x} = \frac{۱}{\sin x \cos x} = -۳ \Rightarrow \sin x \cos x = \frac{-۱}{۳}$$

$$(\sin x + \cos x)^۲ = ۱ + ۲\sin x \cos x = ۱ + (۲ \times (\frac{-۱}{۳})) = \frac{۱}{۳}$$

$$(\sin x + \cos x) = \pm\sqrt{\frac{۱}{۳}} \xrightarrow{\frac{۳\pi}{۴} < x < \pi} \sin x + \cos x = -\frac{۱}{\sqrt{۳}}$$

$$\frac{۱}{\sin^۳ x + \cos^۳ x} = \frac{۱}{(\sin x + \cos x)(۱ - \sin x \cos x)}$$

$$= \frac{۱}{(-\frac{۱}{\sqrt{۳}}) \times \frac{۴}{۳}} = -\frac{۳}{۴}\sqrt{۳} = -۰/۷۵\sqrt{۳}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۵ گزینه ۱

$$\tan x + \cot x = ۴ \Rightarrow \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = ۴$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{\sin x \cos x} = ۴ \Rightarrow \sin x . \cos x = \frac{۱}{۴}$$

$$۵\pi < ۴x < ۶\pi \xrightarrow{\div ۴} \frac{۵\pi}{۴} < x < \frac{۳\pi}{۲} \Rightarrow \sin x < \cos x < ۰ \Rightarrow \sin x - \cos x < ۰$$

$$(\sin x - \cos x)^۲ = \sin^۲ x + \cos^۲ x - ۲\sin x \cos x$$

$$= ۱ - ۲\sin x \cos x$$

$$\Rightarrow \sin x - \cos x = -\sqrt{۱ - ۲\sin x \cos x} = -\frac{۱}{\sqrt{۲}}$$

$$\Rightarrow \sin^۳ x - \cos^۳ x = (\sin x - \cos x)(\sin^۲ x + \cos^۲ x + \sin x \cos x)$$

$$= -\frac{۱}{\sqrt{۲}}(۱ + \frac{۱}{۴}) = -\frac{۵}{۴\sqrt{۲}}$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{\sin^۳ x - \cos^۳ x} = -۰/۸\sqrt{۲}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

۶ گزینه ۳

در فرض تست مقدار $\tan ۲۰^\circ$ به ما داده شده است، پس ابتدا تمامی زوایا را به‌صورت جمع یا تفاضل کمان‌های معروف و زاویهٔ ۲۰° می‌نویسیم. عبارت نهایی را برحسب $\tan ۲۰^\circ$ به دست آورده و حاصل عددی آن را محاسبه می‌کنیم.

$$A = \frac{\sin ۲۵۰^\circ + \sin ۷۰۰^\circ}{\cos ۵۶۰^\circ - \cos ۱۱۰^\circ} = \frac{\sin(۲۷۰ - ۲۰^\circ) + \sin(۷۲۰^\circ - ۲۰^\circ)}{\cos(۵۴۰^\circ + ۲۰^\circ) - \cos(۹۰^\circ + ۲۰^\circ)}$$

$$= \frac{-\cos ۲۰^\circ + \sin(-۲۰^\circ)}{\cos(۱۸۰^\circ + ۲۰^\circ) - (-\sin ۲۰^\circ)} = \frac{-\cos ۲۰^\circ - \sin ۲۰^\circ}{-\cos ۲۰^\circ + \sin ۲۰^\circ}$$

$$\xrightarrow{\div \cos ۲۰^\circ} A = \frac{\frac{-\cos ۲۰^\circ}{\cos ۲۰^\circ} - \frac{\sin ۲۰^\circ}{\cos ۲۰^\circ}}{\frac{-\cos ۲۰^\circ}{\cos ۲۰^\circ} + \frac{\sin ۲۰^\circ}{\cos ۲۰^\circ}} = \frac{-۱ - \tan ۲۰^\circ}{-۱ + \tan ۲۰^\circ} = \frac{-۱ - ۰/۴}{-۱ + ۰/۴} = \frac{-۱/۴}{-۰/۶} = \frac{۷}{۳}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۴

۷ گزینه ۴

با استفاده از اتحادهای مثلثاتی، عبارت‌های صورت و مخرج کسر را به ساده‌ترین شکل ممکن می‌نویسیم. می‌دانیم:

$$\cos(\frac{۳\pi}{۲} + \theta) = \sin\theta$$

$$\cos(\pi + \theta) = -\cos\theta$$

$$\sin(\pi - \theta) = \sin\theta$$

$$\sin(۳\pi + \theta) = \sin(\pi + \theta) = -\sin\theta$$

$$\frac{\cos(\frac{۳\pi}{۲} + \theta) - \cos(\pi + \theta)}{\sin(\pi - \theta) - \sin(۳\pi + \theta)} = \frac{\sin\theta - (-\cos\theta)}{\sin\theta - (-\sin\theta)} = \frac{\sin\theta + \cos\theta}{\sin\theta + \sin\theta}$$

باتوجه‌به اینکه مقدار $\tan\theta$ در صورت سؤال داده شده است، صورت و مخرج کسر را بر $\cos\theta$ تقسیم می‌کنیم تا کسر داده‌شده برحسب $\tan\theta$ به دست آید.

$$\frac{\sin\theta + \cos\theta}{۲\sin\theta} = \frac{\frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{\cos\theta}}{۲\frac{\sin\theta}{\cos\theta}} = \frac{\tan\theta + ۱}{۲\tan\theta} = \frac{۰/۲ + ۱}{۲(۰/۲)} = \frac{۱/۲}{۰/۴} = ۳$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۱

۸ گزینه ۱

علوی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۸ ۱۴۰۱
کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۴

گام اول

باتوجه‌به اینکه در صورت سؤال مقدار $\tan ۱۵^\circ$ داده شده است، سعی می‌کنیم تمام زوایا را برحسب زاویهٔ ۱۵° به دست آوریم.

گام دوم

$$A=\frac{\cos ۲۸۵^\circ-\sin ۲۵۵^\circ}{\sin ۵۲۵^\circ-\sin ۱۰۵^\circ}=\frac{\cos(۲۷۰^\circ+۱۵^\circ)-\sin(۲۷۰^\circ-۱۵^\circ)}{\sin(۵۴۰^\circ-۱۵^\circ)-\sin(۹۰^\circ+۱۵^\circ)}$$
$$=\frac{\cos(\frac{۳\pi}{۲}+۱۵^\circ)-\sin(\frac{۳\pi}{۲}-۱۵^\circ)}{\sin(۳\pi-۱۵^\circ)-\sin(\frac{\pi}{۲}+۱۵^\circ)}=\frac{\sin ۱۵^\circ-(-\cos ۱۵^\circ)}{\sin ۱۵^\circ-\cos ۱۵^\circ}=\frac{\sin ۱۵^\circ+\cos ۱۵^\circ}{\sin ۱۵^\circ-\cos ۱۵^\circ}$$

برای اینکه در کسر داده‌شده $\tan ۱۵^\circ$ ایجاد شود، صورت و مخرج کسر را بر $\cos ۱۵^\circ$ تقسیم می‌کنیم. بنابراین داریم:

$$A=\frac{\frac{\sin ۱۵^\circ+\cos ۱۵^\circ}{\cos ۱۵^\circ}}{\frac{\sin ۱۵^\circ-\cos ۱۵^\circ}{\cos ۱۵^\circ}}=\frac{\frac{\sin ۱۵^\circ}{\cos ۱۵^\circ}+\frac{\cos ۱۵^\circ}{\cos ۱۵^\circ}}{\frac{\sin ۱۵^\circ}{\cos ۱۵^\circ}-\frac{\cos ۱۵^\circ}{\cos ۱۵^\circ}}$$
$$=\frac{\tan ۱۵^\circ+۱}{\tan ۱۵^\circ-۱}=\frac{۰/۲۸+۱}{۰/۲۸-۱}=\frac{۱/۲۸}{-۰/۷۲}=-\frac{۱۲۸}{۷۲}=-\frac{۱۶}{۹}$$

۹ گزینه ۲

$$\tan(۳۰۰)\cos(۲۱۰)+\tan(۴۸۰)\sin(۸۴۰)$$
$$=\tan(۳۶۰^\circ-۶۰^\circ)\cos(۱۸۰^\circ+۳۰^\circ)+\tan(۳۶۰^\circ+۱۲۰^\circ)\sin(۷۲۰^\circ+۱۲۰^\circ)$$
$$=\tan(-۶۰^\circ)\cos(۱۸۰^\circ+۳۰^\circ)+\tan(۱۸۰^\circ-۶۰^\circ)\sin(۱۸۰^\circ-۶۰^\circ)$$
$$=(-\tan(۶۰^\circ))(-\cos(۳۰^\circ))+(-\tan(۶۰^\circ))\sin(۶۰^\circ)$$
$$=(-\sqrt{۳})(-\frac{\sqrt{۳}}{۲})+(-\sqrt{۳})(\frac{\sqrt{۳}}{۲})=\frac{۳}{۲}-\frac{۳}{۲}=۰$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹
علوی علوم تجربی یازدهم آزمون شماره ۶ ۱۴۰۱
علوی علوم تجربی یازدهم آزمون شماره ۷ ۱۴۰۱

۱۰ گزینه ۳

$\cos\alpha = \frac{۲}{۳}$ و α در ناحیهٔ چهارم است:

$$\sin\alpha = -\sqrt{۱-\frac{۴}{۹}} = -\frac{\sqrt{۵}}{۳} \quad , \quad \tan^۲\alpha = \frac{\sin^۲\alpha}{\cos^۲\alpha} = \frac{\frac{۵}{۹}}{\frac{۴}{۹}} = \frac{۵}{۴}$$

$$\frac{\sin(\alpha+\frac{\pi}{۲})-\sin(\alpha-\pi)}{|\tan^۲\alpha-۱|} = \frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\frac{۵}{۴}-۱} = \frac{\frac{۲-\sqrt{۵}}{۳}}{\frac{۱}{۴}} = \frac{۴(۲-\sqrt{۵})}{۳}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

۱۱ گزینه ۴

$$\tan(۲۸۵^\circ) = \tan(۲۷۰^\circ+۱۵^\circ) = -\cot(۱۵^\circ)$$

$$\tan(-۱۶۵^\circ) = -\tan(۱۶۵^\circ) = -\tan(۱۸۰^\circ-۱۵^\circ) = \tan(۱۵^\circ)$$

$$\sin(۱۰۹۵^\circ) = \sin(۱۰۸۰^\circ+۱۵^\circ) = \sin ۱۵^\circ$$

$$\cos(۲۵۵^\circ) = \cos(۲۷۰^\circ-۱۵^\circ) = -\sin(۱۵^\circ)$$

$$\tan(۲۸۵^\circ)\tan(-۱۶۵^\circ)-\sin(۱۰۹۵^\circ)\cos(۲۵۵^\circ) = -\cot(۱۵^\circ)\tan(۱۵^\circ)+\sin^۲(۱۵^\circ)$$

$$= -۱+\sin^۲(۱۵^\circ) = -\cos^۲(۱۵^\circ)$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۱۲ گزینه ۲

$$\tan(\frac{۱۷\pi}{۶}) - \tan(\frac{۱۸\pi}{۶}-\frac{\pi}{۶}) - \tan(-\frac{\pi}{۶}) - -\tan\frac{\pi}{۶} - -\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

$$\sin(\frac{۱۱\pi}{۳}) = \sin(\frac{۱۲\pi}{۳}-\frac{\pi}{۳}) = \sin(-\frac{\pi}{۳}) = -\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\cos(\frac{۱۰\pi}{۳}) = \cos(۳\pi+\frac{\pi}{۳}) = -\cos\frac{\pi}{۳} = -\frac{۱}{۲}$$

حاصل عبارت برابر است با:

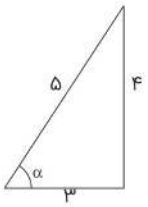
$$(-\frac{\sqrt{۳}}{۳})(-\frac{\sqrt{۳}}{۲}) - \frac{۱}{۲} = \frac{۳}{۶} - \frac{۱}{۲} = ۰$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۸

۱۳ گزینه ۳

$$\sin(\frac{۹\pi}{۲}+\alpha)=\sin(\frac{\pi}{۲}+\alpha)=\cos\alpha$$
$$\cos(\frac{۷\pi}{۲}-\alpha)=-\sin\alpha$$
$$\tan(\alpha-\frac{۳\pi}{۲})=-\tan(\frac{۳\pi}{۲}-\alpha)=-\cot\alpha$$

اگر $\tan\alpha=\frac{۴}{۳}$ باشد، با رسم مثلث سایر نسبت‌های مثلثاتی α را پیدا می‌کنیم:



$$\tan\alpha=\frac{۴}{۳}\ ,\cot\alpha=\frac{۳}{۴}$$
$$\sin\alpha=-\frac{۴}{۵}\ ,\cos\alpha=-\frac{۳}{۵}$$
$$\text{حاصل}:\cos\alpha(-\sin\alpha)-(-\cot\alpha)=-\frac{۳}{۵}(\frac{۴}{۵})+\frac{۳}{۴}$$
$$=-\frac{۱۲}{۲۵}+\frac{۳}{۴}=\frac{-۴۸+۷۵}{۱۰۰}=\frac{۲۷}{۱۰۰}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

۱۴ گزینه ۱

$$\frac{\tan x}{\sqrt{۱+\tan^۲x}}(\frac{۱}{\sin x}-\sin x)=\frac{\tan x}{\sqrt{\frac{۱}{\cos^۲x}}}(\frac{۱-\sin^۲x}{\sin x})$$
$$=\frac{\frac{\tan x}{۱}}{\frac{۱}{|\cos x|}}\times\frac{\cos^۲x}{\sin x}=\frac{\sin x}{\cos x}\times|\cos x|\times\frac{\cos^۲x}{\sin x}$$

اگر $\frac{\pi}{۲}<x<\pi$ باشد آنگاه $\cos x<۰$ است، پس $|\cos x|=-\cos x$ است. بنابراین:

$$\frac{\sin x}{\cos x}\times(-\cos x)\times\frac{\cos^۲x}{\sin x}=-\cos^۲x$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

۱۵ گزینه ۳

$$\sin\frac{۱۷\pi}{۳}=\sin(\frac{۱۸\pi}{۳}-\frac{\pi}{۳})=\sin(۶\pi-\frac{\pi}{۳})=\sin(-\frac{\pi}{۳})=-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\cos(-\frac{۱۷\pi}{۶})=\cos(\frac{۱۷\pi}{۶})=\cos(\frac{۱۸\pi}{۶}-\frac{\pi}{۶})=\cos(۳\pi-\frac{\pi}{۶})$$

$$=\cos(\pi-\frac{\pi}{۶})=-\cos\frac{\pi}{۶}=-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\tan(\frac{۱۹\pi}{۴})=\tan(\frac{۲۰\pi}{۴}-\frac{\pi}{۴})=\tan(-\frac{\pi}{۴})=-۱$$

$$\sin(-\frac{۱۱\pi}{۶})=-\sin\frac{۱۱\pi}{۶}=-\sin(\frac{۱۲\pi}{۶}-\frac{\pi}{۶})=\sin\frac{\pi}{۶}=\frac{۱}{۲}$$

حاصل عبارت خواسته‌شده برابر است با:

$$(-\frac{\sqrt{۳}}{۲})(-\frac{\sqrt{۳}}{۲})+(-۱)(\frac{۱}{۲})=\frac{۳}{۴}-\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۴}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۱۶ گزینه ۴

$$A=\sqrt{۱+\tan^{۲}x}(۲\sin^{۲}\frac{\pi}{۴}-\sin^{۲}x)=\sqrt{\frac{۱}{\cos^{۲}x}}\left(۲(\frac{\sqrt{۲}}{۲})^{۲}-\sin^{۲}x\right)$$

$$=\frac{۱}{|\cos x|}(۲\times\frac{۱}{۲}-\sin^{۲}x)=\frac{۱-\sin^{۲}x}{|\cos x|}=\frac{\cos^{۲}x}{|\cos x|}$$

چون $\pi<x<\frac{۳\pi}{۲}$ است، یعنی x در ناحیهٔ سوم قرار دارد و درنتیجه $|\cos x|=-\cos x$ است. پس:

$$A=\frac{\cos^{۲}x}{-\cos x}=-\cos x$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۱۷ گزینه ۲

$$\tan\frac{۱۱\pi}{۴}=\tan(\frac{۱۲\pi}{۴}-\frac{\pi}{۴})=\tan(۳\pi-\frac{\pi}{۴})=\tan(-\frac{\pi}{۴})=-۱$$

$$\sin\frac{۱۵\pi}{۴}=\sin(\frac{۱۶\pi}{۴}-\frac{\pi}{۴})=\sin(۴\pi-\frac{\pi}{۴})=\sin(-\frac{\pi}{۴})=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\cos\frac{۱۳\pi}{۴}=\cos(\frac{۱۲\pi}{۴}+\frac{\pi}{۴})=\cos(۳\pi+\frac{\pi}{۴})=-\cos(\frac{\pi}{۴})=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$A=\tan\frac{۱۱\pi}{۴}+\sin\frac{۱۵\pi}{۴}\cos\frac{۱۳\pi}{۴}=-۱+(\frac{-\sqrt{۲}}{۲})(\frac{-\sqrt{۲}}{۲})=-۱+\frac{۱}{۲}=-\frac{۱}{۲}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۸

روابط بین نسبت‌های مثلثاتی

روابط مثلثاتی کتاب دهم عبارت‌اند از:

۱) $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

اگر بخواهیم هر یک از نسبت‌های $\sin\theta$ یا $\cos\theta$ را برحسب دیگری بیابیم، داریم:

نتیجه:

$$\begin{cases}\sin^2\theta=1-\cos^2\theta \Rightarrow \sin\theta=\pm\sqrt{1-\cos^2\theta}\\ \cos^2\theta=1-\sin^2\theta \Rightarrow \cos\theta=\pm\sqrt{1-\sin^2\theta}\end{cases}$$

که علامت آن‌ها بر مبنای ناحیه‌ای که زاویه در آن قرار گرفته است، مشخص می‌شود.

۲) $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

۳) $\cot\theta=\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$

۴) $\tan\theta=\dfrac{1}{\cot\theta}$

۵) $\cot\theta=\dfrac{1}{\tan\theta}$

۶) $\tan\theta\times\cot\theta=1$

۷) $\dfrac{1}{\cos^2\theta}=1+\tan^2\theta$

۸) $\dfrac{1}{\sin^2\theta}=1+\cot^2\theta$

۹) $\tan\theta+\cot\theta=\dfrac{1}{\sin\theta.\cos\theta}$

۱۰) $(\sin\theta+\cos\theta)^2=1+2\sin\theta\cos\theta$

تمرین: اگر α در ناحیهٔ سوم بوده و $\cos\alpha=-\dfrac{3}{5}$ باشد، حاصل $\dfrac{\cot\alpha}{\sin\alpha+\tan\alpha}$ کدام است؟

۱) $\dfrac{32}{45}$ ۲) $\dfrac{45}{32}$ ۳) $\dfrac{31}{45}$ ۴) $\dfrac{45}{31}$

تمرین: اگر $\cos\theta=-\dfrac{3}{5}$ و انتهای کمان θ در ناحیه‌ی سوم مثلثاتی باشد، حاصل $\dfrac{\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$ کدام است؟

۱) $-\dfrac{12}{7}$ ۲) $-\dfrac{3}{7}$ ۳) $\dfrac{12}{7}$ ۴) $\dfrac{3}{7}$

تمرین: حاصل $\dfrac{\cot^2\alpha}{1+\cot^2\alpha}+\dfrac{\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}$ در صورت وجود کدام است؟

۱) $2\sin^2\alpha$ ۲) $\cos^2\alpha$ ۳) صفر ۴) ۱

تمرین: اگر $\tan\theta=\frac{3}{4}$، حاصل $(\tan\theta-\cot\theta)^2-\frac{1}{\cos^2\theta}$ کدام است؟

۱) $-\frac{11}{9}$ ۲) $-\frac{12}{25}$ ۳) $\frac{16}{25}$ ۴) $\frac{16}{9}$

تمرین: اگر $\sin x+\cos x=\frac{1}{2}$ باشد، حاصل $\tan x+\cot x$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{8}$ ۲) $-\frac{3}{8}$ ۳) $\frac{8}{3}$ ۴) $-\frac{8}{3}$

تمرین: اگر $\sin x\cos x=\frac{1}{3}$ باشد، حاصل $\sin^3 x-\cos^3 x$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۵}$ ۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ ۳) $\pm\frac{۹}{۴\sqrt{۳}}$ ۴) $\pm\frac{۴\sqrt{۳}}{۹}$

پاسخ: گزینه‌ی «۴» ـ $\sin^۳ x-\cos^۳ x$ را تجزیه می‌کنیم:

$$\sin^۳ x-\cos^۳ x=(\sin x-\cos x)(\sin^۲ x+\sin x\cos x+\cos^۲ x)=(\sin x-\cos x)(۱+\frac{۱}{۳})=\frac{۴}{۳}(\sin x-\cos x)$$

حالا داشته باش:

$$(\sin x-\cos x)^۲=\sin^۲ x+\cos^۲ x-۲\sin x\cos x=۱-۲(\frac{۱}{۳})=\frac{۱}{۳}\Rightarrow(\sin x-\cos x)^۲=\frac{۱}{۳}$$

$$\Rightarrow \sin x-\cos x=\pm\frac{۱}{\sqrt{۳}}$$

پس:

$$\sin^۳ x-\cos^۳ x=\frac{۴}{۳}(\pm\frac{۱}{\sqrt{۳}})=\pm\frac{۴}{۳\sqrt{۳}}=\pm\frac{۴\sqrt{۳}}{۹}$$

تمرین: اگر $\frac{\sin x+۲\cos x}{\sin x-۳\cos x}=۲$ باشد، حاصل $\frac{۱}{\sin x\cos x}$ کدام است؟

۱) $\frac{۶۵}{۸}$ ۲) $-\frac{۶۵}{۸}$ ۳) $\frac{۱۷}{۴}$ ۴) $-\frac{۱۷}{۴}$

پاسخ: گزینه‌ی «۱» ـ طرفین وسطین می‌کنیم، یادتون باشه هروقت صورت و مخرج یک کسر هم‌زمان هم sin و هم cos داشت، طرفین وسطین کنید و بعدش tan بسازید:

$$\frac{\sin x+۲\cos x}{\sin x-۳\cos x}=۲\Rightarrow \sin x+۲\cos x=۲\sin x-۶\cos x$$

$$\Rightarrow ۸\cos x=\sin x\xrightarrow[\text{تانژانت‌سازی}]{\div\cos x}۸=\tan x$$

از طرفی همیشه داریم:

$$\tan x+\cot x=\frac{۱}{\sin x\cos x}$$

$$۸+\frac{۱}{۸}=\frac{۱}{\sin x\cos x}\Rightarrow\frac{۱}{\sin x\cos x}=\frac{۶۵}{۸}$$

تمرین: اگر $۲\sin\alpha=۳\cos\alpha$، حاصل $\frac{۱+\cot\alpha}{۱+\tan\alpha}$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۹}{۴}$ ۴) ۶

$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{۳}{۲}$ ⟵ $\tan\alpha=\frac{۳}{۲}$

$$\frac{۱+\frac{۲}{۳}}{۱+\frac{۳}{۲}}=\frac{\frac{۵}{۳}}{\frac{۵}{۲}}=\frac{۲}{۳}$$

گزینه ۲

تمرین: مقدار عبارت $\frac{۱-\sin\alpha}{\cos\alpha}-\frac{\cos\alpha}{۱+\sin\alpha}$ به ازای $\alpha=۱۵^\circ$ کدام است؟

۱) صفر ۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ ۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۴) $\frac{\sqrt{۶}}{۲}$

$1-\sin^۲\alpha=\cos^۲\alpha$

$$\text{عبارت}=\frac{(۱+\sin\alpha)(۱-\sin\alpha)-\cos^۲\alpha}{\cos\alpha(۱+\sin\alpha)}=\frac{\text{صورت}}{\text{مخرج}}=۰$$

تمرین: حاصل $\frac{1}{\sin^4\theta}-\frac{1}{\sin^2\theta}-\cot^4\theta$ کدام است؟

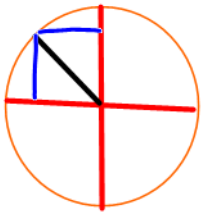
۱) $\sin^2\theta$ ۲) $\cos^2\theta$ ۳) $\tan^2\theta$ ۴) $\cot^2\theta$ ✓

تمرین: اگر $\frac{1+\cot x}{\tan x+1}=2$، حاصل $\frac{2\cos x-3\sin x}{\sin x+\cos^3 x}$ کدام است؟

۱) $\frac{2}{5}$ ۲) $\frac{1}{10}$ ۳) $\frac{2}{13}$ ۴) $\frac{5}{13}$ ✓

تمرین: حاصل $\sqrt{1+\cot^2\alpha}\sqrt{1-\sin^2\alpha}$، اگر α در ربع دوم دایره‌ی مثلثاتی باشد، کدام است؟

۱) $\tan\alpha$ ۲) $-\tan\alpha$ ۳) $\cot\alpha$ ۴) $-\cot\alpha$ ✓



تمرین: حاصل $\sqrt{1+\cos x}\sqrt{(1-\sin x)(1+\sin x)}$ کدام است؟ (x در ربع سوم است.)

۱) $\sin x$ ۲) $-\sin x$ ۳) $\cos x$ ۴) $-\cos x$

پاسخ: گزینهٔ «۲» ـ با استفاده از روابط $1-\sin^2 x=\cos^2 x$ و $1-\cos^2 x=\sin^2 x$ می‌توان نوشت:

$$\sqrt{1+\cos x}\sqrt{(1-\sin x)(1+\sin x)} = \sqrt{1+\cos x}\sqrt{1-\sin^2 x} = \sqrt{1+\cos x}\sqrt{\cos^2 x}$$

اتحاد مزدوج

$$= \sqrt{1+\cos x}\,|\cos x| \overset{\pi<x<\frac{3\pi}{2}}{=\!=} \sqrt{1+\cos x}(-\cos x) = \sqrt{1-\cos^2 x} = \sqrt{\sin^2 x} = |\sin x| \overset{\pi<x<\frac{3\pi}{2}}{=\!=} -\sin x$$

تمرین: در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC که در رأس $\hat{A}$ قائم است، حاصل $\frac{1}{\tan^2\hat{C}+1}+\sin^2(\frac{\pi}{2}-\hat{B})$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۱- ۴) ۲

پاسخ: گزینهٔ «۲» ـ روش اول: در مثلث ABC زاویهٔ $A=90^\circ$ است، پس داریم:

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180^\circ \Rightarrow 90^\circ+\hat{B}+\hat{C}=180^\circ \Rightarrow \hat{B}+\hat{C}=90^\circ$$

پس دو زاویهٔ B و C متمم‌اند. از طرفی با توجه به این که $\frac{1}{1+\tan^2\bigcirc}=\cos^2\bigcirc$ و $\sin^2(\frac{\pi}{2}-\bigcirc)=\cos^2\bigcirc$ است، پس می‌توان نوشت:

$$\frac{1}{1+\tan^2\hat{C}}+\sin^2(\frac{\pi}{2}-\hat{B})=\cos^2\hat{C}+\cos^2\hat{B}$$

از طرفی با توجه به این که دو زاویهٔ B و C متمم‌اند، می‌توان گفت $\cos\hat{C}=\sin\hat{B}$ و همچنین $\sin\hat{C}=\cos\hat{B}$ است. پس با استفاده از رابطهٔ $\cos\hat{C}=\sin\hat{B}$ می‌توان نوشت:

$$\cos^2\hat{C}+\cos^2\hat{B}=\sin^2\hat{B}+\cos^2\hat{B}=1$$

روش دوم: دو زاویهٔ B و C متمم‌اند، یعنی $\hat{B}+\hat{C}=\frac{\pi}{2}$، پس $\frac{\pi}{2}-\hat{B}=\hat{C}$ است. در نتیجه داریم:

$$\frac{1}{1+\tan^2\hat{C}}+\sin^2(\frac{\pi}{2}-\hat{B})=\frac{1}{1+\tan^2\hat{C}}+\sin^2\hat{C}=\cos^2\hat{C}+\sin^2\hat{C}=1$$

تمرین: با فرض $2\sin^2 x+3\cos^2 x=5\sin x\cos x$، مقدار $\cos^2 x$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{13}{4}$ ۳) ۴ ۴) $\frac{4}{13}$

پاسخ: گزینهٔ «۴» ـ طرفین معادلهٔ داده‌شده را بر $\cos^2 x$ تقسیم می‌کنیم:

$$2\sin^2 x+3\cos^2 x=5\sin x\cos x \xrightarrow{\div\cos^2 x} 2\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}+3\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x}=5\frac{\sin x\cos x}{\cos^2 x}$$

$$\Rightarrow 2\tan^2 x+3=5\tan x \Rightarrow 2\tan^2 x-5\tan x+3=0 \xrightarrow{a+b+c=0} \begin{cases}\tan x=1\\ \tan x=\frac{3}{2}\end{cases}$$

حالا با استفاده از رابطهٔ $1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$ داریم:

حالت اول: $\tan x=1 \Rightarrow 1+(1)^2=\frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow 2=\frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow \cos^2 x=\frac{1}{2}$

حالت دوم: $\tan x=\frac{3}{2} \Rightarrow 1+(\frac{3}{2})^2=\frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow 1+\frac{9}{4}=\frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow \frac{13}{4}=\frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow \cos^2 x=\frac{4}{13}$

که با توجه به گزینه‌ها پاسخ صحیح $\cos^2 x=\frac{4}{13}$ است.

(سراسری تجربی ۱۴۰۱)

تمرین: اگر $2\sin^2 x + \cos^2 x = \frac{4}{3}$ باشد، حاصل $\tan^2 x$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{1}{4}$

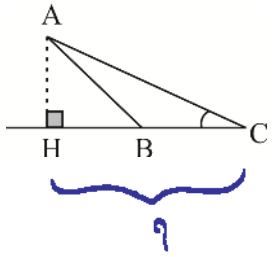
$\sin^2 x + \sin^2 x + \cos^2 x = \frac{4}{3}$

$\sin^2 x = \frac{1}{3}$, $\cos^2 x = \frac{2}{3}$, $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}$

(ریاضی ۹۹)

تمرین: در شکل زیر، فرض کنید $\sin \hat{C} = \frac{5}{13}$ و $CH = 9$. اندازه‌ی ارتفاع AH کدام است؟



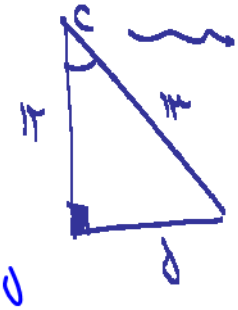
۱) ۳/۲۵ ۲) ۳/۵

۳) ۳/۶ ۴) ۳/۷۵

با رسم مثلث نام آوران

حروف ۵, ۱۲, ۱۳

بیفت



$\tan C = \frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}} = \frac{5}{12}$

$\triangle ACH: \tan \hat{C} = \frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}} = \frac{AH}{CH=9} = \frac{5}{12}$

$AH = \frac{9(5)}{12} = \frac{45}{12} = \frac{48}{12} - \frac{3}{12}$

$= 4 - \frac{1}{4}$

$= 4 - 0.25 = 3.75$

Homework (1)

۱ اگر $\sin\alpha = ۲\cos\alpha$ و انتهای کمان α در ربع سوم مثلثاتی باشد، مقدار $\cos\alpha$ کدام است؟ (با تغییر)

۱) $-\frac{۲\sqrt{۵}}{۱۰}$
۲) $\frac{\sqrt{۵}}{۵}$
۳) $\frac{۲\sqrt{۵}}{۵}$
۴) $\frac{\sqrt{۵}}{۱۰}$

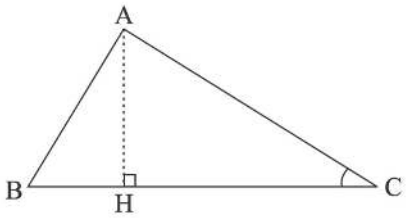
کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۲ اگر $۲\sin^۲x + \cos^۲x = \frac{۴}{۳}$ باشد، حاصل $\tan^۲x$ کدام است؟ $(x \neq ۰)$

۱) $\frac{۳}{۲}$
۲) $\frac{۲}{۳}$
۳) $\frac{۱}{۲}$
۴) $\frac{۱}{۴}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

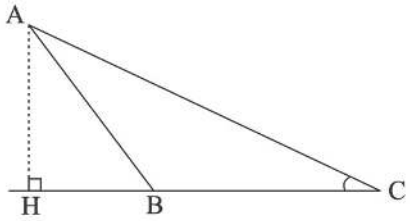
۳ در شکل زیر، $\cot C = \frac{\sqrt{۵}}{۲}$ و $AC = ۹۶$. اندازهٔ ارتفاع AH، کدام است؟



۱) ۴۸
۲) ۵۶
۳) ۶۴
۴) ۷۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

۴ در شکل زیر، فرض کنید $\sin C = \frac{۵}{۱۳}$ و $CH = ۹$. اندازهٔ ارتفاع AH، کدام است؟



۱) ۳/۲۵
۲) ۳/۵
۳) ۳/۶
۴) ۳/۷۵

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۹

پاسخ Homework (1)

-

۱ گزینه ۱

$$\sin\alpha = ۲\cos\alpha \Rightarrow \tan\alpha = ۲ \Rightarrow \tan^۲\alpha = ۴ \Rightarrow ۱ + \tan^۲\alpha = ۵$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{\cos^۲\alpha} = ۵ \Rightarrow \cos^۲\alpha = \frac{۱}{۵}$$

$$\xrightarrow{\cos\alpha<۰} \cos\alpha = -\frac{\sqrt{۵}}{۵} = -\frac{۲\sqrt{۵}}{۱۰}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۲ گزینه ۳

$$۲\sin^۲x + \cos^۲x = \frac{۴}{۳} \Rightarrow \sin^۲x + \underbrace{\sin^۲x + \cos^۲x}_{۱} = \frac{۴}{۳}$$

$$\Rightarrow \sin^۲x + ۱ = \frac{۴}{۳} \Rightarrow \sin^۲x = \frac{۱}{۳} \Rightarrow \cos^۲x = ۱ - \sin^۲x = ۱ - \frac{۱}{۳} = \frac{۲}{۳}$$

$$\tan^۲x = \frac{\sin^۲x}{\cos^۲x} = \frac{\frac{۱}{۳}}{\frac{۲}{۳}} = \frac{۱}{۲}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

۳ گزینه ۳

داریم:

$$۱ + \cot^۲C = ۱ + \frac{\cos^۲C}{\sin^۲C} = \frac{\sin^۲C + \cos^۲C}{\sin^۲C} = \frac{۱}{\sin^۲C} \Rightarrow ۱ + (\frac{\sqrt{۵}}{۲})^۲ = \frac{۱}{\sin^۲C}$$

$$\Rightarrow \sin^۲C = \frac{۴}{۹} \xrightarrow{C<۹۰^\circ} \sin C = \frac{۲}{۳}$$

$$\sin C = \frac{AH}{AC} \Rightarrow \frac{۲}{۳} = \frac{AH}{۹۶} \Rightarrow AH = \frac{۹۶ \times ۲}{۳} = ۶۴$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

۴ گزینه ۴

$$\sin C = \frac{۵}{۱۳} \xrightarrow{\cos C>۰} \cos C = \sqrt{۱ - \sin^۲C} = \sqrt{۱ - \frac{۲۵}{۱۶۹}} = \frac{۱۲}{۱۳}$$

$$\begin{cases} \tan C = \frac{\sin C}{\cos C} = \frac{\frac{۵}{۱۳}}{\frac{۱۲}{۱۳}} = \frac{۵}{۱۲} \\ \tan C = \frac{AH}{CH} = \frac{AH}{۹} \end{cases} \Rightarrow \frac{۵}{۱۲} = \frac{AH}{۹} \Rightarrow AH = \frac{۴۵}{۱۲} = \frac{۱۵}{۴} = ۳/۷۵$$

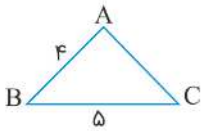
کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۹

Homework (2)

۱ اگر $\tan x = ۳$ باشد، حاصل $\frac{\sin^۳ x + \cos x}{\cos^۳ x + \sin x}$ کدام است؟

۱) $\frac{۳۵}{۳۱}$
۲) $\frac{۳۷}{۳۵}$
۳) $\frac{۳۱}{۳۵}$
۴) $\frac{۳۷}{۳۱}$

۲ اگر مساحت مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ برابر ۶ باشد، طول AC چقدر است؟



۱) ۳
۲) $\sqrt{۳}$
۳) ۶
۴) $\sqrt{۶}$

۳ ساده‌شدهٔ عبارت $(۱ - \cos\theta)^۲ - (۱ + \frac{۱}{\cos^۲\theta})(۱ - \sin^۲\theta)$ کدام است؟

۱) $\sin^۲\theta$
۲) $\cos^۲\theta$
۳) $-\cos^۲\theta$
۴) $۲\cos\theta$

۴ اگر $\frac{a}{\sin x} + \frac{b}{\cos x} = ۰$ باشد، $\tan x + \cot x$ کدام است؟

۱) $\frac{a^۲ + b^۲}{ab}$
۲) $-(\frac{a^۲ + b^۲}{ab})$
۳) $\frac{a^۲ + b^۲}{۲ab}$
۴) $-(\frac{a^۲ + b^۲}{۲ab})$

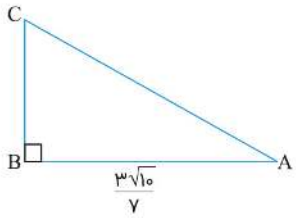
۵ ساده‌شدهٔ عبارت $(۱ - \tan^۲\theta)(۱ - \sin^۲\theta)$ کدام است؟

۱) $۲\cot^۲\theta$
۲) $۲\tan^۲\theta$
۳) $۱ - ۲\cos^۲\theta$
۴) $۱ - ۲\sin^۲\theta$

۶ اگر $\sin\alpha = \frac{-۶}{۱۰}$ باشد و α زاویه‌ای در ربع سوم باشد، آنگاه حاصل $\tan\alpha - \cot^۲\alpha$ کدام است؟

۱) $\frac{-۶}{۱۳}$
۲) $\frac{۶}{۱۳}$
۳) $\frac{۳۶}{۹۱}$
۴) $\frac{-۳۷}{۳۶}$

۷ اندازهٔ وتر مثلث داده‌شده کدام است؟ $(\sin A = \frac{۲}{۷})$



۱) ۱

۲) $\sqrt{۲}$

۳) $\sqrt{۳}$

۴) ۲

۸ اگر $\tan 0 = ۴$ باشد، حاصل $\sin 0 - \cos 0$ کدام است؟ (0 حاده است)

۱) $\sqrt{\frac{۵}{۱۷}}$

۲) $\sqrt{\frac{۹}{۱۷}}$

۳) $\sqrt{\frac{۵}{۳}}$

۴) $\sqrt{\frac{۵}{۱۵}}$

۹ اگر $\sin x + \cos x = \frac{۱}{۳}$ باشد، حاصل عبارت $\sin^۳ x + \cos^۳ x$ کدام است؟

۱) $\frac{۱۳}{۲۷}$

۲) $\frac{۱۳}{۸۱}$

۳) $\frac{۱۷}{۲۷}$

۴) $\frac{۱۷}{۸۱}$

پاسخ Homework (2)

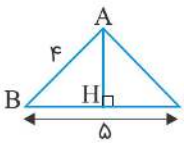
۱ گزینه ۴

صورت و مخرج را بر $\cos^{۳}x$ تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{\sin^{۳}x+\cos x}{\cos^{۳}x+\sin x}=\frac{\frac{\sin^{۳}x}{\cos^{۳}x}+\frac{\cos x}{\cos^{۳}x}}{\frac{\cos^{۳}x}{\cos^{۳}x}+\frac{\sin x}{\cos^{۳}x}}=\frac{\tan^{۳}x+\frac{۱}{\cos^{۲}x}}{۱+\frac{\sin x}{\cos x}\times\frac{۱}{\cos^{۲}x}}$$

$$=\frac{\tan^{۳}x+(۱+\tan^{۲}x)}{۱+\tan x(۱+\tan^{۲}x)}=\frac{۳^{۳}+(۱+(۳)^{۲})}{۱+۳(۱+(۳)^{۲})}=\frac{۲۷+۱۰}{۱+۳۰}=\frac{۳۷}{۳۱}$$

۲ گزینه ۱



$$S_{ABC}=۶\Rightarrow\frac{۱}{۲}AB\cdot BC\cdot\sin B=۶\Rightarrow\frac{۱}{۲}\times۴\times۵\sin B=۶\Rightarrow۱۰\sin B=۶\Rightarrow\sin B=\frac{۳}{۵}$$

$$\sin^{۲}B+\cos^{۲}B=۱\Rightarrow(\frac{۳}{۵})^{۲}+\cos^{۲}B=۱\Rightarrow\cos^{۲}\theta=\frac{۱۶}{۲۵}\Rightarrow\cos B=\frac{۴}{۵}$$

$$\sin B=\frac{AH}{AB}\Rightarrow\frac{۳}{۵}=\frac{AH}{۴}\Rightarrow AH=\frac{۱۲}{۵}$$

$$\cos B=\frac{BH}{AB}\Rightarrow\frac{۴}{۵}=\frac{BH}{۴}\Rightarrow BH=\frac{۱۶}{۵}\ ,\ HC=BC-BH$$

$$\Rightarrow۵-\frac{۱۶}{۵}=\frac{۹}{۵}\Rightarrow HC=\frac{۹}{۵}\Rightarrow(\frac{۹}{۵})^{۲}+(\frac{۱۲}{۵})^{۲}=AC^{۲}\Rightarrow AC=۳$$

۳ گزینه ۴

$$(۱-\sin^{۲}\theta)(۱+\frac{۱}{\cos^{۲}\theta})-(۱-\cos\theta)^{۲}=\cos^{۲}\theta(۱+\frac{۱}{\cos^{۲}\theta})-(۱+\cos^{۲}\theta-۲\cos\theta)$$

$$=\cos^{۲}\theta+۱-۱-\cos^{۲}\theta+۲\cos\theta=۲\cos\theta$$

۴ گزینه ۲

$$\frac{a}{\sin x}+\frac{b}{\cos x}=0 \Rightarrow \frac{a\cos x+b\sin x}{\sin x.\cos x}=0 \Rightarrow a\cos x+b\sin x=0$$
$$\Rightarrow a\cos x=-b\sin x \Rightarrow \frac{\cos x}{\sin x}=-\frac{b}{a} \Rightarrow \cot x=-\frac{b}{a}$$
$$\Rightarrow \tan x=-\frac{a}{b} \Rightarrow \tan x+\cot x=-\frac{a}{b}-\frac{b}{a}$$
$$\Rightarrow -(\frac{a}{b}+\frac{b}{a})=-(\frac{a^2+b^2}{ab})$$

۵ گزینه ۴

$$(1-\sin^2\theta)(1-\tan^2\theta)=\cos^2\theta(1-\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta})$$
$$=\underbrace{\cos^2\theta}_{1-\sin^2\theta}-\sin^2 0=1-2\sin^2 0$$

۶ گزینه ۴

$$\cos\alpha=\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha} \Rightarrow \cos\alpha=\pm\sqrt{1-\frac{36}{100}}=\pm\frac{8}{10}$$
$$\xrightarrow{\text{ربع سوم}} \cos\alpha=-\frac{8}{10}$$
$$\tan\alpha=\frac{-0/6}{-0/8}=\frac{3}{4} \Rightarrow \cot\alpha=\frac{4}{3}$$
$$\Rightarrow \tan\alpha-\cot^2\alpha=\frac{3}{4}-\frac{16}{9}=-\frac{37}{36}$$

۷ گزینه ۲

$$\cos A=\sqrt{1-\sin^2 A}=\sqrt{1-\frac{4}{49}}=\sqrt{\frac{45}{49}}=\frac{3\sqrt{5}}{7}$$
$$\cos A=\frac{AB}{AC}=\frac{3\sqrt{5}}{7} \Rightarrow \frac{\frac{3\sqrt{10}}{7}}{AC}=\frac{3\sqrt{5}}{7}$$
$$3\sqrt{10}=3\sqrt{5}\,AC \Rightarrow AC=\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}}=\sqrt{2}$$

۸ گزینه ۲

$$\tan\theta = ۴ \Rightarrow \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = ۴ \Rightarrow \sin\theta = ۴\cos\theta$$

$$\sin^۲\theta + \cos^۲\theta = ۱ \xrightarrow{\sin\theta = ۴\cos\theta} (۴\cos\theta)^۲ + \cos^۲\theta = ۱ \Rightarrow ۱۷\cos^۲\theta = ۱$$

$$\Rightarrow \cos\theta = \pm\sqrt{\frac{۱}{۱۷}} \xrightarrow{\theta \text{ حاده است}} \cos\theta = \sqrt{\frac{۱}{۱۷}} \xrightarrow{\sin\theta = ۴\cos\theta} \sin\theta = ۴\sqrt{\frac{۱}{۱۷}}$$

$$\sin\theta - \cos\theta = ۴\sqrt{\frac{۱}{۱۷}} - \sqrt{\frac{۱}{۱۷}} = ۳\sqrt{\frac{۱}{۱۷}} = \sqrt{\frac{۹}{۱۷}}$$

۹ گزینه ۱

$$\sin x + \cos x = \frac{۱}{۳} \xrightarrow{\text{توان } ۲} \sin^۲x + \cos^۲x + ۲\sin x \cdot \cos x = \frac{۱}{۹}$$

$$\Rightarrow ۱ + ۲\sin x \cdot \cos x = \frac{۱}{۹} \Rightarrow ۲\sin x \cdot \cos x = -\frac{۸}{۹} \Rightarrow \sin x \cdot \cos x = -\frac{۴}{۹}$$

$$\sin^۳x + \cos^۳x = (\sin x + \cos x)(\sin^۲x + \cos^۲x - \sin x \cdot \cos x)$$

$$= \frac{۱}{۳}(۱ - (-\frac{۴}{۹})) = \frac{۱}{۳} \times \frac{۱۳}{۹} = \frac{۱۳}{۲۷}$$

نسبت‌های مثلثاتی $\alpha \pm \beta$ (ویژه حسابان)

۱) $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

۲) $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

تمرین: حاصل $\sin ۱۵^\circ$ و $\sin ۷۵^\circ$ را بیابید:

$$\sin(۷۵^\circ)=\sin(۴۵^\circ+۳۰^\circ)=\sin ۴۵^\circ\cos ۳۰^\circ+\cos ۴۵^\circ\sin ۳۰^\circ=(\frac{\sqrt{۲}}{۲})(\frac{\sqrt{۳}}{۲})+(\frac{\sqrt{۲}}{۲})(\frac{۱}{۲})=\frac{\sqrt{۶}}{۴}+\frac{\sqrt{۲}}{۴}$$

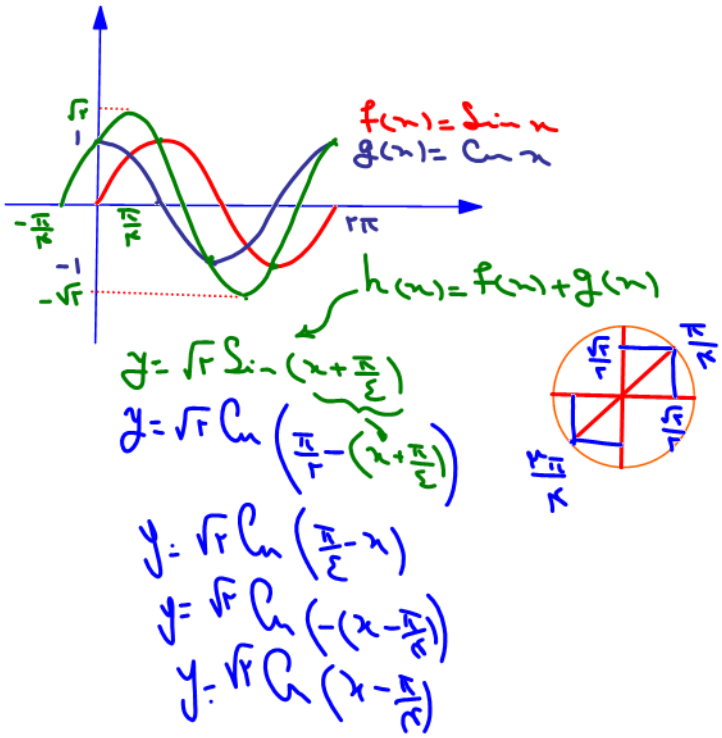
$$=\frac{\sqrt{۶}+\sqrt{۲}}{۴}=\cos ۱۵^\circ$$

$$\sin(۱۵^\circ)=\sin(۴۵^\circ-۳۰^\circ)=\sin ۴۵^\circ\cos ۳۰^\circ-\cos ۴۵^\circ\sin ۳۰^\circ=(\frac{\sqrt{۲}}{۲})(\frac{\sqrt{۳}}{۲})-(\frac{\sqrt{۲}}{۲})(\frac{۱}{۲})=\frac{\sqrt{۶}}{۴}-\frac{\sqrt{۲}}{۴}$$

$$=\frac{\sqrt{۶}-\sqrt{۲}}{۴}=\cos ۷۵^\circ$$

۳) $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

۴) $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$



۵) $\sin x+\cos x=\sqrt{۲}\sin(x+\frac{\pi}{۴})=\sqrt{۲}\cos(x-\frac{\pi}{۴})$

۶) $\sin x-\cos x=\sqrt{۲}\sin(x-\frac{\pi}{۴})=-\sqrt{۲}\cos(x+\frac{\pi}{۴})$

۷) $\tan(\alpha\pm\beta)=\frac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{۱\mp\tan\alpha\tan\beta}$

۸) $\tan(\frac{\pi}{۴}+\alpha)=\frac{\tan\frac{\pi}{۴}+\tan\alpha}{۱-\tan\frac{\pi}{۴}\cdot\tan\alpha}=\frac{۱+\tan\alpha}{۱-\tan\alpha}$

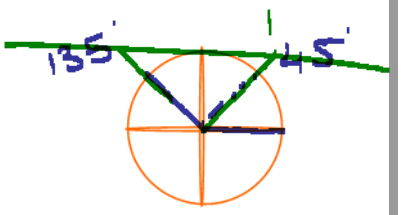
۹) $\tan(\frac{\pi}{۴}-\alpha)=\frac{\tan\frac{\pi}{۴}-\tan\alpha}{۱+\tan\frac{\pi}{۴}\cdot\tan\alpha}=\frac{۱-\tan\alpha}{۱+\tan\alpha}$

تمرین: حاصل $\tan ۱۵^\circ$ و $\tan ۷۵^\circ$ را بیابید.

سؤال برای امتحان تشریحی

$$\tan(۱۵^\circ)=\tan(۴۵^\circ-۳۰^\circ)=\frac{۱-\tan ۳۰^\circ}{۱+\tan ۳۰^\circ}=\frac{۱-\frac{\sqrt{۳}}{۳}}{۱+\frac{\sqrt{۳}}{۳}}$$

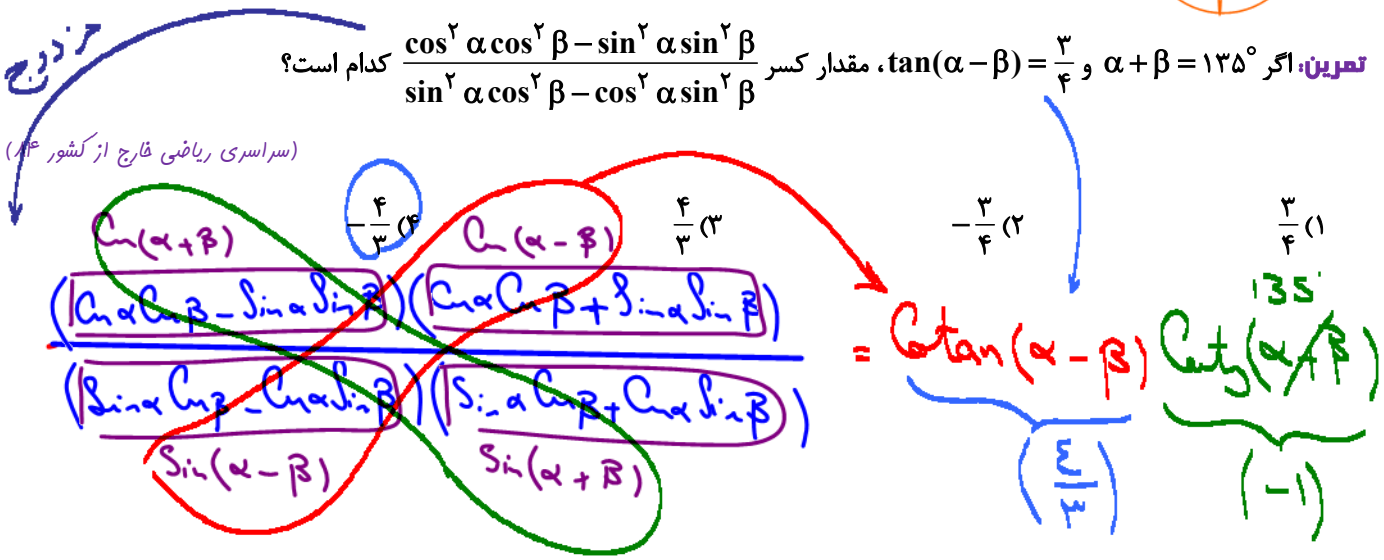
$$\tan(۷۵^\circ)=\tan(۴۵^\circ+۳۰^\circ)=\frac{۱+\tan ۳۰^\circ}{۱-\tan ۳۰^\circ}=\frac{۱+\frac{\sqrt{۳}}{۳}}{۱-\frac{\sqrt{۳}}{۳}}$$



تمرین: اگر $\alpha+\beta=۱۳۵^\circ$ و $\tan(\alpha-\beta)=\frac{۳}{۴}$، مقدار کسر $\frac{\cos^۲\alpha\cos^۲\beta-\sin^۲\alpha\sin^۲\beta}{\sin^۲\alpha\cos^۲\beta-\cos^۲\alpha\sin^۲\beta}$ کدام است؟

(سراسری ریاضی خارج از کشور ۹۴)

۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) $-\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۴}{۳}$ ۴) $-\frac{۴}{۳}$

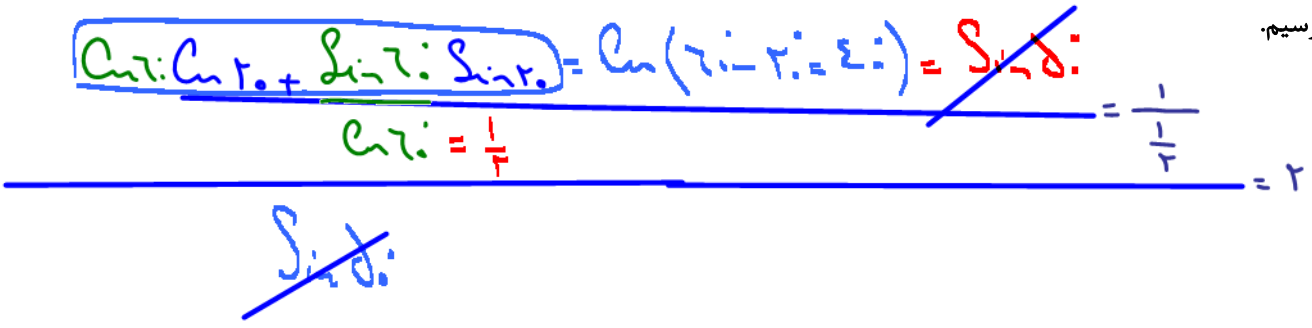


تمرین: مقدار عبارت $\frac{\cos ۲۰^\circ+\sqrt{۳}\sin ۲۰^\circ}{\sin ۵۰^\circ}$ چه‌قدر است؟

$\tan ۶۰^\circ = \frac{\sin ۶۰^\circ}{\cos ۶۰^\circ}$

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) $\sqrt{۳}$ ۳) ۲ ۴) ۳

نکته: در این مدل از سؤالات می‌توانیم به جای $\sqrt{۳}$ قرار دهیم $\tan ۶۰^\circ$ یا $\frac{\sin ۶۰^\circ}{\cos ۶۰^\circ}$ و سپس با مخرج مشترک‌گیری به راحتی به جواب برسیم.



تمرین: اگر $\frac{\sin(x-\frac{\pi}{4})}{\sin(x+\frac{\pi}{4})}=2$ باشد، $\tan x$ کدام است؟ (سراسری تجربی ۹۷)

۱) -3 ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) 3

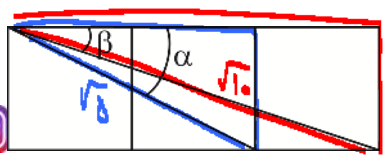
تمرین: اگر $\sin(\alpha+\beta)=\frac{2}{3}$ و $\sin(\alpha-\beta)=\frac{1}{4}$ باشد، حاصل $\sin\alpha\cos\beta$ کدام است؟

۱) $\frac{11}{12}$ ۲) $\frac{7}{12}$ ۳) $\frac{7}{24}$ ۴) $\frac{11}{24}$

تمرین: اگر انتهای کمان α در ربع اول دایرهٔ مثلثاتی و $\tan\alpha=\frac{1}{7}$ باشد، مقدار $\sin(\frac{13\pi}{4}+\alpha)$ کدام است؟ (خارج ریاضی ۹۹)

۱) $-\frac{4}{5}$ ۲) $-\frac{3}{5}$ ۳) $\frac{3}{5}$ ۴) $\frac{4}{5}$

تمرین: شکل زیر از سه مربع یکسان به طول ضلع واحد تشکیل شده است. حاصل $\cos(\alpha+\beta)$ کدام است؟

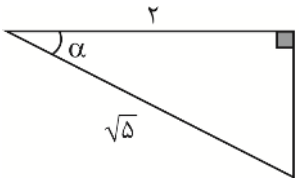


۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۲) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

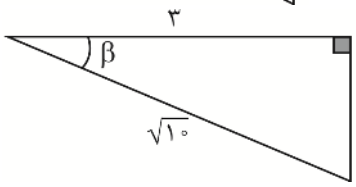
www.samansalamian.ir

۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$

پاسخ: گزینه‌ی «۱» ـ ابتدا به کمک فیثاغورس اندازه‌ی وترهای دو مثلث قائم‌الزاویه را به دست می‌آوریم و سپس:



$$\Rightarrow \sin\alpha = \frac{۱\times\sqrt{۵}}{\sqrt{۵}\times\sqrt{۵}} = \frac{\sqrt{۵}}{۵}, \cos\alpha = \frac{۲\times\sqrt{۵}}{\sqrt{۵}\times\sqrt{۵}} = \frac{۲\sqrt{۵}}{۵}$$



$$\Rightarrow \sin\beta = \frac{۱\times\sqrt{۱۰}}{\sqrt{۱۰}\times\sqrt{۱۰}} = \frac{\sqrt{۱۰}}{۱۰}, \cos\beta = \frac{۳\times\sqrt{۱۰}}{\sqrt{۱۰}\times\sqrt{۱۰}} = \frac{۳\sqrt{۱۰}}{۱۰}$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta = (\frac{۲\sqrt{۵}}{۵}\times\frac{۳\sqrt{۱۰}}{۱۰}) - (\frac{\sqrt{۵}}{۵}\times\frac{\sqrt{۱۰}}{۱۰}) = \frac{۶\sqrt{۵۰}}{۵۰} - \frac{\sqrt{۵۰}}{۵۰} = \frac{۵\sqrt{۵۰}}{۵۰} = \frac{\sqrt{۵۰}}{۱۰}$$

$$= \frac{۵\sqrt{۲}}{۱۰} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

تمرین: حاصل عبارت $\sin ۱۰^\circ + \cos ۱۰^\circ - \sqrt{۲}\sin ۳۵^\circ$ را پیدا کنید.

پاسخ: ابتدا حاصل $\sin ۱۰^\circ + \cos ۱۰^\circ$ را با استفاده از رابطه‌های ذکرشده می‌نویسیم:

$$\sin ۱۰^\circ + \cos ۱۰^\circ - \sqrt{۲}\cos ۵۵^\circ = \sqrt{۲}\sin(۱۰^\circ + ۴۵^\circ) - \sqrt{۲}\cos ۵۵^\circ = \sqrt{۲}\sin ۵۵^\circ - \sqrt{۲}\cos ۵۵^\circ$$

$$= \sqrt{۲}(\sin ۵۵^\circ - \cos ۵۵^\circ) = \sqrt{۲}\times\sqrt{۲}\sin(۵۵^\circ - ۴۵^\circ) = ۲\sin ۱۰^\circ$$

تمرین: اگر $\sin(x+y) = \frac{۳}{۵}$، $\sin(x-y) = \frac{۵}{۱۳}$ و $x+y$ و $x-y$ هر دو حاده باشند، مقدار $\sin ۲x$ و $\sin ۲y$ را به‌دست آورید.

پاسخ: اول که به این سؤال نگاه می‌کنیم، هیچ ارتباطی بین آن‌چه داده شده و آن‌چه خواسته شده پیدا نمی‌کنیم. اما اگر فکر کنیم شاید بتوانیم بین عبارت‌های $x+y$، $x-y$، $۲x$ و $۲y$ رابطه‌ای پیدا کنیم. قبل از این که من بگویم چه خبر است خودتان کمی فکر کنید. و اما رابطهٔ بین این عامل‌ها:

$$۲x = (x+y)+(x-y) \qquad ۲y = (x+y)-(x-y)$$

یعنی $۲x$ و $۲y$ را می‌شود با جمع و تفریق کردن $x+y$ و $x-y$ پیدا کرد. حالا دیگر می‌توانیم $\sin ۲x$ و $\sin ۲y$ را پیدا کنیم:

$$\sin ۲x = \sin((x+y)+(x-y)) = \sin(x+y)\cos(x-y) + \cos(x+y)\sin(x-y)$$

(دقت کنید که در نوشتن این رابطه فرض کردیم $x+y=\alpha$ و $x-y=\beta$ و رابطهٔ $\sin(\alpha+\beta)$ را بسط داده‌ایم). خُب، حالا باید مقادیر $\sin(x+y)$، $\sin(x-y)$، $\cos(x+y)$ و $\cos(x-y)$ را پیدا کنیم. مقدار سینوس‌ها معلوم است، پس مقدار کسینوس‌ها را با استفاده از اتحادهای مثلثاتی پیدا می‌کنیم:

$$\cos^۲(x+y) = ۱-\sin^۲(x+y) = ۱-\frac{۹}{۲۵} = \frac{۱۶}{۲۵} \xrightarrow{\text{حاده } x+y} \cos(x+y) = \frac{۴}{۵}$$

$$\cos^۲(x-y) = ۱-\sin^۲(x-y) = ۱-\frac{۲۵}{۱۶۹} = \frac{۱۴۴}{۱۶۹} \xrightarrow{\text{حاده } x-y} \cos(x-y) = \frac{۱۲}{۱۳}$$

پس داریم:

$$\sin ۲x = (\frac{۳}{۵})(\frac{۱۲}{۱۳}) + (\frac{۴}{۵})(\frac{۵}{۱۳}) = \frac{۳۶}{۶۵} + \frac{۲۰}{۶۵} = \frac{۵۶}{۶۵}$$

مقدار $\sin ۲y$ را هم به همین ترتیب پیدا می‌کنیم. پیداکردن این مقدار را می‌گذاریم به عهدهٔ شما. جواب آخرش باید برابر $\frac{۱۶}{۶۵}$ شود. (جواب

آخر را به این خاطر داده‌ام که بررسی کنید که آیا درست حل کرده‌اید یا نه.)

تمرین [مهم]: از حل دستگاه $\begin{cases}\tan(\alpha+\beta)=۸\\ \tan(\alpha-\beta)=۷\end{cases}$ حاصل $\tan ۲\alpha$ و $\tan ۲\beta$ را بیابید.

$$\begin{cases}\alpha+\beta=x \Rightarrow \tan(\alpha+\beta)=\tan x=۸\\ \alpha-\beta=y \Rightarrow \tan(\alpha-\beta)=\tan y=۷\end{cases}$$

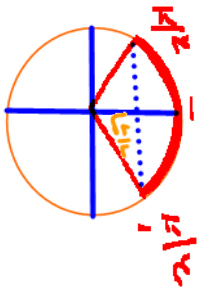
$$x+y=۲\alpha \Rightarrow \tan(x+y)=\tan ۲\alpha=\frac{\tan x+\tan y}{۱-\tan x\tan y}=\frac{۸+۷}{۱-۵۶}=-\frac{۱۵}{۵۵}$$

$$x-y=۲\beta \Rightarrow \tan(x-y)=\tan ۲\beta=\frac{\tan x-\tan y}{۱+\tan x\tan y}=\frac{۸-۷}{۱+۵۶}=\frac{۱}{۵۷}$$

پس $\tan ۲\alpha=\frac{۱۵}{۵۵}$ و $\tan ۲\beta=\frac{۱}{۵۷}$ است.

تمرین: اگر $\frac{\sqrt{۲}}{۲}\le \cos ۳x.\cos ۲x+\sin ۳x.\sin ۲x\le ۱$ آن‌گاه حدود تغییرات x کدام است؟

۱) $-\frac{\pi}{۴}\le x\le\frac{\pi}{۴}$ ۲) $\frac{\pi}{۴}\le x\le\frac{\pi}{۲}$ ۳) $\frac{\pi}{۲}\le x\le\frac{۳\pi}{۴}$ ۴) $\pi\le x\le\frac{۵\pi}{۴}$



$$\frac{\sqrt{۲}}{۲}\le \cos(۳x-۲x=x)\le ۱$$

تمرین: عبارت $\frac{\cos ۲a}{\cos a}-\frac{\sin ۲a}{\sin a}$، وقتی $a\neq\frac{k\pi}{۲}$ باشد، برابر است با:

۱) $\frac{۱}{\cos a}$ ۲) $-\frac{۱}{\cos a}$ ۳) $\frac{۱}{\sin a}$ ۴) $-\frac{۱}{\sin a}$

$$\frac{\sin a\cos ۲a-\cos a\sin ۲a}{\sin a\cos a}=\frac{\sin(a-۲a)=\sin(-a)=-\sin a}{\sin a\cos a}$$

$$\frac{\tan\frac{\pi}{۴}-\tan ۲۰^\circ}{۱+\tan\frac{\pi}{۴}\tan ۲۰^\circ}=\tan\left(\frac{۴۵}{۴}-۲۰^\circ=۲۵^\circ\right)$$

تمرین: حاصل کسر $\frac{۱-\tan ۲۰^\circ}{۱+\tan ۲۰^\circ}$ کدام است؟

۱) $۱-\tan ۲۰^\circ$ ۲) $\tan ۲۵^\circ$ ۳) $۱+\tan ۲۰^\circ$ ۴) $\tan ۱۵^\circ$

تمرین: اگر $\tan(\alpha+20^\circ)=\frac{3}{4}$ باشد، $\cot(25^\circ-\alpha)$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

تمرین: اگر $\alpha+\beta=\frac{5\pi}{4}$، حاصل $(1+\tan\alpha)(1+\tan\beta)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

(سنجش)

تمرین: حاصل عبارت $A=(1+\tan 18^\circ)(1+\tan 27^\circ)$ کدام است؟

۱) $\sqrt{2}$ ۲) ۱ ۳) $2\sqrt{2}$ ۴) ۲

(گزینه‌ی دو)

تمرین: اگر $\tan\alpha$ و $\tan\beta$ برابر ریشه‌های معادلهٔ $2x^2+3x-1=0$ باشند، $\tan(\alpha+\beta)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) -3 ۴) -1

(ریاضی ۹۹)

تمرین: اگر $\cot(x-y)=۵$ و $\tan(x+y)=۳$، حاصل $\tan ۲x$ کدام است؟

۱) ۸ ۲) $\frac{۷}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۸}$ ۴) $\frac{۴}{۷}$

$\tan\alpha=۳$

$\tan(x-y)=\frac{۱}{۵}$

$\tan\beta=\frac{۱}{۵}$

$۲x=(x+y)+(x-y)$

$\tan ۲x=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{۱-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{۳+\frac{۱}{۵}=\frac{۱۶}{۵}}{۱-\frac{۳}{۵}=\frac{۲}{۵}}=\frac{۱۶}{۲}=۸$

۱ حاصل عبارت $\frac{\sin^۴\alpha + ۴\cos^۲\alpha}{۱+\cos^۲\alpha} - \frac{\cos^۴\alpha + ۴\sin^۲\alpha}{۱+\sin^۲\alpha}$ کدام است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) $\cos ۲\alpha$
۴) $\sin ۲\alpha$

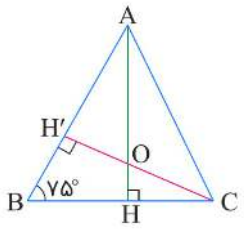
کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۳

۲ حاصل عبارت $(۳\cos ۴x + \sqrt{۲}\sin x - \sqrt{۲}\cos x)$ به‌ازای $x = \frac{\pi}{۱۲}$ کدام است؟

۱) ۱
۲) $\frac{۱}{۲}$
۳) $\sqrt{۲}$
۴) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۳

۳ در شکل زیر مثلث ABC متساوی‌الساقین و طول ساق AC برابر ۶ است. مساحت مثلث OHC کدام است؟ (با تغییر)



۱) $\frac{۲}{۳}$
۲) $\frac{۴}{۳}$
۳) $\frac{۹}{۲(۷+۴\sqrt{۳})}$
۴) $\frac{۹}{۷+۴\sqrt{۳}}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

۴ زاویهٔ $x\hat{O}y$ و نقطهٔ M داخل زاویه با شرط $۲M\hat{O}y = x\hat{O}M$، مفروض است. از نقطهٔ M عمودهای MN و MP را به ترتیب بر نیم‌خط‌های Ox و Oy رسم می‌کنیم. نسبت $\frac{MN}{MP}$، کدام است؟

۱) $\frac{OP}{ON}$
۲) $\frac{OP}{OM}$
۳) $\frac{۲OP}{ON}$
۴) $\frac{۲OP}{OM}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۰

۵ اگر $f(\alpha) = ۴\sin(\alpha)\cos(۲\alpha) + ۲\sin(\alpha)$ باشد، مقدار $f(\frac{۴۱\pi}{۹})$ کدام است؟

۱) $-\sqrt{۳}$ ۲) $\sqrt{۳}$

۳) ۱ ۴) -۱

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۰

۶ اگر زاویهٔ α در ناحیهٔ سوم مثلثاتی و $\tan(\alpha) = \frac{۳}{۴}$ باشد، مقدار $\frac{\cos(۲\alpha - \frac{\pi}{۲}) + \cos(\alpha + \pi)}{\cot(۲\alpha)}$ کدام است؟

۱) $-\frac{۹۶}{۱۷۵}$ ۲) $\frac{۱۰۵۶}{۱۷۵}$

۳) $\frac{۹۶}{۱۷۵}$ ۴) $-\frac{۱۰۵۶}{۱۷۵}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

۷ اندازهٔ زاویهٔ A در مثلث ABC، ۴۵ درجه بیشتر از اندازهٔ زاویهٔ B است. حاصل $۲\cos A \sin B - \sin C$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۲) $-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۴) $-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۱

۸ اگر $۱۰(\sin x + \cos x) = ۶\sqrt{۵}$ باشد، مقدار $\tan x$ کدام عدد می‌تواند باشد؟

۱) $-\frac{۱}{۳}$ ۲) -۲

۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) ۳

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

۹ اگر $f(x) = ۳۲\cos^۲(x)\cos^۲(۲x)\cos^۲(۴x)\cos^۲(۸x)\cos^۲(۱۶x)$ باشد، مقدار $f\left(\frac{\pi}{۱۲}\right)$ کدام است؟

۱) $\frac{۶ + \sqrt{۲۷}}{۳۲}$ ۲) $\frac{۶ + \sqrt{۲۷}}{۱۶}$

۳) $\frac{۶ - \sqrt{۲۷}}{۱۶}$ ۴) $\frac{۶ - \sqrt{۲۷}}{۳۲}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

۱۰ اگر $f(x) = ۱۶\cos^۲(۳x)\cos^۲(۶x)\cos^۲(۱۲x)\cos^۲(۲۴x)$ باشد، مقدار $f(\frac{\pi}{۳۶})$ کدام است؟

۱) $\frac{۶ - ۳\sqrt{۳}}{۱۶}$ ۲) $\frac{۶ - \sqrt{۳}}{۱۶}$

۳) $\frac{۶ + \sqrt{۳}}{۱۶}$ ۴) $\frac{۶ + ۳\sqrt{۳}}{۱۶}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

۱۱ ساده‌شدهٔ عبارت $\frac{\sin(\theta)}{۱-\cos(\theta)}+\frac{۱+\cos(\theta)}{\sin(\theta)}$، کدام است؟

۱) $\cos\left(\frac{\theta}{۲}\right)$
۲) $\sin\left(\frac{\theta}{۲}\right)$
۳) $۲\cot\left(\frac{\theta}{۲}\right)$
۴) $۲\tan\left(\frac{\theta}{۲}\right)$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۰

۱۲ حاصل عبارت $\frac{\cos ۲\alpha}{\tan\alpha+\cot\alpha}$ به ازای $\alpha=\frac{\pi}{۱۶}$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۴}$
۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۴}$
۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۸}$
۴) $\frac{\sqrt{۲}}{۸}$

علوی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۸ ۱۴۰۱

۱۳ حاصل عبارت $\sin^{۳}x.\cos x-\cos^{۳}x.\sin x$ به ازای $x=\frac{\pi}{۲۴}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۸}$
۲) $-\frac{۱}{۸}$
۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۸}$
۴) $\frac{-\sqrt{۳}}{۸}$

علوی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۸ ۱۴۰۱

۱۴ حاصل $\cos ۷۲^\circ\times\cos ۳۶^\circ\times\sin ۳۶^\circ$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}\sin ۳۶^\circ$
۲) $\frac{۱}{۲}\sin ۳۶^\circ$
۳) $\frac{۱}{۴}\cos ۳۶^\circ$
۴) $\frac{۱}{۲}\cos ۳۶^\circ$

علوی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۸ ۱۴۰۱

۱۵ اگر $\cos ۳x.\cos ۲x-\sin ۳x.\sin ۲x=\frac{۱}{۲}$ باشد، x کدام مقدار می‌تواند باشد؟ (x در ناحیهٔ اول مثلثاتی است)

۱) $\frac{\pi}{۱۵}$
۲) $\frac{\pi}{۵}$
۳) $\frac{\pi}{۲۰}$
۴) $\frac{\pi}{۶}$

علوی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۸ ۱۴۰۱

۱۶ اگر $\sin\alpha=\frac{۴}{۵}$ و $\cos\beta=-\frac{۱۲}{۱۳}$ و انتهای کمان α در ربع اول و انتهای کمان β در ربع دوم قرار داشته باشد، حاصل $\sin(\alpha-\beta)$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱۵}{۶۵}$
۲) $-\frac{۳۳}{۶۵}$
۳) $-\frac{۶۳}{۶۵}$
۴) $-\frac{۴۸}{۶۵}$

علوی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۸ ۱۴۰۱

۱۷ اگر $\frac{\sin ۲\alpha}{۱+\cos ۲\alpha} = \frac{۱}{۲}$ باشد، حاصل عبارت $۲\tan(\frac{\pi}{۲}+\alpha) + ۳\cot(\frac{۳\pi}{۲}-\alpha)$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۲}$

۲) $-\frac{۵}{۲}$

۳) $-\frac{۱۱}{۲}$

۴) $\frac{۷}{۲}$

علوی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۸ ۱۴۰۱

پاسخ Homework

۱ گزینه ۳

به‌جای $\sin^۴\alpha$ و $\cos^۴\alpha$ به‌ترتیب زیر قرار می‌دهیم.

$$\frac{(۱-\cos^۲\alpha)^۲+۴\cos^۲\alpha}{۱+\cos^۲\alpha}-\frac{(۱-\sin^۲\alpha)^۲+۴\sin^۲\alpha}{۱+\sin^۲\alpha}$$
$$=\frac{۱+\cos^۴\alpha-۲\cos^۲\alpha+۴\cos^۲\alpha}{۱+\cos^۲\alpha}-\frac{۱+\sin^۴\alpha-۲\sin^۲\alpha+۴\sin^۲\alpha}{۱+\sin^۲\alpha}$$
$$=\frac{(۱+\cos^۲\alpha)^۲}{۱+\cos^۲\alpha}-\frac{(۱+\sin^۲\alpha)^۲}{۱+\sin^۲\alpha}=۱+\cos^۲\alpha-۱-\sin^۲\alpha=\cos ۲\alpha$$

البته دقت شود از روش عددگذاری می‌توانستیم به‌جای xها عدد مثلاً $\frac{\pi}{۲}$ را قرار دهیم و سریع‌تر به جواب برسیم.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۳

۲ گزینه ۲

از رابطه $\sin x-\cos x=\sqrt{۲}\sin(x-\frac{\pi}{۴})$ استفاده می‌کنیم:

$$۳\cos ۴x+\sqrt{۲}(\sin x-\cos x)=۳\cos ۴x+۲\sin(x-\frac{\pi}{۴})$$

حال به‌جای x مقدار $\frac{\pi}{۱۲}$ می‌گذاریم:

$$۳\cos(۴\times\frac{\pi}{۱۲})+۲\sin(\frac{\pi}{۱۲}-\frac{\pi}{۴})=۳\cos\frac{\pi}{۳}-۲\sin\frac{\pi}{۶}$$
$$=۳\times\frac{۱}{۲}-۲\times\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۲}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۳

۳ گزینه ۳

راه‌حل اول:

$$\overset{\Delta}{AHC}: \cos\hat{C} = \frac{HC}{۶} \Rightarrow HC = ۶\cos ۷۵^\circ$$

$$\overset{\Delta}{OHC}: \tan ۱۵^\circ = \frac{OH}{HC} \Rightarrow OH = ۶\cos ۷۵^\circ \tan ۱۵^\circ$$

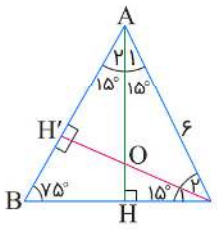
$$S_{OHC} = \frac{۱}{۲} \times (۶\cos ۷۵^\circ)(۶\cos ۷۵^\circ \tan ۱۵^\circ) = ۱۸\cos^۲ ۷۵^\circ (۲ - \sqrt{۳})$$

$$= ۱۸ \times \frac{۱ + \cos ۱۵۰^\circ}{۲}(۲ - \sqrt{۳}) = ۹(۱ - \frac{\sqrt{۳}}{۲})(۲ - \sqrt{۳})$$

$$= \frac{۹}{۲}(۲ - \sqrt{۳})^۲ = \frac{۹}{۲}(۷ - ۴\sqrt{۳}) = \frac{۹}{۲(۷ + ۴\sqrt{۳})}$$

راه‌حل دوم:

چون مثلث ABC متساوی‌الساقین است، پس $AB = AC$ و داریم:



$$\hat{C} = \hat{B} = ۷۵^\circ \Rightarrow \hat{A} = ۳۰^\circ \Rightarrow \hat{A}_۱ = \hat{A}_۲ = ۱۵^\circ$$

$$\overset{\Delta}{BH'C}: \hat{B} = ۷۵^\circ \Rightarrow \hat{C}_۱ = ۱۵^\circ \Rightarrow \overset{\Delta}{OHC} \sim \overset{\Delta}{AHC} \Rightarrow \frac{S_{\overset{\Delta}{OHC}}}{S_{\overset{\Delta}{AHC}}} = \left(\frac{HC}{AH}\right)^۲ = \tan^۲ ۱۵^\circ$$

$$= \left(۲ - \sqrt{۳}\right)^۲ = ۷ - ۴\sqrt{۳} \Rightarrow S_{\overset{\Delta}{OHC}} = \left(۷ - ۴\sqrt{۳}\right) S_{\overset{\Delta}{AHC}} \quad (*)$$

$$S_{\overset{\Delta}{AHC}} = \frac{۱}{۲} S_{\overset{\Delta}{ABC}} = \frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{۲}\left(\underbrace{AB}_{۶}\right)\left(\underbrace{AC}_{۶}\right)\left(\underbrace{\sin\hat{A}}_{\frac{۱}{۲}}\right)\right) = \frac{۹}{۲}$$

$$(*) \Rightarrow S_{\overset{\Delta}{OHC}} = \left(۷ - ۴\sqrt{۳}\right) \times \frac{۹}{۲} = \frac{۹\left(۷ - ۴\sqrt{۳}\right)}{۲}$$

تذکر: برای یافتن مقدار تانژانت می‌توان به دو صورت زیر عمل کرد:

$$۱)\ \tan ۱۵^\circ = \tan(۶۰^\circ - ۴۵^\circ) = \frac{\tan ۶۰^\circ - \tan ۴۵^\circ}{۱ + \tan ۶۰^\circ \tan ۴۵^\circ} = \frac{\sqrt{۳} - ۱}{۱ + \sqrt{۳}} = ۲ - \sqrt{۳}$$

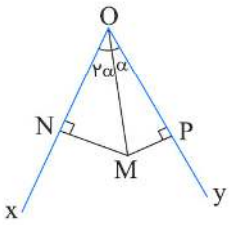
$$۲)\ \cos ۱۵^\circ = \frac{\sqrt{۲ + \sqrt{۳}}}{۲} \quad (\cos ۲x = ۲\cos^۲ x - ۱)$$

$$\sin ۱۵^\circ = \frac{\sqrt{۲ - \sqrt{۳}}}{۲} \quad (\sin ۲x = ۲\sin x.\cos x)$$

$$\Rightarrow \tan ۱۵^\circ = \frac{\sqrt{۲ - \sqrt{۳}}}{\sqrt{۲ + \sqrt{۳}}} = ۲ - \sqrt{۳}$$

۴ گزینه ۴

فرض کنیم $M\hat{O}y = \alpha$. پس $x\hat{O}M = ۲\alpha$ و داریم:



$$\left.\begin{array}{l} \overset{\Delta}{ONM} : \sin ۲\alpha = \dfrac{MN}{OM} \\ \overset{\Delta}{OPM} : \sin\alpha = \dfrac{MP}{OM} \end{array}\right\}$$

$$\xrightarrow{\text{رابطهٔ اول را بر رابطهٔ دوم تقسیم می‌کنیم}} \frac{\sin ۲\alpha}{\sin\alpha} = \frac{MN}{MP}$$

$$\Rightarrow \frac{۲\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{MN}{MP} \Rightarrow \frac{MN}{MP} = ۲\cos\alpha = ۲\left(\frac{OP}{OM}\right) = \frac{۲OP}{OM}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۰

۵ گزینه ۱

با استفاده از اتحادهایی که درستی آن‌ها را می‌دانیم، می‌توان به اتحاد زیر رسید:

$$\sin ۳\alpha = ۳\sin\alpha - ۴\sin^{۳}\alpha$$

اول از اتحاد $\cos ۲\alpha = ۱ - ۲\sin^{۲}\alpha$ استفاده می‌کنیم:

$$f(\alpha) = ۴\sin\alpha\left(۱ - ۲\sin^{۲}\alpha\right) + ۲\sin\alpha = ۶\sin\alpha - ۸\sin^{۳}\alpha$$

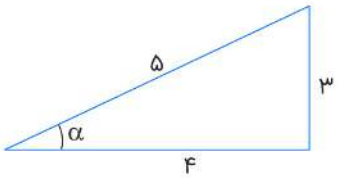
$$\xrightarrow{\text{از ۲ فاکتور می‌گیریم}} f(\alpha) = ۲\left(\underbrace{۳\sin\alpha - ۴\sin^{۳}\alpha}_{\sin ۳\alpha}\right) = ۲\sin ۳\alpha$$

پس:

$$f\left(\frac{۴۱\pi}{۹}\right) = ۲\sin\left(\frac{۴۱\pi}{۳}\right) = ۲\sin\left(۱۴\pi - \frac{\pi}{۳}\right) = ۲\left(-\sin\frac{\pi}{۳}\right) = ۲\times\frac{-\sqrt{۳}}{۲} = -\sqrt{۳}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۰

۶ گزینه ۲



$$\tan\alpha=\frac{۳}{۴}\quad,\quad \cot\alpha=\frac{۴}{۳}\quad,\quad \sin\alpha=-\frac{۳}{۵}\quad,\quad \cos\alpha=-\frac{۴}{۵}$$

$$\frac{\cos\left(۲\alpha-\frac{\pi}{۲}\right)+\cos(\alpha+\pi)}{\cot ۲\alpha}=\frac{\sin ۲\alpha-\cos\alpha}{\frac{\cot\alpha-\tan\alpha}{۲}}=\frac{۲\sin\alpha\cos\alpha-\cos\alpha}{\frac{\cot\alpha-\tan\alpha}{۲}}$$

$$=\frac{۲\left(-\frac{۳}{۵}\right)\left(-\frac{۴}{۵}\right)+\frac{۴}{۵}}{\frac{\frac{۴}{۳}-\frac{۳}{۴}}{۲}}=\frac{\frac{۴}{۵}\left(\frac{۶}{۵}+۱\right)}{\frac{۱۶-۹}{۲۴}}=\frac{\frac{۴}{۵}\left(\frac{۱۱}{۵}\right)}{\frac{۷}{۲۴}}=\frac{۴(۱۱)(۲۴)}{۵(۵)(۷)}=\frac{۱۰۵۶}{۱۷۵}$$

$$\cot ۲\alpha=\frac{\cos ۲\alpha}{\sin ۲\alpha}=\frac{\cos^{۲}\alpha-\sin^{۲}\alpha}{۲\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{\cot\alpha-\tan\alpha}{۲}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

۷ گزینه ۲

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\sin\beta\cos\alpha$$
$$\Rightarrow ۲\sin\alpha\cos\beta=\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)$$
$$A=B+۴۵=B+\frac{\pi}{۴},\ A+B+C=\pi$$
$$۲\cos A\sin B-\sin C=\sin(B+A)+\sin(B-A)-\sin C$$
$$=\sin(\pi-C)+\sin(\frac{-\pi}{۴})-\sin C$$
$$=\sin C-\frac{\sqrt{۲}}{۲}-\sin C=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۱

۸ گزینه ۳

$$\sin x+\cos x=\frac{۶\sqrt{۵}}{۱۰}=\frac{۳\sqrt{۵}}{۵}\xrightarrow{\text{به توان ۲}}\sin^۲x+\cos^۲x+۲\sin x\cos x=\frac{۹}{۵}$$
$$\Rightarrow ۱+\sin ۲x=\frac{۹}{۵}\Rightarrow \sin ۲x=\frac{۴}{۵}$$
$$\sin ۲x=\frac{۲\tan x}{۱+\tan^۲x}\Rightarrow\frac{۴}{۵}=\frac{۲\tan x}{۱+\tan^۲x}$$
$$\Rightarrow ۴+۴\tan^۲x=۱۰\tan x\Rightarrow ۴(۱+\tan^۲x)=۱۰\tan x$$
$$\Rightarrow ۱+\tan^۲x=\frac{۵}{۲}\tan x\xrightarrow{\times ۲}۲\tan^۲-۵\tan x+۲=۰\xrightarrow{\Delta=۹}\begin{cases}\tan x=۲\\ \tan x=\frac{۱}{۲}\end{cases}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

۹ گزینه ۱

طرفین تابع را در $\sin^۲x$ ضرب می‌کنیم:

$$f(x)\sin^۲x=۳۲\sin^۲x\cos^۲x\cos^۲(۲x)\cos^۲(۴x)\cos^۲(۸x)\cos^۲(۱۶x)$$
$$=۸\sin^۲(۲x)\cos^۲(۲x)\cos^۲(۴x)\cos^۲(۸x)\cos^۲(۱۶x)$$
$$=۲\sin^۲(۴x)\cos^۲(۴x)\cos^۲(۸x)\cos^۲(۱۶x)$$
$$=\frac{۱}{۳۲}\sin^۲(۳۲x)\Rightarrow f(x)=\frac{\sin^۲(۳۲x)}{۳۲\sin^۲x}$$

$$f(\frac{\pi}{۱۲})=\frac{\sin^۲\frac{۳۲\pi}{۱۲}}{۳۲\sin^۲\frac{\pi}{۱۲}}=\frac{\sin^۲(\frac{\pi}{۳})}{۳۲\sin^۲(\frac{\pi}{۱۲})}$$
$$\Rightarrow f(\frac{\pi}{۱۲})=\frac{\frac{۳}{۴}}{۳۲\times\frac{۱-\cos\frac{\pi}{۶}}{۲}}=\frac{\frac{۳}{۴}}{۱۶(۱-\frac{\sqrt{۳}}{۲})}$$
$$=\frac{\frac{۳}{۴}}{۸(۲-\sqrt{۳})}=\frac{۳}{۳۲(۲-\sqrt{۳})}=\frac{۳(۲+\sqrt{۳})}{۳۲}=\frac{۶+\sqrt{۲۷}}{۳۲}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

۱۰ گزینه ۴

طرفین رابطه را در $\sin^۲ ۳x$ ضرب می‌کنیم:

$$f(x)\sin^۲ ۳x = ۱۶\sin^۲ ۳x\cos^۲ ۳x\cos^۲ ۶x\cos^۲ ۱۲x\cos^۲ ۲۴x$$
$$\Rightarrow f(x)\sin^۲ ۳x = ۴\sin^۲ ۶x\cos^۲ ۶x\cos^۲ ۱۲x\cos^۲ ۲۴x$$
$$= \sin^۲ ۱۲x\cos^۲ ۱۲x\cos^۲ ۲۴x$$
$$= \frac{۱}{۴}\sin^۲ ۲۴x\cos^۲ ۲۴x = \frac{۱}{۱۶}\sin^۲ ۴۸x$$
$$\Rightarrow f(x) = \frac{\sin^۲ ۴۸x}{۱۶\sin^۲ ۳x}$$

$$f(\frac{\pi}{۳۶}) = \frac{\sin^۲ \frac{۴۸\pi}{۳۶}}{۱۶\sin^۲ \frac{\pi}{۱۲}} = \frac{\sin^۲(\frac{\pi}{۳})}{۱۶\sin^۲ \frac{\pi}{۱۲}} = \frac{\frac{۳}{۴}}{۸(۱-\cos\frac{\pi}{۶})}$$
$$= \frac{۳}{۴\times ۸\times(۱-\frac{\sqrt{۳}}{۲})} = \frac{۳}{۱۶(۲-\sqrt{۳})} = \frac{۳(۲+\sqrt{۳})}{۱۶}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

۱۱ گزینه ۳

$$\frac{\sin\theta}{۱-\cos\theta} + \frac{۱+\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{۲\sin\frac{\theta}{۲}\cos\frac{\theta}{۲}}{۲\sin^۲\frac{\theta}{۲}} + \frac{۲\cos^۲\frac{\theta}{۲}}{۲\sin\frac{\theta}{۲}\cos\frac{\theta}{۲}} = \cot\frac{\theta}{۲} + \cot\frac{\theta}{۲} = ۲\cot\frac{\theta}{۲}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۰

۱۲ گزینه ۴

یادآوری:

$$\tan\alpha + \cot\alpha = \frac{۲}{\sin ۲\alpha}$$
$$\frac{\cos ۲\alpha}{\tan\alpha+\cot\alpha} = \frac{\cos ۲\alpha}{\frac{۲}{\sin ۲\alpha}} = \frac{۱}{۲}\sin ۲\alpha\cos ۲\alpha = \frac{۱}{۲}(\frac{۱}{۲}\sin ۴\alpha) = \frac{۱}{۴}\sin ۴\alpha$$
$$\xrightarrow{\alpha=\frac{\pi}{۱۶}} \frac{۱}{۴}\sin\frac{\pi}{۴} = \frac{\sqrt{۲}}{۸}$$

علوی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۸ ۱۴۰۱

۱۳ گزینه ۲

$$\sin x.\cos x(\sin^{۲}x-\cos^{۲}x)=\frac{۱}{۲}\sin ۲x.(-\cos ۲x)=-\frac{۱}{۲}\sin ۲x.\cos ۲x$$

$$=-\frac{۱}{۲}(\frac{۱}{۲}\sin ۴x)=-\frac{۱}{۴}\sin ۴x\underset{x=\frac{\pi}{۲۴}}{=}-\frac{۱}{۴}\sin\frac{\pi}{۶}=-\frac{۱}{۸}$$

یادآوری:

$$\cos^{۲}x-\sin^{۲}x=\cos ۲x$$

علوی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۸ ۱۴۰۱

۱۴ گزینه ۱

$$(\sin ۳۶^\circ\times\cos ۳۶^\circ)\times\cos ۷۲^\circ=\frac{۱}{۲}\sin ۷۲^\circ\times\cos ۷۲^\circ=\frac{۱}{۲}(\frac{۱}{۲}\sin ۱۴۴^\circ)$$

$$=\frac{۱}{۴}\sin ۱۴۴^\circ=\frac{۱}{۴}\sin(۱۸۰^\circ-۳۶^\circ)=\frac{۱}{۴}\sin ۳۶^\circ$$

یادآوری:

$$\sin\alpha.\cos\alpha=\frac{۱}{۲}\sin(۲\alpha)$$

علوی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۸ ۱۴۰۱

۱۵ گزینه ۱

بنا به اتحاد مثلثاتی : $\cos a.\cos b-\sin a.\sin b=\cos(a+b)$

$$\Rightarrow\cos(۳x+۲x)=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\cos ۵x=\frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow\cos ۵x=\cos\frac{\pi}{۳}\Rightarrow ۵x=\frac{\pi}{۳}\Rightarrow x=\frac{\pi}{۱۵}$$

علوی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۸ ۱۴۰۱

۱۶ گزینه ۳

$$\cos^{۲}\alpha=۱-\sin^{۲}\alpha=۱-\frac{۱۶}{۲۵}\Rightarrow\cos\alpha=\frac{۳}{۵}$$

$$\sin^{۲}\beta=۱-\cos^{۲}\beta=۱-\frac{۱۴۴}{۱۶۹}\Rightarrow\sin\beta=\frac{۵}{۱۳}$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha.\cos\beta-\cos\alpha.\sin\beta=(\frac{۴}{۵})\times(-\frac{۱۲}{۱۳})-\frac{۳}{۵}\times\frac{۵}{۱۳}$$

$$=\frac{-۴۸-۱۵}{۶۵}=-\frac{۶۳}{۶۵}$$

علوی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۸ ۱۴۰۱

۱۷ گزینه ۲

$$\frac{۲\sin\alpha\cos\alpha}{۲\cos^{۲}\alpha}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\tan\alpha=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\cot\alpha=۲$$

$$\text{عبارت}=۲\tan(\frac{\pi}{۲}+\alpha)+۳\cot(\frac{۳\pi}{۲}-\alpha)=-۲\cot\alpha+۳\tan\alpha$$

$$=-۲(۲)+۳(\frac{۱}{۲})=-۴+\frac{۳}{۲}=-\frac{۵}{۲}$$

علوی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۸ ۱۴۰۱

فرمول‌های کمان 2α

۱) $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

مثال : $\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}$ ، $\sin 6x = 2\sin 3x\cos 3x$

۲) $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

الف) $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

ب) $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$

پ) $1 + \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha \Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$

ت) $1 - \cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha \Rightarrow \sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$

«به شدت مهم»

۳) $\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$ اثبات $\longrightarrow$ $\tan(\alpha+\alpha) = \frac{\tan\alpha+\tan\alpha}{1-\tan\alpha\tan\alpha} = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

۴) $\sin 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}$ اثبات $\longrightarrow$ $\frac{2\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{1+\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = 2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha$

۵) $\cos 2\alpha = \frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}$ اثبات $\longrightarrow$ $\frac{1-\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{1+\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = \frac{\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{\frac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos 2\alpha$

۶) $\tan^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$ اثبات $\longrightarrow$ $\frac{1-\cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha}{1+\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha} = \tan^2\alpha$

۷) $\tan\alpha + \cot\alpha = \frac{2}{\sin 2\alpha}$ اثبات $\longrightarrow$ $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{1}{\frac{1}{2}\sin 2\alpha} = \frac{2}{\sin 2\alpha}$

۸) $\cot\alpha - \tan\alpha = 2\cot 2\alpha$ اثبات $\longrightarrow$ $\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{\cos 2\alpha}{\frac{1}{2}\sin 2\alpha} = \frac{2\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = 2\cot 2\alpha$

*۹) $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$

*۱۰) $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$

*۱۱) $\sin\alpha\sin(60^\circ-\alpha)\sin(60^\circ+\alpha) = \frac{1}{4}\sin 3\alpha$

*۱۲) $\cos\alpha\cos(60^\circ-\alpha)\cos(60^\circ+\alpha) = \frac{1}{4}\cos 3\alpha$

*۱۳) $\tan\alpha\tan(60^\circ-\alpha)\tan(60^\circ+\alpha) = \tan 3\alpha$

$\sin(\frac{\pi}{2}+\alpha)=\cos\alpha$

تمرین: حاصل عبارت $\sin(97/5^\circ)\cos(15^\circ)\sin(7/5^\circ)$ چه‌قدر است؟

۱) $-\frac{1}{8}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{8}$ ۴) $-\frac{1}{4}$

عبارت $=\sin 7/5^\circ\cos 7/5^\circ\cos 15^\circ=\frac{1}{2}\sin 15^\circ\cos 15^\circ=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin 30^\circ=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{8}$

تمرین: اگر $f(x)=x-\sqrt{x}$ و $g(x)=\sin^4 x$ باشند، ضابطه‌ی تابع fog کدام است؟ (خارج ۹۲)

۱) $-\frac{1}{4}\sin^2 2x$ ۲) $-\frac{1}{2}\sin^2 2x$ ۳) $\frac{1}{4}\cos^2 2x$ ۴) $\frac{1}{2}\cos^2 2x$

$y=f(g(x))=g(x)-\sqrt{g(x)}=\sin^4 x-\sqrt{\sin^4 x}=\sin^4 x-\sin^2 x$

$=\sin^2 x(\sin^2 x-1)$

$=-\sin^2 x(1-\sin^2 x=\cos^2 x)$

$=-\sin^2 x\cos^2 x=-(\sin x\cos x)^2$

$=-\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)^2=-\frac{1}{4}\sin^2 2x$

$\sin(2\theta)=2\sin\theta\cos\theta$

$\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{2}\sin 2\theta$

تمرین: حاصل عبارت $\cos\frac{\pi}{7}\cdot\cos\frac{2\pi}{7}\cdot\cos\frac{4\pi}{7}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{8}$ ۲) $-\frac{1}{8}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $-\frac{1}{4}$

$=\frac{\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}}{\sin\frac{\pi}{7}}=\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sin\frac{4\pi}{7}\right)\cos\frac{4\pi}{7}}{\sin\frac{\pi}{7}}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin\frac{8\pi}{7}}{\sin\frac{\pi}{7}}=\frac{-\frac{1}{8}\sin\frac{\pi}{7}}{\sin\frac{\pi}{7}}=-\frac{1}{8}$

$\sin\frac{8\pi}{7}=-\sin\frac{\pi}{7}$

$\frac{8\pi}{7}=\pi+\frac{\pi}{7}$

تمرین: ساده‌شدهٔ عبارت $\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}+\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}$ کدام است؟ (ریاضی خارج ۱۴۰۰)

۱) $\cos\frac{\theta}{2}$ ۲) $\sin\frac{\theta}{2}$ ۳) $2\cot\frac{\theta}{2}$ ۴) $2\tan\frac{\theta}{2}$

عبارت $=\frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\sin^2\frac{\theta}{2}}+\frac{2\cos^2\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}=2\cot\frac{\theta}{2}$

تمرین: اگر انتهای کمان x در ربع سوّم و $\frac{1-\sin x}{1+\sin x}=4$ باشد، مقدار صحیح $\tan\frac{x}{2}$ کدام است؟ (ریاضی خارج ۱۴۰۱)

۱) ۲ ۲) -۲ ۳) ۳ ۴) -۳

تمرین: حاصل $\sin x\cos x(\cos^4 x-\sin^4 x)$ به ازای $x=15^\circ$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{8}$ ۳) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ۴) $\frac{\sqrt{3}}{8}$

پاسخ: گزینهٔ «۴» ـ با استفاده از روابط $2\sin\theta\cos\theta=\sin 2\theta$ و $\cos^2\theta-\sin^2\theta=\cos 2\theta$ می‌توان نوشت:

$$\sin x\cos x(\cos^4 x-\sin^4 x)=\sin x\cos x(\cos^2 x-\sin^2 x)(\cos^2 x+\sin^2 x)=\frac{1}{2}\sin 2x\cos 2x=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sin(4x)\right)$$

حالا با جای‌گذاری $x=15^\circ$ خواهیم داشت:

$$\frac{1}{4}\sin(4x)=\frac{1}{4}\sin(60^\circ)=\frac{1}{4}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{8}$$

تمرین: با فرض $\sin\alpha=\frac{1}{4}$، مقدار $\cos 4\alpha$ کدام است؟

۱) $\frac{17}{64}$ ۲) $\frac{17}{32}$ ۳) $\frac{-17}{64}$ ۴) $\frac{-17}{32}$

پاسخ: گزینهٔ «۲» ـ ابتدا با استفاده از رابطهٔ $\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha$ مقدار $\cos 2\alpha$ را به دست می‌آوریم:

$$\cos 2\alpha=1-2\left(\frac{1}{16}\right)=1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$$

حالا با استفاده از رابطهٔ $\cos 4\alpha=2\cos^2(2\alpha)-1$ برای محاسبهٔ مقدار $\cos 4\alpha$ می‌توان نوشت:

$$\cos 4\alpha=2\left(\frac{49}{64}\right)-1=\frac{98}{64}-1=\frac{34}{64}=\frac{17}{32}$$

$\cos(-(\frac{\pi}{2}-2\alpha)) = \cos(\frac{\pi}{2}-2\alpha) = \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2(-\frac{3}{5})(-\frac{4}{5}) = \frac{24}{25}$

$\cos(\pi+\alpha) = -\cos\alpha = -(-\frac{4}{5}) = \frac{4}{5}$

تمرین: اگر زاویهٔ α در ناحیهٔ سوم مثلثاتی و $\tan\alpha = \frac{3}{4}$ باشد، مقدار $\frac{\cos(2\alpha-\frac{\pi}{2})+\cos(\alpha+\pi)}{\cot(2\alpha)}$ کدام است؟ (سراسری تجربی ۱۴۰۰)

۱) $-\frac{96}{175}$ ۲) $\frac{1056}{175}$ ۳) $\frac{96}{175}$ ۴) $-\frac{1056}{175}$

$\cot 2\alpha = \frac{1}{\tan 2\alpha} = \frac{1}{\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}} = \frac{1-\tan^2\alpha}{2\tan\alpha} = \frac{1-\frac{9}{16}}{2(\frac{3}{4})} = \frac{\frac{16-9}{16}}{\frac{3}{2}} = \frac{7}{16}\times\frac{8}{3} = \frac{7}{24}$

$\Rightarrow$ عبارت $= \frac{\frac{24}{25}+(\frac{4}{5}=\frac{20}{25})}{\frac{7}{24}} = \frac{\frac{44}{25}}{\frac{7}{24}} = \frac{44(24)}{7(25)} = \frac{1056}{175}$

تمرین: اگر $\cot x - \tan x = 3$ باشد، حاصل عبارت $M = \frac{2\cot 4x}{2\cot 2x + 3\tan 2x}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{6}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $-\frac{1}{6}$ ۴) $-\frac{5}{6}$

پاسخ: گزینهٔ «۱» ـ می‌دانیم $\cot\bigcirc - \tan\bigcirc = 2\cot 2\bigcirc$ است، پس می‌توان نوشت:

$2\cot 2x = 3 \Rightarrow \cot 2x = \frac{3}{2} \Rightarrow \tan 2x = \frac{2}{3}$

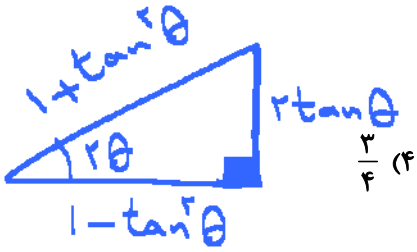
از طرفی مطابق فرمول بالا داریم: $2\cot 4x = \cot 2x - \tan 2x = \frac{3}{2} - \frac{2}{3} = \frac{9-4}{6} = \frac{5}{6}$

در نهایت با جای‌گذاری مقادیر به‌دست‌آمده در خواستهٔ مسئله، مقدار M به دست می‌آید، یعنی:

$$M = \frac{2\cot 4x}{2\cot 2x + 3\tan 2x} = \frac{\frac{5}{6}}{2(\frac{3}{2})+3(\frac{2}{3})} = \frac{\frac{5}{6}}{3+2} = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{1}} = \frac{1}{6}$$

تمرین: اگر $\frac{\tan\alpha(1-\tan^2\alpha)}{(1+\tan^2\alpha)^2} = \frac{1}{8}$، حاصل $\sin 4\alpha$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۳) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۴) $\frac{3}{4}$



$\sin 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}$

$\cos 2\theta = \frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$

$\frac{1}{2}\left(\frac{2\tan\alpha}{(1+\tan^2\alpha)}\right)\left(\frac{1-\tan^2\alpha}{(1+\tan^2\alpha)}\right) = \frac{1}{2}\sin 2\theta\cos 2\theta$

$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin 4\theta$

$= \frac{1}{8}\sin 4\theta = \frac{1}{8}$

$\sin 4\theta = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

$\sin^4 x+\cos^4 x=(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-2\sin^2 x\cos^2 x=1-2\sin^2 x\cos^2 x$

$=1-2(\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x)^2=1-\frac{1}{2}\sin^2 2x$

$=1-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(1-\cos 4x)\right)$

$\sin^2\theta=\frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)$

چند تا اتّحاد مهمّ و کاربردی

$\frac{1}{2^{n-1}}\le \sin^{2n}x+\cos^{2n}x\le 1$

$\sin^4 x+\cos^4 x=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cos 4x$

۱) $\cos^4 x-\sin^4 x=\cos 2x$

اثبات: $(\cos^2 x-\sin^2 x)(\cos^2 x+\sin^2 x)=\cos^2 x-\sin^2 x=\cos 2x$

۲) $\sin^4 x+\cos^4 x=1-\frac{1}{2}\sin^2 2x=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cos 4x$

اثبات: $\sin^4 x+\cos^4 x=1-2\sin^2 x\cos^2 x$

$(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-2\sin^2 x\cos^2 x=1-2\sin^2 x\cos^2 x=1-2(\sin x\cos x)^2=1-2(\frac{1}{2}\sin 2x)^2$

$=1-2\times\frac{1}{4}\sin^2 2x=1-\frac{1}{2}\sin^2 2x=1-\frac{1}{2}(\frac{1-\cos 4x}{2})=1-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cos 4x=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cos 4x$

توی اثبات این فرمول از اتحاد $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$ استفاده کردیم که $a=\sin^2 x$ و $b=\cos^2 x$ بود.

$a=\sin^2 x$
$b=\cos^2 x$

۳) $\sin^6 x+\cos^6 x=1-\frac{3}{4}\sin^2 2x=\frac{5}{8}+\frac{3}{8}\cos 4x$

اثبات: $\sin^6 x+\cos^6 x=1-3\sin^2 x\cos^2 x$

$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$

اثبات: $(\sin^2 x+\cos^2 x)^3-3\sin^2 x\cos^2 x(\sin^2 x+\cos^2 x)=1-3\sin^2 x\cos^2 x=1-3(\sin x\cos x)^2$

$=1-3(\frac{1}{2}\sin 2x)^2=1-\frac{3}{4}\sin^2 2x=1-\frac{3}{4}(\frac{1-\cos 4x}{2})=1-\frac{3}{8}+\frac{3}{8}\cos 4x=\frac{5}{8}+\frac{3}{8}\cos 4x$

توی اثبات این فرمول از اتحاد $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$ استفاده کردیم که $a=\sin^2 x$ و $b=\cos^2 x$ بود.

یادت باشه: فرمول‌های ۲ و ۳ در فصل مشتق کاربرد زیادی خواهند داشت.

۴) $(\sin x+\cos x)^2=1+\sin 2x$

$(\sin x-\cos x)^2=1-\sin 2x$

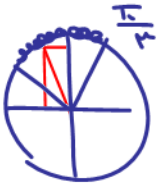
اثبات: $(\sin x\pm\cos x)^2$

$\sin^2 x+\cos^2 x\pm 2\sin x\cos x=1\pm\sin 2x$

یادت باشه: فرمول شماره ۴ در فصل حد، برای رفع ابهام کاربرد زیادی دارد.

تمرین: حاصل $\sqrt{1+\sin 2x}-\sin x$ وقتی $\frac{\pi}{3}<x<\frac{3\pi}{4}$ باشد، کدام است؟

۱) صفر ۲) $-2\sin x$ ۳) $\cos x$ ۴) $2\sin x-\cos x$



$\sqrt{(\sin x+\cos x)^2}-\sin x=|\sin x+\cos x|-\sin x=\sin x+\cos x-\sin x=\cos x$ پاسخ

تمرین: اگر $\sin\alpha-\cos\alpha=\frac{1}{2}$ باشد، مقدار $\cos(\frac{3\pi}{2}-2\alpha)$ کدام است؟ (تجربی ۹۵)

$-\sin 2\alpha$

۱) $-\frac{۳}{۴}$ ✓

۲) $-\frac{۳}{۸}$

۳) $\frac{۳}{۸}$

۴) $\frac{۳}{۴}$

$\sin\alpha - \cos\alpha = \frac{۱}{۲}$

$(\sin\alpha - \cos\alpha)^۲ = (\frac{۱}{۲})^۲$

$\sin^۲\alpha + \cos^۲\alpha - ۲\sin\alpha\cos\alpha = \frac{۱}{۴}$

$۱ - ۲\sin\alpha\cos\alpha = \frac{۱}{۴}$

$-\sin۲\alpha = \frac{۱}{۴} - ۱ = -\frac{۳}{۴}$

۱ حاصل عبارت $\frac{\sin^۴\alpha + ۴\cos^۲\alpha}{۱+\cos^۲\alpha} - \frac{\cos^۴\alpha + ۴\sin^۲\alpha}{۱+\sin^۲\alpha}$ کدام است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) $\cos ۲\alpha$
۴) $\sin ۲\alpha$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۳

۲ خطوط $x + ۲y = ۳$ و $۲x + ay = ۶$، یکدیگر را در نقطهٔ A و خط $x + y = ۰$ را به ترتیب در نقاط B و C قطع می‌کنند. اگر مرکز دایره‌ای که از این سه نقطه می‌گذرد، بر نیمساز ناحیهٔ دوم واقع باشد، مقدار $\cot(B - C)$ در مثلث ABC کدام است؟

۱) $-\frac{۵}{۳}$
۲) $-\frac{۳}{۴}$
۳) $-\frac{۳}{۵}$
۴) $-\frac{۴}{۳}$

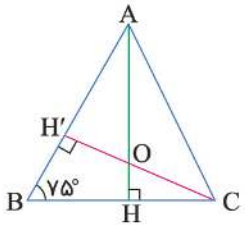
کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

۳ خطوط $۳y + x = -۹$ و $ax - y = ۳$، یکدیگر را در نقطه A و خط $y - x = ۰$ را به ترتیب در نقاط B و C قطع می‌کنند. اگر مرکز دایره‌ای که از این سه نقطه می‌گذرد، بر نیمساز ناحیه اول و سوم واقع باشد، در مثلث ABC، مقدار $\tan(B - C)$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$
۲) $\frac{۳}{۴}$
۳) $\frac{۱}{۳}$
۴) $\frac{۲}{۳}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۴ در شکل زیر مثلث ABC متساوی‌الساقین و طول ساق AC برابر ۶ است. مساحت مثلث OHC کدام است؟ (با تغییر)



۱) $\frac{۲}{۳}$
۲) $\frac{۴}{۳}$
۳) $\frac{۹}{۲(۷+۴\sqrt{۳})}$
۴) $\frac{۹}{۷+۴\sqrt{۳}}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

۵ زاویهٔ $x\hat{O}y$ و نقطهٔ M داخل زاویه با شرط $2M\hat{O}y = x\hat{O}M$، مفروض است. از نقطهٔ M عمودهای MN و MP را به ترتیب بر نیم‌خط‌های Ox و Oy رسم می‌کنیم. نسبت $\frac{MN}{MP}$، کدام است؟

۱) $\frac{OP}{ON}$
۲) $\frac{OP}{OM}$
۳) $\frac{2OP}{ON}$
۴) $\frac{2OP}{OM}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۰

۶ اگر زاویهٔ α در ناحیهٔ سوم مثلثاتی و $\tan(\alpha) = \frac{3}{4}$ باشد، مقدار $\frac{\cos(2\alpha - \frac{\pi}{2}) + \cos(\alpha + \pi)}{\cot(2\alpha)}$ کدام است؟

۱) $-\frac{96}{175}$
۲) $\frac{1056}{175}$
۳) $\frac{96}{175}$
۴) $-\frac{1056}{175}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

۷ اگر $10(\sin x + \cos x) = 6\sqrt{5}$ باشد، مقدار $\tan x$ کدام عدد می‌تواند باشد؟

۱) $-\frac{1}{3}$
۲) -2
۳) $\frac{1}{2}$
۴) 3

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

۸ اگر $f(x) = 32\cos^2(x)\cos^2(2x)\cos^2(4x)\cos^2(8x)\cos^2(16x)$ باشد، مقدار $f\left(\frac{\pi}{12}\right)$، کدام است؟

۱) $\frac{6+\sqrt{27}}{32}$
۲) $\frac{6+\sqrt{27}}{16}$
۳) $\frac{6-\sqrt{27}}{16}$
۴) $\frac{6-\sqrt{27}}{32}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

۹ اگر $f(x) = 16\cos^2(3x)\cos^2(6x)\cos^2(12x)\cos^2(24x)$ باشد، مقدار $f(\frac{\pi}{36})$ کدام است؟

۱) $\frac{6-3\sqrt{3}}{16}$
۲) $\frac{6-\sqrt{3}}{16}$
۳) $\frac{6+\sqrt{3}}{16}$
۴) $\frac{6+3\sqrt{3}}{16}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

۱۰ ساده‌شدهٔ عبارت $\frac{\sin(\theta)}{۱-\cos(\theta)} + \frac{۱+\cos(\theta)}{\sin(\theta)}$، کدام است؟

۱) $\cos\left(\frac{\theta}{۲}\right)$ ۲) $\sin\left(\frac{\theta}{۲}\right)$

۳) $۲\cot\left(\frac{\theta}{۲}\right)$ ۴) $۲\tan\left(\frac{\theta}{۲}\right)$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۰

۱۱ اگر $a+b=\frac{\pi}{۴}$ باشد، حاصل $۸\cos a\ \cos b\ \cos\left(\frac{\pi}{۲}-a\right)\ \cos\left(\frac{\pi}{۲}-b\right)$ کدام است؟

۱) $\sin ۴a$ ۲) $\cos ۴a$

۳) $\sin^۲ ۲a$ ۴) $\cos^۲ ۲a$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۳

۱۲ خلاصه شدهٔ $\sin\left(\frac{\pi}{۲}+\alpha\right)\sin(\pi+\alpha) - \sin(\pi-\alpha)\cos(-\alpha)$ کدام است؟

۱) $-\sin ۲\alpha$ ۲) $\sin ۲\alpha$

۳) $\cos ۲\alpha$ ۴) صفر

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۲

۱۳ اگر $\tan\frac{x}{۲} - \cot\frac{x}{۲} = ۱$ باشد، مقدار $\tan ۲x$، کدام است؟

۱) $-\frac{۳}{۲}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$

۳) $\frac{۴}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۴

۱۴ تابع با ضابطهٔ $f(x) = \begin{cases} \frac{۱-\tan^۲ x}{\cos ۲x} & ;\ ۰ \le x < \frac{\pi}{۴} \\ a\cos ۳x & ;\ \frac{\pi}{۴} \le x \le \frac{\pi}{۲} \end{cases}$ به ازای کدام مقدار a، در نقطهٔ $x=\frac{\pi}{۴}$ پیوسته است؟

۱) $-۲\sqrt{۲}$ ۲) -۱

۳) $\sqrt{۲}$ ۴) ۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۳

۱۵ اگر $\tan\frac{۲\pi}{۳}\sin\left(\frac{۳\pi}{۲}-x\right) = ۱$ باشد، مقدار $\cos ۲x$ کدام است؟

۱) $\frac{-۲}{۳}$ ۲) $\frac{-۱}{۳}$

۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۸

۱۶ اگر $f(x) = x - \sqrt{x}$ و $g(x) = \sin^۴ x$ باشند، ضابطهٔ تابع fog کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۴}\sin^۲ ۲x$
۲) $-\frac{۱}{۲}\sin^۲ ۲x$
۳) $\frac{۱}{۴}\cos^۲ ۲x$
۴) $\frac{۱}{۲}\cos^۲ ۲x$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۲

۱۷ اگر $\frac{\sin\alpha}{۱+\cos\alpha} = \frac{۱}{۲}$ باشد، مقدار $\tan(\frac{\pi}{۲} + \frac{\alpha}{۲})$، کدام است؟

۱) -۲
۲) $-\frac{۱}{۲}$
۳) $\frac{۱}{۲}$
۴) ۲

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

۱۸ ساده‌شدهٔ کسر $\frac{(۱+\tan^۲\theta)(۱+\cot^۲\theta)}{۱-\sin^۲\theta-\cos^۴\theta}$ کدام است؟

۱) $۸\cos^{-۲}۲\theta$
۲) $۸\sin^{-۲}۲\theta$
۳) $۱۶\cos^{-۴}۲\theta$
۴) $۱۶\sin^{-۴}۲\theta$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۱

۱۹ اگر $\sin\alpha - \cos\alpha = \frac{۱}{۲}$ باشد، مقدار $\cos(\frac{۳\pi}{۲} - ۲\alpha)$ کدام است؟

۱) $-\frac{۳}{۴}$
۲) $-\frac{۳}{۸}$
۳) $\frac{۳}{۸}$
۴) $\frac{۳}{۴}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

۱ گزینه ۳

به‌جای $\sin^۴\alpha$ و $\cos^۴\alpha$ به‌ترتیب زیر قرار می‌دهیم.

$$\frac{(۱-\cos^۲\alpha)^۲+۴\cos^۲\alpha}{۱+\cos^۲\alpha}-\frac{(۱-\sin^۲\alpha)^۲+۴\sin^۲\alpha}{۱+\sin^۲\alpha}$$
$$=\frac{۱+\cos^۴\alpha-۲\cos^۲\alpha+۴\cos^۲\alpha}{۱+\cos^۲\alpha}-\frac{۱+\sin^۴\alpha-۲\sin^۲\alpha+۴\sin^۲\alpha}{۱+\sin^۲\alpha}$$
$$=\frac{(۱+\cos^۲\alpha)^۲}{۱+\cos^۲\alpha}-\frac{(۱+\sin^۲\alpha)^۲}{۱+\sin^۲\alpha}=۱+\cos^۲\alpha-۱-\sin^۲\alpha=\cos ۲\alpha$$

البته دقت شود از روش عددگذاری می‌توانستیم به‌جای xها عدد مثلاً $\frac{\pi}{۲}$ را قرار دهیم و سریع‌تر به جواب برسیم.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۳

۲ گزینه ۲

راه‌حل اول:

$$x = ۳ - ۲y \Rightarrow ۶ - ۴y + ay = ۶ \Rightarrow y(a - ۴) = ۰$$

$$\begin{cases} y = ۰ \Rightarrow x = ۳ \\ a = ۴ \quad \times \end{cases} \Rightarrow A(۳, ۰)$$

$$\begin{cases} y = -x \\ x + ۲y = ۳ \end{cases} \Rightarrow B(-۳, ۳) \quad , \quad \begin{cases} y = -x \\ ۲x + ay = ۶ \end{cases} \Rightarrow C(\frac{۶}{۲ - a}, \frac{۶}{a - ۲})$$

مرکز دایره : $O(\alpha, -\alpha) \Rightarrow |\overline{OA}| = |\overline{OB}|$

$$\Rightarrow ۲(\alpha + ۳)^۲ = (\alpha - ۳)^۲ + \alpha^۲ \Rightarrow \alpha = -\frac{۱}{۲}$$

$$r^۲ = |OA| = (-\frac{۱}{۲} - ۳)^۲ + \frac{۱}{۴} = \frac{۲۵}{۲}$$

$$\Rightarrow |OC| = (-\frac{۱}{۲} - \frac{۶}{۲ - a})^۲ + (\frac{۱}{۲} - \frac{۶}{a - ۲})^۲ = \frac{۲۵}{۲}$$

$$\Rightarrow a^۲ - ۳a - ۴ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} a = -۱ \quad ✓ \\ a = ۴ \quad \times \end{cases}$$

$$\Rightarrow C(۲, -۲)$$

$$BC^۲ = AB^۲ + AC^۲$$

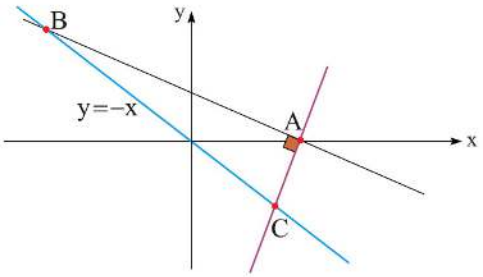
بنابراین مثلث ABC قائم‌الزاویه است و زاویهٔ A قائمه می‌باشد.

$$\hat{B} + \hat{C} = ۹۰^\circ \Rightarrow \hat{B} + \hat{C} - \hat{C} = ۹۰^\circ - \hat{C} \Rightarrow \hat{B} - \hat{C} = ۹۰^\circ - ۲\hat{C}$$

$$\cot(B - C) = \cot(۹۰^\circ - ۲C) = \tan(۲C)$$

$$= \frac{۲\tan C}{۱ - \tan^۲ C} = \frac{۲(۳)}{۱ - (۳)^۲} = \frac{۶}{-۸} = -\frac{۳}{۴}$$

راه‌حل دوم: چون مرکز روی خط $y = -x$ است و دو خط دیگر با این خط متقاطع هستند، پس A زاویهٔ محاطی رو به قطر و درنتیجه ۹۰ درجه است. چون A قائمه است دو خط داده‌شده بر هم عمودند:



$$m = -\frac{۱}{۲} \, , \, m' = \frac{-۲}{a} \, , \, mm' = -۱ \Rightarrow \frac{۱}{a} = -۱ \Rightarrow a = -۱$$

$$\begin{cases} x+۲y=۳ \\ ۲x-y=۶ \end{cases} \Rightarrow A(۳,۰)$$

$$\begin{cases} x+۲y=۳ \\ y+x=۰ \end{cases} \Rightarrow B(-۳,۳)$$

$$\begin{cases} ۲x-y=۶ \\ x+y=۰ \end{cases} \Rightarrow C(۲,-۲)$$

$$\tan B=\frac{AC}{AB}=\frac{\sqrt{۵}}{\sqrt{۴۵}}=\frac{۱}{۳} \quad , \quad \tan C=۳$$

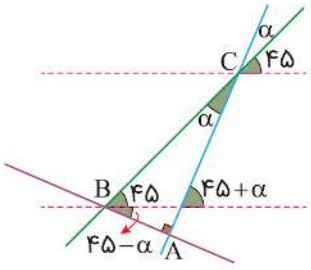
$$\tan(B-C)=\frac{\tan B-\tan C}{۱+\tan B\tan C}=\frac{\frac{۱}{۳}-۳}{۱+\frac{۱}{۳}\times ۳}=\frac{-\frac{۸}{۳}}{۲}=-\frac{۴}{۳}$$

$$\Rightarrow \cot(B-C)=-\frac{۳}{۴}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

۳ گزینه ۲

چون مرکز دایره روی خط $y=x$ و در واقع روی BC قرار دارد و دایره از هر سه نقطه A و B و C باید بگذرد پس A هم روی محیط دایره و زاویه A، زاویه محاطی رو به قطر است؛ درنتیجه $\hat{A}=۹۰^\circ$.



اگر $\hat{A}=۹۰^\circ$ پس دو خط $y=-\frac{۱}{۳}x-۳$ و $y=ax-۳$ بر هم عمودند؛ درنتیجه $a=۳$

$$\tan(۴۵+\alpha)=۳ \Rightarrow \tan(۹۰+۲\alpha)=\frac{۲\times ۳}{۱+۳^۲}=\frac{-۳}{۴}$$

$$\Rightarrow -\cot ۲\alpha=\frac{-۳}{۴} \Rightarrow \cot ۲\alpha=\frac{۳}{۴}$$

$$\hat{B}-\hat{C}=۹۰-\alpha-\alpha=۹۰-۲\alpha \Rightarrow \tan(B-C)=\cot ۲\alpha=\frac{۳}{۴}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۴ گزینه ۳

راه‌حل اول:

$$\overset{\Delta}{AHC}: \cos\hat{C} = \frac{HC}{۶} \Rightarrow HC = ۶\cos ۷۵^\circ$$

$$\overset{\Delta}{OHC}: \tan ۱۵^\circ = \frac{OH}{HC} \Rightarrow OH = ۶\cos ۷۵^\circ \tan ۱۵^\circ$$

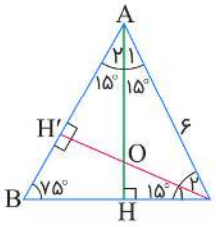
$$S_{OHC} = \frac{۱}{۲} \times (۶\cos ۷۵^\circ)(۶\cos ۷۵^\circ \tan ۱۵^\circ) = ۱۸\cos^۲ ۷۵^\circ (۲ - \sqrt{۳})$$

$$= ۱۸ \times \frac{۱ + \cos ۱۵۰^\circ}{۲}(۲ - \sqrt{۳}) = ۹(۱ - \frac{\sqrt{۳}}{۲})(۲ - \sqrt{۳})$$

$$= \frac{۹}{۲}(۲ - \sqrt{۳})^۲ = \frac{۹}{۲}(۷ - ۴\sqrt{۳}) = \frac{۹}{۲(۷ + ۴\sqrt{۳})}$$

راه‌حل دوم:

چون مثلث ABC متساوی‌الساقین است، پس $AB = AC$ و داریم:



$$\hat{C} = \hat{B} = ۷۵^\circ \Rightarrow \hat{A} = ۳۰^\circ \Rightarrow \hat{A}_۱ = \hat{A}_۲ = ۱۵^\circ$$

$$\overset{\Delta}{BH'C}: \hat{B} = ۷۵^\circ \Rightarrow \hat{C}_۱ = ۱۵^\circ \Rightarrow \overset{\Delta}{OHC} \sim \overset{\Delta}{AHC} \Rightarrow \frac{S_{\overset{\Delta}{OHC}}}{S_{\overset{\Delta}{AHC}}} = \left(\frac{HC}{AH}\right)^۲ = \tan^۲ ۱۵^\circ$$

$$= \left(۲ - \sqrt{۳}\right)^۲ = ۷ - ۴\sqrt{۳} \Rightarrow S_{\overset{\Delta}{OHC}} = \left(۷ - ۴\sqrt{۳}\right) S_{\overset{\Delta}{AHC}} \quad (*)$$

$$S_{\overset{\Delta}{AHC}} = \frac{۱}{۲} S_{\overset{\Delta}{ABC}} = \frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{۲}\left(\underbrace{AB}_{۶}\right)\left(\underbrace{AC}_{۶}\right)\left(\underbrace{\sin\hat{A}}_{\frac{۱}{۲}}\right)\right) = \frac{۹}{۲}$$

$$(*) \Rightarrow S_{\overset{\Delta}{OHC}} = \left(۷ - ۴\sqrt{۳}\right) \times \frac{۹}{۲} = \frac{۹\left(۷ - ۴\sqrt{۳}\right)}{۲}$$

تذکر: برای یافتن مقدار تانژانت می‌توان به دو صورت زیر عمل کرد:

$$۱)\ \tan ۱۵^\circ = \tan(۶۰^\circ - ۴۵^\circ) = \frac{\tan ۶۰^\circ - \tan ۴۵^\circ}{۱ + \tan ۶۰^\circ \tan ۴۵^\circ} = \frac{\sqrt{۳} - ۱}{۱ + \sqrt{۳}} = ۲ - \sqrt{۳}$$

$$۲)\ \cos ۱۵^\circ = \frac{\sqrt{۲ + \sqrt{۳}}}{۲} \quad (\cos ۲x = ۲\cos^۲ x - ۱)$$

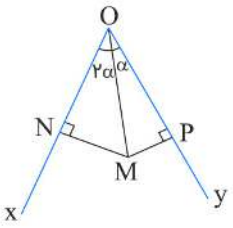
$$\sin ۱۵^\circ = \frac{\sqrt{۲ - \sqrt{۳}}}{۲} \quad (\sin ۲x = ۲ \sin x . \cos x)$$

$$\Rightarrow \tan ۱۵^\circ = \frac{\sqrt{۲ - \sqrt{۳}}}{\sqrt{۲ + \sqrt{۳}}} = ۲ - \sqrt{۳}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

۵ گزینه ۴

فرض کنیم $M\hat{O}y = \alpha$. پس $x\hat{O}M = ۲\alpha$ و داریم:



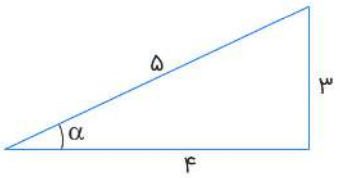
$$\left.\begin{array}{l} \overset{\Delta}{ONM} : \sin ۲\alpha = \dfrac{MN}{OM} \\ \overset{\Delta}{OPM} : \sin\alpha = \dfrac{MP}{OM} \end{array}\right\}$$

$$\xrightarrow{\text{رابطهٔ اول را بر رابطهٔ دوم تقسیم می‌کنیم}} \frac{\sin ۲\alpha}{\sin\alpha} = \frac{MN}{MP}$$

$$\Rightarrow \frac{۲\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{MN}{MP} \Rightarrow \frac{MN}{MP} = ۲\cos\alpha = ۲\left(\frac{OP}{OM}\right) = \frac{۲OP}{OM}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۰

۶ گزینه ۲



$$\tan\alpha=\frac{۳}{۴}\quad,\quad \cot\alpha=\frac{۴}{۳}\quad,\quad \sin\alpha=-\frac{۳}{۵}\quad,\quad \cos\alpha=-\frac{۴}{۵}$$

$$\frac{\cos\left(۲\alpha-\frac{\pi}{۲}\right)+\cos(\alpha+\pi)}{\cot ۲\alpha}=\frac{\sin ۲\alpha-\cos\alpha}{\frac{\cot\alpha-\tan\alpha}{۲}}=\frac{۲\sin\alpha\cos\alpha-\cos\alpha}{\frac{\cot\alpha-\tan\alpha}{۲}}$$

$$=\frac{۲\left(-\frac{۳}{۵}\right)\left(-\frac{۴}{۵}\right)+\frac{۴}{۵}}{\frac{\frac{۴}{۳}-\frac{۳}{۴}}{۲}}=\frac{\frac{۴}{۵}\left(\frac{۶}{۵}+۱\right)}{\frac{۱۶-۹}{۲۴}}=\frac{\frac{۴}{۵}\left(\frac{۱۱}{۵}\right)}{\frac{۷}{۲۴}}=\frac{۴(۱۱)(۲۴)}{۵(۵)(۷)}=\frac{۱۰۵۶}{۱۷۵}$$

$$\cot ۲\alpha=\frac{\cos ۲\alpha}{\sin ۲\alpha}=\frac{\cos^۲\alpha-\sin^۲\alpha}{۲\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{\cot\alpha-\tan\alpha}{۲}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

۷ گزینه ۳

$$\sin x+\cos x=\frac{۶\sqrt{۵}}{۱۰}=\frac{۳\sqrt{۵}}{۵}\xrightarrow{\text{به توان ۲}}\sin^۲x+\cos^۲x+۲\sin x\cos x=\frac{۹}{۵}$$

$$\Rightarrow ۱+\sin ۲x=\frac{۹}{۵}\Rightarrow\sin ۲x=\frac{۴}{۵}$$

$$\sin ۲x=\frac{۲\tan x}{۱+\tan^۲x}\Rightarrow\frac{۴}{۵}=\frac{۲\tan x}{۱+\tan^۲x}$$

$$\Rightarrow ۴+۴\tan^۲x=۱۰\tan x\Rightarrow ۴(۱+\tan^۲x)=۱۰\tan x$$

$$\Rightarrow ۱+\tan^۲x=\frac{۵}{۲}\tan x\xrightarrow{\times ۲}۲\tan^۲-۵\tan x+۲=۰\xrightarrow{\Delta=۹}\begin{cases}\tan x=۲\\ \tan x=\frac{۱}{۲}\end{cases}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

۸ گزینه ۱

طرفین تابع را در $\sin^۲x$ ضرب می‌کنیم:

$$f(x)\sin^۲x = ۳۲\sin^۲x\cos^۲x\cos^۲(۲x)\cos^۲(۴x)\cos^۲(۸x)\cos^۲(۱۶x)$$
$$= ۸\sin^۲(۲x)\cos^۲(۲x)\cos^۲(۴x)\cos^۲(۸x)\cos^۲(۱۶x)$$
$$= ۲\sin^۲(۴x)\cos^۲(۴x)\cos^۲(۸x)\cos^۲(۱۶x)$$
$$= \frac{۱}{۳۲}\sin^۲(۳۲x) \Rightarrow f(x) = \frac{\sin^۲(۳۲x)}{۳۲\sin^۲x}$$

$$f(\frac{\pi}{۱۲}) = \frac{\sin^۲\frac{۳۲\pi}{۱۲}}{۳۲\sin^۲\frac{\pi}{۱۲}} = \frac{\sin^۲(\frac{\pi}{۳})}{۳۲\sin^۲(\frac{\pi}{۱۲})}$$

$$\Rightarrow f(\frac{\pi}{۱۲}) = \frac{\frac{۳}{۴}}{۳۲ \times \frac{۱-\cos\frac{\pi}{۶}}{۲}} = \frac{\frac{۳}{۴}}{۱۶(۱-\frac{\sqrt{۳}}{۲})}$$

$$= \frac{\frac{۳}{۴}}{۸(۱-\sqrt{۳})} = \frac{۳}{۳۲(۱-\sqrt{۳})} = \frac{۳(۲+\sqrt{۳})}{۳۲} = \frac{۶+\sqrt{۲۷}}{۳۲}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

۹ گزینه ۴

طرفین رابطه را در $\sin^۲۳x$ ضرب می‌کنیم:

$$f(x)\sin^۲۳x = ۱۶\sin^۲۳x\cos^۲۳x\cos^۲۶x\cos^۲۱۲x\cos^۲۲۴x$$
$$\Rightarrow f(x)\sin^۲۳x = ۴\sin^۲۶x\cos^۲۶x\cos^۲۱۲x\cos^۲۲۴x$$
$$= \sin^۲۱۲x\cos^۲۱۲x\cos^۲۲۴x$$
$$= \frac{۱}{۴}\sin^۲۲۴x\cos^۲۲۴x = \frac{۱}{۱۶}\sin^۲۴۸x$$
$$\Rightarrow f(x) = \frac{\sin^۲۴۸x}{۱۶\sin^۲۳x}$$

$$f(\frac{\pi}{۳۶}) = \frac{\sin^۲\frac{۴۸\pi}{۳۶}}{۱۶\sin^۲\frac{\pi}{۱۲}} = \frac{\sin^۲(\frac{\pi}{۳})}{۱۶\sin^۲\frac{\pi}{۱۲}} = \frac{\frac{۳}{۴}}{۸(۱-\cos\frac{\pi}{۶})}$$
$$= \frac{۳}{۴\times۸\times(۱-\frac{\sqrt{۳}}{۲})} = \frac{۳}{۱۶(۲-\sqrt{۳})} = \frac{۳(۲+\sqrt{۳})}{۱۶}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

۱۰ گزینه ۳

$$\frac{\sin\theta}{۱-\cos\theta}+\frac{۱+\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{۲\sin\frac{\theta}{۲}\cos\frac{\theta}{۲}}{۲\sin^{۲}\frac{\theta}{۲}}+\frac{۲\cos^{۲}\frac{\theta}{۲}}{۲\sin\frac{\theta}{۲}\cos\frac{\theta}{۲}}=\cot\frac{\theta}{۲}+\cot\frac{\theta}{۲}=۲\cot\frac{\theta}{۲}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۰

۱۱ گزینه ۱

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۳

گام اول

می‌دانیم: $\cos(\frac{\pi}{۲}-\theta)=\sin\theta$

گام دوم

باتوجه‌به گام اول و باتوجه‌به اینکه $\sin۲\theta=۲\sin\theta\cos\theta$ است عبارت داده‌شده را ساده می‌کنیم:

$$۸\cos a\cos b\cos(\frac{\pi}{۲}-a)\cos(\frac{\pi}{۲}-b)=۸\cos a\cos b\sin a\sin b$$

$$=۲(۲\sin a\cos a)(۲\sin b\cos b)=۲\sin۲a\sin۲b$$

داریم:

$$a+b=\frac{\pi}{۴}\xrightarrow{\times۲}۲a+۲b=\frac{\pi}{۲}\Rightarrow ۲b=\frac{\pi}{۲}-۲a$$

بنابراین:

$$\sin۲b=\sin(\frac{\pi}{۲}-۲a)=\cos۲a$$

پس می‌توان نوشت:

$$۲\sin۲a\sin۲b=۲\sin۲a\cos۲a=\sin۲(۲a)=\sin۴a$$

۱۲ گزینه ۱

ابتدا با استفاده از اتحادهای مثلثاتی عبارت داده شده را خلاصه کرده و سپس با استفاده از فرمول کمان های ۲α، حاصل تست را به دست می آوریم.

$$\sin(\frac{\pi}{۲}+\alpha)\sin(\pi+\alpha)-\sin(\pi-\alpha)\cos(-\alpha)=\cos\alpha(-\sin\alpha)-\sin\alpha\cos\alpha$$

$$=-\sin\alpha\cos\alpha-\sin\alpha\cos\alpha=-۲\sin\alpha\cos\alpha=-\sin۲\alpha$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۲

۱۳ گزینه ۳

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۴

گام اول

الف) با در نظر گرفتن $\cot\frac{x}{۲}=\frac{۱}{\tan\frac{x}{۲}}$ معادله را برحسب $\tan\frac{x}{۲}$ به دست می‌آوریم. معادله به یک معادلهٔ درجه‌دو برحسب $\tan\frac{x}{۲}$ تبدیل و با حل معادلهٔ درجه‌دو، حاصل $\tan\frac{x}{۲}$ را تعیین می‌کنیم.

ب) با استفاده از فرمول کمان $\tan ۲x$، ابتدا $\tan x$ و سپس $\tan ۲x$ را محاسبه می‌کنیم.

گام دوم

$$\tan\frac{x}{۲}-\cot\frac{x}{۲}=۱\Rightarrow\tan\frac{x}{۲}-\frac{۱}{\tan\frac{x}{۲}}=۱$$

$$\Rightarrow\frac{\tan^{۲}\frac{x}{۲}-۱}{\tan\frac{x}{۲}}=۱\Rightarrow\tan^{۲}\frac{x}{۲}-۱=\tan\frac{x}{۲}$$

$$\Rightarrow\tan^{۲}\frac{x}{۲}-\tan\frac{x}{۲}-۱=۰\Rightarrow\tan\frac{x}{۲}=\begin{cases}\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}\\ \frac{۱-\sqrt{۵}}{۲}\end{cases}$$

محاسبهٔ $\tan x$:

$$\tan x=\frac{۲\tan\frac{x}{۲}}{۱-\tan^{۲}\frac{x}{۲}}=\frac{۲\frac{(۱\pm\sqrt{۵})}{۲}}{۱-(\frac{۱\pm\sqrt{۵}}{۲})^{۲}}=-۲$$

محاسبهٔ $\tan ۲x$:

$$\tan ۲x=\frac{۲\tan x}{۱-\tan^{۲}x}=\frac{۲(-۲)}{۱-(-۲)^{۲}}=\frac{-۴}{۱-۴}=\frac{-۴}{-۳}=\frac{۴}{۳}$$

۱۴ گزینه ۱

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۳

گام اول

تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x = x_0$ پیوسته است هرگاه حد چپ و راست تابع در این نقطه برابر با مقدار تابع در این نقطه باشد؛ به عبارت دیگر داشته باشیم:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

گام دوم

ابتدا حد چپ و راست تابع $f(x)$ را در نقطهٔ $x = \frac{\pi}{4}$ محاسبه می‌کنیم:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}^-} f(x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{4}^-} \frac{1 - \tan^2 x}{\cos 2x} = \lim_{x \to \frac{\pi}{4}^-} \frac{1 - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}{\cos 2x} = \lim_{x \to \frac{\pi}{4}^-} \frac{\frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x}}{\cos^2 x - \sin^2 x}$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{4}^-} \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{(\frac{\sqrt{2}}{2})^2} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}^+} f(x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{4}^+} a \cos 3x = a \cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} a$$

$$f(\frac{\pi}{4}) = a \cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} a$$

با بررسی شرط پیوستگی در $x = \frac{\pi}{4}$، مقدار a را محاسبه می‌کنیم:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}^-} f(x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{4}^+} f(x) = f(\frac{\pi}{4})$$

$$\Rightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2} a = 2 \Rightarrow \sqrt{2} a = -4 \Rightarrow a = -\frac{4}{\sqrt{2}} \Rightarrow a = -2\sqrt{2}$$

۱۵ گزینه ۲

می‌دانیم $\tan\frac{۲\pi}{۳}=-\sqrt{۳}$ و $\sin(\frac{۳\pi}{۲}-x)=-\cos x$ است. از رابطهٔ داده‌شده مقدار $\cos x$ را حساب کرده و با استفاده از فرمول $\cos ۲x=۲\cos^۲x-۱$، حاصل $\cos ۲x$ را محاسبه می‌کنیم.

$$\tan\frac{۲\pi}{۳}\sin(\frac{۳\pi}{۲}-x)=۱\Rightarrow(-\sqrt{۳})(-\cos x)=۱\Rightarrow\sqrt{۳}\cos x=۱\Rightarrow\cos x=\frac{۱}{\sqrt{۳}}$$

حالا حاصل $\cos ۲x$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\cos ۲x=۲\cos^۲x-۱=۲(\frac{۱}{\sqrt{۳}})^۲-۱=۲(\frac{۱}{۳})-۱=\frac{۲}{۳}-۱=-\frac{۱}{۳}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۸

۱۶ گزینه ۱

برای یافتن ضابطهٔ تابع $fog(x)$ یا همان $f(g(x))$، کافی است در ضابطهٔ تابع $f(x)$ به جای متغیر x، ضابطهٔ $g(x)$ را قرار دهیم.

$$fog(x)=f(g(x))=g(x)-\sqrt{g(x)}=\sin^۴x-\sqrt{\sin^۴x}=\sin^۴x-\sin^۲x$$
$$=\sin^۲x(\sin^۲x-۱)=\sin^۲x(-\cos^۲x)=-\sin^۲x\cos^۲x$$

با توجه به فرمول $\sin ۲x$، داریم:

$$\sin x\cos x=\frac{۱}{۲}\sin ۲x$$

پس ضابطهٔ تابع fog به صورت زیر درمی آید:

$$fog(x)=-(\frac{۱}{۲}\sin ۲x)^۲=-\frac{۱}{۴}\sin^۲۲x$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۲

۱۷ گزینه ۱

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۹۵

گام اول

می‌دانیم: $\tan\left(\frac{\pi}{۲}+\frac{\alpha}{۲}\right)=-\cot\frac{\alpha}{۲}$

گام دوم

با استفاده از فرمول‌های کمان ۲α، رابطهٔ $\frac{\sin\alpha}{۱+\cos\alpha}=\frac{۱}{۲}$ را ساده کرده و مقدار خواسته‌شده را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{\sin\alpha}{۱+\cos\alpha}=\frac{۲\sin\frac{\alpha}{۲}\cos\frac{\alpha}{۲}}{۱+۲\cos^{۲}\frac{\alpha}{۲}-۱}=\frac{۲\sin\frac{\alpha}{۲}\cos\frac{\alpha}{۲}}{۲\cos^{۲}\frac{\alpha}{۲}}=\tan\frac{\alpha}{۲}=\frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow\ \cot\frac{\alpha}{۲}=\frac{۱}{\tan\frac{\alpha}{۲}}=\frac{۱}{\frac{۱}{۲}}=۲\Rightarrow\ \tan\left(\frac{\pi}{۲}+\frac{\alpha}{۲}\right)=-\cot\frac{\alpha}{۲}=-۲$$

۱۸ گزینه ۴

راه‌حل اول:

ابتدا حاصل $۱+\cot^{۲}\theta$ و $۱+\tan^{۲}\theta$ را برحسب $\sin\theta$ و $\cos\theta$ به دست می‌آوریم:

$$۱+\tan^{۲}\theta=۱+\frac{\sin^{۲}\theta}{\cos^{۲}\theta}=\frac{\cos^{۲}\theta+\sin^{۲}\theta}{\cos^{۲}\theta}=\frac{۱}{\cos^{۲}\theta}$$

$$۱+\cot^{۲}\theta=۱+\frac{\cos^{۲}\theta}{\sin^{۲}\theta}=\frac{\sin^{۲}\theta+\cos^{۲}\theta}{\sin^{۲}\theta}=\frac{۱}{\sin^{۲}\theta}$$

می‌دانیم $\cos^{۲}\theta=۱-\sin^{۲}\theta$ و $\sin^{۲}\theta=۱-\cos^{۲}\theta$ است پس:

$$\frac{(۱+\tan^{۲}\theta)(۱+\cot^{۲}\theta)}{۱-\sin^{۲}\theta-\cos^{۴}\theta}=\frac{\frac{۱}{\cos^{۲}\theta}\times\frac{۱}{\sin^{۲}\theta}}{\cos^{۲}\theta-\cos^{۴}\theta}=\frac{\frac{۱}{\cos^{۲}\theta\sin^{۲}\theta}}{\cos^{۲}\theta(۱-\cos^{۲}\theta)}=\frac{\frac{۱}{\cos^{۲}\theta\sin^{۲}\theta}}{\cos^{۲}\theta\sin^{۲}\theta}$$

$$=\frac{۱}{\cos^{۴}\theta\sin^{۴}\theta}=\frac{۱}{(\cos\theta\sin\theta)^{۴}}$$

می‌دانیم:

$$\sin۲\theta=۲\sin\theta\cos\theta\Rightarrow\sin\theta\cos\theta=\frac{۱}{۲}\sin۲\theta$$

بنابراین:

$$\frac{۱}{(\cos\theta\sin\theta)^۴}=\frac{۱}{(\frac{۱}{۲}\sin ۲\theta)^۴}=\frac{۱}{\frac{۱}{۱۶}\sin^۴ ۲\theta}=۱۶\sin^{-۴} ۲\theta$$

راه‌حل دوم: (عددگذاری)

در صورتی که $\theta=\frac{\pi}{۴}$ در نظر بگیریم، داریم:

$$\frac{(۱+\tan^۲\theta)(۱+\cot^۲\theta)}{۱-\sin^۲\theta-\cos^۴\theta}=\frac{(۱+(\tan\frac{\pi}{۴})^۲)(۱+(\cot\frac{\pi}{۴})^۲)}{۱-\sin^۲\frac{\pi}{۴}-\cos^۴\frac{\pi}{۴}}=\frac{(۱+۱)(۱+۱)}{۱-(\frac{\sqrt{۲}}{۲})^۲-(\frac{\sqrt{۲}}{۲})^۴}=۱۶$$

با جایگذاری $\theta=\frac{\pi}{۴}$ در گزینه‌ها، نتیجه می‌گیریم که تنها در گزینهٔ "۴" صدق می‌کند:

$$۱۶\sin^{-۴} ۲\theta=۱۶(\sin(۲\times\frac{\pi}{۴}))^{-۴}=۱۶$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۱

۱۹ گزینه ۱

$$\cos(\frac{۳\pi}{۲}-۲\alpha)=-\sin ۲\alpha$$

$$\sin\alpha-\cos\alpha=\frac{۱}{۲}\xrightarrow{\text{به توان دو می‌رسانیم}}\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha-۲\sin\alpha\cos\alpha=\frac{۱}{۴}$$

$$\xrightarrow[۲\sin\alpha\cos\alpha=\sin ۲\alpha]{\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha=۱}-\sin ۲\alpha=-\frac{۳}{۴}\xrightarrow{\cos(\frac{۳\pi}{۲}-۲\alpha)=-\sin ۲\alpha}\cos(\frac{۳\pi}{۲}-۲\alpha)=-\frac{۳}{۴}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

معادلات مثلثاتی

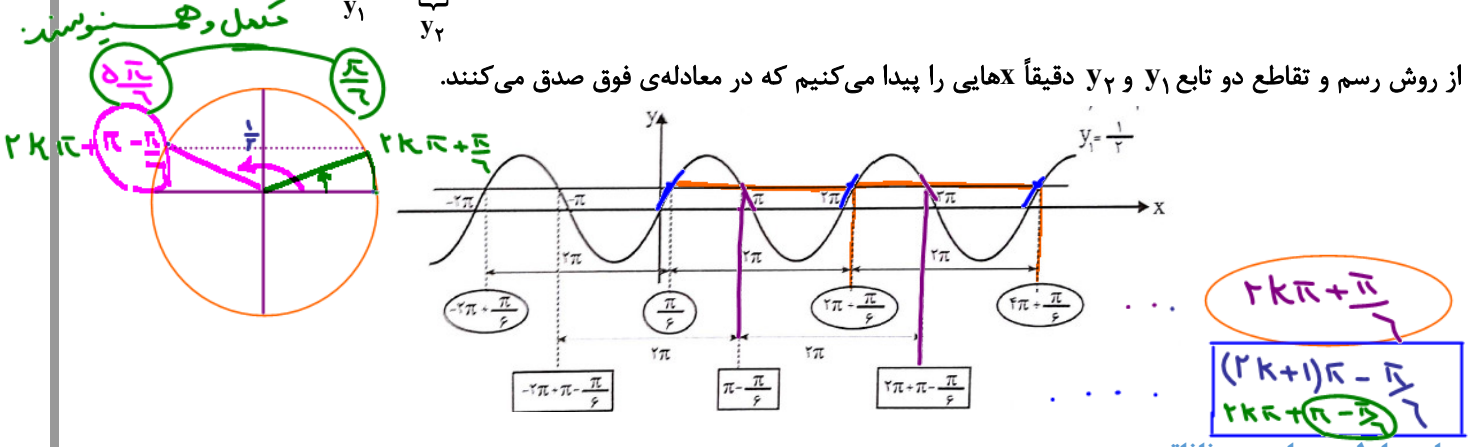
به معادلاتی که مجهولشان نسبت‌های مثلثاتی باشد، معادلات مثلثاتی می‌گوییم و هدف از حل آن‌ها مشخص کردن همه‌ی کمان‌هایی (زوایایی) است که در معادله صدق می‌کند.

چون توابع مثلثاتی متناوب هستند، اگر خط $y = k$ آن‌ها را قطع کند، برخورد در بیش از یک نقطه رخ می‌دهند و بی‌شمار جواب داریم که برای گزارش طول نقاط تلاقی به روش زیر عمل می‌کنیم:

به عنوان مثال: اگر از ما بپرسند چه xهایی در معادله‌ی $2\sin x - 1 = 0$ صدق می‌کند، می‌توانیم از طریق زیر عمل کنیم:

$$2\sin x - 1 = 0 \Rightarrow \underbrace{\sin x}_{y_1} = \underbrace{\frac{1}{2}}_{y_2}$$

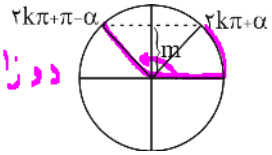
از روش رسم و تقاطع دو تابع y_1 و y_2 دقیقاً xهایی را پیدا می‌کنیم که در معادله‌ی فوق صدق می‌کنند.



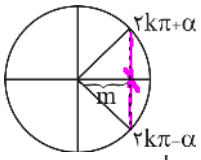
حل معادله‌ی ساده‌ی مثلثاتی

برای این که هر بار مجبور به رسم و تقاطع دو تابع نشویم، به کمک اتحادها و روابط و یا نسبت زوایای متمم، معادله را ساده می‌کنیم به طوری که به تساوی دو نسبت هم‌نام برسیم و به کمک ۴ مسئله‌ی زیر، معادله حل می‌شود.

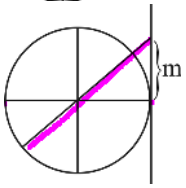
۱) $\sin x = m \xrightarrow{m=\sin\alpha} \sin x = \sin\alpha \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \alpha \\ x = 2k\pi + \pi - \alpha \end{cases}$



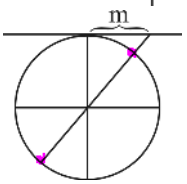
۲) $\cos x = m \xrightarrow{m=\cos\alpha} \cos x = \cos\alpha \Rightarrow x = 2k\pi \pm \alpha$



۳) $\tan x = m \xrightarrow{m=\tan\alpha} \tan x = \tan\alpha \Rightarrow x = k\pi + \alpha$



۴) $\cot x = m \xrightarrow{m=\cot\alpha} \cot x = \cot\alpha \Rightarrow x = k\pi + \alpha$



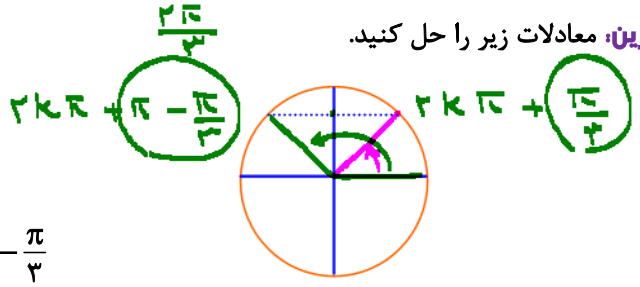
حالات مختلف معادلات مثلثاتی

۱ – حالت اول: در این حالت در معادله مثلثاتی فقط یک نسبت مثلثاتی با زاویه مجهول و از درجه اول وجود دارد که با کمک ۴ مسئله‌ای که گفته شد، جواب را می‌یابیم.

تمرین: معادلات زیر را حل کنید.

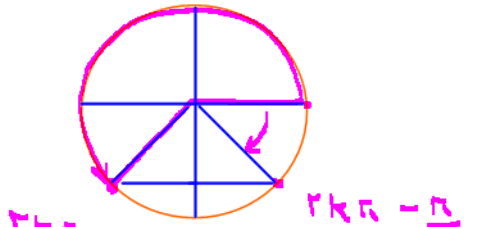
۱) $۲\sin x - \sqrt{۳} = ۰$

$$۲\sin x = \sqrt{۳} \Rightarrow \sin x = \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \sin\frac{\pi}{۳} \Rightarrow \begin{cases} x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۳} \\ x = ۲k\pi + \pi - \frac{\pi}{۳} \end{cases}$$



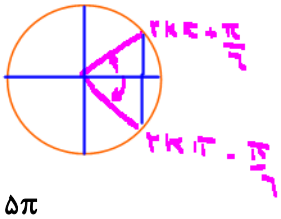
۲) $۲\sin x + \sqrt{۳} = ۰$

$$۲\sin x = -\sqrt{۳} \Rightarrow \sin x = \frac{-\sqrt{۳}}{۲} = \sin(\frac{-\pi}{۳}) \Rightarrow \begin{cases} x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۳} \\ x = ۲k\pi + \pi + \frac{\pi}{۳} \end{cases}$$



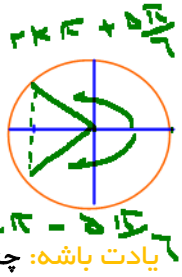
۳) $۲\cos x - \sqrt{۳} = ۰$

$$۲\cos x = \sqrt{۳} \Rightarrow \cos x = \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \cos\frac{\pi}{۶} \Rightarrow x = ۲k\pi \pm \frac{\pi}{۶}$$



۴) $۲\cos x + \sqrt{۳} = ۰$

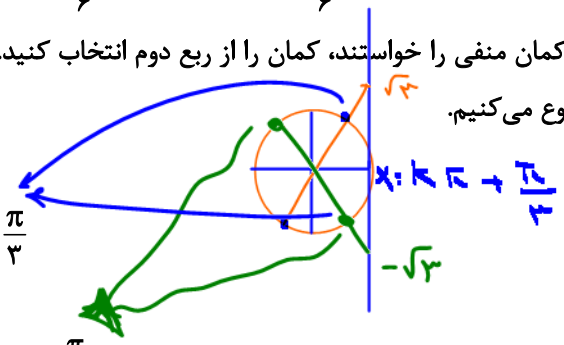
$$۲\cos x = -\sqrt{۳} \Rightarrow \cos x = \frac{-\sqrt{۳}}{۲} = \cos(\frac{۵\pi}{۶}) \Rightarrow x = ۲k\pi \pm \frac{۵\pi}{۶}$$



یادت باشه: چنان‌چه کسینوس یک کمان منفی را خواستند، کمان را از ربع دوم انتخاب کنید. اما در سایر نسبت‌های مثلثاتی برای کمان منفی، به ربع چهارم با کمان قرینه رجوع می‌کنیم.

۵) $\tan x - \sqrt{۳} = ۰$

$$\tan x = \sqrt{۳} = \tan\frac{\pi}{۳} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{۳}$$



۶) $\tan x + \sqrt{۳} = ۰$

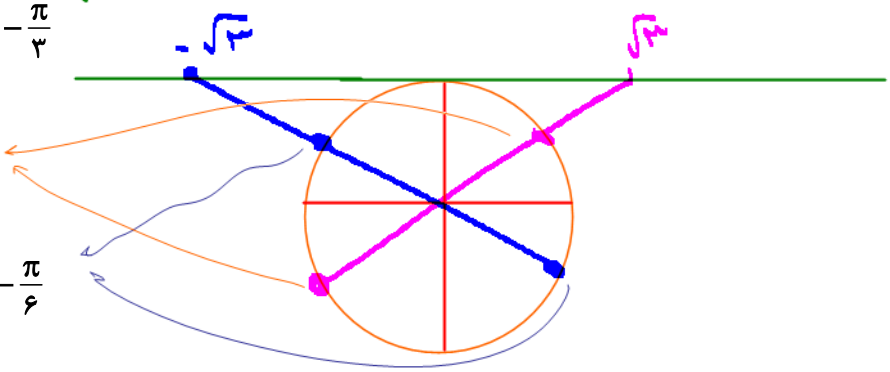
$$\tan x = -\sqrt{۳} = \tan(-\frac{\pi}{۳}) \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{۳}$$

۷) $\cot x - \sqrt{۳} = ۰$

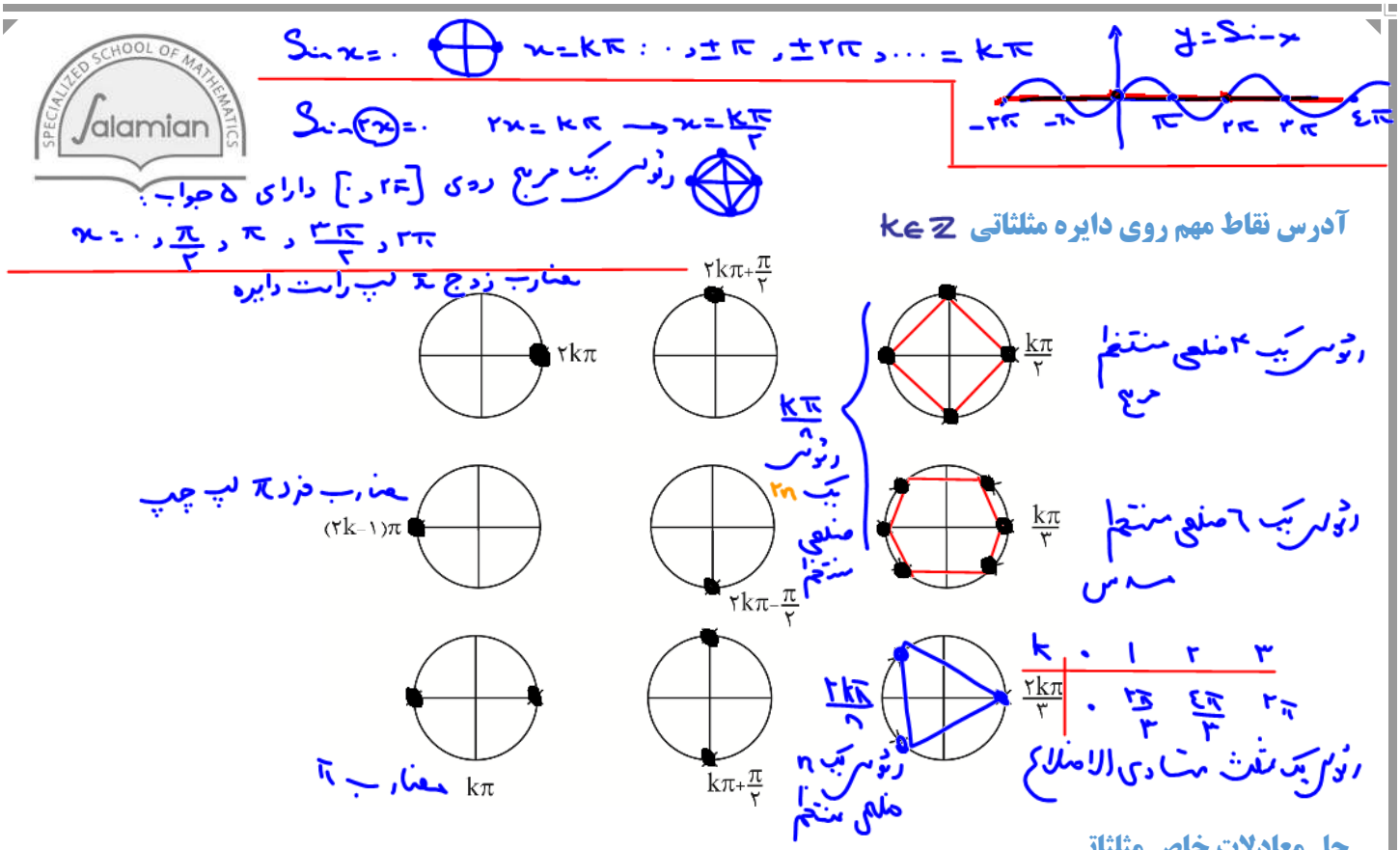
$$\cot x = \sqrt{۳} = \cot\frac{\pi}{۶} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{۶}$$

۸) $\cot x + \sqrt{۳} = ۰$

$$\cot x = -\sqrt{۳} = \cot(-\frac{\pi}{۶}) \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{۶}$$

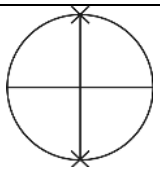
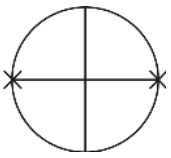
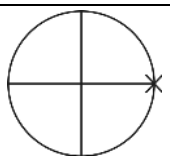
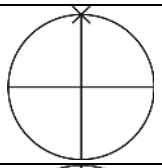
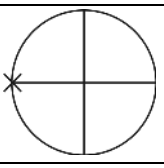
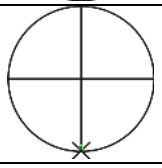


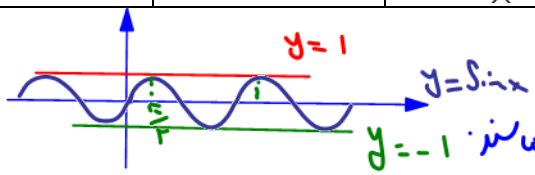
یکی از اهداف تدریس مطالب بالا: یادتون نره باید علت وجود $k\pi$ یا $۲k\pi$ را بدانید $(k \in \mathbb{Z})$



حل معادلات خاص مثلثاتی

برخی از معادلات هستند که جواب‌های آن‌ها به فرم ساده‌تری هم قابل نمایش است. این معادلات رادر جدول زیر بررسی می‌کنیم.

آدرس روی دایره	جواب کلی	معادله	آدرس روی دایره	جواب کلی	معادله
	$x = k\pi + \frac{\pi}{2}$	$\cos x = 0$		$x = k\pi$	$\sin x = 0$
	$x = 2k\pi$	$\cos x = 1$		$x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$	$\sin x = 1$
	$x = (2k+1)\pi$	$\cos x = -1$		$x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$	$\sin x = -1$



یادت باشه: $\sin x = \pm 1$ و $\cos x = \pm 1$ ریشه مضاعف دارند.

۲- حالت دوم: در این حالت فقط و فقط دو نسبت مثلثاتی با ضریب ۱ یا ۱- و توان ۱ وجود دارند که معادله را به تساوی دو نسبت هم‌نام تبدیل می‌کنیم (اگر هم‌نام نبودند از زوایای متمم استفاده می‌کنیم) و به کمک ۴ مسئله گفته‌شده، مسئله را حل می‌کنیم.

به طور کلی کمان می‌تواند به جز x ، چیز دیگری هم باشد.

مثلاً: فرض کنید u یک عبارتِ xدار است.

$$\sin u = \sin \alpha \Rightarrow \begin{cases} u = 2k\pi + \alpha \\ u = 2k\pi + \pi - \alpha \end{cases}$$

$$\cos u = \cos \alpha \Rightarrow u = 2k\pi \pm \alpha$$

$$\tan u = \tan \alpha \Rightarrow u = k\pi + \alpha$$

$$\cot u = \cot \alpha \Rightarrow u = k\pi + \alpha$$

تمرین: معادله‌ی زیر را حل کنید.

۱) $\sin 3x - \sin x = 0$

$$\sin 3x = \sin x \Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi + x \Rightarrow 2x = 2k\pi \Rightarrow x = k\pi \\ 3x = 2k\pi + \pi - x \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

(خارج تجربی ۹۳)

تمرین: جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $\frac{\sin 3x}{\cos(\frac{3\pi}{2} + x)} = 1$، به کدام صورت است؟

۱) $k\pi + \frac{\pi}{4}$ ۲) $2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$ ۳) $2k\pi \pm \frac{3\pi}{4}$ ۴) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$

۲) $\sin 3x + \sin x = 0$

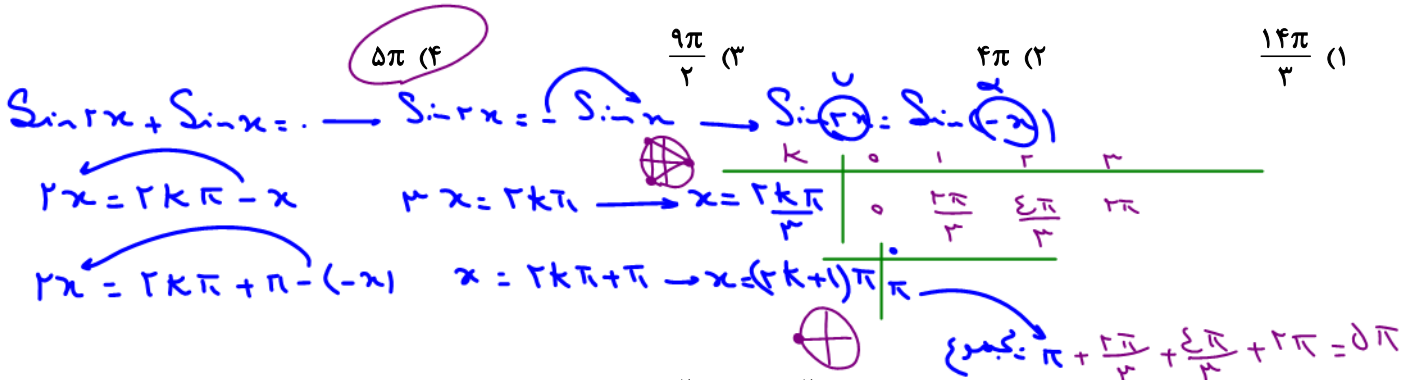
$$\sin 3x = -\sin x$$

قرار شد چپ و راست مساوی یک نسبت همنام داشته باشیم (که این‌جا داریم) و هر دو، پشتشون علامت مثبت داشته باشه. این‌جا برای این که از شرّ منفی خلاص بشیم از خاصیت $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ استفاده می‌کنیم یعنی به جای $-\sin x$ می‌نویسیم $\sin(-x)$ پس:

$$\sin \underbrace{3x}_{u} = \sin(\underbrace{-x}_{\alpha}) \Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi + (-x) \\ , \\ 3x = 2k\pi + \pi - (-x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x = 2k\pi \Rightarrow \boxed{x = \frac{k\pi}{2}} \\ 2x = 2k\pi + \pi \Rightarrow \boxed{x = k\pi + \frac{\pi}{2}} \end{cases}$$

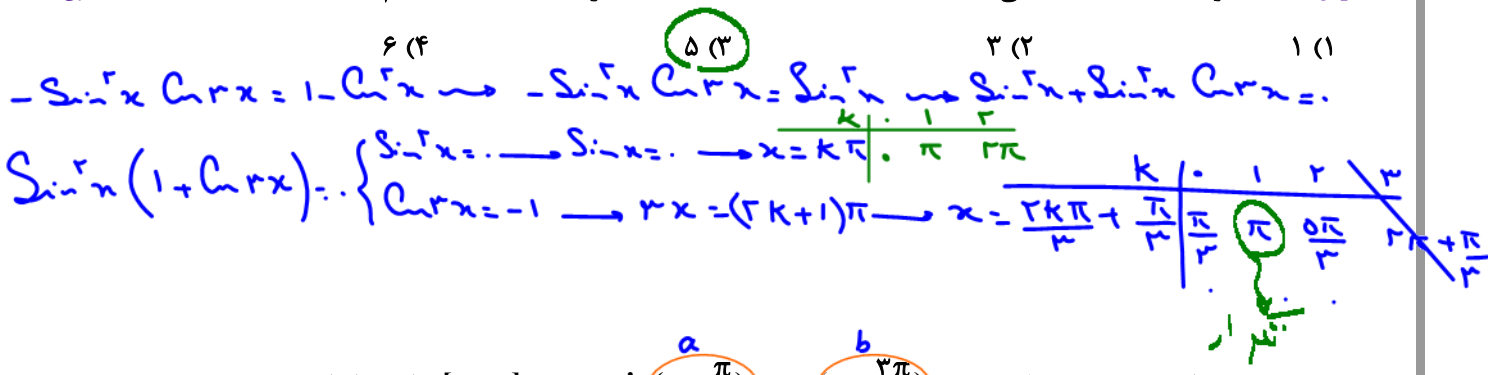
تمرین: مجموع جواب‌های مثلثاتی $\sin 2x + \cos(\frac{\pi}{2} - x) = 0$، در بازه‌ی $[0, 2\pi]$ کدام است؟ (خارج تجربی ۹۶)

۱) $\frac{14\pi}{3}$ ۲) 4π ۳) $\frac{9\pi}{2}$ ۴) 5π



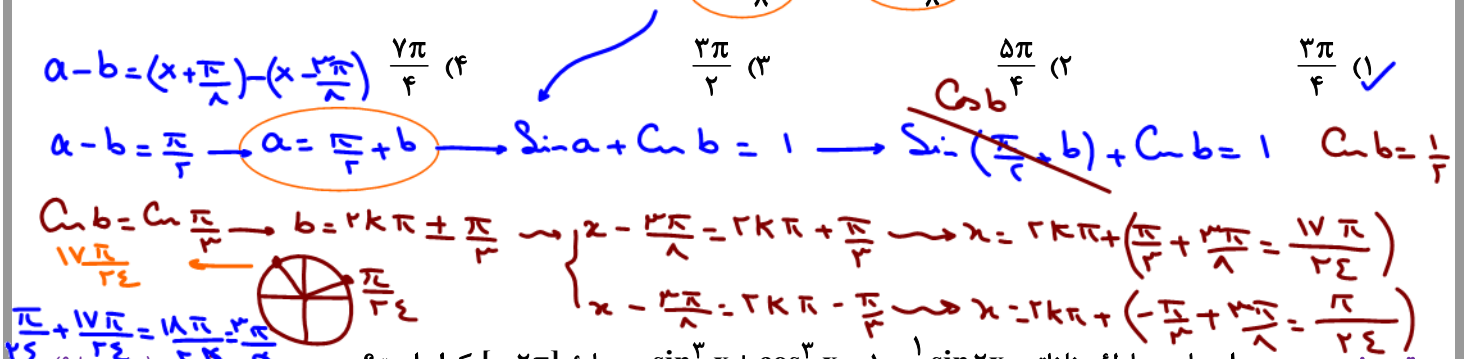
تمرین: تعداد جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\cos^2(x) - \sin^2(x)\cos(3x) = 1$ در فاصلهٔ $[0, 2\pi]$ کدام است؟ (سراسری تجربی ۱۴۰۰)

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۶



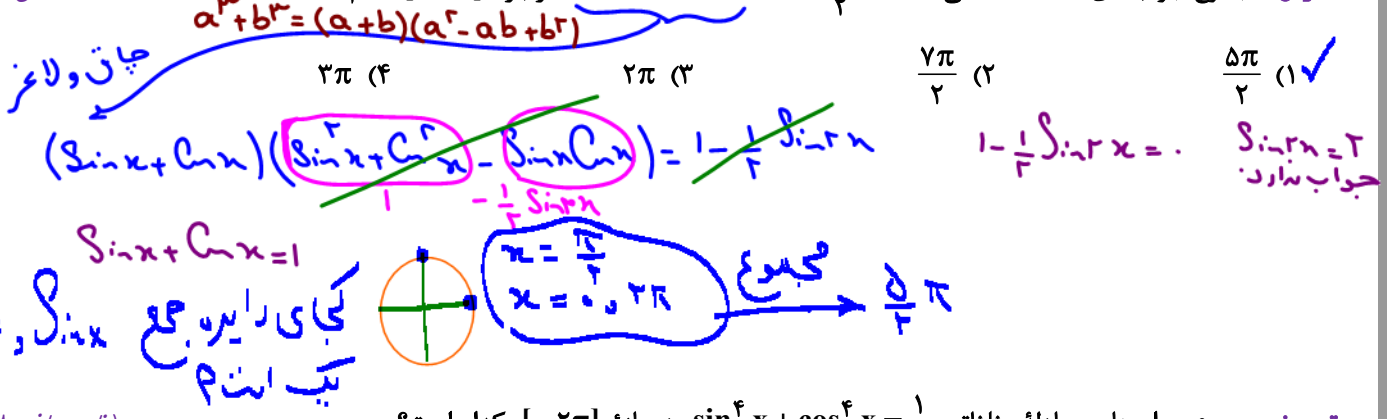
تمرین: مجموع جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\sin(x + \frac{\pi}{8}) + \cos(x - \frac{3\pi}{8}) = 1$، در بازهٔ $[0, 2\pi]$ برابر کدام است؟ (خارج ریاضی ۹۵)

۱) $\frac{3\pi}{4}$ ۲) $\frac{5\pi}{4}$ ۳) $\frac{3\pi}{2}$ ۴) $\frac{7\pi}{4}$



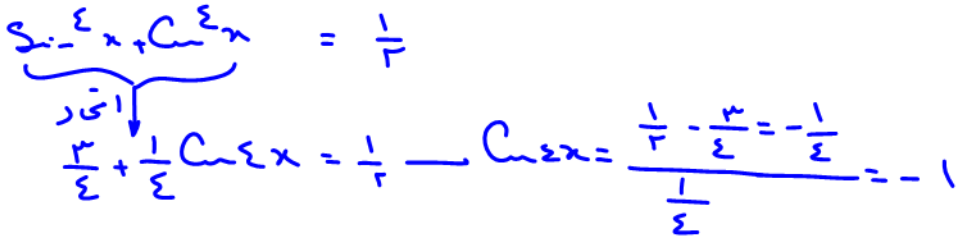
تمرین: مجموع جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\sin^3 x + \cos^3 x = 1 - \frac{1}{2}\sin 2x$، در بازهٔ $[0, 2\pi]$ کدام است؟ (ریاضی ۹۸)

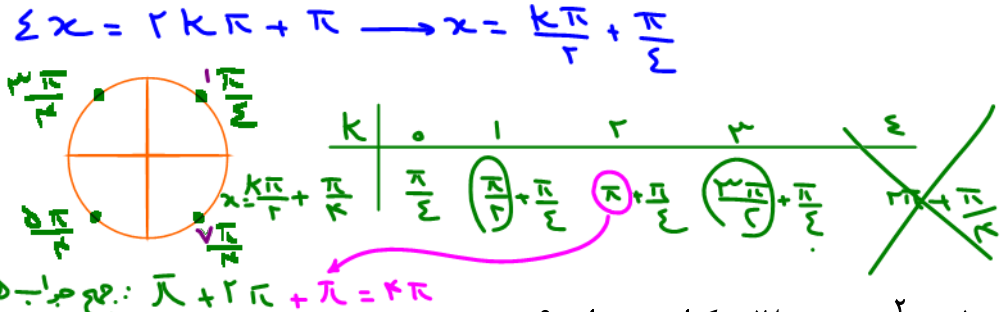
۱) $\frac{5\pi}{2}$ ۲) $\frac{7\pi}{2}$ ۳) 2π ۴) 3π



تمرین: مجموع جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{1}{2}$، در بازهٔ $[0, 2\pi]$، کدام است؟ (خارج ریاضی ۹۸)

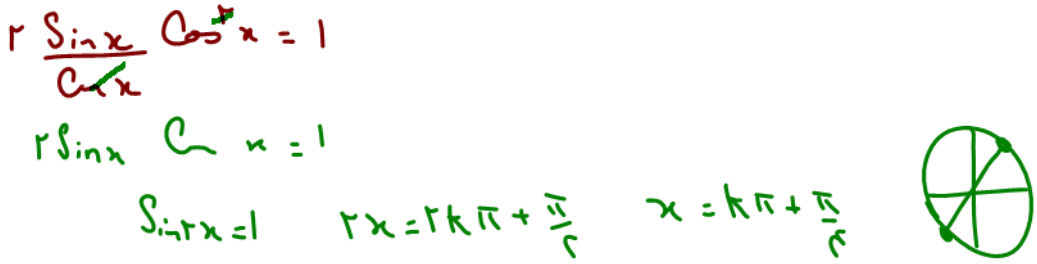
۱) $\frac{5\pi}{2}$ ۲) 3π ۳) $\frac{7\pi}{2}$ ۴) 4π





تمرین: جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $2\tan x.\cos^2 x = 1$ به کدام صورت است؟ (خارج تجربی ۸۶)

۱) $k\pi - \frac{\pi}{4}$ ۲) $k\pi + \frac{\pi}{4}$ ۳) $2k\pi - \frac{\pi}{4}$ ۴) $2k\pi + \frac{\pi}{4}$



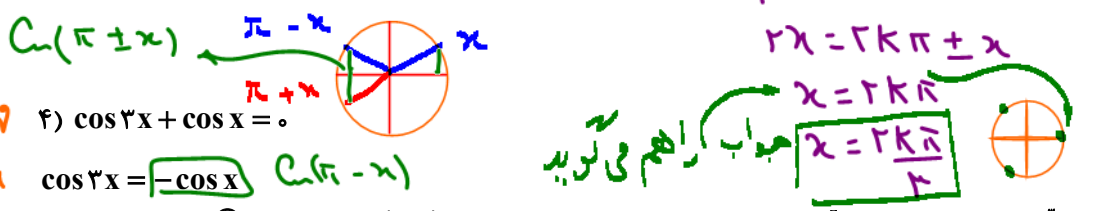
تمرین: معادله زیر را حل کنید.

۳) $\cos 3x - \cos x = 0$

$$\cos\underbrace{3x}_{u} = \cos\underbrace{x}_{\alpha} \Rightarrow 3x = 2k\pi \pm x \Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi + x \Rightarrow 2x = 2k\pi \Rightarrow x = k\pi \\ 3x = 2k\pi - x \Rightarrow 4x = 2k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} \end{cases}$$

تمرین: جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $\sin^2 x - \cos^2 x = \sin(\frac{3\pi}{2} + x)$ به کدام صورت است؟ (تجربی ۹۱)

۱) $\frac{k\pi}{3}$ ۲) $\frac{2k\pi}{3}$ ۳) $2k\pi + \frac{\pi}{3}$ ۴) $2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$



تمرین: معادله زیر را حل کنید.

۴) $\cos 3x + \cos x = 0$

$$\cos 3x = -\cos x$$

الان چی‌کار کنم آقا؟ چطوری از شرّ منفی خلاص بشیم؟ آخه کسینوس که خاصیت $\cos(-\alpha) = -\cos\alpha$ رو نداره 😐

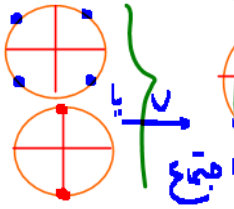
ایرادی نداره از یه خاصیت دیگه می‌توانیم واسش استفاده کنیم. کسینوسه دیگه! همیشه ساز مخالف میزنه. ببینید:

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$$

پس به جای $-\cos\alpha$ بذارید $\cos(\pi-\alpha)$. به همین راحتی ☺

$$\cos 3x=-\cos x \Rightarrow \cos 3x=\cos(\pi-x) \Rightarrow 3x=2k\pi\pm(\pi-x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x=2k\pi+\pi-x \Rightarrow 4x=2k\pi+\pi \Rightarrow \boxed{x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}} \\ 3x=2k\pi-\pi+x \Rightarrow 2x=2k\pi-\pi \Rightarrow \boxed{x=k\pi-\frac{\pi}{2}} \end{cases}$$



تمرین: جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $\cos 3x+\cos x=0$ با شرط $\cos x\neq 0$ کدام است؟ (خارج تجربی ۹۳ و ۹۸)

۱) $\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$ ✓

۲) $\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{8}$

۳) $k\pi-\frac{\pi}{4}$

۴) $k\pi+\frac{\pi}{4}$

اگر دو طرف هم‌نسبت نباشن ولی توانشون (یک) باشد باید کاری کنیم که هم‌نسبت بشن. فقط کافیه از این روابط استفاده کنیم:

$$\sin\alpha=\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)$$

$$\cos\alpha=\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)$$

$$\tan\alpha=\cot(\frac{\pi}{2}-\alpha)$$

$$\cot\alpha=\tan(\frac{\pi}{2}-\alpha)$$

تمرین: معادله زیر را حل کنید.

۵) $\sin 3x - \cos 2x = 0$

$$\sin 3x = \cos 2x \Rightarrow \sin \underbrace{3x}_{u} = \sin(\underbrace{\frac{\pi}{2} - 2x}_{\alpha}) \Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} - 2x \Rightarrow 5x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow \boxed{x = \frac{2k\pi}{5} + \frac{\pi}{10}} \\ 3x = 2k\pi + \pi - (\frac{\pi}{2} - x) \Rightarrow \boxed{x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}} \end{cases}$$

تمرین: جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\sin(2x - \frac{\pi}{4}) = \cos(x + \frac{\pi}{4})$ با شرط $x \neq k\pi$ که در آن k یک عدد صحیح است، کدام است؟

(تجربی ۹۹)

۱) $\frac{k\pi}{3}$ ۲) $\frac{2k\pi}{3}$ ۳) $\frac{2k\pi}{3} - \frac{\pi}{6}$ ۴) $\frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$

تمرین: معادله زیر را حل کنید.

۶) $\sin 3x + \cos x = 0$

این‌طور موقع‌ها که یه دونه از این‌ها منفی داره کاری کن منفی بیاد پشت سینوس. اینطوری راحت‌تر از شرّ منفی خلاص می‌شی. ببین:

$$\sin 3x = -\cos x$$

$\Rightarrow$ راه طولانی: چون اول باید منفیِ پشت کسینوس رو از بین ببری بعدش کسینوس رو تبدیل به سینوس کنی.

راه خوبتر:

$$\cos x = -\sin 3x = \sin(-3x)$$

$$\cos x = \cos(\frac{\pi}{2} - (-3x)) \Rightarrow \cos x = \cos(\frac{\pi}{2} + 3x) \Rightarrow x = 2k\pi \pm (\frac{\pi}{2} + 3x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} + 3x \Rightarrow -2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = -k\pi - \frac{\pi}{4} \xrightarrow{k\pi \text{ فرقی با } -k\pi \text{ نداره}} \boxed{x = k\pi - \frac{\pi}{4}} \\ x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} - 3x \Rightarrow 4x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \Rightarrow \boxed{x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8}} \end{cases}$$

تمرین: جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $2\cos^2 x + 2\sin x \cos x = 1$، به کدام صورت است؟

(تجربی ۹۴)

۱) $\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$ ۲) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$ ۳) $k\pi - \frac{\pi}{8}$ ۴) $k\pi + \frac{\pi}{8}$

معادلات تانژانتی

تمرین: معادله زیر را حل کنید و تعداد جواب‌ها را در فاصلهٔ $[0,2\pi]$ مشخص کنید.

۷) $\tan 3x - \tan x = 0$

$\tan 3x = \tan x \Rightarrow 3x = k\pi + x \Rightarrow 2x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2}$

k	۰	۱	۲	۳	۴
x	۰	$\frac{\pi}{2}$ ↓ غ.ق.ق	π	$\frac{3\pi}{2}$ ↓ غ.ق.ق	2π

۸) $\tan 3x + \tan x = 0 \Rightarrow \tan 3x = -\tan x$

واسه تانژانت هم مثل سینوس می‌تونی از خاصیت $\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$ استفاده کنی:

$\tan 3x = \tan(-x) \Rightarrow 3x = k\pi + (-x) \Rightarrow 4x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{4}$

k	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸
x	۰	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$ ↓ غ.ق.ق	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$ ↓ غ.ق.ق	$\frac{7\pi}{4}$	2π

کتانژانت هم دقیقاً مثل تانژانت.

تمرین: جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $\tan x \tan 3x = 1$، کدام است؟ (تجربی ۹۷ و ریاضی ۹۹)

۱) $\frac{k\pi}{4}$ ۲) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$ ۳) $\frac{k\pi}{2} + \frac{3\pi}{8}$ ۴) $\frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{8}$ ✓

تمرین: معادلات زیر را حل کنید.

۱) $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 0$

$\xrightarrow{\div \cos x} \tan x + \sqrt{3} = 0 \Rightarrow \tan x = -\sqrt{3} = \tan(-\frac{\pi}{3}) \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{3}$

اگر سینوس و کسینوس توان دو داشتند، می‌تونیم از روش‌های حل معادله درجه ۲ استفاده کنیم.

تمرین: از معادلهٔ $2\sin^2 2x - \sin 2x - 1 = 0$ برای x در فاصلهٔ صفر تا 2π چند جواب به‌دست می‌آید؟

۱) ۶ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

$$\begin{cases} (1)\ \sin^2 u = \sin^2 \alpha \\ (2)\ \cos^2 u = \cos^2 \alpha \\ (3)\ \tan^2 u = \tan^2 \alpha \\ (4)\ \cot^2 u = \cot^2 \alpha \end{cases} \Rightarrow \boxed{u = k\pi \pm \alpha}$$

تمرین: جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $\cos 2x + 2\cos^2 x = 0$ کدام است؟ (تجربی ۹۶)

۱) $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ ۲) $2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$ ۳) $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ ۴) $k\pi \pm \frac{\pi}{6}$

یادت باشه: حواست به رادیکال فرجه زوج باشه.

تمرین: تمام جواب‌های معادله‌ی $\sqrt{\sin x} = \sqrt{\cos x}$ کدام است؟

۱) $x = 2k\pi + \frac{\pi}{4}$ ۲) $x = k\pi + \frac{\pi}{4}$ ۳) $x = 2k\pi$ ۴) $x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$

$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$ ریاضیا (حسابانی‌ها) باید حفظ باشند (تجربی نه!)

$3\sin x - 4\sin^3 x$

$\frac{\sin 3x}{\sin x} = 2\cos^2 x$ به صورت روبه‌رو به تجربیاهم داده میشه!

$\frac{\sin x(3-4\sin^2 x)}{\sin x} = 2\cos^2 x$

$3-4(1-\cos^2 x) = 2\cos^2 x$

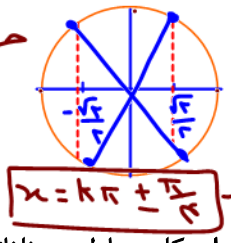
$3-4+4\cos^2 x = 2\cos^2 x$

$-1+2\cos^2 x = 0 \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{2}$

$\cos x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

جواب درست است ولی در گزینه‌ها نیست به فرم دیگری جواب را گزارش می‌کنیم:

$x = k\pi \pm \frac{\pi}{4}$



تعرین: جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $\frac{\sin 3x}{\sin x} = 2\cos^2 x$ کدام است؟ (سراسری ریاضی ۹۳)

۱) $\frac{k\pi}{2}$ ۲) $\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$ ۳) $k\pi-\frac{\pi}{4}$ ۴) $k\pi+\frac{\pi}{4}$

پاسخ: گزینه‌ی «۲»

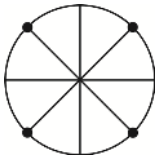
$\frac{3\sin x - 4\sin^3 x}{\sin x} = 2\cos^2 x$

حالا تفکیک:

$3-4\sin^2 x = 2(1-\sin^2 x)$

$3-4\sin^2 x = 2-2\sin^2 x \Rightarrow -2\sin^2 x = -1 \Rightarrow \sin^2 x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin^2 x = (\frac{\sqrt{2}}{2})^2$

$\Rightarrow \sin^2 x = (\sin\frac{\pi}{4})^2 \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{4}$

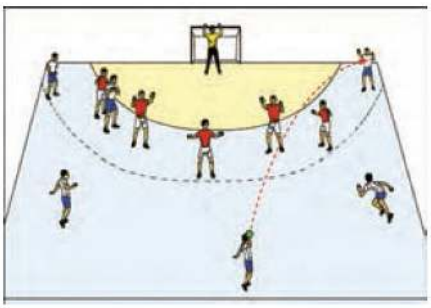


$\boxed{x = \frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}}$

طراح جفتش رو توی گزینه‌ها گذاشته، ولی از روی دایره تصمیم می‌گیریم.

گزینه‌ی «۲» درسته. ضمناً چون این جواب‌ها مخرج کسر اصلی رو صفر نمی‌کنن پس اوکیه!

مثال ۱۳۳: یک بازیکن هندبال توپ را با سرعت $16\ m/s$ برای هم‌تیمی خود که در ۱۲/۸ متری او قرار دارد پرتاب می‌کند. اگر رابطه بین سرعت توپ v (برحسب متر بر ثانیه)، مسافت طی‌شده افقی d (برحسب متر) و زاویه‌ی پرتاب θ به صورت زیر باشد، آن‌گاه زاویه‌ی پرتاب توپ چه‌قدر بوده است؟



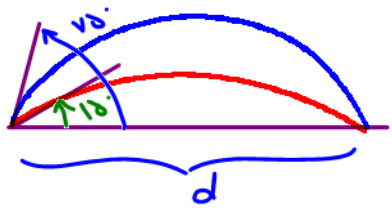
$d = \frac{v^2 \sin 2\theta}{10}$

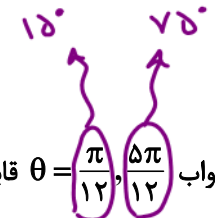
از رابطه‌ی داده‌شده به دست می‌آید:

$12/8 = \frac{(16)^2 \sin 2\theta}{10} \Rightarrow \sin 2\theta = \frac{12/8\times 10}{256} \Rightarrow \sin 2\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} 2\theta = 2k\pi + \frac{\pi}{6} & k\in\mathbb{Z} \\ 2\theta = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{6} & k\in\mathbb{Z} \end{cases}$

$2\theta = 30^\circ \rightarrow \theta = 15^\circ$

$2\theta = 150^\circ \rightarrow \theta = 75^\circ$



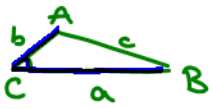


با توجه به شکل، جواب $\theta = \frac{\pi}{۱۲}, \frac{۵\pi}{۱۲}$ قابل قبول می‌باشد.

مثال ۱۳۴: مثلثی با مساحت ۳ سانتی‌متر مربع مفروض است. اگر اندازه‌ی دو ضلع آن به ترتیب ۲ و ۶ سانتی‌متر باشند، آن‌گاه چند مثلث با این خاصیت‌ها می‌توان ساخت؟

روش دبیرستانی:

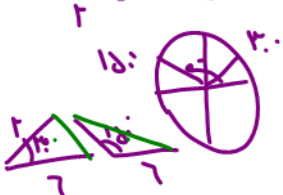
$S = \frac{۱}{۲} ab \sin \hat{C}$



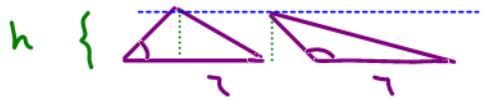
$۳ = \frac{۱}{۲}(۲)(۶)\sin\hat{C}$

$\frac{۱}{۲} = \sin\hat{C}$ ⟹ $\hat{C} = ۳۰°$ یا ۱۵۰°

۲ مثلث با این ضلع داریم



روش چهارم دبستانی:



۲ مثلث داریم

$S = \frac{(۶)h}{۲} = ۳h$

در هر ۲ با ارتفاع یکسان، S ها برابرند

یادت باشه: حواست به ریشه‌ی مخرج باشه.

تمرین: معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$\frac{۱+\sin x}{۱+\cos ۲x} = \frac{۱}{۲}$$

مزدل

چشم همیشه حواسم هست حواسم به ریشه مخرج باشه! هست

$\frac{۱+\sin x}{۲\cos^۲ x} = \frac{۱}{۲} \longrightarrow ۱+\sin x = \cos^۲ x = ۱-\sin^۲ x$

$۱+\sin x = (۱-\sin x)(۱+\sin x)$

$۱ = ۱-\sin x$

$\sin x = ۰$

$x = k\pi$

$۱+\sin x = ۰$

$\sin x = -۱$

$x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۲}$

غ.ق.ق زیرا مخرج را صفر می‌کند

تمرین کتاب نیم برای امتحان تشریحی

Homework

۱ معادلهٔ مثلثاتی $\sin ۲x - ۴\sin^۲ x \cos x = ۰$ چند جواب در بازهٔ $(-\pi, \pi)$ دارد؟

۱) ۴ ۲) ۵

۳) ۶ ۴) ۷

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

۲ مجموع جواب‌های معادله $\cos ۲x + \sin^۲ x = ۰$ در بازهٔ $[-۳\pi, \pi]$ کدام است؟

۱) صفر ۲) $-\pi$

۳) -۳π ۴) -۴π

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۳

۳ اگر اختلاف جواب‌های معادله $\frac{۱}{\sin(\frac{\pi + ۴x}{۲})} + \frac{۱}{\cos(\frac{\pi + ۸x}{۲})} = ۰$ در بازه $[۰, \pi]$ برابر α باشد، مقدار $\tan(۲\alpha)$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۲) $-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

۳) $\sqrt{۳}$ ۴) $-\sqrt{۳}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۴ اگر اختلاف جواب‌های غیرصفر معادلهٔ $\cot(\frac{\pi + ۴x}{۲}) = \cos(\frac{\pi + ۸x}{۲})$ در بازهٔ $[-\frac{\pi}{۴}, \frac{\pi}{۴}]$ برابر α باشد، مقدار $\cos(۳\alpha)$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{\sqrt{۲}}$ ۲) $-\frac{۱}{\sqrt{۲}}$

۳) $\frac{۱}{\sqrt{۳}}$ ۴) $-\frac{۱}{\sqrt{۳}}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

۵ مجموع جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\cos(\frac{۱۷\pi}{۸} + x)\cos(\frac{۳\pi}{۸} - x) = \cos^۲(\frac{\pi}{۳})$ در بازهٔ $[-\frac{\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲}]$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{۲}$ ۲) $\frac{\pi}{۳}$

۳) $\frac{۲\pi}{۳}$ ۴) $\frac{\pi}{۴}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۲

۶ کمترین فاصلهٔ بین دو مقدار از جواب‌های معادلهٔ $\frac{\cos x}{1+\sin x} = \frac{1+\sin x}{\cos x}$ کدام است؟

۱) 2π
۲) π
۳) $\frac{\pi}{2}$
۴) $\frac{\pi}{3}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۷ جواب‌های کلی معادلهٔ مثلثاتی $\cos 2x = \sin x$ به‌صورت $x = 2k\pi + \frac{i\pi}{6}$ بیان شده است. مجموعهٔ مقادیر i کدام است؟

۱) $\{7, 9\}$
۲) $\{1, 3, 5\}$
۳) $\{1, 4, 7\}$
۴) $\{1, 5, 9\}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۳

۸ جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\cos 3x + \cos x = 0$، با شرط $\cos x \neq 0$ کدام است؟

۱) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$
۲) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$
۳) $k\pi - \frac{\pi}{4}$
۴) $k\pi + \frac{\pi}{4}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۴

۹ جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\sin(2x - \frac{\pi}{4}) = \cos(x + \frac{\pi}{4})$، با شرط $x \neq k\pi$ که در آن k یک عدد صحیح است، کدام است؟

۱) $\frac{k\pi}{3}$
۲) $\frac{2k\pi}{3}$
۳) $\frac{2k\pi}{3} - \frac{\pi}{6}$
۴) $\frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

۱۰ جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\frac{\sin 3x}{\cos(\frac{3\pi}{2} + x)} = 1$ به کدام صورت است؟ $(k \in \mathbb{Z})$

۱) $k\pi + \frac{\pi}{4}$
۲) $2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$
۳) $2k\pi \pm \frac{3\pi}{4}$
۴) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۳

۱۱ جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $2\cos^2 x + 2\sin x \cos x = 1$، به کدام صورت است؟

۱) $\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$
۲) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$
۳) $k\pi - \frac{\pi}{8}$
۴) $k\pi + \frac{\pi}{8}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۴

۱۲ مجموع تمام جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\sin ۴x = \sin^۴ x - \cos^۴ x$، در بازهٔ $[۰, \pi]$، برابر کدام است؟

۱) $\frac{۷\pi}{۴}$ ۲) $\frac{۹\pi}{۴}$

۳) $\frac{۵\pi}{۲}$ ۴) $\frac{۱۱\pi}{۳}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۵

۱۳ تعداد جواب‌های معادله $\sin(x + \frac{\pi}{۶}) \cos(x - \frac{\pi}{۳}) = ۱$ در بازه $[۰, ۲\pi]$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۳ ۴) ۴

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

۱۴ مجموع جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\sin(x + \frac{\pi}{۴}) \cos(x - \frac{\pi}{۴}) = ۱$ در بازهٔ $[۰ , ۲\pi]$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{۲}$ ۲) $\frac{۳\pi}{۲}$

۳) $\frac{\pi}{۴}$ ۴) $\frac{۵\pi}{۴}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۱

۱۵ تعداد جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $۸ \cos x - \tan^۲ x = ۱$ در بازهٔ $[۰, ۲\pi]$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۴

۳) ۳ ۴) ۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

۱۶ فرض کنید A مجموعهٔ جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $(۱ + \cos(۲\alpha))(۱ + \cos(۴\alpha))(۱ + \cos(۸\alpha)) = \frac{۱}{۸}$، در بازهٔ $[۰, \pi]$ باشد. ماکزیمم عضو مجموعهٔ A، کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۷}\pi$ ۲) $\frac{۶}{۷}\pi$

۳) $\frac{۷}{۹}\pi$ ۴) $\frac{۸}{۹}\pi$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۰

۱۷ مجموع جواب‌های معادلهٔ $۲ \sin^۲ x - \cos x - ۱ = ۰$ در بازهٔ $[\pi, ۲\pi]$ کدام است؟

۱) $\frac{۸\pi}{۳}$ ۲) $\frac{۱۰\pi}{۳}$

۳) ۳π ۴) $\frac{۱۱\pi}{۳}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۰

۱۸ در معادلهٔ مثلثاتی $۲\cos^۲x + \cos x = ۱$، نقاط پایانی تمام جواب‌ها بر دایرهٔ مثلثاتی، رأس‌های کدام شکل هندسی است؟

۱) مثلث متساوی‌الاضلاع
۲) مثلث قائم‌الزاویه
۳) ذوزنقه
۴) مستطیل

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۳

۱۹ جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\sin\frac{۵\pi}{۶} + \sin(\frac{\pi}{۲} + x)\sin(\pi + x) = ۰$ کدام است؟

۱) $k\pi + \frac{\pi}{۴}$
۲) $k\pi - \frac{\pi}{۴}$
۳) $۲k\pi \pm \frac{\pi}{۴}$
۴) $۲k\pi + \frac{\pi}{۲}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۷

۲۰ جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $(\sin x - \tan x)\tan\left(\frac{۳\pi}{۲} - x\right) = \cos\frac{۴\pi}{۳}$، کدام است؟

۱) $k\pi - \frac{\pi}{۶}$
۲) $k\pi + \frac{\pi}{۳}$
۳) $۲k\pi \pm \frac{\pi}{۳}$
۴) $۲k\pi \pm \frac{\pi}{۶}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۰

۲۱ جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\sin(x + \pi)\cos(\frac{\pi}{۲} + x) - ۲\sin(\pi - x) + ۱ = ۰$، کدام است؟

۱) $۲k\pi - \frac{\pi}{۲}$
۲) $۲k\pi + \frac{\pi}{۶}$
۳) $۲k\pi + \frac{\pi}{۲}$
۴) $۲k\pi \pm \frac{\pi}{۲}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

۲۲ جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $۲\sin^۲x = ۳\cos x$ به کدام صورت است؟

۱) $k\pi \pm \frac{\pi}{۶}$
۲) $k\pi \pm \frac{\pi}{۳}$
۳) $۲k\pi \pm \frac{\pi}{۶}$
۴) $۲k\pi \pm \frac{\pi}{۳}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۶

۲۳ جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\sin^۲x - \cos^۲x = \sin\left(\frac{۳\pi}{۲} + x\right)$، به کدام صورت است؟

۱) $\frac{k\pi}{۳}$
۲) $\frac{۲k\pi}{۳}$
۳) $۲k\pi + \frac{\pi}{۳}$
۴) $۲k\pi \pm \frac{۲\pi}{۳}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۱

۲۴ جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $۲\sin(\pi - x)\cos\left(\frac{۳\pi}{۲} + x\right) + ۳\cot x \sin(\pi + x) = ۰$، کدام است؟

۱) $۲k\pi + \frac{\pi}{۳}$
۲) $۲k\pi + \frac{۲\pi}{۳}$
۳) $۲k\pi \pm \frac{\pi}{۳}$
۴) $۲k\pi \pm \frac{۲\pi}{۳}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۷

۲۵ نقاط پایانی کمان جواب‌های معادلهٔ $\frac{\sin x \cos x}{۱ - \cos x} = ۱ + \cos x$ بر روی دایرهٔ مثلثاتی، رأس‌های کدام چندضلعی است؟

۱) مربع
۲) مستطیل
۳) مثلث قائم‌الزاویه
۴) مثلث متساوی‌الساقین

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۱

۲۶ جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $۲\tan x \cdot \cos^۲ x = ۱$ به کدام صورت است؟

۱) $k\pi - \frac{\pi}{۴}$
۲) $k\pi + \frac{\pi}{۴}$
۳) $۲k\pi - \frac{\pi}{۴}$
۴) $۲k\pi + \frac{\pi}{۴}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۶

۲۷ جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\frac{\sin ۳x + \sin ۲x}{۱ + \cos x} = ۰$ کدام است؟

۱) $\frac{k\pi}{۵}$
۲) $\frac{۲k\pi}{۵}$
۳) $k\pi + \frac{\pi}{۵}$
۴) $\frac{(۲k+۱)\pi}{۵}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۷

۲۸ مجموع جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\sin ۲x + \cos(\frac{\pi}{۲} - x) = ۰$، در بازهٔ $[۰, ۲\pi]$ کدام است؟

۱) $\frac{۱۴\pi}{۳}$
۲) ۴π
۳) $\frac{۹\pi}{۲}$
۴) ۵π

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۶

۲۹ جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $۲\sin^۲ x + ۳\cos x = ۰$، کدام است؟

۱) $۲k\pi \pm \frac{۲\pi}{۳}$
۲) $۲k\pi \pm \frac{\pi}{۳}$
۳) $۲k\pi \pm \frac{۵\pi}{۶}$
۴) $k\pi - \frac{\pi}{۳}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

۳۰ مجموع جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\sin(x+\frac{\pi}{8})+\cos(x-\frac{3\pi}{8})=1$، در بازهٔ $[0,2\pi]$ برابر کدام است؟

۱) $\frac{3\pi}{4}$ ۲) $\frac{5\pi}{4}$

۳) $\frac{3\pi}{2}$ ۴) $\frac{7\pi}{4}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۵

۳۱ جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\cos 2x+2\cos^2 x=0$ کدام است؟

۱) $2k\pi\pm\frac{\pi}{3}$ ۲) $2k\pi\pm\frac{2\pi}{3}$

۳) $k\pi\pm\frac{\pi}{3}$ ۴) $k\pi\pm\frac{\pi}{6}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۶

۳۲ مجموع جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\sin^4 x+\cos^4 x=\frac{1}{2}$، در بازهٔ $[0,2\pi]$ کدام است؟

۱) $\frac{5\pi}{2}$ ۲) 3π

۳) $\frac{7\pi}{2}$ ۴) 4π

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۸

۳۳ مجموع جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $4\sin x\sin(\frac{3\pi}{2}-x)=1$ در بازهٔ $[0,2\pi]$ کدام است؟

۱) $\frac{5\pi}{2}$ ۲) 3π

۳) 4π ۴) 5π

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۳۴ جواب کلّی معادلهٔ مثلثاتی $\cos 3x+\cos x=0$، با شرط $\cos x\neq 0$، کدام است؟

۱) $\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{3}$ ۲) $\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$

۳) $k\pi-\frac{\pi}{4}$ ۴) $k\pi+\frac{\pi}{4}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

۳۵ نمودار تابع $y=3\sin(\frac{\pi}{4}-2x)$، روی بازهٔ $[-\pi,\frac{3\pi}{2}]$ در چند نقطه محور xها را قطع می‌کند؟

۱) ۲ ۲) ۳

۳) ۴ ۴) ۵

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۱

۳۶ در تابع با ضابطهٔ $f(x) = [x] + [-x] + \sqrt{\sin \pi x - ۱}$، مقدار $f(-\frac{۱}{۲}f(x))$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) ۱

۳) صفر ۴) تعریف نشده

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۹

۳۷ جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $۳\sin^۲x - ۴\sin^۴x = \cos ۲x$ کدام است؟ (با تغییر)

۱) $\frac{k\pi}{۲} - \frac{\pi}{۶}$ ۲) $\frac{k\pi}{۳} + \frac{\pi}{۶}$

۳) $k\pi + \frac{\pi}{۲}$ ۴) $\frac{k\pi}{۳}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۶

۳۸ جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\cos^۲x + ۳\sin\left(\frac{\pi}{۲} + x\right) + ۲ = ۰$ به کدام صورت است؟

۱) $k\pi$ ۲) $۲k\pi$

۳) $\frac{k\pi}{۲}$ ۴) $(۲k+۱)\pi$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۴

۳۹ جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $۲\cos ۲x = \cot x(۴\sin x + \tan x)$، کدام است؟

۱) $k\pi - \frac{\pi}{۳}$ ۲) $k\pi \pm \frac{\pi}{۳}$

۳) $۲k\pi \pm \frac{۲\pi}{۳}$ ۴) $۲k\pi \pm \frac{\pi}{۶}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۲

۴۰ جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\sin^۴x - \cos^۴x = \sin^۲\frac{۵\pi}{۴}$، به کدام صورت است؟

۱) $۲k\pi \pm \frac{\pi}{۶}$ ۲) $۲k\pi \pm \frac{\pi}{۳}$

۳) $k\pi \pm \frac{\pi}{۶}$ ۴) $k\pi \pm \frac{\pi}{۳}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۲

۴۱ معادلهٔ $x\sin x - ۱ = ۰$ در بازهٔ $[-\pi, \pi]$، چند ریشهٔ حقیقی دارد؟

۱) ۲ ۲) ۴

۳) ۵ ۴) ۶

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۴

۴۲ جواب کلّی معادلهٔ مثلثاتی $\sin ۲x \sin ۴x + \sin^۲ x = ۱$، کدام است؟

۱) $k\pi + \frac{\pi}{۶}$

۲) $(۲k+۱)\frac{\pi}{۶}$

۳) $k\pi - \frac{\pi}{۶}$

۴) $\frac{k\pi}{۶}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۷

۴۳ تعداد جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $۵\sin^۲(x) + ۲\cos(۳x) = -۲$ در فاصلهٔ $[-\pi, \pi]$، کدام است؟

۱) ۱

۲) ۲

۳) ۵

۴) ۷

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

۴۴ تعداد جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $(۱+\cos(\alpha))(۱+\cos(۲\alpha))(۱+\cos(۴\alpha)) = \frac{۱}{۸}$، در فاصلهٔ $[۰, ۲\pi]$ کدام است؟ (با تغییر)

۱) ۷

۲) ۱۰

۳) ۱۲

۴) ۱۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۰

۴۵ تعداد جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\cos^۲(x) - \sin^۲(x)\cos(۳x) = ۱$، در فاصلهٔ $[۰, ۲\pi]$ کدام است؟

۱) ۱

۲) ۳

۳) ۵

۴) ۶

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

۴۶ تعداد جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $۴\sin(۳x)\cos(۳x) = ۱$، در بازهٔ $\left[۰ , \frac{\pi}{۲}\right]$، کدام است؟

۱) ۲

۲) ۳

۳) ۴

۴) ۵

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۱ گزینه ۲

$$\sin ۲x - ۴\sin^۲ x \cos x = ۰ \Rightarrow \sin ۲x - ۲\sin x \sin ۲x = ۰$$

$$\Rightarrow \sin ۲x(۱ - ۲\sin x) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} \sin ۲x = ۰ \Rightarrow x = \frac{k\pi}{۲} \\ \sin x = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \begin{cases} x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۶} \\ x = ۲k\pi + \frac{۵\pi}{۶} \end{cases} \end{cases}$$

جواب‌هایی که در بازهٔ $(-\pi, \pi)$ قرار دارند عبارتند از: $\{۰, \frac{\pi}{۲}, \frac{-\pi}{۲}, \frac{\pi}{۶}, \frac{۵\pi}{۶}\}$

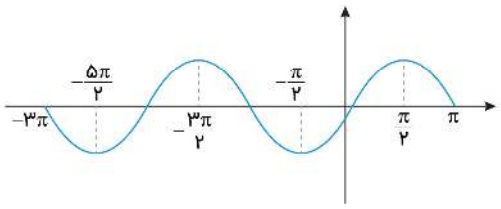
کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

۲ گزینه ۴

به‌جای $\cos ۲x$ عبارت برحسب $\sin x$ را قرار می‌دهیم:

$$۱ - ۲\sin^۲ x + \sin^۲ x = ۰ \Rightarrow \sin^۲ x = ۱$$

$$\Rightarrow \sin x = \pm ۱ \Rightarrow x = -\frac{۵\pi}{۲}, -\frac{۳\pi}{۲}, -\frac{\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲}$$



بنابراین:

$$S = -\frac{۵\pi}{۲} - \frac{۳\pi}{۲} - \frac{\pi}{۲} + \frac{\pi}{۲} = -۴\pi$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۳

۳ گزینه ۴

$$\sin(\frac{\pi+۴x}{۲}) = \sin(\frac{\pi}{۲}+۲x) = \cos ۲x$$

$$\cos(\frac{\pi+۸x}{۲}) = \cos(\frac{\pi}{۲}+۴x) = -\sin ۴x$$

$$\frac{۱}{\cos ۲x} - \frac{۱}{\sin ۴x} = ۰ \Rightarrow \cos ۲x = \sin ۴x$$

$$\Rightarrow ۲\sin ۲x\cos ۲x = \cos ۲x \xrightarrow{\cos ۲x=۰} ۲\sin ۲x = ۱ \Rightarrow \sin ۲x = \frac{۱}{۲}$$

$$\xrightarrow{[۰,\pi]} ۲x = \frac{\pi}{۶}, \frac{۵\pi}{۶} \Rightarrow x = \frac{\pi}{۱۲}, \frac{۵\pi}{۱۲}$$

$$\alpha = \frac{۵\pi}{۱۲} - \frac{\pi}{۱۲} = \frac{\pi}{۳} \Rightarrow \tan ۲\alpha = \tan\frac{۲\pi}{۳} = -\sqrt{۳}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۴ گزینه ۲

$$\cot(\frac{\pi+۴x}{۲}) = \cos(\frac{\pi+۸x}{۲})$$

$$\cot(\frac{\pi+۴x}{۲}) = \cot(\frac{\pi}{۲}+۲x) = -\tan ۲x$$

$$\cos(\frac{\pi+۸x}{۲}) = \cos(\frac{\pi}{۲}+۴x) = -\sin ۴x$$

$$\Rightarrow -\tan ۲x = -\sin ۴x \Rightarrow \frac{\sin ۲x}{\cos ۲x} = ۲\sin ۲x\cos ۲x$$

$$\Rightarrow \frac{\sin ۲x(۱-۲\cos^۲ ۲x)}{\cos ۲x} = ۰ \Rightarrow \sin ۲x = ۰, \cos^۲ ۲x = \frac{۱}{۲}$$

$$\cos ۲x = \pm\frac{\sqrt{۲}}{۲} : \begin{cases} \cos ۲x = -\frac{\sqrt{۲}}{۲} & \text{در بازهٔ موردنظر نیست} \\ \cos ۲x = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \Rightarrow ۲x = \pm\frac{\pi}{۴} \Rightarrow x = \pm\frac{\pi}{۸} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{۸} + \frac{\pi}{۸} = \frac{\pi}{۴}$$

$$\cos(۳\alpha) = \cos(\frac{۳\pi}{۴}) = -\frac{۱}{\sqrt{۲}}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

۵ گزینه ۴

$$\cos(\frac{۱۶\pi}{۸}+\frac{\pi}{۸}+x)\cos(\frac{۳\pi}{۸}-x)=\frac{۱}{۴}$$
$$\Rightarrow \cos(\frac{\pi}{۸}+x)\cos(\frac{\pi}{۲}-\frac{\pi}{۸}-x)=\frac{۱}{۴}\Rightarrow \cos(\frac{\pi}{۸}+x)\sin(\frac{\pi}{۸}+x)=\frac{۱}{۴}$$

$$\Rightarrow \sin(۲x+\frac{\pi}{۴})=\frac{۱}{۲}=\sin\frac{\pi}{۶}$$

$$۲x+\frac{\pi}{۴}=۲k\pi+\frac{\pi}{۶}\Rightarrow x=k\pi-\frac{\pi}{۲۴}\Rightarrow x_۱=-\frac{\pi}{۲۴}$$
$$۲x+\frac{\pi}{۴}=۲k\pi+\pi-\frac{\pi}{۶}\Rightarrow x=k\pi+\frac{۷\pi}{۲۴}\Rightarrow x_۲=\frac{۷\pi}{۲۴}\Rightarrow S=\frac{۷\pi}{۲۴}-\frac{\pi}{۲۴}=\frac{\pi}{۴}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۲

۶ گزینه ۲

$$\frac{\cos x}{۱+\sin x}=\frac{۱+\sin x}{\cos x}\Rightarrow \cos^۲x=۱+۲\sin x+\sin^۲x$$
$$\Rightarrow ۱-\sin^۲x=۱+۲\sin x+\sin^۲x\Rightarrow \sin^۲x+\sin x=۰$$

$$\Rightarrow \sin x(\sin x+۱)=۰\Rightarrow \begin{cases}\sin x=۰\Rightarrow x=۰,\pi,۲\pi,\ldots\\ \sin x=-۱\Rightarrow x=\frac{۳\pi}{۲},\frac{۷\pi}{۲},\ldots\end{cases}$$ غ ق ق

کمترین فاصلهٔ بین جواب‌ها π واحد است.

نکته: ریشه‌های مخرج غیر قابل قبول است.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۷ گزینه ۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۳

گام اول

می‌دانیم: $\cos ۲x = ۱ - ۲\sin^۲ x$

گام دوم

باتوجه‌به گام اول، معادله را برحسب $\sin x$ نوشته و حل می‌کنیم. جواب معادله را با $x = ۲k\pi + \frac{i\pi}{۶}$ مطابقت داده و مقادیر i را مشخص می‌کنیم.

$$\cos ۲x = \sin x \Rightarrow ۱ - ۲\sin^۲ x = \sin x$$

$$\Rightarrow ۲\sin^۲ x + \sin x - ۱ = ۰ \Rightarrow (۲\sin x - ۱)(\sin x + ۱) = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \sin x = \sin \frac{\pi}{۶} \Rightarrow \begin{cases} x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۶} \\ x = ۲k\pi + \pi - \frac{\pi}{۶} = ۲k\pi + \frac{۵\pi}{۶} \end{cases} \\ \sin x = -۱ \Rightarrow \sin x = \sin \frac{۳\pi}{۲} \Rightarrow x = ۲k\pi + \frac{۳\pi}{۲} = ۲k\pi + \frac{۹\pi}{۶} \end{cases}$$

باتوجه‌به جواب‌های به‌دست‌آمده مقادیر i برابر است با:

$$i = \{۱, ۵, ۹\}$$

۸ گزینه ۱

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۴

گام اول

الف) معادلهٔ مثلثاتی $\cos ۳x + \cos x = ۰$ را به معادلهٔ مثلثاتی $\cos ۳x = -\cos x$ تبدیل می‌کنیم.

ب) به‌جای $\cos x$ عبارت $\cos(\pi - x)$ را قرار داده و جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی را تعیین می‌کنیم.

گام دوم

$$\cos ۳x = \cos(\pi - x) \Rightarrow ۳x = ۲k\pi \pm (\pi - x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۳x = ۲k\pi + \pi - x \Rightarrow ۴x = ۲k\pi + \pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{۲} + \frac{\pi}{۴} \\ ۳x = ۲k\pi - \pi + x \Rightarrow ۲x = ۲k\pi - \pi \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{۲} \end{cases}$$

به ازای $x = k\pi - \frac{\pi}{۲}$، $\cos x = ۰$ پس این دسته جواب قابل قبول نیست و جواب موردنظر به صورت $x = \frac{k\pi}{۲} + \frac{\pi}{۴}$ است.

۹ گزینه ۴

$$\sin(۲x-\frac{\pi}{۴})=\cos(x+\frac{\pi}{۴})\Rightarrow \sin(۲x-\frac{\pi}{۴})=\sin(\frac{\pi}{۲}-(x+\frac{\pi}{۴}))$$

$$\Rightarrow \sin(۲x-\frac{\pi}{۴})=\sin(\frac{\pi}{۴}-x)$$

حال این معادله را حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} ۲x-\frac{\pi}{۴}=۲k\pi+\frac{\pi}{۴}-x\Rightarrow ۳x=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}\Rightarrow x=\frac{۲k\pi}{۳}+\frac{\pi}{۶} \\ ۲x-\frac{\pi}{۴}=۲k\pi+\pi-\frac{\pi}{۴}+x\Rightarrow x=۲k\pi+\pi \quad (x\neq k\pi \text{ غیرقابل‌قبول زیرا}) \end{cases}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

۱۰ گزینه ۴

نکته:

$$\sin x=\sin\alpha\Rightarrow \begin{cases} x=۲k\pi+\alpha \\ x=۲k\pi+\pi-\alpha \end{cases}$$

$$\frac{\sin ۳x}{\cos(\frac{۳\pi}{۲}+x)}=۱\xrightarrow{\cos(\frac{۳\pi}{۲}+x)=\sin x}\frac{\sin ۳x}{\sin x}=۱$$

$$\Rightarrow \sin ۳x=\sin x\Rightarrow \begin{cases} ۳x=۲k\pi+x\Rightarrow x=k\pi \text{ غ‌ق‌ق} \\ ۳x=۲k\pi+\pi-x\Rightarrow x=\frac{k\pi}{۲}+\frac{\pi}{۴} \end{cases}$$

چون $\sin x\neq ۰$، بنابراین جواب $x=k\pi$ غیرقابل‌قبول است.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۳

۱۱ گزینه ۱

به فرمول های ۲α توجه کنید:

$$\sin ۲\alpha=۲\sin\alpha\cos\alpha\ ,\ \cos ۲\alpha=۲\cos^{۲}\alpha-۱$$

$$۲\cos^{۲}x+۲\sin x\cos x=۱\Rightarrow ۲\cos^{۲}x-۱=-۲\sin x\cos x\Rightarrow \cos ۲x=-\sin ۲x$$

$$\xrightarrow[\cos\alpha=\sin(\frac{\pi}{۲}-\alpha)]{-\sin\alpha=\sin(-\alpha)}\sin(\frac{\pi}{۲}-۲x)=\sin(-۲x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{۲}-۲x=۲k\pi-۲x\Rightarrow \frac{\pi}{۲}=۲k\pi\Rightarrow \text{جواب ندارد} \\ \frac{\pi}{۲}-۲x=۲k\pi+\pi-(-۲x)\Rightarrow -۴x=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}\xrightarrow{:(-۴)}x=\frac{-k\pi}{۲}-\frac{\pi}{۸},\ k\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

نکته: چون $k\in\mathbb{Z}$ است پس $-k$ را همان k در نظر می‌گیریم. بنابراین گزینهٔ "۱" صحیح است.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۴

۱۲ گزینه ۳

با استفاده از اتحاد مزدوج داریم:

$$\sin^۴x - \cos^۴x = (\sin^۲x - \cos^۲x)\underbrace{(\sin^۲x + \cos^۲x)}_{۱}$$

$$= \sin^۲x - \cos^۲x = -(\cos^۲x - \sin^۲x) = -\cos ۲x$$

همچنین با استفاده از فرمول کمان‌های ۲α داریم:

$$\sin ۴x = ۲\sin ۲x \cos ۲x$$

بنابراین معادلهٔ مثلثاتی به‌صورت زیر ساده می‌شود:

$$۲\sin ۲x\cos ۲x = -\cos ۲x \Rightarrow ۲\sin ۲x\cos ۲x + \cos ۲x = ۰$$

$$\Rightarrow \cos ۲x(۲\sin ۲x + ۱) = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos ۲x = ۰ \Rightarrow ۲x = k\pi + \frac{\pi}{۲} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{۲} + \frac{\pi}{۴} \\ \sin ۲x = -\frac{۱}{۲} \Rightarrow \begin{cases} ۲x = ۲k\pi + \frac{۷\pi}{۶} \Rightarrow x = k\pi + \frac{۷\pi}{۱۲} \\ ۲x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۶} \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{۱۲} \end{cases} \end{cases}$$

حالا جواب‌های معادله را در بازهٔ $[۰, \pi]$ به دست می‌آوریم:

$$x = \frac{k\pi}{۲} + \frac{\pi}{۴} \Rightarrow \begin{cases} k = ۰ \Rightarrow x = \frac{\pi}{۴} \\ k = ۱ \Rightarrow x = \frac{\pi}{۲} + \frac{\pi}{۴} = \frac{۳\pi}{۴} \end{cases}$$

$$x = k\pi + \frac{۷\pi}{۱۲} \xrightarrow{k=۰} x = \frac{۷\pi}{۱۲}$$

$$x = k\pi - \frac{\pi}{۱۲} \xrightarrow{k=۱} x = \pi - \frac{\pi}{۱۲} = \frac{۱۱\pi}{۱۲}$$

بنابراین مجموع تمام جواب‌های معادله در بازهٔ $[۰, \pi]$ برابر است با:

$$\frac{\pi}{۴} + \frac{۳\pi}{۴} + \frac{۷\pi}{۱۲} + \frac{۱۱\pi}{۱۲} = \pi + \frac{۱۸\pi}{۱۲} = ۲\pi + \frac{۶\pi}{۱۲} = ۲\pi + \frac{\pi}{۲} = \frac{۵\pi}{۲}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۵

۱۳ گزینه ۲

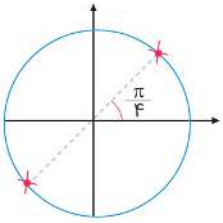
$$\sin(x+\frac{\pi}{۶})\cos(\frac{\pi}{۳}-x)=۱\Rightarrow \sin(x+\frac{\pi}{۶})\sin(\frac{\pi}{۲}-(\frac{\pi}{۳}-x))=۱$$

$$\sin^{۲}(x+\frac{\pi}{۶})=۱\Rightarrow \begin{cases}\sin(x+\frac{\pi}{۶})=۱\Rightarrow x=\frac{\pi}{۳}\\ \sin(x+\frac{\pi}{۶})=-۱\Rightarrow x=\frac{۴\pi}{۳}\end{cases}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

۱۴ گزینه ۲

$$\sin(x+\frac{\pi}{۴}).\cos(\frac{\pi}{۴}-x)=۱\Rightarrow \sin(x+\frac{\pi}{۴}).\sin(\frac{\pi}{۲}-(\frac{\pi}{۴}-x))=۱$$
$$\Rightarrow \sin(x+\frac{\pi}{۴}).\sin(x+\frac{\pi}{۴})=۱\Rightarrow \sin^{۲}(x+\frac{\pi}{۴})=۱$$
$$\Rightarrow x+\frac{\pi}{۴}=k\pi+\frac{\pi}{۲}\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{۴}$$
$$\Rightarrow \text{جواب‌ها}:\frac{\pi}{۴},\frac{۵\pi}{۴}\xrightarrow{\text{مجموع}}\frac{۶\pi}{۴}=\frac{۳\pi}{۲}$$

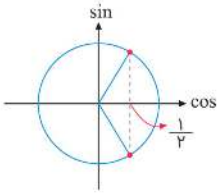


کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۱

۱۵ گزینه ۴

$$۸\cos x - \tan^۲ x = ۱ \Rightarrow ۸\cos x = ۱ + \tan^۲ x = \frac{۱}{\cos^۲ x}$$

$$\Rightarrow \cos^۳ x = \frac{۱}{۸} \Rightarrow \cos x = \frac{۱}{۲}$$



$x \in [۰, ۲\pi] \Rightarrow$ دو جواب دارد

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

۱۶ گزینه ۴

در هر سه پرانتز از اتحاد $۱ + \cos A = ۲\cos^۲ \frac{A}{۲}$ استفاده می‌کنیم:

$$(۱ + \cos ۲\alpha)(۱ + \cos ۴\alpha)(۱ + \cos ۸\alpha) = \frac{۱}{۸} \Rightarrow (۲\cos^۲ \alpha)(۲\cos^۲ ۲\alpha)(۲\cos^۲ ۴\alpha) = \frac{۱}{۸}$$

$$\Rightarrow \cos^۲ \alpha \cos^۲ ۲\alpha \cos^۲ ۴\alpha = \frac{۱}{۶۴} \Rightarrow |\cos \alpha \cos ۲\alpha \cos ۴\alpha| = \frac{۱}{۸}$$

دو طرف معادلهٔ بالا را در $|\sin \alpha|$ ضرب می‌کنیم:

$$|\sin \alpha \cos \alpha \cos ۲\alpha \cos ۴\alpha| = \frac{۱}{۸}|\sin \alpha|$$

حالا از اتحاد $\sin A \cos A = \frac{۱}{۲}\sin ۲A$ سه بار استفاده می‌کنیم:

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{|\sin \alpha \cos \alpha}_{\frac{۱}{۲}\sin ۲\alpha} \cos ۲\alpha}_{\frac{۱}{۴}\sin ۴\alpha} \cos ۴\alpha|}_{\frac{۱}{۸}\sin ۸\alpha} = \frac{۱}{۸}|\sin \alpha| \Rightarrow |\sin ۸\alpha| = |\sin \alpha| \Rightarrow \begin{cases} \sin ۸\alpha = \sin \alpha \\ \sin ۸\alpha = \sin(-\alpha) \end{cases}$$

هر دو معادله را حل می‌کنیم و بزرگ‌ترین جواب هرکدام در بازهٔ $[۰, \pi]$ را می‌نویسیم:

$$۱)\ \sin ۸\alpha = \sin \alpha \Rightarrow \begin{cases} ۸\alpha = ۲k\pi + \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{۲k\pi}{۷} \Rightarrow \alpha_{max} = \frac{۶\pi}{۷} \\ ۸\alpha = ۲k\pi + \pi - \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{۲k\pi + \pi}{۹} \Rightarrow \alpha_{max} = \frac{۷\pi}{۹} \end{cases}$$

$$۲)\ \sin ۸\alpha = \sin(-\alpha) \Rightarrow \begin{cases} ۸\alpha = ۲k\pi - \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{۲k\pi}{۹} \Rightarrow \alpha_{max} = \frac{۸\pi}{۹} \\ ۸\alpha = ۲k\pi + \pi + \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{۲k\pi + \pi}{۷} \Rightarrow \alpha_{max} = \frac{۵\pi}{۷} \end{cases}$$

تذکر: در جواب‌ها $\alpha = \pi$ را به خاطر ضرب طرفین در $\sin \alpha$ در نظر نگرفتیم. بنابراین بزرگ‌ترین جواب، $\frac{۸\pi}{۹}$ است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۰

۱۷ گزینه ۱

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۰

گام اول

داریم: $\sin^۲ x = ۱ - \cos^۲ x$

گام دوم

با استفاده از رابطهٔ گام اول، معادلهٔ مثلثاتی داده‌شده را برحسب $\cos x$ مرتب می‌کنیم:

$$۲\sin^۲ x - \cos x - ۱ = ۰ \xrightarrow{\sin^۲ x = ۱ - \cos^۲ x} ۲ - ۲\cos^۲ x - \cos x - ۱ = ۰ \Rightarrow ۲\cos^۲ x + \cos x - ۱ = ۰$$

$$\Rightarrow (۲\cos x - ۱)(\cos x + ۱) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{۱}{۲} \\ \cos x = -۱ \end{cases}$$

چون $-۱ \le \cos x \le ۱$ است پس هر دو مقدار به‌دست‌آمده، قابل‌قبول است. باتوجه‌به آن‌ها جواب‌های معادله را در بازهٔ $[\pi, ۲\pi]$ تعیین می‌کنیم:

$$\cos x = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \cos x = \cos \frac{\pi}{۳} \Rightarrow x = ۲k\pi \pm \frac{\pi}{۳} \xrightarrow{x \in [\pi, ۲\pi]} x_۱ = ۲\pi - \frac{\pi}{۳} = \frac{۵\pi}{۳}$$

$$\cos x = -۱ \Rightarrow \cos x = \cos \pi \Rightarrow x_۲ = \pi$$

بنابراین مجموع جواب‌های معادله برابر است با:

$$x_۱ + x_۲ = \frac{۵\pi}{۳} + \pi = \frac{۸\pi}{۳}$$

۱۸ گزینه ۱

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۳

گام اول

مجموعه جواب‌های معادلهٔ $\cos x = \cos \alpha$ به‌صورت $x = ۲k\pi \pm \alpha$ است.

گام دوم

جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی را در بازهٔ $[۰, ۲\pi]$ به دست می‌آوریم:

$$۲\cos^۲ x + \cos x = ۱ \Rightarrow ۲\cos^۲ x + \cos x - ۱ = ۰$$

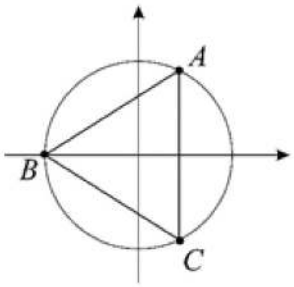
$$\Rightarrow (۲\cos x - ۱)(\cos x + ۱) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{۱}{۲} \\ \cos x = -۱ \end{cases}$$

$$\cos x = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \cos x = \cos \frac{\pi}{۳} \Rightarrow x = ۲k\pi \pm \frac{\pi}{۳} \xrightarrow{x \in [۰, ۲\pi]} x_۱ = \frac{\pi}{۳},\ x_۲ = \frac{۵\pi}{۳}$$

$$\cos x = -۱ \Rightarrow \cos x = \cos x\pi \xrightarrow{x \in [۰, ۲\pi]} x_۳ = \pi$$

جواب‌ها را بر روی دایره مثلثاتی مشخص می‌کنیم:

$$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BC} = \frac{۲\pi}{۳} \Rightarrow \hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = ۶۰^\circ$$



بنابراین مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ متساوی‌الاضلاع است.

۱۹ گزینه ۱

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۷

گام اول

می‌دانیم:

$$\sin\frac{۵\pi}{۶}=\frac{۱}{۲},\ \sin(\frac{\pi}{۲}+x)=\cos x,\ \sin(\pi+x)=-\sin x$$

گام دوم

باتوجه‌به گام اول، معادله را ساده کرده سپس حل می‌کنیم:

$$\sin\frac{۵\pi}{۶}+\sin(\frac{\pi}{۲}+x)\sin(\pi+x)=\frac{۱}{۲}-\cos x\sin x=۰$$

$$\Rightarrow \cos x\sin x=\frac{۱}{۲}\Rightarrow ۲\cos x\sin x=۱\Rightarrow \sin ۲x=۱\Rightarrow ۲x=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}$$

$$\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{۴}$$

۲۰ گزینه ۳

برای حل معادلهٔ مثلثاتی از روابط زیر کمک می گیریم:

$$\tan(\frac{۳\pi}{۲}-x)=\cot x$$

$$\cos\frac{۴\pi}{۳}=\cos(\pi+\frac{\pi}{۳})=-\cos\frac{\pi}{۳}=-\frac{۱}{۲}$$

$$(\sin x-\tan x)\tan(\frac{۳\pi}{۲}-x)=\cos\frac{۴\pi}{۳}$$

$$(\sin x-\tan x)\cot x=-\frac{۱}{۲}\Rightarrow \sin x\cot x-\tan x\cot x=-\frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow \sin x\times\frac{\cos x}{\sin x}-۱=-\frac{۱}{۲}\Rightarrow \cos x-۱=-\frac{۱}{۲}$$

جواب های معادلهٔ $\cos x=\cos\alpha$ از رابطهٔ $x=۲k\pi\pm\alpha$ به دست می آید.

$$\cos x=\frac{۱}{۲}\Rightarrow \cos x=\cos\frac{\pi}{۳}\Rightarrow x=۲k\pi\pm\frac{\pi}{۳}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۰

۲۱ گزینه ۳

ظاهر سؤال ممکن است کمی سخت به نظر برسد، ولی با انجام تغییرات زیر حل آن بسیار ساده می شود:

$$\sin(\pi+x)=-\sin x,\cos(\frac{\pi}{2}+x)=-\sin x,\sin(\pi-x)=\sin x$$

$$\sin(\pi+x)\cos(\frac{\pi}{2}+x)-2\sin(\pi-x)+1=0$$
$$\Rightarrow(-\sin x)(-\sin x)-2\sin x+1=0\Rightarrow \sin^2 x-2\sin x+1=0$$
$$\Rightarrow(\sin x-1)^2=0\Rightarrow \sin x-1=0\Rightarrow \sin x=1\Rightarrow x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

۲۲ گزینه ۴

در این گونه سؤال ها ابتدا تمام نسبت های مثلثاتی را به یک نسبت تبدیل می کنیم. با توجه به رابطهٔ $\sin^2 x=1-\cos^2 x$، معادلهٔ مثلثاتی را برحسب $\cos x$ مرتب می کنیم.

$$2\sin^2 x=3\cos x\Rightarrow 2(1-\cos^2 x)=3\cos x$$
$$\Rightarrow 2-2\cos^2 x=3\cos x\Rightarrow 2\cos^2 x+3\cos x-2=0$$
$$\Rightarrow(2\cos x-1)(\cos x+2)=0\Rightarrow\begin{cases}\cos x=\frac{1}{2}\\ \cos x=-2\ \text{غ.ق.ق}\end{cases}$$

معادلهٔ $\cos x=\cos\alpha$ دارای جواب $x=2k\pi\pm\alpha$ است. هم چنین توجه کنید که معادلهٔ $\cos x=A$ به ازای $A>1$ و $A<-1$ فاقد جواب است.

پس جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\cos x=\frac{1}{2}$ برابر است با:

$$\cos x=\frac{1}{2}\Rightarrow\cos x=\cos\frac{\pi}{3}\Rightarrow x=2k\pi\pm\frac{\pi}{3}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۶

۲۳ گزینه ۲

برای حل سؤال به دو رابطهٔ زیر توجه کنید:

$$\sin(\frac{۳\pi}{۲}+x)=-\cos x\ ,\ \cos ۲x=\cos^۲x-\sin^۲x$$

$$\sin^۲x-\cos^۲x=\sin(\frac{۳\pi}{۲}+x)\Rightarrow-\cos ۲x=-\cos x\Rightarrow\cos ۲x=\cos x$$

$$\Rightarrow ۲x=۲k\pi\pm x\Rightarrow\begin{cases}۲x=۲k\pi+x\Rightarrow x=۲k\pi\\ ۲x=۲k\pi-x\Rightarrow ۳x=۲k\pi\Rightarrow x=\frac{۲k\pi}{۳}\end{cases}$$

جواب کلی که هر دو جواب $x=۲k\pi$ و $x=\frac{۲k\pi}{۳}$ را شامل شود به صورت $x=\frac{۲k\pi}{۳}$ است.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۱

۲۴ گزینه ۳

برای ساده تر شدن معادلهٔ مثلثاتی از روابط زیر استفاده می کنیم:

$$\sin(\pi-x)=\sin x,\cos(\frac{۳\pi}{۲}+x)=\sin x,\sin(\pi+x)=-\sin x$$

اگر در حل معادلهٔ مثلثاتی دو نسبت مثلثاتی متفاوت داشتیم، آن ها را به یک نسبت تبدیل می کنیم. با استفاده از رابطهٔ $\sin^۲x=۱-\cos^۲x$، معادلهٔ مثلثاتی را برحسب $\cos x$ بازنویسی می کنیم.

$$۲\sin(\pi-x)\cos(\frac{۳\pi}{۲}+x)+۳\cot x\sin(\pi+x)=۰$$

$$\Rightarrow ۲\sin x\sin x+۳\cot x(-\sin x)=۰$$

$$\Rightarrow ۲\sin^۲x-۳\cos x=۰\xrightarrow{\sin^۲x=۱-\cos^۲x}۲(۱-\cos^۲x)-۳\cos x=۰$$

$$\Rightarrow ۲-۲\cos^۲x-۳\cos x=۰\Rightarrow ۲\cos^۲x+۳\cos x-۲=۰\Rightarrow(۲\cos x-۱)(\cos x+۲)=۰$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\cos x=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\cos x=\cos\frac{\pi}{۳}\Rightarrow x=۲k\pi\pm\frac{\pi}{۳}\\ \cos x=-۲\quad\text{غ.ق.ق}\end{cases}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۷

۲۵ گزینه ۳

ابتدا معادلهٔ مثلثاتی را به حالت استاندارد $f(x)=0$ تبدیل و جواب‌ها را در بازهٔ $[0,2\pi]$ تعیین می‌کنیم:

$$\frac{\sin x\cos x}{1-\cos x}=1+\cos x \Rightarrow \sin x\cos x=(1-\cos x)(1+\cos x)$$

$$\Rightarrow \sin x\cos x=1-\cos^2 x=\sin^2 x$$

$$\Rightarrow \sin x\cos x-\sin^2 x=0 \Rightarrow \sin x(\cos x-\sin x)=0 \Rightarrow \begin{cases}\sin x=0\\ \cos x=\sin x\end{cases}$$

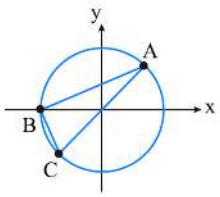
$$\sin x=0 \Rightarrow x=k\pi \xrightarrow{x\in[0,2\pi]} x=0,\ x=\pi,\ x=2\pi$$

$$\sin x=\cos x \Rightarrow \tan x=1 \xrightarrow{x\in[0,2\pi]} x=\frac{\pi}{4},\ x=\frac{5\pi}{4}$$

به ازای $x=0$ و $x=2\pi$ عبارت $1-\cos x$ برابر صفر است پس کسر تعریف‌نشده خواهد بود.

مجموعه جواب‌های $x=\pi,\ x=\frac{\pi}{4},\ x=\frac{5\pi}{4}$ را بر روی دایرهٔ مثلثاتی مشخص می‌کنیم:

$$\overset{\frown}{AC}=\pi \Rightarrow \hat{B}=90^\circ$$



بنابراین مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ قائم‌الزاویه است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۱

۲۶ گزینه ۲

با توجه به رابطهٔ $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$ معادله را ساده می کنیم. هم چنین می دانیم $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$ است.

$$2\tan x\cos^2 x=1 \Rightarrow 2\frac{\sin x}{\cos x}\times\cos^2 x=1 \xrightarrow{\cos x\neq 0} 2\sin x\cos x=1$$

$$\Rightarrow \sin 2x=1 \xrightarrow{\sin\alpha=1\Rightarrow\alpha=2k\pi+\frac{\pi}{2}} 2x=2k\pi+\frac{\pi}{2} \xrightarrow{\div 2} x=k\pi+\frac{\pi}{4}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۶

۲۷ گزینه ۲

$$\frac{\sin ۳x + \sin ۲x}{۱ + \cos x} = ۰$$

برای آنکه کسر صفر شود باید صورت آن صفر باشد.

$$\sin ۳x + \sin ۲x = ۰ \Rightarrow \sin ۳x = -\sin ۲x \Rightarrow \sin ۳x = \sin(-۲x)$$

$$\begin{cases} ۳x = ۲k\pi - ۲x \Rightarrow ۵x = ۲k\pi \Rightarrow x = \frac{۲k\pi}{۵} & \checkmark \\ ۳x = ۲k\pi + \pi - (-۲x) \Rightarrow x = ۲k\pi + \pi & \times \end{cases}$$

توجه کنید که به ازای $x = ۲k\pi + \pi$ مخرج یعنی $۱ + \cos x$ صفر می‌شود؛ بنابراین جواب کلی همان $x = \frac{۲k\pi}{۵}$ است.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۷

۲۸ گزینه ۴

$$\sin ۲x + \cos(\frac{\pi}{۲} - x) = ۰ \Rightarrow ۲\sin x \cos x + \sin x = ۰ \Rightarrow \sin x(۲\cos x + ۱) = ۰$$

$$\sin x = ۰ \Rightarrow x = ۰, \pi, ۲\pi$$

$$۲\cos x + ۱ = ۰ \Rightarrow \cos x = -\frac{۱}{۲} \Rightarrow x = \pi - \frac{\pi}{۳} = \frac{۲\pi}{۳}, x = \pi + \frac{\pi}{۳} = \frac{۴\pi}{۳}$$

$$\pi + ۲\pi + \frac{۲\pi}{۳} + \frac{۴\pi}{۳} = ۵\pi$$

در اینجا نیازی به محاسبهٔ جواب‌های کلی معادلهٔ مثلثاتی نیست، فقط کافی است جواب‌ها را در فاصلهٔ داده‌شده، مشخص کنیم.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۶

۲۹ گزینه ۱

$$۲\sin^۲ x + ۳\cos x = ۰ \xrightarrow{\sin^۲ x = ۱ - \cos^۲ x} ۲ - ۲\cos^۲ x + ۳\cos x = ۰ \Rightarrow ۲\cos^۲ x - ۳\cos x - ۲ = ۰$$

$$\Rightarrow \cos x = \frac{۳ \pm \sqrt{۹ + ۱۶}}{۴} = \begin{cases} ۲ & \text{غ ق ق} \\ -\frac{۱}{۲} \end{cases} \Rightarrow \cos x = \frac{-۱}{۲} \Rightarrow x = ۲k\pi \pm \frac{۲\pi}{۳}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

۳۰ گزینه ۱

$$\sin(x+\frac{\pi}{8})+\cos(x-\frac{3\pi}{8})=1$$

باتوجه‌به اینکه $\sin\alpha=\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)$ است، داریم:

$$\cos(\frac{\pi}{2}-x-\frac{\pi}{8})+\cos(x-\frac{3\pi}{8})=\cos(\frac{3\pi}{8}-x)+\cos(x-\frac{3\pi}{8})$$
$$=2\cos(x-\frac{3\pi}{8})=1\Rightarrow\cos(x-\frac{3\pi}{8})=\frac{1}{2}=\cos\frac{\pi}{3}$$
$$\Rightarrow x-\frac{3\pi}{8}=2k\pi\pm\frac{\pi}{3}\Rightarrow x=2k\pi+\frac{3\pi}{8}\pm\frac{\pi}{3}$$
$$\xrightarrow{x\in[0,2\pi]}x\in\left\{\frac{3\pi}{8}+\frac{\pi}{3},\frac{3\pi}{8}-\frac{\pi}{3}\right\}$$

$$\Rightarrow \text{مجموع جواب‌ها}=\frac{3\pi}{8}+\frac{\pi}{3}+\frac{3\pi}{8}-\frac{\pi}{3}=\frac{3\pi}{4}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۵

۳۱ گزینه ۳

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۶

گام اول

با استفاده از فرمول $\cos2\alpha=2\cos^2\alpha-1$ عبارت داده‌شده را ساده کرده و معادله را حل می‌کنیم.

گام دوم

$$\cos2x+2\cos^2x=0\Rightarrow 2\cos^2x-1+2\cos^2x=0$$

$$\Rightarrow 4\cos^2x=1\Rightarrow\cos^2x=\frac{1}{4}\Rightarrow\cos x=\pm\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\cos x=\frac{1}{2}\Rightarrow x=2k\pi\pm\frac{\pi}{3}\\ \cos x=-\frac{1}{2}\Rightarrow x=2k\pi\pm\frac{2\pi}{3}\end{cases}\xrightarrow{\text{اجتماع}}x=k\pi\pm\frac{\pi}{3}$$

۳۲ گزینه ۴

می‌دانیم:

$$(\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha)^۲=\sin^۴\alpha+\cos^۴\alpha+۲\sin^۲\alpha\cos^۲\alpha$$
$$\Rightarrow ۱=\sin^۴\alpha+\cos^۴\alpha+\frac{۱}{۲}\sin^۲۲\alpha$$
$$\Rightarrow \sin^۴\alpha+\cos^۴\alpha=۱-\frac{۱}{۲}\sin^۲۲\alpha$$

حال از رابطهٔ $\sin^۴\alpha+\cos^۴\alpha=۱-\frac{۱}{۲}\sin^۲۲\alpha$ کمک می‌گیریم:

$$\sin^۴x+\cos^۴x=\frac{۱}{۲}\Rightarrow ۱-\frac{۱}{۲}\sin^۲۲x=\frac{۱}{۲}\Rightarrow \sin^۲۲x=۱$$
$$\Rightarrow \sin ۲x=\pm ۱\Rightarrow ۲x=k\pi\pm\frac{\pi}{۲}\Rightarrow x=\frac{k\pi}{۲}\pm\frac{\pi}{۴}$$

جواب‌های موجود در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ برابر $\left\{\frac{\pi}{۴},\frac{۳\pi}{۴},\frac{۵\pi}{۴},\frac{۷\pi}{۴}\right\}$ می‌باشد که مجموع آن‌ها ۴π است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۸

۳۳ گزینه ۴

$$۴\sin x\sin(\frac{۳\pi}{۲}-x)=۱\Rightarrow ۴\sin x(-\cos x)=۱$$
$$\Rightarrow -۴\times\frac{۱}{۲}\sin ۲x=۱\Rightarrow \sin ۲x=-\frac{۱}{۲}=\sin(-\frac{\pi}{۶})$$
$$\Rightarrow \begin{cases}۲x=۲k\pi-\frac{\pi}{۶}\\ ۲x=۲k\pi+\pi+\frac{\pi}{۶}\end{cases}\Rightarrow \begin{cases}x=k\pi-\frac{\pi}{۱۲} & (۱)\\ x=k\pi+\frac{۷\pi}{۱۲} & (۲)\end{cases}$$

تعداد جواب‌ها را در دسته‌های مختلف به دست می‌آوریم:

k	۱	۲	
x	$\pi-\frac{\pi}{۱۲}$	$۲\pi-\frac{\pi}{۱۲}$	(۱)

k	۰	۱	
x	$\frac{۷\pi}{۱۲}$	$\pi+\frac{۷\pi}{۱۲}$	(۲)

مجموع جواب‌ها برابر است با:

$$\pi-\frac{\pi}{۱۲}+۲\pi-\frac{\pi}{۱۲}+\frac{۷\pi}{۱۲}+\pi+\frac{۷\pi}{۱۲}=۴\pi+\pi=۵\pi$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۳۴ گزینه ۲

$$\cos ۳x + \cos x = ۰ \Rightarrow \cos ۳x = -\cos x \Rightarrow \cos ۳x = \cos(\pi - x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۳x = ۲k\pi + \pi - x \Rightarrow ۴x = ۲k\pi + \pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{۲} + \frac{\pi}{۴} \\ ۳x = ۲k\pi - \pi + x \Rightarrow ۲x = ۲k\pi - \pi \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{۲} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\cos x \neq ۰} x = \frac{k\pi}{۲} + \frac{\pi}{۴}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

۳۵ گزینه ۴

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۱

گام اول

الف) وقتی تعداد نقاط برخورد نمودار یک تابع با محور xها خواسته شده است، درواقع باید تعداد ریشه‌های معادلهٔ $y = ۰$ را تعیین کنیم. پس باید تعداد ریشه‌های معادلهٔ $y = ۰$ را در بازهٔ $[-\pi, \frac{۳\pi}{۲}]$ به دست آوریم.

ب) معادلهٔ $\sin\alpha = ۰$ یک معادلهٔ خاص بوده و در آن $\alpha = k\pi$ است.

ج) مقادیر k را به نحوی تعیین می‌کنیم که ریشه‌های معادله حتماً در بازهٔ $[-\pi, \frac{۳\pi}{۲}]$ قرار بگیرند.

گام دوم

$$y = ۰ \Rightarrow ۳\sin(\frac{\pi}{۴} - ۲x) = ۰ \Rightarrow \sin(\frac{\pi}{۴} - ۲x) = ۰ \xrightarrow[\alpha = k\pi]{\sin\alpha = ۰} \frac{\pi}{۴} - ۲x = k\pi$$

$$\Rightarrow ۲x = \frac{\pi}{۴} - k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{۸} - \frac{k\pi}{۲} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$k = -۲ \Rightarrow x = \frac{\pi}{۸} + \pi = \frac{۹\pi}{۸}$$

$$k = -۱ \Rightarrow x = \frac{\pi}{۸} + \frac{\pi}{۲} = \frac{۵\pi}{۸}$$

$$k = ۰ \Rightarrow x = \frac{\pi}{۸}$$

$$k = ۱ \Rightarrow x = \frac{\pi}{۸} - \frac{\pi}{۲} = -\frac{۳\pi}{۸}$$

$$k = ۲ \Rightarrow x = \frac{\pi}{۸} - \pi = -\frac{۷\pi}{۸}$$

توجه داشته باشید که به ازای $k \geq ۳$ یا $k \leq -۳$ مقادیری که برای x به دست می‌آید در بازهٔ $[-\pi, \frac{۳\pi}{۲}]$ نیست. پس پنج مقدار برای x به دست آمده و نمودار تابع در پنج نقطه محور xها را قطع می‌کند.

۳۶ گزینه ۱

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۹

گام اول

تابع $\sqrt{\sin \pi x - ۱}$ در صورتی تعریف شده است که $\sin \pi x - ۱ \geq ۰$ باشد و چون همواره $\sin \pi x \leq ۱$ برقرار است پس باید $\sin \pi x = ۱$ باشد. در این حالت $x = ۲k + \frac{۱}{۲}$ می شود که یک عدد غیر صحیح است، بنابراین حاصل $[x] + [-x]$ برابر عدد ۱- می شود.

گام دوم

حالا سراغ محاسبهٔ مقدار $f(x)$ و هم چنین مقدار $f(-\frac{۱}{۲}f(x))$ می رویم:

$$f(x) = [x] + [-x] + \sqrt{\sin \pi x - ۱} = -۱ + ۰ = -۱$$

$$f(-\frac{۱}{۲}f(x)) = f(-\frac{۱}{۲}(-۱)) = f(\frac{۱}{۲}) = [\frac{۱}{۲}] + [-\frac{۱}{۲}] + \sqrt{\sin \frac{\pi}{۲} - ۱}$$

$$= ۰ - ۱ + \sqrt{۱ - ۱} = -۱ + ۰ = -۱$$

۳۷ گزینه ۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۶

گام اول

با استفاده از رابطهٔ $\cos ۲x = ۱ - ۲\sin^۲ x$ معادلهٔ مثلثاتی داده‌شده را به یک معادلهٔ مثلثاتی برحسب $\sin x$ تبدیل می‌کنیم.

گام دوم

$$۳\sin^۲ x - ۴\sin^۴ x = \cos ۲x \Rightarrow ۳\sin^۲ x - ۴\sin^۴ x = ۱ - ۲\sin^۲ x$$

$$\Rightarrow ۴\sin^۴ x - ۵\sin^۲ x + ۱ = ۰ \xrightarrow{\sin^۲ x = t} ۴t^۲ - ۵t + ۱ = ۰$$

$$t = ۱ \Rightarrow \sin^۲ x = ۱ \Rightarrow \sin x = \pm ۱ \Rightarrow x = ۲k\pi \pm \frac{\pi}{۲} \quad (۱)$$

$$t = \frac{۱}{۴} \Rightarrow \sin^۲ x = \frac{۱}{۴} \Rightarrow \sin x = \pm \frac{۱}{۲} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{۶} \quad (۲)$$

$$(۱) \cup (۲) : x = \frac{k\pi}{۳} + \frac{\pi}{۶}$$

۳۸ گزینه ۴

با استفاده از رابطهٔ $\sin(\frac{\pi}{۲}+x)=\cos x$ معادلهٔ مثلثاتی را ساده می‌کنیم و جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی را به دست می‌آوریم.

$$\cos^۲x+۳\sin(\frac{\pi}{۲}+x)+۲=۰\Rightarrow \cos^۲x+۳\cos x+۲=۰$$

$$\Rightarrow (\cos x+۱)(\cos x+۲)=۰\Rightarrow \begin{cases}\cos x=-۱\Rightarrow x=۲k\pi+\pi=(۲k+۱)\pi\\ \cos x=-۲ \quad \text{غ.ق.ق}\end{cases}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۴

۳۹ گزینه ۳

ابتدا معادلهٔ مثلثاتی داده‌شده را تا حد امکان ساده می‌کنیم:

$$۲\cos ۲x=\cot x(۴\sin x+\tan x)\Rightarrow ۲(۲\cos^۲x-۱)=۴\cot x\sin x+\cot x\tan x$$

$$\Rightarrow ۴\cos^۲x-۲=۴\cos x+۱\Rightarrow ۴\cos^۲x-۴\cos x-۳=۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\cos x=\frac{۴+\sqrt{۶۴}}{۸}=\frac{۴+۸}{۸}=\frac{۱۲}{۸}=\frac{۳}{۲}\Rightarrow \cos x=\frac{۳}{۲} \quad \text{غ.ق ق}\\ \cos x=\frac{۴-\sqrt{۶۴}}{۸}=\frac{۴-۸}{۸}=-\frac{۴}{۸}=-\frac{۱}{۲}\Rightarrow \cos x=\cos\frac{۲\pi}{۳}\Rightarrow x=۲k\pi\pm\frac{۲\pi}{۳}\end{cases}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۲

۴۰ گزینه ۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۲

گام اول

الف) با استفاده از اتحاد مزدوج سمت چپ معادلهٔ مثلثاتی را ساده می‌کنیم:

$$\sin^۴x-\cos^۴x=(\sin^۲x-\cos^۲x)\underbrace{(\sin^۲x+\cos^۲x)}_{۱}=\sin^۲x-\cos^۲x$$

ب) با دانستن رابطهٔ $\cos ۲\alpha=\cos^۲\alpha-\sin^۲\alpha$ و $\sin\frac{۵\pi}{۴}=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$، معادله را حل کرده و جواب کلی آن را به دست می‌آوریم.

گام دوم

$$\sin^۲x-\cos^۲x=-(\cos^۲x-\sin^۲x)=-\cos ۲x$$

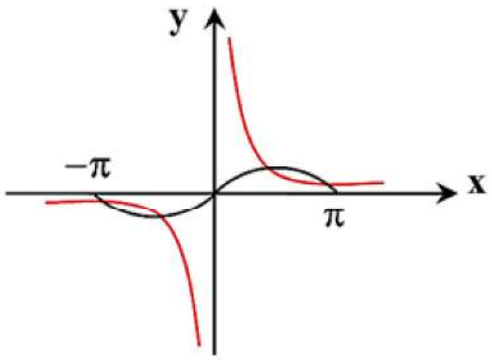
$$\sin^۴x-\cos^۴x=-\cos ۲x=\sin^۲\frac{۵\pi}{۴}\xrightarrow{\sin\frac{۵\pi}{۴}=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}}-\cos ۲x=(-\frac{\sqrt{۲}}{۲})^۲\Rightarrow -\cos ۲x=\frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow \cos ۲x=-\frac{۱}{۲}\Rightarrow \cos ۲x=\cos\frac{۲\pi}{۳}\Rightarrow ۲x=۲k\pi\pm\frac{۲\pi}{۳}\xrightarrow{\div ۲}x=k\pi\pm\frac{\pi}{۳}$$

۴۱ گزینه ۲

$$x\sin x - ۱ = ۰ \Rightarrow x\sin x = ۱ \Rightarrow \sin x = \frac{۱}{x}$$

کافی است تعداد نقاط تلاقی نمودارهای $y = \sin x$ و $y = \frac{۱}{x}$ را در بازهٔ $[-\pi, \pi]$ به دست بیاوریم. برای این منظور هر دو نمودار را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم.



باتوجه‌به شکل، واضح است که معادلهٔ داده‌شده در بازهٔ $[-\pi, \pi]$ دارای ۴ ریشهٔ حقیقی است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۴

۴۲ گزینه ۲

راه‌حل اول:

$$\sin ۲x \sin ۴x + \sin^۲ x = ۱ \Rightarrow \sin ۲x \sin ۴x = ۱ - \sin^۲ x$$
$$\Rightarrow (۲\sin x \cos x)(۲\sin ۲x \cos ۲x) = \cos^۲ x$$
$$\Rightarrow (۲\sin x \cos x)(۴\sin x \cos x \cos ۲x) = \cos^۲ x$$
$$\Rightarrow (\cos^۲ x)(۸\sin^۲ x \cos ۲x - ۱) = ۰$$
$$\Rightarrow (\cos^۲ x)(۸\sin^۲ x(۱ - ۲\sin^۲ x) - ۱) = ۰$$
$$\Rightarrow (\cos^۲ x)(-۱۶\sin^۴ x + ۸\sin^۲ x - ۱) = ۰$$
$$\Rightarrow (\cos^۲ x)(-(۴\sin^۲ x - ۱)^۲) = ۰$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x = ۰ \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{۲} & (۱) \\ ۴\sin^۲ x - ۱ = ۰ \Rightarrow \sin^۲ x = \frac{۱}{۴} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{۶} & (۲) \end{cases}$$
$$\xrightarrow{(۱)\cup(۲)} x = (۲k+۱)\frac{\pi}{۶}$$

راه‌حل دوم:

$$\sin ۲x \sin ۴x = ۱ - \sin^۲ x \Rightarrow \frac{۱}{۲}(\cos(-۲x) - \cos ۶x) = \cos^۲ x$$
$$\Rightarrow \frac{۱}{۲}\cos ۲x - \frac{۱}{۲}\cos ۶x = \frac{۱ + \cos ۲x}{۲} \Rightarrow \cos ۶x = -۱$$
$$\Rightarrow ۶x = (۲k+۱)\pi \Rightarrow x = (۲k+۱)\frac{\pi}{۶}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۷

۴۳ گزینه ۲

$$۲\cos(۳x) = -۲ - ۵\sin^۲ x$$

اگر برد دو طرف تساوی را حساب کنیم خواهیم داشت:

$$-۲ \le ۲\cos(۳x) \le ۲ \quad , \quad -۷ \le -۲ - ۵\sin^۲ x \le -۲$$

پس دو طرف تساوی فقط به ازای -۲ برقرار خواهد بود.

$$\begin{cases} ۲\cos(۳x) = -۲ \Rightarrow \cos(۳x) = -۱ \Rightarrow ۳x = (۲k-۱)\pi \Rightarrow x = (۲k-۱)\frac{\pi}{۳} & , k \in \mathbb{Z} \\ -۲ - ۵\sin^۲ x = -۲ \Rightarrow \sin^۲ x = ۰ \Rightarrow x = k'\pi & , k' \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

جواب‌های مشترک دو معادله را پیدا می‌کنیم:

$$\{-\pi, \frac{-\pi}{۳}, \frac{\pi}{۳}, \pi\} \cap \{-\pi, ۰, \pi\} = \{-\pi, \pi\}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

۴۴ گزینه ۴

به‌کمک رابطهٔ $1+\cos x = 2\cos^2\frac{x}{2}$ معادله به‌صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$64\cos^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\alpha\cos^2 2\alpha = 1$$

حال طرفین رابطه را در $\sin^2\frac{\alpha}{2}$ ضرب می‌کنیم:

$$64\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\alpha\cos^2 2\alpha = \sin^2\frac{\alpha}{2}$$
$$16\sin^2\alpha\cos^2\alpha\cos^2 2\alpha = \sin^2\frac{\alpha}{2}$$
$$4\sin^2 2\alpha\cos^2 2\alpha = \sin^2\frac{\alpha}{2}$$
$$\sin^2 4\alpha = \sin^2\frac{\alpha}{2} \Rightarrow 4\alpha = k\pi \pm \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{2k\pi}{7} \\ \alpha = \frac{2k\pi}{9} \end{cases}$$

فقط توجه داشته باشید که $k\pi$ ها قابل قبول نیستند.

در بازهٔ $[0, 2\pi]$ تعداد جواب‌های $\alpha = \frac{2k\pi}{7}$ برابر ۶ تا و تعداد جواب‌های $\alpha = \frac{2k\pi}{9}$ برابر ۸ است. معادله مجموعاً ۱۴ ریشه دارد.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۰

۴۵ گزینه ۳

$$(1-\cos^2 x) + \sin^2 x\cos 3x = 0 \Rightarrow \sin^2 x(1+\cos 3x) = 0$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi \\ \cos 3x = -1 \Rightarrow 3x = (2k+1)\pi \Rightarrow x = (2k+1)\frac{\pi}{3} \end{cases}$$

جواب‌های بازه $[0, 2\pi]$ برابر $\{0, \pi, 2\pi, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\}$ است که تعداد آن‌ها ۵ تا است.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

۴۶ گزینه ۳

راه‌حل اول:

$$۴\sin(۳x)\cos(۳x)=۱\Rightarrow ۲\sin(۳x)\cos(۳x)=\frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow \sin(۶x)=\frac{۱}{۲}=\sin(\frac{\pi}{۶})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۶x=۲k\pi+\frac{\pi}{۶}\Rightarrow x=\frac{k\pi}{۳}+\frac{\pi}{۳۶}\Rightarrow \begin{cases} k=۰\Rightarrow x=\frac{\pi}{۳۶} \\ k=۱\Rightarrow x=\frac{۱۳\pi}{۳۶} \end{cases} \\ ۶x=۲k\pi+\pi-\frac{\pi}{۶}\Rightarrow x=\frac{k\pi}{۳}+\frac{۵\pi}{۳۶}\Rightarrow \begin{cases} k=۰\Rightarrow x=\frac{۵\pi}{۳۶} \\ k=۱\Rightarrow x=\frac{۱۷\pi}{۳۶} \end{cases} \end{cases}$$

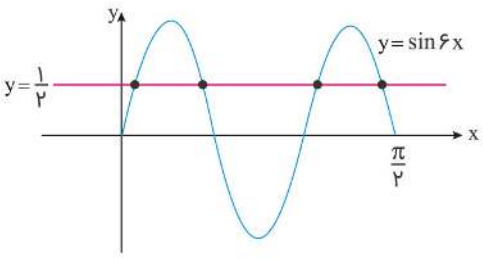
بنابراین معادله چهار جواب دارد.

راه‌حل دوم:

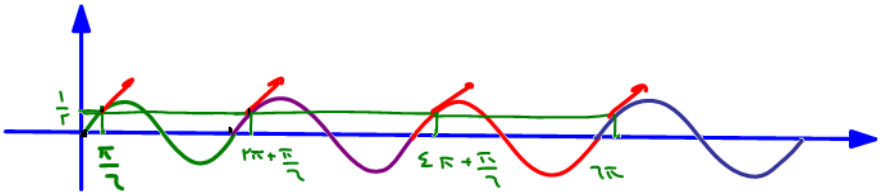
$$۴\sin(۳x)\cos(۳x)=۱\Rightarrow \sin(۶x)=\frac{۱}{۲}$$

$$۰\le x\le\frac{\pi}{۲}\Rightarrow ۰\le ۶x\le ۳\pi$$

باتوجه‌به شکل معادله چهار جواب دارد:



کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹



دوره تناوب

f متناوب است اگر با افزودن یک مقدار ناصفر به x عرض (y) تابع عوض نشود و دو شرط زیر داشته باشد:

$$1)\ \forall x \in D_f \Rightarrow x+T \in D_f \qquad 2)\ f(x+T)=f(x) \qquad T \neq 0$$

مثلاً $\sin\frac{\pi}{6}$ با $\sin(2\pi+\frac{\pi}{6})$ برابر و هر دو $\frac{1}{2}$ هستند. در حالی که به x، $۶/۲۸\ldots = 2\pi$ افزوده‌ایم.

هر مضربی از دوره‌ی تناوب، خود دوره‌ی تناوب است که کوچک‌ترین مقدار مثبت دوره تناوب را، دوره تناوب اصلی می‌گوییم.

تذکر: تابع ثابت، متناوب است و دوره تناوبش هر عدد حقیقی است ولی چون کوچک‌ترین عدد حقیقی وجود ندارد، کوچک‌ترین دوره تناوب ندارد.

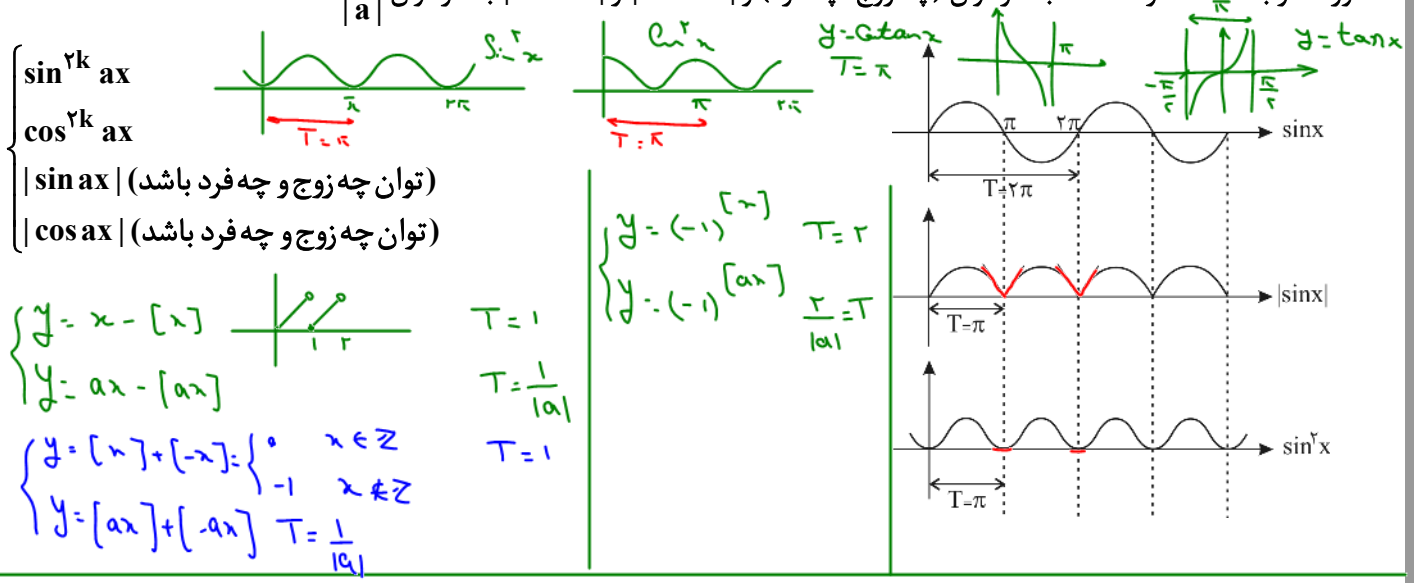
۱) دوره تناوب $f(x)$ اگر T باشد، آن‌گاه دوره‌ی تناوب $af(x+b)+k$ نیز همان T هست.

۲) تابع متناوب، یک به یک و معکوس‌پذیر نیست.

۳) دوره تناوب $\sin^{2k+1} ax$ و $\cos^{2k+1} ax$ برابر است با: $T=\frac{2\pi}{|a|}$

دوره تناوب $\tan ax$ و $\cot ax$ به هر توان (چه زوج، چه فرد) و $|\tan ax|$ و $|\cot ax|$ به هر توان $T=\frac{\pi}{|a|}$ است.

$$\begin{cases}\sin^{2k} ax\\ \cos^{2k} ax\\ |\sin ax| \text{ (توان چه زوج و چه فرد باشد)}\\ |\cos ax| \text{ (توان چه زوج و چه فرد باشد)}\end{cases}$$



تمرین: اگر دورهٔ تناوب تابع $f(x)=2\cos(mx+\frac{m}{2})$ برابر $\frac{4}{3}$ باشد، مقدار $f(0)$ کدام است؟ $(m>0)$

۱) $-\sqrt{3}$ ۲) $\sqrt{3}$ ۳) $\sqrt{2}$ ۴) $-\sqrt{2}$

تمرین: دورهٔ تناوب تابع $f(x)=\frac{\cos 2x\cos 4x}{\tan x+\cot x}$ کدام است؟

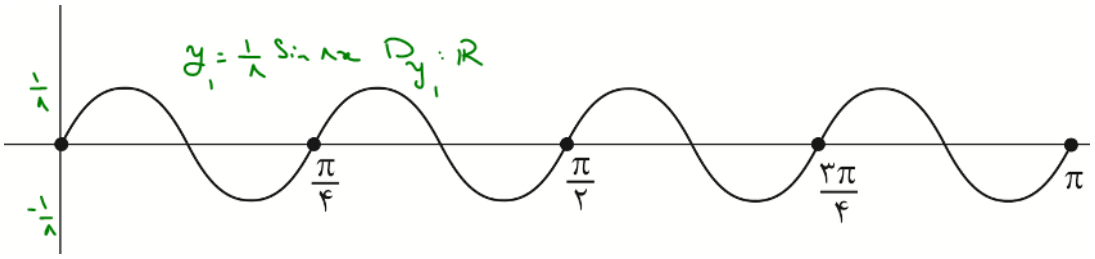
۱) $-\pi$ ۲) $\frac{\pi}{2}$ ۳) $\frac{\pi}{4}$ ۴) $\frac{\pi}{8}$

پاسخ:

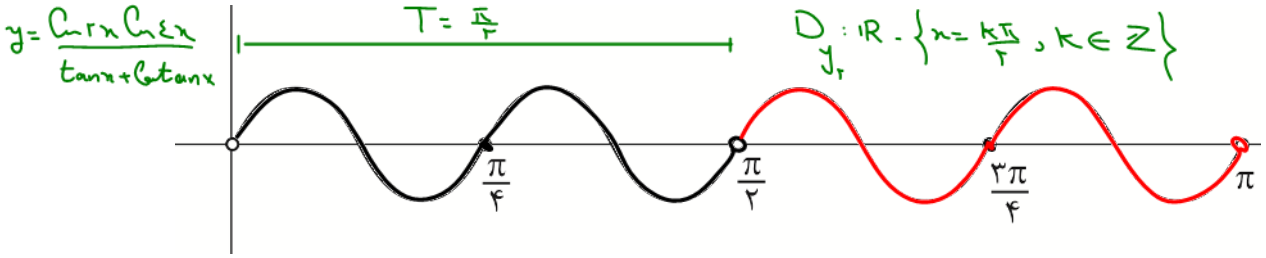
$$f(x)=\frac{\cos 2x\cos 4x}{\frac{2}{\sin 2x}}=\frac{\sin 2x\cos 2x\cos 4x}{2}=\frac{\frac{1}{2}\sin 4x\cos 4x}{2}=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\sin 8x}{2}=\frac{1}{8}\sin 8x$$

در حالت معمول $T=\frac{2\pi}{8}=\frac{\pi}{4}$

بنابراین به این شکل می‌رسیم:



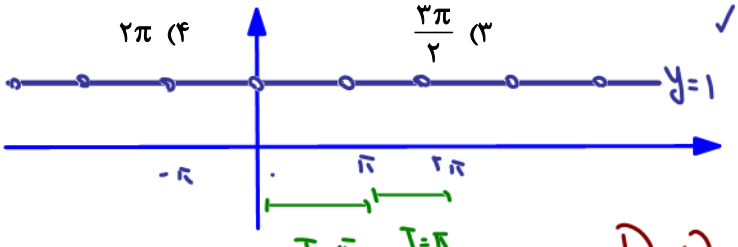
ولی باید توجه کنید که به علت حضور $\tan x$ و $\cot x$ در مخرج کسر $x\neq\frac{k\pi}{2}$ می‌باشد. پس باید این نقاط توخالی باشند:



اکنون از شکل مشخص است که $T=\frac{\pi}{2}$ است نه $\frac{\pi}{4}$. جالب این است که در خود آزمون، این سوال به اشتباه پاسخ داده شده است. گزینهٔ (۲) صحیح است.

تمرین: دورهٔ تناوب $f(x)=\frac{\sin x}{\sin x}$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{2}$ ۲) π ۳) $\frac{3\pi}{2}$ ۴) 2π

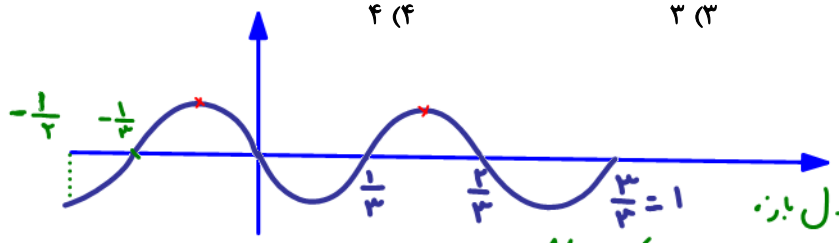


تمرین: اگر دورهٔ تناوب تابع $y=3\cos ax$ برابر ۲ باشد، اولین نقطه min این تابع با طول مثبت کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) ۲

تمرین: تابع $y=-\frac{1}{2}\sin(3\pi x)$ در بازهٔ $[-\frac{1}{2},1]$ چند بار بیشترین مقدار را دارد؟ (قلم‌چی ۹۸)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴



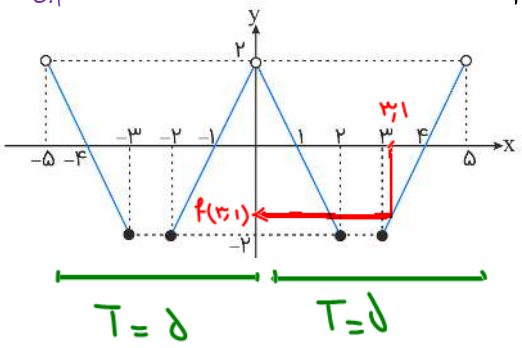
$T=\frac{2\pi}{|3\pi|}=\frac{2}{3}$

طول بازه = انتهای بازه − ابتدای بازه $=1-(-\frac{1}{2})=\frac{3}{2}$

سینوس در هر دوره تناوب یک Max دارد.

$\frac{\frac{3}{2}}{\frac{2}{3}}=\frac{9}{4}=2,25$ طول بازه بر T تقسیم شده

تمرین: قسمتی از نمودار تابع متناوب $y=f(x)$ به شکل زیر است. $f(128/1)$ کدام است؟ (قلم‌چی ۹۸)



۱) ۱/۸

۲) −۱/۸ ✓

۳) −۰/۲

۴) تعریف‌نشده

بی‌خیال 😐

$f(128/1)=f(25(5=T)+3/1)=f(3/1)$

از معرف‌های دوره تناوب می‌توان صرف نظر کرد.

از روی نمودار می‌بینم

عرض نقطه به طول ۳/۱ از عدد ۲ کمی بالاتر.

$\cot\theta-\tan\theta=2\cot 2\theta$ (*)

تمرین: دورهٔ تناوب تابع با ضابطهٔ $f(x)=\tan(\pi x)-\cot(\pi x)$ کدام است؟ (خارج ریاضی ۹۸)

تا حد امکان ساده کن:

۱) $\frac{1}{2}$ ✓ ۲) ۱ ۳) $-\frac{1}{2}$ ۴) −۱

(*) طبق

$f(x)=-2\cot\tan(2\pi x)$

$T=\frac{\pi}{|2\pi|}=\frac{1}{2}$

نکته: در تست دوره تناوب می توان از گزینه ها هم استفاده کرد:

$f(x+\text{گزینه})$ ساده‌ترین $f(x)$

شروع از کوچکترین گزینه

$y=\sin x\sqrt{1+\cos 2x}=\sqrt{2}\sin x|\cos x|$

$f(x+\pi)=\sqrt{2}\sin(x+\pi)|\cos(x+\pi)|$

$f(x+\pi)=\sqrt{2}(-\sin x)|-\cos x|$

$f(x+\pi)=\sqrt{2}\sin x|\cos x|\neq f(x)$

تمرین: دورهٔ تناوب تابع $y=\sin x\sqrt{1+\cos 2x}$ کدام است؟ (قلم‌چی ریاضی ۹۹)

۱) π ۲) $\frac{\pi}{2}$ ۳) $\frac{3\pi}{2}$ ۴) 2π ✓ با فرد کردن 2π به x تابع عوض نمی‌شود

پاسخ:

$f(x)=\sin x\sqrt{2\cos^2 x}=\sqrt{2}\sin x|\cos x|$

(۱) گزینهٔ: $f(x+\pi)=-\sqrt{2}\sin x|\cos x|\neq f(x)$

(۲) گزینهٔ: $f(x+\frac{\pi}{2})=\sqrt{2}\cos x|\sin x|\neq f(x)$

(۳) گزینهٔ: $f(x+\frac{3\pi}{2})=-\sqrt{2}\cos x|\sin x|\neq f(x)$

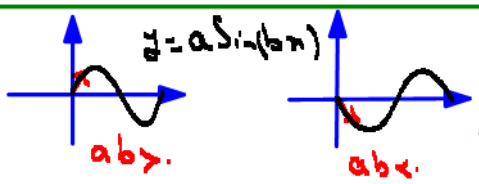
(۴) گزینهٔ: $f(x+2\pi)=\sqrt{2}\sin x|\cos x|=f(x)$ ✓

$f(x+\frac{\pi}{2})=\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{2})|\cos(x+\frac{\pi}{2})|$

$=\sqrt{2}\cos x|\sin x|\neq f(x)$

توابع مثلثاتی

$y=\sin x$



نکته: در رسم $y=a\sin bx$ اگر در حل برحسب x از محور y ها صعودی شروع شود $ab>0$ و اگر نزولی باشد $ab<0$.

۱) دامنه‌ی این تابع $\mathbb{R}$ است. ($\sin x$ به ازای هر $x\in\mathbb{R}$ جواب دارد.)

۲) برد این تابع $[-1,1]$ است. (چون $-1\le\sin x\le 1$)

۳) از آن‌جایی که کمان $(2k\pi+\alpha)$ از لحاظ موقعیت در دایره‌ی مثلثاتی با کمان α تفاوتی ندارد، رفتار تابع $y=\sin x$ را در $[0,2\pi]$ یعنی یک دور از دایره‌ی مثلثاتی بررسی و نمودار آن را رسم کرده، سپس 2π تا 2π تا تکرارش می‌کنیم.

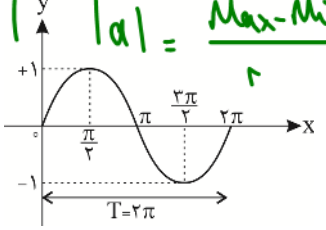
$\min=-|a|+d\le y=a\sin(bx+c)+d\le \max=|a|+d$

$T=\frac{2\pi}{|b|}$ (مضارب زوج π) قدر مطلق ضریب x

$d=\frac{\min+\max}{2}$

$|a|=\frac{\max-\min}{2}$

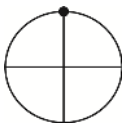
نمودار $y=\sin x$ در $[0,2\pi]$ به کمک جدول زیر به صورتی که مشاهده می‌شود رسم می‌گردد:



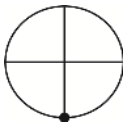
x	۰	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
y	۰	۱	۰	-1	۰

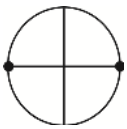
(دوره‌ی تناوب اصلی این تابع $T=2\pi$ می‌باشد.)

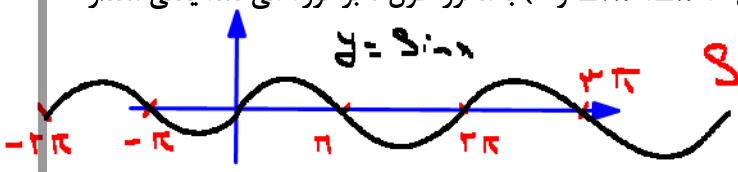
۴) ماکزیمم (بیشینه) مقدار تابع $y=\sin x$ برابر ۱ است که در $x=2k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbb{Z}$ یعنی کمان



(مثل $\frac{\pi}{2}$، $\frac{5\pi}{2}$، $\frac{9\pi}{2}$ یا $\frac{-3\pi}{2}$، $\frac{-7\pi}{2}$ و ...) رخ می‌دهد.

۵) مینیمم (کمینه) مقدار تابع $y=\sin x$ برابر -۱ است که در  یعنی کمان $x=۲k\pi-\frac{\pi}{۲},k\in\mathbb{Z}$ (مثل $\frac{۳\pi}{۲}$، $\frac{۷\pi}{۲}$ یا $\frac{-\pi}{۲}$، $\frac{-۵\pi}{۲}$ و ...) رخ می‌دهد.

۶) تابع $y=\sin x$ در  یعنی کمان $x=k\pi,k\in\mathbb{Z}$ (مثل ۰، $\pm\pi$، $\pm۲\pi$ و ...) با محور طول‌ها برخورد می‌کند، یعنی مقدار آن صفر می‌شود.



در حالت کلی، در تابع $y=a\sin(bx+c)+d$:

۱) مقدار ماکزیمم تابع برابر $d+|a|$ و مقدار مینیمم آن $d+|a|-$ می‌باشد.

۲) برای یافتن نقطه‌ی برخورد نمودار با محور yها، در ضابطه‌ی تابع $x=۰$ قرار می‌دهیم و y را به دست می‌آوریم. برای یافتن نقاط برخورد نمودار با محور xها نیز در ضابطه‌ی تابع $y=۰$ قرار می‌دهیم و معادله‌ی مثلثاتی حاصل را حل می‌کنیم.

۳) دوره‌ی تناوب برابر $T=\frac{۲\pi}{|b|}$ است.

تمرین: اگر بیشترین مقدار تابع $y=۲\sin ۵x-۳c$ برابر (-۷) باشد، c کدام است؟

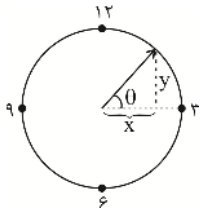
Max = -۷ = |۲| - ۳c
۳ = $\frac{-۹}{-۳}$ = c

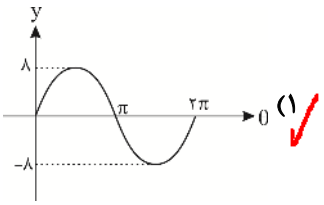
۱) ۳ ۲) -۲ ۳) -۵ ۴) ۱

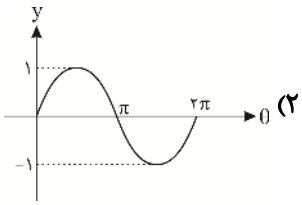
پاسخ: گزینه‌ی «۱»

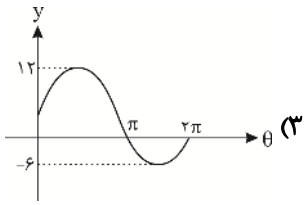
$y_{max}=۲-۳c=-۷ \Rightarrow -۳c=-۹ \Rightarrow c=۳$

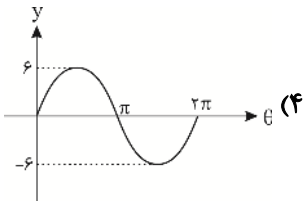
تمرین: طول عقربه‌ی دقیقه‌شمار یک ساعت ۸ سانتی‌متر است و این عقربه با جهت مثبت محور افقی زاویه‌ی θ می‌سازد. با توجه به شکل زیر، نمودار تابع y برحسب θ کدام است؟ (θ برحسب رادیان است.)



۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

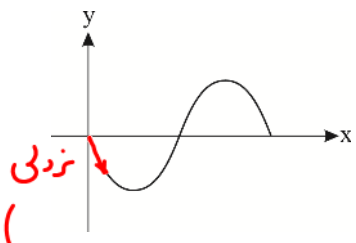
پاسخ: گزینه‌ی «۱» ـ طبق تعریف نسبت مثلثاتی سینوس در مثلث قائم‌الزاویه‌ی موجود داریم:

$$\sin\theta=\frac{y}{r}\Rightarrow \sin\theta=\frac{y}{8}\Rightarrow y=8\sin\theta\Rightarrow\begin{cases}T=2\pi\\ y_{max}=8\\ y_{min}=-8\end{cases}$$

مشخصه که بیشترین مقدار (max) تابع $y=8\sin\theta$ برابر ۸ و کم‌ترین مقدار این تابع ۸- و دوره‌ی تناوبش هم $T=2\pi$ هست. پس گزینه‌ی «۱» درسته.

نکته:

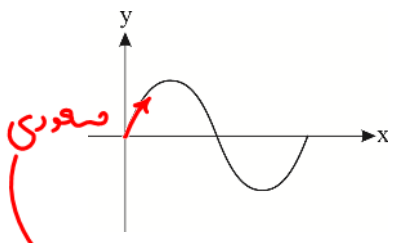
حالت ۲



$y=a\sin bx$

$a\times b<0$

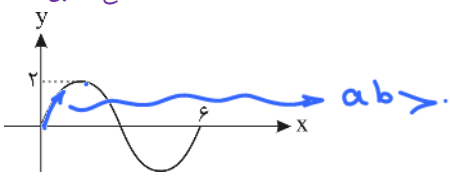
حالت ۱



$y=a\sin bx$

$a\times b>0$

تمرین: شکل روبه‌رو قسمتی از نمودار تابع $y=a\sin(b\pi x)$ است. $a+b$ کدام است؟ (خارج تجربی ۹۳)



۱) $\frac{4}{3}$

۲) $\frac{5}{3}$

۳) $\frac{7}{3}$ ✓

۴) $\frac{8}{3}$

$T=6=\frac{2\pi}{|b\pi|}=\frac{2}{|b|}\Rightarrow |b|=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}\Rightarrow b=\frac{1}{3}$ یا $-\frac{1}{3}=b$

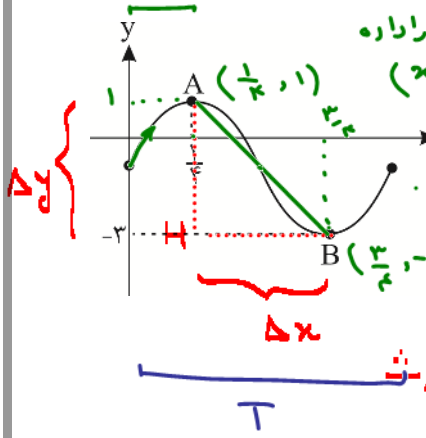
$Max=|a|+0=2\Rightarrow a=2$ یا $a=-2$

$(a=2)(b=\frac{1}{3})\Rightarrow a+b=\frac{7}{3}$

$(a=-2)(b=-\frac{1}{3})\Rightarrow a+b<0$ در گزینه‌ها نیست

تمرین: قسمتی از نمودار تابع $f(x)=2\sin b\pi x+c$ به صورت زیر رسم شده است. طول پاره‌خط AB کدام است؟

$\frac{1}{4}T=\frac{1}{4}$



$\frac{1}{4}$ دوره تناوب داره

طول B (x_B)

۳ برابر $\frac{1}{4}$ یعنی $\frac{3}{4}$ است.

Δy فیثاغورث T

$\Delta x=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

$AB=\sqrt{AH^2+BH^2}=\sqrt{(\Delta y)^2+(\Delta x)^2}=\sqrt{16+1}=\frac{\sqrt{17}}{2}$

$min=-|2|+c=-3$

$c=-1$

$c=-1=\frac{Max+min}{2}$

$-2+3=Max$

$Max=1$

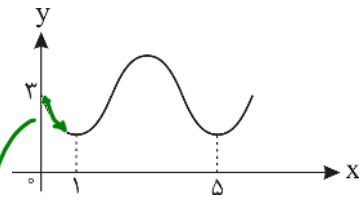
۱) $\frac{\sqrt{17}}{2}$

۲) $\frac{\sqrt{65}}{2}$

۳) $\frac{\sqrt{17}}{4}$

۴) $\frac{\sqrt{65}}{4}$

تمرین: شکل روبه‌رو قسمتی از نمودار تابع $y = a + \sin(b\pi x)$ است. مقدار y در نقطه‌ی $x = \frac{۲۵}{۳}$، کدام است؟ (تجربی ۹۳)



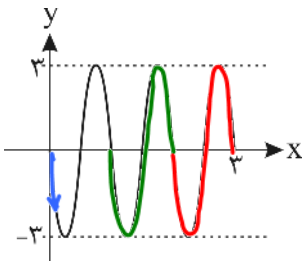
۱) ۲

۲) ۲/۵

۳) ۳

۴) ۳/۵

تمرین: شکل روبه‌رو، قسمتی از نمودار تابع $y = a\sin(b\pi x)$ است. $a.b$ کدام است؟ (خارج ریاضی ۹۲)



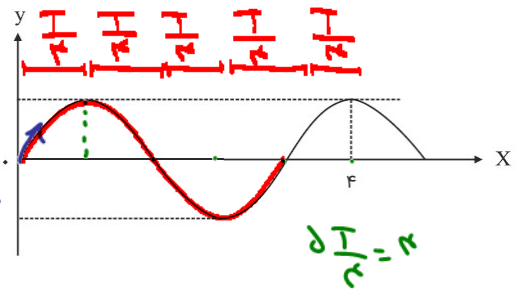
۱) -۶

۲) -۳

۳) ۴/۵

۴) ۶

تمرین: قسمتی از نمودار تابع $y = a\cos((\frac{۳}{۲} + bx)\pi)$ به صورت زیر است. آن‌گاه کدام گزینه صحیح است؟ (قلم‌چی ۹۴)



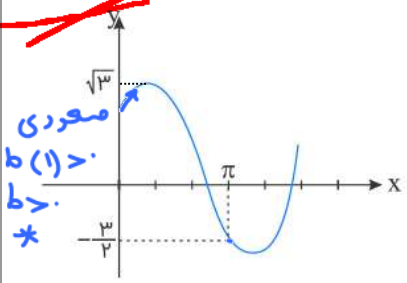
۱) $a < ۰ , b = \frac{۵}{۸}$

۲) $a < ۰ , b = -\frac{۵}{۸}$

۳) $a > ۰ , b = \frac{۵}{۱۶}$

۴) $a > ۰ , b = -\frac{۵}{۱۶}$

تمرین: شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع $y = a + b\sin(x + \frac{\pi}{3})$ است. b کدام است؟ (تجربی ۹۸)



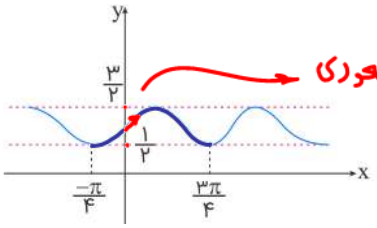
۱) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

۲) $\frac{3}{2}$

۳) $\sqrt{3}$

۴) ۲

تمرین: شکل زیر، نمودار تابع $y = 1 + a\sin bx\cos bx$ است. $a + b$ کدام است؟ (ریاضی ۹۸)



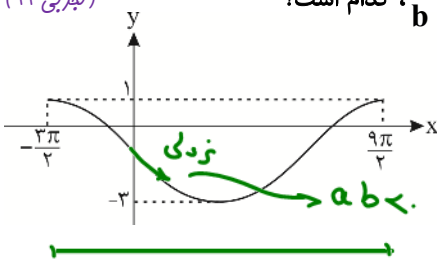
۱) ۱

۲) $\frac{3}{2}$

۳) ۲

۴) ۳

تمرین: شکل زیر، نمودار تابع $y = a\sin(bx) + c$ را در یک بازهٔ تناوب، نشان می‌دهد. نسبت $\frac{a}{b}$، کدام است؟ (تجربی ۹۹)



۱) -2

۲) -3

۳) -4

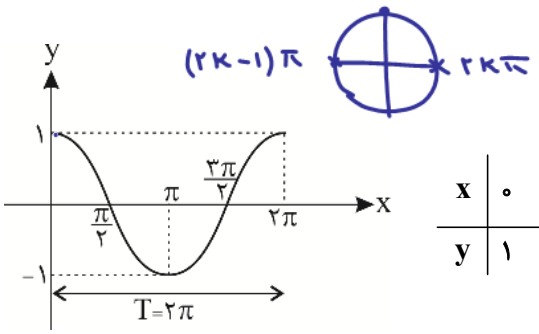
۴) -6

$y = \cos x$

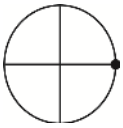
۱) دامنه‌ی این تابع $\mathbb{R}$ است ($\cos x$ به ازای هر $x \in \mathbb{R}$ جواب دارد).

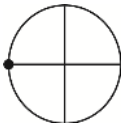
۲) برد این تابع $[-۱,۱]$ است (چون $-۱ \le \cos x \le ۱$).

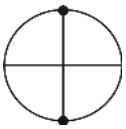
۳) نمودار $y = \cos x$ را نیز مانند $y = \sin x$ در $[۰,۲\pi]$ به کمک جدول زیر رسم کرده، سپس با توجه به همان خاصیت کمان $(\underbrace{۲k\pi}_{\text{مضارب زوج } \pi} + \alpha)$ و این که در واقع دوره‌ی تناوب اصلی $y = \cos x$ هم $T = ۲\pi$ است، ۲π تا ۲π تا تکرارش می‌کنیم.



x	۰	$\frac{\pi}{۲}$	π	$\frac{۳\pi}{۲}$	۲π
y	۱	۰	-۱	۰	۱

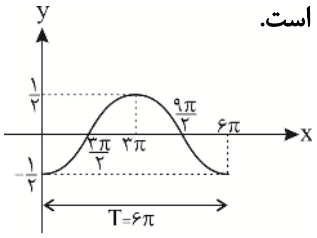
۴) ماکزیمم (بیشینه) مقدار تابع $y = \cos x$ برابر ۱ است که در $x = ۲k\pi, k \in \mathbb{Z}$ یعنی کمان  (مثل ۰ ، $\pm ۲\pi$، $\pm ۴\pi$ و ...) رخ می‌دهد.

۵) مینیمم (کمینه) مقدار تابع $y = \cos x$ برابر -۱ است که در $x = (۲k+۱)\pi, k \in \mathbb{Z}$ یعنی کمان  (مثل $\pm \pi$، $\pm ۳\pi$ و ...) رخ می‌دهد.

۶) تابع $y = \cos x$ در $x = k\pi + \frac{\pi}{۲}, k \in \mathbb{Z}$ یعنی کمان  (مثل $\pm \frac{\pi}{۲}$، $\pm \frac{۳\pi}{۲}$ و ...) با محور طول‌ها برخورد می‌کند، یعنی مقدار آن صفر می‌شود.

قوانین انتقال (مشابه آن‌چه در قسمت الف) گفته شد) در مورد $y = \cos x$ نیز برقرار است.

تابع $y = a\cos bx$ دارای دوره‌ی تناوب اصلی $T = \frac{۲\pi}{|b|}$، مقدار ماکزیمم $|a|$ و مقدار مینیمم $-|a|$ می‌باشد. مثلاً در $y = -\frac{۱}{۲}\cos(-\frac{x}{۳})$ دوره‌ی تناوب اصلی $\frac{۲\pi}{|-\frac{۱}{۳}|} = ۶\pi$، ماکزیمم تابع برابر $\frac{۱}{۲}$ و مینیمم تابع برابر $-\frac{۱}{۲}$ است.



(از آن‌جایی که $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$، $y = -\frac{۱}{۲}\cos(-\frac{x}{۳})$ همان $y = -\frac{۱}{۲}\cos\frac{x}{۳}$ می‌باشد.)

تذکر: در واقع در رسم $y = a\cos bx$، نمودار $y = \cos x$ با ضریب $\frac{۱}{|b|}$ دچار انقباض یا انبساط طولی (افقی) و با ضریب a دچار انبساط یا انقباض عرضی (عمودی) می‌شود. (علامت b تأثیری روی رسم نمودار تابع کسینوس ندارد، چون کسینوس منفی‌خور است.)

$d = \frac{Max + Min}{2}$

$|a| = \frac{Max - min}{2}$

$T = \frac{2\pi}{|\text{ضریب } x|}$

$Min = -|a| + d$ ، $Max = |a| + d$

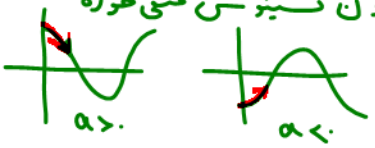
حالت کلی، در تابع $y = a\cos(bx + c) + d$

۱) مقدار ماکزیمم تابع برابر $|a| + d$ و مقدار مینیمم آن $-|a| + d$ است.

۲) برای یافتن نقطه‌ی برخورد نمودار با محور yها، در ضابطه‌ی تابع $x = 0$ قرار می‌دهیم و y را به دست می‌آوریم. برای یافتن نقاط برخورد نمودار با محور xها نیز در ضابطه‌ی تابع $y = 0$ را قرار می‌دهیم و معادله‌ی مثلثاتی حاصل را حل می‌کنیم.

$y = a\cos(bx)$

طرفین تو نه + یا - باشه چون کسینوسی منفی میشه



۳) دوره‌ی تناوب برابر $T = \frac{2\pi}{|b|}$ است.

تمرین: اگر کم‌ترین مقدار تابع $h(x) = -a\cos\frac{\pi x}{3} + 1$ برابر $\frac{2}{3}$ باشد، مقدار a کدام می‌تواند باشد؟

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $-\frac{3}{2}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $-\frac{1}{3}$

$-|-a| + 1 = \frac{2}{3}$

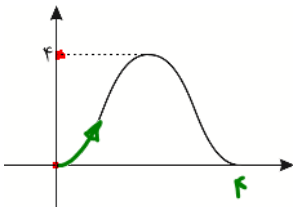
پاسخ: گزینه‌ی «۴»

$-|a| = -\frac{1}{3} \rightarrow a = \pm\frac{1}{3}$

(در میان گزینه‌ها $(-\frac{1}{3})$ وجود دارد.)

$-|-a| + 1 = \frac{2}{3} \Rightarrow -|a| = \frac{2}{3} - 1 \Rightarrow -|a| = -\frac{1}{3} \Rightarrow |a| = \frac{1}{3} \Rightarrow a = \pm\frac{1}{3}$

تمرین: شکل زیر نمودار تابع $y = a + b\cos(\frac{\pi}{2}x)$، در بازه‌ی $(0, 4)$ است. b کدام است؟ (ریاضی ۹۷)



صعودی

ضریب کسینوس منفی است

$a = \frac{Max + Min}{2} = 2$

$|b| = \frac{Max - Min}{2} = 2$

$b = 2$ یا $b = -2$

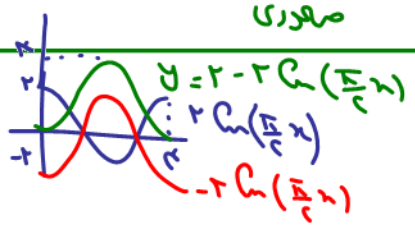
$b < 0$

چون روی بازه‌ی خواسته صعودی

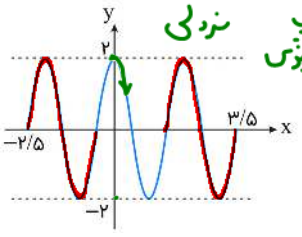
۱) -2 ✓
۲) -1
۳) 1
۴) 2

$0 < x < 4 \Rightarrow -2 < y = 2 - 2\cos(\frac{\pi}{2}x) < 4$

$T = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4$



تمرین: شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع $y = a\sin\pi(\frac{1}{2} + bx)$ است. $a.b$ کدام است؟ (ریاضی ۹۲، قلم‌چی ۹۸)



نزولی ضریب کسینوس $a > 0$

$y = a\sin(\frac{\pi}{2} + \pi bx)$

$y = a\cos(\pi bx)$

$|a| = 2$ $a = 2$

$T = 2 = \frac{2\pi}{|b\pi|} = \frac{2}{|b|} \rightarrow |b| = \frac{2}{2} = 1 \rightarrow b = \pm 1$

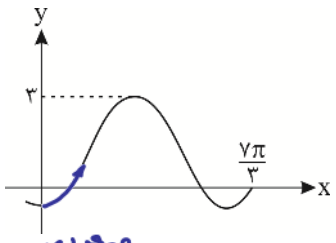
$3T = 3/5 - (-2/5) = 6 \rightarrow T = 2$

$ab = \pm 2 \rightarrow ab = 2$

هردو دسته که ما $ab = 2$ در گزینه‌ها داریم.

۱) ۲ ✓
۲) ۲/۵
۳) ۳
۴) ۳/۵

تمرین: شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع با ضابطهٔ $y = a + b\sin(\frac{\pi}{2} + x)$ است. مقدار b کدام است؟ (تجربی ۹۹)



۱) ۲
۲) ۱
۳) -۱
۴) -۲ ✓

$y = a + b\cos x$

$Max = |b| + a = ۳$

$a - b = ۳$

$a = ۳ + b$

$f(\frac{۷\pi}{۳}) = ۰$ می‌بینم

$A(\frac{۷\pi}{۳}, ۰) \in f \quad f(\frac{۷\pi}{۳}) = a + b\cos(\frac{۷\pi}{۳} - \frac{۶\pi}{۳} + \frac{\pi}{۳}) = a + \frac{b}{۲} = ۰$ ۲π صرف نظر

$۳ + b + \frac{b}{۲} = ۰$

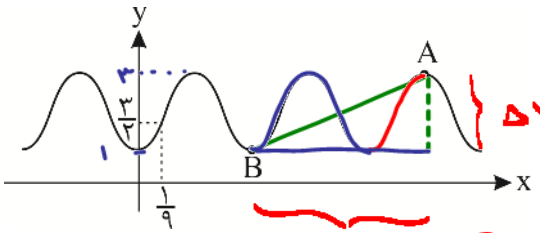
$۳ + \frac{۳}{۲}b = ۰$

$\frac{۳}{۲}b = -۳$

$b = -۲$

معدوی
ضریب کسینوس منفی
است
$b < ۰$

تمرین: اگر نمودار تابع $f(x) = ۱ + a\sin^۲(\frac{۳\pi}{۲}x)$ به صورت زیر باشد، شیب خط گذرنده از نقاط A و B کدام است؟



۱) ۱
۲) $\frac{۳}{۲}$
۳) ۲ ✓
۴) $\frac{۵}{۲}$

$\Delta y = Max - min = ۳ - ۱ = ۲$

$\Delta x = T + \frac{T}{۲} = \frac{۳}{۲}T$

$T = \frac{\pi}{\frac{۳\pi}{۲}} = \frac{۲}{۳}$

$\Delta x = \frac{۳}{۲}(\frac{۲}{۳}) = ۱$

$A(\frac{۱}{۹}, \frac{۳}{۲}) \in$ تابع

$f(\frac{۱}{۹}) = ۱ + a\sin^۲(\frac{۳\pi}{۲}(\frac{۱}{۹})) = ۱ + a\sin^۲(\frac{\pi}{۶}) = ۱ + \frac{a}{۴} = \frac{۳}{۲} \rightarrow \frac{a}{۴} = \frac{۱}{۲} \rightarrow a = ۲$

$m_{AB} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{۲}{۱} = ۲$

۱ اگر $-\frac{\pi}{۱۲} < x < \frac{۵\pi}{۱۲}$ و $\sin ۲x = \frac{m-۱}{۴}$ باشد، مجموعه مقادیر m کدام است؟

۱) $(-۱, ۵)$
۲) $(-۱, ۵]$
۳) $(-۱, ۱)$
۴) $(-۱, ۱]$

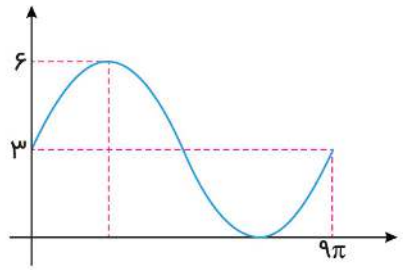
کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

۲ با کدام ضابطهٔ $f(x)$، همواره تساوی $(-۱)^{[x]} f(x) = |f(x)|$ برقرار است؟

۱) $\sin \pi x$
۲) $\cos \pi x$
۳) $\sin ۲\pi x$
۴) $\cos ۲\pi x$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۱

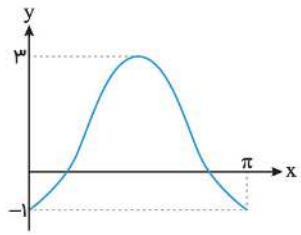
۳ اگر شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع $f(x) = \frac{۲}{a} - \frac{b}{۱ + \tan^۲(cx - \frac{۳\pi}{۴})}$ باشد، مقدار $f(\frac{۳\pi}{۴})$ کدام است؟



۱) ۴
۲) ۴/۵
۳) ۴/۷۵
۴) ۵

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۲

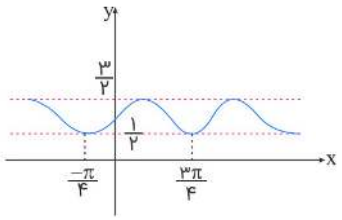
۴ اگر شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع $f(x) = a + b\sin(cx - \frac{۳\pi}{۴})\cos(cx - \frac{۳\pi}{۴})$ در یک دورهٔ تناوب باشد، اختلاف صفرهای تابع f در بازهٔ $[۰, \pi]$، کدام است؟ (با تغییر)



۱) $\frac{\pi}{۶}$
۲) $\frac{\pi}{۴}$
۳) $\frac{\pi}{۲}$
۴) $\frac{۲\pi}{۳}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۲

۵ شکل زیر، نمودار تابع $y = ۱ + a \sin bx \cos bx$ است. $a + b$ کدام است؟



۱) ۱

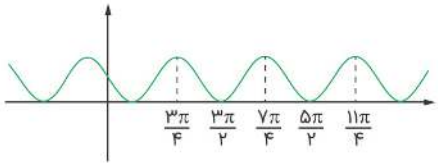
۲) $\frac{۳}{۲}$

۳) ۲

۴) ۳

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۸

۶ شکل زیر، نمودار تابع $y = ۱ + \sin ax$ است. دورهٔ تناوب $y = ۳ \cos(\frac{x}{a})$ کدام است؟



۱) ۴π

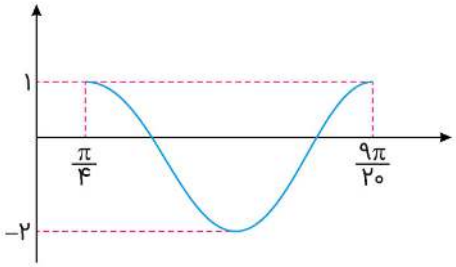
۲) ۶π

۳) ۳π

۴) ۲π

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

۷ شکل زیر، نمودار تابع $y = a\cos^۲(bx - \frac{\pi}{۴}) + c$ در یک بازه تناوب را نشان می‌دهد. مقدار ab کدام است؟



۱) ۱۵

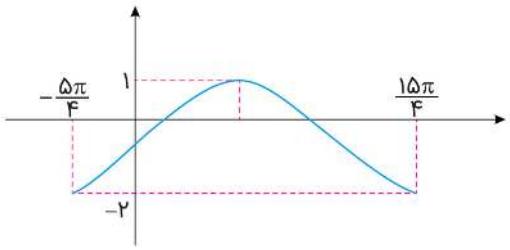
۲) -۱۵

۳) ۷/۵

۴) $-۷/۵$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۸ شکل زیر، نمودار تابع $y = a\sin^۲(\frac{\pi}{۴} - bx) + c$ در یک بازهٔ تناوب را نشان می‌دهد. مقدار ab کدام است؟



۱) $-۰/۳$

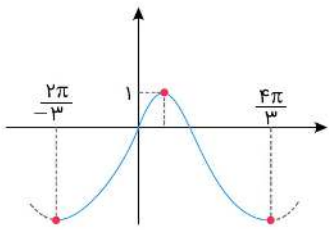
۲) ۰/۳

۳) $-۰/۶$

۴) ۰/۶

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

۹ شکل زیر، قسمتی از نمودار $y = a + b\cos(cx - \frac{\pi}{۳})$ را نشان می‌دهد. مقدار $b(c - a)$ کدام است؟ (با تغییر)



۱) ۲

۲) ۳

۳) ۴

۴) ۶

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۲

۱۰ تابع متناوب $f(x) = \begin{cases} x & ; ۰ \le x \le ۱ \\ ۲ - x & ; ۱ < x \le ۲ \end{cases}$ را که دورهٔ تناوب آن ۲ است، در نظر بگیرید. مساحت ناحیهٔ محصور به منحنی f و محور xها در بازهٔ $[-۰/۷۵, ۳/۲۵]$، کدام است (دامنه تابع اعداد حقیقی است)؟ (با تغییر)

۱) ۲

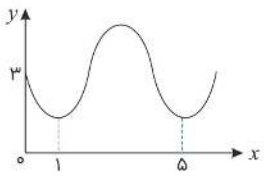
۲) ۳

۳) ۳/۵

۴) ۴

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

۱۱ شکل زیر قسمتی از نمودار تابع $y = a + \sin(b\pi x)$ می‌باشد. مقدار y در نقطهٔ $x = \frac{۲۵}{۳}$، کدام است؟



۱) ۲

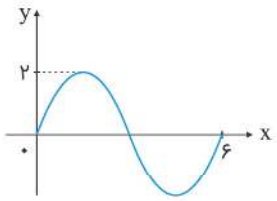
۲) ۲/۵

۳) ۳

۴) ۳/۵

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۳

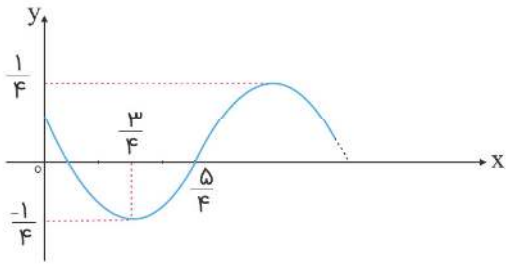
۱۲ شکل زیر قسمتی از نمودار تابع $y = a\sin(b\pi x)$ است. $a + b$، کدام است؟



۱) $\frac{۴}{۳}$
۲) $\frac{۵}{۳}$
۳) $\frac{۷}{۳}$
۴) $\frac{۸}{۳}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۳

۱۳ شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع $f(x) = a\cos(bx + c)$ را نشان می‌دهد. اگر $b > ۰$ و $۰ < c < \pi$ باشد، مقدار $\frac{ac}{b}$ کدام است؟



۱) $\frac{۱}{۱۶}$
۲) ۱
۳) $\frac{۱}{۴\pi}$
۴) π

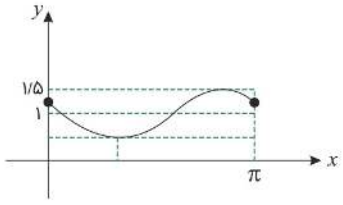
کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۱

۱۴ فرض کنید تابع f به‌ازای هر $x \in \mathbb{R}$ نسبت به خطوط $x = ۱$ و $x = ۳$ متقارن باشد و خط تقارن دیگری به‌صورت $x = a$ در بازهٔ $(۱, ۳)$ نداشته باشد. کدام عبارت زیر درست است؟ (با تغییر)

۱) f تابعی غیرمتناوب است.
۲) f تابعی متناوب با دورهٔ تناوب ۱ است.
۳) f تابعی متناوب با دورهٔ تناوب ۲ است.
۴) f تابعی متناوب با دورهٔ تناوب ۴ است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۰

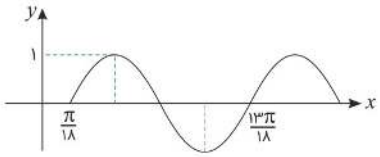
۱۵ شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع با ضابطهٔ $y = ۱ + a\sin(bx - \frac{\pi}{۶})$ است. $a + b$ کدام است؟



۱) $\frac{۱}{۲}$
۲) ۱
۳) $\frac{۳}{۲}$
۴) ۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۵

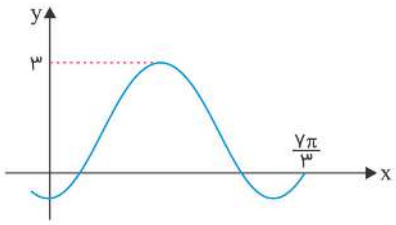
۱۶ شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع با ضابطهٔ $y = a - ۲\cos(bx + \frac{\pi}{۲})$ است. $a + b$ کدام است؟



۱) $\frac{۱}{۲}$
۲) ۱
۳) $\frac{۳}{۲}$
۴) ۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۵

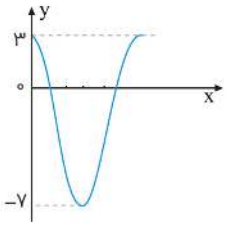
۱۷ شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع با ضابطهٔ $y = a + b\sin(\frac{\pi}{۲} + x)$ است. مقدار b، کدام است؟



۱) ۲
۲) ۱
۳) -۱
۴) -۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

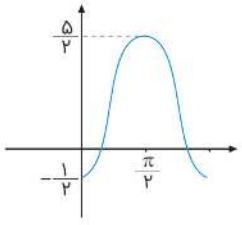
۱۸ شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع $f(x) = a\cos x + b$ را نشان می‌دهد، مقدار $f(\frac{\pi}{۳})$ کدام است؟



۱) $\frac{۱}{۲}$
۲) $\frac{۱۱}{۲}$
۳) $-\frac{۱}{۲}$
۴) $-\frac{۱۱}{۲}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۱

۱۹ شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع $y = c + a\cos bx$ را نشان می‌دهد. مقدار ac کدام است؟



۱) -۵
۲) -۳
۳) $-\frac{۵}{۲}$
۴) $-\frac{۳}{۲}$

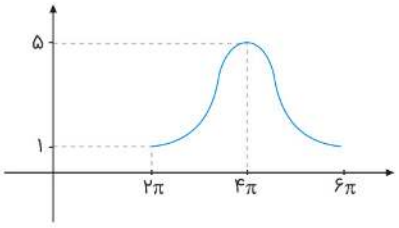
کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

۲۰ اگر $-\frac{\pi}{۴} < x < \frac{\pi}{۴}$ و $\tan(\frac{\pi}{۴} - x) = \frac{۱ - m}{۲ + m}$ باشد، مجموعهٔ مقادیر m کدام است؟

۱) $(-۲, ۱)$
۲) $(-۲, ۱]$
۳) $(-۱, ۲]$
۴) $(-۱, ۲)$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

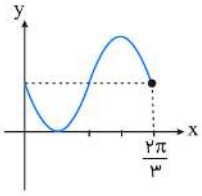
۲۱ شکل زیر، نمودار تابع $y = c + a\cos bx$ را در یک دورهٔ تناوب، نشان می‌دهد. مقدار c کدام است؟



۱) ۵
۲) ۴
۳) ۳
۴) ۱

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

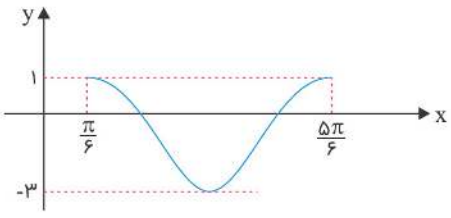
۲۲ شکل زیر قسمتی از نمودار تابع $y = ۱ - \sin mx$ است. مقدار تابع در نقطهٔ $x = \frac{۷\pi}{۶}$، کدام است؟



۱) صفر
۲) $\frac{۱}{۲}$
۳) ۱
۴) ۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۶

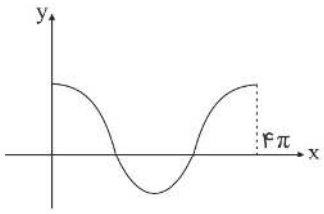
۲۳ شکل زیر، نمودار تابع $y = a\sin(bx) + c$، در یک بازهٔ تناوب است. مقادیر b و c، کدام‌اند؟



۱) $b = ۳, c = -۱$
۲) $b = ۳, c = -۲$
۳) $b = \frac{۳}{۲}, c = -۲$
۴) $b = \frac{۳}{۲}, c = -۱$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۲۴ شکل زیر قسمتی از نمودار تابع $y = \frac{۱}{۲} + ۲\cos mx$ است. مقدار تابع در نقطهٔ $x = \frac{۱۶\pi}{۳}$ کدام است؟



۱) $-\frac{۱}{۲}$

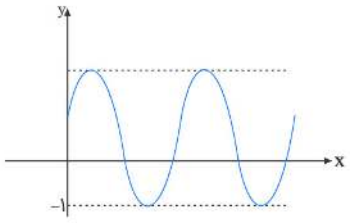
۲) $\frac{۱}{۲}$

۳) ۱

۴) صفر

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۶

۲۵ شکل زیر نمودار تابع $y = ۱ + a\sin(b\pi x)$ در بازهٔ $(۰, \frac{۴}{۳})$ است. $a + b$ کدام است؟



۱) ۳

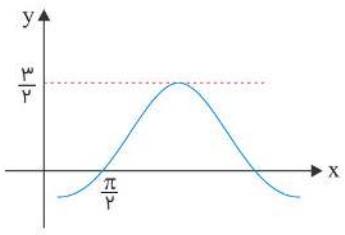
۲) ۴

۳) ۵

۴) ۶

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۷

۲۶ شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع با ضابطهٔ $y = a + b\sin(x + \frac{\pi}{۳})$ است. مقدار a، کدام است؟



۱) -۱

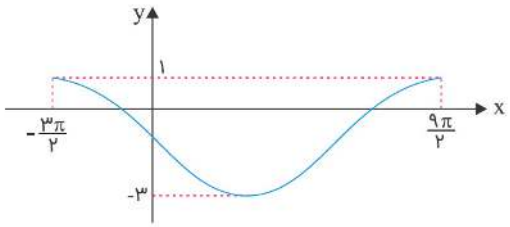
۲) $-\frac{۱}{۲}$

۳) $\frac{۱}{۲}$

۴) ۱

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۲۷ شکل زیر، نمودار تابع $y = a\sin(bx) + c$ را در یک بازهٔ تناوب، نشان می‌دهد. نسبت $\frac{a}{b}$، کدام است؟



۱) -۲

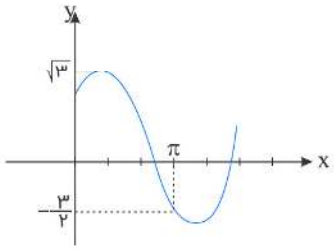
۲) -۳

۳) -۴

۴) -۶

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

۲۸ شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع $y = a + b\sin(x + \frac{\pi}{۳})$ است. b کدام است؟



۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

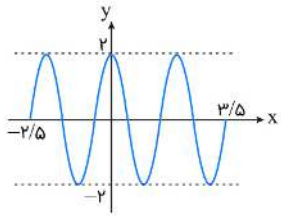
۲) $\frac{۳}{۲}$

۳) $\sqrt{۳}$

۴) ۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۲۹ شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع $y = a\sin\pi(\frac{۱}{۲} + bx)$ است. $a.b$ کدام است؟



۱) ۲

۲) ۲/۵

۳) ۳

۴) ۳/۵

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۲

۳۰ نمودار تابع $y = -۴\cos(\frac{\pi}{۴} - ۳\pi x)$، روی بازهٔ $[-۱, ۱]$ در چند نقطه بیشترین مقدار را دارد؟

۱) ۱

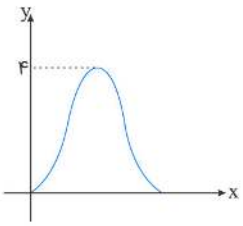
۲) ۲

۳) ۳

۴) ۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۱

۳۱ شکل زیر نمودار تابع $y = a + b\cos(\frac{\pi}{۲}x)$، در بازهٔ $(۰, ۴)$ است. b کدام است؟



۱) -۲

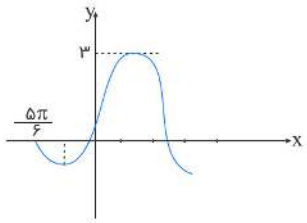
۲) -۱

۳) ۱

۴) ۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۷

۳۲ شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع $y = a + b\cos(\frac{\pi}{۲} - x)$ است. مقدار تابع در $x = \frac{\pi}{۶}$ کدام است؟



۱) ۱/۵

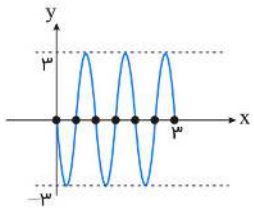
۲) ۲

۳) ۲/۵

۴) $۱+\sqrt{۳}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

۳۳ شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع $y = a\sin(b\pi x)$ است. ab کدام است؟



۱) -۶

۲) -۳

۳) ۴/۵

۴) ۶

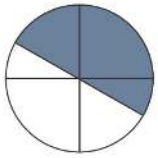
کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۲

پاسخ Homework

۱ گزینه ۲

$$-\frac{\pi}{12} < x < \frac{5\pi}{12} \Rightarrow \frac{-\pi}{6} < 2x < \frac{5\pi}{6}$$

حداقل مقدار سینوس در این بازه $-\frac{1}{2}$ و حداکثر آن ۱ است.



$$-\frac{1}{2} < \frac{m-1}{4} \leq 1 \xrightarrow{\times 4} -2 < m-1 \leq +4 \Rightarrow -1 < m \leq 5$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

۲ گزینه ۱

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۱

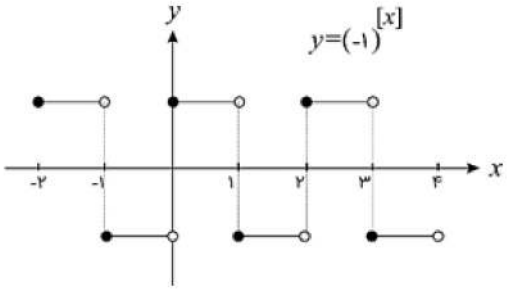
گام اول

الف) می‌دانیم به ازای هر x دلخواه $|f(x)| \geq 0$ است.

ب) $xy \geq 0$ همواره برقرار است هرگاه، x و y در بازه‌های مختلف هم‌علامت باشد.

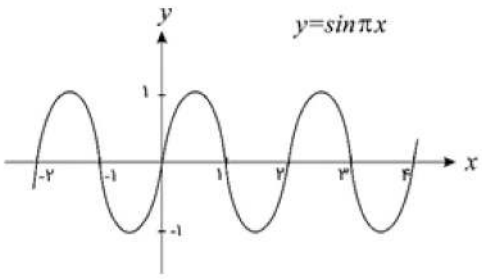
گام دوم

باتوجه‌به گام اول، نامساوی $(-1)^{[x]}f(x) \geq 0$ زمانی برقرار است که دو تابع $y = (-1)^{[x]}$ و $y = f(x)$ در بازه‌های مختلف هم‌علامت باشند. ابتدا نمودار تابع $y = (-1)^{[x]}$ را رسم می‌کنیم:



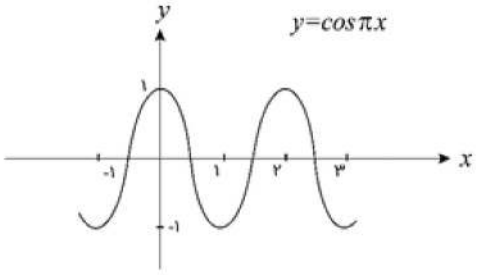
اکنون با رسم نمودار هریک از گزینه‌ها، بررسی می‌کنیم کدام‌یک از آن‌ها در بازه‌های مختلف با تابع $y = (-1)^{[x]}$ هم‌علامت است.

گزینهٔ ۱:



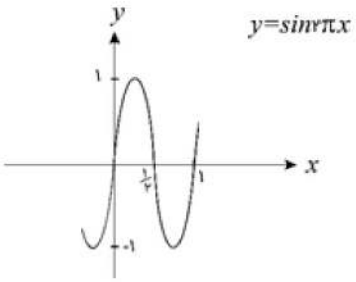
همان‌طور که مشاهده می‌شود، این تابع در بازه‌های مختلف با تابع $y = (-1)^{[x]}$ هم‌علامت است، پس این گزینه جواب سؤال خواهد بود.

گزینهٔ ۲:



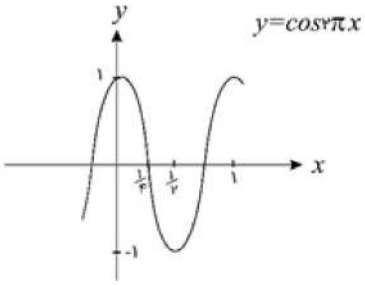
باتوجه‌به نمودار فوق، این تابع در بازه‌های زیادی ازجمله در بازهٔ $(\frac{۱}{۲}, ۱)$ با تابع $y = (-۱)^{[x]}$ هم‌علامت نیست.

گزینهٔ ۳:



مقدار تابع در بازهٔ $(\frac{۱}{۲}, ۱)$ منفی است درحالی‌که تابع $y = (-۱)^{[x]}$ در این بازه دارای علامت مثبت است.

گزینهٔ ۴:



با مقایسهٔ نمودار بالا با نمودار تابع $y = (-۱)^{[x]}$، این گزینه هم جواب سؤال نیست.

۳ گزینه ۲

نکته: از روابط مثلثاتی زیر استفاده می‌کنیم:

$$۱)\cos^۲x=\frac{۱}{۱+\tan^۲x} \qquad ۲)\cos^۲x=\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}\cos ۲x \qquad ۳)\cos(x-\frac{۳\pi}{۲})=-\sin(x)$$

بنابراین داریم:

$$f(x)=\frac{۲}{a}-\frac{b}{۱+\tan^۲(cx-\frac{۳\pi}{۴})} \xrightarrow{(۱)} f(x)=\frac{۲}{a}-b\cos^۲(cx-\frac{۳\pi}{۴})$$
$$\xrightarrow{(۲)} f(x)=\frac{۲}{a}-b(\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}\cos ۲(cx-\frac{۳\pi}{۴})) \xrightarrow{(۳)} f(x)=\frac{۲}{a}-\frac{b}{۲}-\frac{b}{۲}(-\sin ۲cx)$$
$$\Rightarrow f(x)=\frac{b}{۲}\sin(۲cx)+\frac{۲}{a}-\frac{b}{۲}$$

باتوجه‌به نمودار، تابع در همسایگی $x=۰$ صعودی است، بنابراین b و c باید هم‌علامت باشند.

فرض کنیم $b,c>۰$:

باتوجه‌به نمودار داریم:

$$T=\frac{۲\pi}{|۲c|}=۹\pi \Rightarrow |c|=\frac{۱}{۹} \xrightarrow{c>۰} c=\frac{۱}{۹}$$
$$y_{max}=|\frac{b}{۲}|+\frac{۲}{a}-\frac{b}{۲}=۶ \xrightarrow{b>۰} a=\frac{۱}{۳} \quad (۱)$$
$$y_{min}=-|\frac{b}{۲}|+\frac{۲}{a}-\frac{b}{۲}=۰ \xrightarrow{b>۰} b=۶ \quad (۲)$$

پس تابع $f(x)$ به صورت زیر است:

$$f(x)=۳+۳\sin(\frac{۲}{۹}x)$$
$$f(\frac{۳\pi}{۴})=۳+۳\sin(\frac{۲}{۹}\times\frac{۳\pi}{۴})=۳+۳\sin(\frac{\pi}{۶})=۴/۵$$

اگر $b,c<۰$:

$$T=\frac{۲\pi}{|۲c|}=۹\pi \Rightarrow |c|=\frac{۱}{۹} \xrightarrow{c<۰} c=-\frac{۱}{۹}$$
$$y_{max}=|\frac{b}{۲}|+\frac{۲}{a}-\frac{b}{۲}=۶ \xrightarrow{b<۰} -\frac{b}{۲}+\frac{۲}{a}-\frac{b}{۲}=۶ \Rightarrow -b+\frac{۲}{a}=۶$$
$$y_{min}=-|\frac{b}{۲}|+\frac{۲}{a}-\frac{b}{۲}=۰ \xrightarrow{b<۰} \frac{b}{۲}+\frac{۲}{a}-\frac{b}{۲}=۰ \Rightarrow \frac{۲}{a}=۰ \text{ غیر ممکن}$$

بنابراین این حالت اتفاق نمی‌افتد.

۴ گزینه ۴

ابتدا ضابطهٔ تابع را ساده می‌کنیم:

$$f(x)=a+\frac{۱}{۲}b\sin(۲cx-\frac{۳\pi}{۲})=a-\frac{b}{۲}\sin(\frac{۳\pi}{۲}-۲cx)$$
$$\Rightarrow f(x)=a+\frac{b}{۲}\cos(۲cx)$$

حال باتوجه‌به مقادیر max و min:

$$\begin{cases}y_{max}=۳\Rightarrow a+|\frac{b}{۲}|=۳\\ y_{min}=-۱\Rightarrow a-|\frac{b}{۲}|=-۱\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}۲a=۲\Rightarrow a=۱\\ |\frac{b}{۲}|=۲\Rightarrow b=\pm۴\Rightarrow b=-۴\end{cases}$$

نمودار بعد از $x=۰$ صعودی است، پس b منفی می‌باشد.

دورهٔ تناوب شکل برابر $T=\pi$ است، پس:

$$T=\pi\Rightarrow\frac{۲\pi}{|۲c|}=\pi\Rightarrow c=\pm۱$$

ضابطهٔ تابع عبارت است از:

$$f(x)=۱-۲\cos ۲x=۰\Rightarrow\cos ۲x=\frac{۱}{۲}$$
$$\Rightarrow ۲x=۲k\pi\pm\frac{\pi}{۳}\Rightarrow x=k\pi\pm\frac{\pi}{۶}$$

مقادیر قابل‌قبول $\frac{\pi}{۶}$ و $\frac{۵\pi}{۶}$ هستند که:

$$\frac{۵\pi}{۶}-\frac{\pi}{۶}=\frac{۲\pi}{۳}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۲

۵ گزینه ۳

تابع را کمی ساده می‌کنیم. از رابطهٔ $\sin\alpha\cos\alpha = \frac{۱}{۲}\sin ۲\alpha$ استفاده می‌کنیم:

$$y = ۱ + a\sin bx\cos bx = ۱ + \frac{a}{۲}\sin ۲bx$$

باتوجه‌به نمودار داده‌شده، ماکزیمم تابع $\frac{۳}{۲}$، مینیمم تابع $\frac{۱}{۲}$ و دورهٔ تناوب $\frac{۳\pi}{۴} - (-\frac{\pi}{۴}) = \pi$ است. پس:

$$\begin{cases} ۱ + \left|\frac{a}{۲}\right| = \frac{۳}{۲} \\ ۱ - \left|\frac{a}{۲}\right| = \frac{۱}{۲} \end{cases} \Rightarrow \frac{|a|}{۲} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow |a| = ۱$$

$$\frac{۲\pi}{|۲b|} = \pi \Rightarrow |b| = ۱$$

باتوجه‌به اینکه تابع داده‌شده در سمت راست محور y صعودی است، پس $\frac{a}{۲}$ و $۲b$ باید هم‌علامت باشند. پس مسئله دو دسته جواب $\begin{cases} a = ۱ \\ b = ۱ \end{cases}$ یا $\begin{cases} a = -۱ \\ b = -۱ \end{cases}$ دارد، درنتیجه $a + b = ۲$ یا $a + b = -۲$ صحیح است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۸

۶ گزینه ۱

$$T_{۱+\sin ax} = \frac{۷\pi}{۴} - \frac{۳\pi}{۴} = \pi \Rightarrow \frac{۲\pi}{|a|} = \pi \Rightarrow |a| = ۲$$

$$y = ۳\cos(\frac{x}{a}) \Rightarrow T = \frac{۲\pi}{|\frac{۱}{a}|} = ۲\pi|a| = ۴\pi$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

۷ گزینه ۱

$$T = \frac{۹\pi}{۲۰} - \frac{\pi}{۴} = \frac{\pi}{۵}\ ,\ T = \frac{\pi}{|b|} \Rightarrow |b| = ۵ \Rightarrow b = \pm ۵$$

اگر $b = ۵$ باشد:

$$x = \frac{\pi}{۴} : y = a\cos^۲(\frac{۵\pi}{۴} - \frac{\pi}{۴}) + c \Rightarrow a + c = ۱$$

$$x = \frac{۷\pi}{۲۰} : y = a\cos^۲(\frac{۷\pi}{۴} - \frac{\pi}{۴}) + c \Rightarrow ۰ + c = -۲ \Rightarrow c = -۲$$

$$\xrightarrow{c=-۲} a - ۲ = ۱ \Rightarrow a = ۳$$

$$a.b = ۳ \times ۵ = ۱۵$$

اگر $b = -۵$ باشد:

$$x = \frac{\pi}{۴} : y = a\cos^۲(-\frac{۵\pi}{۴} - \frac{\pi}{۴}) + c \Rightarrow c = ۱$$

$$x = \frac{۷\pi}{۲۰} : y = a\cos^۲(-\frac{۷\pi}{۴} - \frac{\pi}{۴}) + c \Rightarrow a + c = -۲ \Rightarrow a = -۳$$

$$a.b = ۳ \times ۵ = ۱۵$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۸ گزینه ۳

$$\sin^۲(\frac{\pi}{۴} - bx) = \frac{۱}{۲}(۱ - \cos(۲(\frac{\pi}{۴} - bx)))$$
$$= \frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۲}\cos(\frac{\pi}{۲} - ۲bx) = \frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۲}\sin(۲bx)$$

$$\Rightarrow y = \frac{a}{۲} - \frac{a}{۲}\sin(۲bx) + c \quad (*)$$

$$\left.\begin{array}{l} y_{max} = \frac{a}{۲} + c + |-\frac{a}{۲}| = ۱ \\ y_{min} = \frac{a}{۲} + c - |-\frac{a}{۲}| = -۲ \end{array}\right\} \Rightarrow ۲|\frac{a}{۲}| = ۳ \Rightarrow a = \pm ۳$$

$$T = \frac{۱۵\pi}{۴} + \frac{۵\pi}{۴} = \frac{۲۰\pi}{۴} = ۵\pi$$

$$T = \frac{۲\pi}{|۲b|} = ۵\pi \Rightarrow |b| = \frac{۱}{۵} \Rightarrow b = \pm\frac{۱}{۵}$$

$$ab = \pm\frac{۳}{۵} \xrightarrow{ab<۰} ab = -\frac{۳}{۵} = -۰/۶$$

نکته: با توجه به نمودار مشخص است که تابع در همسایگی $x = ۰$ صعودی است، بنابراین در $(*)$ باید $-a$ و b هم‌علامت باشند، یعنی $(-a)(b) > ۰$، پس $ab < ۰$.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

۹ گزینه ۳

اولاً توجه کنید که باتوجه‌به نمودار، b و c هم‌علامت هستند. حال داریم:

$$T = \frac{۴\pi}{۳} + \frac{۲\pi}{۳} = ۲\pi = \frac{۲\pi}{|c|} \Rightarrow c = \pm ۱ \Rightarrow c = ۱$$

$$y_{max} = ۱ \Rightarrow |b| + a = ۱ \xrightarrow{b>۰} b + a = ۱$$

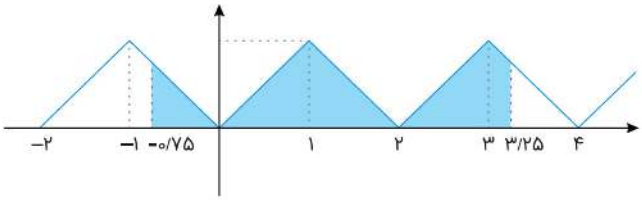
$$O \left| \begin{matrix} ۰ \\ ۰ \end{matrix} \right. \Rightarrow ۰ = a + b\cos(-\frac{\pi}{۳}) \Rightarrow ۲a + b = ۰ \Rightarrow a = -۱, \ b = ۲$$

$$b(c - a) = ۲(۱ + ۱) = ۴$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۲

۱۰ گزینه ۱

نمودار تابع به‌صورت زیر خواهد بود:



$$S = ۲ \times \frac{۱ \times ۲}{۲} = ۲$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

۱۱ گزینه ۲

در $x = ۰$، مقدار تابع برابر است با $y = ۳$؛ لذا با جایگذاری در تابع خواهیم داشت $a = ۳$. به‌سادگی نتیجه می‌شود که به ازای $x = \frac{۲۵}{۳}$، مقدار تابع برابر است با $y = ۲/۵$.

$$T = \frac{۲\pi}{|\pi b|} = ۴ \Rightarrow |b| = \frac{۱}{۲} \Rightarrow b = -\frac{۱}{۲} \ \checkmark \ , \ b = \frac{۱}{۲} \ \times \ , \ y = ۳ + \sin(\frac{-\pi}{۲}x)$$

$$\xrightarrow{x=\frac{۲۵}{۳}} y = ۳ + \sin(\frac{-۲۵}{۶}\pi) \Rightarrow y = ۳ + \sin(-۴\pi - \frac{\pi}{۶}) \Rightarrow y = ۳ - \frac{۱}{۲} = \frac{۵}{۲} = ۲/۵$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۳

۱۲ گزینه ۳

دورهٔ تناوب تابع به معادلهٔ $y = a\sin(bx) + c$ برابر است با $\frac{۲\pi}{|b|}$، پس:

$$y = a\sin(b\pi x) \Rightarrow T = \frac{۲\pi}{|b\pi|} = \frac{۲}{|b|} \quad (*)$$

همچنین باتوجه‌به نمودار $T = ۶$ است، پس:

$$\xrightarrow{(*)} \frac{۲}{|b|} = ۶ \Rightarrow |b| = \frac{۱}{۳} \quad (۱)$$

با فرض $b = \frac{۱}{۳}$ و اگر a عددی مثبت باشد، آنگاه بیشترین مقدار تابع به معادلهٔ $y = a\sin(bx) + c$، برابر با $a + c$ است، پس:

$$y = a\sin(b\pi x) \Rightarrow Max(y) = a \quad (**)$$

همچنین باتوجه‌به نمودار $Max(y) = ۲$، پس:

$$\xrightarrow{(**)} a = ۲ \quad (۲)$$

$$(۱), (۲) \Rightarrow a + b = ۲ + \frac{۱}{۳} = \frac{۷}{۳}$$

توجه: مقادیر a و b می‌توانند هر دو منفی باشند و جواب $a + b = -\frac{۷}{۳}$ نیز قابل‌قبول است که در گزینه‌ها وجود ندارد.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۳

۱۳ گزینه ۱

باتوجه‌به نمودار داریم:

$$T = ۲(\frac{۵}{۴} - \frac{۱}{۴}) = ۲ \ , \ T = \frac{۲\pi}{|b|} = ۲$$
$$\Rightarrow |b| = \pi \xrightarrow{b>۰} b = \pi$$
$$f(\frac{۱}{۴}) = ۰ \Rightarrow a\cos(\frac{\pi}{۴} + c) = ۰ \Rightarrow \frac{\pi}{۴} + c = \frac{\pi}{۲} \Rightarrow c = \frac{\pi}{۴}$$

ماکزیمم تابع برابر $\frac{۱}{۴}$ است:

$$|a| = \frac{۱}{۴} \Rightarrow a = \pm\frac{۱}{۴}$$
$$f(x) = \pm\frac{۱}{۴}\cos(\pi x + \frac{\pi}{۴})$$
$$x = ۰ : f(۰) = \pm\frac{۱}{۴}\cos\frac{\pi}{۴} = \pm\frac{\sqrt{۲}}{۸}$$

باتوجه‌به نمودار $f(۰)$ باید مثبت باشد، پس:

$$\frac{ac}{b} = \frac{\frac{۱}{۴} \times \frac{\pi}{۴}}{\pi} = \frac{۱}{۱۶}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۱

۱۴ گزینه ۴

اگر تابعی نسبت به خط $x = x_۰$ متقارن باشد، آنگاه: $f(x) = f(۲x_۰ - x)$

تابع نسبت به خط $x = ۱$ متقارن است : $f(x) = f(۲ - x)$
تابع نسبت به خط $x = ۳$ متقارن است : $f(x) = f(۶ - x)$

$$f(x) = f(۶ - x) \xrightarrow{x=x+۴} f(x + ۴) = f(۶ - (x + ۴)) = f(۲ - x)$$

پس $f(x) = f(۴ + x)$، پس f تابعی متناوب با دورهٔ تناوب ۴ است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۰

۱۵ گزینه ۳

دورهٔ تناوب تابع برابر π و ماکزیمم مقدار آن ۱/۵ است.

$$T = \frac{۲\pi}{|b|} = \pi \Rightarrow |b| = ۲ \Rightarrow b = \pm ۲ \quad (I)$$

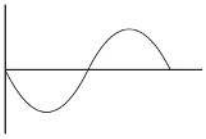
$$\text{ماکزیمم تابع} = ۱ + |a| = ۱/۵ \Rightarrow |a| = \frac{۱}{۲} \Rightarrow a = \pm \frac{۱}{۲} \quad (II)$$

از طرفی عرض نقطهٔ تماس نمودار با محور yها بزرگ‌تر از یک است.

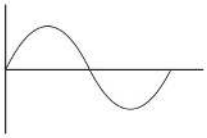
$$x = ۰ : y = ۱ + a\sin(\frac{-\pi}{۶}) = ۱ - \frac{a}{۲} > ۱ \Rightarrow \frac{a}{۲} < ۰ \Rightarrow a < ۰ \xrightarrow{(II)} a = \frac{-۱}{۲}$$

باتوجه‌به اینکه ضریب $\sin$ در تابع منفی است و باتوجه‌به شکل زیر، نتیجه می‌گیریم باید b (ضریب x) مثبت باشد (حالت اول)؛ یعنی $b = ۲$ قابل‌قبول است.

$$a + b = ۲ - \frac{۱}{۲} = \frac{۳}{۲}$$



نمودار $y=-\sin x$



نمودار $y=-\sin(-x)$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۵

۱۶ گزینه ۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۵

گام اول

الف) تابع در بازهٔ بین $\frac{\pi}{۱۸}$ و $\frac{۱۳\pi}{۱۸}$ یک دوره تناوب کامل را طی می‌کند.

ب) دوره تناوب تابع $y = a - ۲\cos\left(bx + \frac{\pi}{۲}\right)$ از رابطهٔ $T = \frac{۲\pi}{|b|}$ به دست می‌آید.

ج) داریم:

$$y = a - ۲\cos(bx + \frac{\pi}{۲}) = a + ۲\sin bx$$

باتوجه‌به نمودار b باید مثبت باشد زیرا در غیر این صورت نمودار تابع قرینهٔ نمودار رسم شده خواهد بود.

د) نقطه به مختصات $\left(\frac{\pi}{۱۸}, ۰\right)$ در ضابطهٔ تابع صدق می‌کند.

گام دوم

باتوجه‌به قسمت الف از گام اول، دوره تناوب تابع برابر است با:

$$T = \frac{۱۳\pi}{۱۸} - \frac{\pi}{۱۸} = \frac{۱۲\pi}{۱۸} = \frac{۲\pi}{۳}$$

همچنین باتوجه‌به قسمت ب و ج از گام اول می‌توان نوشت:

$$T = \frac{۲\pi}{|b|} = \frac{۲\pi}{۳} \Rightarrow |b| = ۳ \xrightarrow{b>۰} b = ۳$$

اکنون با توجه به اینکه $f\left(\frac{\pi}{۱۸}\right) = ۰$ است، مقدار a را محاسبه می‌کنیم:

$$۰ = a - ۲\cos\left(۳ \times \frac{\pi}{۱۸} + \frac{\pi}{۲}\right) = a - ۲\cos\left(\frac{\pi}{۶} + \frac{\pi}{۲}\right) = a + ۲\sin\left(\frac{\pi}{۶}\right) = a + ۲\left(\frac{۱}{۲}\right)$$

$$\Rightarrow a + ۱ = ۰ \Rightarrow a = -۱$$

پس حاصل $a + b$ برابر است با:

$$a + b = -۱ + ۳ = ۲$$

۱۷ گزینه ۴

$$y = a + b\sin(\frac{\pi}{۲} + x) = a + b\cos x$$

باتوجه‌به نمودار ماکزیمم تابع برابر ۳ است، پس:

$$\text{ماکزیمم} = a + |b| = ۳ \xrightarrow[b<۰]{\text{باتوجه‌به نمودار}} a - b = ۳ \quad (۱)$$

$$(\frac{۷\pi}{۳}, ۰) : ۰ = a + b\cos(\frac{۷\pi}{۳}) = a + b\cos(۲\pi + \frac{\pi}{۳}) = a + b(\frac{۱}{۲})$$

$$\Rightarrow a + \frac{b}{۲} = ۰ \Rightarrow ۲a + b = ۰ \quad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۱),(۲)} \begin{cases} a - b = ۳ \\ ۲a + b = ۰ \end{cases} \xrightarrow{+} ۳a = ۳ \Rightarrow a = ۱ \Rightarrow b = -۲$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

۱۸ گزینه ۱

اختلاف max و min تابع ۱۰ واحد است. پس $|a| = ۵$ خواهد بود. حال چون تابع از $x = ۰$ نزولی شده، پس $a = ۵$ است. همچنین تابع دو واحد پایین آمده است، پس $b = -۲$ است.

$$f(x) = ۵\cos x - ۲ \xrightarrow{x=\frac{\pi}{۳}} f(\frac{\pi}{۳}) = ۵\cos\frac{\pi}{۳} - ۲ = ۵(\frac{۱}{۲}) - ۲ = \frac{۵}{۲} - ۲ = \frac{۱}{۲}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۱

۱۹ گزینه ۴

$$\begin{cases} y_{max} = |a| + c = \frac{۵}{۲} \\ y_{min} = -|a| + c = -\frac{۱}{۲} \end{cases} \Rightarrow |a| = \frac{۳}{۲} \ , \ c = ۱$$

$$\Rightarrow y = ۱ + a\cos bx \ ; \ y(۰) = ۱ + a = -\frac{۱}{۲} \Rightarrow a = -\frac{۳}{۲}$$

پس تابع به صورت $y = ۱ - \frac{۳}{۲}\cos bx$ می‌باشد و حاصل ac برابر است با:

$$ac = \frac{-۳}{۲} \times ۱ = \frac{-۳}{۲}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

۲۰ گزینه ۱

$$-\frac{\pi}{۴} < x < \frac{\pi}{۴} \Rightarrow -\frac{\pi}{۴} < -x < \frac{\pi}{۴} \Rightarrow ۰ < \frac{\pi}{۴} - x < \frac{\pi}{۲}$$

$$\Rightarrow \tan(\frac{\pi}{۴} - x) > ۰ \Rightarrow \frac{۱-m}{۲+m} > ۰$$

m		-۲		۱	
$۱-m$	$+$		$+$	۰	$-$
$۲+m$	$-$	۰	$+$		$+$
$\frac{۱-m}{۲+m}$	$-$	ت ن	$+$	۰	$-$

$$\Rightarrow -۲ < m < ۱$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

۲۱ گزینه ۳

$$\begin{cases} \max = |a| + c = ۵ \\ \min = -|a| + c = ۱ \end{cases} \Rightarrow c = ۳$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

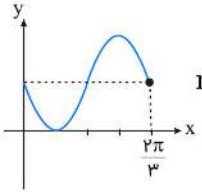
۲۲ گزینه ۴

طبق نمودار : $T = \frac{۲\pi}{۳}$

از روی ضابطه : $T = \frac{۲\pi}{|m|}$

$$\Rightarrow \frac{۲\pi}{۳} = \frac{۲\pi}{|m|} \Rightarrow |m| = ۳ \Rightarrow m = \pm ۳$$

چون باتوجه‌به نمودار تابع باید ابتدا min و سپس max داشته باشد، بنابراین:



$$m = ۳ \Rightarrow y = ۱ - \sin ۳x \xrightarrow{x=\frac{۷\pi}{۶}} y(\frac{۷\pi}{۶}) = ۱ - \sin(۳(\frac{۷\pi}{۶}))$$

$$= ۱ - \sin(\frac{۷\pi}{۲}) = ۱ - (-۱) = ۲$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۶

۲۳ گزینه ۱

دورهٔ تناوب را باتوجه‌به نمودار به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} T = \frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = \frac{4\pi}{6} = \frac{2\pi}{3} \\ T = \frac{2\pi}{|b|} \end{cases} \Rightarrow \frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow |b| = 3 \Rightarrow b = \pm 3$$

طبق نمودار داریم:

$$\begin{cases} \max : |a| + c = 1 \\ \min : -|a| + c = -3 \end{cases} \Rightarrow 2c = -2 \Rightarrow c = -1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b = -3,\ c = -1 \\ b = 3,\ c = -1 \end{cases}$$

فقط حالت $b = 3, c = -1$ را در گزینه‌ها داریم، پس گزینهٔ ۱ صحیح است.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۲۴ گزینه ۱

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۶

گام اول

باتوجه‌به نمودار رسم‌شده مشخص است دورهٔ تناوب تابع برابر با 4π است. دورهٔ تناوب تابع $y = \frac{1}{2} + 2\cos mx$ از رابطهٔ $T = \frac{2\pi}{|m|}$ به دست می‌آید.

گام دوم

$$\frac{2\pi}{|m|} = 4\pi \Rightarrow |m| = \frac{1}{2} \Rightarrow m = \pm\frac{1}{2}$$

با فرض $m = \frac{1}{2}$ تست را حل می‌کنیم (اگر $m = -\frac{1}{2}$ هم فرض شود تأثیری در جواب تست ندارد).

$$m = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{1}{2} + 2\cos\frac{x}{2} \Rightarrow f(\frac{16\pi}{3}) = \frac{1}{2} + 2\cos\frac{8\pi}{3}$$

$$= \frac{1}{2} + 2\cos(2\pi + \frac{2\pi}{3}) = \frac{1}{2} + 2\cos\frac{2\pi}{3} = \frac{1}{2} + 2(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$$

۲۵ گزینه ۳

کمترین مقدار تابع ۱- است؛ پس:

$$۱-|a|=-۱\Rightarrow |a|=۲$$

تابع در دو دورهٔ تناوب رسم شده است، پس:

$$۲T=\frac{۴}{۳}\Rightarrow T=\frac{۲}{۳}$$

$$\frac{۲\pi}{|b\pi|}=\frac{۲}{۳}\Rightarrow |b|=۳$$

باتوجه‌به نمودار a و b هم‌علامت است؛ پس:

$$a+b=۵ \text{ یا } -۵$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۷

۲۶ گزینه ۳

$$\text{ماکزیمم}=a+|b|=\frac{۳}{۲}\xrightarrow[b<۰]{\text{باتوجه‌به نمودار}}a-b=\frac{۳}{۲}$$

$$\left(\frac{\pi}{۲},۰\right):f\left(\frac{\pi}{۲}\right)=۰\Rightarrow a+b\sin\left(\frac{\pi}{۲}+\frac{\pi}{۳}\right)=۰\Rightarrow a+b\cos\left(\frac{\pi}{۳}\right)=۰\Rightarrow a+\frac{۱}{۲}b=۰$$

$$\Rightarrow ۲a+b=۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a-b=\frac{۳}{۲} \\ ۲a+b=۰ \end{cases} \Rightarrow ۳a=\frac{۳}{۲}\Rightarrow a=\frac{۱}{۲}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۲۷ گزینه ۴

دورهٔ تناوب را باتوجه‌به نمودار به دست می‌آوریم:

$$T = \frac{۹\pi}{۲} - (-\frac{۳\pi}{۲}) = \frac{۱۲\pi}{۲} = ۶\pi$$

$$\Rightarrow T = ۶\pi = \frac{۲\pi}{|b|} \Rightarrow |b| = \frac{۱}{۳} \Rightarrow b = \pm\frac{۱}{۳}$$

طبق نمودار داریم:

$$\begin{cases} max : |a| + c = ۱ \\ min : -|a| + c = -۳ \end{cases} \Rightarrow ۲c = -۲ \Rightarrow c = -۱ \Rightarrow |a| = ۲ \Rightarrow a = \pm ۲$$

طبق نمودار، تابع در حوالی $x = ۰$ نزولی است، بنابراین $ab < ۰$، پس داریم:

$$\begin{cases} a = -۲ \\ b = \frac{۱}{۳} \end{cases} \text{ یا } \begin{cases} a = ۲ \\ b = -\frac{۱}{۳} \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{b} = -۶$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

۲۸ گزینه ۳

باتوجه‌به نمودار $f(\pi) = -\frac{۳}{۲}$ است، پس:

$$-\frac{۳}{۲} = a + b\sin(\pi + \frac{\pi}{۳}) \Rightarrow a + b(-\frac{\sqrt{۳}}{۲}) = -\frac{۳}{۲}$$

$$\xrightarrow{\times ۲} ۲a - b\sqrt{۳} = -۳ \quad (۱)$$

باتوجه‌به نمودار تابع $b > ۰$ است و همچنین چون ماکزیمم تابع $\sqrt{۳}$ است، پس:

$$a + |b| = \sqrt{۳} \xrightarrow{b>۰} a + b = \sqrt{۳} \quad (۲)$$

با حل دستگاه داریم:

$$-۲ \begin{cases} a + b = \sqrt{۳} \\ ۲a - b\sqrt{۳} = -۳ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -۲a - ۲b = -۲\sqrt{۳} \\ ۲a - b\sqrt{۳} = -۳ \end{cases}$$

$$\xrightarrow{+} -b(۲ + \sqrt{۳}) = -(۳ + ۲\sqrt{۳}) \Rightarrow b = \frac{\sqrt{۳}(۲ + \sqrt{۳})}{۲ + \sqrt{۳}} = \sqrt{۳}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۲۹ گزینه ۱

تابع را به شکل زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$y = a\sin(\frac{\pi}{۲} + b\pi x) = a\cos b\pi x$$

ماکزیمم تابع برابر با ۲ است؛ بنابراین: $|a| = ۲$

ازطرفی $y(۰) = ۲$، پس:

$$y(۰) = a \times \cos ۰ = a \Rightarrow a = ۲$$

همچنین نمودار تابع در بازهٔ $[-۲/۵, ۳/۵]$ سه بار تکرار شده است، درنتیجه:

$$۳T = ۳/۵ - (-۲/۵) = ۶ \Rightarrow T = ۲$$

$$\Rightarrow \frac{۲\pi}{|b\pi|} = ۲ \Rightarrow |b| = ۱ \Rightarrow b = \pm ۱$$

که هر دو مقدار قابل‌قبول است. باتوجه‌به گزینه‌ها، $a.b = ۲$ است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۲

۳۰ گزینه ۳

اگر $x \in [-۱, ۱]$، آنگاه:

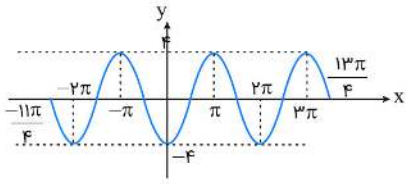
$$-۱ \le x \le ۱ \Rightarrow -۳\pi \le -۳\pi x \le ۳\pi$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{۴} - ۳\pi \le \frac{\pi}{۴} - ۳\pi x \le \frac{\pi}{۴} + ۳\pi \Rightarrow \frac{-۱۱\pi}{۴} \le \frac{\pi}{۴} - ۳\pi x \le \frac{۱۳\pi}{۴}$$

حال با در نظر گرفتن $\theta = \frac{\pi}{۴} - ۳\pi x$، ضابطهٔ تابع مفروض سؤال، به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$y = -۴\cos\theta \; ; \; \frac{-۱۱\pi}{۴} \le \theta \le \frac{۱۳\pi}{۴}$$

که شکل آن به‌صورت زیر است:



ملاحظه می‌کنید که این تابع در سه نقطه با طول‌های $\theta = -\pi$، $\theta = \pi$ و $\theta = ۳\pi$، بیشترین مقدار خود را دارد.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۱

۳۱ گزینه ۱

ماکزیمم برابر ۴ است.

$$f(۰) = ۰ \to a + b = ۰ \;,\; f(۲) = ۴ \to a + b\cos\pi = ۴ \to a - b = ۴$$

$$\begin{cases} a + b = ۰ \\ a - b = ۴ \end{cases} \Rightarrow a = ۲ \,,\, b = -۲$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۷

۳۲ گزینه ۲

$$y = a + b\cos(\frac{\pi}{۲} - x) = a + b\sin x$$

مقدار تابع در $-\frac{۵\pi}{۶}$ صفر است. پس:

$$y(-\frac{۵\pi}{۶}) = a + b\sin(-\frac{۵\pi}{۶}) = a + b(-\frac{۱}{۲}) = ۰ \Rightarrow b = ۲a$$

بنابراین: $y = a + ۲a\sin x$. به‌علاوه باتوجه‌به اینکه $y(۰) > ۰$ می‌باشد، پس $a > ۰$ است و ماکزیمم تابع زمانی رخ می‌دهد که $\sin x = ۱$ باشد.

$$max = ۳ \Rightarrow a + ۲a = ۳ \Rightarrow a = ۱$$
$$\Rightarrow y = ۱ + ۲\sin x$$
$$y(\frac{\pi}{۶}) = ۱ + ۲(\frac{۱}{۲}) = ۲$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

۳۳ گزینه ۱

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۲

گام اول

الف) دورهٔ تناوب تابع $y = \sin ax$ از رابطهٔ $T = \frac{2\pi}{|a|}$ به دست می‌آید.

ب) به ازای هر مقدار دلخواه x و a همواره داریم: $-1 \leq \sin ax \leq 1$

گام دوم

تابع $y = a\sin(b\pi x)$ در بازهٔ $[0, 3]$، سه نوسان کامل انجام داده است؛ بنابراین طول این بازه سه برابر دورهٔ تناوب تابع است، پس:

$$3T = 3 - 0 \Rightarrow 3T = 3 \Rightarrow T = 1$$

بنابراین طبق قسمت (الف) از گام اول، داریم:

$$T = \frac{2\pi}{|b\pi|} = \frac{2\pi}{|b|\pi} = \frac{2}{|b|} \Rightarrow 1 = \frac{2}{|b|} \Rightarrow |b| = 2 \Rightarrow b = \pm 2$$

باتوجه‌به قسمت (ب) از گام اول، داریم:

$$-1 \leq \sin(b\pi x) \leq 1 \Rightarrow -a \leq a\sin(b\pi x) \leq a \Rightarrow -a \leq y \leq a$$

طبق نمودار تابع $y_{max} = 3$ و $y_{min} = -3$ و نمودار تابع ابتدا نزولی و سپس صعودی است بنابراین $a = -3$ خواهد بود.
ازطرفی، به ازای مقادیر کوچک بزرگ‌تر از صفر، حاصل تابع باید منفی شود و چون $a = -3$ شد پس مقدار $\sin b\pi x$ باید مثبت باشد؛ بنابراین داریم: $b = 2$
درنتیجه:

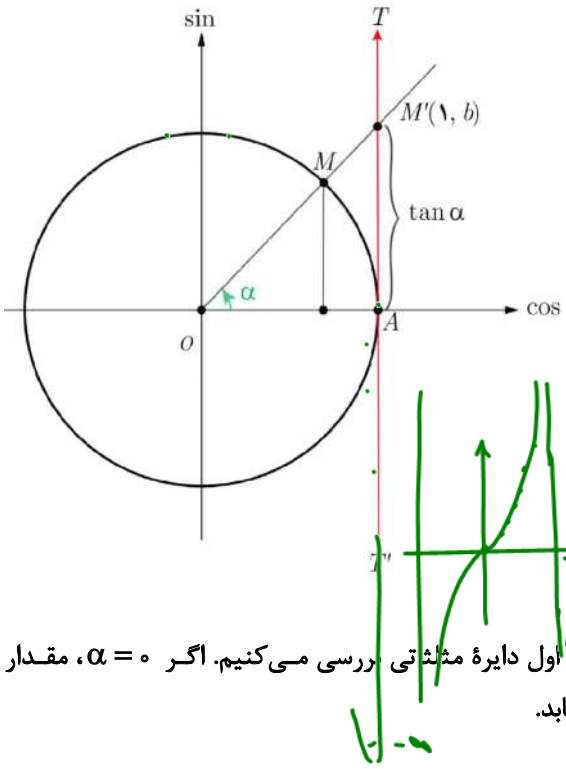
$$ab = (-3) \times 2 = -6$$

تانژانت

در دایرهٔ مثلثاتی روبه‌رو خط TAT' در نقطهٔ A بر محور کسینوس‌ها عمود است.

الف) زاویهٔ α را در ربع اول دایره مثلثاتی در نظر می‌گیریم و پاره‌خط OM را امتداد می‌دهیم تا این خط را در نقطهٔ M' قطع کند. نشان دهید:

$$\tan\alpha = AM' = b$$

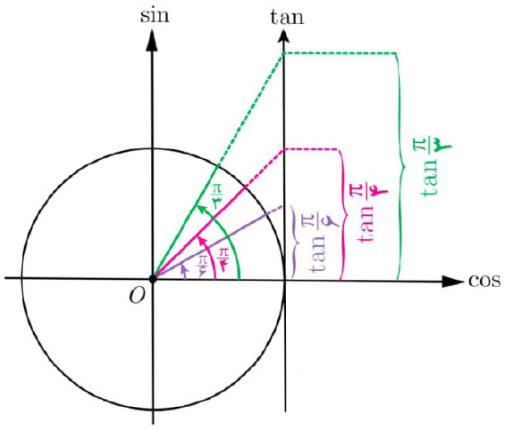


می‌توان دید که تانژانت هر زاویهٔ دلخواه مانند α، به همین ترتیب از برخورد امتداد ضلع دوم آن زاویه با خط TAT' تعیین می‌شود. بنابراین خط TAT' را محور تانژانت می‌نامیم. نقطهٔ A مبدأ این محور است و جهت مثبت محور، از پایین به سمت بالا است.

ب) چرا تانژانت زوایایی که انتهای کمان آن‌ها در ربع اول و سوم قرار دارد مقداری مثبت و تانژانت زوایایی که انتهای کمان آن‌ها در ربع دوم و چهارم قرار دارد، مقداری منفی است؟

تغییرات تانژانت

با تغییر زاویهٔ α مقادیر تانژانت آن نیز تغییر می‌کند. ابتدا این تغییرات را در ربع اول دایرهٔ مثلثاتی بررسی می‌کنیم. اگر $\alpha = 0$، مقدار $\tan\alpha$ نیز برابر صفر است و با افزایش اندازهٔ α، مقدار $\tan\alpha$ نیز افزایش می‌یابد.



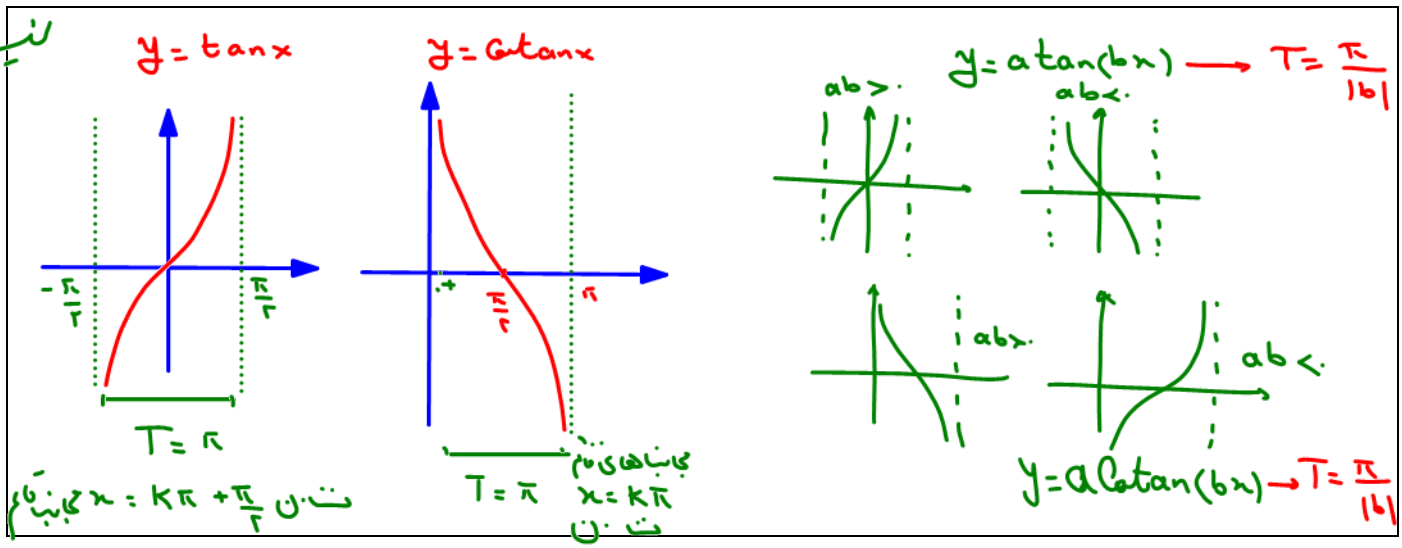
تابع تانژانت

همان‌طور که می‌بینیم به ازای هر زاویهٔ دلخواه در دایرهٔ مثلثاتی (به‌جز $x = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$)، عددی حقیقی به عنوان $\tan\alpha$ داریم و تابعی با ضابطهٔ $y = \tan\alpha$ مشخص می‌کند. دامنهٔ این تابع مجموعهٔ $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$ است و برد آن مجموعه اعداد حقیقی است. به سادگی می‌توان دید تابع $y = \tan\alpha$، تابعی متناوب است و دوره تناوب آن π است، زیرا: $\tan(\pi + x) = \tan x$

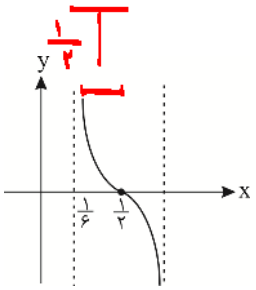
$\tan x = y = \frac{\sin x}{\cos x} = 0$ $\quad k \in \mathbb{Z}$ $\quad x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ $\quad D_{\tan x} : \mathbb{R} - \{x = k\pi + \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\}$

حوزه مجانب‌های نامه

رسم تابع $y = \tan x$: اکیدصعودی نیست زیرا هر خط با آن دارد. بین هر ۲ شاخه متوالی اکیدصعودی است ولی روی $\mathbb{R}$ اکیدصعودی نیست.



تمرین: نمودار $f(x) = \tan(a + bx)$ به صورت مقابل است. b کدام است؟



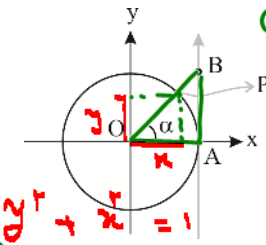
۱) $-\frac{3\pi}{2}$ ✓
۲) $\frac{3\pi}{2}$
۳) $-\frac{\pi}{2}$
۴) $\frac{\pi}{2}$

$\frac{1}{2}T = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{3-1}{6} = \frac{1}{3}$

$T = \frac{2}{3} = \frac{\pi}{|b|} \rightarrow |b| = 3\pi \rightarrow b = -3\pi$

$(1)(b) < 0 \rightarrow b < 0$ نمودار نزولیه $y = 1\tan(bx + a)$

تمرین: با توجه به دایرهٔ مثلثاتی زیر، مساحت مثلث AOB چه‌قدر است؟ $(0 < \alpha < \frac{\pi}{2})$



۱) $\frac{2}{3}$
۲) $\frac{3}{4}$
۳) $\frac{3}{8}$ ✓
۴) $\frac{1}{2}$

$\cos\alpha = a$ ، $\sin\alpha$

$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{2a-1}{a}$

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$a^2 + (2a-1)^2 = 1$

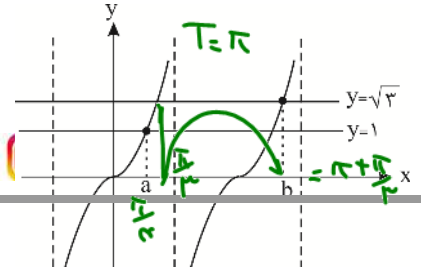
$5a^2 - 4a = 0$

$a(5a-4) = 0 \rightarrow a = 0$ غ ق ق ، $a = \frac{4}{5}$

$S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2}(\text{قاعده} = OA = R = 1)(\text{ارتفاع} = AB = \tan\alpha) = \frac{1}{2}\tan\alpha$

$S = \frac{1}{2}\left(\frac{2a-1}{a}\right) \overset{a=\frac{4}{5}}{=\!=\!=} \frac{1}{2}\left(\frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}\right) = \frac{3}{8}$

تمرین: شکل زیر قسمتی از نمودار تابع $y = \tan x$ را نشان می‌دهد. حاصل $b - a$ کدام است؟



$a = \frac{\pi}{4}$

$b = \pi + \frac{\pi}{3}$

$b - a = \left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) - \frac{\pi}{4} = \frac{12\pi + 4\pi - 3\pi}{12} = \frac{13\pi}{12}$

۱) $\frac{\pi}{12}$

www.samansalamian.ir

اولین برخورد خط $y=1$ با xهای مثبت در $a=\frac{\pi}{4}$

دومین برخورد خط $y=\sqrt{3}$ با xهای مثبت در $b=\pi+\frac{\pi}{3}$

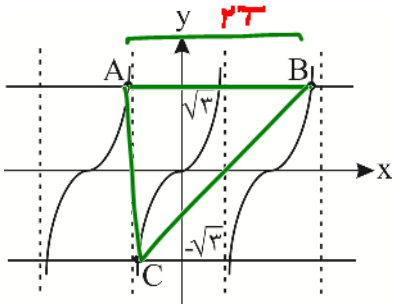
$$b-a=\frac{13\pi}{12}$$

۲) $\frac{5\pi}{12}$

۳) $\frac{7\pi}{12}$

۴) $\frac{13\pi}{12}$

تمرین: شکل زیر نمودار تابع $y=\tan ax$ است. اگر مساحت مثلث ABC برابر با $8\sqrt{3}\pi$ باشد، مقدار a کدام است؟



ارتفاع مثلث همان فاصله دو خط موازی است.

$a>0$ (a مثبت)

$$T=\frac{\pi}{|a|}\xrightarrow{+}T=\frac{\pi}{a}$$

$$S_{ABC}=8\sqrt{3}\pi=\frac{(\text{قاعده}=2T)(\text{ارتفاع}=2\sqrt{3})}{2}$$

$$8\sqrt{3}\pi=\frac{2\left(\frac{\pi}{a}\right)(2\sqrt{3})}{2}$$

$$8=\frac{1}{a}\rightarrow a=\frac{1}{8}$$

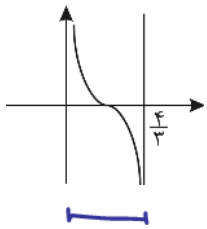
۱) $\frac{1}{2}$

۲) $\frac{1}{4}$

۳) $\frac{3}{4}$

۴) $\frac{5}{4}$

تمرین: قسمتی از نمودار $f(x)=\tan(ax+\frac{1}{2})\pi$ به صورت شکل مقابل است. a کدام است؟



$$f(x)=\tan\left(\pi ax+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$T=\frac{4}{3}=\frac{\pi}{|\pi a|}=\frac{1}{|a|}$$

$$|a|=\frac{3}{4}\rightarrow -a=\frac{3}{4}\rightarrow a=-\frac{3}{4}$$

در بین نمودار نزدلیه

$$y=|1|\tan\left(|\pi a|x+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$(1)(\pi a)<0\rightarrow a<0$$

$\pi\simeq 3.14$

۱) $-\frac{3}{4}$ ✓

۲) $\pm\frac{3}{4}$

۳) $\frac{3}{4}$

۴) $\pm\frac{3}{2}$

۱ اگر $-\frac{\pi}{۴} < x < \frac{\pi}{۴}$ و $\tan(\frac{\pi}{۴} - x) = \frac{۱ - m}{۲ + m}$ باشد، مجموعهٔ مقادیر m کدام است؟

۱) $(-۲, ۱)$ ۲) $(-۲, ۱]$

۳) $(-۱, ۲]$ ۴) $(-۱, ۲)$

۲ دورهٔ تناوب تابع با ضابطهٔ $f(x) = \tan(\pi x) - \cot(\pi x)$، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۱

۳) ۲ ۴) π

کدام‌یک از جملات درست و کدام‌یک نادرست است؟

۳ درجه تابع $f(x) = x^۲(۱ - x^۲)^۲ - x^۲$ برابر ۴ است.

۴ نمودار تابع $f(x) = \tan x$ در دامنه خود اکیداً صعودی است.

۵ حاصل $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{۱}{x - ۱}$ برابر صفر است.

۶ اگر n عددی فرد باشد $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n$ برابر با $-\infty$ است.

۷ دامنه تعریف تابع $f(x) = \frac{\tan ۲x}{\sin x \cos x}$ کدام است؟ $(k \in \mathbb{Z})$

۱) $\mathbb{R} - \{x | x = \frac{k\pi}{۲}, k \in \mathbb{Z}\}$ ۲) $\mathbb{R} - \{x | x = \frac{k\pi}{۴}, k \in \mathbb{Z}\}$

۳) $\mathbb{R} - \{x | x = k\pi + \frac{\pi}{۴}, k \in \mathbb{Z}\}$ ۴) $\mathbb{R} - \{x | x = k\pi + \frac{\pi}{۲}, k \in \mathbb{Z}\}$

۸ معادلهٔ $\tan x - \pi + ۴x^۲ = ۰$ در بازهٔ $(-\frac{\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲})$ چند ریشه دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۳ ۴) ۴

۹ کدام‌یک از جملات درست و کدام‌یک نادرست است؟

الف درجهٔ تابع $f(x) = x^۲(۱ - x^۲)^۲ - x^۲$ برابر ۴ است.

ب نمودار تابع $f(x) = \tan x$ در دامنهٔ خود اکیداً صعودی است.

پ حاصل $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{۱}{x - ۱}$ برابر صفر است.

ت اگر n عددی فرد باشد، $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n$ برابر با $-\infty$ است.

۱۰ دوره تناوب تابع $y = \tan x - |\sin x|$ کدام است؟

۱) 2π ۲) π

۳) $\frac{\pi}{2}$ ۴) $\frac{\pi}{4}$

درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

۱۱ $x - 2$ یک عامل چندجمله‌ای $x^5 + 32$ می‌باشد.

۱۲ مینیمم تابع $y = -3\cos \pi x + 2$ برابر با یک است.

۱۳ می‌توان بازه‌ای یافت که تابع تانژانت در آن نزولی باشد.

۱۴ تابع $f(x) = \frac{2x+1}{x-2}$ دو مجانب دارد.

در جاهای خالی عبارت مناسب بنویسید.

۱۵ اگر $f(x) = \log x$ باشد، در این صورت $D_{f^{-1}\circ f}$ برابر ..... است.

۱۶ دوره تناوب تابع $y = |\sin x|$ برابر ..... است.

۱۷ دامنه تعریف تابع $f(x) = \tan 2x$ برابر ..... است.

۱۸ حاصل $\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{2})^+} [\sin x]$ برابر ..... است.

۱۹ درصورتی‌که $\tan(\frac{\pi}{4} - \alpha) = -\frac{1}{6}\tan\alpha$ باشد، مجموع مقادیر ممکن $\cot\alpha$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۶

۳) $\frac{5}{6}$ ۴) $\frac{6}{5}$

۲۰ تابع تانژانت در کدام مجموعهٔ زیر صعودی اکید است؟

۱) $(0, \pi) - \{\frac{\pi}{2}\}$ ۲) $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

۳) $(\frac{\pi}{2}, 2\pi) - \{\frac{3\pi}{2}\}$ ۴) $(-\frac{\pi}{2}, \pi) - \{\frac{\pi}{2}\}$

۲۱ تابع $f(x) = \tan 2x + 2$ در بازهٔ $[0, a)$ صعودی اکید است. حداکثر مقدار a کدام می‌باشد؟

۱) $\frac{\pi}{4}$ ۲) $\frac{3\pi}{4}$

۳) $\frac{\pi}{2}$ ۴) π

۲۲ اگر $\frac{\pi}{۴} < \alpha < \frac{\pi}{۲}$ و $\tan\alpha = \frac{m}{۲}$ باشد، حدود m کدام است؟

۱) $m > ۲$
۲) $m > ۱$
۳) $m > ۰$
۴) $m \in \mathbb{R}$

۲۳ چندتا از جملات زیر درست است؟

الف) تابع تانژانت در هر بازه‌ای که تعریف می‌شود، صعودی اکید است.

ب) دورهٔ تناوب تابع $\sin\frac{۳x}{۲}$ برابر $\frac{۴\pi}{۳}$ است.

پ) بیشترین مقدار تابع $y = ۳\sin^۲x - ۱$ برابر ۲ است.

۱) صفر
۲) یک
۳) دو
۴) سه

۲۴ دورهٔ تناوب تابع $f(x) = \frac{۱+\tan x}{۱+\cot x}$ کدام است؟

۱) π
۲) ۲π
۳) $\frac{\pi}{۲}$
۴) $\frac{\pi}{۴}$

۲۵ در کدام بازه $\sin x > \tan x$ است؟

۱) $(\frac{۴\pi}{۳}, \frac{۳\pi}{۲})$
۲) $(\frac{\pi}{۴}, \frac{\pi}{۲})$
۳) $(\frac{\pi}{۷}, \frac{\pi}{۲})$
۴) $(\frac{۷\pi}{۱۲}, \frac{۱۲\pi}{۱۳})$

۲۶ دامنه تابع $f(x) = \tan\frac{\pi}{x}$ کدام است؟

۱) $\{x | x \neq \frac{۲}{۲k+۱}, k \in \mathbb{Z}\}$
۲) $\{x \neq ۰ | x \neq \frac{۲}{۲k+۱}, k \in \mathbb{Z}\}$
۳) $\{x \neq ۰ | x \neq \frac{۱}{۲k+۱}, k \in \mathbb{Z}\}$
۴) $\{x | x \neq \frac{۱}{۲k+۱}, k \in \mathbb{Z}\}$

در جاهای خالی عبارت ریاضی مناسب قرار دهید.

۲۷ تابعی که در یک بازه، هم صعودی و هم نزولی محسوب می‌شود، تابع ..... نامیده می‌شود.

۲۸ دورهٔ تناوب تابع $y = \tan x$ برابر ..... است.

۲۹ حد تابع $f(x) = \frac{-۳x^۷ + ۵x^۲}{۲x^۳ + ۹}$ وقتی $x \to -\infty$، برابر ..... است.

درستی یا نادرستی جملات زیر را تعیین کنید.

۳۰ تابع تانژانت در دامنه‌اش صعودی اکید است.

۳۱ دوره تناوب $\cos\frac{x}{۲}$ برابر ۴π است.

۳۲ در بازه $(\frac{۳\pi}{۲}\ ,\ ۲\pi)$ مقدار $\tan\alpha$ از $\sin\alpha$ بیشتر است.

۳۳ تابع تانژانت در هر بازه که تعریف شده باشد، صعودی اکید است.

۳۴ اگر $\frac{\pi}{۴} < \alpha < \frac{\pi}{۲}$ و $\tan\alpha = \frac{۱}{m+۱}$ باشد، حدود m کدام است؟

۱) $(-۱\ ,\ ۰)$ ۲) $(-\infty\ ,\ ۰)$

۳) $(-\infty\ ,\ -۱)$ ۴) $(-۱\ ,\ +\infty)$

۳۵ نمودار تابع $f(x)=\tan\frac{x}{۲}$ در فاصلهٔ $[۰\ ,\ ۴\pi]$ خط $y=۱$ را در چند نقطه قطع می‌کند؟

۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۳ ۴) ۴

۳۶ کدام گزینه در مورد تابع $f(x)=|\tan x|$ درست است؟

۱) در بازهٔ $(۰\ ,\ \frac{\pi}{۲})$ صعودی است. ۲) در بازهٔ $(\frac{-۲\pi}{۳}\ ,\ \frac{-\pi}{۳})$ نزولی است.

۳) در بازهٔ $(-\pi\ ,\ -\frac{۳\pi}{۲})$ صعودی است. ۴) در بازهٔ $(\frac{۳\pi}{۲}\ ,\ \frac{۴\pi}{۳})$ نزولی است.

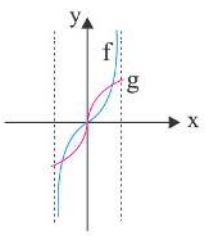
۳۷ تابع $y=\tan x$ در کدام بازهٔ زیر صعودی است؟

۱) $[۰\ ,\ \frac{\pi}{۳}]$ ۲) $[\frac{\pi}{۳}\ ,\ \frac{۲\pi}{۳}]$

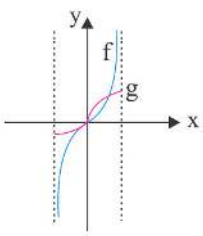
۳) $[\frac{\pi}{۳}\ ,\ \frac{۳\pi}{۴}]$ ۴) $[\frac{۵\pi}{۴}\ ,\ \frac{۷\pi}{۴}]$

۳۸ نمودار $f(x)=\tan x$ و $g(x)=\sin x$ در بازهٔ $(-\frac{\pi}{۲}\ ,\ \frac{\pi}{۲})$ در کدام گزینه به‌درستی رسم شده است؟

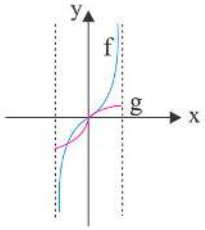
۱)



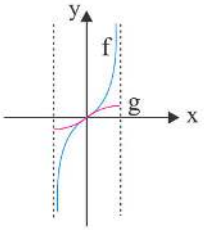
۲)



۳)



۴)



۳۹ تابع $f(x) = -\tan(\frac{x}{۲} - \frac{\pi}{۳})$ و $g(x) = \tan(x - \frac{\pi}{۴})$ در یک دورهٔ تناوب تابع f در چند نقطه متقاطع‌اند؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۴۰ تابع $y = \tan x$ در کدام‌یک از بازه‌های زیر اکیداً صعودی است؟

۱) $[-\frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۲}]$
۲) $[۱, ۳]$
۳) $[۲, ۵]$
۴) $[-۲, -۱]$

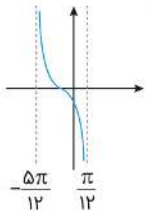
۴۱ تابع $y = \tan(\frac{x}{۲})$ در بازهٔ $(\frac{\pi}{۲}, \frac{۳\pi}{۲})$ چگونه است؟

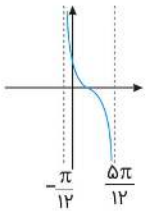
۱) صعودی
۲) نزولی
۳) نه صعودی، نه نزولی
۴) مثبت

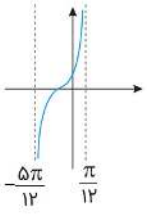
۴۲ دوره تناوب تابع $y = \tan x - |\sin x|$ کدام است؟

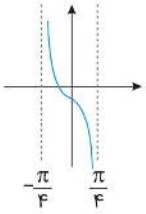
۱) ۲π
۲) π
۳) $\frac{\pi}{۲}$
۴) $\frac{\pi}{۴}$

۴۳ نمودار تابع $y = -\tan(۲x + \frac{\pi}{۳})$ کدام است؟

۱)


۲)


۳)


۴)


۴۴ از بین موارد زیر، چند مورد درست است؟

الف) $f(x) = \tan ۲x$ در بازه $(-\frac{۴\pi}{۳}, -\frac{\pi}{۲})$ صعودی است.

ب) دامنه تابع $f(x) = \tan(x + \frac{\pi}{۴})$، $D = \{x \in \mathbb{R} | x = k\pi + \frac{\pi}{۲}, k \in \mathbb{Z}\}$ است.

پ) دامنه تابع $f(x) = \tan(۲x + \frac{\pi}{۳})$، $D = \{x \in \mathbb{R} | x = (۶k+۱)\frac{\pi}{۱۲}, k \in \mathbb{Z}\}$ است.

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) صفر

۴۵ دوره تناوب تابع $y = \frac{\tan^۲\theta - \sin^۲\theta}{\tan^۵\theta(\cot^۲\theta - \cos^۲\theta)}$ کدام است؟

۱) π
۲) ۲π
۳) $\frac{\pi}{۳}$
۴) $\frac{\pi}{۲}$

۴۶ دامنهٔ تابع $y = \tan(\frac{\pi}{۵ + \sqrt{x}})$ کدام است؟

۱) $[۰ , +\infty)$
۲) $\varnothing$
۳) $\{x \geq ۰ | x \neq k\pi + \frac{\pi}{۲} , k \in \mathbb{Z}\}$
۴) $\{x \geq ۰ | x \neq k\pi , k \in \mathbb{Z}\}$

۴۷ دامنهٔ تابع $y = ۱ - ۲\tan ۳x$ کدام است؟ $(k \in \mathbb{Z})$

۱) $\mathbb{R} - \{\frac{(۲k+۱)\pi}{۶}\}$
۲) $\mathbb{R} - \{k\pi + \frac{\pi}{۲}\}$
۳) $\mathbb{R} - \{(۲k+۱)\pi\}$
۴) $\mathbb{R} - \{\frac{k\pi}{۶}\}$

پاسخ Homework

۱ گزینه ۱

$$-\frac{\pi}{۴} < x < \frac{\pi}{۴} \Rightarrow -\frac{\pi}{۴} < -x < \frac{\pi}{۴} \Rightarrow ۰ < \frac{\pi}{۴} - x < \frac{\pi}{۲}$$

$$\Rightarrow \tan(\frac{\pi}{۴} - x) > ۰ \Rightarrow \frac{۱-m}{۲+m} > ۰$$

m		-۲		۱	
$۱-m$	$+$		$+$	۰	$-$
$۲+m$	$-$	۰	$+$		$+$
$\frac{۱-m}{۲+m}$	$-$	ت ن	$+$	۰	$-$

$$\Rightarrow -۲ < m < ۱$$

۲ گزینه ۱

داریم:

$$\tan\alpha - \cot\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin^۲\alpha - \cos^۲\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{-\cos ۲\alpha}{\frac{۱}{۲}\sin ۲\alpha} = -۲\cot ۲\alpha$$

بنابراین $\tan\alpha - \cot\alpha = -۲\cot ۲\alpha$، پس:

$$f(x) = \tan(\pi x) - \cot(\pi x) = -۲\cot(۲\pi x)$$

دورهٔ تناوب تابع $\tan(ax)$ و $\cot(ax)$ برابر $\frac{\pi}{|a|}$ است، پس دورهٔ تناوب تابع $f(x)$ برابر $\frac{\pi}{|۲\pi|}$ است، یعنی $\frac{۱}{۲}$.

پاسخ سؤالات ۳ تا ۶

۳ نادرست

۴ نادرست

۵ درست

۶ درست

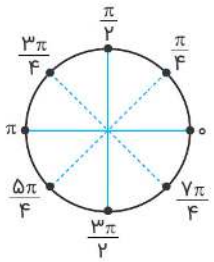
۷ گزینه ۲

نقاط خارج از دامنه عبارتند از:

$$۲x = kπ + \frac{π}{۲} \Rightarrow x = \frac{kπ}{۲} + \frac{π}{۴}$$

$$x = kπ\ ,\ x = kπ + \frac{π}{۲}$$

این نقاط را روی یک دایره مثلثاتی ببینید:

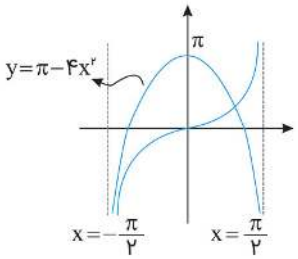


جمله عمومی این نقاط $\frac{kπ}{۴}$ است، پس:

$$D = \mathbb{R} - \{x | x = \frac{kπ}{۴}, k \in \mathbb{Z}\}$$

۸ گزینه ۱

معادله را به‌صورت $\tan x = π - ۴x^۲$ تبدیل می‌کنیم و دو تابع $\begin{cases} f(x) = \tan x \\ g(x) = π - ۴x^۲ \end{cases}$ را رسم می‌کنیم:



ملاحظه می‌کنید که دو تابع f و g یکدیگر را در یک نقطه قطع می‌کند.

۹

الف نادرست

ب نادرست

پ درست

ت درست

۱۰ گزینه ۲

می‌دانیم اگر T دورهٔ تناوب تابع f باشد، داریم:

$$f(x+T)=f(x)$$

حال به امتحان کردن گزینه‌ها می‌پردازیم:

گزینه "۱":

$$f(x+2\pi)=\tan(x+2\pi)-|\sin(x+2\pi)|=\tan x-|\sin x|=f(x) \quad \checkmark$$

گزینه "۲":

$$f(x+\pi)=\tan(x+\pi)-\underbrace{|\sin(x+\pi)|}_{-\sin x}=\tan x-|\sin x|=f(x) \quad \checkmark$$

گزینه "۳":

$$f(x+\frac{\pi}{2})=\tan(x+\frac{\pi}{2})-|\sin(x+\frac{\pi}{2})|=-\cot x-|\cos x| \neq f(x) \quad \times$$

گزینه "۴":

$$f(x+\frac{\pi}{4})=\tan(x+\frac{\pi}{4})-|\sin(x+\frac{\pi}{4})| \neq f(x) \quad \times$$

گزینه "۱" و "۲" هر دو در شرط $f(x+T)=f(x)$ صدق می‌کند، اما مقدار کوچک‌تر دوره تناوب است، پس $T=\pi$.

۱۱ نادرست

۱۲ نادرست.

$$\min=-|a|+c=-3+2=-1$$

۱۳ نادرست

۱۴ درست

۱۵ $x > ۰$

۱۶ π

۱۷ $x \neq \frac{k\pi}{۲} + \frac{\pi}{۴}$

۱۸ صفر

۱۹ گزینه ۳

$$\tan(\frac{\pi}{۴} - \alpha) = -\frac{۱}{۶}\tan\alpha \Rightarrow \frac{۱-\tan\alpha}{۱+\tan\alpha} = -\frac{۱}{۶}\tan\alpha$$

$$\xrightarrow{\tan\alpha = A} \frac{۱-A}{۱+A} = \frac{-A}{۶} \Rightarrow ۶ - ۶A = -A - A^۲ \Rightarrow A^۲ - ۵A + ۶ = ۰$$

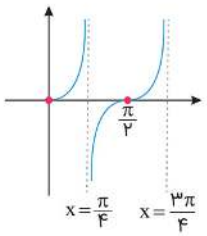
$$\Rightarrow \begin{cases} A = ۲ \\ A = ۳ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cot\alpha = \frac{۱}{۲} \\ \cot\alpha = \frac{۱}{۳} \end{cases} \Rightarrow \text{مجموع مقادیر} = \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} = \frac{۵}{۶}$$

۲۰ گزینه ۲

تابع تانژانت در بازهٔ $(-\frac{\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲})$ صعودی اکید است و در سایر مجموعه نقاط داده‌شده یکنوا نیست.

۲۱ گزینه ۱

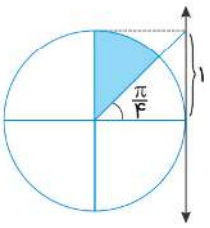
نمودار تابع $\tan ۲x$ به‌صورت زیر است:



اگر تابع $\tan ۲x$ در فاصلهٔ $[۰, a)$ صعودی اکید باشد، حداکثر مقدار a برابر $\frac{\pi}{۴}$ است.

۲۲ گزینه ۱

اگر α در فاصلهٔ $(\frac{\pi}{۴}, \frac{\pi}{۲})$ تغییر کند، در این صورت $\tan\alpha > ۱$ خواهد بود. پس:



$$\frac{m}{۲} > ۱ \Rightarrow m > ۲$$

۲۳ گزینه ۴

الف) تابع تانژانت در هر بازه‌ای که تعریف می‌شود، صعودی اکید است.

ب) دورهٔ تناوب تابع $\sin\frac{۳x}{۲}$ برابر است با:

$$T = \frac{۲\pi}{\frac{۳}{۲}} = \frac{۴\pi}{۳}$$

پ) بیشترین مقدار تابع $۳\sin^۲x - ۱$ برابر است با:

$$\max y = ۳ \times ۱ - ۱ = ۲$$

پس همهٔ جمله‌ها صحیح است.

۲۴ گزینه ۱

$$f(x) = \frac{۱+\tan x}{۱+\frac{۱}{\tan x}} = \tan x \Rightarrow T = \pi$$

۲۵ گزینه ۴

در همه نقاط تعریف‌شده $|\sin x| < |\tan x|$ است، در بازه‌هایی که $\sin x > ۰$ و $\tan x < ۰$ است، $\sin x > \tan x$ است، در ناحیه دوم مثلثاتی $\sin x > \tan x$ است، ضمناً در ناحیه سوم $\tan x > \sin x$ است.

۲۶ گزینه ۲

با شرط $x = ۰$ بایستی $\frac{\pi}{x} \neq k\pi + \frac{\pi}{۲} \; (k \in \mathbb{Z})$ باشد:

$$\frac{\pi}{x} \neq \frac{۲k\pi + \pi}{۲} \Rightarrow x \neq \frac{۲}{۲k+۱} \quad k \in \mathbb{Z}$$

پس دامنه تابع:

$$D_f = \{x \neq ۰ | x \neq \frac{۲}{۲k+۱} \; , \; k \in \mathbb{Z}\}$$

پاسخ سؤالات ۲۷ تا ۲۹

۲۷ ثابت

۲۸ π

۲۹ $-\infty$

پاسخ سؤالات ۳۰ تا ۳۳

۳۰ نادرست

۳۱ درست

۳۲ نادرست

۳۳ درست

۳۴ گزینه ۱

اگر α در بازه $(\frac{\pi}{۴} \; , \; \frac{\pi}{۲})$ قرار گیرد، آنگاه $\tan\alpha > ۱$ خواهد بود پس:

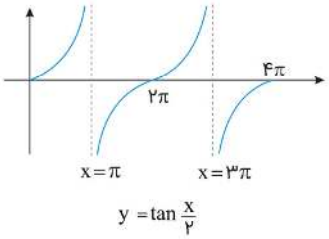
$$\frac{۱}{m+۱} > ۱ \Rightarrow \frac{۱}{m+۱} - ۱ > ۰ \Rightarrow \underbrace{\frac{-m}{m+۱}}_{p(m)} > ۰$$

m		-۱		۰	
$p(m)$	$-$	ت ن	$+$	۰	$-$

$$p(m) > ۰ \Rightarrow -۱ < m < ۰$$

۳۵ گزینه ۲

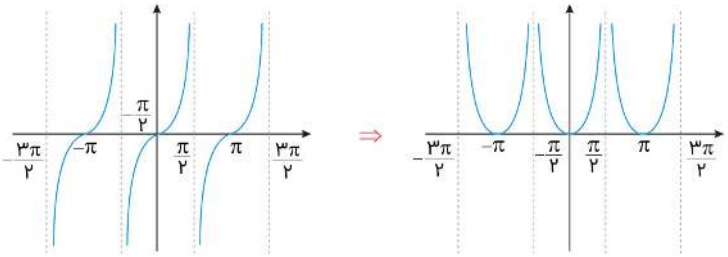
نمودار تابع $\tan\frac{x}{۲}$ در فاصلهٔ $[۰\ ,\ ۴\pi]$ به‌صورت زیر است:



این تابع خط $y = ۱$ را در دو نقطه قطع می‌کند.

۳۶ گزینه ۱

ابتدا نمودار تابع $y = \tan x$ و سپس نمودار $f(x) = |\tan x|$ را رسم می‌کنیم:



باتوجه‌به شکل واضح است که در بازهٔ $(۰\ ,\ \frac{\pi}{۲})$ تابع $|\tan x|$ صعودی است. دقت کنید در بازهٔ $(-\frac{\pi}{۳}\ ,\ -\frac{۲\pi}{۳})$ تابع، نه صعودی است نه نزولی. در بازهٔ $(-\pi\ ,\ \frac{-۳\pi}{۲})$ نزولی و در بازهٔ $(\frac{۳\pi}{۲}\ ,\ \frac{۴\pi}{۳})$ صعودی است.

۳۷ گزینه ۱

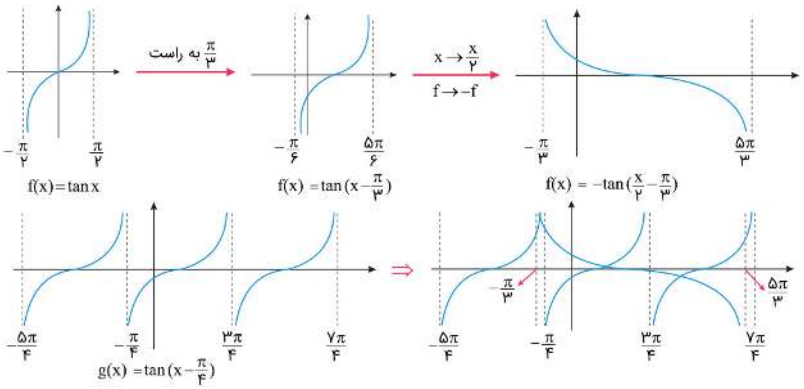
می‌دانیم تابع $y = \tan x$ روی دامنه‌اش صعودی است، بنابراین تابع روی $[۰\ ,\ \frac{\pi}{۳}]$ صعودی می‌باشد. اما بازهٔ گزینه‌های "۲" و "۳" شامل $\frac{\pi}{۲}$ و بازهٔ گزینهٔ "۴" شامل $\frac{۳\pi}{۲}$ است که در دامنهٔ تابع $y = \tan x$ قرار ندارد.

۳۸ گزینه ۴

نکته: به ازای هر α، همواره داریم: $|\sin\alpha| \leq |\tan\alpha|$. بنابراین نمودار تابع g در بازهٔ $(۰ , \frac{\pi}{۲})$ زیر نمودار f و در بازه $(-\frac{\pi}{۲} , ۰)$ بالای f است.

۳۹ گزینه ۳

نمودار دو تابع را رسم می‌کنیم:



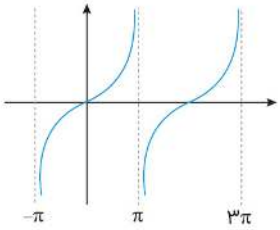
بنابراین در سه نقطه متقاطع‌اند.

۴۰ گزینه ۱

باتوجه‌به اینکه تابع $y=\tan x$ در نقاط $x=k\pi+\frac{\pi}{۲}\ ;\ k\in\mathbb{Z}$ تعریف‌نشده است و همچنین تابع $\tan x$ در هر بازه‌ای که تعریف می‌شود صعودی اکید است، تابع $\tan x$ در بازهٔ $[-\frac{۱}{۲} , \frac{۱}{۲}]$ در بین گزینه‌ها تعریف می‌شود.

۴۱ گزینه ۳

باتوجه‌به اینکه تابع $y=\tan(\frac{x}{۲})$ در نقطهٔ $x=\pi$ از بازهٔ $(\frac{\pi}{۲} , \frac{۳\pi}{۲})$ تعریف نشده است، پس در این بازه نه صعودی و نه نزولی است.



۴۲ گزینه ۲

می‌دانیم اگر T دوره تناوب تابع f باشد، داریم:

$$f(x+T)=f(x)$$

حال به امتحان کردن گزینه‌ها می‌پردازیم:

گزینه "۱":

$$f(x+۲\pi)=\tan(x+۲\pi)-|\sin(x+۲\pi)|=\tan x-|\sin x|=f(x) \quad ✓$$

گزینه "۲":

$$f(x+\pi)=\tan(x+\pi)-\underbrace{|\sin(x+\pi)|}_{-\sin x}=\tan x-|\sin x|=f(x) \quad ✓$$

گزینه "۳":

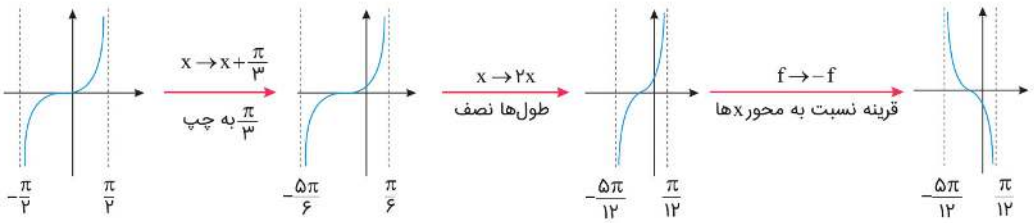
$$f(x+\frac{\pi}{۲})=\tan(x+\frac{\pi}{۲})-|\sin(x+\frac{\pi}{۲})|=-\cot x-|\cos x|=f(x) \quad \times$$

گزینه "۴":

$$f(x+\frac{\pi}{۴})=\tan(x+\frac{\pi}{۴})-|\sin(x+\frac{\pi}{۴})|=f(x) \quad \times$$

گزینه "۱" و "۲" هر دو در شرط $f(x+T)=f(x)$ صدق می‌کند، اما مقدار کوچک‌تر دوره تناوب است، پس $T=\pi$.

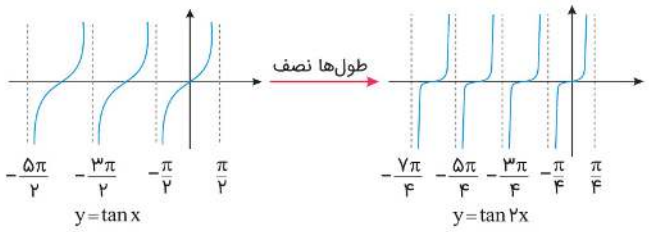
۴۳ گزینه ۱



۴۴ گزینه ۱

بررسی موارد:

مورد "الف":



باتوجه‌به اینکه تابع $f(x)=\tan ۲x$ در نقطه $x=-\frac{۳\pi}{۴}$ و $x=-\frac{۵\pi}{۴}$ از بازه $(-\frac{۴\pi}{۳}\ ,\ -\frac{\pi}{۲})$ تعریف نشده است، نمی‌تواند در این بازه صعودی باشد.

مورد "ب": دامنه تابع $f(x)=\tan(x+\frac{\pi}{۴})$ برابر است با:

$$D=\{x\in\mathbb{R}|x+\frac{\pi}{۴}=k\pi+\frac{\pi}{۲}\ ,\ k\in\mathbb{Z}\}=\{x\in\mathbb{R}|x=k\pi+\frac{\pi}{۴}\ ,\ k\in\mathbb{Z}\}$$

مورد "پ":

$$D=\{x\in\mathbb{R}|۲x+\frac{\pi}{۳}=k\pi+\frac{\pi}{۲}\ ,\ k\in\mathbb{Z}\}=\{x\in\mathbb{R}|۲x=k\pi+\frac{\pi}{۶}\ ,\ k\in\mathbb{Z}\}$$
$$=\{x\in\mathbb{R}|x=\frac{k\pi}{۲}+\frac{\pi}{۱۲}\ ,\ k\in\mathbb{Z}\}=\{x\in\mathbb{R}|x=(۶k+۱)\frac{\pi}{۱۲}\ ,\ k\in\mathbb{Z}\}$$

بنابراین تنها مورد "پ" درست است.

۴۵ گزینه ۱

$$y=\frac{\tan^{۲}\theta-\sin^{۲}\theta}{\tan^{۵}\theta(\cot^{۲}\theta-\cos^{۲}\theta)}=\frac{\frac{\sin^{۲}\theta-\sin^{۲}\theta\cos^{۲}\theta}{\cos^{۲}\theta}}{\tan^{۵}\theta(\frac{\cos^{۲}\theta-\sin^{۲}\theta\cos^{۲}\theta}{(\sin^{۲}\theta)})}=\frac{\frac{\sin^{۲}\theta(۱-\cos^{۲}\theta)}{\cos^{۲}\theta}}{\tan^{۵}\theta(\frac{\cos^{۲}\theta(۱-\sin^{۲}\theta)}{\sin^{۲}\theta})}$$

$$=\frac{\frac{\sin^{۴}\theta}{\cos^{۲}\theta}}{\tan^{۵}\theta(\frac{\cos^{۴}\theta}{\sin^{۲}\theta})}=\frac{\frac{\sin^{۶}\theta}{\cos^{۶}\theta}}{\tan^{۵}\theta}=\frac{\tan^{۶}\theta}{\tan^{۵}\theta}=\tan\theta$$

دوره تناوب $y=\tan\theta$ برابر است با $T=\pi$.

روش دوم: نکته:

$$\begin{cases}\tan^{۲}\theta-\sin^{۲}\theta=\tan^{۲}\theta\sin^{۲}\theta\\ \cot^{۲}\theta-\cos^{۲}\theta=\cot^{۲}\theta\cos^{۲}\theta\end{cases}$$

$$\Rightarrow\quad y=\frac{\tan^{۲}\theta\sin^{۲}\theta}{\tan^{۵}\theta(\cot^{۲}\theta\cos^{۲}\theta)}=\frac{\tan^{۲}\theta\sin^{۲}\theta}{\tan^{۳}\theta\cos^{۲}\theta}=\tan\theta$$

۴۶ گزینه ۱

ابتدا به‌دلیل وجود $\sqrt{x}$ باید داشته باشیم: $x\geq ۰$. حال دامنهٔ تابع y برابر است با:

$$\{x\geq ۰|\frac{\pi}{۵+\sqrt{x}}\neq k\pi+\frac{\pi}{۲}\ ,\ k\in\mathbb{Z}\}$$

باید xهایی که به ازای آن‌ها $k\in\mathbb{Z}$ و $\frac{\pi}{۵+\sqrt{x}}=k\pi+\frac{\pi}{۲}$ است را پیدا کرده و از دامنهٔ $x\geq ۰$ خارج کنیم:

$$\frac{\pi}{۵+\sqrt{x}}=k\pi+\frac{\pi}{۲}\xrightarrow{:\pi}\frac{۱}{۵+\sqrt{x}}=\frac{۲k+۱}{۲}\Rightarrow ۵+\sqrt{x}=\frac{۲}{۲k+۱}$$

$$\Rightarrow\sqrt{x}=\frac{۲}{۲k+۱}-۵\Rightarrow\sqrt{x}=\frac{-۱۰k-۳}{۲k+۱}$$

باتوجه به اینکه $\sqrt{x}$ نامنفی است، باید $\frac{-۱۰k-۳}{۲k+۱}$ نیز نامنفی باشد:

$$\frac{-۱۰k-۳}{۲k+۱}\geq ۰\Rightarrow-\frac{۱}{۲}<k\leq-\frac{۳}{۱۰}\xrightarrow{k\in\mathbb{Z}}k\in\varnothing\Rightarrow x\in\varnothing$$

بنابراین هیچ xای وجود ندارد که بخواهیم آن را از بازهٔ $x\geq ۰$ خارج کنیم، پس دامنهٔ تابع y، همان $x\geq ۰$ است.

۴۷ گزینه ۱

$$۳x\neq k\pi+\frac{\pi}{۲}\Rightarrow x\neq\frac{k\pi}{۳}+\frac{\pi}{۶}\Rightarrow x\neq\frac{(۲k+۱)\pi}{۶}$$

Homework نهایی مثلثات

۱ اگر $۵(\sin x - \cos x) = ۲\cos x + \sin x$ باشد، مقدار $\sin x.\cos x$ کدام است؟

۱) $\frac{۸۰}{۸۱}$ ۲) $\frac{۲۸}{۳۳}$

۳) $\frac{۲۸}{۶۵}$ ۴) $\frac{۷۲}{۳۷}$

۲ اگر $\sin x + \cos x = \frac{\sqrt{۶}}{۲}$ باشد، حاصل $\tan x + \frac{۱}{\tan x}$ چقدر است؟

۱) ۴ ۲) ۲

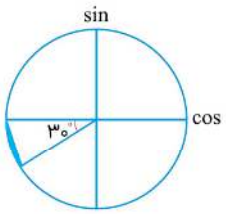
۳) $۳\sqrt{۲}$ ۴) $۲\sqrt{۳}$

۳ اگر $\cos 0 = \frac{\sqrt{۲}}{۴}$ باشد، حاصل عبارت $\cos^{۲}0 + \frac{۱}{۱+\tan^{۲}\theta} - \sin^{۲}0$ کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۸}$ ۲) $-\frac{۵}{۸}$

۳) $\frac{۷}{۸}$ ۴) $-\frac{۷}{۸}$

۴ در دایرهٔ زیر، به شعاع ۳ واحد، مساحت ناحیهٔ رنگی کدام است؟



۱) $\frac{۳\pi}{۴}$

۲) $\frac{۳\pi}{۴} - ۱$

۳) $\frac{۳}{۴}(\pi - ۳)$

۴) $\frac{۹}{۴}$

۵ اگر $\frac{۱-\sin x}{۱+\sin x} = ۴$ و کمان x در ربع سوم باشد، مقدار $\tan x$ چقدر است؟

۱) ۳ ۲) $\frac{۳}{۴}$

۳) -۳ ۴) $\frac{-۱}{۳}$

۶ اگر $\tan ۲۰^\circ = ۰/۳۶$ باشد، حاصل $\frac{\sin(۱۶۰^\circ) - \cos(۲۰۰^\circ)}{\cos(۱۱۰^\circ) + \sin(۷۰^\circ)}$ کدام است؟

۱) $\frac{۹}{۴}$ ۲) $\frac{۱۵}{۹}$

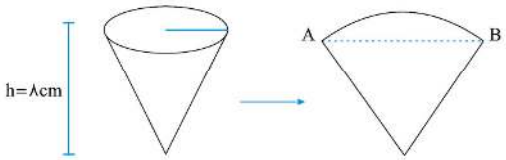
۳) $\frac{۱۷}{۸}$ ۴) $\frac{۳۱}{۱۶}$

۷ مساحت مثلثی به اضلاع ۱۵، ۲۰ و ۲۵ واحد کدام است؟

۱) $۵\sqrt{۲}$ ۲) ۱۹

۳) $۱۸\sqrt{۵}$ ۴) ۱۵۰

۸ مخروطی به شکل زیر را از کنار آن باز کرده‌ایم. اگر شعاع قاعده مخروط ۶ و ارتفاع آن ۸ باشد، اندازه پاره‌خط AB به‌صورت $y = a\sin b$ است. a و b را بیابید.



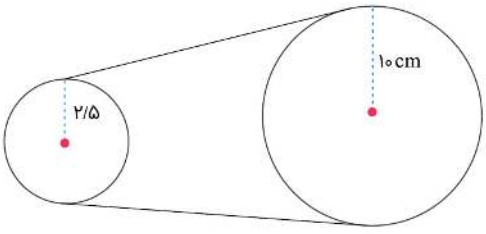
۹ اگر $\tan\alpha = -۲$ و $\cos\alpha > ۰$ باشد، مقدار $\sin\alpha$ کدام است؟

۱) $\frac{-۲\sqrt{۳}}{۳}$ ۲) $\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$

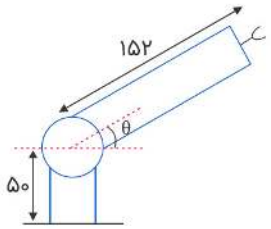
۳) $\frac{-۲\sqrt{۵}}{۵}$ ۴) $\frac{۲\sqrt{۵}}{۵}$

به سؤالات زیر پاسخ دهید.

۱۰ در شکل زیر یک سمت دو قرقره به شعاع‌های $۱۰\,cm$ و $۲/۵\,cm$ را به هم متصل کرده است. اگر قرقره بزرگ‌تر $\frac{\pi}{۲}$ رادیان دوران کند، قرقره کوچک‌تر چند رادیان دوران می‌کند؟



۱۱ در شکل زیر، ارتفاع نوک گیرهٔ روبات تا سطح زمین ۱۲۶ سانتی‌متر می‌باشد، مقدار θ برحسب رادیان کدام است؟ $(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2})$



۱) $\frac{\pi}{3}$

۲) $\frac{\pi}{6}$

۳) $\frac{\pi}{4}$

۴) $\frac{\pi}{12}$

۱۲ انتهای کمان ۱۲ رادیان در کدام ناحیهٔ مثلثاتی قرار می‌گیرد؟

۱) اول ۲) دوم

۳) سوم ۴) چهارم

۱۳ اگر α در ناحیهٔ سوم مثلثاتی باشد و $\sin\alpha = \frac{-2}{\sqrt{5}}$، مقدار $\cot\alpha$ کدام است؟

۱) $-\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{2}$

۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $-\frac{3}{2}$

۱۴ حاصل $A = \cos\frac{14\pi}{17} + \cos\frac{10\pi}{17} + \cos\frac{7\pi}{17} + \cos\frac{3\pi}{17}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) -1

۳) ۱ ۴) $\frac{1}{2}$

۱۵ اگر $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ باشد، حاصل عبارت $[\cos x] + [\sin x]$ کدام است؟ ([ ] نماد جزء صحیح است)

۱) ۲ ۲) ۱

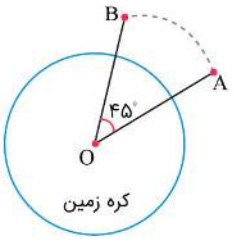
۳) -2 ۴) -1

۱۶ بُرد تابع $y = 2\sin(\frac{3\pi}{2} + x) + 1$ از چند عدد صحیح تشکیل شده است؟

۱) ۲ ۲) ۳

۳) ۴ ۴) ۵

۱۷ ماهواره‌ای در یک مسیر دایره‌ای در فاصلهٔ ۶۰۰ کیلومتری سطح زمین در حال حرکت است. باتوجه‌به شکل زیر، مسافت پیموده‌شدهٔ ماهواره وقتی از نقطهٔ A به نقطهٔ B می‌رسد چقدر است؟ ($R_e = ۶۴۰۰\,km$ شعاع زمین)



۱) ۳۵۰۰π

۲) ۳۱۵۰π

۳) ۲۷۵۰π

۴) ۱۷۵۰π

۱۸ انتهای کمان ۹ رادیان در کدام ناحیهٔ مثلثاتی قرار می‌گیرد؟

۱) اول ۲) دوم

۳) سوم ۴) چهارم

۱۹ حاصل عبارت $\frac{\cos ۲\alpha}{\tan\alpha + \cot\alpha}$ به ازای $\alpha = \frac{\pi}{۱۶}$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۴}$ ۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۴}$

۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۸}$ ۴) $\frac{\sqrt{۲}}{۸}$

۲۰ حاصل عبارت $\sin^۳x.\cos x - \cos^۳x.\sin x$ به ازای $x = \frac{\pi}{۲۴}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۸}$ ۲) $-\frac{۱}{۸}$

۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۸}$ ۴) $\frac{-\sqrt{۳}}{۸}$

پاسخ Homework نهایی مثلثات

۱ گزینه ۳

$$۵\sin x - ۵\cos x = ۲\cos x + \sin x \Rightarrow \ ۴\sin x = ۷\cos x \ \Rightarrow \begin{cases} \tan x = \frac{۷}{۴} \\ \cot x = \frac{۴}{۷} \end{cases}$$

می‌دانیم:

$$\tan x + \cot x = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sin^۲ x + \cos^۲ x}{\sin x \cdot \cos x} = \frac{۱}{\sin x \cdot \cos x}$$

$$\frac{۱}{\sin x \cdot \cos x} = \frac{۷}{۴} + \frac{۴}{۷} = \frac{۶۵}{۲۸} \Rightarrow \ \sin x \cdot \cos x = \frac{۲۸}{۶۵}$$

۲ گزینه ۱

$$\sin x + \cos x = \frac{\sqrt{۶}}{۲} \Rightarrow (\sin x + \cos x)^۲ = \frac{۶}{۴}$$

$$\Rightarrow ۱ + ۲\sin x.\cos x = \frac{۳}{۲} \Rightarrow \sin x.\cos x = \frac{۱}{۴}$$

$$\tan x + \frac{۱}{\tan x} = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sin^۲ x + \cos^۲ x}{\sin x.\cos x}$$

$$= \frac{۱}{\sin x.\cos x} = ۴$$

۳ گزینه ۲

می‌دانیم: $۱ + \tan^۲\theta = \frac{۱}{\cos^۲\theta}$

$$\cos^۲\theta + \frac{۱}{۱ + \tan^۲\theta} - \sin^۲\theta = \cos^۲\theta + \cos^۲\theta - \sin^۲\theta$$

$$= ۲\cos^۲\theta - (۱ - \cos^۲\theta) = ۳\cos^۲\theta - ۱ = ۳ \times \frac{۲}{۱۶} - ۱ = \frac{-۵}{۸}$$

۴ گزینه ۳

با محاسبهٔ مساحت این بخش از دایره و کم کردن مساحت مثلث از آن مساحت قسمت رنگی به دست می‌آید:

$$\frac{۳۶۰^\circ}{۳۰^\circ} = ۱۲ \Rightarrow \frac{S_{\text{دایره}}}{۱۲} = S_{\text{موردنظر}} = \frac{\pi r^۲}{۱۲} = \frac{۹\pi}{۱۲} = \frac{۳\pi}{۴}$$

$$S_{\text{مثلث}} = \frac{۱}{۲} \times ۳ \times ۳ \times \sin ۳۰ = \frac{۱}{۲} \times ۳ \times ۳ \times \frac{۱}{۲} = \frac{۹}{۴}$$

$$S_{\text{قسمت رنگی}} = \frac{۳\pi}{۴} - \frac{۹}{۴} = \frac{۳}{۴}(\pi - ۳)$$

۵ گزینه ۲

$$\frac{۱ - \sin x}{۱ + \sin x} = ۴ \Rightarrow ۴ + ۴\sin x = ۱ - \sin x \Rightarrow \sin x = \frac{-۳}{۵}$$

$$\xrightarrow{\text{ربع سوم}} \cos x = \frac{-۴}{۵} \Rightarrow \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{۳}{۴}$$

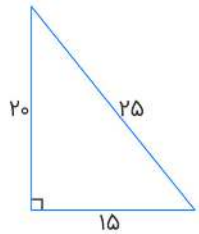
۶ گزینه ۳

$$\frac{\sin(\pi - ۲۰^\circ) - \cos(\pi + ۲۰^\circ)}{\cos(\frac{\pi}{۲} + ۲۰^\circ) + \sin(\frac{\pi}{۲} - ۲۰^\circ)} = \frac{\sin ۲۰^\circ + \cos ۲۰^\circ}{-\sin ۲۰^\circ + \cos ۲۰^\circ}$$

$$\xrightarrow{\div \cos ۲۰^\circ} \frac{\tan ۲۰^\circ + ۱}{-\tan ۲۰^\circ + ۱} = \frac{۰/۳۶ + ۱}{-۰/۳۶ + ۱} = \frac{۱/۳۶}{۰/۶۴} = \frac{۱۷}{۸}$$

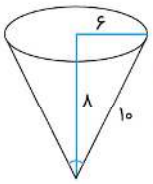
۷ گزینه ۴

باتوجه‌به رابطهٔ فیثاغورس و روابط بین اضلاع داده‌شده، می‌توان دریافت که این مثلث یک مثلث قائم‌الزاویه است.

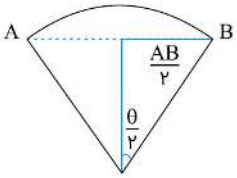


$$S = \frac{۲۰ \times ۱۵}{۲} = ۱۵۰$$

۸



$$\text{محیط} = ۲\pi r = ۲\pi \times ۶ = ۱۲\pi$$
$$r\theta = L \Rightarrow ۱۰\theta = ۱۲\pi \Rightarrow \theta = \frac{۶\pi}{۵}$$



$$\sin\frac{۳\pi}{۵} = \frac{\frac{AB}{۲}}{۱۰} \Rightarrow AB = ۲۰\sin\frac{۳\pi}{۵}$$
$$\Rightarrow a = ۲۰, \quad b = \frac{۳\pi}{۵}$$

۹

گزینه ۳

$$\left.\begin{matrix}\tan\alpha = -۲ < ۰ \\ \cos\alpha > ۰\end{matrix}\right\} \Rightarrow \alpha \text{ در ناحیهٔ چهارم مثلثاتی قرار دارد}$$

$$۱ + \tan^۲\alpha = \frac{۱}{\cos^۲\alpha} \Rightarrow ۱ + (-۲)^۲ = \frac{۱}{\cos^۲\alpha}$$
$$\frac{۱}{\cos^۲\alpha} = ۵ \Rightarrow \cos^۲\alpha = \frac{۱}{۵} \Rightarrow |\cos\alpha| = \frac{۱}{\sqrt{۵}} \xrightarrow{\cos\alpha > ۰} \cos\alpha = \frac{۱}{\sqrt{۵}}$$

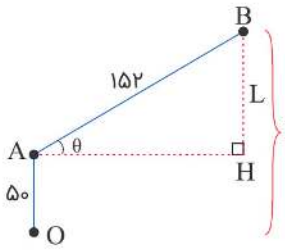
$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow -۲ = \frac{\sin\alpha}{\frac{۱}{\sqrt{۵}}} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{-۲}{\sqrt{۵}} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{-۲\sqrt{۵}}{۵}$$

پاسخ سؤال ۱۰

۱۰

$$L_۱ = L_۲ \Rightarrow r_۱\theta_۱ = r_۲\theta_۲$$
$$\theta_۱ \times ۲/۵ = \frac{\pi}{۲} \times ۱۰$$
$$\theta_۱ \times \frac{۵}{۲} = \frac{\pi}{۲} \times ۱۰ \Rightarrow \theta_۱ = ۲\pi$$

۱۱ گزینه ۲



$$h\sin\theta = \frac{L}{۱۵۲} \Rightarrow L = ۱۵۲\sin\theta$$

$$h = ۵۰ + L = ۵۰ + ۱۵۲\sin\theta$$

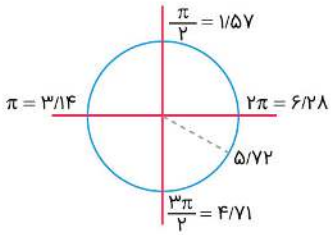
$$۱۲۶ = ۵۰ + ۱۵۲\sin\theta \Rightarrow \sin\theta = \frac{۷۶}{۱۵۲} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{۶}$$

۱۲ گزینه ۴

یک دور دایره $۲\pi = ۶/۲۸$ رادیان است، پس:

$$\begin{array}{r|l} ۱۲ & ۶/۲۸ \\ \hline & ۱ \\ \vdots & \\ \hline ۵/۷۲ & \end{array}$$

$$۱۲ \text{ رادیان} = \underbrace{۶/۲۸}_{\text{یک دور دایره}} + \underbrace{۵/۷۲}_{\text{ناحیهٔ چهارم}}$$



۱۳ گزینه ۲

$$۱+\cot^۲\alpha=\frac{۱}{\sin^۲\alpha}\Rightarrow ۱+\cot^۲\alpha=\frac{۱}{\frac{۴}{۵}}$$

$$۱+\cot^۲\alpha=\frac{۵}{۴}\Rightarrow \cot^۲\alpha=\frac{۱}{۴}\xrightarrow[\cot\alpha>۰]{\alpha\text{ ناحیهٔ سوم}}\cot\alpha=\frac{۱}{۲}$$

۱۴ گزینه ۱

می‌دانیم:

$$\hat{\alpha}+\hat{\beta}=\pi\Rightarrow\cos\alpha+\cos\beta=۰$$

$$\left.\begin{array}{l}\frac{۳\pi}{۱۷}+\frac{۱۴\pi}{۱۷}=\pi\Rightarrow\cos\frac{۳\pi}{۱۷}+\cos\frac{۱۴\pi}{۱۷}=۰\\ \frac{۷\pi}{۱۷}+\frac{۱۰\pi}{۱۷}=\pi\Rightarrow\cos\frac{۷\pi}{۱۷}+\cos\frac{۱۰\pi}{۱۷}=۰\end{array}\right\}\Rightarrow A=۰$$

۱۵ گزینه ۴

$$\frac{\pi}{۲}<x<\pi\Rightarrow ۰<\sin x<۱\Rightarrow[\sin x]=۰$$

$$\frac{\pi}{۲}<x<\pi\Rightarrow -۱<\cos x<۰\Rightarrow[\cos x]=-۱$$

حاصل عبارت $=۰+(-۱)=-۱$

۱۶ گزینه ۴

$$\sin(\frac{۳\pi}{۲}+x)=-\cos x$$

$$y=-۲\cos x+۱$$

$$-۱\le\cos x\le ۱\Rightarrow -۲\le -۲\cos x\le ۲\Rightarrow -۱\le -۲\cos x+۱\le ۳$$

$$R_f=[-۱,۳]$$

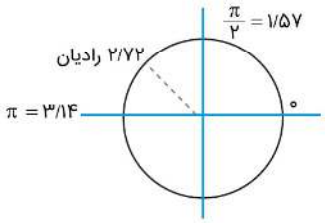
۱۷ گزینه ۴

$\alpha=۴۵^\circ\Rightarrow\alpha=\frac{\pi}{۴}$ رادیان

$$\overset{\frown}{AB}=l=r.\alpha\Rightarrow l=(۶۴۰۰+۶۰۰)\frac{\pi}{۴}\Rightarrow l=۱۷۵۰\pi\,km$$

۱۸ گزینه ۲

یک دور دایره $۶/۲۸ \simeq ۲\pi$ رادیان است، پس:



$$\begin{array}{r|l} ۹ & ۶/۲۸ \\ \hline \vdots & \\ \hline ۲/۷۲ & \end{array}$$

۱۹ گزینه ۴

یادآوری:

$$\tan\alpha + \cot\alpha = \frac{۲}{\sin ۲\alpha}$$

$$\frac{\cos ۲\alpha}{\tan\alpha + \cot\alpha} = \frac{\cos ۲\alpha}{\frac{۲}{\sin ۲\alpha}} = \frac{۱}{۲}\sin ۲\alpha\cos ۲\alpha = \frac{۱}{۲}(\frac{۱}{۲}\sin ۴\alpha) = \frac{۱}{۴}\sin ۴\alpha$$

$$\xrightarrow{\alpha=\frac{\pi}{۱۶}} \frac{۱}{۴}\sin\frac{\pi}{۴} = \frac{\sqrt{۲}}{۸}$$

۲۰ گزینه ۲

$$\sin x.\cos x(\sin^۲ x - \cos^۲ x) = \frac{۱}{۲}\sin ۲x.(-\cos ۲x) = -\frac{۱}{۲}\sin ۲x.\cos ۲x$$

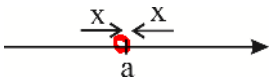
$$= -\frac{۱}{۲}(\frac{۱}{۲}\sin ۴x) = -\frac{۱}{۴}\sin ۴x \underset{x=\frac{\pi}{۲۴}}{=} -\frac{۱}{۴}\sin\frac{\pi}{۶} = -\frac{۱}{۸}$$

یادآوری:

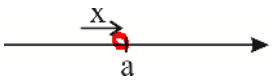
$$\cos^۲ x - \sin^۲ x = \cos ۲x$$

حد و پیوستگی

۱) وقتی می‌گوییم x میل می‌کند به سمت عدد a (و این‌جوی می‌نویسیمش: $x \to a$) منظورمان این است که x روی محور اعداد در یک همسایگی محذوف a بسیار به a نزدیک می‌شود، یعنی x تقریباً برابر a است؛ این شکلی:

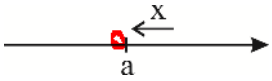


۲) وقتی می‌گوییم x از سمت چپ به a میل می‌کند (که این‌جوری می‌نویسیمش: $x \to a^-$) منظورمان این است که x روی محور اعداد از سمت اعداد کوچک‌تر از a به آن نزدیک می‌شود؛ این شکلی:



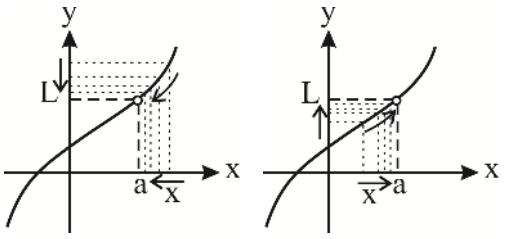
$\lim_{x \to a^-} f(x) = L_1$ حد چپ

۳) وقتی می‌گوییم x از سمت راست به a میل می‌کند (که این‌جوری می‌نویسیمش: $x \to a^+$) منظورمان این است که x روی محور اعداد از سمت اعداد بزرگ‌تر از a به آن نزدیک می‌شود؛ این شکلی:



$\lim_{x \to a^+} f(x) = L_2$ حد راست

حالا بیایید حد را از روی نمودار تابع بررسی کنیم:

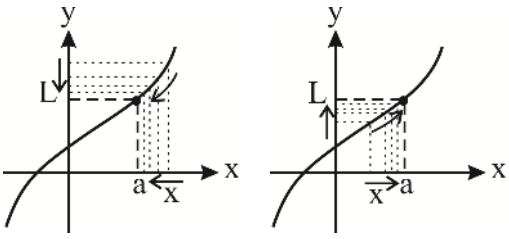


(ب)

تابع در همسایگی راست و چپ a تعریف شده

حد چپ = حد راست

تابع در $x = a$ حد دارد

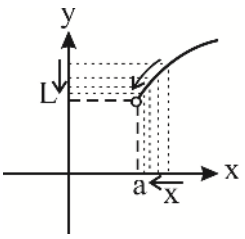


(الف)

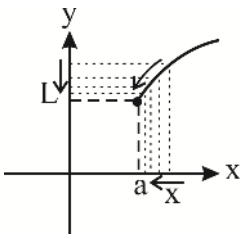
تابع در همسایگی راست و چپ a تعریف شده

حد چپ = حد راست

تابع در $x = a$ حد دارد.



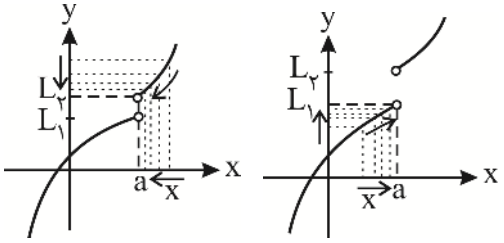
(ث)



(ت)

تابع در همسایگی راست a تعریف شده

تابع در $x = a$ حد راست دارد ولی کلاً در این نقطه حد ندارد.

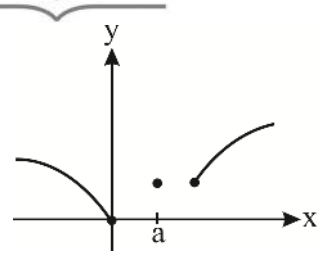


(پ)

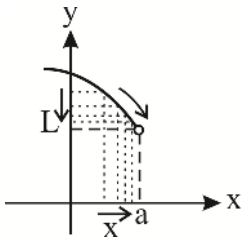
تابع در همسایگی راست و چپ a تعریف شده

حد چپ ≠ حد راست

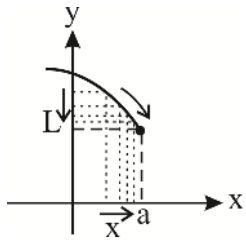
تابع در $x = a$ حد ندارد.



(ح)



(چ)



(ج)

تابع در همسایگی چپ a تعریف شده

تابع در $x = a$ حد چپ دارد ولی کلاً در این نقطه حد ندارد.

تابع در هیچ همسایگی a تعریف نشده و در $x = a$ حد ندارد.

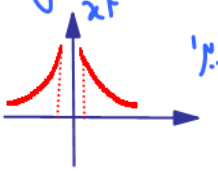
وقتی می‌خواهیم ببینیم یک تابع وقتی $x \to a$ حد دارد یا نه، مهم‌ترین موضوع بررسی دامنه‌ی تابع است، البته لازم نیست تمام دامنه را پیدا کنیم. منظورمان این است که باید ببینیم آیا تابع در یک همسایگی راست یا چپ نقطه‌ی a تعریف شده یا نه، یعنی کافی است وضعیت تابع را در اطراف نقطه‌ی a بررسی کنیم.

اگر تابع در همسایگی راست و چپ نقطه‌ی $x = a$ تعریف شده باشد وقتی حد دارد که حد راست تابع برابر حد چپ آن باشد.

سوال ۱: جواب حد از جنس عدد است

حد در نقطه‌ی x_0 یعنی با فرض نزدیک شدن x ها از دو طرف نقطه x_0 و بدون توجه به خود نقطه x_0 کاری نداریم.

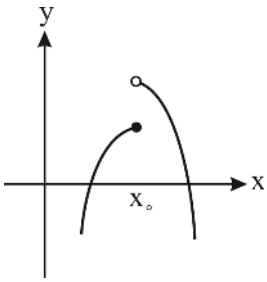
حد در صورت وجود باید یکتا و عدد باشد مثلاً حد نمی‌تواند هم ۱ باشد هم ۲ یا ۱۰۰ و ... باید یکتا باشد مثلاً $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2} = +\infty$



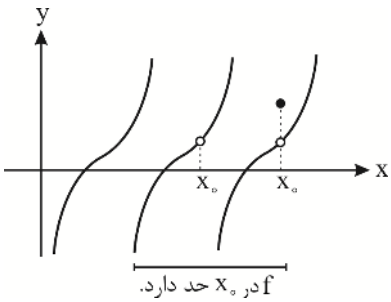
حد چپ و راست در $x=0$ هر دو $+\infty$ شده است ولی تابع در $x=0$ حد ندارد زیرا $+\infty$ عدد حساب نیست.

جهش تابع: $(\Delta L = |L_2 - L_1|)$

اگر $f(x)$ در x_0 حد نداشته باشد، در x_0 دچار جهش می‌شود.



تابع در x_0 جهش دارد $\equiv$ در x_0 حد ندارد

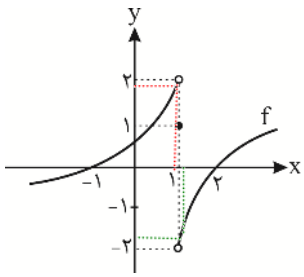


تابع در x_0 جهش ندارد $\equiv$ در x_0 حد دارد

بالا یا پایین پریدن یک نقطه یا حذف یک نقطه، جهش محسوب نمی‌شود و تابع در آن نقطه حد دارد.

(!) وقتی حد را از روی نمودار می‌پرسند، حد چپ و راست را جداگانه پیدا می‌کنیم.

تمرین: در شکل روبه‌رو، حاصل $f(1)+\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)-\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ کدام است؟



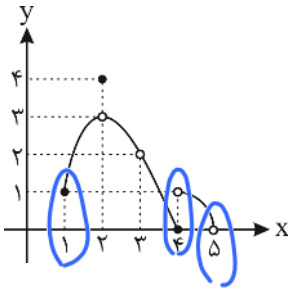
۱) ۱

۲) ۳

۳) ۵ ✓

۴) وجود ندارد.

تمرین: نمودار تابع f به صورت مقابل می‌باشد. تابع f در چند نقطه حد ندارد؟



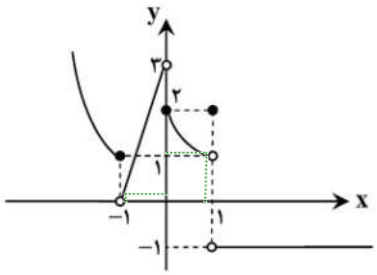
۱) صفر

۲) ۱

۳) ۲

۴) ۳ ✓

تمرین: نمودار تابع $f(x)$ به شکل زیر است. حاصل $\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x)+\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ کدام است؟



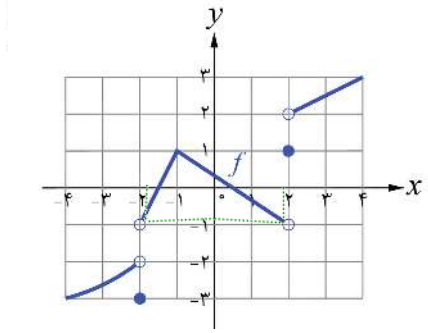
۱) ۱ ✓

۲) ۲

۳) ۳

۴) ۴

تمرین: با توجه به شکل، حاصل $\lim\limits_{x\to 1^+}(f(3-x)+f(x-3))$ کدام است؟



$\lim_{x\to a} f(g(x))$ = آیا $g(x)$ به چه حدی نزدیک می‌شود؟

$\lim_{x\to a} f(g(x)) \cdot f(\lim_{x\to a} g(x))$ = حد $g(x)$ وقتی x به a نزدیک می‌شود

۱) ۱
۲) ۲- ✓
۳) ۳-
۴) صفر

$\lim_{x\to 1^+} f(3-x=3-1^+=2^-) = -1$

$x\to 1^+ = 1+\varepsilon$, $f(3-(1+\varepsilon)) = 3-1-\varepsilon = 2-\varepsilon$

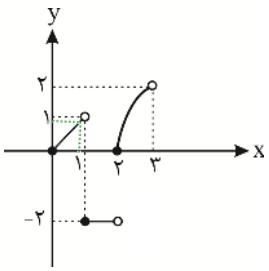
$\lim_{x\to 1^+} f(x-3=1^+-3=(-2)^+) = -1$

$x\to 1^+ = 1+\varepsilon$

مجموع = ۲-

$f(1+\varepsilon-3=-2+\varepsilon) = -1$ اپسیلون مثبت ریز

تمرین: نمودار تابع f به صورت شکل مقابل است. حاصل $\lim_{x\to 2^+} f(\frac{1}{2x-3})$ کدام است؟

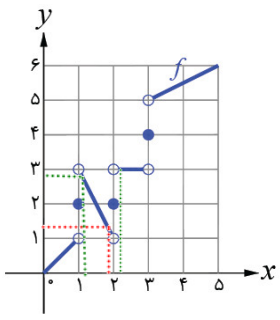


۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۲-

$f\left(\frac{1}{2(2^+)-3=4^+-3=1^+}=\frac{1}{1^+}=1^-\right)=f(1^-)=1$

کسر کمتر از واحد (یک)

تمرین: با توجه به شکل، مجموع حدهای راست و چپ تابع fof در $x\to 2$ کدام است؟



۱) ۵
۲) ۶
۳) ۷
۴) ۸

$\lim_{x\to 2^+} f(f(2^+)=3^-)=4$

$\lim_{x\to 2^-} f(f(2^-)=1^+)=3$

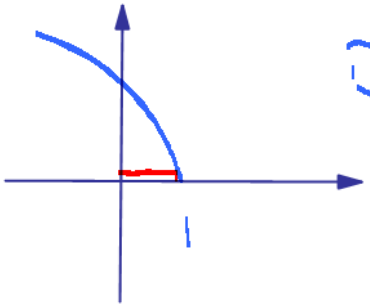
± 7

تذکر مهم: اگر $x\to a$ سر یا ته راضه تعریف تابع باشد (سر و ته راضه) تابع یکی از حدهای چپ یا راست حد را نمی‌دهد.

تمرین: در مورد حد تابع $f(x)=\sqrt{1-x}$ در $x=1$ چه می‌توان گفت؟ حد ندارد، زیرا در راست $x=1$ تعریف نشده است.

$1-x\geq 0$

$1\geq x$



$D_f = (-\infty, 1]$

$\lim_{x \to 1} \sqrt{1-x}$ $\begin{cases} x \to 1^+ & \text{حد ندارد} \\ x \to 1^- & \sqrt{1-1^-} = 0 \end{cases}$

تمرین: در کدام نقطه حدهای راست و چپ تابع $f(x) = \sqrt{x^2 - x} + \sqrt{2x - x^2}$ هیچ‌کدام وجود ندارند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) صفر ۴) $\frac{3}{2}$

$x^2 - x = x(x-1) \geq 0$ | + ۰ − ۱ +

$2x - x^2 = x(2-x) \geq 0$ | − ۰ + ۲ −

Single Points: صفر

$D_f = \{0\} \cup [1, 2]$

نکته: $y = \sqrt{u}$ در ریشه‌های u حد ندارد.

مثلاً $y = \sqrt{x-7}$ در $x = 7$ حد ندارد. $D: [7, +\infty)$

تمرین: تابع $f(x) = \sqrt{x - 3 + 2b}$ در $x = a$ حد ندارد، ولی $f(a) = 2 - b$. مقدار $2a + 3b$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۲- ۳) ۶ ۴) ۴

$a - 3 + 2b = 0$: a ریشه زیر رادیکال

$a - 3 + 2(2) = 0 \quad a = -1$

$2a + 3b = 2(-1) + 3(2) = 4$

$f(a) = \sqrt{a - 3 + 2b} = 2 - b$

$2 - b$ صفر

$b = 2$

(۲) وقتی حد در نقطهٔ مرزی (نقطهٔ تغییر ضابطه) پرسیده می‌شود، حد چپ و راست را در آن نقطه جداگانه پیدا می‌کنیم. به طور کلی در توابع دو و یا چند ضابطه‌ای همیشه به نقطهٔ مرزی توجه ویژه‌ای می‌کنیم چون تابع در این نقطه از لحاظ حددار بودن مشکوک است.

تمرین: به ازای کدام مجموعه مقادیر a، تابع با ضابطهٔ $f(x) = \begin{cases} (x+a)^2 & x \geq -1 \\ 2x+1 & x < -1 \end{cases}$ در نقطهٔ $x = -1$ حد دارد؟

۱) $\{0\}$ ۲) $\{2\}$ ۳) $\varnothing$ ۴) $\mathbb{R}$

بعد تغییر ضابطه

شرط حد داشتن: $l_1 = l_2$

$l_1 = \lim_{x \to (-1)^-} 2x + 1 = -1$ $=$ $\lim_{x \to (-1)^+} (x+a)^2 = (-1+a)^2 = l_2$

$a \in \varnothing$ هیچ عدد حقیقی که مجذور آن برابر -1 شود نیست.

تمرین: اگر تابع $f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 1 & x > 2 \\ ax - b & x < 2 \end{cases}$ در $x = 2$ حد داشته باشد و $\lim_{x \to -1} f(x) = 4$ باشد، مقدار $a - b$ کدام است؟

۱) $\frac{26}{3}$ ۲) -4 ۳) ۱۱ ۴) $-\frac{11}{3}$

$\lim_{x\to -1} f(x) = ax - b = 4 \Rightarrow -a - b = 4$

$\lim_{x\to 2} f(x)$: $x \to 2^+ \Rightarrow 3x^2 - 1 = 3(2)^2 - 1 = 11$

$x \to 2^- \Rightarrow ax - b = 2a - b$

واضحه که ضابطه دوم برقرار است

$2a - b = 11$

$-a - b = 4$

$3a = 7 \Rightarrow a = \frac{7}{3}$

$a + b = -4 \Rightarrow b = -4 - \frac{7}{3} = -\frac{19}{3}$

$a - b = \frac{7}{3} - \left(-\frac{19}{3}\right) = \frac{26}{3}$ گزینه ۴

(۳) در توابع چندجمله‌ای به شکل $f(x) = ax^n + bx^{n-1} + \cdots + c$ یا توابع مثلثاتی $f(x) = \sin^n x$ و $f(x) = \cos^n x$ و $y = a^x$ و توابعی به شکل $f(x) = |ax^n + bx^{n-1} + \cdots + c|$ و $f(x) = \sqrt[2n+1]{ax^n + bx^{n-1} + \cdots + c}$، تابع در تمام نقاط دامنه‌اش (یعنی $\mathbb{R}$) حد دارد و حد تابع برابر مقدار تابع است. و با جاگذاری به دست می‌آید.

تعریف حددار بودن

اگر حد چپ و راست در x_0 متناهی و موجود و برابر باشد، تابع را در x_0 حددار گوییم (عدد برابر)، یعنی مثلاً اگر حد چپ و راست هر دو $+\infty$ شد، گوییم تابع در $x = 0$ حد متناهی ندارد، بلکه حد نامتناهی دارد.

در محاسبه‌ی حد، عمل جاگذاری و عمل چپ و راست را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

در حدهای معمولی (حد توابع پیوسته) مثل محاسبه‌ی حد چندجمله‌ای‌ها در یک نقطه از عمل جاگذاری استفاده می‌شود:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{3 + |x|}{|2 - x| + 1} = \frac{4}{2} = 2$$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{3}} \cos^2 x = \frac{1}{4}$$

$$\lim_{x\to 1} x^3 + 2x = 1 + 2 = 3$$

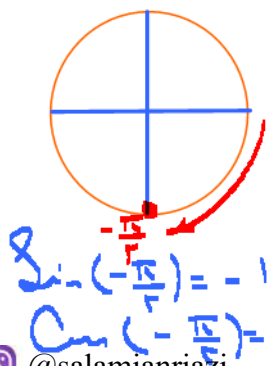
تمرین: حد زیر را محاسبه کنید.

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{6}} (\tan 2x + \sin 3x) =$$

$\tan\left(2\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$ + $\sin\left(3\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{2}\right) = 1 = \sqrt{3} + 1$

تمرین: حد تابع $y = \frac{\sin^2 x + 2\cos x}{2\sin^2 x - \cos x}$ وقتی $x \to -\frac{\pi}{2}$ کدام است؟

۱) -2 ۲) 2 ۳) $\frac{1}{2}$ ✓ ۴) $-\frac{1}{2}$



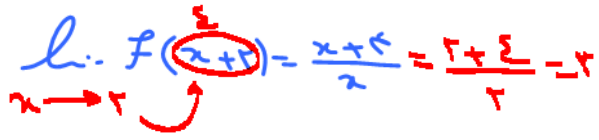
$\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$

$\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$

$\frac{(-1)^2 + 2(0)}{2(-1)^3 - 0} = \frac{1}{2}$

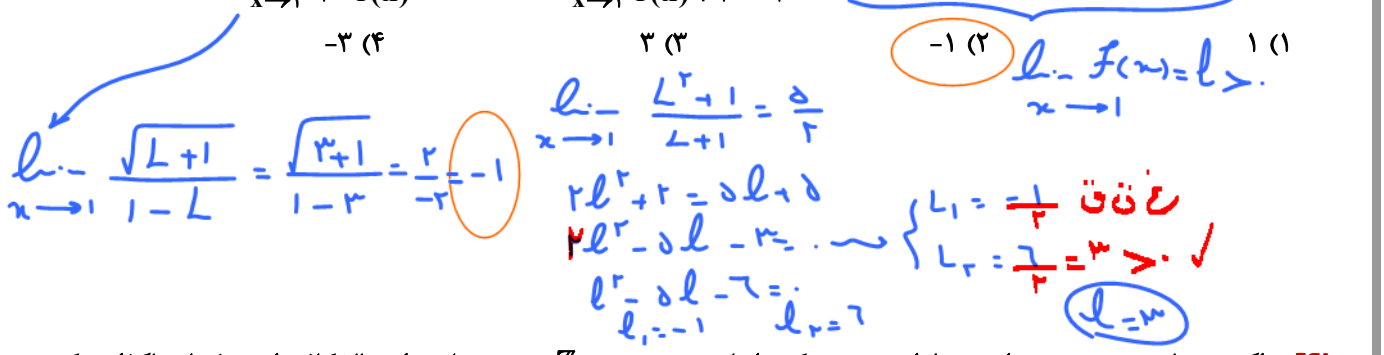
تمرین: اگر $f(x+2)=\frac{x+4}{x}$ حاصل $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۲/۵ ۴) ۳/۵



تمرین: اگر تابع f در نقطهٔ $x=1$ دارای حد نامنفی و $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f^2(x)+1}{f(x)+1}=\frac{5}{2}$ باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{f(x)+1}}{1-f(x)}$ برابر کدام است؟

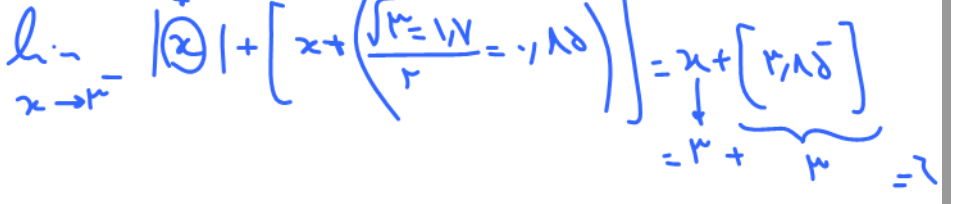
۱) ۱ ۲) -۱ ۳) ۳ ۴) -۳



نکته: اگر حد تابع جزء صحیح را در نقطه‌ای بپرسند که داخل جزء صحیح، $\mathbb{Z}$ نشود، مثل موارد بالا کافی است فقط جاگذاری کنید.

تمرین: اگر $f(x)=|x|+[x+\frac{\sqrt{3}}{2}]$ باشد، حد چپ در $x=3$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۴



(۴) توابع شامل جزء صحیح

هرگاه داخل جزء صحیح، $\mathbb{Z}$ شود باید حد چپ و راست را جداگانه پیدا کنیم مگر آن که خود طراح فقط حد چپ یا راست را بپرسد. جلوتر نیز در قسمت حدهای $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$، به جزء صحیح برخورد می‌کنیم که بیشتر در موردش صحبت خواهیم کرد.

تمرین: حاصل $\lim\limits_{x\to 0}[x]\dfrac{\cos x}{2+\sin x}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $-\frac{1}{2}$ ۴) موجود نیست.

$x\to 0^+$ $([0^+]=0)\left(\frac{\cos 0=1}{2+\sin x}\to\frac{1}{2}\right)=0=l_1$

$x\to 0^-$ $([0^-]=-1)\left(\frac{\cos 0=1}{2+0}=\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}=l_2$

$l_1\neq l_2$ حد ندارد

تمرین: حاصل $\lim\limits_{x\to(-2)^-}x[x][x^2]$ کدام است؟

۱) ۱۸- ۲) ۱۸ ۳) ۲۴- ۴) ۲۴

$x\to(-2)^-$ $(-2)\underbrace{[(-2)^-=-2,1]}_{(-2)(-3)}\underbrace{[(-2,1)^2=4,\dots]}_{4}=24$

$-2,1$ بین -3 و -2 $\Rightarrow$ -2 $\Rightarrow$ $-2-4$

تمرین: حاصل $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x^2+[x]}{[-x]}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۲- ۴) ۳-

$x\to 2^+=2,1$ $\dfrac{(2)^2+[2^+]=4+2=6}{[-2,1]=-3}=-2$

تمرین: مجموع حد راست و چپ تابع $y=[x]+[2x]$ وقتی $x\to-\frac{1}{2}$ کدام است؟

۱) ۴- ۲) ۶- ۳) ۵- ۴) ۳-

$-\frac{1}{2}$ بین -1 و -2

$x\to(-\frac{1}{2})^-$ $([(-\frac{1}{2})^-]=-1)+([2(-\frac{1}{2}-\varepsilon)=-1-2\varepsilon]=-2)=-3$

$x\to(-\frac{1}{2})^+$ $([(-\frac{1}{2})^+]=-1)+([2(-\frac{1}{2}+\varepsilon)=-1+2\varepsilon]=-1)=-2$

مجموع $=-5$

تمرین: برای کدام a تابع $f(x)=[x]^2-3[x]$ در $x=a$ حد دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ($a\in\mathbb{Z}$) ۳) ۳ ۴) ۴

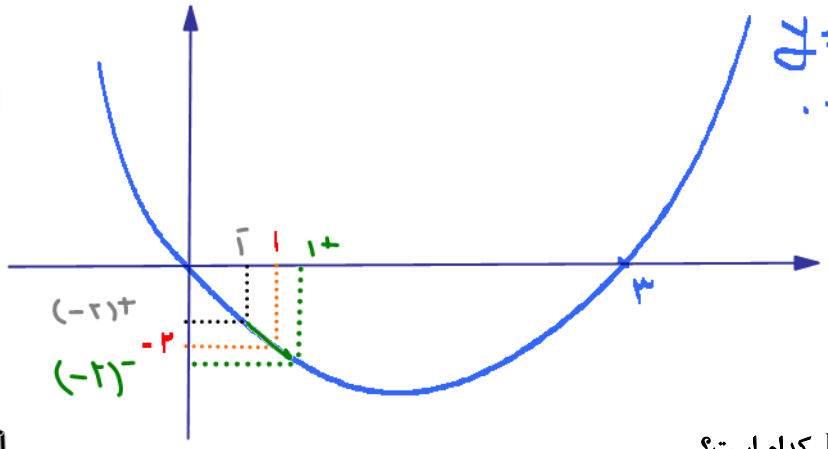
$x\to a^+$ $[a^+]^2-3[a^+]=a^2-3a=l_1$

$x\to a^-$ $[a^-]^2-3[a^-]=(a-1)^2-3(a-1)=l_2$

$l_1=l_2\rightsquigarrow a^2-2a+1-3a+3=a^2-39$ $\Rightarrow a=2$

$^n\varepsilon\approx\varepsilon$

$\varepsilon^{n\in\mathbb{N}}<\varepsilon$



راه ① به کمک رسم تابع نمودار

$\begin{cases} x \to 1^+ & [(-2)^-] = -3 \\ x \to 1^- & [(-2)^+] = -1 \end{cases}$

تمرین: حاصل $\lim\limits_{x\to 1}[x^2 - 3x]$ کدام است؟

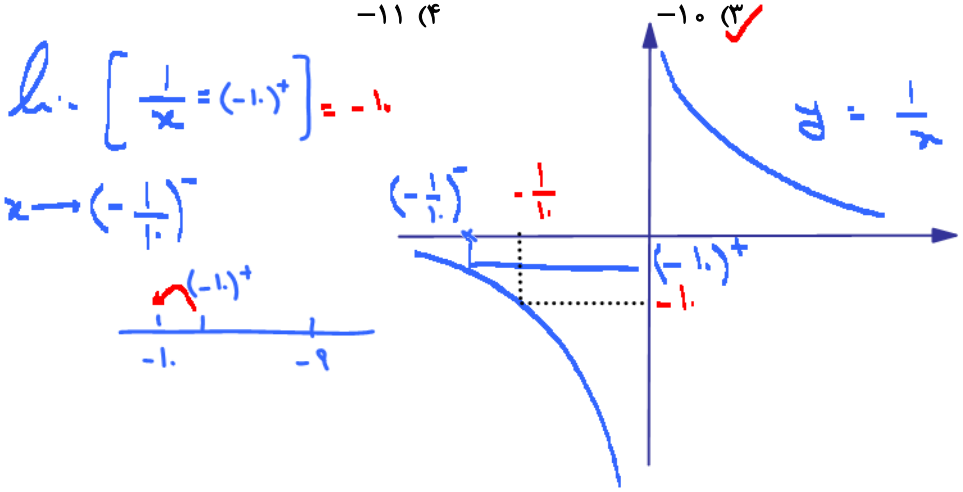
۱) صفر ۲) ۲− ۳) ۳− ۴) حد ندارد. ✓

راه ② : به کمک ع :

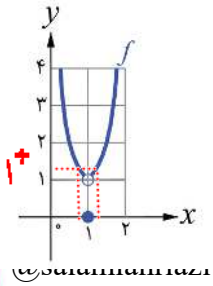
$\begin{cases} x \to 1^+ = 1+\varepsilon & [x^2-3x = (1+\varepsilon)^2 - 3(1+\varepsilon) = 1+2\varepsilon+\varepsilon^2-3-3\varepsilon = -2+[\varepsilon^2-\varepsilon] = -3] \\ x \to 1^- = 1-\varepsilon & [x^2-3x = (1-\varepsilon)^2 - 3(1-\varepsilon) = 1-2\varepsilon+\varepsilon^2-3+3\varepsilon = -2+[\varepsilon^2+\varepsilon] = -2] \end{cases}$

تمرین: در تابع $y = [\frac{1}{x}]$ وقتی $x \to -\frac{1}{10}$ حد چپ کدام است؟

۱) ۱۱ ۲) ۹− ۳) ۱۰− ✓ ۴) ۱۱−



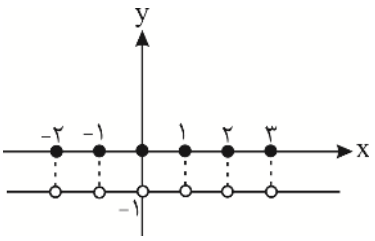
تمرین: با توجه به شکل، حاصل $\lim\limits_{x\to 1}[\frac{2}{f(x)}]$ برابر کدام است؟



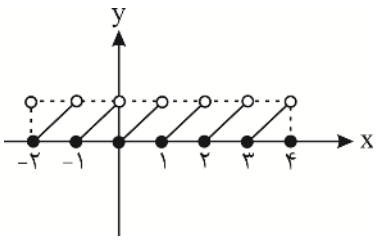
۱) ۱ ✓
۲) ۲
۳) صفر
۴) وجود ندارد.

دو تابع مهم

با دو تابع از این تابع‌ها خیلی سروکار دارید:



$$(۲)\ f(x)=[x]+[-x]$$



$$(۱)\ f(x)=x-[x]$$

حالا به نمودار $f(x)=[x]+[-x]$ نگاه کنید. از روی نمودار معلوم است که در تمام نقاط $\mathbb{R}$، حد تابع برابر (-۱) است.

تمرین: حاصل $\lim\limits_{x\to ۱}[x-[x]]$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) صفر ۳) ۱ ۴) حد ندارد.

$$[x+k]=[x]+k \qquad k\in\mathbb{Z}$$

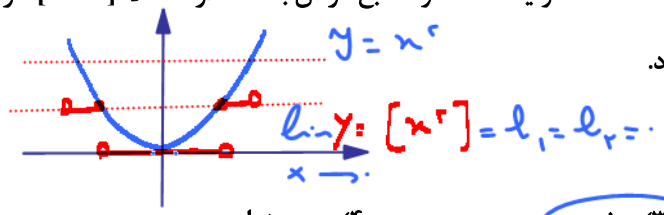
هرگاه درون براکت صحیح شود و تابع داخل براکت **max** یا **min** نشود حد ندارد. مثلاً $y=[x]$ در $x=-۲,-۱,۰,\dots$ حد ندارد ولی در $x=-\sqrt{۲},\frac{-۱}{۲},\frac{۱}{۲}$ حد دارد.

$y=[۲x]$ در $x=-\frac{۱}{۲}$ و $x=۱$ حد ندارد اما در $x=\frac{۱}{۳}$ حد دارد.

$y=[\sqrt{x}]$ در $x=۱$ حد ندارد ولی در $x=۲$ حد دارد.

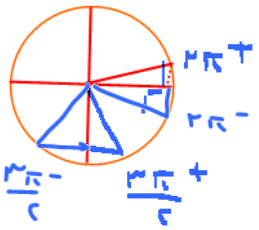
$y=[\sin x]$ در $x=\frac{\pi}{6}$ حد دارد اما در $x=\pi$ حد ندارد.

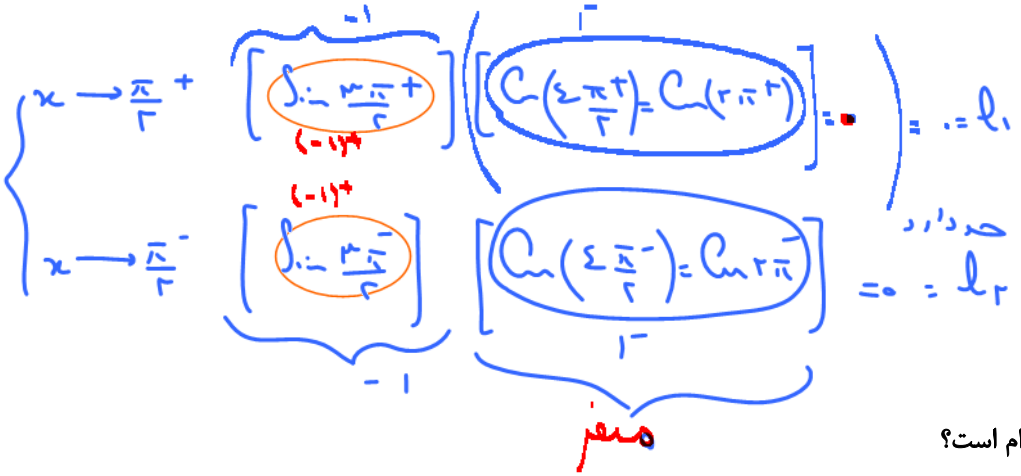
اگر درون براکت در نقطه‌ای صحیح شود و تابعِ درون براکت در آن نقطه **max** و یا **min** شود، تابع در آن‌جا حد دارد. مثلاً $[\sin x]$ در نقاط $x=\frac{\pi}{2}$ و $x=\frac{3\pi}{2}$ حد دارد و یا $[x^2]$ در نقطهٔ $x=0$ حد دارد.



تمرین: حاصل $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}[\sin 3x][\cos 4x]$ کدام است؟

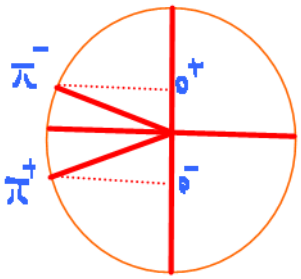
۱) ۱ ۲) ۱- ۳) صفر ۴) وجود ندارد.

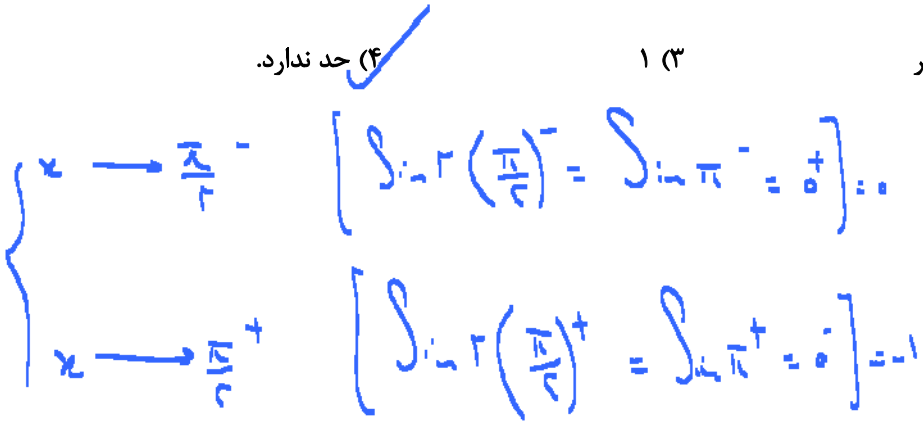




تمرین: حاصل $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}[\sin 2x]$ کدام است؟

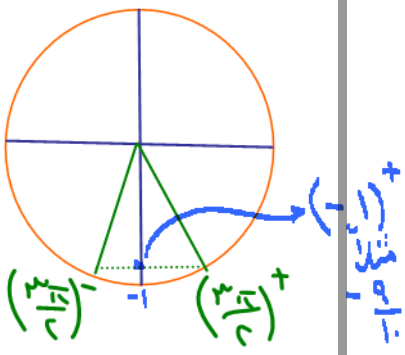
۱) ۱- ۲) صفر ۳) ۱ ۴) حد ندارد.





تمرین: حاصل $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}[\frac{1}{\sin 3x}]$ کدام است؟

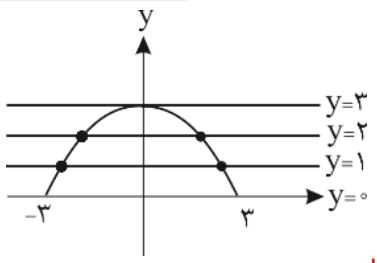
۱) صفر ۲) ۱− ۳) ۲− ۴) حد ندارد.

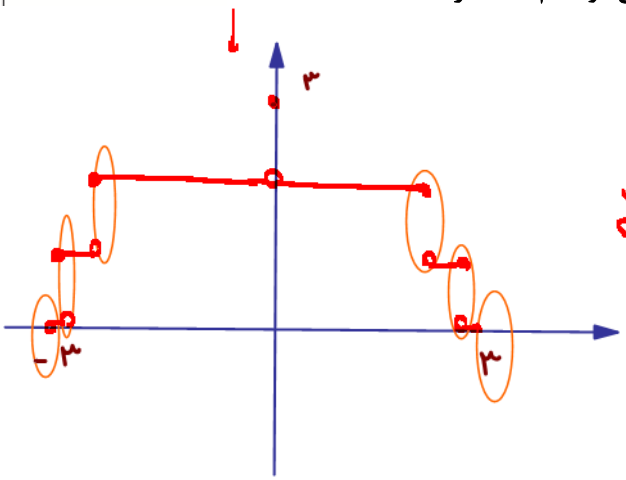


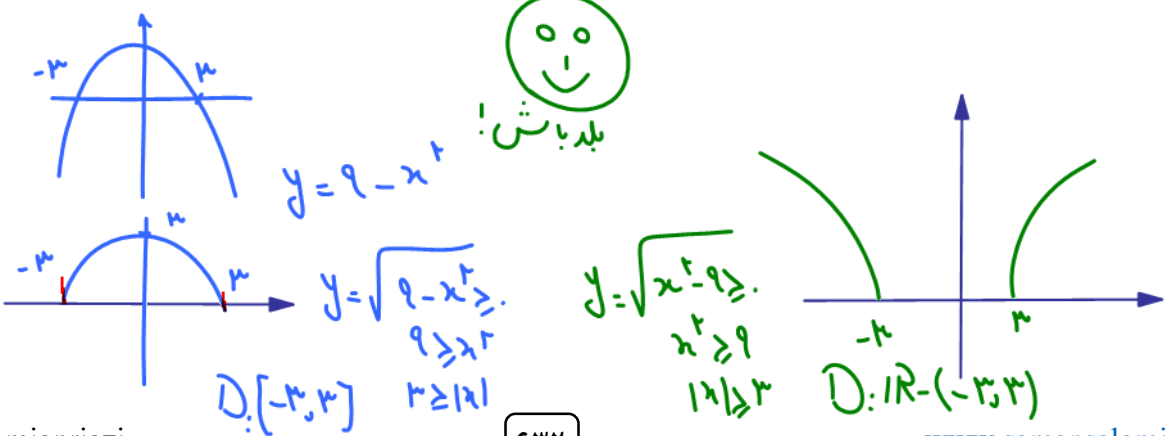
تمرین: تابع $y=[\sqrt{9-x^2}]$ در چند نقطه از دامنه‌اش حد ندارد؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

پاسخ: گزینه‌ی «۴» ـ به دنبال نقاطی هستیم که داخل براکت صحیح باشد و چون فقط به دنبال تعداد نقاط هستیم بهتر است نمودار عبارت داخل براکت را رسم کنیم. نمودار تابع $f(x)=\sqrt{9-x^2}$ به صورت یک نیم‌دایره به مرکز مبدأ مختصات و شعاع ۳ است. در $x=\pm 3$ که در یک همسایگی تعریف نشده حد ندارد. $x=0$ طول ماکزیمم نسبی است پس در آن حد دارد. در ۴ نقطه‌ی دیگر که داخل براکت صحیح می‌شود هم حد ندارد.

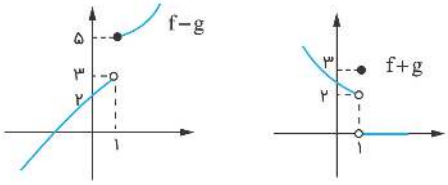






Homework (1)

۱ شکل‌های زیر، نمودار توابع $f+g$ و $f-g$ هستند. مقدار $\lim\limits_{x\to ۱} f(x)$ کدام است؟



۱) حد ندارد.

۲) ۲/۲۵

۳) ۲/۵

۴) ۲/۷۵

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

۲ اگر $f(x)=\begin{cases} ax-۱ & ;x<۱ \\ x^۲+۲a & ;x\geq ۱ \end{cases}$ و $\lim\limits_{x\to ۱^+} f(x)-\lim\limits_{x\to ۱^-} f(x)=-۱$، مقدار a کدام است؟

۱) -۴

۲) -۳

۳) -۲

۴) -۱

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۶

۳ در تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases} \sqrt{۱-x} & ;x>۰ \\ -\sqrt{۱+x} & ;x\leq ۰ \end{cases}$، حاصل $\lim\limits_{x\to ۰^-} f(x^۳-x)$ کدام است؟

۱) ۱−

۲) ۱

۳) صفر

۴) موجود نیست.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۹

۴ به ازای کدام مجموعه مقادیر a، تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases} (x+a)^۲ & ;x\geq -۱ \\ ۲x+۱ & ;x<-۱ \end{cases}$ در نقطهٔ $x=-۱$ حد دارد؟

۱) $\{۰\}$

۲) $\{۲\}$

۳) $\varnothing$

۴) $\mathbb{R}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۰

۵ حاصل $\lim\limits_{x\to -۱^+} \frac{|x+۱|+[x]}{x-[-x]}$ کدام است؟

۱) $-\infty$

۲) صفر

۳) $\frac{۱}{۲}$

۴) ۱

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

۶ حد عبارت $[\sin(x-\frac{\pi}{۳})]\cos ۳x + [\tan^۲ x]$، وقتی $x \to \frac{\pi}{۳}$ کدام است؟ (نماد [ ] به مفهوم جزء صحیح است.)

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) حد ندارد.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۵

۷ مقدار $\lim_{x\to(\frac{\pi}{۲})^-} [۲\sin x - ۱]$ ، کدام است؟ ([ ] نماد جزءصحیح است)

۱) -۱
۲) صفر
۳) ۱
۴) وجود ندارد.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

۸ حد عبارت $\sin\frac{x}{۲}[\cos\frac{x}{۲}] - \cos x[\sin ۲x]$، وقتی $x \to \pi$، کدام است؟ (نماد [ ] به مفهوم جزء صحیح است)

۱) -۱
۲) صفر
۳) ۱
۴) حد ندارد.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۵

پاسخ Homework (1)

۱ گزینه ۳

$$(f+g)+(f-g)=2f \Rightarrow f=\frac{1}{2}((f+g)+(f-g))$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\frac{\lim\limits_{x\to 1^+}(f+g)+\lim\limits_{x\to 1^+}(f-g)}{2}=\frac{0+5}{2}=\frac{5}{2}$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\frac{\lim\limits_{x\to 1^-}(f+g)+\lim\limits_{x\to 1^-}(f-g)}{2}=\frac{2+3}{2}=\frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1} f(x)=\frac{5}{2}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

۲ گزینه ۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۶

گام اول

الف) برای به دست آوردن $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ از ضابطهٔ پایین که در آن $x \geq 1$ است، استفاده می‌کنیم.

ب) برای به دست آوردن $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ از ضابطهٔ بالا که $x < 1$ است، بهره می‌بریم.

گام دوم

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+} x^2+2a=(1)^2+2a=2a+1$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-} ax-1=a(1)-1=a-1$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)-\lim_{x\to 1^-} f(x)=2a+1-(a-1)=-1$$

$$\Rightarrow 2a+1-a+1=-1 \Rightarrow a+2=-1 \Rightarrow a=-3$$

۳ گزینه ۲

ابتدا باید تعیین کنیم وقتی $x \to ۰^-$ عبارت $x^۳ - x$ به سمت ۰^+ میل می‌کند یا ۰^-. برای این کار از تغییر متغیر $x^۳ - x = t$ استفاده می‌کنیم. با تعیین محدودهٔ t حاصل حد آن را با استفاده از ضابطه‌های داده‌شده به دست می‌آوریم.

$$x \to ۰^- \Rightarrow -۱ < x < ۰ \Rightarrow x^۳ > x \Rightarrow x^۳ - x > ۰ \xrightarrow{x^۳ - x = t} t > ۰ \Rightarrow t \to ۰^+$$

بنابراین برای به دست آوردن حاصل حد $\lim\limits_{x \to ۰^-} f(x^۳ - x)$ یا همان $\lim\limits_{t \to ۰^+} f(t)$ باید از ضابطهٔ بالا که مربوط به xهای مثبت است، استفاده کنیم:

$$t \to ۰^+ \Rightarrow t > ۰ \Rightarrow f(t) = \sqrt{۱ - t}$$
$$\lim_{t \to ۰^+} f(t) = \lim_{t \to ۰^+} \sqrt{۱ - t} = \sqrt{۱ - ۰} = ۱$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۹

۴ گزینه ۳

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۰

گام اول

تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x = -۱$ دارای حد است درصورتی‌که:

$$\lim_{x \to (-۱)^-} f(x) = \lim_{x \to (-۱)^+} f(x)$$

گام دوم

ابتدا حد چپ و راست تابع $f(x)$ را در نقطهٔ $x = -۱$ به دست می‌آوریم:

$$\lim_{x \to (-۱)^+} f(x) = \lim_{x \to (-۱)^+} (x + a)^۲ = (-۱ + a)^۲$$

$$\lim_{x \to (-۱)^-} f(x) = \lim_{x \to (-۱)^-} (۲x + ۱) = -۲ + ۱ = -۱$$

باتوجه‌به گام اول در صورتی حد تابع در نقطهٔ $x = -۱$ موجود است که تساوی $(-۱ + a)^۲ = -۱$ برقرار باشد اما این تساوی هیچ‌گاه برقرار نیست؛ بنابراین مجموعه مقادیر a برابر $\varnothing$ می‌شود.

۵ گزینه ۴

$$x \to -1^+ \Rightarrow [x] = -1\ ,\ [-x] = 0\ ,\ x+1 > 0 \Rightarrow |x+1| = x+1$$

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{|x+1|+[x]}{x-[-x]} = \lim_{x\to -1^+} \frac{x+1+(-1)}{x-0} = \lim_{x\to -1^+} \frac{x}{x} = 1$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

۶ گزینه ۳

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۵

گام اول

تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x = a$ حد دارد، درصورتی‌که $\lim_{x\to a^+} f(x)$ و $\lim_{x\to a^-} f(x)$ موجود و باهم برابر باشند.

گام دوم

حد عبارت داده‌شده را در دو حالت $x \to \frac{\pi}{3}^+$ و $x \to \frac{\pi}{3}^-$ محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}^+} \left[\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\right]\cos 3x + [\tan^2 x] = [\sin(0^+)]\cos\pi + \left[(\sqrt{3^+})^2\right] \\ = [0^+]\cos\pi + [3^+] = (0)(-1)+3 = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}^-} \left[\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\right]\cos 3x + [\tan^2 x] = [\sin(0^-)]\cos\pi + \left[(\sqrt{3^-})^2\right] \\ = [0^-]\cos\pi + [3^-] = (-1)(-1)+2 = 3 \end{cases}$$

حد راست و چپ تابع در نقطهٔ $x = \frac{\pi}{3}$ موجود و برابر است، بنابراین حد تابع برابر ۳ است.

۷ گزینه ۱

$$\lim_{x\to(\frac{\pi}{6})^-} [2\sin x - 1] = [2(\frac{1}{2})^-] - 1 = -1$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

۸ گزینه ۱

$$\lim_{x\to\pi^+} f(x) = \sin\frac{\pi}{۲}[\cos(\frac{\pi}{۲})^+] - \cos\pi[\sin(۲\pi)^+]$$
$$= ۱\times[۰^-] - (-۱)[۰^+] = ۱\times(-۱) - ۰ = -۱$$
$$\lim_{x\to\pi^-} f(x) = \sin\frac{\pi}{۲}[\cos(\frac{\pi}{۲})^-] - \cos\pi[\sin(۲\pi)^-]$$
$$= ۱\times[۰^+] - (-۱)[۰^-] = ۰ + (-۱) = -۱ \Rightarrow \lim_{x\to\pi} f(x) = -۱$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۵

Homework (2)

۱ حاصل $\lim\limits_{x\to\pi^+}\frac{[\sin x]}{[\cos x]}$ کدام است؟

۱) -۱
۲) ۱
۳) صفر
۴) ۲

علوی علوم تجربی یازدهم آزمون شماره ۸ ۱۴۰۱

۲ کدام گزینه درست است؟

۱) اگر $f+g$ در $x=a$ حد داشته باشد، هر دو تابع f و g در $x=a$ حد دارند.

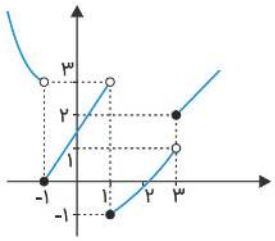
۲) اگر f و g هر دو در $x=a$ حد نداشته باشند، آنگاه $f+g$ در $x=a$ حد ندارد.

۳) اگر f در $x=a$ حد داشته باشد ولی g در $x=a$ حد نداشته باشد، آنگاه $f+g$ در $x=a$ حد ندارد.

۴) اگر $f+g$ در $x=a$ حد نداشته باشد، هر دو تابع f و g در $x=a$ حد ندارند.

علوی علوم تجربی یازدهم آزمون شماره ۸ ۱۴۰۰

۳ نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. مقدار عبارت $\lim\limits_{x\to1^+}f(f(x))-\lim\limits_{x\to1^-}f(f(x))+f(f(1))$ را بیابید.



علوی علوم تجربی یازدهم آزمون شماره ۶ ۱۳۹۹

۴ مقدار $\lim\limits_{x\to1/2}\left(\sin\pi[x]+[\sin x]\right)$ چقدر است؟

۱) ۱
۲) صفر
۳) -۱
۴) -۲

علوی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۴ ۱۴۰۱

حاصل حدهای زیر را بیابید.

علوی علوم تجربی یازدهم آزمون شماره ۶ ۱۳۹۹

۵ $\lim_{x\to\pi^+}\frac{۳-[\cos ۲x]}{[\cos x]}$

۶ $\lim_{x\to ۴}\frac{\sqrt{x}-۲}{x^۲-۳x-۴}$

۷ $\lim_{x\to ۳}\frac{x^۳-۲۷}{۲x^۲-۵x-۳}$

۸ $\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}(\sin x-۱)\tan^۲ x$

۹ $\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}}\frac{\cos x}{\sqrt{۱+\cot x}-\sqrt{۱-\cot x}}$

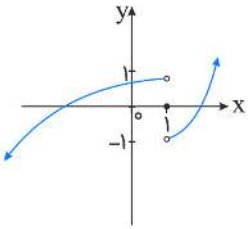
۱۰ اگر $f(x)=\begin{cases}۲ & ;x\in\mathbb{Z}\\ -۱ & ;x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$ باشد، حاصل $\lim_{x\to ۲}f(x)+\lim_{x\to\sqrt{۲}}f(x)$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) ۴

۳) -۲ ۴) ۱

علوی علوم تجربی یازدهم آزمون شماره ۸ ۱۴۰۰

۱۱ باتوجه‌به نمودار تابع f، حاصل $\lim_{x\to ۱^+}f\left(\frac{۱}{۲x-۱}\right)$ کدام است؟



۱) صفر

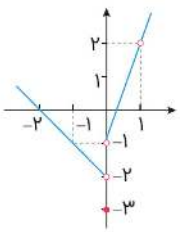
۲) ۱

۳) -۱

۴) موجود نیست.

علوی علوم تجربی یازدهم آزمون شماره ۸ ۱۴۰۰

۱۲ باتوجه‌به نمودار تابع f، حاصل $\lim_{x\to ۰^-}(f(|x-۱|)+f([-x])+[f(x+۱)])$ کدام است؟



۱) ۱

۲) ۲

۳) ۳

۴) صفر

علوی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۴ ۱۳۹۹

پاسخ Homework (2)

۱ گزینه ۲

$$\lim_{x\to\pi^+}\frac{[\sin x]}{[\cos x]}=\frac{[\sin\pi^+]}{[\cos\pi^+]}=\frac{[۰^-]}{[(-۱)^+]}=\frac{-۱}{-۱}=۱$$

علوی علوم تجربی یازدهم آزمون شماره ۸ ۱۴۰۱

۲ گزینه ۳

اگر f و g در $x=a$ حد داشته باشند، دراین‌صورت $f+g$ در $x=a$ حد دارد.

اگر f در $x=a$ حد داشته باشد ولی g در $x=a$ حد نداشته باشد، دراین‌صورت $f+g$ در $x=a$ حد ندارد.

اگر f و g هر دو در $x=a$ حد نداشته باشند، دراین‌صورت $f+g$ ممکن است در $x=a$ حد داشته باشد و ممکن است حد نداشته باشد.

علوی علوم تجربی یازدهم آزمون شماره ۸ ۱۴۰۰

۳

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to۱^+}f(f(x))=\lim\limits_{t\to(-۱)^+}f(t)=۰\\ \lim\limits_{x\to۱^-}f(f(x))=\lim\limits_{t\to۳^-}f(t)=۱\\ f(f(۱))=f(-۱)=۰\end{array}\right\}\Rightarrow\ ۰-۱+۰=-۱$$

علوی علوم تجربی یازدهم آزمون شماره ۶ ۱۳۹۹

۴ گزینه ۲

$$A=\lim_{x\to۱/۲}(\sin\pi[x]+[\sin x])=\sin\pi(۱)+[\sin ۱/۲]$$

توجه داشته باشید که ۱/۲ رادیان در ناحیهٔ اول مثلثاتی قرار دارد و $۰<\sin ۱/۲<۱$ خواهد بود، پس جواب حد برابر است با:

$$A=\sin\pi+[۰]=۰+۰=۰$$

علوی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۴ ۱۴۰۱

پاسخ سؤالات ۵ تا ۹

علوی علوم تجربی یازدهم آزمون شماره ۶ ۱۳۹۹

۵

$$\lim_{x\to\pi^+}\frac{۳-[\cos ۲x]}{[\cos x]}=\frac{۳-[\cos ۲\pi^+]}{[\cos \pi^+]}=\frac{۳-۰}{-۱}=-۳$$

$$(*):[\cos\pi^+]=[-۱^+]=-۱$$

۶

$$\lim_{x\to۴}\frac{\sqrt{x}-۲}{x^۲-۳x-۴}=\lim_{x\to۴}\frac{\sqrt{x}-۲}{(x-۴)(x+۱)}\times\frac{\sqrt{x}+۲}{\sqrt{x}+۲}$$
$$=\lim_{x\to۴}\frac{x-۴}{(x-۴)(x+۱)(\sqrt{x}+۲)}=\lim_{x\to۴}\frac{۱}{(x+۱)(\sqrt{x}+۲)}$$
$$=\frac{۱}{(۴+۱)(\sqrt{۴}+۲)}=\frac{۱}{۲۰}$$

۷

$$\lim_{x\to۳}\frac{x^۳-۲۷}{۲x^۲-۵x-۳}=\lim_{x\to۳}\frac{(x-۳)(x^۲+۳x+۹)}{(x-۳)(۲x+۱)}$$
$$=\lim_{x\to۳}\frac{x^۲+۳x+۹}{۲x+۱}=\frac{۲۷}{۷}$$

۸

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}\frac{(\sin x-۱)\times\sin^۲x}{\cos^۲x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}\frac{(\sin x-۱)\times\sin^۲x}{۱-\sin^۲x}$$
$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}\frac{\overset{-۱}{\cancel{(\sin x-۱)}}\times\sin^۲x}{\cancel{(۱-\sin x)}(۱+\sin x)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}\frac{-\sin^۲x}{۱+\sin x}=\frac{-(۱)^۲}{۱+۱}=-\frac{۱}{۲}$$

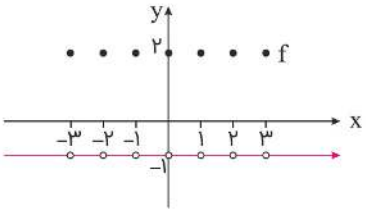
۹

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}}\frac{\cos x(\sqrt{۱+\cot x}+\sqrt{۱-\cot x})}{۱+\cot x-۱+\cot x}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}}\frac{\cancel{\cos x}(\sqrt{۱+\cot x}+\sqrt{۱-\cot x})}{\frac{۲\cancel{\cos x}}{\sin x}}=\frac{۱+۱}{\frac{۲}{۱}}=۱$$

۱۰

گزینه ۳



$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to۲}f(x)=-۱\\ \lim\limits_{x\to\sqrt{۲}}f(x)=-۱\end{cases}\Rightarrow\lim_{x\to۲}f(x)+\lim_{x\to\sqrt{۲}}f(x)=-۲$$

۱۱ گزینه ۲

$$(x \to ۱^+) \Rightarrow (\frac{۱}{۲x-۱} \to ۱^-)$$

$$\lim_{x \to ۱^+} f(\frac{۱}{۲x-۱}) = \lim_{x \to ۱^-} f(x) = ۱$$

علوی علوم تجربی یازدهم آزمون شماره ۸ ۱۴۰۰

۱۲ گزینه ۴

$$\lim_{x \to ۰^-} f(|x-۱|) = \lim_{x \to ۱^+} f(x) = ۲$$

$$\lim_{x \to ۰^-} f([-x]) = f([-۰^-]) = f([۰^+]) = f(۰) = -۳$$

$$\lim_{x \to ۰^-} [f(x+۱)] = [f(۰^- + ۱)] = [f(۱^-)] = [۲^-] = ۱$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to ۰^-} (f(|x-۱|) + f([-x]) + [f(x+۱)]) = ۰$$

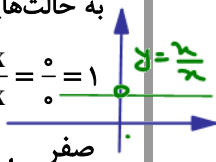
علوی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۴ ۱۳۹۹

صفر صفرم؟

حالت $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$:

به حالت‌هایی که در شرایط مشابه، جواب‌های مختلف یا هر عددی از آن‌ها به دست می‌آید، اصطلاحاً مبهم گفته می‌شود. مثلاً

$\lim_{x\to 0} y=\frac{x}{x}=\frac{0}{0}=1$ یا $\lim_{x\to 1} y=\frac{2x-2}{x-1}=\frac{0}{0}=\frac{2(x-1)}{x-1}=2$.



$\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ برابر هر عددی می‌تواند باشد، زیرا اگر (هر عدد $=\frac{0}{0}$) را طرفین وسطین کنیم، (صفر = هر عدد × صفر) است. به یافتن جواب کسر $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ عمل رفع ابهام گفته می‌شود.

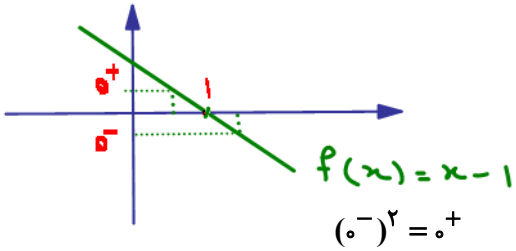
$\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ = هر عدد

رفع ابهام حالت $\frac{0}{0}$:

در ابتدا باید بدانیم هر $\frac{0}{0}$ مبهم نیست و تنها $\frac{\text{صفرنسبی(حدی)}}{\text{صفرنسبی(حدی)}}$ مبهم است و باید رفع ابهام شود. در این‌جا اشاره می‌کنیم که صفر نسبی (حدی) با صفر مطلق (خود صفر) فرق دارد. مثلاً در تابع $f(x)=x-1$ وقتی مقدار تابع به ازای $x=1$ را می‌یابیم جواب صفر مطلق می‌شود، اما حد تابع وقتی $x\to 1$ برابر صفر نسبی است. چرا که $x\neq 1$:

$$\lim_{x\to 1} x-1\begin{cases} x\to 1^+ & 1^+-1=0^+ \\ x\to 1^- & 1^--1=0^- \end{cases}$$

$f(x)=x-1 \xrightarrow{x=1} f(1)=1-1=0$ صفر مطلق



توجه: $(1^-)^2=1^-$ $\quad (0^-)^2=0^+$

$\lim_{x\to 0}[x^2]\begin{cases} x\to 0^+ & [0^+]=0=\text{صفرمطلق} \\ x\to 0^- & [(0^-)^2=0^+]=0=\text{صفرمطلق} \end{cases}$

انواع $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$:

اگر مخرج صفر مطلق بود، حاصل تعریف نشده است و جواب وجود ندارد.

۱) $\frac{\text{صفرنسبی}}{\text{صفرنسبی}}=$ مبهم است $\to$ رفع ابهام $\to$ مثال : $\lim_{x\to 0}\frac{x}{x}=1$

۲) $\frac{\text{صفرمطلق}}{\text{صفرنسبی}}=$ صفر $\to$ مبهم نیست $\to$ مثال : $\lim_{x\to 0^+}\frac{[x]}{x}=\frac{[0^+]}{0^+}=\frac{0}{0^+}=0$

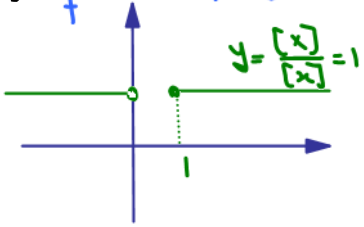
۳) $\frac{\text{صفرمطلق}}{\text{صفرمطلق}}=$ تعریف نشده $\to$ (وجود ندارد) تعریف نشده $\to$ مثال : $\lim_{x\to 0^+}\frac{[x]}{[x]}=\frac{[0^+]}{[0^+]}=\frac{\text{خودصفر}}{\text{خودصفر}}=$ تعریف نشده

۴) $\frac{\text{صفرنسبی}}{\text{صفرمطلق}}=$ تعریف نشده $\to$ (وجود ندارد) تعریف نشده $\to$ مثال : $\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{[x]}=\frac{\text{صفرنسبی}}{\text{صفرمطلق}}=$ تعریف نشده

$y=\frac{[x]}{[x]}=1$

$D_f:\mathbb{R}-[0,1)$

$D_f:(-\infty,0)\cup[1,+\infty)$



رفع ابهام $\frac{0}{0}$ در توابع جبری:

با توجه به توضیحات درس‌نامه در این قسمت یاد می‌گیریم که با ابهام‌های $\frac{0}{0}$ چگونه برخورد و آن‌ها را رفع ابهام کنیم.

در ابتدای بخش با روش‌های رفع ابهام $\frac{0}{0}$ در توابع جبری آشنا می‌شویم که در زیر آمده است. فقط برای تأکید هم که شده، دوباره به شیپور زیر توجه کنید.

در محاسبه‌ی حد توابع شامل قدرمطلق و جزء صحیح، اول باید قدرمطلق را با تعیین علامت و جزء صحیح را با تعیین مقدار، حذف کنیم و سپس حد را محاسبه کنیم.

الف) حذف عامل صفرشونده: در این حالت با استفاده از تجزیه، فاکتورگیری یا اتحادهای مناسب، عامل صفرشونده‌ی یکسان از صورت و مخرج را حذف می‌کنیم و سپس مقدار حد را در آن نقطه می‌یابیم.

تمرین: $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-4}$

$= \lim\limits_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x+2)} = \frac{2-3}{2+2} = -\frac{1}{4}$

$x-2$ عامل مشترک عامل صفرساز

$\lim\limits_{x\to -4}\frac{x^2+3x-4}{x^3+4x^2+x+4}$

$x+4$

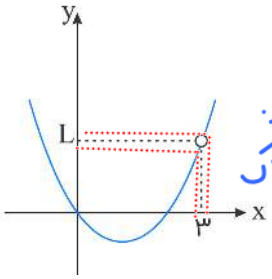
$\begin{array}{r|l} x^3+4x^2+x+4 & x+4 \\ \hline \text{صفر} & Q(x) \end{array}$

$= (x+4)Q(x)$

$= \lim\limits_{x\to -4}\frac{(x-1)(x+4)}{x^2(x+4)+(x+4)} = \frac{-4-1}{(-4)^2+1} = \frac{-5}{17} = -\frac{5}{17}$

$(x+4)(x^2+1)$

تمرین: اگر نمودار تابع $f(x)=\frac{x^3+nx^2+6x}{x-3}$ به صورت شکل زیر باشد، مقدار $n+L$ کدام است؟



۱) ۳
۲) -۲ ✓
۳) -۵
۴) ۲

نکته: طول (ابتدا) حفره هم مخرج هم صورت را صفر می‌کند.
برای عرض (انتها) حفره، حد کسر را در رابطه مشترک صورت و مخرج حساب می‌کنیم

حل: $x=3$ صورت کسر را صفر می‌کند

$(3)^3+(3)^2n+6(3)=0$

$27+9n+18=0$

$9+3n+6=0$

$3n=-15$

$n=-5$

$x(x-4)(x-2)$

$x(x^2-5x+6)$

$L = \lim\limits_{x\to 3}\frac{x^3-5x^2+6x}{x-3} = x(x-2)\Big|_{x=3}$

$L+n-3-5=-2$

$2(x-2)(x+2)$

$2x^2-8 = 2(x^2-4)$

تمرین: حاصل $\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{x^2[x]-8}{x^2-2x}$ کدام است؟

$x(x-2)$

$= 2$

۱) ۴ ۲) صفر ۳) وجود ندارد. ۴) ۲

پاسخ: گزینه‌ی «۱» ـ اول جزء صحیح را تعیین مقدار می‌کنیم:

$$x \to ۲^+ \Rightarrow [x]=۲ \Rightarrow \text{حد}= \lim_{x\to ۲^+} \frac{(x^۲)(۲)-۸}{x^۲-۲x} = \lim_{x\to ۲^+} \frac{۲x^۲-۸}{x^۲-۲x}$$

این حد ابهام $\frac{۰}{۰}$ دارد. برای رفع ابهام باید با استفاده از اتحادها و یا تجزیه، عامل صفرشونده را از صورت و مخرج حذف کنیم (دقت کنید، با توجه به این که $x \to ۲^+$، عامل صفرشونده $(x-۲)$ است که باید از صورت و مخرج حذف شود):

$$\text{حد}= \lim_{x\to ۲^+} \frac{۲(x^۲-۴)}{x^۲-۲x} = \lim_{x\to ۲^+} \frac{۲(x-۲)(x+۲)}{x(x-۲)} = \lim_{x\to ۲^+} \frac{۲(x+۲)}{x} = \frac{۲(۲+۲)}{۲} = ۴$$

تمرین: حاصل $\lim\limits_{x\to ۲^+} \frac{x^۲-۴}{x^۳-[x^۳]}$ کدام است؟ *(تجربی ۱۴۰۱)*

۱) صفر ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) ۱ ۴) $+\infty$

$$\lim_{x\to ۲^+} \frac{x^۲-۴}{x^۳-[x^۳]} = \lim_{x\to ۲^+} \frac{x^۲-۴=(x-۲)(x+۲)}{x^۳-۸=(x-۲)(x^۲+۲x+۴)} = \frac{۲+۲=۴}{۴+۴+۴=۱۲} = \frac{۱}{۳}$$

ب) **گویا کردن:** گاهی در محاسبه‌ی حد توابع شامل رادیکال، برای رفع ابهام می‌توانیم از گویا کردن صورت یا مخرج کسر (یا هر دو) استفاده کنیم.

تمرین: حاصل $\lim\limits_{x\to ۱} \frac{۱-x}{۱-\sqrt{x}}$ را بیابید.

پاسخ: حد داده‌شده دارای ابهام $\frac{۰}{۰}$ است. برای رفع ابهام از گویاکردن استفاده می‌کنیم.

$$\lim_{x\to ۱}\left(\frac{۱-x}{۱-\sqrt{x}} \times \frac{۱+\sqrt{x}}{۱+\sqrt{x}}\right) = \lim_{x\to ۱} \frac{(۱-x)(۱+\sqrt{x})}{۱-x} = \lim_{x\to ۱} ۱+\sqrt{x} = ۱+۱ = ۲$$

$(a-b)(a+b) = a^۲-b^۲$

تمرین: حاصل $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{3-\sqrt{2x+1}}{2-\sqrt{x}}$ کدام است؟

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) $\frac{3}{2}$

$9-2x-1=8-2x=2(4-x)$

$$\lim_{x\to 4}\frac{(3-\sqrt{2x+1})}{(2-\sqrt{x})}\frac{(3+\sqrt{2x+1})}{(3+\sqrt{2x+1})}\frac{(2+\sqrt{x})}{(2+\sqrt{x})}=\frac{2(2+2)}{3+3=6}=\frac{4}{3}$$

$4-x$

(۵) توابع شامل قدرمطلق

در محاسبه‌ی حد توابعی که شامل قدرمطلق هستند، اگر داخل قدرمطلق صفر شده و حاصل حد به صورت مبهم $\frac{0}{0}$ دربیاید، باید حد چپ و راست را جداگانه بررسی کنیم.

برای این کار ابتدا عبارت داخل قدرمطلق را تعیین علامت می‌کنیم. سپس عبارت‌ها را از قدرمطلق خارج کرده و حد تابع را می‌یابیم.

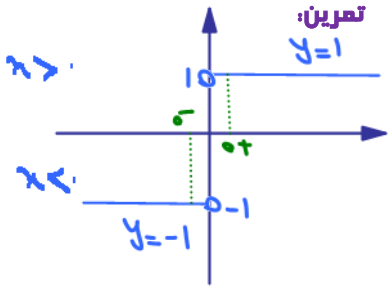
$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{|x|}=\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x}{|x|}=\frac{x}{x}=1\\ \lim\limits_{x\to 0^-}\frac{x}{|x|}=\frac{x}{-x}=-1\end{cases}$$

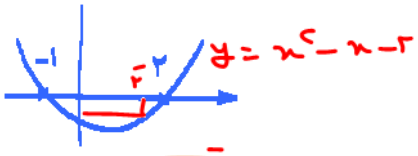
حد ندارد.

$y=\frac{x}{|x|}\begin{cases}\frac{x}{x}=1\\ \frac{x}{-x}=-1\end{cases}$

$D_f:\mathbb{R}-\{0\}$

تمرین:





تمرین: حد عبارت $\dfrac{|x^2-x-2|}{2x-\sqrt{x^2+12}}$ وقتی $x\to 2^-$ کدام است؟ (ریاضی ۹۰)

۱) -3 ۲) -2 ۳) ۲ ۴) ۳

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{-(x^2-x-2)=-(x+1)(x-2)}{(2x-\sqrt{x^2+12})(2x+\sqrt{x^2+12})}\frac{(2x+\sqrt{x^2+12})=-3(4+4)}{=4x^2-x^2-12=3(x^2-4)=3(x-2)(x+2)}$$

$3x^2-12$

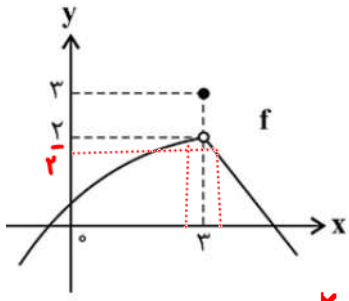
$(a-b)(a+b)$

$\frac{-3(8)}{3(4)}=-2$

تمرین: حد چپ تابع $f(x)=\dfrac{(3-[x])\sqrt{x^2-6x+9}}{x-3}$ در نقطه‌ی $x=3$ کدام است؟

۱) صفر ۲) -1 ۳) ۱ ۴) موجود نیست.

تمرین: با توجه به نمودار تابع f، حاصل $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f^3(x)-8}{|f(x)-2|}$ کدام است؟



۱) ۱۲
۲) -4
۳) -12
۴) ۴

ج) تغییر متغیر: در این‌جا با کمک تغییر متغیر مناسب، حد را به نقطه‌ی صفر منتقل می‌کنیم. پس برای محاسبه‌ی $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ با فرض $x-a=t$ (با توجه به این که $x\to a$ بنابراین $x-a\to 0$ و در نتیجه $t\to 0$):

$$\begin{cases} x=a+t \\ x\to a \Rightarrow t\to 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{t\to 0}\frac{f(a+t)}{g(a+t)}$$

تمرین: حاصل $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{2\sqrt{x-1}+x-1}{\sqrt{x-1}}$ را بیابید.

پاسخ: حد داده‌شده دارای ابهام $\frac{0}{0}$ است. بنابراین از تغییر متغیر برای محاسبه‌ی حد کمک می‌گیریم:

$$\begin{cases} x-1=t \Rightarrow x=t+1 \\ x\to 1^+ \Rightarrow t\to 0^+ \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to 1^+}\frac{2\sqrt{x-1}+x-1}{\sqrt{x-1}}=\lim_{t\to 0^+}\frac{2\sqrt{t}+t}{\sqrt{t}}=\frac{0}{0}$$

حالا برای رفع ابهام از $\sqrt{t}$ در صورت فاکتور می‌گیریم و از حذف عامل صفرشونده استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{2\sqrt{t}+t}{\sqrt{t}}=\lim_{t\to 0^+}\frac{\sqrt{t}(2+\sqrt{t})}{\sqrt{t}}=\lim_{t\to 0^+}(2+\sqrt{t})=2+0=2$$

چند جمله‌ای‌ها در حوالی صفر هم‌ارزشان با جمله کم‌توان‌ترین.

د) استفاده از هم‌ارزی: حد یک چندجمله‌ای وقتی $x \to 0$ برابر حد جمله‌ی با کم‌ترین توان آن چندجمله‌ای است.

برای مثال $x^3 - 3x^2 \underset{x\to 0}{\sim} -3x^2$ (علامت $\sim$ به معنای هم‌ارز بودن است.)

تمرین: حاصل $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3+3x^2-x}{x^2+2x}$ را بیابید.

پاسخ: چون حد داده‌شده ابهام $\frac{0}{0}$ دارد، برای رفع ابهام از هم‌ارزی استفاده می‌کنیم. (دقت کنید که $x \to 0$)

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3+3x^2-x}{x^2+2x} = \lim_{x\to 0} \frac{-x}{2x} = -\frac{1}{2}$$

تمرین: حاصل حد روبه‌رو را بیابید.

$$\lim_{x\to 0} \frac{x+\sqrt[3]{x}+2x^2}{\sqrt[3]{8x}+x^3}$$

$\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{8x}} = \sqrt[3]{\frac{x}{8x}} = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}$

تمرین: در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x} & x>0\\ -\sqrt{1+x} & x\le 0\end{cases}$، حاصل $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x^3-x)$ کدام است؟ (ریاضی ۸۹)

۱) ۱- (۲) ۱ ۳) ۳ ۴) موجود نیست.

$\lim\limits_{x\to 0^-} f\left(x^3-x \underset{x\to 0^-}{\text{کم‌توان}} -x = -(0^-) = 0^+\right) = f(0^+) = \sqrt{1-x} = \sqrt{1} = 1$

روش هوپیتال

$\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f(a)}{g(a)} = \dfrac{0}{0} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}} = \dfrac{f'(a)}{g'(a)}$

اگر توابع f و g در نقطه‌ی x_0 مشتق‌پذیر باشند و $f(x_0)=0$ و $g(x_0)=0$ آن‌گاه:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

در مبهم $\frac{0}{0}$ و $\frac{\infty}{\infty}$ (اگر f و g در نقطه‌ی x_0 یا وقتی x به $\pm\infty$ می‌رود، مشتق‌پذیر باشند) می‌توان از این روش استفاده کرد.

پس تسلط بر تمام فرمول‌های مشتق‌گیری برای استفاده از روش هوپیتال ضروری است.

در مبهم $\frac{0}{0}$ و $\frac{\infty}{\infty}$: از صورت و مخرج جداگانه مشتق می‌گیریم و سپس حد را حساب می‌کنیم. اگر باز هم مبهم بود به عمل مشتق‌گیری مستقل ادامه می‌دهیم.

چند قاعدهٔ مشتق‌گیری:

۱) مشتق تابع ثابت یا عدد صفر. مثلاً مشتق یک صفر.

$y = \frac{\pi}{2} = 1,57\ldots \to y' = 0$

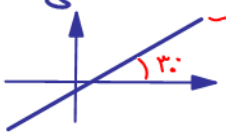
$y = \frac{\sqrt{2}}{2} \to y' = 0$

$y' = 0$ نیمساز ربع اول $y=x$

② مشتق هر خط شیب آن خط است $y=ax+b \rightarrow y'=a$

$y=\frac{x}{2}+1 \rightarrow y'=\frac{1}{2}$ $\quad y=\frac{x}{2}-\frac{2}{3} \rightarrow y'=\frac{1}{2}$ $\quad \begin{cases} y=x \\ y'=1 \end{cases}$

یادآوری: شیب هر خط برابر تانژانت زاویه‌ای است که خط با جهت مثبت محور xها می‌سازد.



$m=\tan 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}$

$y'=\frac{\sqrt{3}}{3}$

③ $y=kx^n \rightarrow y'=knx^{n-1}$

$\begin{cases} y=x^3 \\ y'=3x^2 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} y=5x^4 \\ y'=5(4x^3) \end{cases}$ $\quad \begin{cases} y=\frac{1}{x}=x^{-1} \\ y'=-1x^{-2}=\frac{-1}{x^2} \end{cases}$ $\quad \begin{cases} y=\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}} \\ y'=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{x}} \end{cases}$

④ $y=u\pm v \rightarrow y'=u'\pm v'$

$\begin{cases} y=x^4-4x^2 \\ y'=4x^3-8x \end{cases}$ $\quad \begin{cases} y=\sqrt{x}-\frac{1}{x} \\ y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\left(\frac{-1}{x^2}\right) \end{cases}$

⑤ $y=\sqrt{u} \rightarrow y'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$

$\begin{cases} y=\sqrt{x} \\ y'=\frac{1}{2\sqrt{x}} \end{cases}$ $\quad \begin{cases} y=\sqrt{7x-1} \\ y'=\frac{7}{2\sqrt{7x-1}} \end{cases}$ $\quad \begin{cases} y=\sqrt{x^3-4x^2} \\ y'=\frac{3x^2-8x}{2\sqrt{x^3-4x^2}} \end{cases}$

⑥ $y=\sqrt[3]{u} \rightarrow y'=\frac{u'}{3\sqrt[3]{u^2}}$

$\begin{cases} y=\sqrt[3]{x^2-4x} \\ y'=\frac{2x-4}{3\sqrt[3]{(x^2-4x)^2}} \end{cases}$

ویژه حسابان

$y=\sin u \rightarrow y'=u'\cos u$

$y=\sin x \rightarrow y'=\cos x$

$y=\cos u \rightarrow y'=-u'\sin u$

$y=\cos x \rightarrow y'=-\sin x$

تمرین: حاصل حدهای زیر را به دست آورید.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt[n]{x}-1}=\frac{0}{0}\overset{\text{هم‌ارز}}{\underset{x\to 1}{\lim}}\frac{1-0}{\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}}=\frac{1}{\frac{1}{n}}=n$$

$x^{\frac{1}{n}}$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt[n]{x}-1}=n \quad *$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[n]{x}-1}{x-1}=\frac{1}{n}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt[3]{x}-1)}=$$

کتب به هر توان برابر یک است

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1}=2(3)=6$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x+x^2+x^3+x^4+\cdots+x^n-n}{x-1}=\frac{0}{0}\overset{\text{Hop}}{\underset{x\to 1}{\lim}}\frac{1+2x+3x^2+4x^3+\ldots+nx^{n-1}-0}{1}$$

$$=1+2+3+4+\ldots+n=\text{جمع اعداد طبیعی از ۱ تا }n=\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n^2+n}{2}$$

تمرین: اگر $\lim\frac{ax+3a}{1-\sqrt{5x+16}}$ وقتی $x\to -3$ برابر ۲ باشد، آن‌گاه a کدام است؟

۱) ۵ $\quad$ ۲) ۳ $\quad$ ۳) -3 $\quad$ ۴) -5

$$\frac{0}{0}\overset{\text{Hop}}{\underset{x\to -3}{\lim}}\frac{a}{0-\frac{5}{2\sqrt{5x+16}}}=\frac{a}{-\frac{5}{2}}=2\rightarrow a=-5$$

تمرین: اگر $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{ax+1}-3}{\sqrt{x}-2}=b$ ، ab کدام است؟

۱) $\frac{4}{3}$ ۲) $\frac{8}{3}$ ۳) $\frac{4}{5}$ ۴) $\frac{8}{5}$

اول جایگذاری:

$\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{4a+1}-3}{\sqrt{4}-2}=\dfrac{0}{0}=b$ (باید صورت صفر شود)

صورت صفر شود $\Rightarrow \sqrt{4a+1}=3 \Rightarrow 4a+1=9 \Rightarrow a=2$

$\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x}-2}=\dfrac{0}{0}\xrightarrow{Hop}\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\frac{2}{2\sqrt{2x+1}}-0}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}=\dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{4}}=\dfrac{4}{3}$

تمرین: اگر $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{ax^2+2x+b}=2$ باشد، آن‌گاه $a-b$ کدام است؟ (b متناهی است.)

۱) -1 ۲) 1 ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $-\frac{1}{2}$

اول جایگذاری: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-3+2}{a+2+b}=\dfrac{0}{0}=2$ (باید)

$a+2+b=0$

$\dfrac{0}{0}\xrightarrow{Hop}\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x-3}{2ax+2}=\dfrac{-1}{2a+2}=2 \Rightarrow -1=4a+4 \Rightarrow a=-\frac{5}{4}$

$-\frac{5}{4}+2+b=0 \quad b=-\frac{3}{4} \quad a-b=-\frac{5}{4}-\left(-\frac{3}{4}\right)=-\frac{1}{2}$

تمرین: حدّ عبارت $\dfrac{x^2+10x+16}{12+6\sqrt[3]{x}}$، وقتی $x\to -8$، کدام است؟ (تجربی ۹۸)

۱) -24 ۲) -18 ۳) -12 ۴) -6

$\dfrac{0}{0}\xrightarrow{Hop}\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{2x+10+0}{0+6\left(\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\right)}=\dfrac{-6}{\frac{6}{12}}=-12$

اول فرم بگیر بعد به توان برسان

تمرین: حاصل $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x-7\sqrt{x}+5}{2x-\sqrt{3x+1}}$ ، کدام است؟ (ریاضی ۹۹)

۱) $-1/5$ ۲) $-1/2$ ۳) $-0/8$ ۴) $-0/6$

$\frac{0}{0}$ مبهم $\xrightarrow{\text{Hop}} \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2-7\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{2-\frac{3}{2\sqrt{3x+1}}}=\dfrac{2-\frac{7}{2}}{2-\frac{3}{4}}=\dfrac{-\frac{3}{2}}{\frac{5}{4}}=\dfrac{-12}{10}=-1/2$

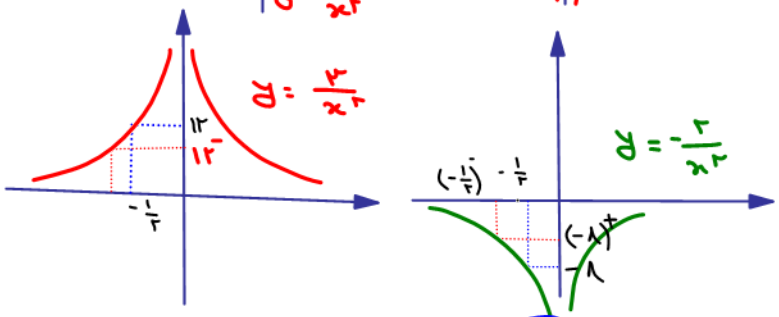
تمرین: مقدار $\lim\limits_{x\to(-\frac{1}{2})^-}\dfrac{10x-5+\left[\frac{3}{x^2}\right]}{16x-\left[\frac{-2}{x^2}\right]}$ ، کدام است؟ (ریاضی ۱۴۰۰)

۱) $-\infty$ ۲) صفر ۳) $\frac{5}{8}$ ۴) $+\infty$

$\left[\frac{3}{x^2}\right]\to 12^-$ ، $\left[\frac{-2}{x^2}\right]\to(-8)^+$

$\lim\limits_{x\to(-\frac{1}{2})^-}\dfrac{10x-5+11=10x+6=1}{16x+8=0^-}=-\infty$

نکته: برای تابع هایی که داریم به جای شکل نمودار می کشیم.



یادآوری

$\left\{\begin{array}{l}\frac{\text{عدد}}{\text{صفر مطلق}}=\text{تعریف نشده}\\ \frac{\text{عدد}}{0^+\text{ یا }0^-}=+\infty\text{ یا }-\infty\end{array}\right.$

استفاده از یک هم‌ارزی

$u\to 0:(1+u)^n\sim 1+nu$

$u\to 0:\sqrt[n]{1+u}\sim 1+\dfrac{u}{n}$

$(1+x)^2=1+2x+x^2\underset{x\to 0}{\sim}1+2x$

$(1+0/01)^{10}\sim 1+10(0/01)=1+0/1=1/1$

$\sqrt{1+\frac{1}{100}}\sim 1+\left(\frac{\frac{1}{100}}{2}=\frac{1}{200}=\frac{5}{1000}\right)=1/005$

تمرین: حاصل $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{2x+1}-1}{x}$ برابر کدام است؟

۱) ۱ ۲) صفر ۳) $\sqrt{\frac{2}{3}}$ ۴) $\frac{1}{2}$

$\frac{(1+\frac{2x}{3})-1}{x}=\frac{2}{3}$

Hop یا $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2}{3\sqrt[3]{(1+2x)^2}}=\frac{2}{3}$

@salamianriazi
www.samansalamian.ir

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1-x^2}-\sqrt[4]{1-3x}}{\sqrt[5]{1-\frac{x}{2}}-\sqrt{1+x}}=\frac{0}{0}$$ هم‌ارزی برونی

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(1+\frac{-x^2}{3}\right)-\left(1+\frac{(-3x)}{4}\right)}{\left(1+\frac{-\frac{x}{2}}{5}\right)-\left(1+\frac{x}{2}\right)}=\frac{-\frac{x^2}{3}+\frac{3x}{4}}{-\frac{x}{10}-\frac{x}{2}}$$ کم‌توان

$$\frac{-x-5x=-6x}{10}$$

$$=\frac{\frac{3x}{4}}{\frac{-6x}{10}}=\frac{3\times 10}{4\times(-6)}=\frac{5}{-24}$$

چند سؤال مهم، چند ایدهٔ مهم:

تمرین: حاصل $\lim\limits_{x\to -3}\sqrt{\frac{x^2-4x-21}{2x^2+7x+3}}$ برابر کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\sqrt{2}$ ✓ ۴) $\sqrt{3}$

$$\lim_{x\to -3}\sqrt{\frac{0}{0}}\xrightarrow{\text{Hop}}\frac{2x-4}{4x+7}=\frac{-10}{-5}=2=\sqrt{2}$$

تمرین: حاصل $\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x^3+x+1)(x^4-3x+2)}{(x^2-\sqrt{x})\sqrt{5x-1}}$ برابر کدام است؟

۱) ۱ ✓ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

فرقی نمی‌کند عدد سیخ رو عدد بذار به $\frac{0}{0}$ آن‌هوپ بزن!

$$\frac{3}{2}\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^4-3x+2}{x^2-\sqrt{x}}=\frac{0}{0}\xrightarrow{\text{Hop}}\frac{4x^3-3+0}{2x-\frac{1}{2\sqrt{x}}}=\frac{1}{2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}}\cdot\frac{2}{3}\right)=1$$

تمرین: حاصل $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{x^2-1}+x-1}{\sqrt{4x-4}+x^2-1}$ برابر کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $\sqrt{2}$ ۴) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ✓

$x\to 1^+$

$t=x-1\to 0^+$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{(x+1)(x-1)}+(x-1)}{\sqrt{4(x-1)}+(x+1)(x-1)}=\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{2t}+t}{2\sqrt{t}+2t}$$ کم‌توان $t\to 0$

$$\frac{\sqrt{2}\sqrt{t}}{2\sqrt{t}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$2\sqrt{x-1}$

تمرین: حاصل $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{|x+1|-|x-1|}{\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}}$ برابر کدام است؟

۱) $\sqrt{2}$ ۲) $2\sqrt{2}$ ۳) $-\sqrt{2}$ ۴) $-2\sqrt{2}$

برونلی

$\sqrt{1+u} \sim 1+\frac{u}{2}$ $u\to 0$

$\frac{x+1-(-x+1)}{\sqrt{1-\left(1+\frac{-x^2}{2}\right)}} = \frac{2x}{\sqrt{\frac{x^2}{2}}} = \frac{2x}{\frac{|x|}{\sqrt{2}}} = -2\sqrt{2}$

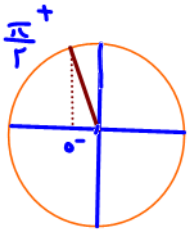
$x\to 0^-$

حالت $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ در حدهای مثلثاتی

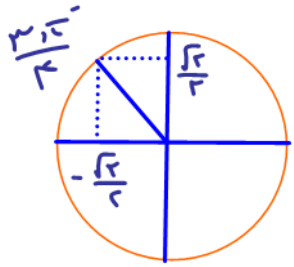
تمرین: حاصل $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^+} \frac{\sin x+[\cos x]}{\cos^2 x}$ کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

برالتو برمی داریم به جایش عددی ذاریم...

۱) $-\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۱- ۴) حد وجود ندارد.



$\frac{\sin x+[0^-]}{1-\sin^2 x} = \frac{-1}{(1-\sin x)(1+\sin x)} = -\frac{1}{2}$



تمرین: حاصل $\lim\limits_{x\to\frac{3\pi}{4}^-}\frac{1+\cot x}{1+\tan x}$ کدام است؟

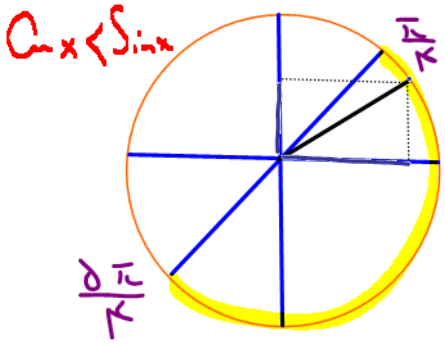
۱) -1 ✓ ۲) صفر ۳) ۱ ۴) $+\infty$

$$\lim_{x\to\frac{3\pi}{4}^-}\frac{1+\frac{\cos x}{\sin x}=\frac{\sin x+\cos x}{\sin x}}{1+\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{\cos x+\sin x}{\cos x}}=\frac{\cos x}{\sin x}=-1$$

تمرین: حاصل $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}^-}\frac{|\sin x-\cos x|}{\tan x-1}$ کدام است؟

۱) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۳) $\sqrt{2}$ ۴) $-\sqrt{2}$

دایره قدرت



$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}^-}\frac{|\sin x-\cos x|=-(\sin x-\cos x)}{\frac{\sin x}{\cos x}-1=\frac{\sin x-\cos x}{\cos x}}=-\cos x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

تمرین: حاصل $\lim\limits_{x\to\pi^+}\frac{|1+\cos x|}{\sin^2 x}$ کدام است؟

۱) $-\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۱ ۴) -1

$$\lim_{x\to\pi}\frac{|1+\cos x=2\cos^2\frac{x}{2}|}{\left(\sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\right)^2=4\sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}$$

$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

تمرین: حاصل $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin^3 x}{1-\sin^2 x}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) صفر

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{(1-\sin x)(1+\sin x+\sin^2 x)}{(1-\sin x)(1+\sin x)}=\frac{3}{2}$

تمرین: حد چپ $\frac{\sqrt{1-\sin 2x}}{\sin x-\cos x}$ در $x=\frac{\pi}{4}$:

۱) ۱ ۲) -1 ۳) $\sqrt{2}$ ۴) $-\sqrt{2}$

دایره قدرت

فرمول $1-\sin 2x=(\sin x-\cos x)^2$

$\frac{\sqrt{(\sin x-\cos x)^2}}{\sin x-\cos x}=\frac{|\sin x-\cos x|}{\sin x-\cos x}=-\frac{(\sin x-\cos x)}{\sin x-\cos x}=-1$

تمرین: حاصل $\lim\limits_{x\to\pi^-}\frac{\sqrt{1+\cos x}}{\sin x}$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۲) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $-\frac{1}{2}$

$\frac{\sqrt{1+\cos x}}{\sin x}\overset{\text{فرمول}}{=}\frac{\sqrt{2\cos^2\frac{x}{2}}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\frac{\sqrt{2}\left|\cos\frac{x}{2}\right|}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$ فرمول

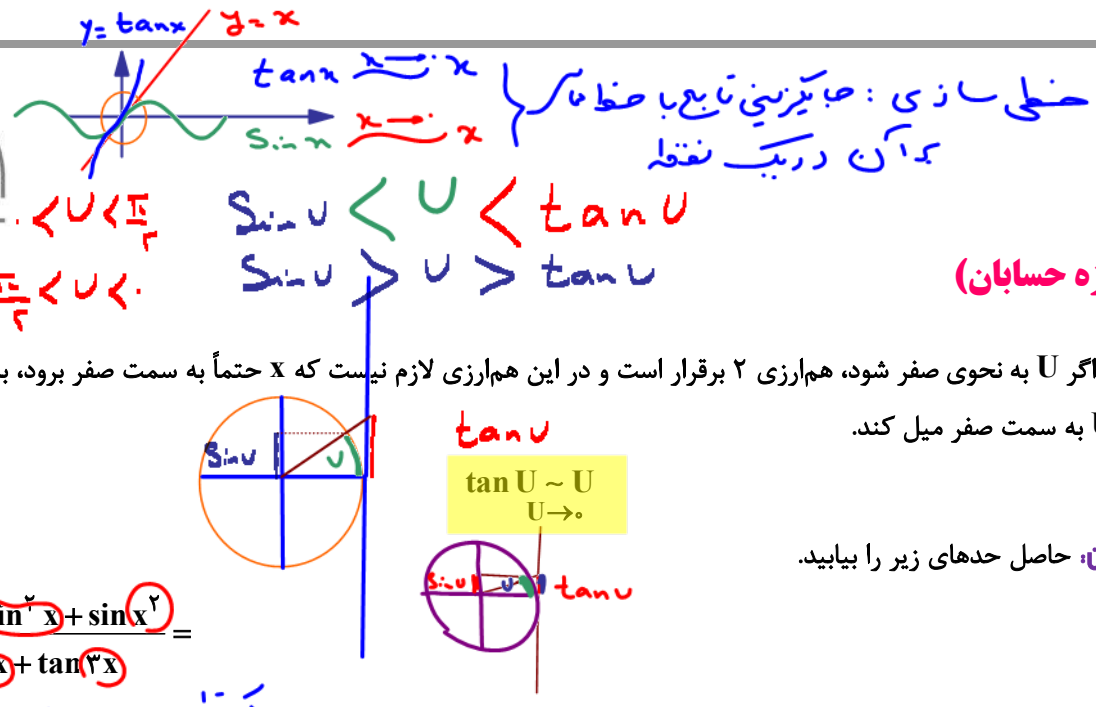
تمرین: حاصل $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{1-\cos 2x}{\sin x\tan x}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) -2 ۳) ۱ ۴) -1

$\frac{1-\cos 2x}{\frac{\sin x}{\cos x}\sin x}\overset{\text{فرمول}}{=}\frac{2\sin^2 x}{\frac{\sin^2 x}{\cos x}}=2\cos x=-2 \quad (x\to\pi)$

$1-\cos\theta=2\sin^2\frac{\theta}{2}$

$1+\cos\theta=2\cos^2\frac{\theta}{2}$



(ویژه حسابان)

اگر U به نحوی صفر شود، هم‌ارزی ۲ برقرار است و در این هم‌ارزی لازم نیست که x حتماً به سمت صفر برود، بلکه باید به جایی برود که U به سمت صفر میل کند.

$\sin U \sim U \quad (U \to 0)$

$\tan U \sim U \quad (U \to 0)$

تمرین: حاصل حدهای زیر را بیابید.

۱) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x + \sin^2 x + \sin x^2}{\tan^3 x + \tan 3x} =$

۲) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\tan 4x}}{2\sqrt{x} + \sqrt{8\sin 2x}} =$

۳) $\sin^n u \underset{u\to 0}{\sim} u^n$ $\qquad \sin^2 2x \underset{x\to 0}{\sim} (2x)^2 = 4x^2$

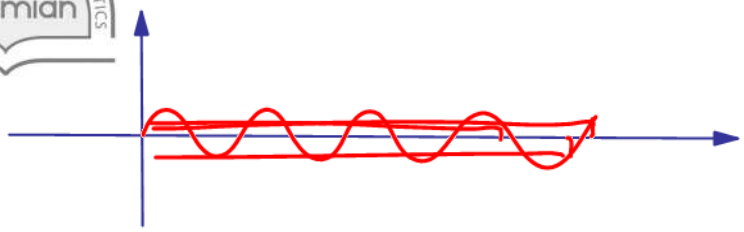
۴) $\tan^n u \underset{u\to 0}{\sim} u^n$ $\qquad \tan^4 \pi x \underset{x\to 0}{\sim} (\pi x)^4 = \pi^4 x^4$

تمرین: حاصل حد مقابل را به دست آورید.

$\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\sin^3 2x - \tan^2 3x}{x|2x|} =$

تمرین: حاصل $\lim\limits_{x\to\sqrt{2}} \dfrac{\sin(2-x^2)}{\sqrt{2}-x}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{2}$ ۲) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ۳) $2\sqrt{2}$ ✓ ۴) صفر

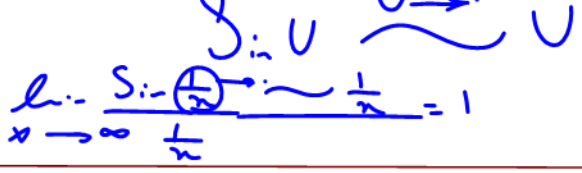


تمرین: حاصل $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) صفر ۳) ∞ ۴) حد ندارد.

تمرین: حاصل $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) صفر ۳) ∞ ۴) $\sin 1$



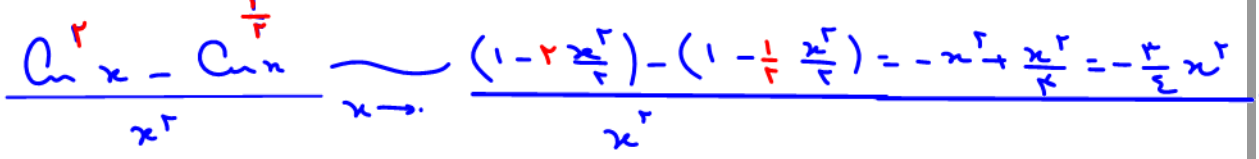
---

۵) $1-\cos u \underset{u\to 0}{\sim} \frac{1}{2}u^2$ $\qquad 1-\cos 3x \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{2}9x^2$

۶) $1-\cos^n u \underset{u\to 0}{\sim} \frac{1}{2}nu^2$ $\qquad 1-\cos^2\frac{x}{2} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{2}\times 2\times(\frac{x}{2})^2=\frac{x^2}{4}$

تمرین: حاصل $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos^2 x-\sqrt{\cos x}}{x^2}$، کدام است؟ (سراسری ریاضی ۹۳)

۱) $-\frac{3}{2}$ ۲) $-\frac{3}{4}$ ۳) $-\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{3}{2}$



تمرین: حاصل $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{1-\cos 2x}}{\tan x}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{2}$ ۲) $-\sqrt{2}$ ۳) ۲ ۴) -2

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{1-\cos 2x}}{\tan x}\sim\frac{\sqrt{\frac{(2x)^2}{2}}}{x}=\frac{\sqrt{2x^2}}{x}=\frac{\sqrt{2}|x|}{x}=-\sqrt{2}$$

تمرین: فرض کنید $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\tan^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-1\right)}{(1-\cos(\sqrt{2x}))^n}=a$، مقدار $a+n$ کدام است؟ (ریاضی ۱۴۰۰)

۱) $\frac{7}{4}$ ۲) $\frac{9}{4}$ ۳) $\frac{5}{8}$ ۴) $\frac{17}{4}$ ✓

$$\tan^2 u\sim u^2 \quad (u\to 0)$$

$$\sqrt{1+u}\overset{\text{برنولی}}{\sim}1+\frac{u}{2} \quad (u\to 0)$$

$$1-\cos u\sim\frac{u^2}{2} \quad (u\to 0)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-1\right)^2\sim\left(\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\sim 1-\left(1-\frac{x^2}{2}\right)\right)^2}{\left(\frac{(\sqrt{2}x)^2}{2}=\frac{2x^2}{2}=x^2\right)^n}$$

$$\frac{\left(\frac{x^2}{2}\right)^2=\frac{x^4}{4}}{(x^2)^n=x^{2n}}=\frac{1}{4}=a$$

$$2n=4\to n=2$$

$$a+n=\frac{1}{4}+2=\frac{17}{4}$$

Homework (1) (ویژه حسابان ۱)

حاصل حدهای زیر را بیابید.

۱

$$\lim_{x\to -۲} = \frac{x^۲ - ۴}{\sqrt{۲x + ۸} + x}$$

۲

$$\lim_{x\to ۱} \frac{۳x^۲ - ۲x - ۱}{x^۲ - x}$$

۳

$$\lim_{x\to ۳^-} \frac{x^۲[x] - ۱۸}{x^۳ - ۱۰x + ۳}$$

۴

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{۴}} \frac{۴x - \pi}{\cos ۲x}$$

حد توابع زیر را به‌دست آورید.

۵

$$\lim_{x\to ۲^+} \frac{۳x + ۱}{[۴x - ۱]}$$

۶

$$\lim_{x\to ۲} \frac{x^۳ - ۸}{x^۲ - ۴}$$

۷ حاصل $\lim_{x\to \frac{\pi}{۲}} \frac{۱ - \sin^۲ x}{۱ - \sin x}$ کدام است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) -۱
۴) -۲

۸ حاصل $\lim_{x\to ۳} \frac{x^۲ - ۳x}{x^۲ - ۹}$ کدام است؟

۱) ۱
۲) $\frac{۱}{۲}$
۳) -۱
۴) ۲

۹ اگر $f(x)=\frac{(x-۲)(x+۱)}{x-۱}$ و $g(x)=\frac{x^۲+۱}{۳x+۳}$ باشد، حاصل $\lim_{x\to -۱}(f\times g)(x)$ کدام است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) حد ندارد.

۱۰ اگر $f(x)=\frac{|x-۳|}{x-۳}\cdot(x+۱)$ باشد، مقدار $\lim_{x\to ۳^-} f(x)+\lim_{x\to ۳^+} f(x)$ کدام است؟

۱) صفر
۲) ۸
۳) -۱
۴) ۲

۱۱ حاصل $\lim_{x\to ۴}\frac{x^۲-۴x}{\sqrt{x}-۲}$ کدام است؟

۱) ۱۲
۲) ۱۴
۳) ۱۶
۴) ۱۸

۱۲ حاصل $\lim_{x\to ۱^+}\frac{x[۲x]-۲}{x^۲-۱}$ کدام است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) $\frac{۱}{۲}$
۴) -۱

۱۳ حاصل $\lim_{x\to -۲}\frac{x^۲-۴}{x^۲+x-۲}$ کدام است؟

۱) صفر
۲) $\frac{۲}{۳}$
۳) $\frac{۴}{۵}$
۴) $\frac{۴}{۳}$

Homework (1) پاسخ

۱

$$\lim_{x\to -۲}\frac{x^۲-۴}{\sqrt{۲x+۸}+x}$$
$$=\lim_{x\to -۲}\frac{(x^۲-۴)(\sqrt{۲x+۸}-x)}{(\sqrt{۲x+۸}+x)(\sqrt{۲x+۸}-x)}$$
$$=\lim_{x\to -۲}\frac{(x-۲)(x+۲)A}{۲x+۸-x^۲}$$
$$=\lim_{x\to -۲}\frac{(x-۲)\cancel{(x+۲)}A}{\cancel{(x+۲)}(-x+۴)}$$
$$=\frac{-۴(۴)}{۶}=\frac{-۸}{۳}$$

۲

$$\lim_{x\to ۱}\frac{(x-۱)(۳x+۱)}{x(x-۱)}=\lim_{x\to ۱}\frac{-\cancel{(x-۱)}(۳x+۱)}{x\cancel{(x-۱)}}=+۴$$

۳

$$\lim_{x\to ۳^-}\frac{۲x^۲-۱۸}{x^۳-۱۰x+۳}=\lim_{x\to ۳^-}\frac{\cancel{(x-۳)}(۲x+۶)}{\cancel{(x-۳)}(x^۲+۳x-۱)}=\frac{۱۲}{۱۷}$$

۴

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{۴}}\frac{۴x-\pi}{\cos ۲x}=\lim_{y\to ۰}\frac{۴(\frac{\pi}{۴}+y)-\pi}{\cos(\frac{\pi}{۲}+۲y)}$$
$$x-\frac{\pi}{۴}=y\to x=\frac{\pi}{۴}+y$$
$$\lim_{y\to ۰}\frac{۴y}{-\sin ۲y}=\lim_{y\to ۰}\frac{۴y}{-۲y}=-۲$$

۵

$$\frac{۳\times ۲+۱}{[۷^+]}=\frac{۷}{۷}=۱$$

۶

$$\frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)(x+2)} = \frac{4+4+4}{4} = \frac{12}{4} = 3$$

۷ گزینه ۲

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin^2 x}{1-\sin x} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{(1-\sin x)(1+\sin x)}{1-\sin x}$$

$$= \lim_{x\to \frac{\pi}{2}}(1+\sin x) = 1+1 = 2$$

۸ گزینه ۲

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-3x}{x^2-9} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 3}\frac{x(x-3)}{(x-3)(x+3)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

۹ گزینه ۱

$$(f\times g)(x) = \frac{(x-2)(x+1)}{x-1}\times\frac{x^2+1}{3(x+1)} = \frac{(x-2)(x^2+1)}{3(x-1)}$$

$$\lim_{x\to -1}(f\times g)(x) = \lim_{x\to -1}\frac{(x-2)(x^2+1)}{3(x-1)} = \frac{(-3)(2)}{3(-2)} = 1$$

۱۰ گزینه ۱

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+}\left(\frac{(x-3)}{x-3}\cdot(x+1)\right) = \lim_{x\to 3^+}(x+1) = 4$$

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-}\left(\frac{-(x-3)}{x-3}\cdot(x+1)\right) = \lim_{x\to 3^-}(-x-1) = -4$$

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) + \lim_{x\to 3^-} f(x) = 4+(-4) = 0$$

۱۱ گزینه ۳

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-4x}{\sqrt{x}-2} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-4x}{\sqrt{x}-2}\times\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2} = \lim_{x\to 4}\frac{x(x-4)(\sqrt{x}+2)}{x-4} = 16$$

۱۲ گزینه ۱

$$x \to ۱^+ : [۲x] = [۲(۱^+)] = [۲^+] = ۲$$

$$\lim_{x \to ۱^+} \frac{۲x - ۲}{x^۲ - ۱} = \lim_{x \to ۱^+} \frac{۲(x-۱)}{(x-۱)(x+۱)} = \lim_{x \to ۱^+} \frac{۲}{x+۱} = \frac{۲}{۲} = ۱$$

۱۳ گزینه ۴

$$\lim_{x \to -۲} \frac{x^۲ - ۴}{x^۲ + x - ۲} = \lim_{x \to -۲} \frac{(x-۲)(x+۲)}{(x-۱)(x+۲)} = \lim_{x \to -۲} \frac{x-۲}{x-۱} = \frac{-۴}{-۳} = \frac{۴}{۳}$$

Homework (2)

۱ حاصل $\lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{\cos^۲x-\sqrt{\cos x}}{x^۲}$، کدام است؟

۱) $-\dfrac{۳}{۲}$ ۲) $-\dfrac{۳}{۴}$

۳) $-\dfrac{۱}{۴}$ ۴) $\dfrac{۳}{۲}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۳

۲ حاصل $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin(۱+\cos x)}{۱-\cos ۲x}$ کدام است؟

۱) $\dfrac{۱}{۴}$ ۲) $\dfrac{۱}{۲}$

۳) ۱ ۴) ۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۲

۳ اگر $\lim\limits_{x\to\frac{۱}{۶}}\dfrac{[۴\cos^۲\pi x]-۱۲x}{ax+b}=\dfrac{۱}{۲}$ باشد، آنگاه $a+b$ کدام است؟ (نماد [ ] به مفهوم جزء صحیح است.)

۱) -۲۰ ۲) -۱۶

۳) ۱۰ ۴) ۱۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۲

۴ حد عبارت $\left[\dfrac{x}{\sin x}\right]+۲\left[\dfrac{\sin x}{x}\right]$، وقتی $x\to ۰$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۳ ۴) حد ندارد.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۲

۵ مقدار غیرصفر حد $\lim\limits_{x\to ۸}\dfrac{b\sqrt{۲+\sqrt[۳]{x}}-۲b}{ax-b}$ کدام است؟

۱) $\dfrac{۱}{۱۲}$ ۲) $\dfrac{۱}{۶}$

۳) $\dfrac{۱}{۴۸}$ ۴) $\dfrac{۱}{۲۴}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۶ مقدار غیرصفر حد $\lim\limits_{x\to ۱}\frac{b\sqrt{۲-\sqrt[۳]{x}}-b}{ax+b}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$
۲) $-\frac{۱}{۳}$
۳) $-\frac{۱}{۶}$
۴) $\frac{۱}{۶}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

۷ اگر $f(x)=(\frac{-۱+\sin x}{۱+\sin x})^{۲}$ و $f(x)=xg(x)+۱$ باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to ۰}g(x)$ کدام است؟

۱) ۴
۲) ۲
۳) -۴
۴) -۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۲

۸ حد عبارت $\frac{۲-\sqrt[۳]{۳x+۲}}{۵x^{۲}-۱۸x+۱۶}$، وقتی $x\to ۲$، کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۳}$
۲) $-\frac{۱}{۴}$
۳) $-\frac{۱}{۶}$
۴) $-\frac{۱}{۸}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

۹ حاصل $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۴}}\frac{\tan x-۱}{\cos ۲x}$ کدام است؟

۱) -۱
۲) $-\frac{۱}{۲}$
۳) $\frac{۱}{۲}$
۴) ۱

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۱

۱۰ حاصل $\lim\limits_{x\to ۰^{-}}\frac{\sqrt{۲-۳x}-\sqrt{۲-۵x}}{\sqrt{۲-۲\cos x}}$ کدام است؟

۱) $-\sqrt{۲}$
۲) $\sqrt{۲}$
۳) $-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$
۴) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۱

۱۱ فرض کنید $\lim\limits_{x\to ۰^{+}}\frac{\sin\left(\sqrt{۱-x^{۳}}-۱\right)-۲\tan[x]}{x^{n}\left(۱-\cos\left(\sqrt{۳x}\right)\right)}=a$ باشد، مقدار a^{n}، کدام است؟ ([ ] نماد جزء صحیح است.)

۱) $\frac{۱}{۹}$
۲) $\frac{۲}{۹}$
۳) $\frac{۱}{۳}$
۴) $\frac{۲}{۳}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۰

۱۲ حاصل $\lim_{x\to ۰}\frac{۱-\cos^۳ x}{۱-\sqrt{۱+x^۲}}([۲x]+[-۲x])$ کدام است؟ (نماد [ ] جزء صحیح است.)

۱) -۳ ۲) ۳

۳) صفر ۴) حد ندارد.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۴

۱۳ حاصل $\lim_{x\to ۲^+}\frac{x^۲-۴}{x^۳-[x^۳]}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) $\frac{۱}{۳}$

۳) ۱ ۴) $+\infty$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

۱۴ اگر $f(x)=x(\sqrt{\frac{۲x+۱}{۵x+۹}})^۳$ باشد، حاصل $\lim_{x\to ۰}\frac{f(x)}{x}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲۷}$ ۲) $\frac{۱}{۹}$

۳) $\frac{۲}{۷}$ ۴) $\frac{۳}{۱۴}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

۱۵ حاصل $\lim_{x\to -۱}\frac{\sqrt{۲x+۳}-\sqrt{۳x+۴}}{۱+\sqrt[۳]{x}}$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) $\frac{۱}{۲}$

۳) -۲ ۴) $-\frac{۳}{۲}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۱

۱۶ حاصل $\lim_{x\to \frac{\pi}{۴}}\frac{۱-\sin ۲x}{(۱-\tan x)^۲}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۱

۳) ۲ ۴) $+\infty$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۲

۱۷ حاصل $\lim_{x\to \frac{۳\pi}{۴}^-}\frac{۱+\cot x}{۱+\tan x}$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) صفر

۳) ۱ ۴) $+\infty$

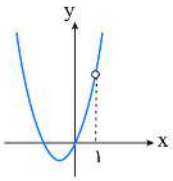
کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۲

۱۸ حاصل $\lim\limits_{x\to ۱}\frac{۲x-۷\sqrt{x}+۵}{۲x-\sqrt{۳x+۱}}$، کدام است؟

۱) $-۱/۵$
۲) $-۱/۲$
۳) $-۰/۸$
۴) $-۰/۶$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۹

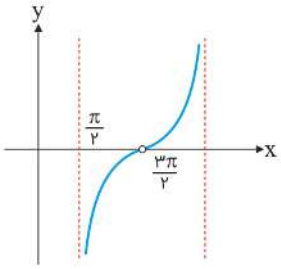
۱۹ شکل زیر نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{۴x^{۳}+ax+b}{x-۱}$ است. دوتایی مرتب (a,b) کدام است؟



۱) $(۰,-۴)$
۲) $(-۴,۰)$
۳) $(-۴,۱)$
۴) $(۴,۰)$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۷

۲۰ شکل زیر قسمتی از نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{۱+a\sin x}{b+\cos x}$ است. $f(\frac{\pi}{۳})$ کدام است؟



۱) $۱-\sqrt{۳}$
۲) $۲-\sqrt{۳}$
۳) $۱+\sqrt{۳}$
۴) $۲+\sqrt{۳}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۳

۲۱ حاصل $\lim\limits_{x\to ۱^{+}}\frac{\sin^{۲}\pi x}{[x]+\cos\pi x}$، کدام است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) π
۴) ۲π

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۸

۲۲ حاصل $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{\tan x-\sin x}{x^{۳}}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$
۲) $\frac{۱}{۳}$
۳) $\frac{۱}{۶}$
۴) صفر

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۱

۲۳ حد عبارت $\frac{۱-\cos\sqrt{x}}{x}$، وقتی $x \to ۰^+$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) $-\frac{۱}{۲}$

۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) ۱

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۶

۲۴ حاصل $\lim_{x\to ۰}\frac{۱-\cos ۲x}{x\sin x}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$

۳) ۱ ۴) ۲

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۰

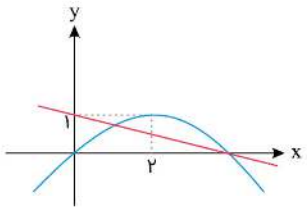
۲۵ فرض کنید $a = \lim_{x\to ۰^+}\frac{\tan^۲(\frac{۱}{\sqrt{۱-x^۲}}-۱)}{(۱-\cos(\sqrt{۲x}))^n}$. مقدار $a+n$، کدام است؟

۱) $\frac{۷}{۴}$ ۲) $\frac{۹}{۴}$

۳) $\frac{۱۵}{۴}$ ۴) $\frac{۱۷}{۴}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۰

۲۶ نمودار تابع سهمی f و خط راست g در شکل زیر داده شده است. مقدار $\lim_{x\to ۴^-}\frac{f(x)+g(x)}{۴-x}$، کدام است؟



۱) $-\frac{۳}{۲}$

۲) $-\frac{۵}{۴}$

۳) $\frac{۵}{۴}$

۴) $\frac{۳}{۲}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

۲۷ حاصل $\lim_{x\to\frac{۳\pi}{۴}}\frac{\tan^۲x-۱}{\cos ۲x}$، کدام است؟

۱) ۲- ۲) $\frac{۱}{۲}$

۳) ۱ ۴) ۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۸

۲۸ حاصل $\lim_{x\to\pi^+} \frac{۲\sin(-x)\cos ۲x}{\sqrt{۲+۲\cos x}}$، کدام است؟ (با تغییر)

۱) -۲ ۲) -۱

۳) ۱ ۴) ۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۷

۲۹ حاصل $\lim_{x\to ۴} \frac{۳x^۲ - ۱۰x - ۸}{\sqrt{۳-\sqrt{x}} - ۱}$ کدام است؟

۱) -۱۱۲ ۲) -۹۶

۳) -۸۴ ۴) -۷۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۷

۳۰ حاصل $\lim_{x\to ۰^-} \frac{\sqrt{۲+۳x}-\sqrt{۲-x}}{\sqrt{۱-\cos x}}$، کدام است؟

۱) -۲ ۲) $-\sqrt{۲}$

۳) $\sqrt{۲}$ ۴) ۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

۳۱ حد عبارت $\frac{|x^۲ - x - ۲|}{۲x - \sqrt{x^۲+۱۲}}$ وقتی $x \to ۲^-$ کدام است؟

۱) -۳ ۲) -۲

۳) ۲ ۴) ۳

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۰

۳۲ حاصل $\lim_{x\to \frac{\pi}{۴}} \frac{۱-\tan x}{\sin(x-\frac{\pi}{۴})}$ کدام است؟

۱) -۲ ۲) -۱

۳) ۱ ۴) ۲

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۷

۳۳ اگر $\lim_{x\to \frac{\pi}{۴}} \frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt{\sin x}}{\cos(x+\frac{\pi}{۴})} = ۲^a$ باشد، آنگاه a کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۲}$ ۲) $-\frac{۱}{۴}$

۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۲

۳۴ حد عبارت $\frac{x^۲ + ۱۰x + ۱۶}{۱۲ + ۶\sqrt[۳]{x}}$ وقتی $x \to -۸$، کدام است؟

۱) -۲۴
۲) -۱۸
۳) -۱۲
۴) -۶

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۳۵ حاصل $\lim_{x \to -۱} \frac{۲x^۲ + ۵x + ۳}{۲ - \sqrt{۲ + \sqrt{۳ - x}}}$ کدام است؟

۱) ۸
۲) ۱۲
۳) ۱۶
۴) ۲۴

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۷

۳۶ حاصل $\lim_{x \to ۲^+} \frac{۲ - \sqrt[۳]{x + ۶}}{\sqrt{x^۲ - ۴x + ۴}}$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۶}$
۲) $-\frac{۱}{۱۲}$
۳) $\frac{۱}{۱۲}$
۴) $\frac{۱}{۶}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۳

۳۷ حاصل $\lim_{x \to \frac{۳\pi}{۴}^-} \frac{۱ - \tan^۲ x}{\sqrt{۱ + \sin ۲x}}$ ، کدام است؟

۱) $-۲\sqrt{۲}$
۲) $-\sqrt{۲}$
۳) $\sqrt{۲}$
۴) $۲\sqrt{۲}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۷

۳۸ حاصل $\lim_{x \to ۱} \frac{۱ - \sqrt{x}}{۲ - \sqrt{۵ - x}}$ کدام است؟

۱) -۴
۲) -۲
۳) ۲
۴) ۴

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۸

۳۹ حاصل $\lim_{x \to -۱} \frac{۲x + \sqrt{۳ - x}}{x^۲ + x}$ کدام است؟

۱) $-\frac{۷}{۴}$
۲) $-\frac{۱}{۴}$
۳) $\frac{۳}{۴}$
۴) $\frac{۵}{۴}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۵

۴۰ حاصل $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{|\sin x|}{x}$ کدام است؟

۱) -1
۲) صفر
۳) ۱
۴) موجود نیست.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۰

پاسخ Homework (2)

۱ گزینه ۲

روش اول:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x-\sqrt{\cos x}}{x^2}\times\frac{\cos^2 x+\sqrt{\cos x}}{\cos^2 x+\sqrt{\cos x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos^4 x-\cos x}{x^2(\cos^2 x+\sqrt{\cos x})}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x(\cos x-1)(\cos^2 x+\cos x+1)}{x^2(\cos^2 x+\sqrt{\cos x})}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x(\cos^2 x+\cos x+1)}{(\cos^2 x+\sqrt{\cos x})}\times\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}$$
$$=\frac{1\times 3}{2}\times\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}\times\frac{\cos x+1}{\cos x+1}=\frac{3}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x-1}{x^2(\cos x+1)}=\frac{3}{2}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x+1}\times\lim_{x\to 0}\frac{-\sin^2 x}{x^2}$$
$$=\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}\times(-1)=-\frac{3}{4}$$

روش دوم: به کمک هم‌ارزی $\cos^n\alpha\underset{\alpha\to 0}{\sim}1-\frac{n}{2}\alpha^2$ حد به‌راحتی محاسبه می‌شود.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x-\cos^{\frac{1}{2}}x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\frac{2}{2}x^2)-(1-\frac{1}{4}x^2)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{3}{4}x^2}{x^2}=-\frac{3}{4}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۳

۲ گزینه ۱

روش اول: داریم $\cos 2x=2\cos^2 x-1$، پس:

$$1-\cos 2x=1-(2\cos^2 x-1)=2-2\cos^2 x$$

بنابراین:

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin(1+\cos x)}{1-\cos 2x}=\lim_{x\to\pi}\frac{\sin(1+\cos x)}{2-2\cos^2 x}=\lim_{x\to\pi}\frac{\sin(1+\cos x)}{2(1-\cos^2 x)}=\lim_{x\to\pi}\frac{\sin(1+\cos x)}{2(1-\cos x)(1+\cos x)}$$
$$=\lim_{x\to\pi}\frac{1}{2(1-\cos x)}\times\lim_{x\to\pi}\frac{\sin(1+\cos x)}{1+\cos x}\overset{t=1+\cos x}{=}\frac{1}{4}\times\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=\frac{1}{4}\times 1=\frac{1}{4}$$

روش دوم: چون $\lim_{x\to\pi}(1+\cos x)=0$ و از طرفی $\sin\alpha\underset{\alpha\to 0}{\sim}\alpha$، پس $\sin(1+\cos x)\underset{x\to\pi}{\sim}1+\cos x$، درنتیجه:

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin(1+\cos x)}{1-\cos 2x}=\lim_{x\to\pi}\frac{1+\cos x}{1-\cos 2x}\overset{\text{hop}}{=}\lim_{x\to\pi}\frac{-\sin x}{2\sin 2x}=\lim_{x\to\pi}\frac{-\sin x}{4\sin x\cos x}=\lim_{x\to\pi}\frac{-1}{4\cos x}=\frac{1}{4}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۲

۳ گزینه ۱

ابتدا تعیین می کنیم حاصل $[۴\cos^۲\pi x]$ وقتی $x \to \frac{۱}{۶}^+$، برابر چه عددی می شود. با توجه به این که حاصل حد برابر $\frac{۱}{۲}$ است، مقادیر a و b و در نهایت مقدار $a+b$ را محاسبه می کنیم.

$$x \to \frac{۱}{۶}^+ \Rightarrow x > \frac{۱}{۶} \Rightarrow \pi x > \frac{\pi}{۶} \Rightarrow \cos \pi x < \cos \frac{\pi}{۶}$$

دقت کنید که در ناحیهٔ اول مثلثاتی با افزایش مقدار x، مقدار $\cos x$ کاهش پیدا می کند. چون πx از $\frac{\pi}{۶}$ بزرگ تر است، بنابراین مقدار $\cos \pi x$ از مقدار $\cos \frac{\pi}{۶}$ کمتر خواهد بود.

$$\xrightarrow{\cos \frac{\pi}{۶} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}} \cos \pi x < \frac{\sqrt{۳}}{۲} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} \cos^۲ \pi x < \frac{۳}{۴}$$
$$\xrightarrow{\times ۴} ۴\cos^۲ \pi x < ۳ \Rightarrow ۴\cos^۲ \pi x \to ۳^- \Rightarrow [۴\cos^۲ \pi x] = ۲$$

پس حاصل صورت کسر وقتی $x \to \frac{۱}{۶}^+$ برابر صفر می شود. اما از آن جا که حاصل حد برابر عدد غیر صفر $\frac{۱}{۲}$ است، اگر وقتی $x \to \frac{۱}{۶}^+$ مخرج کسر عددی غیر از صفر باشد حاصل حد برابر صفر می شود و چون حاصل حد برابر $\frac{۱}{۲}$ داده شده پس باید وقتی $x \to \frac{۱}{۶}^+$، مخرج کسر هم برابر صفر شود. پس داریم:

$$\lim_{x \to \frac{۱}{۶}^+} ax + b = ۰ \Rightarrow \frac{a}{۶} + b = ۰ \Rightarrow b = -\frac{a}{۶} \Rightarrow a = -۶b \quad (I)$$

با فرض $a = -۶b$ و قرار دادن آن در حد داده شده و حذف عامل صفر کننده، حاصل حد را به دست می آوریم.

$$\lim_{x \to \frac{۱}{۶}^+} \frac{۲ - ۱۲x}{ax + b} = \frac{۰}{۰} \Rightarrow \lim_{x \to \frac{۱}{۶}^+} \frac{۲ - ۱۲x}{-۶bx + b}$$
$$= \lim_{x \to \frac{۱}{۶}^+} \frac{۲(۱ - ۶x)}{b(-۶x + ۱)} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{۲}{b} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow b = ۴$$

$$\xrightarrow{(I)} a = -۶b = -۶ \times ۴ = -۲۴$$

بنابراین $a+b$ برابر است با:

$$a + b = -۲۴ + ۴ = -۲۰$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۲

۴ گزینه ۲

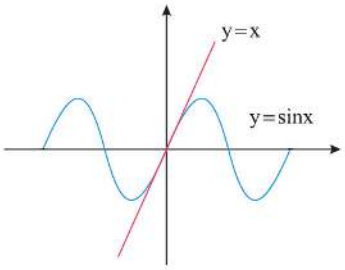
در مورد تابع $\frac{\sin x}{x}$ وقتی $x \to ۰$، رابطهٔ زیر برقرار است:

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < ۱$$

با استفاده از تساوی داده شده می توان گفت $\frac{\sin x}{x}$ وقتی $x \to ۰$ با مقادیر کمتر از ۱ به ۱ نزدیک می شود و تابع $\frac{x}{\sin x}$ وقتی $x \to ۰$ با مقادیر بیشتر از ۱ به ۱ نزدیک می شود.

با استفاده از نمودار دو تابع نیز می توان دریافت که:

$$\lim_{x \to ۰} \left[\frac{x}{\sin x}\right] = ۱ \quad , \quad \lim_{x \to ۰} \left[\frac{\sin x}{x}\right] = ۰$$



همان طور که مشاهده می کنید اگر $x > ۰$ باشد نمودار $y = x$ بالاتر از نمودار $y = \sin x$ قرار دارد و اگر $x < ۰$ باشد نمودار $y = x$ پایین تر از نمودار $y = \sin x$ قرار دارد.

$$x \to ۰ \Rightarrow \frac{x}{\sin x} \to ۱^{+} \Rightarrow \lim_{x \to ۰} \left[\frac{x}{\sin x}\right] = [۱^{+}] = ۱$$
$$x \to ۰ \Rightarrow \frac{\sin x}{x} \to ۱^{-} \Rightarrow \lim_{x \to ۰} \left[\frac{\sin x}{x}\right] = [۱^{-}] = ۰$$

بنابراین حد عبارت داده شده وقتی $x \to ۰$ برابر است با:

$$\lim_{x \to ۰} \left[\frac{\sin x}{x}\right] + ۲\left[\frac{x}{\sin x}\right] = ۰ + ۲(۱) = ۰ + ۲ = ۲$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۲

۵ گزینه ۲

با جاگذاری $x = ۸$ در صورت کسر به صفر می‌رسیم ولی پاسخ حد باید مقداری غیرصفر باشد، پس باید مخرج هم صفر شود که رفع ابهام کسر صفر صفرم داشته باشیم:

$$۸a - b = ۰ \Rightarrow ۸a = b$$

$$\lim_{x\to ۸} \frac{b(\sqrt{۲+\sqrt[۳]{x}}-۲)}{b(\frac{x}{۸}-۱)} \times \frac{\sqrt{۲+\sqrt[۳]{x}}+۲}{\sqrt{۲+\sqrt[۳]{x}}+۲} = \lim_{x\to ۸} \frac{\sqrt[۳]{x}+۲-۴}{\frac{x}{۲}-۴}$$

$$= \lim_{x\to ۸} \frac{\sqrt[۳]{x}-۲}{\frac{x}{۲}-۴} \times \frac{\sqrt[۳]{x^۲}+۲\sqrt[۳]{x}+۴}{\sqrt[۳]{x^۲}+۲\sqrt[۳]{x}+۴} = \lim_{x\to ۸} \frac{x-۸}{۶x-۴۸} = \lim_{x\to ۸} \frac{x-۸}{۶(x-۸)} = \frac{۱}{۶}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۶ گزینه ۴

صورت کسر به ازای $x = ۱$ صفر می‌شود، پس باید مخرج هم به ازای $x = ۱$ صفر شود تا حالت $\frac{۰}{۰}$ و رفع ابهام داشته باشیم.

$$a + b = ۰ \Rightarrow a = -b$$

$$\lim_{x\to ۱} \frac{-a\sqrt{۲-\sqrt[۳]{x}}+a}{ax-a} = \lim_{x\to ۱} \frac{-\sqrt{۲-\sqrt[۳]{x}}+۱}{x-۱} = \frac{۰}{۰}$$

$$\lim_{x\to ۱} \frac{-\sqrt{۲-\sqrt[۳]{x}}+۱}{x-۱} \times \frac{\sqrt{۲-\sqrt[۳]{x}}+۱}{\sqrt{۲-\sqrt[۳]{x}}+۱} = \lim_{x\to ۱} \frac{۱-۲+\sqrt[۳]{x}}{(x-۱)(۱+\sqrt{۲-\sqrt[۳]{x}})}$$

$$= \lim_{x\to ۱} \frac{\sqrt[۳]{x}-۱}{۲(x-۱)} \times \frac{(\sqrt[۳]{x^۲}+\sqrt[۳]{x}+۱)}{۲(x-۱)(\sqrt[۳]{x^۲}+\sqrt[۳]{x}+۱)} = \lim_{x\to ۱} \frac{x-۱}{۲(x-۱)\times ۳} = \frac{۱}{۶}$$

از قاعدهٔ هوپیتال هم می‌توان برای رفع ابهام $\frac{۰}{۰}$ استفاده کرد:

$$\lim_{x\to ۱} \frac{-\sqrt{۲-\sqrt[۳]{x}}+۱}{x-۱} \xrightarrow{\text{HOP}} \lim_{x\to ۱} \frac{-\frac{-۱}{۳\sqrt[۳]{x^۲}}}{\frac{۲\sqrt{۲-\sqrt[۳]{x}}}{۱}} = \frac{۱}{۶}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

۷ گزینه ۳

ابتدا تابع $g(x)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$xg(x) = f(x) - ۱ \Rightarrow g(x) = \frac{f(x) - ۱}{x}$$

پس:

$$\lim_{x\to ۰} g(x) = \lim_{x\to ۰} \frac{(\frac{-۱+\sin x}{۱+\sin x})^۲ - ۱}{x} = \frac{۰}{۰}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to ۰} \frac{\frac{(-۱+\sin x)^۲ - (۱+\sin x)^۲}{(۱+\sin x)^۲}}{x} = \lim_{x\to ۰} \frac{(-۱+\sin x)^۲ - (۱+\sin x)^۲}{x(۱+\sin x)^۲}$$

$$= \lim_{x\to ۰} \frac{-۴\sin x}{x(۱+\sin x)^۲} = -۴$$

راه‌حل دوم:

$$\lim_{x\to ۰} g(x) = \lim_{x\to ۰} \frac{(\frac{-۱+\sin x}{۱+\sin x})^۲ - ۱}{x} = \frac{۰}{۰}$$

$$\xrightarrow{H} \lim_{x\to ۰} \frac{۲(\frac{-۱+\sin x}{۱+\sin x})(\frac{۲\cos x}{(۱+\sin x)^۲})}{۱} = \frac{۲\times(-۱)\times ۲}{۱} = -۴$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۲

۸ گزینه ۴

$$\lim_{x\to ۲}\frac{۲-\sqrt[۳]{۳x+۲}}{۵x^۲-۱۸x+۱۶}=\frac{۰}{۰}$$

راه‌حل اول:

$$\lim_{x\to ۲}\frac{۲-\sqrt[۳]{۳x+۲}}{۵x^۲-۱۸x+۱۶}=\lim_{x\to ۲}\frac{۸-(۳x+۲)}{(۵x^۲-۱۸x+۱۶)(۴+۲\sqrt[۳]{۳x+۲}+\sqrt[۳]{(۳x+۲)^۲})}$$

$$=\lim_{x\to ۲}\frac{-۳(x-۲)}{۱۲(x-۲)(۵x-۸)}=\frac{-۱}{۸}$$

راه‌حل دوم:

$$\text{HOP}:\lim_{x\to ۲}\frac{۰-\frac{۳}{۳\sqrt[۳]{(۳x+۲)^۲}}}{۱۰x-۱۸}=\lim_{x\to ۲}\frac{-۱}{(۱۰x-۱۸)\sqrt[۳]{(۳x+۲)^۲}}$$

$$=\frac{-۱}{۲(۴)}=\frac{-۱}{۸}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

۹ گزینه ۱

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۱

گام اول

می‌دانیم: $\cos ۲x=\cos^۲x-\sin^۲x$ و $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$

گام دوم

وقتی $x\to\frac{\pi}{۴}$، حاصل حد به‌صورت مبهم $\frac{۰}{۰}$ می‌شود. باتوجه‌به گام اول، کسر را تا حد امکان ساده کرده و حاصل حد را محاسبه می‌کنیم.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}}\frac{\tan x-۱}{\cos ۲x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}-۱}{\cos^۲x-\sin^۲x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}}\frac{\frac{\sin x-\cos x}{\cos x}}{(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}}\frac{\frac{-(\cos x-\sin x)}{\cos x}}{(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}}\frac{-۱}{\cos x(\cos x+\sin x)}$$

$$=\frac{-۱}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}(\frac{\sqrt{۲}}{۲}+\frac{\sqrt{۲}}{۲})}=\frac{-۱}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}(\sqrt{۲})}=-۱$$

۱۰ گزینه ۳

روش اول:

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{2-3x}-\sqrt{2-5x}}{\sqrt{2(1-\cos x)}}=\lim_{x\to 0^-}\frac{(\sqrt{2-3x}-\sqrt{2-5x})(\sqrt{2-3x}+\sqrt{2-5x})}{\sqrt{2(1-\cos x)}(\sqrt{2-3x}+\sqrt{2-5x})}$$

$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{(2-3x)-(2-5x)}{\sqrt{4\sin^2\frac{x}{2}}(2\sqrt{2})}=\lim_{x\to 0^-}\frac{2x}{-2\sin\frac{x}{2}(2\sqrt{2})}=\lim_{x\to 0^-}\frac{4\frac{x}{2}}{-4\sqrt{2}(\sin\frac{x}{2})}=\frac{-1}{\sqrt{2}}=\frac{-\sqrt{2}}{2}$$

روش دوم:

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{2-3x}-\sqrt{2-5x}}{\sqrt{2(1-\cos x)}}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{2-3x}-\sqrt{2-5x}}{2|\sin\frac{x}{2}|}$$

$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{2-3x}-\sqrt{2-5x}}{-2\sin\frac{x}{2}}\overset{\text{HOP}}{=}\lim_{x\to 0^-}\frac{\frac{-3}{2\sqrt{2-3x}}+\frac{5}{2\sqrt{2-5x}}}{-\cos\frac{x}{2}}=\frac{\frac{-3}{2\sqrt{2}}+\frac{5}{2\sqrt{2}}}{-1}$$

$$=\frac{-2}{2\sqrt{2}}=\frac{-1}{\sqrt{2}}=\frac{-\sqrt{2}}{2}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۱

۱۱ گزینه ۱

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin(\sqrt{1-x^3}-1)-2\tan[x]}{x^n(1-\cos\sqrt{3x})}=a$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{1-x^3}-1}{x^n\times\frac{1}{2}(3x)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\frac{1}{2}x^3-1}{\frac{3}{2}x^{n+1}}$$

$$=-\frac{1}{3}\lim_{x\to 0^+}\frac{x^3}{x^{n+1}}=a\Rightarrow\begin{cases}n=2\\a=-\frac{1}{3}\end{cases}\Rightarrow a^n=\frac{1}{9}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۰

۱۲ گزینه ۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۴

گام اول

الف) وقتی $x \to 0$ نتیجه می‌گیریم $x \notin \mathbb{Z}$، بنابراین $2x$ هم یک عدد غیر صحیح است. اگر $2x$ یک عدد غیر صحیح باشد، می‌توان نتیجه گرفت $[2x] + [-2x] = -1$.

ب) وقتی $x \to 0$، حاصل حد عبارت $\frac{1-\cos^3 x}{1-\sqrt{1+x^2}}$ برابر $\frac{0}{0}$ بوده و مبهم است.

گام دوم

$$\lim_{x\to 0}(-1)\times\frac{1-\cos^3 x}{1-\sqrt{1+x^2}}=\lim_{x\to 0}(-1)\times\frac{(1-\cos x)(1+\cos^2 x+\cos x)}{1-\sqrt{1+x^2}}\times\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{1+\sqrt{1+x^2}}$$

$$=\lim_{x\to 0}(-1)\times\frac{(1-\cos x)(3)(2)}{1-(1+x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{6(1-\cos x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{6(2\sin^2\frac{x}{2})}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{6(2\sin^2\frac{x}{2})}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{12\sin\frac{x}{2}\times\sin\frac{x}{2}}{4\times\frac{x}{2}\times\frac{x}{2}}=3$$

نکته:

$$1-\cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha$$

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1$$

راه دوم: با استفاده از هوپیتال به رفع ابهام کسر می‌پردازیم:

$$\lim_{x\to 0}(-1)\times\frac{1-\cos^3 x}{1-\sqrt{1+x^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos^3 x-1}{1-\sqrt{1+x^2}}=\frac{0}{0}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-3\cos^2 x(\sin x)}{\frac{2x}{-2\sqrt{1+x^2}}}=\lim_{x\to 0}\frac{3\cos^2 x(\sin x)\sqrt{1+x^2}}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\times\lim_{x\to 0}3\cos^2 x\left(\sqrt{1+x^2}\right)=1\times 3=3$$

۱۳ گزینه ۲

راه‌حل اول:

$$\lim_{x\to ۲^+}\frac{x^۲-۴}{x^۳-[x^۳]}=\lim_{x\to ۲^+}\frac{x^۲-۴}{x^۳-۸}=\frac{۰}{۰}$$

$$\lim_{x\to ۲^+}\frac{x^۲-۴}{x^۳-۸}=\lim_{x\to ۲^+}\frac{\cancel{(x-۲)}(x+۲)}{\cancel{(x-۲)}(x^۲+۲x+۴)}=\frac{۴}{۱۲}=\frac{۱}{۳}$$

راه‌حل دوم: (هوپیتال)

$$\lim_{x\to ۲^+}\frac{x^۲-۴}{x^۳-۸}=\lim_{x\to ۲^+}\frac{۲x}{۳x^۲}=\frac{۴}{۱۲}=\frac{۱}{۳}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

۱۴ گزینه ۱

$$\lim_{x\to ۰}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to ۰}\frac{x(\sqrt{\frac{۲x+۱}{۵x+۹}})^۳}{x}=\lim_{x\to ۰}(\sqrt{\frac{۲x+۱}{۵x+۹}})^۳=(\sqrt{\frac{۱}{۹}})^۳=\frac{۱}{۲۷}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

۱۵ گزینه ۴

راه حل اول:

$$\lim_{x\to -۱}\frac{\sqrt{۲x+۳}-\sqrt{۳x+۴}}{۱+\sqrt[۳]{x}}\times\frac{\sqrt{۲x+۳}+\sqrt{۳x+۴}}{\sqrt{۲x+۳}+\sqrt{۳x+۴}}\times\frac{۱+\sqrt[۳]{x^۲}-\sqrt[۳]{x}}{۱+\sqrt[۳]{x^۲}-\sqrt[۳]{x}}$$

$$=\lim_{x\to -۱}\frac{-(x+۱)(۱+۱+۱)}{(۱+۱)(۱+x)}=-\frac{۳}{۲}$$

راه حل دوم: برای رفع ابهام $\frac{۰}{۰}$ از هوپیتال استفاده می‌کنیم:

$$\frac{\frac{۲}{۲\sqrt{۲x+۳}}-\frac{۳}{۲\sqrt{۳x+۴}}}{\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{x^۲}}}\overset{x=-۱}{=}\frac{۱-\frac{۳}{۲}}{\frac{۱}{۳}}=-\frac{۳}{۲}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۱

۱۶ گزینه ۱

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۲

گام اول

وقتی $x \to \frac{\pi}{۴}$، هم حاصل صورت و هم حاصل مخرج برابر صفر شده و درنتیجه حد دارای ابهام $\frac{۰}{۰}$ است.

گام دوم

با استفاده از روابط مثلثاتی زیر، تا جایی که امکان دارد عبارت مثلثاتی داده‌شده را ساده کرده و حد آن را به دست می‌آوریم:

$$۱)\ \sin ۲x = ۲\sin x\cos x \Rightarrow ۱-\sin ۲x = \sin^۲x + \cos^۲x - ۲\sin x\cos x$$
$$= (\sin x - \cos x)^۲ \Rightarrow ۱-\sin ۲x = (\sin x - \cos x)^۲$$

$$۲)\ \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}} \frac{۱-\sin ۲x}{(۱-\tan x)^۲} = \lim_{x\to\frac{\pi}{۴}} \frac{(\sin x-\cos x)^۲}{(۱-\frac{\sin x}{\cos x})^۲}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{۴}} \frac{(\sin x-\cos x)^۲}{\frac{(\cos x-\sin x)^۲}{\cos^۲x}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{۴}} \frac{(\sin x-\cos x)^۲\cos^۲x}{(\sin x-\cos x)^۲}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{۴}} \cos^۲x = (\frac{\sqrt{۲}}{۲})^۲ = \frac{۱}{۲}$$

۱۷ گزینه ۱

وقتی $x \to \frac{۳\pi}{۴}^-$، حاصل حد به‌صورت مبهم $\frac{۰}{۰}$ می‌شود. برای رفع ابهام می‌توان نسبت‌های مثلثاتی را ساده کرد (می‌توان از روش‌های دیگری مانند هوپیتال نیز استفاده کرد):

$$\lim_{x\to\frac{۳\pi}{۴}^-} \frac{۱+\cot x}{۱+\tan x} = \frac{۱-۱}{۱-۱} = \frac{۰}{۰}$$

$$\xrightarrow{\cot x=\frac{۱}{\tan x}} \lim_{x\to\frac{۳\pi}{۴}^-} \frac{۱+\cot x}{۱+\tan x} = \lim_{x\to\frac{۳\pi}{۴}^-} \frac{۱+\frac{۱}{\tan x}}{۱+\tan x} = \lim_{x\to\frac{۳\pi}{۴}^-} \frac{\frac{\tan x+۱}{\tan x}}{۱+\tan x}$$

$$= \lim_{x\to\frac{۳\pi}{۴}^-} \frac{۱}{\tan x} = \frac{۱}{-۱} = -۱$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۲

۱۸ گزینه ۲

راه‌حل اول: ابهام $\frac{۰}{۰}$ را با گویا کردن از بین می‌بریم:

$$\lim_{x\to ۱}\frac{۲x-۷\sqrt{x}+۵}{۲x-\sqrt{۳x+۱}}\times\frac{۲x+\sqrt{۳x+۱}}{۲x+\sqrt{۳x+۱}}=\lim_{x\to ۱}\frac{(۲x-۷\sqrt{x}+۵)(۲x+\sqrt{۳x+۱})}{۴x^{۲}-۳x-۱}$$
$$=\lim_{x\to ۱}\frac{(\sqrt{x}-۱)(۲\sqrt{x}-۵)(۲x+\sqrt{۳x+۱})}{(x-۱)(۴x+۱)}=\lim_{x\to ۱}\frac{(\sqrt{x}-۱)(۲\sqrt{x}-۵)(۲x+\sqrt{۳x+۱})}{(\sqrt{x}-۱)(\sqrt{x}+۱)(۴x+۱)}$$
$$=\frac{-۳\times ۴}{۲\times ۵}=\frac{-۱۲}{۱۰}=-۱/۲$$

راه‌حل دوم: با استفاده از هوپیتال حاصل حد را می‌یابیم:

$$\lim_{x\to ۱}\frac{۲x-۷\sqrt{x}+۵}{۲x-\sqrt{۳x+۱}}=\frac{۰}{۰}$$
$$\xrightarrow{\text{HOP}}\lim_{x\to ۱}\frac{۲-\frac{۷}{۲\sqrt{x}}}{۲-\frac{۳}{۲\sqrt{۳x+۱}}}=\frac{۲-\frac{۷}{۲}}{۲-\frac{۳}{۴}}=\frac{-\frac{۳}{۲}}{\frac{۵}{۴}}=-\frac{۶}{۵}=-۱/۲$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۹

۱۹ گزینه ۲

باتوجه‌به نمودار $f(۰)=۰$ است، پس داریم:

$$f(۰)=۰\Rightarrow\frac{۰+b}{۰-۱}=۰\Rightarrow -b=۰\Rightarrow b=۰$$

ازطرفی تابع در نقطهٔ $x=۱$ تعریف‌نشده است، چون $x=۱$ ریشهٔ مخرج کسر است پس حد صورت کسر نیز وقتی $x\to ۱$ باید برابر صفر باشد که تابع به‌صورت مبهم $\frac{۰}{۰}$ دربیاید.

$$\lim_{x\to ۱}۴x^{۳}+ax+b=۰\Rightarrow ۴+a=۰\Rightarrow a=-۴$$

بنابراین داریم: $(a,b)=(-۴,۰)$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۷

۲۰ گزینه ۴

تابع در $x = \frac{۳\pi}{۲}$ حفره دارد، پس $\frac{۳\pi}{۲}$ ریشهٔ صورت و مخرج تابع f می‌باشد.

$$۱ + a\sin x = ۰ \xrightarrow{x=\frac{۳\pi}{۲}} ۱ + a\sin\frac{۳\pi}{۲} = ۰ \Rightarrow ۱ + a(-۱) = ۰ \Rightarrow a = ۱$$

$$b + \cos x = ۰ \xrightarrow{x=\frac{۳\pi}{۲}} b + \cos\frac{۳\pi}{۲} = ۰ \Rightarrow b + ۰ = ۰ \Rightarrow b = ۰$$

$$f(x) = \frac{۱ + \sin x}{\cos x} \Rightarrow f(\frac{\pi}{۳}) = \frac{۱ + \frac{\sqrt{۳}}{۲}}{\frac{۱}{۲}} = ۲ + \sqrt{۳}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۳

۲۱ گزینه ۲

$$\lim_{x\to ۱^+}\frac{\sin^۲\pi x}{[x] + \cos\pi x} = \frac{۰}{۰}$$

$$\lim_{x\to ۱^+}\frac{\sin^۲\pi x}{[x] + \cos\pi x} = \lim_{x\to ۱^+}\frac{۱ - \cos^۲\pi x}{۱ + \cos\pi x} = \lim_{x\to ۱^+}\frac{(۱ + \cos\pi x)(۱ - \cos\pi x)}{۱ + \cos\pi x}$$

$$= \lim_{x\to ۱^+}(۱ - \cos\pi x) = ۱ - \cos\pi = ۱ - (-۱) = ۲$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۸

۲۲ گزینه ۱

روش اول:

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\tan x - \sin x}{x^۳} = \lim_{x\to ۰}\frac{\frac{\sin x}{\cos x} - \sin x}{x^۳}$$

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\sin x - \sin x\cos x}{x^۳\cos x} = \lim_{x\to ۰}\frac{\sin x(۱ - \cos x)}{x^۳\cos x} = \lim_{x\to ۰}\frac{\sin x(۱ - \cos x)}{x^۳\cos x} \times \frac{۱ + \cos x}{۱ + \cos x}$$

$$= \lim_{x\to ۰}\frac{۱}{\cos x(۱ + \cos x)} \times \lim_{x\to ۰}\frac{\sin x(۱ - \cos^۲ x)}{x^۳} = \frac{۱}{۲}\lim_{x\to ۰}\frac{\sin^۳ x}{x^۳} = \frac{۱}{۲} \times ۱ = \frac{۱}{۲}$$

روش دوم:

$$\tan\alpha - \sin\alpha \underset{\alpha\to ۰}{\sim} \frac{۱}{۲}\alpha^۳$$

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\tan x - \sin x}{x^۳} = \lim_{x\to ۰}\frac{\frac{۱}{۲}x^۳}{x^۳} = \frac{۱}{۲}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۱

۲۳ گزینه ۳

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\cos\sqrt{x}}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{(1-\cos\sqrt{x})(1+\cos\sqrt{x})}{x(1+\cos\sqrt{x})}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\cos^2\sqrt{x}}{x(1+\cos\sqrt{x})}$$
$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin^2\sqrt{x}}{x}\times\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{1+\cos\sqrt{x}}=1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۶

۲۴ گزینه ۴

روش اول:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{x\sin x}=2\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\right)\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sin x}\right)=2$$

روش دوم: به کمک هم‌ارزی حاصل حد را حساب می‌کنیم.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}(2x)^2}{x.x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x^2}{x^2}=2$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۰

۲۵ گزینه ۴

وقتی $x\to 0$ هم‌ارزی زیر برقرار است:

$$\cos^n x\underset{x\to 0}{\sim}1-\frac{n}{2}x^2$$
$$\tan x\sim x$$

پس:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\tan^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-1\right)}{\left(1-\cos\left(\sqrt{2x}\right)\right)^n}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-1\right)^2}{\left(\frac{2x}{2}\right)^n}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\left(\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\times\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}}\right)^2}{x^n}$$
$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\left(1-\left(1-x^2\right)\times\frac{1}{\sqrt{1-x^2}\times\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)}\right)^2}{x^n}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\left(\frac{x^2}{2}\right)^2}{x^n}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{x^4}{4}}{x^n}\xrightarrow{n=4}a=\frac{1}{4}$$
$$a+n=4+\frac{1}{4}=\frac{17}{4}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۰

۲۶ گزینه ۳

معادلهٔ سهمی و خط را می‌نویسیم:

$$f(x) = a(x-0)(x-4) = ax(x-4)$$
$$f(2) = 1 \Rightarrow -4a = 1 \Rightarrow a = \frac{-1}{4}$$
$$g(x) = \frac{-x}{4} + 1 = \frac{-1}{4}(x-4)$$

$$\lim_{x\to 4^-} \frac{f(x)+g(x)}{4-x} = \lim_{x\to 4^-} \frac{-\frac{1}{4}x(x-4) - \frac{1}{4}(x-4)}{4-x}$$
$$= \lim_{x\to 4^-} \frac{-\frac{1}{4}(x-4)(x+1)}{-(x-4)} = \lim_{x\to 4^-} \frac{1}{4}(x+1) = \frac{5}{4}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

۲۷ گزینه ۱

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۸

گام اول

می‌دانیم: $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ و $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

گام دوم

وقتی $x \to \frac{3\pi}{4}$، حاصل حد به‌صورت مبهم $\frac{0}{0}$ می‌شود. با استفاده از گام اول، کسر را تا حد امکان ساده کرده و حاصل حد را به دست می‌آوریم.

$$\lim_{x\to \frac{3\pi}{4}} \frac{\tan^2 x - 1}{\cos 2x} = \lim_{x\to \frac{3\pi}{4}} \frac{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - 1}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \lim_{x\to \frac{3\pi}{4}} \frac{\frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\cos^2 x}}{-(\sin^2 x - \cos^2 x)}$$
$$= \lim_{x\to \frac{3\pi}{4}} -\frac{1}{\cos^2 x} = -\frac{1}{\cos^2 \frac{3\pi}{4}} = -\frac{1}{(-\frac{\sqrt{2}}{2})^2} = -\frac{1}{\frac{1}{2}} = -2$$

۲۸ گزینه ۴

نکته:

$$\sin ۲A = ۲\sin A\cos A$$
$$\cos ۲A = ۲\cos^۲ A - ۱$$

$$\lim_{x\to\pi^+}\frac{۲\sin(-x)\cos ۲x}{\sqrt{۲(۱+\cos x)}} = \frac{۰}{۰}\ \text{(مبهم)}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\pi^+}\frac{۲\sin(-x)\cos ۲x}{\sqrt{۲(۱+\cos x)}} = -۲\lim_{x\to\pi^+}\frac{\sin x\cos ۲x}{\sqrt{۴\cos^۲\frac{x}{۲}}} = -\lim_{x\to\pi^+}\frac{\sin x}{\left|\cos\frac{x}{۲}\right|}$$

$$= -\lim_{x\to\pi^+}\frac{۲\sin\frac{x}{۲}\cos\frac{x}{۲}}{-\cos\frac{x}{۲}} = ۲$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۷

۲۹ گزینه ۱

راه‌حل اول:

$$\lim_{x\to۴}\frac{۳x^۲-۱۰x-۸}{\sqrt{۳-\sqrt{x}}-۱} = \lim_{x\to۴}\frac{(۳x+۲)(x-۴)}{\sqrt{۳-\sqrt{x}}-۱}\times\frac{\sqrt{۳-\sqrt{x}}+۱}{\sqrt{۳-\sqrt{x}}+۱} = \lim_{x\to۴}\frac{(۳x+۲)(x-۴)(\sqrt{۳-\sqrt{x}}+۱)}{(۲-\sqrt{x})}$$

$$= \lim_{x\to۴}\frac{-(۳x+۲)\cancel{(۲-\sqrt{x})}(۲+\sqrt{x})(\sqrt{۳-\sqrt{x}}+۱)}{\cancel{(۲-\sqrt{x})}} = \lim_{x\to۴}\left(-(۳x+۲)(۲+\sqrt{x})(\sqrt{۳-\sqrt{x}}+۱)\right)$$

$$= -۱۴\times۴\times۲ = -۱۱۲$$

راه‌حل دوم:

$$\xrightarrow{\text{HOP}}\lim_{x\to۴}\frac{۳x^۲-۱۰x-۸}{\sqrt{۳-\sqrt{x}}-۱} = \lim_{x\to۴}\frac{۶x-۱۰}{\frac{-۱}{۲\sqrt{x}}}{۲\sqrt{۳-\sqrt{x}}} = \frac{۱۴}{\frac{-۱}{\frac{۲\times۲}{۲}}} = -۱۴\times۸ = -۱۱۲$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۷

۳۰ گزینه ۱

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{2+3x}-\sqrt{2-x}}{\sqrt{1-\cos x}}=\frac{0}{0}$$

پس باید رفع ابهام انجام دهیم. می‌دانیم $1-\cos x=2\sin^2(\frac{x}{2})$. ازطرفی می‌دانیم اگر x به‌سمت صفر میل کند، $\sin x$ هم‌ارز با x می‌شود، پس نتیجه می‌گیریم که $x\to 0 \Rightarrow 1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}$.

به‌علاوه هم‌ارزی زیر را داریم:

$$u\to 0\Rightarrow\sqrt[n]{1\pm u}\sim 1\pm\frac{u}{n}$$

پس:

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{2+3x}-\sqrt{2-x}}{\sqrt{1-\cos x}}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{2}(\sqrt{1+\frac{3}{2}x}-\sqrt{1-\frac{1}{2}x})}{\sqrt{\frac{x^2}{2}}}$$

$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{2}((1+\frac{\frac{3}{2}x}{2})-(1-\frac{\frac{1}{2}x}{2}))}{\frac{|x|}{\sqrt{2}}}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\frac{3\sqrt{2}}{4}x+\frac{\sqrt{2}}{4}x}{\frac{-x}{\sqrt{2}}}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\frac{\sqrt{2}x}{4}}{\frac{-x}{\sqrt{2}}}=-2$$

روش دوم:

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{2+3x}-\sqrt{2-x}}{\sqrt{1-\cos x}}=\frac{0}{0}$$

حال کسر را گویا می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{2+3x}-\sqrt{2-x}}{\sqrt{1-\cos x}}\times\frac{\sqrt{2+3x}+\sqrt{2-x}}{\sqrt{2+3x}+\sqrt{2-x}}\times\frac{\sqrt{1+\cos x}}{\sqrt{1+\cos x}}$$

$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{4x\sqrt{1+\cos x}}{|\sin x|\sqrt{2+3x}+\sqrt{2-x}}=\lim_{x\to 0^-}\frac{4\cancel{x}\sqrt{1+\cos x}}{(-\cancel{x})\sqrt{2+3x}+\sqrt{2-x}}=\frac{4\sqrt{2}}{-1(2\sqrt{2})}=-2$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

۳۱ گزینه ۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۰

گام اول

الف) $x \to ۲^-$ یعنی $x < ۲$ است، باتوجه‌به این نکته تعیین می‌کنیم علامت عبارت داخل قدر مطلق مثبت است یا منفی سپس آن را از قدر مطلق خارج می‌کنیم.

ب) وقتی $x \to ۲^-$ حاصل صورت و مخرج کسر برابر صفر حدی می‌شود. پس برای رفع ابهام می‌توانیم هم صورت و مخرج را در مزدوج مخرج ضرب کنیم و هم از قاعدهٔ هوپیتال استفاده کنیم.

گام دوم

$$\left.\begin{array}{l} x^۲ - x - ۲ = (x-۲)(x+۱) \\ x \to ۲^- \Rightarrow x < ۲ \Rightarrow x - ۲ < ۰ \end{array}\right\} \Rightarrow |x^۲ - x - ۲| = -(x-۲)(x+۱)$$

روش اول:

$$\lim_{x\to ۲^-} \frac{|x^۲ - x - ۲|}{۲x - \sqrt{x^۲ + ۱۲}} = \lim_{x\to ۲^-} \frac{-x^۲ + x + ۲}{۲x - \sqrt{x^۲ + ۱۲}}$$
$$= \lim_{x\to ۲^-} \frac{-x^۲ + x + ۲}{۲x - \sqrt{x^۲ + ۱۲}} \times \frac{۲x + \sqrt{x^۲ + ۱۲}}{۲x + \sqrt{x^۲ + ۱۲}}$$
$$= \lim_{x\to ۲^-} \frac{(-x^۲ + x + ۲)(۲x + \sqrt{x^۲ + ۱۲})}{(۴x^۲ - x^۲ - ۱۲)}$$
$$= \lim_{x\to ۲^-} \frac{-(x-۲)(x+۱)(۲x + \sqrt{x^۲ + ۱۲})}{۳(x-۲)(x+۲)}$$
$$= \lim_{x\to ۲^-} \frac{-(x+۱)(۲x + \sqrt{x^۲ + ۱۲})}{۳(x+۲)}$$
$$= \frac{-(۲+۱)(۴+۴)}{۳(۲+۲)} = \frac{-۳ \times ۸}{۳ \times ۴} = -۲$$

روش دوم: (فراتر از کتاب درسی)

در این روش حاصل حد را با استفاده از قاعدهٔ هوپیتال به دست می‌آوریم:

$$\lim_{x\to ۲^-} \frac{|x^۲ - x - ۲|}{۲x - \sqrt{x^۲ + ۱۲}} = \lim_{x\to ۲^-} \frac{-(x-۲)(x+۱)}{۲x - \sqrt{x^۲ + ۱۲}}$$
$$\xrightarrow{\text{HOP}} \lim_{x\to ۲^-} \frac{-۲x + ۱}{۲ - \frac{۲x}{۲\sqrt{x^۲ + ۱۲}}} = \frac{-۴ + ۱}{۲ - \frac{۲}{\sqrt{۴ + ۱۲}}} = \frac{-۳}{۲ - \frac{۱}{۲}} = \frac{-۳}{\frac{۳}{۲}} = -۲$$

۳۲ گزینه ۱

وقتی $x \to \frac{\pi}{۴}$، حاصل حد به‌صورت مبهم $\frac{۰}{۰}$ می‌شود. با استفاده از روابط مثلثاتی و قاعدهٔ هوپیتال می‌توان رفع ابهام کرد.

روش اول:

با استفاده از روابط مثلثاتی داریم:

$$\sin(x-\frac{\pi}{۴}) = \sin x \cos\frac{\pi}{۴} - \cos x \sin\frac{\pi}{۴} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}(\sin x - \cos x)$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}} \frac{۱-\tan x}{\sin(x-\frac{\pi}{۴})} = \lim_{x\to\frac{\pi}{۴}} \frac{۱-\frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}(\sin x - \cos x)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{۴}} \frac{\frac{\cos x - \sin x}{\cos x}}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}(\sin x - \cos x)}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{۴}} \frac{-۱}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}\cos x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{۴}} \frac{-\sqrt{۲}}{\cos x} = -\frac{\sqrt{۲}}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}} = -۲$$

روش دوم: (فراتر از کتاب)

طبق قاعدهٔ هوپیتال، اگر $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{۰}{۰}$ آنگاه داریم:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

قاعدهٔ هوپیتال را تا جایی که ابهام برطرف شود، به کار می‌گیریم.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}} \frac{۱-\tan x}{\sin(x-\frac{\pi}{۴})} = \lim_{x\to\frac{\pi}{۴}} \frac{-(۱+\tan^۲ x)}{\cos(x-\frac{\pi}{۴})} = \frac{-(۱+\tan^۲\frac{\pi}{۴})}{\cos(\frac{\pi}{۴}-\frac{\pi}{۴})} = \frac{-(۱+۱)}{۱} = -۲$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۷

۳۳ گزینه ۲

با استفاده از نسبت های مثلثاتی کمان $\alpha+\beta$، حاصل $\cos(x+\frac{\pi}{۴})$ را به دست می آوریم:

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

حاصل حد $\frac{۰}{۰}$ و مبهم است. برای رفع ابهام صورت و مخرج کسر را در مزدوج صورت ضرب می کنیم تا عبارت مثلثاتی فرم ساده تری به خود بگیرد. سپس با از بین رفتن عامل صفرکننده در صورت و مخرج، حاصل حد را محاسبه می کنیم و در نهایت مقدار a را به دست می آوریم.

$$\cos(x+\frac{\pi}{۴})=\cos x\cos\frac{\pi}{۴}-\sin x\sin\frac{\pi}{۴}$$
$$=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\cos x-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\sin x=\frac{\sqrt{۲}}{۲}(\cos x-\sin x)$$

بنابراین :

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}}\frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt{\sin x}}{\cos(x+\frac{\pi}{۴})}=\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}}\frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt{\sin x}}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}(\cos x-\sin x)}\times\frac{\sqrt{\cos x}+\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\cos x}+\sqrt{\sin x}}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}}\frac{(\cos x-\sin x)}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}(\cos x-\sin x)(\sqrt{\cos x}+\sqrt{\sin x})}$$
$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}}\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{\cos x}+\sqrt{\sin x}}=\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{\cos\frac{\pi}{۴}}+\sqrt{\sin\frac{\pi}{۴}}}$$
$$=\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}+\sqrt{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲\times\sqrt{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}}=\frac{۲^{\frac{۱}{۲}}}{۲\times\sqrt{۲^{-\frac{۱}{۲}}}}=\frac{۲^{\frac{۱}{۲}}}{۲\times۲^{-\frac{۱}{۴}}}$$
$$=\frac{۲^{\frac{۱}{۲}}}{۲^{\frac{۳}{۴}}}=۲^{-\frac{۱}{۴}}=۲^{a}\Rightarrow a=-\frac{۱}{۴}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۲

۳۴ گزینه ۳

راه‌حل اول:

$$\lim_{x\to -۸}\frac{x^۲+۱۰x+۱۶}{۶(۲+\sqrt[۳]{x})}=\frac{۰}{۰}$$

$$\lim_{x\to -۸}\frac{x^۲+۱۰x+۱۶}{۶(۲+\sqrt[۳]{x})}=\lim_{x\to -۸}\frac{(x+۸)(x+۲)(۴-۲\sqrt[۳]{x}+\sqrt[۳]{x^۲})}{۶(۲+\sqrt[۳]{x})(۴-۲\sqrt[۳]{x}+\sqrt[۳]{x^۲})}$$

$$=\lim_{x\to -۸}\frac{(x+۸)(x+۲)(۴-۲\sqrt[۳]{x}+\sqrt[۳]{x^۲})}{۶(x+۸)}$$

$$=\lim_{x\to -۸}\frac{(x+۲)(۴-۲\sqrt[۳]{x}+\sqrt[۳]{x^۲})}{۶}=\frac{-۶\times ۱۲}{۶}=-۱۲$$

راه‌حل دوم: (فراتر از کتاب)

با استفاده از قاعدهٔ هوپیتال داریم:

$$\text{HOP}:\lim_{x\to -۸}\frac{۲x+۱۰}{۶\times\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{x^۲}}}=\frac{-۱۶+۱۰}{۶\times\frac{۱}{۳\times ۴}}=-۶\times ۲=-۱۲$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۳۵ گزینه ۳

$$\lim_{x\to -۱}\frac{۲x^۲+۵x+۳}{۲-\sqrt{۲+\sqrt{۳-x}}}=\frac{۰}{۰}$$

راه‌حل اول:

$$\lim_{x\to -۱}\frac{۲x^۲+۵x+۳}{۲-\sqrt{۲+\sqrt{۳-x}}}\times\frac{۲+\sqrt{۲+\sqrt{۳-x}}}{۲+\sqrt{۲+\sqrt{۳-x}}}$$

$$=\lim_{x\to -۱}\frac{(x+۱)(۲x+۳)(۲+\sqrt{۲+\sqrt{۳-x}})}{۴-(۲+\sqrt{۳-x})}$$

$$=\lim_{x\to -۱}\frac{(x+۱)(۲x+۳)(۲+\sqrt{۲+\sqrt{۳-x}})}{۲-\sqrt{۳-x}}\times\frac{۲+\sqrt{۳-x}}{۲+\sqrt{۳-x}}$$

$$=\lim_{x\to -۱}\frac{(x+۱)(۲x+۳)(۲+\sqrt{۲+\sqrt{۳-x}})(۲+\sqrt{۳-x})}{۴-۳+x}$$

$$=\lim_{x\to -۱}(۲x+۳)(۲+\sqrt{۲+\sqrt{۳-x}})(۲+\sqrt{۳-x})=۱(۲+۲)(۲+۲)=۱۶$$

راه‌حل دوم: (فراتر از کتاب)

استفاده از قاعدهٔ هوپیتال:

$$\lim_{x\to -۱}\frac{۲x^۲+۵x+۳}{۲-\sqrt{۲+\sqrt{۳-x}}}\xrightarrow{\text{HOP}}\lim_{x\to -۱}\frac{۴x+۵}{-\frac{-۱}{۲\sqrt{۳-x}}\times\frac{۱}{۲\sqrt{۲+\sqrt{۳-x}}}}=\frac{۱}{\frac{۱}{۴}\times\frac{۱}{۴}}=۱۶$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۷

۳۶ گزینه ۲

با استفاده از اتحاد $a^۳ - b^۳ = (a-b)(a^۲ + ab + b^۲)$ داریم:

$$\lim_{x\to ۲^+} \frac{۲ - \sqrt[۳]{x+۶}}{\sqrt{x^۲ - ۴x + ۴}} = \lim_{x\to ۲^+} \frac{(۲ - \sqrt[۳]{x+۶})(۴ + ۲\sqrt[۳]{x+۶} + \sqrt[۳]{(x+۶)^۲})}{\sqrt{(x-۲)^۲}(۴ + ۲\sqrt[۳]{x+۶} + \sqrt[۳]{(x+۶)^۲})}$$

$$= \lim_{x\to ۲^+} \frac{(۲-x)}{(x-۲)(۴ + ۲\sqrt[۳]{x+۶} + \sqrt[۳]{(x+۶)^۲}} = -\frac{۱}{۴+۴+۴} = -\frac{۱}{۱۲}$$

روش دوم: (هوپیتال ـ فراتر از کتاب)

$$\lim_{x\to ۲^+} \frac{۲ - \sqrt[۳]{x+۶}}{\sqrt{x^۲ - ۴x + ۴}} = \lim_{x\to ۲^+} \frac{۲ - \sqrt[۳]{x+۶}}{\sqrt{(x-۲)^۲}} = \lim_{x\to ۲^+} \frac{۲ - \sqrt[۳]{x+۶}}{|x-۲|} = \frac{۰}{۰}$$

$$\xrightarrow{\text{هوپیتال}} \lim_{x\to ۲^+} \frac{۲ - \sqrt[۳]{x+۶}}{|x-۲|} \xrightarrow[x\to ۲^+]{x-۲>۰} \lim_{x\to ۲^+} \frac{۲ - \sqrt[۳]{x+۶}}{x-۲} = \lim_{x\to ۲^+} \frac{-\frac{۱}{۳}(x+۶)^{-\frac{۲}{۳}}}{۱}$$

$$= \frac{-\frac{۱}{۳}(۲+۶)^{-\frac{۲}{۳}}}{۱} = -\frac{۱}{۳\times ۴} = -\frac{۱}{۱۲}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۳

۳۷ گزینه ۱

$$\lim_{x\to \frac{۳\pi}{۴}^-} \frac{۱ - \tan^۲ x}{\sqrt{۱ + \sin ۲x}} = \lim_{x\to \frac{۳\pi}{۴}^-} \frac{۱ - \tan^۲ x}{\sqrt{(\sin x + \cos x)^۲}}$$

$$= \lim_{x\to \frac{۳\pi}{۴}^-} \frac{۱ - \tan^۲ x}{|\sin x + \cos x|} = \lim_{x\to \frac{۳\pi}{۴}^-} \frac{\frac{\cos^۲ x - \sin^۲ x}{\cos^۲ x}}{(\sin x + \cos x)}$$

$$\lim_{x\to \frac{۳\pi}{۴}^-} \frac{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)}{\cos^۲ x(\sin x + \cos x)} = \lim_{x\to \frac{۳\pi}{۴}^-} \frac{\cos x - \sin x}{\cos^۲ x} = \frac{-\frac{\sqrt{۲}}{۲} - \frac{\sqrt{۲}}{۲}}{\frac{۱}{۲}} = -۲\sqrt{۲}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۷

۳۸ گزینه ۲

حاصل حد، وقتی $x \to ۱$، مبهم $\frac{۰}{۰}$ است. صورت و مخرج کسر را در مزدوج صورت و مزدوج مخرج ضرب می‌کنیم، سپس با حذف عامل صفرکننده، حاصل حد را به دست می‌آوریم.

$$\lim_{x\to ۱} \frac{۱-\sqrt{x}}{۲-\sqrt{۵-x}} \times \frac{۱+\sqrt{x}}{۱+\sqrt{x}} \times \frac{۲+\sqrt{۵-x}}{۲+\sqrt{۵-x}} = \lim_{x\to ۱} \frac{(۱-x)(۲+\sqrt{۵-x})}{(۴-۵+x)(۱+\sqrt{x})}$$

$$= \lim_{x\to ۱} \frac{(۱-x)(۲+\sqrt{۵-x})}{(x-۱)(۱+\sqrt{x})} = \lim_{x\to ۱} \frac{-(۲+\sqrt{۵-x})}{۱+\sqrt{x}} = \frac{-(۲+۲)}{۱+۱} = -\frac{۴}{۲} = -۲$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۸

۳۹ گزینه ۱

حاصل حد، وقتی $x \to -۱$، مبهم $\frac{۰}{۰}$ است. صورت و مخرج کسر را در مزدوج صورت ضرب می‌کنیم، سپس با حذف عامل صفرکننده، حاصل حد را به دست می‌آوریم.

$$\lim_{x\to -۱} \frac{۲x+\sqrt{۳-x}}{x^۲+x} \times \frac{۲x-\sqrt{۳-x}}{۲x-\sqrt{۳-x}} = \lim_{x\to -۱} \frac{(۲x)^۲-(\sqrt{۳-x})^۲}{(x^۲+x)(۲x-\sqrt{۳-x})}$$

$$= \lim_{x\to -۱} \frac{۴x^۲-۳+x}{x(x+۱)(۲x-\sqrt{۳-x})} = \lim_{x\to -۱} \frac{(x+۱)(۴x-۳)}{x(x+۱)(۲x-\sqrt{۳-x})} = \lim_{x\to -۱} \frac{۴x-۳}{x(۲x-\sqrt{۳-x})}$$

$$= \frac{-۴-۳}{(-۱)(-۲-۲)} = \frac{-۷}{(-۱)(-۴)} = -\frac{۷}{۴}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۵

۴۰ گزینه ۱

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۰

گام اول

الف) وقتی $x \to ۰^-$ یعنی $x < ۰$ است و درنتیجه x در ناحیهٔ چهارم مثلثاتی قرار می گیرد پس علامت $\sin x$ منفی می شود.

ب) می دانیم وقتی $x \to ۰$ هم ارزی $\sin x \underset{x\to ۰}{\sim} x$ برقرار است.

گام دوم

$$x \to ۰^- \Rightarrow x < ۰ \xrightarrow{x \text{ در ناحیهٔ چهارم قرار دارد}} \sin x < ۰ \Rightarrow |\sin x| = -\sin x$$

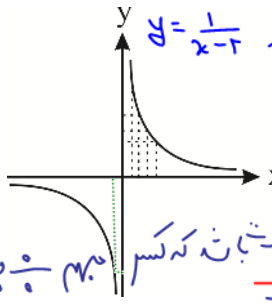
بنابراین حاصل حد برابر است با:

$$\lim_{x\to ۰^-} \frac{|\sin x|}{x} = \lim_{x\to ۰^-} \frac{-\sin x}{x} = \lim_{x\to ۰^-} \frac{-x}{x} = -۱$$

حد بی‌نهایت

اگر با نزدیک شدن x به عدد a مقادیر تابع دائماً در حال افزایش باشد می‌گوییم حد تابع نامتناهی و $+\infty$ است و اگر دائماً در حال کاهش باشد می‌گوییم حد تابع نامتناهی و $-\infty$ است.

به عنوان مثال به تابع $y=\frac{1}{x}$ توجه کنید. وقتی که x از سمت راست به صفر میل می‌کند، مخرج تابع از راست به صفر نزدیک می‌شود. یعنی مقدار مخرج دائماً در حال کم‌ترشدن است و از آن‌جا که صورت تابع عدد ثابت یک است، مقدار کسر زیاد می‌شود و می‌توانیم بنویسیم:



$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty$$

در توابع کسری اگر حد صورت کسر مخالف صفر باشد و مخرج کسر به صفر میل کند کسر به سمت بی‌نهایت میل می‌کند:

$$\frac{\text{عدد}>0}{0^+}=+\infty \qquad \frac{\text{عدد}<0}{0^-}=+\infty \qquad \frac{\text{عدد}>0}{0^-}=-\infty \qquad \frac{\text{عدد}<0}{0^+}=-\infty$$

(۶) در محاسبه حد در توابع کسری اگر صورت کسر برابر یک عدد و مخرجش صفر شود، باید حد چپ و راست را جداگانه حساب کنیم.

تمرین: حاصل $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x+1}{x-1}$ کدام است؟

۱) حد ندارد. ✓ ۲) $-\infty$ ۳) $+\infty$ ۴) صفر

تمرین: حاصل $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x+1}{(x-1)^2}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) صفر ۳) $-\infty$ ۴) $+\infty$ ✓

تمرین: حاصل $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{x^2+3x}{x^2-3x+2}$ کدام است؟

$\lim_{x\to 1^-} \frac{x^2+3x-4}{(x-1)(x-2)} = +\infty$

$(1^- - 1 = 0^-)(1-2=-1=0^+)$

۱) $+\infty$ ✓ ۲) $-\infty$ ۳) صفر ۴) ۲

$\lim_{x\to \pi^-} \frac{3-x}{\sin x} = \frac{3-\pi}{0^+} = -\infty$ (از نزدیک)

$\lim_{x\to \pi^+} \frac{x-3}{1+\cos x} = \frac{3.14-3}{0^+} = +\infty$ (از نزدیک)

$\lim_{x\to \pi} \frac{\pi-3>0}{1+\cos x = 2\cos^2\frac{x}{2} = 0^+} = +\infty$ (راه دوم)

$(-1)^2 = -1+4 \approx -0.99$

تمرین: در مورد تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{x^2-1}{x+|x|}$ کدام بیان درست است؟ (تجربی ۹۸)

۱) $\lim_{x\to 0^-} f(x) = +\infty$ ۲) $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$ ۳) $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ ۴) $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ ✓

$\lim_{x\to 0} y = \frac{x^2-1}{x+|x|}$

$x\to 0^+$: $y = \frac{-1}{x+|x|} = x+x = 2x = 2(0^+) = 0^+ = -\infty$

$x\to 0^-$: $y = \frac{-1}{x+|x|} = x-x = 0$ صفرمطلق ← تقریب نزدیک

$D_f: (0, +\infty)$

تمرین: اگر $\lim_{x\to 3} \frac{x-4}{2x^2+ax+b} = -\infty$ باشد، $a+b$ کدام است؟ (ریاضی ۹۳، مشابه ریاضی ۹۸)

۱) ۳- ۲) ۳ ۳) ۶ ✓ ۴) ۱۲

ایده پرتکرار

$\lim_{x\to 3} \frac{x-4=-1}{2x^2+ax+b} = -\infty$

$\frac{-1}{0^+}$ پس مخرج به صورت زیر است:

$2(x-3)^2 = 2(x^2-6x+9) = 2x^2-12x+18$ $\quad a=-12 \quad b=18 \quad a+b=6$

تمرین: حاصل $\lim_{x\to 2^-} \frac{3x^2-8x+4}{x^2-4x+4}$ کدام است؟

۱) $-\infty$ ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ۳

$\frac{0}{0}$ مبهم $\overset{Hop}{=} \lim_{x\to 2^-} \frac{6x-8}{2x-4} = \frac{4}{2(2^-)-4=0^-} = -\infty$

$x\to 2^+$: $\frac{3-2a<0}{4-4^+=0^-} = +\infty \Rightarrow 3<2a \rightsquigarrow \frac{3}{2}<a$ (از راست)

$x\to 2^-$: $\frac{3-a>0}{4-4^-=0^+} = +\infty \Rightarrow 3>a$ (از چپ)

تمرین: اگر $\lim_{x\to 2} \frac{3-a[x]}{4-x^2} = +\infty$ باشد، چند مقدار صحیح برای a وجود دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) صفر ۴) بی‌شمار

(از راست) $a<2$ (از چپ) $a\geq 3$

$a: 2 \in \mathbb{Z}$

نکته: کسرها در ریشه مخرج (به شرط وجود) تقریب نمی‌شوند.

الف) مخرج بی‌ریشه: ۱

(الف) $y=\frac{1}{x^2+1}$ $x^2+1=0$ $x^2=-1$ ریشه ندارد. $D_f:\mathbb{R}$

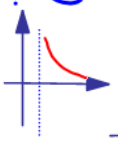
نکته تو نکته: اگر $x\to a$ (a عددی) عوض شدن شکل نسبت به yها قریب‌الت و خط $x=a$ (محور yها) محور تقارن است

ب) مخرج ریشه دارد و همه‌ی ریشه‌ها مخرج هستند. ریشه مخرج بی‌نهایت است.

$y=\frac{\sqrt{x-1}}{x-1}$

$\lim_{x\to 1^+} y=\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}\sqrt{x-1}}=\frac{1}{\sqrt{1^+-1}}=+\infty$

$x=1$ بی‌نهایت قائم است

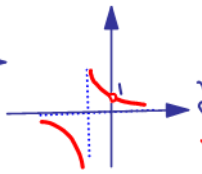


ج) مخرج ریشه دارد و همه‌ی ریشه‌ها مخرج هستند.

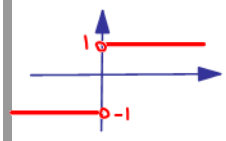
ریشه مخرج صورت است. مثل: $y=\frac{x}{x(x+1)}$

$\lim_{x\to 0} y=\frac{x}{x(x+1)}=1$

$x=-1$ تنها بی‌نهایت قائم

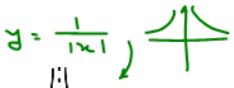


د) مخرج ریشه دارد، همه‌ی ریشه‌ها مخرج ۲ تا عدد نابرابر وجودشان دارند مثل $x=0$ در $y=\frac{x}{|x|}$



$\lim_{x\to 0} y=\begin{cases}x\to 0^+ & 1\\ x\to 0^- & -1\end{cases}$

وضعیت منحنی حوالی ریشه مخرجش، هنگامی که حد به ازای ریشهٔ مخرج، ∞ می‌شود



(۱) $y=-\frac{1}{x}$ — $+\infty$ چپ، $-\infty$ راست

(۲) $y=\frac{1}{x^{2k+1}}$ — $-\infty$ چپ، $+\infty$ راست

(۳) $y=\frac{1}{x^{2k}}$ — $+\infty$ چپ، $+\infty$ راست

(۴) $y=-\frac{1}{x^{2k}}$ — $-\infty$ چپ، $-\infty$ راست

(۵) $y=\frac{-1}{\sqrt{x}}$ — فقط راست، $-\infty$

$D_f:(0,+\infty)$

$\lim_{x\to 0^+} y=\frac{-1}{0^+}=-\infty$

انفصال ساده | انفصال مضاعف

(۶) فقط چپ، $-\infty$

$\lim_{x\to 0^-} y=\frac{-1}{\sqrt{-x}}=\frac{-1}{0^+}=-\infty$

$-x>0$

$x<0$

$D_f:(-\infty,0)$

(۷) فقط چپ، $+\infty$

$y=\frac{1}{\sqrt{-x}}$

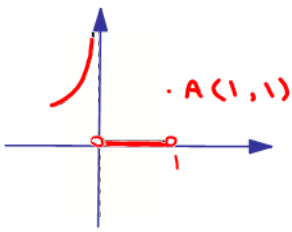
$x<0$

$D:(-\infty,0)$

$\lim_{x\to 0^-} f=\frac{1}{\sqrt{-(0^-)}=0^+}=+\infty$

(۸) فقط راست، $+\infty$

$\lim_{x\to 0^+} y=\frac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$

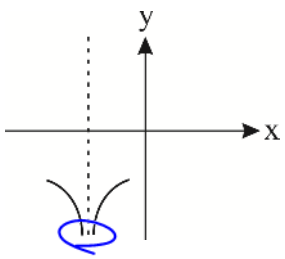


(۹) $y=\frac{[x]}{x}$

$\lim_{x\to 0} y=\begin{cases}x\to 0^+ & \text{صورت مثبت}\\ x\to 0^- & \text{صورت منفی}\end{cases}$ (عددی)

$\frac{-1}{0^-}=+\infty$

تمرین: شکل روبه‌رو وضعیت نمودار کدام تابع را در اطراف ریشه‌ی مخرجش نشان می‌دهد؟



۱) $y=\frac{x-2}{(x-1)^2}$

۲) $y=\frac{x+2}{(x-1)^2}$

۳) $y=\frac{x-2}{(x+1)^2}$

۴) $y=\frac{x+2}{(x+1)^2}$

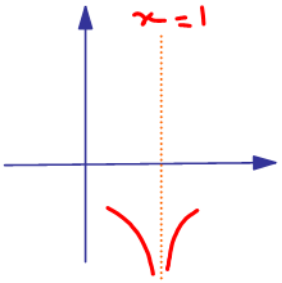
چون شکل در یک عدد منفی تقریب زده، ریشه مخرج باید عددی منفی باشد و حد در آن ∞ شود

از گزینه ۳ و ۴ که ریشه مخرج $x=-1$ دارند حد در ریشه مخرج را می‌گیریم:

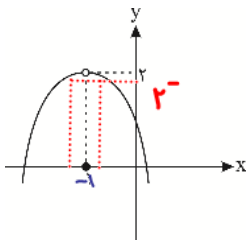
$$\lim_{x\to(-1)} y=\frac{x-2}{(x+1)^2}=\begin{cases} x\to(-1)^+ & \frac{-1-2=-3}{0^+}=-\infty \\ x\to(-1)^- & \frac{-1-2=-3}{0^+}=-\infty \end{cases}$$

تمرین: تابع $f(x)=\frac{(-1)^{[x]}}{(x-1)^7}$ را در همسایگی عدد $x=1$ رسم کنید.

$$\lim_{x\to 1} y \begin{cases} x\to 1^+ & y=\frac{(-1)^{[1^+]=1}}{(1^+-1=0^+)^7=0^+}=\frac{-1}{0^+}=-\infty \\ x\to 1^- & y=\frac{(-1)^{[1^-]=0}}{(1^--1=0^-)^7=0^-}=\frac{1}{0^-}=-\infty \end{cases}$$



تمرین: اگر نمودار تابع f به صورت مقابل باشد، حاصل $\lim_{x\to -1}\frac{x}{f(x)-2}$ کدام است؟



۱) $\frac{1}{2}$

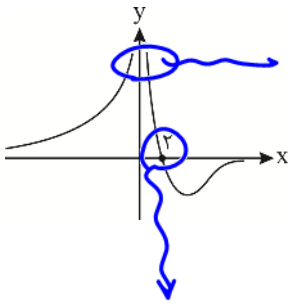
۲) صفر

۳) $-\infty$

۴) $+\infty$ ✓

$$\lim_{x\to(-1)}\frac{-1}{2^--2=0^-}=+\infty$$

تمرین: شکل روبه‌رو نمودار تابع $f(x)=\frac{ax+2}{x^2+b}$ است. $f(4)$ کدام است؟ (مشابه تجربی خارج ۹۵)



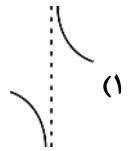
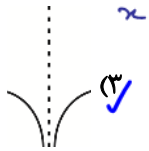
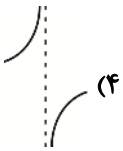
۱) $-\frac{1}{8}$ ✓
۲) $-\frac{1}{4}$
۳) $\frac{1}{4}$
۴) $\frac{1}{8}$

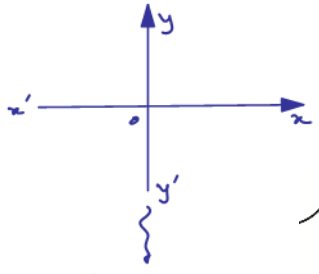
در $x=0$ تعریف نشده
لذا $x=0$ ریشه مخرج است
$x^2+b=0$
$b=0$

$A(2,0)$ را ببینیم روی تابع است $f(2)=\frac{2a+2}{4+0}=0 \rightarrow 2a+2=0 \quad a=-1 \quad f(x)=\frac{-x+2}{x^2} \quad f(4)=\frac{-4+2}{16}=\frac{-2}{16}=-\frac{1}{8}$

نکته: از نقاط برخورد تابع‌ها با محورهای مختصات استفاده کن.

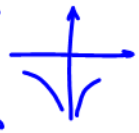
تمرین: تابع $f(x)=\frac{6+\sin x}{\cos x-1}$ در حوالی محور $y'oy$ به کدام صورت است؟

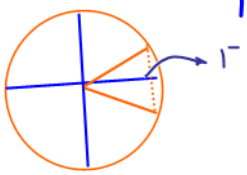
۱) 
۲)
۳) ✓ 
۴) 



محور y ها
$x=0$ خط
$y'oy$ خط
$x=0$ حوالی
$x \rightarrow$

$\lim_{x\to} y=\frac{6+\sin x}{\cos x-1}$ $\begin{cases} x\to 0^+ & \frac{6}{1^--1}=\frac{6}{0^-}=-\infty \\ x\to 0^- & \frac{6}{1^--1}=\frac{6}{0^-}=-\infty \end{cases}$





$\lim_{x\to 0} \frac{6+\sin x}{-(1-\cos x)}=-\infty$ (۲ حالت)

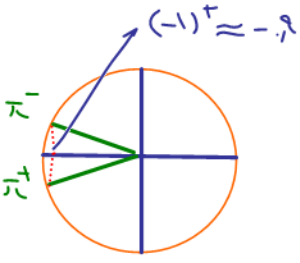
فرعی $-2\left(\sin\frac{x}{2}\right)^2=0^-$

تمرین: حاصل $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{x-2}{\cos 2x+1}$ کدام است؟

۱) صفر
۲) $-\infty$ ✓
۳) $+\infty$
۴) ۱

$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{x-2}{1+\cos 2x=2\cos^2 x}=\frac{\left(\frac{\pi}{2}=\frac{3.14}{2}=1.57\right)-2=\text{عدد منفی}}{2(0^+)=0^+}=-\infty$ (۱ حالت)

فرعی



$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} y \begin{cases} x\to\frac{\pi}{2}^+ & \frac{\frac{\pi}{2}-2=1.57-2<0}{1+\cos 2\left(\frac{\pi}{2}\right)^+=1+\cos\pi^+=0^+}=-\infty \\ x\to\frac{\pi}{2}^- & \frac{\frac{\pi}{2}-2<0}{1+\cos 2\left(\frac{\pi}{2}\right)^-=1+\cos\pi^-=0^+}=-\infty \end{cases}$

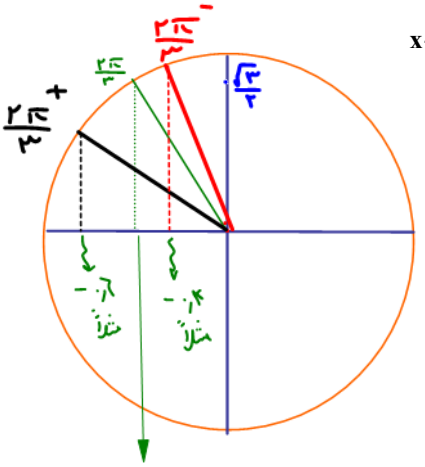
تمرین: در مورد تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{\sin x}{1+2\cos x}$، کدام بیان درست است؟ (تجربی خارج ۹۸)

۱) $\lim\limits_{x\to\frac{2\pi}{3}^+} f(x)=-\infty$

۲) $\lim\limits_{x\to\frac{2\pi}{3}^+} f(x)=+\infty$

۳) $\lim\limits_{x\to\frac{2\pi}{3}^-} f(x)=-\infty$

۴) $\lim\limits_{x\to\frac{4\pi}{3}} f(x)=+\infty$

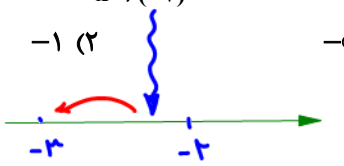


$\lim\limits_{x\to\frac{2\pi}{3}} f(x)=\frac{\sin x}{1+2\cos x}$ $\begin{cases} x\to\frac{2\pi}{3}^- : \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1+2(-0.4)=0^+}=+\infty \\ x\to\frac{2\pi}{3}^+ : \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1+2(-0.6)=0^-}=-\infty \end{cases}$ ترتیبی

$-\frac{1}{2}=-0.5$

تمرین: حاصل $\lim\limits_{x\to(-2)^-}\frac{[x]+3}{x+2}$، کدام است؟ (تجربی ۹۹)

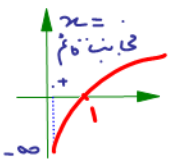
۱) $-\infty$ ۲) -1 ۳) صفر ✓ ۴) ۱



$\frac{\text{صفر مطلق}}{\text{صفر نسبی (عدد ریز)}}=\frac{-3+3}{-}=0$

نکته: در $y=\log_b^u$ ریشه‌های صورت و مخرج u مجانب قائم‌اند. مثلاً $y=\log x$ در $x=0$ و $y=\log\frac{x+1}{x-1}$ در $x=\pm1$ مجانب قائم هستند.

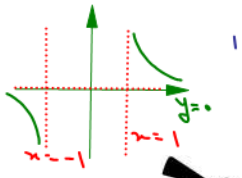
$\lim\limits_{x\to0^+}\log x=\log_{10}^{0^+}=-\infty$ ($10^{-\infty}=\frac{1}{10^{+\infty}}=\frac{1}{+\infty}=0$)



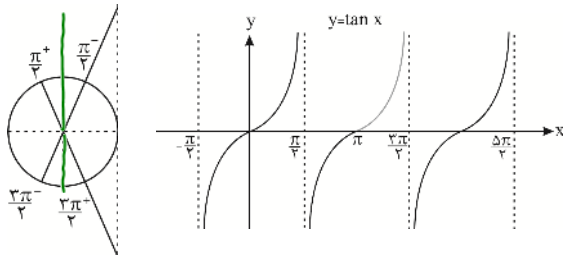
$D_f:(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

$\lim\limits_{x\to(-1)^-}\log\frac{x+1}{x-1}=\log_{10}^{\frac{0^-}{-2}}=\log_{10}^{0^+}=-\infty$

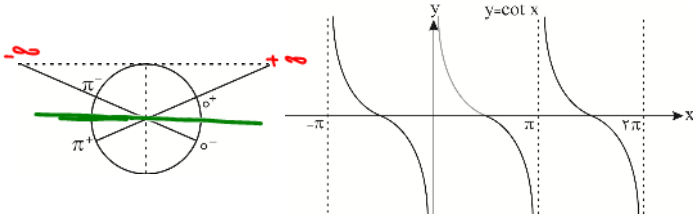
$\lim\limits_{x\to1^+}\log\frac{x+1}{x-1}=\log_{10}^{\frac{2}{0^+}}=\log_{10}^{+\infty}=+\infty$



در نقاطی که tan یا cot بی‌نهایت می‌شوند، باید حد چپ و راست را جداگانه حساب کرد که برای تعیین علامت بی‌نهایت از دایره‌ی مثلثاتی استفاده می‌شود.



$\begin{cases} \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-\text{یا}\frac{3\pi}{2}^-}\tan x=+\infty \\ \tan\frac{\pi}{2}\ ,\ \tan\frac{3\pi}{2}: \text{تعریف نشده} \\ \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+\text{یا}\frac{3\pi}{2}^+}\tan x=-\infty \end{cases}$



$\begin{cases} \lim\limits_{x\to0^+\text{یا}\pi^+}\cot x=+\infty \\ \cot0\ ,\ \cot\pi: \text{تعریف نشده} \\ \lim\limits_{x\to0^-\text{یا}\pi^-}\cot x=-\infty \end{cases}$

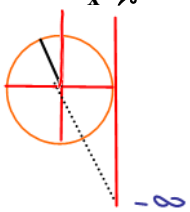
تمرین: حاصل $\lim_{x\to 0^+} \tan(\frac{\pi(x+1)}{2})$ و $\lim_{x\to 0^+} \tan(\frac{\pi[x+1]}{2})$ به ترتیب از راست به چپ کدام است؟

۱) $-\infty$ و $-\infty$

۲) $+\infty$ و تعریف‌نشده

۳) $+\infty$ و $-\infty$

۴) $-\infty$ و تعریف‌نشده ✓



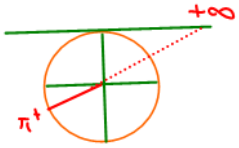
پاسخ: گزینه‌ی «۴»

$$\lim_{x\to 0^+} \tan(\frac{\pi(x+1)}{2}) = \tan(\frac{\pi^+}{2}) = -\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+} \tan(\frac{\pi[x+1]}{2}) = \tan(\frac{\pi[1^+]}{2}) = \tan(\text{مطلق}\frac{\pi}{2}) = \text{تعریف‌نشده}$$

تمرین: حاصل $\lim_{x\to 2^+} \cot\frac{\pi}{3-x}$ کدام است؟

۱) $+\infty$ ✓ ۲) $-\infty$ ۳) ۱ ۴) صفر



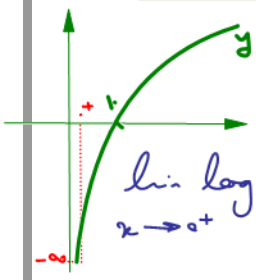
$\lim_{x\to 2^+} \cot(\frac{\pi}{3-2^+=1^-}) = +\infty$

تعریف لگاریتم

$\log_b^y = x \longleftrightarrow b^x = y$

تمرین: حاصل $\lim_{x\to 0^+} \log x$ و $\lim_{x\to 1^-} \log_{0/2}(1-x)$ به ترتیب کدام است؟

۱) $+\infty, -\infty$ ۲) $-\infty, +\infty$ ۳) هر دو $+\infty$ ۴) هر دو $-\infty$



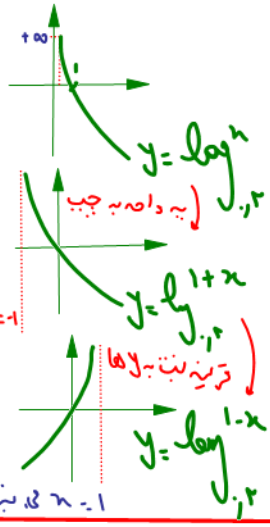
$\lim_{x\to 0^+} \log x = \log_{10}^{0^+} = -\infty$ به توان

$10^{-\infty} = \frac{1}{10^{+\infty}} = \frac{1}{+\infty} = 0$

* هر عدد به توان منفی برابر است با عکس همان عدد به همان توان ولی مثبت.

$\lim_{x\to 1^-} \log_{0/2}^{1-x} = \log_{0/2}^{0^+} = +\infty$ به توان

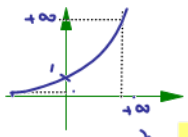
$(0/2 = \frac{2}{10} = \frac{1}{5})^{+\infty} = \frac{1}{5^{+\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0$



نکته

$(a>1)^{+\infty} = +\infty$ $(a>1)^{-\infty} = 0$

$(0<a<1)^{+\infty} = 0$ $(0<a<1)^{-\infty} = +\infty$



حد نمایی‌ها را در $\pm\infty$ جداجدا بگیر

تمرین: حاصل $\lim_{x\to 0^+} (\frac{2x+7}{2x+8})^{\log x}$ کدام است؟

$\lim_{x\to 0^+} (\frac{0+7}{0+8})^{\log_{10}^{0^+}} = (\frac{7}{8})^{-\infty}$

$\overset{+}{=} (\frac{8}{7} = 1/\ldots)^{+\infty} = +\infty$

۱ اگر $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^+}\frac{a+3[-x]}{1-2x}=-\infty$ باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}[\frac{x}{a}-x]$ کدام است؟

۱) صفر
۲) -2
۳) ۱
۴) -1

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

۲ مقدار غیرصفر حد $\lim\limits_{x\to 8}\frac{b\sqrt{2+\sqrt[3]{x}}-2b}{ax-b}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{12}$
۲) $\frac{1}{6}$
۳) $\frac{1}{48}$
۴) $\frac{1}{24}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۳ مقدار غیرصفر حد $\lim\limits_{x\to 1}\frac{b\sqrt{2-\sqrt[3]{x}}-b}{ax+b}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{3}$
۲) $-\frac{1}{3}$
۳) $-\frac{1}{6}$
۴) $\frac{1}{6}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

۴ حد عبارت $\frac{2-\sqrt[3]{3x+2}}{5x^2-18x+16}$، وقتی $x\to 2$، کدام است؟

۱) $-\frac{1}{3}$
۲) $-\frac{1}{4}$
۳) $-\frac{1}{6}$
۴) $-\frac{1}{8}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

۵ اگر $\lim\limits_{x\to 2}\frac{2x-5}{x^2+ax+b}=-\infty$ باشد، $a+b$ کدام است؟

۱) -1
۲) صفر
۳) ۱
۴) ۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۸

۶ اگر $\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{۴})^+}\frac{ax+b}{a\cos x-\sin x}=-\infty$ باشد، کمترین مقدار صحیح b کدام است؟

۱) -۴ ۲) -۳

۳) -۲ ۴) -۱

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۷ در مورد تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{x^۲-۱}{x+|x|}$، کدام بیان درست است؟

۱) $\lim\limits_{x\to۰^-}f(x)=+\infty$ ۲) $\lim\limits_{x\to۰^-}f(x)=-\infty$

۳) $\lim\limits_{x\to۰^+}f(x)=+\infty$ ۴) $\lim\limits_{x\to۰^+}f(x)=-\infty$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۸ فرض کنید چندجمله‌ای $p(x)$ بر $x^۲-۱$، بخش‌پذیر باشد. اگر $Q(x)=p(x-۱)+p(۱-x)$، آنگاه باقی‌ماندهٔ تقسیم $Q(x)$ بر $x-۲$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) صفر

۳) ۱ ۴) ۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

۹ حاصل $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۴}}\frac{\tan x-۱}{\cos ۲x}$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) $-\frac{۱}{۲}$

۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) ۱

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۱

۱۰ حاصل $\lim\limits_{x\to۰}\frac{۱-\cos^۳x}{۱-\sqrt{۱+x^۲}}([۲x]+[-۲x])$ کدام است؟ (نماد [ ] جزء صحیح است.)

۱) -۳ ۲) ۳

۳) صفر ۴) حد ندارد.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۴

۱۱ حاصل $\lim\limits_{x\to-۱}\frac{\sqrt{۲x+۳}-\sqrt{۳x+۴}}{۱+\sqrt[۳]{x}}$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) $\frac{۱}{۲}$

۳) -۲ ۴) $-\frac{۳}{۲}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۱

۱۲ مقدار $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{3}^+} \dfrac{16x - \left[-\frac{2}{x^2}\right]}{24x + \left[\frac{3}{x^2}\right]}$ ، کدام است؟ ([ ] نماد جزء صحیح است)

۱) $-\infty$ ۲) $+\infty$

۳) صفر ۴) $\frac{2}{3}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۰

۱۳ حاصل $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{1-\sin 2x}{(1-\tan x)^2}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۱

۳) ۲ ۴) $+\infty$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۲

۱۴ حاصل $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x - 7\sqrt{x} + 5}{2x - \sqrt{3x+1}}$، کدام است؟

۱) -۱/۵ ۲) -۱/۲

۳) -۰/۸ ۴) -۰/۶

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۹

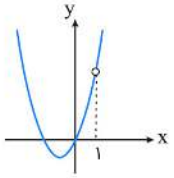
۱۵ مقدار $\lim\limits_{x\to (-\frac{1}{3})^-} \dfrac{10x - 5 + [\frac{3}{x^2}]}{16x - [-\frac{2}{x^2}]}$ ، کدام است؟([ ] نماد جزءصحیح است)

۱) $-\infty$ ۲) صفر

۳) $\frac{5}{8}$ ۴) $+\infty$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۰

۱۶ شکل زیر نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x) = \dfrac{4x^3 + ax + b}{x-1}$ است. دوتایی مرتب (a, b) کدام است؟



۱) $(0, -4)$

۲) $(-4, 0)$

۳) $(-4, 1)$

۴) $(4, 0)$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۷

۱۷ حاصل $\lim\limits_{x\to(-۲)^-}\dfrac{[x]+۳}{x+۲}$، کدام است؟

۱) $-\infty$ ۲) -۱

۳) صفر ۴) ۱

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

۱۸ در همسایگی محذوف به‌صورت $\{۳\}-(۳a-۷\ ,\ a+۵)$، حدود a کدام است؟ (با تغییر)

۱) $[-۲,\frac{۱۰}{۳}]$ ۲) $\varnothing$

۳) $(-۴,\frac{۱۱}{۲})$ ۴) $(-۲,\frac{۱۰}{۳})$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۹

۱۹ به ازای کدام مجموعه مقادیر x، بازهٔ $(x+۱,۲x-۱)$ یک همسایگی عدد ۳ می‌باشد؟

۱) $\varnothing$ ۲) $\{۲\}$

۳) $۲<x<۲/۵$ ۴) $۱/۵<x<۲$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۸

۲۰ به ازای مقداری از a، چندجمله‌ای $f(x)=x^۴+ax^۳-۸x$ بر $x+۲$ بخش‌پذیر است. کوچک‌ترین ریشهٔ معادلهٔ $f(x)=۰$ کدام است؟

۱) $۱-\sqrt{۳}$ ۲) $۱-\sqrt{۵}$

۳) $-۱-\sqrt{۳}$ ۴) $-۱-\sqrt{۵}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۴

۲۱ حاصل $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۲}^+}\dfrac{\tan x}{\cot x}$ کدام است؟

۱) $-\infty$ ۲) صفر

۳) ۱ ۴) $+\infty$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۰

۲۲ حاصل $\lim\limits_{x\to\frac{۳\pi}{۴}}\dfrac{\tan^۲x-۱}{\cos ۲x}$، کدام است؟

۱) -۲ ۲) $\frac{۱}{۲}$

۳) ۱ ۴) ۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۸

۲۳ حاصل $\lim\limits_{x\to\pi^+}\frac{۲\sin(-x)\cos ۲x}{\sqrt{۲+۲\cos x}}$، کدام است؟ (با تغییر)

۱) -۲
۲) -۱
۳) ۱
۴) ۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۷

۲۴ اگر $\lim\limits_{x\to ۳}\frac{x-۴}{۲x^۲+ax+b}=-\infty$ باشد، $a+b$ کدام است؟

۱) -۳
۲) ۳
۳) ۶
۴) ۱۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۳

۲۵ حاصل $\lim\limits_{x\to ۴}\frac{۳x^۲-۱۰x-۸}{\sqrt{۳-\sqrt{x}}-۱}$ کدام است؟

۱) -۱۱۲
۲) -۹۶
۳) -۸۴
۴) -۷۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۷

۲۶ به ازای یک مقدار a، چندجمله‌ای $P(x)=۲x^۴+ax^۳+۲x^۲-۳x$، بر $۲x-۱$ بخش‌پذیر است. در این حالت باقی‌ماندهٔ $P(x)$ بر $x+۲$، کدام است؟

۱) -۱۰
۲) -۸
۳) ۴
۴) ۶

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

۲۷ فرض کنید باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $p(x)$ بر $x-۴$ و $x+۲$، به ترتیب ۳ و ۱ باشند. باقی‌ماندهٔ تقسیم $p(x^۲)+۴p(-x)$ بر $x-۲$، کدام است؟

۱) ۷
۲) ۱
۳) صفر
۴) -۱

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۲۸ باقی‌ماندهٔ تقسیم عبارت $x^۴-ax^۳+x^۲+۲ax+۱$ بر $x+۱$ برابر ۴ است، a کدام است؟

۱) -۴
۲) -۱
۳) ۱
۴) ۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۰

۲۹ حد عبارت $\frac{|x^۲ - x - ۲|}{۲x - \sqrt{x^۲ + ۱۲}}$ وقتی $x \to ۲^-$ کدام است؟

۱) ۳-
۲) ۲-
۳) ۲
۴) ۳

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۰

۳۰ حد عبارت $\frac{x^۲ + ۱۰x + ۱۶}{۱۲ + ۶\sqrt[۳]{x}}$ وقتی $x \to -۸$، کدام است؟

۱) ۲۴-
۲) ۱۸-
۳) ۱۲-
۴) ۶-

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۳۱ حاصل $\lim\limits_{x \to -۱} \frac{۲x^۲ + ۵x + ۳}{۲ - \sqrt{۲ + \sqrt{۳ - x}}}$ کدام است؟

۱) ۸
۲) ۱۲
۳) ۱۶
۴) ۲۴

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۷

۳۲ حاصل $\lim\limits_{x \to ۲^+} \frac{۲ - \sqrt[۳]{x + ۶}}{\sqrt{x^۲ - ۴x + ۴}}$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۶}$
۲) $-\frac{۱}{۱۲}$
۳) $\frac{۱}{۱۲}$
۴) $\frac{۱}{۶}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۳

۳۳ در مورد تابع با ضابطهٔ $f(x) = \frac{\sin x}{۱ + ۲\cos x}$، کدام بیان درست است؟

۱) $\lim\limits_{x \to \frac{۲\pi}{۳}^+} f(x) = -\infty$
۲) $\lim\limits_{x \to \frac{۲\pi}{۳}^+} f(x) = +\infty$
۳) $\lim\limits_{x \to \frac{۲\pi}{۳}^-} f(x) = -\infty$
۴) $\lim\limits_{x \to \frac{۴\pi}{۳}} f(x) = +\infty$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

۳۴ حاصل $\lim\limits_{x \to \frac{۳\pi}{۴}^-} \frac{۱ - \tan^۲ x}{\sqrt{۱ + \sin ۲x}}$، کدام است؟

۱) $-۲\sqrt{۲}$
۲) $-\sqrt{۲}$
۳) $\sqrt{۲}$
۴) $۲\sqrt{۲}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۷

۳۵ حاصل $\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{۱-\sqrt{x}}{۲-\sqrt{۵-x}}$ کدام است؟

۱) -۴
۲) -۲
۳) ۲
۴) ۴

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۸

۳۶ حاصل $\lim\limits_{x\to -۱}\dfrac{۲x+\sqrt{۳-x}}{x^۲+x}$ کدام است؟

۱) $-\dfrac{۷}{۴}$
۲) $-\dfrac{۱}{۴}$
۳) $\dfrac{۳}{۴}$
۴) $\dfrac{۵}{۴}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۵

پاسخ Homework

۱ گزینه ۴

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}^+}\frac{a+3[-x]}{1-2x}=-\infty\Rightarrow\frac{a-3}{0^-}=-\infty\Rightarrow a-3>0\Rightarrow a>3$$

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}}[\frac{x}{a}-x]=[\frac{1}{2a}-\frac{1}{2}]$$

$$a>3\Rightarrow 0<\frac{1}{a}<\frac{1}{3}\xrightarrow{\times\frac{1}{2}}0<\frac{1}{2a}<\frac{1}{6}\xrightarrow{-\frac{1}{2}}$$

$$-\frac{1}{2}<\frac{1}{2a}-\frac{1}{2}<-\frac{1}{3}\Rightarrow[\frac{1}{2a}-\frac{1}{2}]=-1$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

۲ گزینه ۲

با جاگذاری $x=8$ در صورت کسر به صفر می‌رسیم ولی پاسخ حد باید مقداری غیرصفر باشد، پس باید مخرج هم صفر شود که رفع ابهام کسر صفر صفرم داشته باشیم:

$$8a-b=0\Rightarrow 8a=b$$

$$\lim_{x\to 8}\frac{b(\sqrt{2+\sqrt[3]{x}}-2)}{b(\frac{x}{8}-1)}\times\frac{\sqrt{2+\sqrt[3]{x}}+2}{\sqrt{2+\sqrt[3]{x}}+2}=\lim_{x\to 8}\frac{\sqrt[3]{x}+2-4}{\frac{x}{2}-4}$$

$$=\lim_{x\to 8}\frac{\sqrt[3]{x}-2}{\frac{x}{2}-4}\times\frac{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4}{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4}=\lim_{x\to 8}\frac{x-8}{6x-48}=\lim_{x\to 8}\frac{x-8}{6(x-8)}=\frac{1}{6}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۳ گزینه ۴

صورت کسر به ازای $x = ۱$ صفر می‌شود، پس باید مخرج هم به ازای $x = ۱$ صفر شود تا حالت $\frac{۰}{۰}$ و رفع ابهام داشته باشیم.

$$a + b = ۰ \Rightarrow a = -b$$

$$\lim_{x\to ۱} \frac{-a\sqrt{۲ - \sqrt[۳]{x}} + a}{ax - a} = \lim_{x\to ۱} \frac{-\sqrt{۲ - \sqrt[۳]{x}} + ۱}{x - ۱} = \frac{۰}{۰}$$

$$\lim_{x\to ۱} \frac{-\sqrt{۲ - \sqrt[۳]{x}} + ۱}{x - ۱} \times \frac{\sqrt{۲ - \sqrt[۳]{x}} + ۱}{\sqrt{۲ - \sqrt[۳]{x}} + ۱} = \lim_{x\to ۱} \frac{۱ - ۲ + \sqrt[۳]{x}}{(x - ۱)(۱ + \sqrt{۲ - \sqrt[۳]{x}})}$$

$$= \lim_{x\to ۱} \frac{\sqrt[۳]{x} - ۱}{۲(x - ۱)} \times \frac{(\sqrt[۳]{x^۲} + \sqrt[۳]{x} + ۱)}{۲(x - ۱)(\sqrt[۳]{x^۲} + \sqrt[۳]{x} + ۱)} = \lim_{x\to ۱} \frac{x - ۱}{۲(x - ۱) \times ۳} = \frac{۱}{۶}$$

از قاعدهٔ هوپیتال هم می‌توان برای رفع ابهام $\frac{۰}{۰}$ استفاده کرد:

$$\lim_{x\to ۱} \frac{-\sqrt{۲ - \sqrt[۳]{x}} + ۱}{x - ۱} \xrightarrow{\text{HOP}} \lim_{x\to ۱} \frac{-\frac{-۱}{۳\sqrt[۳]{x^۲}}}{\frac{۲\sqrt{۲ - \sqrt[۳]{x}}}{۱}} = \frac{۱}{۶}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

۴ گزینه ۴

$$\lim_{x\to ۲} \frac{۲ - \sqrt[۳]{۳x + ۲}}{۵x^۲ - ۱۸x + ۱۶} = \frac{۰}{۰}$$

راه‌حل اول:

$$\lim_{x\to ۲} \frac{۲ - \sqrt[۳]{۳x + ۲}}{۵x^۲ - ۱۸x + ۱۶} = \lim_{x\to ۲} \frac{۸ - (۳x + ۲)}{(۵x^۲ - ۱۸x + ۱۶)(۴ + ۲\sqrt[۳]{۳x + ۲} + \sqrt[۳]{(۳x + ۲)^۲})}$$

$$= \lim_{x\to ۲} \frac{-۳(x - ۲)}{۱۲(x - ۲)(۵x - ۸)} = \frac{-۱}{۸}$$

راه‌حل دوم:

$$\text{HOP} : \lim_{x\to ۲} \frac{۰ - \frac{۳}{۳\sqrt[۳]{(۳x + ۲)^۲}}}{۱۰x - ۱۸} = \lim_{x\to ۲} \frac{-۱}{(۱۰x - ۱۸)\sqrt[۳]{(۳x + ۲)^۲}}$$

$$= \frac{-۱}{۲(۴)} = \frac{-۱}{۸}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

۵ گزینه ۲

چون $\lim\limits_{x\to ۲}\dfrac{۲x-۵}{x^۲+ax+b}=-\infty$ است، پس باید مخرج کسر در همسایگی $x=۲$ مثبت و به ازای $x=۲$ صفر شود. یعنی معادلهٔ $x^۲+ax+b=۰$ باید ریشهٔ مضاعف $x=۲$ داشته باشد و درنتیجه:

$$x^۲+ax+b=(x-۲)^۲=x^۲-۴x+۴$$

با مقایسهٔ دو عبارت $x^۲+ax+b$ و $x^۲-۴x+۴$ نتیجه می‌شود که $a=-۴$ و $b=۴$، پس $a+b=۰$.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۸

۶ گزینه ۴

$x=\dfrac{\pi}{۳}$ ریشه مخرج است.

$$\frac{a}{۲}-\frac{\sqrt{۳}}{۲}=۰\Rightarrow a=\sqrt{۳}\Rightarrow f(x)=\frac{x\sqrt{۳}+b}{\sqrt{۳}\cos x-\sin x}$$

چون x از راست به $\dfrac{\pi}{۳}$ نزدیک می‌شود آن‌گاه $\sqrt{۳}\cos x<\sin x$ است پس مخرج از چپ به صفر نزدیک می‌شود.

$$\lim_{x\to(\frac{\pi}{۳})^+}\frac{x\sqrt{۳}+b}{\sqrt{۳}\cos x-\sin x}=\frac{\frac{\sqrt{۳}\pi}{۳}+b}{۰^-}=-\infty\Rightarrow\frac{\pi}{\sqrt{۳}}+b>۰$$

$$\Rightarrow b>\frac{-\pi}{\sqrt{۳}}\simeq-۱/۸۱\xrightarrow{b\in\mathbb{Z}}\min(b)=-۱$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۷ گزینه ۴

$$\lim_{x\to۰^+}\frac{x^۲-۱}{x+|x|}=\lim_{x\to۰^+}\frac{x^۲-۱}{x+x}=\frac{-۱}{۰^+}=-\infty$$

$$\lim_{x\to۰^-}\frac{x^۲-۱}{x+|x|}=\lim_{x\to۰^-}\frac{x^۲-۱}{\text{صفر مطلق}}=\text{تعریف‌نشده}$$

تابع در همسایگی چپ صفر حد ندارد، بنابراین گزینهٔ ۴ درست است.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۸ گزینه ۲

چندجمله‌ای $p(x)$ بر $x^۲ - ۱$ بخش‌پذیر است، بنابراین $p(x)$ به ازای ریشه‌های $x^۲ - ۱$ برابر صفر است.

$$x^۲ - ۱ = ۰ \Rightarrow x^۲ = ۱ \Rightarrow x = ۱ , -۱$$

بنابراین داریم:

$$p(۱) = ۰ , p(-۱) = ۰ \quad (*)$$

اکنون باقی‌ماندهٔ تقسیم $Q(x)$ بر $x - ۲$ را می‌خواهیم؛ یعنی باید $Q(۲)$ را محاسبه کنیم.

$$Q(x) = p(x - ۱) + p(۱ - x)$$

$$\xrightarrow{x=۲} Q(۲) = p(۲ - ۱) + p(۱ - ۲) = p(۱) + p(-۱)$$

$$\xrightarrow{(*)} Q(۲) = ۰ + ۰ = ۰$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

۹ گزینه ۱

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۱

گام اول

می‌دانیم: $\cos ۲x = \cos^۲ x - \sin^۲ x$ و $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

گام دوم

وقتی $x \to \dfrac{\pi}{۴}$، حاصل حد به‌صورت مبهم $\dfrac{۰}{۰}$ می‌شود. باتوجه‌به گام اول، کسر را تا حد امکان ساده کرده و حاصل حد را محاسبه می‌کنیم.

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{۴}} \frac{\tan x - ۱}{\cos ۲x} = \lim_{x \to \frac{\pi}{۴}} \frac{\frac{\sin x}{\cos x} - ۱}{\cos^۲ x - \sin^۲ x} = \lim_{x \to \frac{\pi}{۴}} \frac{\frac{\sin x - \cos x}{\cos x}}{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)}$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{۴}} \frac{\frac{-(\cos x - \sin x)}{\cos x}}{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)} = \lim_{x \to \frac{\pi}{۴}} \frac{-۱}{\cos x(\cos x + \sin x)}$$

$$= \frac{-۱}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}(\frac{\sqrt{۲}}{۲} + \frac{\sqrt{۲}}{۲})} = \frac{-۱}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}(\sqrt{۲})} = -۱$$

۱۰ گزینه ۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۴

گام اول

الف) وقتی $x \to ۰$ نتیجه می‌گیریم $x \notin \mathbb{Z}$، بنابراین $۲x$ هم یک عدد غیر صحیح است. اگر $۲x$ یک عدد غیر صحیح باشد، می‌توان نتیجه گرفت $[۲x] + [-۲x] = -۱$.

ب) وقتی $x \to ۰$، حاصل حد عبارت $\frac{۱-\cos^۳ x}{۱-\sqrt{۱+x^۲}}$ برابر $\frac{۰}{۰}$ بوده و مبهم است.

گام دوم

$$\lim_{x\to ۰}(-۱)\times\frac{۱-\cos^۳ x}{۱-\sqrt{۱+x^۲}}=\lim_{x\to ۰}(-۱)\times\frac{(۱-\cos x)(۱+\cos^۲ x+\cos x)}{۱-\sqrt{۱+x^۲}}\times\frac{۱+\sqrt{۱+x^۲}}{۱+\sqrt{۱+x^۲}}$$

$$=\lim_{x\to ۰}(-۱)\times\frac{(۱-\cos x)(۳)(۲)}{۱-(۱+x^۲)}=\lim_{x\to ۰}\frac{۶(۱-\cos x)}{x^۲}=\lim_{x\to ۰}\frac{۶(۲\sin^۲\frac{x}{۲})}{x^۲}$$

$$=\lim_{x\to ۰}\frac{۶(۲\sin^۲\frac{x}{۲})}{x^۲}=\lim_{x\to ۰}\frac{۱۲\sin\frac{x}{۲}\times\sin\frac{x}{۲}}{۴\times\frac{x}{۲}\times\frac{x}{۲}}=۳$$

نکته:

$$۱-\cos ۲\alpha = ۲\sin^۲\alpha$$

$$\lim_{\alpha\to ۰}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=۱$$

راه دوم: با استفاده از هوپیتال به رفع ابهام کسر می‌پردازیم:

$$\lim_{x\to ۰}(-۱)\times\frac{۱-\cos^۳ x}{۱-\sqrt{۱+x^۲}}=\lim_{x\to ۰}\frac{\cos^۳ x-۱}{۱-\sqrt{۱+x^۲}}=\frac{۰}{۰}$$

$$=\lim_{x\to ۰}\frac{-۳\cos^۲ x(\sin x)}{-\frac{۲x}{۲\sqrt{۱+x^۲}}}=\lim_{x\to ۰}\frac{۳\cos^۲ x(\sin x)\sqrt{۱+x^۲}}{x}$$

$$=\lim_{x\to ۰}\frac{\sin x}{x}\times\lim_{x\to ۰}۳\cos^۲ x(\sqrt{۱+x^۲})=۱\times ۳=۳$$

۱۱ گزینه ۴

راه حل اول:

$$\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{2x+3}-\sqrt{3x+4}}{1+\sqrt[3]{x}}\times\frac{\sqrt{2x+3}+\sqrt{3x+4}}{\sqrt{2x+3}+\sqrt{3x+4}}\times\frac{1+\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}}$$
$$=\lim_{x\to -1}\frac{-(x+1)(1+1+1)}{(1+1)(1+x)}=-\frac{3}{2}$$

راه حل دوم: برای رفع ابهام $\frac{0}{0}$ از هوپیتال استفاده می‌کنیم:

$$\frac{\frac{2}{2\sqrt{2x+3}}-\frac{3}{2\sqrt{3x+4}}}{\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}}\overset{x=-1}{=}\frac{1-\frac{3}{2}}{\frac{1}{3}}=-\frac{3}{2}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۱

۱۲ گزینه ۲

$$\lim_{x\to(\frac{1}{2})^+}\left[\frac{-2}{x^2}\right]=\left[\frac{-2}{(\frac{1}{4})^-}\right]=[-(8^+)]=-9$$

$$\lim_{x\to(\frac{1}{2})^+}\left[\frac{3}{x^2}\right]=\left[\frac{3}{(\frac{1}{4})^-}\right]=[12^+]=12$$

$$\lim_{x\to(\frac{1}{2})^+}\frac{16x+9}{24x+12}=\frac{1}{(-12)^++12}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۰

۱۳ گزینه ۱

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۲

گام اول

وقتی $x \to \frac{\pi}{۴}$، هم حاصل صورت و هم حاصل مخرج برابر صفر شده و درنتیجه حد دارای ابهام $\frac{۰}{۰}$ است.

گام دوم

با استفاده از روابط مثلثاتی زیر، تا جایی که امکان دارد عبارت مثلثاتی داده‌شده را ساده کرده و حد آن را به دست می‌آوریم:

$$۱)\ \sin ۲x = ۲\sin x\cos x \Rightarrow ۱-\sin ۲x = \sin^۲ x + \cos^۲ x - ۲\sin x\cos x$$
$$= (\sin x - \cos x)^۲ \Rightarrow ۱-\sin ۲x = (\sin x - \cos x)^۲$$
$$۲)\ \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}} \frac{۱-\sin ۲x}{(۱-\tan x)^۲} = \lim_{x\to\frac{\pi}{۴}} \frac{(\sin x-\cos x)^۲}{(۱-\frac{\sin x}{\cos x})^۲}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{۴}} \frac{(\sin x-\cos x)^۲}{\frac{(\cos x-\sin x)^۲}{\cos^۲ x}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{۴}} \frac{(\sin x-\cos x)^۲\cos^۲ x}{(\sin x-\cos x)^۲}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{۴}} \cos^۲ x = (\frac{\sqrt{۲}}{۲})^۲ = \frac{۱}{۲}$$

۱۴ گزینه ۲

راه‌حل اول: ابهام $\frac{۰}{۰}$ را با گویا کردن از بین می‌بریم:

$$\lim_{x\to ۱} \frac{۲x-۷\sqrt{x}+۵}{۲x-\sqrt{۳x+۱}} \times \frac{۲x+\sqrt{۳x+۱}}{۲x+\sqrt{۳x+۱}} = \lim_{x\to ۱} \frac{(۲x-۷\sqrt{x}+۵)(۲x+\sqrt{۳x+۱})}{۴x^۲-۳x-۱}$$
$$= \lim_{x\to ۱} \frac{(\sqrt{x}-۱)(۲\sqrt{x}-۵)(۲x+\sqrt{۳x+۱})}{(x-۱)(۴x+۱)} = \lim_{x\to ۱} \frac{\cancel{(\sqrt{x}-۱)}(۲\sqrt{x}-۵)(۲x+\sqrt{۳x+۱})}{\cancel{(\sqrt{x}-۱)}(\sqrt{x}+۱)(۴x+۱)}$$
$$= \frac{-۳\times ۴}{۲\times ۵} = \frac{-۱۲}{۱۰} = -۱/۲$$

راه‌حل دوم: با استفاده از هوپیتال حاصل حد را می‌یابیم:

$$\lim_{x\to ۱} \frac{۲x-۷\sqrt{x}+۵}{۲x-\sqrt{۳x+۱}} = \frac{۰}{۰}$$
$$\xrightarrow{\text{HOP}} \lim_{x\to ۱} \frac{۲-\frac{۷}{۲\sqrt{x}}}{۲-\frac{۳}{۲\sqrt{۳x+۱}}} = \frac{۲-\frac{۷}{۲}}{۲-\frac{۳}{۴}} = \frac{-\frac{۳}{۲}}{\frac{۵}{۴}} = -\frac{۶}{۵} = -۱/۲$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۹

۱۵ گزینه ۱

$$\lim_{x\to(-\frac{1}{2})^-}\frac{10x-5+\left[\frac{3}{x^2}\right]}{\left(16x-\left[-\frac{2}{x^2}\right]\right)}=\lim_{x\to(-\frac{1}{2})^-}\frac{10x-5+\left[3\times(4)^-\right]}{16x-\left[-2\times4^-\right]}=\lim_{x\to(-\frac{1}{2})^-}\frac{10x-5+\left[12^-\right]}{16x-\left[(-8)^+\right]}$$

$$=\lim_{x\to(-\frac{1}{2})^-}\frac{10x-5+11}{16x-(-8)}=\lim_{x\to(-\frac{1}{2})^-}\frac{10x+6}{16x+8}=\frac{-5+6}{(-8)^-+8}=\frac{1}{0^-}=-\infty$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۰

۱۶ گزینه ۲

باتوجه‌به نمودار $f(0)=0$ است، پس داریم:

$$f(0)=0\Rightarrow\frac{0+b}{0-1}=0\Rightarrow -b=0\Rightarrow b=0$$

ازطرفی تابع در نقطهٔ $x=1$ تعریف‌نشده است، چون $x=1$ ریشهٔ مخرج کسر است پس حد صورت کسر نیز وقتی $x\to1$ باید برابر صفر باشد که تابع به‌صورت مبهم $\frac{0}{0}$ دربیاید.

$$\lim_{x\to1}4x^3+ax+b=0\Rightarrow 4+a=0\Rightarrow a=-4$$

بنابراین داریم: $(a,b)=(-4,0)$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۷

۱۷ گزینه ۳

$$\lim_{x\to(-2)^-}\frac{[x]+3}{x+2}=\frac{\overbrace{[(-2)^-]}^{-3}+3}{(-2)^-+2}=\frac{0}{0^-}=0$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

۱۸ گزینه ۴

$$3a-7<3<a+5$$

$$\Rightarrow\begin{cases}3a-7<3\Rightarrow 3a<10\Rightarrow a<\frac{10}{3}\\ a+5>3\Rightarrow a>-2\end{cases}\xrightarrow{\cap}-2<a<\frac{10}{3}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۹

۱۹ گزینه ۱

$$x+1<3<2x-1$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x+1<3 \Rightarrow x<2 \\ 2x-1>3 \Rightarrow 2x>4 \Rightarrow x>2 \end{cases} \xrightarrow{\cap} \varnothing$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۸

۲۰ گزینه ۴

چون $f(x)$ بر $x+2$ بخش‌پذیر است، بنابراین $f(-2)=0$ است.

$$f(x)=x^4+ax^3-8x \Rightarrow f(-2)=16-8a+16=0$$
$$\Rightarrow 8a=32 \Rightarrow a=4 \Rightarrow f(x)=x^4+4x^3-8x$$

برای به دست آوردن سایر عامل‌های $f(x)$ کافی است $f(x)$ را بر $x+2$ تقسیم کنیم و ریشه‌های معادلهٔ $f(x)=0$ را به دست آوریم.

$$\begin{array}{r|l} x^4+4x^3-8x & x+2 \\ \hline -(x^4+2x^3) & x^3+2x^2-4x \\ \hline 2x^3-8x & \\ -(2x^3+4x^2) & \\ \hline -4x^2-8x & \\ -(-4x^2-8x) & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$f(x)=(x+2)(x^3+2x^2-4x)=0$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x+2=0 \Rightarrow x=-2 \\ x(x^2+2x-4)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=-1\pm\sqrt{5} \end{cases} \end{cases}$$

بنابراین کوچک‌ترین ریشهٔ معادلهٔ $f(x)=0$ برابر با $x=-1-\sqrt{5}$ است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۴

۲۱ گزینه ۴

$\cot x$ را برابر $\frac{۱}{\tan x}$ فرض کرده و عبارت را بر حسب $\tan x$ به دست می‌آوریم و حاصل حد را وقتی $x \to \frac{\pi}{۲}^+$ محاسبه می‌کنیم.

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{۲}^+} \frac{\tan x}{\cot x} = \lim_{x\to \frac{\pi}{۲}^+} \frac{\tan x}{\frac{۱}{\tan x}} = \lim_{x\to \frac{\pi}{۲}^+} \tan^۲ x = (-\infty)^۲ = +\infty$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۰

۲۲ گزینه ۱

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۸

گام اول

می‌دانیم: $\cos ۲x = \cos^۲ x - \sin^۲ x$ و $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

گام دوم

وقتی $x \to \frac{۳\pi}{۴}$، حاصل حد به‌صورت مبهم $\frac{۰}{۰}$ می‌شود. با استفاده از گام اول، کسر را تا حد امکان ساده کرده و حاصل حد را به دست می‌آوریم.

$$\lim_{x\to \frac{۳\pi}{۴}} \frac{\tan^۲ x - ۱}{\cos ۲x} = \lim_{x\to \frac{۳\pi}{۴}} \frac{\frac{\sin^۲ x}{\cos^۲ x} - ۱}{\cos^۲ x - \sin^۲ x} = \lim_{x\to \frac{۳\pi}{۴}} \frac{\frac{\sin^۲ x - \cos^۲ x}{\cos^۲ x}}{-(\sin^۲ x - \cos^۲ x)}$$

$$= \lim_{x\to \frac{۳\pi}{۴}} -\frac{۱}{\cos^۲ x} = -\frac{۱}{\cos^۲ \frac{۳\pi}{۴}} = -\frac{۱}{(-\frac{\sqrt{۲}}{۲})^۲} = -\frac{۱}{\frac{۱}{۲}} = -۲$$

۲۳ گزینه ۴

نکته:

$$\sin ۲A = ۲\sin A\cos A$$
$$\cos ۲A = ۲\cos^۲ A - ۱$$

$$\lim_{x\to\pi^+}\frac{۲\sin(-x)\cos ۲x}{\sqrt{۲(۱+\cos x)}} = \frac{۰}{۰} \quad \text{(مبهم)}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\pi^+}\frac{۲\sin(-x)\cos ۲x}{\sqrt{۲(۱+\cos x)}} = -۲\lim_{x\to\pi^+}\frac{\sin x\cos ۲x}{\sqrt{۴\cos^۲\frac{x}{۲}}} = -\lim_{x\to\pi^+}\frac{\sin x}{\left|\cos\frac{x}{۲}\right|}$$

$$= -\lim_{x\to\pi^+}\frac{۲\sin\frac{x}{۲}\cos\frac{x}{۲}}{-\cos\frac{x}{۲}} = ۲$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۳۹۷

۲۴ گزینه ۳

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۳۹۳

گام اول

الف) وقتی $x\to ۳$ حد عبارت صورت برابر -۱ است. پس حد عبارت مخرج باید برابر ۰^+ شود تا حاصل حد برابر $-\infty$ شود.
حد عبارت مخرج وقتی $x\to ۳$ در صورتی ۰^+ می‌شود که $x=۳$ ریشهٔ مضاعف مخرج باشد (حاصل حد مخرج کسر وقتی $x\to ۳^+$ و $x\to ۳^-$ باید برابر ۰^+ شود).
ب) مخرج باید به صورت $۲(x-۳)^۲$ باشد تا بتوان گفت $x=۳$ ریشهٔ مضاعف مخرج است.

گام دوم

$$۲(x-۳)^۲ = ۲(x^۲-۶x+۹) = ۲x^۲-۱۲x+۱۸ = ۲x^۲+ax+b$$
$$\Rightarrow \begin{cases} a=-۱۲ \\ b=۱۸ \end{cases} \Rightarrow a+b=-۱۲+۱۸=۶$$

۲۵ گزینه ۱

راه‌حل اول:

$$\lim_{x\to ۴}\frac{۳x^۲-۱۰x-۸}{\sqrt{۳-\sqrt{x}}-۱}=\lim_{x\to ۴}\frac{(۳x+۲)(x-۴)}{\sqrt{۳-\sqrt{x}}-۱}\times\frac{\sqrt{۳-\sqrt{x}}+۱}{\sqrt{۳-\sqrt{x}}+۱}=\lim_{x\to ۴}\frac{(۳x+۲)(x-۴)(\sqrt{۳-\sqrt{x}}+۱)}{(۲-\sqrt{x})}$$

$$=\lim_{x\to ۴}\frac{-(۳x+۲)\cancel{(۲-\sqrt{x})}(۲+\sqrt{x})(\sqrt{۳-\sqrt{x}}+۱)}{\cancel{(۲-\sqrt{x})}}=\lim_{x\to ۴}\left(-(۳x+۲)(۲+\sqrt{x})(\sqrt{۳-\sqrt{x}}+۱)\right)$$

$$=-۱۴\times ۴\times ۲=-۱۱۲$$

راه‌حل دوم:

$$\xrightarrow{\text{HOP}}\lim_{x\to ۴}\frac{۳x^۲-۱۰x-۸}{\sqrt{۳-\sqrt{x}}-۱}=\lim_{x\to ۴}\frac{۶x-۱۰}{\frac{-۱}{۲\sqrt{x}}}{\frac{}{۲\sqrt{۳-\sqrt{x}}}}=\frac{۱۴}{\frac{-۱}{\frac{۲\times ۲}{۲}}}=-۱۴\times ۸=-۱۱۲$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۷

۲۶ گزینه ۱

طبق صورت سؤال نتیجه می‌گیریم که $P(\frac{۱}{۲})=۰$، بنابراین:

$$۲(\frac{۱}{۲})^۴+a(\frac{۱}{۲})^۳+۲(\frac{۱}{۲})^۲-۳(\frac{۱}{۲})=۰\Rightarrow ۲(\frac{۱}{۱۶})+a(\frac{۱}{۸})+\frac{۱}{۲}-\frac{۳}{۲}=۰$$
$$\Rightarrow\frac{۱}{۸}+\frac{a}{۸}-۱=۰\Rightarrow a=۷$$

باقی‌ماندهٔ تقسیم $P(x)$ بر $x+۲$ برابر با $P(-۲)$ است، پس داریم:

$$P(x)=۲x^۴+۷x^۳+۲x^۲-۳x$$
$$\Rightarrow P(-۲)=۲(-۲)^۴+۷(-۲)^۳+۲(-۲)^۲-۳(-۲)=۳۲-۵۶+۸+۶=-۱۰$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

۲۷ گزینه ۱

باقی‌ماندهٔ تقسیم $p(x)$ بر $x-۴$ برابر ۳ است، پس $p(۴)=۳$.

باقی‌ماندهٔ تقسیم $p(x)$ بر $x+۲$ برابر ۱ است، پس $p(-۲)=۱$.

حال باقی‌ماندهٔ تقسیم $p(x^۲)+۴p(-x)$ بر $x-۲$ را می‌خواهیم، بنابراین $x=۲$ را در آن جایگذاری می‌کنیم:

$$p(x^۲)+۴p(-x)=p(۲^۲)+۴p(-۲)$$

$$=p(۴)+۴p(-۲)=۳+۴\times ۱=۷$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۲۸ گزینه ۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۰

گام اول

وقتی باقی‌ماندهٔ تقسیم عبارت $P(x)=x^۴-ax^۳+x^۲+۲ax+۱$ بر $x+۱$ برابر ۴ باشد، یعنی حاصل $P(-۱)$ برابر ۴ است.

گام دوم

$$x+۱=۰\Rightarrow x=-۱\Rightarrow P(-۱)=۴$$

$$P(-۱)=(-۱)^۴-a(-۱)^۳+(-۱)^۲+۲a(-۱)+۱=۴\Rightarrow ۱+a+۱-۲a+۱=۴\Rightarrow -a+۳=۴$$
$$\Rightarrow a=۳-۴=-۱\Rightarrow a=-۱$$

۲۹ گزینه ۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۰

گام اول

الف) $x \to ۲^-$ یعنی $x < ۲$ است، باتوجه‌به این نکته تعیین می‌کنیم علامت عبارت داخل قدر مطلق مثبت است یا منفی سپس آن را از قدر مطلق خارج می‌کنیم.

ب) وقتی $x \to ۲^-$ حاصل صورت و مخرج کسر برابر صفر حدی می‌شود. پس برای رفع ابهام می‌توانیم هم صورت و مخرج را در مزدوج مخرج ضرب کنیم و هم از قاعدهٔ هوپیتال استفاده کنیم.

گام دوم

$$\left.\begin{array}{l} x^۲ - x - ۲ = (x-۲)(x+۱) \\ x \to ۲^- \Rightarrow x < ۲ \Rightarrow x - ۲ < ۰ \end{array}\right\} \Rightarrow |x^۲ - x - ۲| = -(x-۲)(x+۱)$$

روش اول:

$$\lim_{x \to ۲^-} \frac{|x^۲ - x - ۲|}{۲x - \sqrt{x^۲ + ۱۲}} = \lim_{x \to ۲^-} \frac{-x^۲ + x + ۲}{۲x - \sqrt{x^۲ + ۱۲}}$$
$$= \lim_{x \to ۲^-} \frac{-x^۲ + x + ۲}{۲x - \sqrt{x^۲ + ۱۲}} \times \frac{۲x + \sqrt{x^۲ + ۱۲}}{۲x + \sqrt{x^۲ + ۱۲}}$$
$$= \lim_{x \to ۲^-} \frac{(-x^۲ + x + ۲)(۲x + \sqrt{x^۲ + ۱۲})}{(۴x^۲ - x^۲ - ۱۲)}$$
$$= \lim_{x \to ۲^-} \frac{-(x-۲)(x+۱)(۲x + \sqrt{x^۲ + ۱۲})}{۳(x-۲)(x+۲)}$$
$$= \lim_{x \to ۲^-} \frac{-(x+۱)(۲x + \sqrt{x^۲ + ۱۲})}{۳(x+۲)}$$
$$= \frac{-(۲+۱)(۴+۴)}{۳(۲+۲)} = \frac{-۳ \times ۸}{۳ \times ۴} = -۲$$

روش دوم: (فراتر از کتاب درسی)

در این روش حاصل حد را با استفاده از قاعدهٔ هوپیتال به دست می‌آوریم:

$$\lim_{x \to ۲^-} \frac{|x^۲ - x - ۲|}{۲x - \sqrt{x^۲ + ۱۲}} = \lim_{x \to ۲^-} \frac{-(x-۲)(x+۱)}{۲x - \sqrt{x^۲ + ۱۲}}$$
$$\xrightarrow{\text{HOP}} \lim_{x \to ۲^-} \frac{-۲x + ۱}{۲ - \frac{۲x}{۲\sqrt{x^۲ + ۱۲}}} = \frac{-۴ + ۱}{۲ - \frac{۲}{\sqrt{۴ + ۱۲}}} = \frac{-۳}{۲ - \frac{۱}{۲}} = \frac{-۳}{\frac{۳}{۲}} = -۲$$

۳۰ گزینه ۳

راه‌حل اول:

$$\lim_{x\to -۸}\frac{x^۲+۱۰x+۱۶}{۶(۲+\sqrt[۳]{x})}=\frac{۰}{۰}$$

$$\lim_{x\to -۸}\frac{x^۲+۱۰x+۱۶}{۶(۲+\sqrt[۳]{x})}=\lim_{x\to -۸}\frac{(x+۸)(x+۲)(۴-۲\sqrt[۳]{x}+\sqrt[۳]{x^۲})}{۶(۲+\sqrt[۳]{x})(۴-۲\sqrt[۳]{x}+\sqrt[۳]{x^۲})}$$

$$=\lim_{x\to -۸}\frac{(x+۸)(x+۲)(۴-۲\sqrt[۳]{x}+\sqrt[۳]{x^۲})}{۶(x+۸)}$$

$$=\lim_{x\to -۸}\frac{(x+۲)(۴-۲\sqrt[۳]{x}+\sqrt[۳]{x^۲})}{۶}=\frac{-۶\times ۱۲}{۶}=-۱۲$$

راه‌حل دوم: (فراتر از کتاب)

با استفاده از قاعدهٔ هوپیتال داریم:

$$\text{HOP}:\lim_{x\to -۸}\frac{۲x+۱۰}{۶\times\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{x^۲}}}=\frac{-۱۶+۱۰}{۶\times\frac{۱}{۳\times ۴}}=-۶\times ۲=-۱۲$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۳۱ گزینه ۳

$$\lim_{x\to -۱}\frac{۲x^۲+۵x+۳}{۲-\sqrt{۲+\sqrt{۳-x}}}=\frac{۰}{۰}$$

راه‌حل اول:

$$\lim_{x\to -۱}\frac{۲x^۲+۵x+۳}{۲-\sqrt{۲+\sqrt{۳-x}}}\times\frac{۲+\sqrt{۲+\sqrt{۳-x}}}{۲+\sqrt{۲+\sqrt{۳-x}}}$$

$$=\lim_{x\to -۱}\frac{(x+۱)(۲x+۳)(۲+\sqrt{۲+\sqrt{۳-x}})}{۴-(۲+\sqrt{۳-x})}$$

$$=\lim_{x\to -۱}\frac{(x+۱)(۲x+۳)(۲+\sqrt{۲+\sqrt{۳-x}})}{۲-\sqrt{۳-x}}\times\frac{۲+\sqrt{۳-x}}{۲+\sqrt{۳-x}}$$

$$=\lim_{x\to -۱}\frac{(x+۱)(۲x+۳)(۲+\sqrt{۲+\sqrt{۳-x}})(۲+\sqrt{۳-x})}{۴-۳+x}$$

$$=\lim_{x\to -۱}(۲x+۳)(۲+\sqrt{۲+\sqrt{۳-x}})(۲+\sqrt{۳-x})=۱(۲+۲)(۲+۲)=۱۶$$

راه‌حل دوم: (فراتر از کتاب)

استفاده از قاعدهٔ هوپیتال:

$$\lim_{x\to -۱}\frac{۲x^۲+۵x+۳}{۲-\sqrt{۲+\sqrt{۳-x}}}\xrightarrow{\text{HOP}}\lim_{x\to -۱}\frac{۴x+۵}{\frac{-۱}{۲\sqrt{۳-x}}\times\frac{۱}{۲\sqrt{۲+\sqrt{۳-x}}}}=\frac{۱}{\frac{۱}{۴}\times\frac{۱}{۴}}=۱۶$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۷

۳۲ گزینه ۲

با استفاده از اتحاد $a^۳ - b^۳ = (a-b)(a^۲ + ab + b^۲)$ داریم:

$$\lim_{x\to ۲^+} \frac{۲ - \sqrt[۳]{x+۶}}{\sqrt{x^۲ - ۴x + ۴}} = \lim_{x\to ۲^+} \frac{(۲ - \sqrt[۳]{x+۶})(۴ + ۲\sqrt[۳]{x+۶} + \sqrt[۳]{(x+۶)^۲})}{\sqrt{(x-۲)^۲}(۴ + ۲\sqrt[۳]{x+۶} + \sqrt[۳]{(x+۶)^۲})}$$

$$= \lim_{x\to ۲^+} \frac{(۲-x)}{(x-۲)(۴ + ۲\sqrt[۳]{x+۶} + \sqrt[۳]{(x+۶)^۲}} = -\frac{۱}{۴+۴+۴} = -\frac{۱}{۱۲}$$

روش دوم: (هوپیتال ـ فراتر از کتاب)

$$\lim_{x\to ۲^+} \frac{۲ - \sqrt[۳]{x+۶}}{\sqrt{x^۲ - ۴x + ۴}} = \lim_{x\to ۲^+} \frac{۲ - \sqrt[۳]{x+۶}}{\sqrt{(x-۲)^۲}} = \lim_{x\to ۲^+} \frac{۲ - \sqrt[۳]{x+۶}}{|x-۲|} = \frac{۰}{۰}$$

$$\xrightarrow{\text{هوپیتال}} \lim_{x\to ۲^+} \frac{۲ - \sqrt[۳]{x+۶}}{|x-۲|} \xrightarrow[x\to ۲^-]{x-۲>۰} \lim_{x\to ۲^+} \frac{۲ - \sqrt[۳]{x+۶}}{x-۲} = \lim_{x\to ۲^+} \frac{-\frac{۱}{۳}(x+۶)^{\frac{-۲}{۳}}}{۱}$$

$$= \frac{-\frac{۱}{۳}(۲+۶)^{\frac{-۲}{۳}}}{۱} = -\frac{۱}{۳\times ۴} = -\frac{۱}{۱۲}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۳

۳۳ گزینه ۱

می‌دانیم $\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$ و $\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$ و $\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$. حال داریم:

$$\lim_{x\to \frac{۲\pi}{۳}^+} \frac{\sin x}{۱ + ۲\cos x} = \frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{۱ + ۲(-\frac{۱}{۲})^-} = \frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{۰^-} = -\infty$$

$$\lim_{x\to \frac{۲\pi}{۳}^-} \frac{\sin x}{۱ + ۲\cos x} = \frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{۱ + ۲(-\frac{۱}{۲})^+} = \frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{۰^+} = +\infty$$

$$\lim_{x\to \frac{۲\pi}{۳}^\pm} \frac{\sin x}{۱ + ۲\cos x} = \frac{\frac{-\sqrt{۳}}{۲}}{۱ + ۲(-\frac{۱}{۲})^\pm} = \frac{-\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{۰^\pm} = \pm\infty$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

۳۴ گزینه ۱

$$\lim_{x\to\frac{3\pi}{4}^-}\frac{1-\tan^2 x}{\sqrt{1+\sin 2x}}=\lim_{x\to\frac{3\pi}{4}^-}\frac{1-\tan^2 x}{\sqrt{(\sin x+\cos x)^2}}$$

$$=\lim_{x\to\frac{3\pi}{4}^-}\frac{1-\tan^2 x}{|\sin x+\cos x|}=\lim_{x\to\frac{3\pi}{4}^-}\frac{\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos^2 x}}{(\sin x+\cos x)}$$

$$\lim_{x\to\frac{3\pi}{4}^-}\frac{(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)}{\cos^2 x(\sin x+\cos x)}=\lim_{x\to\frac{3\pi}{4}^-}\frac{\cos x-\sin x}{\cos^2 x}=\frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}}=-2\sqrt{2}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۷

۳۵ گزینه ۲

حاصل حد، وقتی $x\to 1$، مبهم $\frac{0}{0}$ است. صورت و مخرج کسر را در مزدوج صورت و مزدوج مخرج ضرب می‌کنیم، سپس با حذف عامل صفرکننده، حاصل حد را به دست می‌آوریم.

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-\sqrt{x}}{2-\sqrt{5-x}}\times\frac{1+\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\times\frac{2+\sqrt{5-x}}{2+\sqrt{5-x}}=\lim_{x\to 1}\frac{(1-x)(2+\sqrt{5-x})}{(4-5+x)(1+\sqrt{x})}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(1-x)(2+\sqrt{5-x})}{(x-1)(1+\sqrt{x})}=\lim_{x\to 1}\frac{-(2+\sqrt{5-x})}{1+\sqrt{x}}=\frac{-(2+2)}{1+1}=-\frac{4}{2}=-2$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۸

۳۶ گزینه ۱

حاصل حد، وقتی $x\to -1$، مبهم $\frac{0}{0}$ است. صورت و مخرج کسر را در مزدوج صورت ضرب می‌کنیم، سپس با حذف عامل صفرکننده، حاصل حد را به دست می‌آوریم.

$$\lim_{x\to -1}\frac{2x+\sqrt{3-x}}{x^2+x}\times\frac{2x-\sqrt{3-x}}{2x-\sqrt{3-x}}=\lim_{x\to -1}\frac{(2x)^2-(\sqrt{3-x})^2}{(x^2+x)(2x-\sqrt{3-x})}$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{4x^2-3+x}{x(x+1)(2x-\sqrt{3-x})}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(4x-3)}{x(x+1)(2x-\sqrt{3-x})}=\lim_{x\to -1}\frac{4x-3}{x(2x-\sqrt{3-x})}$$

$$=\frac{-4-3}{(-1)(-2-2)}=\frac{-7}{(-1)(-4)}=-\frac{7}{4}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۵

نکته: اگر صورت و مخرج کسر، چندجمله‌ای باشند، خط حد یا مجانب افقی است.
برای مجانب‌های قائم در ∞ و −∞ تعریف می‌کنیم. در توابع شامل قدرمطلق، ∞ و −∞ جداجدا بررسی می‌شود.

حد در بی‌نهایت

حد هر تابع چندجمله‌ای وقتی $x \to \pm\infty$ برابر حد جمله‌ای است که بزرگ‌ترین درجه را دارد.

$$\text{۷)}\quad \lim_{x\to\pm\infty}(ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\cdots+k)=\lim_{x\to\pm\infty}ax^n$$

تمرین: حاصل حدهای زیر را به دست آورید.

$$\text{۱)}\quad \lim_{x\to\pm\infty}(x^2-5x^3+4\sqrt[3]{x})=$$

$$\text{۲)}\quad \lim_{x\to\pm\infty}(\sqrt[3]{x}-1-\sqrt[5]{2x^2}-3x)=$$

رفع ابهام از حالت $\frac{\infty}{\infty}$:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{ax^n+bx^{n-1}+\cdots+k}{a'x^m+b'x^{m-1}+\cdots+k'}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{ax^n}{a'x^m}=\begin{cases}\infty & n>m\\ \frac{a}{a'} & n=m\\ 0 & n<m\end{cases}$$

در حالت اول که جواب حد ∞ شده علامت ∞ بستگی به ۲ عامل دارد: الف) زوج یا فرد بودن $n-m$ ب) علامت $\frac{a}{a'}$

تمرین: اگر $\lim_{x\to\infty}\frac{|x^2-4|}{ax^2-x+2}=-1$ آن‌گاه حد راست این عبارت در نقطهٔ $x=-2$ کدام است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور ۹۰)

۱) $-\frac{4}{3}$ ۲) $-\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{4}{3}$

تمرین: در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{ax+\sqrt{4x^2+5}}{2x+2}$، اگر $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\frac{5}{2}$، آن‌گاه حد $f(x)$ وقتی $x\to-1$ کدام است؟ (تجربی ۹۵)

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{5}{6}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $\frac{5}{4}$

تمرین: تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{ax-\sqrt[3]{x^2-1}}{4x^n-12}$ را در نظر بگیرید. اگر $\lim_{x\to\infty}f(x)=\frac{1}{6}$ باشد، آن‌گاه $\lim_{x\to3}f(x)$ کدام است؟ (تجربی ۹۹)

$\lim_{x\to\infty}\frac{ax}{\varepsilon x^{2}}=\frac{1}{2}$ $\quad n=1$ $\quad a=\frac{\varepsilon}{2}=\frac{2}{3}$

۱) $\frac{1}{24}$ ۲) $\frac{1}{18}$ ۳) $\frac{1}{12}$ ۴) $\frac{5}{36}$

$\lim_{x\to3}\frac{\frac{2}{3}x-\sqrt[3]{x^{2}-1}}{4x-12}=\frac{0}{0}\xrightarrow{H\text{ôp}}\lim_{x\to3}\frac{\frac{1}{3}-\frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^{2}-1)^{2}}}}{4}=\frac{\frac{2}{3}-\frac{6}{12}=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}}{12}=\frac{1}{24}$

اول فرجه بگیر بعد نه توان برسون

تمرین: برای مقادیر طبیعی **n**، چند مقدار مختلف برای حاصل $\lim_{x\to\infty}\frac{4x^{n}+nx^{2}+1}{x^{n}+x^{2}-1}$ ممکن است و مجموع این مقدارها چقدر است؟

۱) دو مقدار، ۴ ۲) دو مقدار، ۵ ۳) سه مقدار، ۷ ۴) سه مقدار، ۸

$n>2$: $\lim_{x\to\infty}\frac{4x^{n}}{x^{n}}=4$

$n=2$: $\lim_{x\to\infty}\frac{4x^{2}+2x^{2}+1}{x^{2}+x^{2}-1}=\frac{6x^{2}}{2x^{2}}=3$

$n<2$, $n\in\mathbb{N}$ $\Rightarrow n=1$: $\lim_{x\to\infty}\frac{4x+x^{2}+1}{x+x^{2}-1}=1$

تمرین: حاصل $\lim_{x\to-\infty}x(x+\sqrt{x^{2}-8})$ کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۳)

مبهم $-\infty(-\infty+\infty)$

۱) ۸- ۲) صفر ۳) ۴ ۴) ∞

مبهم $\infty-\infty$ است اگر تابع رادیکالی به صورت بالا بود :

$\lim_{x\to-\infty}x(x+\sqrt{x^{2}-8})\frac{(x-\sqrt{x^{2}-8})}{(x-\sqrt{x^{2}-8})}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x(x^{2}-x^{2}+8)}{x-(-x)=2x}=\frac{8}{2}=4$

تمرین: حاصل $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x+3}-\sqrt{x+7})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x+9})$ کدام است؟

مبهم ابت $\infty-\infty$ مبهم بت $\infty+\infty=+\infty$

۱) ۱ ۲) ۲- ۳) صفر ۴) ۴-

$(a-b)(a+b)$ $\quad a^{2}-b^{2}$

$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x+3}-\sqrt{x+7})\frac{(\sqrt{x+3}+\sqrt{x+7})}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x+7}}(2\sqrt{x})$ جمله‌ها هم‌توان

$=x+3-x-7=-4$

$2\sqrt{x}$

تمرین: اگر $f(x)=x-\sqrt{4x^{2}+x}$ باشد، حاصل $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$ کدام است؟ (تجربی خارج ۹۸)

۱) ۲- ۲) ۱- ۳) ۲ ۴) ۳

تمرین: اگر $g(x)=\frac{\sqrt{ax^2+bx+c}}{|x-1|}$ و $\lim\limits_{x\to 1^+}(4-[x])g(x)=6$ باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ کدام است؟ (تجربی ۱۴۰۱)

۱) -1 ۲) 1 ۳) 2 ۴) -2

تمرین: فرض کنید $n\in\mathbb{N}$، حاصل $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2^{2n+1}-2^{1-2n}}{2^{2n+1}+3\times 2^{1-2n}}$ کدام است؟ (ریاضی ۹۹)

۱) 1 ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $-\frac{1}{3}$ ۴) -1

تمرین: اگر $f(x)=\frac{2x+5}{x^2-4x+3}$ و $g(x)=2^x$، آن‌گاه $\lim\limits_{x\to 1^+} g(f(x))$ کدام است؟ (سراسری ریاضی)

۱) صفر ۲) 1 ۳) $+\infty$ ۴) $\frac{1}{2}$

تمرین: حاصل $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{6}{x^2-2x}-\frac{x+1}{x-2}\right)$ کدام است؟ (تجربی ۹۶)

۱) $-\frac{5}{2}$ ۲) $-\frac{3}{2}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{3}{2}$

الف) اگر تابع گویا باشد مخرج مشترک می‌گیریم ... صفر صفر تبدیل می‌شود قابل حل است

$$\lim_{x\to 2}\frac{6-x(x+1)}{x(x-2)}=\frac{-x^2-x+6}{x^2-2x}=\frac{0}{0}\xrightarrow{H\text{ôp}}\lim_{x\to 2}\frac{-2x-1}{2x-2}=\frac{-5}{2}$$

ب) اگر تابع رادیکالی بود و چند عبارتی زیر رادیکال از درجه بزرگ باشد داریم:

هم ارزی نیوتن

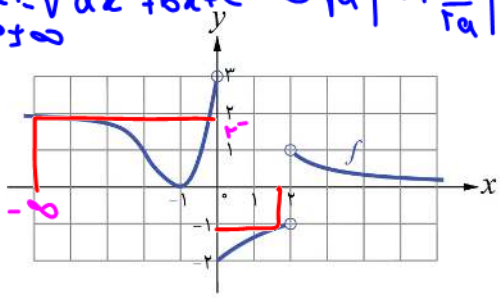
$$\lim_{x\to\pm\infty}\sqrt[p]{ax^p+bx^{p-1}+\dots}\sim\sqrt[p]{a}\left|x+\frac{b}{pa}\right|$$

اگر p خرد بود دقت رو مطلق لازم نیست

مثال $\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-7x+3}+x=\infty-\infty$ بیرون $\sim$ $\sqrt{1}\left|x-\frac{7}{2}\right|+x=\frac{7}{2}$

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{ax^2+bx+c}\sim\sqrt{a}\left|x+\frac{b}{2a}\right|$$

تمرین: با توجه به شکل، حاصل $\lim\limits_{x\to 0^+} f\circ f\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x}\right)$ برابر کدام است؟

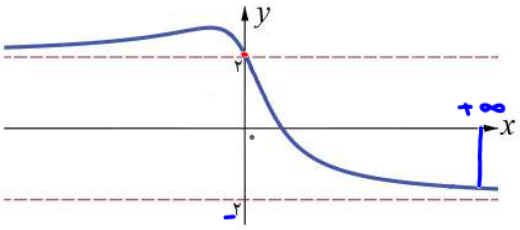


۱) ۱
۲) ۱- ✓
۳) ۳
۴) صفر

$$\lim_{x\to 0^+} f\left(f\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x}\right)=\frac{\sqrt{x}-1}{x}=\frac{-1}{0^+}=-\infty\right)$$

$$f\left(f(-\infty)=2^-\right)=f(2^-)=-1$$

تمرین: شکل مقابل نمودار تابع با ضابطهٔ $y=\frac{Ax+B}{\sqrt{x^2+1}}$ است. $Ax+B$ کدام است؟



۱) $-2x-2$
۲) $-2x+2$ ✓
۳) $2x-2$
۴) $2x+2$

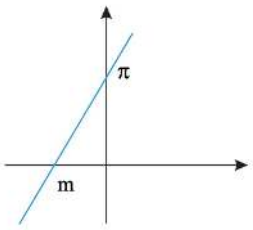
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ می‌توان $\frac{Ax}{\sqrt{x^2}}=A=-2$ $\quad |x|=x$

$A(0,2)\in f$ $\quad f(0)=\frac{B}{\sqrt{1}}=B=2$

از نقاط برخورد تابع با محورها هم استفاده کنید

Homework

۱ شکل زیر، نمودار تابع f^{-1} را نشان می‌دهد. اگر $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f^{-1}(x)}{f(x)}=\pi$ باشد، مقدار m کدام است؟



۱) $-\sqrt{\pi}$

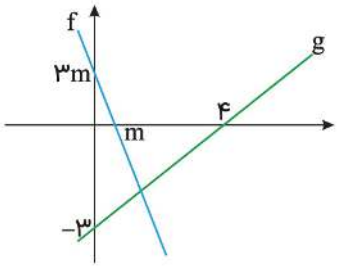
۲) $-\dfrac{۱}{\sqrt{\pi}}$

۳) $-\dfrac{۱}{\pi}$

۴) $-\pi\sqrt{\pi}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۲

۲ شکل زیر، نمودار تابع f و g را نشان می‌دهد. حاصل $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{|f(x)|}{g(x)}$ کدام است؟



۱) -۳

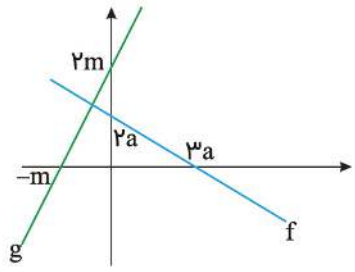
۲) ۳

۳) -۴

۴) ۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۳ شکل زیر، نمودار توابع f و g را نشان می‌دهد. حاصل $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{g(x)}{|f(x)|}$ کدام است؟



۱) $\dfrac{۱}{۳}$

۲) $-\dfrac{۱}{۳}$

۳) -۳

۴) ۳

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

۴ حاصل $\lim\limits_{x\to-\infty} x\left[\frac{۱}{x}\right]$ کدام است؟

۱) صفر
۲) ۱
۳) $+\infty$
۴) $-\infty$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۷

۵ اگر $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{ax+۹}{۱-x+\sqrt{x+۱}} = ۳$ باشد، آنگاه حد این کسر وقتی $x \to ۳$ کدام است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۴
۴) ۵

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۲

۶ تابع با ضابطهٔ $f(x) = \frac{۴x^n - ۶x^۲ + ۱}{ax^۳ + ۷x^۲ - ۲}$ را در نظر بگیرید. اگر $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = ۲$ باشد، آنگاه $\lim\limits_{x\to\frac{۱}{۲}} f(x)$، کدام است؟

۱) $-\frac{۴}{۱۷}$
۲) $-\frac{۶}{۱۷}$
۳) $-\frac{۵}{۱۲}$
۴) $-\frac{۶}{۱۱}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۷ مقدار $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}\left(\sqrt{\frac{۱}{x+۱}+\frac{۱}{x}} - \sqrt{\frac{۱}{x^۲}-\frac{۱}{x^۲+۱}}\right)$ کدام است؟

۱) صفر
۲) ۱
۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$
۴) $\sqrt{۲}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

۸ در تابع با ضابطهٔ $f(x) = \frac{۲x+\sqrt{x^۲-۳x}}{ax^n - ۶}$، اگر $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\frac{۱}{۲}$ باشد، آنگاه $\lim\limits_{x\to-۱} f(x)$، کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۶}$
۲) $-\frac{۱}{۸}$
۳) $\frac{۱}{۴}$
۴) $\frac{۱}{۳}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۴

۹ اگر $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\sqrt[۵۰]{(a^۲x^۲-۱)(a^۴x^۴-۱)\ldots(a^{۱۰۰}x^{۱۰۰}-۱)}}{a^{۴۹}x^k - ۱} = -۱$، آنگاه مقادیر a و k، کدام‌اند؟

۱) $k = ۵۱,\ a = -۱$
۲) $k = ۵۱,\ a = ۱$
۳) $k = ۴۹,\ a = -۱$
۴) $k = ۴۹,\ a = ۱$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۰

۱۰ اگر $g(x)=\frac{\sqrt{ax^۲+bx+c}}{|x-۱|}$ و $\lim\limits_{x\to ۱^+}(۴-[x])g(x)=۶$ باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$ کدام است؟

۱) -۱
۲) ۱
۳) ۲
۴) -۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

۱۱ اگر $f(x)=\sqrt{ax^۲+x+۱}$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x+۲}=\frac{۱}{۲}$ باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to-۱^-}[\frac{۱}{x}]f(x)$ چقدر است؟

۱) $-\frac{۱}{۲}$
۲) ۱
۳) $\frac{۱}{۲}$
۴) -۱

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

۱۲ اگر $f(x)=x-\sqrt{۴x^۲+x}$ باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$، کدام است؟

۱) -۲
۲) -۱
۳) ۲
۴) ۳

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

۱۳ فرض کنید $n\in\mathbb{N}$، حاصل $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{۲^{۲n+۱}-۲^{۱-۲n}}{۲^{۲n+۱}+۳\times۲^{۱-۲n}}$، کدام است؟

۱) ۱
۲) $\frac{۱}{۳}$
۳) $-\frac{۱}{۳}$
۴) -۱

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۹

۱۴ فرض کنید $n\in\mathbb{N}$، حاصل $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{۳^{۲n}-۳^{-۲n+۱}}{۲\times۳^{۲n}+۳^{-۲n+۱}}$، کدام است؟

۱) $+\infty$
۲) $\frac{۱}{۲}$
۳) ۰
۴) $-\frac{۱}{۲}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

۱۵ تعداد نقاط ناپیوستگی تابع $f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}\sin^{۲n}(x)$، در بازهٔ $[۰,۲\pi]$، کدام است؟

۱) ۳
۲) ۲
۳) ۱
۴) صفر

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۰

۱۶ در تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{ax^n+۱۵}{۳x-\sqrt{۴x^۲+۱۵x}}$، اگر $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-۱$ باشد، آنگاه $\lim\limits_{x\to۳} f(x)$ کدام است؟

۱) ۶-
۲) ۴-
۳) ۳
۴) ۵

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۴

۱۷ حد کسر $\frac{x^{m+۳}+nx+m}{mx^{n-۲}-mx+n-۱}$ با شرط $n>۳$، وقتی $x\to\infty$ برابر ۲- است. $m+n$ کدام است؟

۱) ۳/۵
۲) ۴
۳) ۴/۵
۴) ۵

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۴

۱۸ حاصل $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(x-۱)^۳-(x+۱)^۳}{x(x-۱)^۲-x^۳}$ کدام است؟

۱) ۳-
۲) ۳
۳) ۱
۴) ۲-

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۴

۱۹ مقدار $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^۴-x^۲+۱}+\sqrt{x^۲+۱}-x^۲}{x}$، کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۲}$
۲) ۱
۳) صفر
۴) ۱-

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

۲۰ اگر $f(x)=\frac{۲x+۵}{x^۲-۴x+۳}$ و $g(x)=۲^x$، آنگاه $\lim\limits_{x\to۱^+} g(f(x))$ کدام است؟

۱) صفر
۲) ۱
۳) $+\infty$
۴) $\frac{۱}{۲}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۴

۲۱ حاصل $\lim\limits_{x\to۲}(\frac{۶}{x^۲-۲x}-\frac{x+۱}{x-۲})$ کدام است؟

۱) $-\frac{۵}{۲}$
۲) $-\frac{۳}{۲}$
۳) $\frac{۱}{۲}$
۴) $\frac{۳}{۲}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۶

۲۲ تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{ax-\sqrt[3]{x^2-1}}{4x^n-12}$ را در نظر بگیرید. اگر $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\frac{1}{6}$ باشد، آنگاه $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$، کدام است؟

۱) $\frac{1}{24}$
۲) $\frac{1}{18}$
۳) $\frac{1}{12}$
۴) $\frac{5}{36}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

۲۳ در تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{ax+\sqrt{4x^2+5}}{2x+2}$، اگر $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\frac{5}{2}$ باشد، آنگاه حد $f(x)$ وقتی $x\to -1$، کدام است؟

۱) $\frac{2}{3}$
۲) $\frac{5}{6}$
۳) $\frac{3}{2}$
۴) $\frac{5}{4}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

۲۴ در تابع با ضابطهٔ $f(x)=x-\sqrt{x^2+1}$، حاصل $\lim\limits_{x\to 0^-} f\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}\right)$ کدام است؟

۱) -1
۲) صفر
۳) $-\infty$
۴) موجود نیست

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۹

۲۵ حاصل $\lim\limits_{x\to -4}\left(\frac{x+19}{x^2+3x-4}+\frac{3}{x+4}\right)$ کدام است؟

۱) $\frac{-4}{5}$
۲) $\frac{-2}{3}$
۳) $\frac{2}{5}$
۴) $\frac{2}{3}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۶

۲۶ اگر $f(x)=2^{\frac{1}{x}}$ و $g(x)=\frac{2x-3}{x+1}$، آنگاه $\lim\limits_{x\to 0^-}(gof)(x)$ کدام است؟

۱) -3
۲) -1
۳) $\frac{3}{2}$
۴) 2

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۶

۲۷ حد عبارت $\frac{x+2}{x^2-2x}+\frac{2[x]}{2-x}$، وقتی $x\to 2^-$ کدام است؟ ($[\ ]$ نماد جزء صحیح است)

۱) $-\infty$
۲) $-\frac{1}{2}$
۳) 1
۴) $+\infty$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۲

۲۸ حاصل $\lim_{x\to -۲}\left(\frac{۳}{۲x^۲+۵x+۲}-\frac{۴}{x^۲-۴}\right)$ کدام است؟

۱) $-\frac{۷}{۱۲}$ ۲) $-\frac{۵}{۱۲}$

۳) $\frac{۵}{۱۲}$ ۴) $\frac{۷}{۱۲}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۳

۲۹ حاصل $\lim_{x\to +\infty}\frac{۱}{x-\sqrt{x^۲+۲x}}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۱

۳) ۲ ۴) $\frac{۱}{۲}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۴

۳۰ اگر $f(x)=۲x+\sqrt{۴x^۲+x}$ باشد، حاصل $\lim_{x\to -\infty} f(x)$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) $-\frac{۱}{۲}$

۳) $-\frac{۱}{۴}$ ۴) صفر

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۳۱ حاصل $\lim_{x\to +\infty}\frac{x-\sqrt{۴x^۲+۹x}}{۳x+\sqrt{x}}$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۳}$ ۲) $-\frac{۱}{۴}$

۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۶

۳۲ حاصل $\lim_{x\to -\infty} x(x+\sqrt{x^۲-۸})$ کدام است؟

۱) ۸- ۲) صفر

۳) ۴ ۴) ∞

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۳

۳۳ حاصل $\lim_{x\to \infty}(\sqrt[۳]{۸x^۳+۲x^۲}-۲x)$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$

۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۶}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۴

۳۴ نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{ax+۱+\sqrt{۴x^۲+۹}}{۳x-۲}$ از نقطهٔ $(۲,۱)$ می‌گذرد، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۳}$
۲) $\frac{۱}{۳}$
۳) $\frac{۲}{۳}$
۴) ۱

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۱

۳۵ در تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{۳-\sqrt{x^۲+۵}}{ax^n+۴}$، اگر $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\frac{۱}{۲}$ باشد، آنگاه $\lim\limits_{x\to۲} f(x)$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$
۲) $\frac{۲}{۳}$
۳) $\frac{۳}{۴}$
۴) $\frac{۳}{۲}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

۳۶ در تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{ax^n-۳x+۱}{۳x^۲+x}$ اگر $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\frac{۲}{۳}$، آنگاه $f(-۱)$ کدام است؟

۱) -۲
۲) $\frac{۳}{۲}$
۳) ۲
۴) ۳

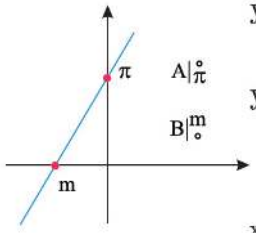
کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۱

۳۷ اگر $a=-۱$، $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{|x^۲-۴|}{ax^۲-x+۲}$، آنگاه حد راست این عبارت در نقطهٔ $x=-۲$ کدام است؟

۱) $-\frac{۴}{۳}$
۲) $-\frac{۲}{۳}$
۳) $\frac{۲}{۳}$
۴) $\frac{۴}{۳}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۰

۱ گزینه ۱



$$y-0=\frac{0-\pi}{m-0}(x-m)\Rightarrow f^{-1}(x)=-\frac{\pi}{m}x+\pi$$

$$y=-\frac{\pi}{m}x+\pi\Rightarrow\frac{\pi}{m}x=-y+\pi\Rightarrow x=-\frac{m}{\pi}y+m\Rightarrow f(x)=-\frac{m}{\pi}x+m$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{\pi}{m}x+\pi}{-\frac{m}{\pi}x+m}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{\pi}{m}x}{-\frac{m}{\pi}x}=\frac{\pi^2}{m^2}=\pi\Rightarrow m^2=\pi\xrightarrow{m<0}m=-\sqrt{\pi}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۲

۲ گزینه ۳

$$\begin{matrix}f(x)=-3x\\ f(x)=\frac{3}{4}x\end{matrix}\Rightarrow\lim_{x\to-\infty}\frac{|f(x)|}{g(x)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{|-3x|}{\frac{3}{4}x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-3x}{\frac{3}{4}x}=-4$$

دقت کنید وقتی $x\to-\infty$، $-3x\to\infty$ پس: $|-3x|=-3x$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۳ گزینه ۳

$$(3a,0),(0,2a)\in f\Rightarrow\text{شیب خط}=m=-\frac{2}{3}\Rightarrow f(x)=-\frac{2}{3}x+2a$$

$$(-m,0),(0,2m)\in g\Rightarrow\text{شیب خط}=m'=2\Rightarrow g(x)=2x+2m$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{g(x)}{|f(x)|}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x+m}{|-\frac{2}{3}x+2a|}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{-\frac{2}{3}x}=-3$$

$$x\to-\infty:-\frac{1}{3}x\to+\infty\Rightarrow|-\frac{1}{3}x+a|=-\frac{1}{3}x+a$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

۴ گزینه ۳

ابتدا وقتی $x \to -\infty$، حاصل $\left[\frac{۱}{x}\right]$ را به دست می آوریم. با داشتن مقدار $\left[\frac{۱}{x}\right]$ حاصل حد را محاسبه می کنیم.

$$x \to -\infty \Rightarrow \frac{۱}{x} \to ۰^- \Rightarrow \left[\frac{۱}{x}\right] = [۰^-] = -۱$$

$$\lim_{x \to -\infty} x\left[\frac{۱}{x}\right] = (-\infty)(-۱) = +\infty$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۷

۵ گزینه ۳

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{ax + ۹}{۱ - x + \sqrt{x+۱}} = ۳ \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} \frac{ax}{-x} = -a = ۳ \Rightarrow a = -۳$$

$$\lim_{x \to ۳} \frac{-۳x + ۹}{۱ - x + \sqrt{x+۱}} = \frac{۰}{۰}$$

راه‌حل اول:

$$\lim_{x \to ۳} \frac{-۳x + ۹}{۱ - x + \sqrt{x+۱}} = \lim_{x \to ۳} \frac{-۳(x-۳)((۱-x) - \sqrt{x+۱})}{((۱-x) + \sqrt{x+۱})((۱-x) - \sqrt{x+۱})}$$

$$= \lim_{x \to ۳} \frac{-۳(x-۳)((۱-x) - \sqrt{x+۱}))}{(۱-x)^۲ - (۱-x)} = \lim_{x \to ۳} \frac{-۳(x-۳)((۱-x) - \sqrt{x+۱}))}{x(x-۳)} = \frac{(-۳)(-۴)}{۳} = ۴$$

راه‌حل دوم:

$$\text{hop}: \lim_{x \to ۳} \frac{-۳x + ۹}{۱ - x + \sqrt{x+۱}} = \lim_{x \to ۳} \frac{-۳}{-۱ + \frac{۱}{۲\sqrt{x+۱}}} = \frac{-۳}{-۱ + \frac{۱}{۴}} = ۴$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۲

۶ گزینه ۲

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{۴x^n - ۶x^۲ + ۱}{ax^۳ + ۷x^۲ - ۲} = ۲$$

چون حاصل حد یک عدد شده است، پس باید درجهٔ صورت و مخرج کسر یکی باشد. بنابراین $n = ۳$ است. همچنین طبق قاعدهٔ پرتوان داریم:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{۴x^۳ - ۶x^۲ + ۱}{ax^۳ + ۷x^۲ - ۲} = \lim_{x\to\infty} \frac{۴x^۳}{ax^۳} = \frac{۴}{a} = ۲ \Rightarrow a = ۲$$

حال $\lim_{x\to\frac{۱}{۲}} f(x)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\lim_{x\to\frac{۱}{۲}} f(x) = \lim_{x\to\frac{۱}{۲}} \frac{۴x^۳ - ۶x^۲ + ۱}{۲x^۳ + ۷x^۲ - ۲} = \frac{۰}{۰}$$

حد را رفع ابهام می‌کنیم.

روش اول:

$$\lim_{x\to\frac{۱}{۲}} \frac{۴x^۳ - ۶x^۲ + ۱}{۲x^۳ + ۷x^۲ - ۲} = \lim_{x\to\frac{۱}{۲}} \frac{\cancel{\left(x - \frac{۱}{۲}\right)}\left(۴x^۲ - ۴x - ۲\right)}{\cancel{\left(x - \frac{۱}{۲}\right)}\left(۲x^۲ + ۸x + ۴\right)} = \frac{-۳}{\frac{۱۷}{۲}} = -\frac{۶}{۱۷}$$

$$\begin{array}{r|l} ۴x^۳ - ۶x^۲ + ۱ & x - \frac{۱}{۲} \\ \hline -۴x^۳ + ۲x^۲ & ۴x^۲ - ۴x - ۲ \\ \hline -۴x^۲ + ۱ & \\ ۴x^۲ - ۲x & \\ \hline -۲x + ۱ & \\ ۲x - ۱ & \\ \hline ۰ & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} ۲x^۳ + ۷x^۲ - ۲ & x - \frac{۱}{۲} \\ \hline -۲x^۳ + x^۲ & ۲x^۲ + ۸x + ۴ \\ \hline ۸x^۲ - ۲ & \\ -۸x^۲ + ۴x & \\ \hline ۴x - ۲ & \\ -۴x + ۲ & \\ \hline ۰ & \end{array}$$

روش دوم: هوپیتال

$$\lim_{x\to\frac{۱}{۲}} \frac{۴x^۳ - ۶x^۲ + ۱}{۲x^۳ + ۷x^۲ - ۲} = \lim_{x\to\frac{۱}{۲}} \frac{۱۲x^۲ - ۱۲x}{۶x^۲ + ۱۴x} = \frac{۳ - ۶}{\frac{۱۷}{۲}} = \frac{-۶}{۱۷}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۷ گزینه ۴

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}\left(\sqrt{\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x}}-\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^2+1}}\right)=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}\left(\sqrt{\frac{x+x+1}{x(x+1)}}-\sqrt{\frac{x^2+1-x^2}{x^2(x^2+1)}}\right)$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}\left(\sqrt{\frac{2x+1}{x^2+x}}-\sqrt{\frac{1}{x^4+x^2}}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\frac{2x+1}{x+1}}-\sqrt{\frac{1}{x^3+x}}\right)=\sqrt{2}-0=\sqrt{2}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

۸ گزینه ۲

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۴

گام اول

الف) در تابع $f(x)$ وقتی $x\to+\infty$ حد تابع برابر $-\frac{1}{2}$ است. چون حاصل حد وقتی $x\to+\infty$ یک عدد شده است، پس بزرگ‌ترین درجهٔ صورت کسر با بزرگ‌ترین درجهٔ مخرج کسر باید برابر باشد. بزرگ‌ترین درجهٔ x در صورت کسر ۱ است، پس $n=1$ است.

ب) حاصل حد را وقتی‌که $x\to+\infty$ با استفاده از هم‌ارزی $\sqrt{ax^2+bx+c}\underset{x\to+\infty}{\sim}\sqrt{a}|x+\frac{b}{2a}|$ تعیین کرده و مقدار a را محاسبه می‌کنیم.

گام دوم

$$n=1\Rightarrow f(x)=\frac{2x+\sqrt{x^2-3x}}{ax-6}$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+\sqrt{x^2-3x}}{ax-6}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+\sqrt{1}|x+(\frac{-3}{2})|}{ax-6}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+x-\frac{3}{2}}{ax-6}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x-\frac{3}{2}}{ax-6}=\frac{3}{a}=-\frac{1}{2}\Rightarrow a=-6$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{2x+\sqrt{x^2-3x}}{-6x-6}$$

$$\lim_{x\to-1}f(x)=\lim_{x\to-1}\frac{2x+\sqrt{x^2-3x}}{-6x-6}=\frac{0}{0}$$

برای رفع ابهام صورت و مخرج کسر را در مزدوج صورت ضرب کرده و حاصل را ساده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to-1}\frac{2x+\sqrt{x^2-3x}}{-6x-6}\times\frac{2x-\sqrt{x^2-3x}}{2x-\sqrt{x^2-3x}}=\lim_{x\to-1}\frac{4x^2-x^2+3x}{-6(x+1)(2x-\sqrt{x^2-3x})}$$

$$=\lim_{x\to-1}\frac{3x(x+1)}{-6(x+1)(2x-\sqrt{x^2-3x})}=\lim_{x\to-1}\frac{3x}{-6(2x-\sqrt{x^2-3x})}$$

$$=\frac{-3}{-6(-2-2)}=\frac{-3}{(-6)(-4)}=\frac{-3}{24}=\frac{-1}{8}$$

۹ گزینه ۲

پرتوان‌ها را انتخاب می‌کنیم:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt[50]{(a^2x^2)(a^4x^4)\dots(a^{100}x^{100})}}{a^{49}x^k}=-1$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt[50]{(ax)^{2+4+\dots+100}}}{a^{49}x^k}=\lim_{x\to-\infty}\frac{|ax|^{51}}{a^{49}x^k}=-1\Rightarrow k=51$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{|ax|^{51}}{a^{49}x^{51}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{|a|^{51}|x|^{51}}{a^{49}x^{51}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{|a|^{49}|a|^2(-x)^{51}}{a^{49}x^{51}}$$
$$=-a^2\left(\frac{|a|}{a}\right)^{49}$$

حاصل عبارت فوق منفی است، بنابراین باید $a>0$ باشد.

$$-a^2=-1\Rightarrow a=\pm1\xrightarrow{a>0}a=1$$

توجه: از مجموع ۵۰ جملهٔ دنبالهٔ حسابی با جملهٔ اول ۲ و قدر نسبت ۲ استفاده می‌کنیم:

$$2+4+\dots+100=\frac{50}{2}(2(2)+49(2))=2\left(\frac{50\times51}{2}\right)=50\times51$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۰

۱۰ گزینه ۳

$$\lim_{x\to1^+}(4-[x])g(x)=6\Rightarrow\lim_{x\to1^+}3g(x)=6$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to1^+}g(x)=2$$

$$\lim_{x\to1^+}\frac{\sqrt{ax^2+bx+c}}{|x-1|}=2$$

جواب حد یک عدد است و مخرج به ازای $x=1$ صفر است، بنابراین باید صورت کسر نیز به ازای آن صفر باشد، حال داریم:

$$ax^2+bx+c=a(x-1)^2$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to1^+}\frac{\sqrt{ax^2+bx+c}}{|x-1|}=\lim_{x\to1^+}\frac{\sqrt{a(x-1)^2}}{|x-1|}=\lim_{x\to1^+}\frac{\sqrt{a}|x-1|}{|x-1|}=2$$

$$\Rightarrow a=4$$

$$\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{4}|x-1|}{|x-1|}=2$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

۱۱ گزینه ۱

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x+۲}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{ax^۲+x+۱}}{x+۲}=\frac{۱}{۲}$$

$$\xrightarrow{\text{پرتوان}}\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{a}|x|}{x}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{a}x}{x}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\sqrt{a}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow a=\frac{۱}{۴}$$

$$\lim_{x\to(-۱)^-}[\frac{۱}{x}]\times\sqrt{\frac{۱}{۴}x^۲+x+۱}=-۱\times\sqrt{\frac{۱}{۴}(-۱)^۲+(-۱)+۱}=-۱\times\sqrt{\frac{۱}{۴}}=-\frac{۱}{۲}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

۱۲ گزینه ۴

با استفاده از قاعدهٔ پرتوان داریم:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x-\sqrt{۴x^۲+x}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x-|۲x|}{x}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x+۲x}{x}=۳$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

۱۳ گزینه ۱

$$n\to+\infty\Rightarrow\begin{cases}۲^{۱-۲n}=\dfrac{۱}{۲^{-۱+۲n}}\to ۰\\ ۲^{۲n+۱}\to+\infty\end{cases}$$

$$\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}\frac{۲^{۲n+۱}-۲^{۱-۲n}}{۲^{۲n+۱}+۳\times۲^{۱-۲n}}=\frac{\infty}{\infty}$$

راه‌حل اول:

با استفاده از قاعدهٔ پرتوان، حاصل حد را می‌یابیم:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{۲^{۲n+۱}-۲^{۱-۲n}}{۲^{۲n+۱}+۳\times۲^{۱-۲n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{۲^{۲n+۱}}{۲^{۲n+۱}}=۱$$

راه‌حل دوم:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{۲^{۲n+۱}-۲^{۱-۲n}}{۲^{۲n+۱}+۳\times۲^{۱-۲n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\cancel{۲^{۱-۲n}}(۲^{۴n}-۱)}{\cancel{۲^{۱-۲n}}(۲^{۴n}+۳)}=\lim_{n\to+\infty}\frac{۲^{۴n}-۱}{۲^{۴n}+۳}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{(۲^{۴n}+۳)-۴}{(۲^{۴n}+۳)}=\lim_{n\to+\infty}۱-\underbrace{\frac{۴}{۲^{۴n}+۳}}_{۰}=۱$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۹

۱۴ گزینه ۲

$$n \to +\infty \Rightarrow \begin{cases} ۳^{-۲n+۱} = \frac{۱}{۳^{۲n-۱}} \to ۰ \\ ۳^{۲n} \to +\infty \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{۳^{۲n} - ۳^{-۲n+۱}}{۲ \times ۳^{۲n} + ۳^{-۲n+۱}} = \frac{\infty}{\infty}$$

روش اول: با استفاده از قاعدهٔ پرتوان داریم:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{۳^{۲n} - ۳^{-۲n+۱}}{۲ \times ۳^{۲n} + ۳^{-۲n+۱}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{۳^{۲n}}{۲ \times ۳^{۲n}} = \frac{۱}{۲}$$

روش دوم:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{۳^{۲n} - ۳^{-۲n+۱}}{۲ \times ۳^{۲n} + ۳^{-۲n+۱}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{۳^{-۲n+۱}(۳^{۴n-۱} - ۱)}{۳^{-۲n+۱}(۲ \times ۳^{۴n-۱} + ۱)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{۳^{۴n-۱} - ۱}{۲ \times ۳^{۴n-۱} + ۱}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\cancel{۳^{۴n-۱}}(۱ - \frac{۱}{\cancel{۳^{۴n-۱}}})}{\cancel{۳^{۴n-۱}}(۲ + \frac{۱}{\cancel{۳^{۴n-۱}}})} = \frac{۱}{۲}$$

($۱ - \frac{۱}{۳^{۴n-۱}} \to ۱$، $۲ + \frac{۱}{۳^{۴n-۱}} \to ۲$)

توجه:

$$(n \to +\infty) \Rightarrow (\frac{۱}{۳^{۴n-۱}} \to ۰)$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

۱۵ گزینه ۲

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} \sin^{۲n}(x) = \lim_{n\to+\infty} (\sin^{۲}(x))^{n}$$

می‌دانیم $۰ \le \sin^{۲}(x) \le ۱$ است، پس در نقاطی که $\sin x \in [۰, ۱)$ حاصل حد برابر صفر خواهد بود، زیرا اعداد بازهٔ $(۰, ۱)$ را هرچه به توان بزرگ‌تر برسانیم کوچک و کوچک‌تر می‌شود:

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} \sin^{۲n}(x) = \begin{cases} ۱ & ; x = k\pi + \frac{\pi}{۲} \\ ۰ & ; x \neq k\pi + \frac{\pi}{۲} \end{cases}$$

در بازهٔ $[۰, ۲\pi]$ تابع داده‌شده در نقاط $x = \frac{\pi}{۲}$ و $x = \frac{۳\pi}{۲}$ ناپیوسته است.

پینوشت: اگر بخواهیم با تعریف پیوستگی در نقطه پاسخ دهیم، باتوجه‌به اینکه در کتاب درسی نقاط ابتدا و انتهای بازهٔ بسته با تعریف پیوستگی در نقطه، ناپیوسته محسوب می‌شوند، ۴ نقطهٔ ناپیوستگی داریم. کلید سنجش دو نقطه است، پس ابتدا و انتهای بازه را با تعریف پیوستگی در بازه، پیوسته در نظر می‌گیریم.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۰

۱۶ گزینه ۱

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۴

گام اول

الف) می‌دانیم وقتی $x \to \infty$ هم‌ارزی زیر برقرار است:

$$\sqrt{ax^2+bx+c} \underset{x\to\infty}{\sim} \sqrt{a}|x+\frac{b}{2a}|$$

ب) صورت و مخرج کسر، یک عبارت چندجمله‌ای است و حاصل حد تابع در بی‌نهایت برابر با یک عدد ثابت شده است؛ بنابراین بزرگ‌ترین درجهٔ صورت و بزرگ‌ترین درجهٔ مخرج کسر باهم برابر است.

گام دوم

باتوجه‌به قسمت (الف) از گام اول، عبارت رادیکالی مخرج کسر را ساده می‌کنیم:

$$\sqrt{4x^2+15x} \underset{x\to-\infty}{\sim} \sqrt{4}|x+\frac{15}{8}| = -2(x+\frac{15}{8})$$

(دقت کنید که چون $x \to -\infty$ بود، قرینهٔ عبارت درون قدر مطلق از آن خارج شد)

باتوجه‌به قسمت (ب) از گام اول، $n = 1$ است. داریم:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{ax+15}{3x-(-2(x+\frac{15}{8}))} = \lim_{x\to-\infty} \frac{ax+15}{3x+2x+\frac{15}{4}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{ax+15}{5x+\frac{15}{4}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{ax}{5x} = \frac{a}{5}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1 \Rightarrow \frac{a}{5} = -1 \Rightarrow a = -5$$

بنابراین ضابطهٔ تابع $f(x)$ برابر است با:

$$f(x) = \frac{-5x+15}{3x-\sqrt{4x^2+15x}}$$

اکنون حاصل حد تابع $f(x)$ را وقتی $x \to 3$ به دست می‌آوریم.

$$\lim_{x\to3} f(x) = \lim_{x\to3} \frac{-5x+15}{3x-\sqrt{4x^2+15x}} = \frac{0}{0}$$

با دو روش می‌توان ابهام به‌وجودآمده را رفع کرد.

روش اول:

با به‌کاربردن قاعدهٔ هوپیتال داریم:

$$\lim_{x\to3} \frac{-5x+15}{3x-\sqrt{4x^2+15x}} = \lim_{x\to3} \frac{-5}{3-\frac{8x+15}{2\sqrt{4x^2+15x}}} = \frac{-5}{3-\frac{24+15}{2\sqrt{36+45}}}$$

$$= \frac{-۵}{۳ - \frac{۳۹}{۱۸}} = \frac{-۵}{\frac{۱۵}{۱۸}} = \frac{-۵}{\frac{۵}{۶}} = -۶ \Rightarrow \lim_{x \to ۳} f(x) = -۶$$

روش دوم:

با ضرب صورت و مخرج در مزدوج مخرج، داریم:

$$\lim_{x \to ۳} \frac{-۵x + ۱۵}{۳x - \sqrt{۴x^۲ + ۱۵x}} \times \frac{۳x + \sqrt{۴x^۲ + ۱۵x}}{۳x + \sqrt{۴x^۲ + ۱۵x}} = \lim_{x \to ۳} \frac{-۵(x - ۳)(۳x + \sqrt{۴x^۲ + ۱۵x})}{۹x^۲ - ۴x^۲ - ۱۵x}$$

$$= \lim_{x \to ۳} \frac{-۵(x - ۳)(۳x + \sqrt{۴x^۲ + ۱۵x})}{۵x(x - ۳)} = \lim_{x \to ۳} - \frac{۳x + \sqrt{۴x^۲ + ۱۵x}}{x} = -\frac{۹ + ۹}{۳} = -\frac{۱۸}{۳} = -۶$$

۱۷ گزینه ۲

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^{m+۳} + nx + m}{mx^{n-۲} - mx + n - ۱} = -۲$$

باتوجه‌به اینکه صورت و مخرج کسر، یک عبارت چندجمله‌ای است، پس حاصل حد از تقسیم بزرگ‌ترین جملهٔ صورت بر بزرگ‌ترین جملهٔ مخرج به دست می‌آید؛ یعنی:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^{m+۳} + nx + m}{mx^{n-۲} - mx + n - ۱} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^{m+۳}}{mx^{n-۲}} = -۲$$

حاصل حد یک عدد ثابت شده است، پس داریم: $m + ۳ = n - ۲$

بنابراین:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^{m+۳}}{mx^{n-۲}} = \frac{۱}{m} = -۲ \Rightarrow m = -\frac{۱}{۲}$$

و همچنین:

$$m + ۳ = n - ۲ \xrightarrow{m = -\frac{۱}{۲}} -\frac{۱}{۲} + ۳ = n - ۲ \Rightarrow n = -\frac{۱}{۲} + ۵ = \frac{۹}{۲}$$

$$\Rightarrow m + n = -\frac{۱}{۲} + \frac{۹}{۲} = \frac{۸}{۲} = ۴$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۴

۱۸ گزینه ۲

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{(x - ۱)^۳ - (x + ۱)^۳}{x(x - ۱)^۲ - x^۳} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^۳ - ۳x^۲ + ۳x - ۱ - (x^۳ + ۳x^۲ + ۳x + ۱)}{x(x^۲ - ۲x + ۱) - x^۳}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{-۶x^۲}{-۲x^۲} = ۳$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۴

۱۹ گزینه ۴

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^۴-x^۲+۱}+\sqrt{x^۲+۱}-x^۲}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{|x^۲|+|x|-x^۲}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x}{x}=-۱$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

۲۰ گزینه ۱

ابتدا ضابطهٔ $g(f(x))$ را تشکیل می دهیم. برای این کار کافی است در ضابطهٔ تابع $g(x)$ به جای متغیر x، ضابطهٔ $f(x)$ را جایگزین کنیم. در ادامه حاصل حد $\lim_{x\to۱^+}f(x)$ (حد توان تابع $(g(f(x))$ را وقتی $x\to۱^+$ تعیین کرده، سپس حاصل حد تابع $g(f(x))$ را به دست می آوریم.

$$g(f(x))=۲^{\frac{۲x+۵}{x^۲-۴x+۳}}$$

$$\lim_{x\to۱^+}f(x)=\lim_{x\to۱^+}\frac{۲x+۵}{x^۲-۴x+۳}=\lim_{x\to۱^+}\frac{۲x+۵}{(x-۳)(x-۱)}=\frac{۷}{(-۲)(۰^+)}=-\infty$$

و حالا محاسبهٔ $\lim_{x\to۱^+}g(f(x))$:

$$\lim_{x\to۱^+}g(f(x))=\lim_{f(x)\to-\infty}g(f(x))=\lim_{f(x)\to-\infty}۲^{f(x)}=۲^{-\infty}=۰$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۴

۲۱ گزینه ۱

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۶

گام اول

حاصل حد مبهم است. با استفاده از رفع ابهام عامل صفرشونده یا همان $x-۲$، حاصل حد را به دست می‌آوریم.

گام دوم

$$\lim_{x\to۲}\left(\frac{۶}{x^۲-۲x}-\frac{x+۱}{x-۲}\right)=\lim_{x\to۲}\left(\frac{۶}{x(x-۲)}-\frac{x+۱}{x-۲}\right)$$

$$=\lim_{x\to۲}\left(\frac{۶-x^۲-x}{x(x-۲)}\right)=\lim_{x\to۲}\left(\frac{-(x-۲)(x+۳)}{x(x-۲)}\right)$$

$$=\lim_{x\to۲}\frac{-(x+۳)}{x}=\frac{-۵}{۲}$$

۲۲ گزینه ۱

با استفاده از قاعدهٔ پرتوان داریم:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{ax-\sqrt[3]{x^2-1}}{4x^n-12}=\lim_{x\to\infty}\frac{ax}{4x^n}=\frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow n=1\Rightarrow\lim_{x\to\infty}\frac{ax}{4x}=\frac{a}{4}=\frac{1}{6}\Rightarrow a=\frac{2}{3}$$

$$\lim_{x\to3}f(x)=\lim_{x\to3}\frac{\frac{2}{3}x-\sqrt[3]{x^2-1}}{4x-12}=\frac{0}{0}$$

حال حد را رفع ابهام می‌کنیم:

روش اول:

$$\lim_{x\to3}\frac{\frac{2}{3}x-\sqrt[3]{x^2-1}}{4x-12}\times\frac{\frac{4}{9}x^2+\frac{2}{3}x\sqrt[3]{x^2-1}+(\sqrt[3]{x^2-1})^2}{\frac{4}{9}x^2+\frac{2}{3}x\sqrt[3]{x^2-1}+(\sqrt[3]{x^2-1})^2}$$

$$=\lim_{x\to3}\frac{\frac{8}{27}x^3-x^2+1}{(4x-12)(\frac{4}{9}x^2+\frac{2}{3}x\sqrt[3]{x^2-1}+(\sqrt[3]{x^2-1})^2)}$$

$$=\lim_{x\to3}\frac{\cancel{(x-3)}\left(\frac{8}{27}x^2-\frac{x}{9}-\frac{1}{3}\right)}{4\cancel{(x-3)}(\frac{4}{9}x^2+\frac{2}{3}x\sqrt[3]{x^2-1}+(\sqrt[3]{x^2-1})^2)}$$

$$=\frac{\frac{8}{3}-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}}{4\times(4+2\times2+4)}=\frac{2}{48}=\frac{1}{24}$$

$$\begin{array}{r|l}\frac{8}{27}x^3-x^2+1 & x-3\\ \hline -\frac{8}{27}x^3+\frac{8}{9}x^2 & \frac{8}{27}x^2-\frac{x}{9}-\frac{1}{3}\\ \hline -\frac{1}{9}x^2+1 & \\ +\frac{1}{9}x^2-\frac{1}{3}x & \\ \hline -\frac{1}{3}x+1 & \\ +\frac{1}{3}x-1 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

روش دوم: (هوپیتال)

$$\lim_{x\to ۳}\frac{\frac{۲}{۳}x-\sqrt[۳]{x^۲-۱}}{۴x-۱۲}=\lim_{x\to ۳}\frac{\frac{۲}{۳}-\frac{۱}{۳}(۲x)(x^۲-۱)^{-\frac{۲}{۳}}}{۴}$$

$$=\frac{\frac{۲}{۳}-۲\times\frac{۱}{۴}}{۴}=\frac{\frac{۴-۳}{۶}}{۴}=\frac{۱}{۲۴}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

۲۳ گزینه ۲

حد تابع در بی‌نهایت را به دست می‌آوریم.

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{ax+\sqrt{۴x^۲+۵}}{۲x+۲}=\lim_{x\to+\infty}\frac{ax+\sqrt{۴x^۲}}{۲x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x(a+۲)}{۲x}$$

$$\xrightarrow{\lim_{x\to+\infty}f(x)=\frac{۵}{۲}}\frac{a+۲}{۲}=\frac{۵}{۲}\Rightarrow a=۳$$

$$\lim_{x\to-۱}f(x)=\lim_{x\to-۱}\frac{۳x+\sqrt{۴x^۲+۵}}{۲x+۲}\xrightarrow[\text{ضرب و تقسیم می‌کنیم}]{\text{در مزدوج صورت}}\lim_{x\to-۱}\frac{۳x+\sqrt{۴x^۲+۵}}{۲x+۲}\times\frac{۳x-\sqrt{۴x^۲+۵}}{۳x-\sqrt{۴x^۲+۵}}$$

$$=\lim_{x\to-۱}\frac{۹x^۲-۴x^۲-۵}{۲(x+۱)(-۳-\sqrt{۴+۵})}=\lim_{x\to-۱}\frac{-۵(x-۱)(x+۱)}{۱۲(x+۱)}=\frac{۵}{۶}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

۲۴ گزینه ۲

ابتدا حد تابع $\frac{۱}{x}-\frac{۱}{x^۳}$ را وقتی $x\to ۰^-$ به دست می آوریم. اگر حاصل حد تابع محاسبه شده در قسمت قبل را L در نظر بگیریم، باید $\lim_{x\to L}f(x)$ را محاسبه کنیم.

$$\lim_{x\to ۰^-}\frac{۱}{x}-\frac{۱}{x^۳}=\lim_{x\to ۰^-}\frac{x^۲-۱}{x^۳}=\frac{۰-۱}{۰^-}=\frac{-۱}{۰^-}=+\infty$$

پس باید حاصل $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ را محاسبه کنیم:

$$\lim_{x\to ۰^-}f(\frac{۱}{x}-\frac{۱}{x^۳})=\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}(x-\sqrt{x^۲+۱})$$

$$=\lim_{x\to+\infty}(x-|x|)=\lim_{x\to+\infty}(x-x)=۰$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۹

۲۵ گزینه ۱

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۶

گام اول

وقتی $x \to -۴$، حاصل حد $\infty - \infty$ بوده و مبهم است.

گام دوم

برای رفع ابهام ابتدا با مخرج مشترک گیری میان دو کسر، عبارت را به ساده ترین شکل ممکن در آورده سپس حد آن را وقتی $x \to -۴$ محاسبه می کنیم.

$$\frac{x+۱۹}{x^۲+۳x-۴}+\frac{۳}{x+۴}=\frac{x+۱۹}{(x+۴)(x-۱)}+\frac{۳}{x+۴}$$
$$=\frac{x+۱۹+۳(x-۱)}{(x+۴)(x-۱)}=\frac{x+۱۹+۳x-۳}{(x+۴)(x-۱)}=\frac{۴x+۱۶}{(x+۴)(x-۱)}$$
$$=\frac{۴(x+۴)}{(x+۴)(x-۱)}=\frac{۴}{x-۱}$$

حالا حاصل عبارت ساده شده را وقتی $x \to -۴$ حساب می کنیم:

$$\lim_{x\to -۴}\frac{۴}{x-۱}=\frac{۴}{-۴-۱}=\frac{۴}{-۵}=-\frac{۴}{۵}$$

۲۶ گزینه ۱

ضابطهٔ $gof(x)$ یا همان $g(f(x))$ را تشکیل می دهیم. حد تابع $g(f(x))$ را وقتی $x \to ۰^-$، به دست می آوریم. دقت کنید اگر در محاسبهٔ حد به عدد $a^{-\infty}$ که در آن $a > ۱$ است برخوردیم حاصل برابر صفر می شود.

$$gof(x)=g(f(x))=\frac{۲(۲^{\frac{۱}{x}})-۳}{۲^{\frac{۱}{x}}+۱}$$
$$\lim_{x\to ۰^-} gof(x)=\lim_{x\to ۰^-}\frac{۲(۲^{\frac{۱}{x}})-۳}{۲^{\frac{۱}{x}}+۱}$$
$$\xrightarrow{x\to ۰^-\Rightarrow \frac{۱}{x}\to -\infty} \lim_{x\to ۰^-} gof(x)=\frac{۲(۲^{-\infty})-۳}{(۲^{-\infty})+۱}=\frac{(۲\times ۰)-۳}{۰+۱}=\frac{-۳}{۱}=-۳$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۶

۲۷ گزینه ۲

می‌دانیم: $[۲^-] = ۱$

$$\lim_{x\to ۲^-}\left(\frac{x+۲}{x^۲-۲x}+\frac{۲(۱)}{۲-x}\right)=\lim_{x\to ۲^-}\left(\frac{x+۲}{x(x-۲)}+\frac{۲}{۲-x}\right)=\lim_{x\to ۲^-}\left(\frac{x+۲}{x(x-۲)}-\frac{۲}{x-۲}\right)$$
$$=\lim_{x\to ۲^-}\frac{x+۲-۲x}{x(x-۲)}=\lim_{x\to ۲^-}\frac{-۱}{x}=-\frac{۱}{۲}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۲

۲۸ گزینه ۲

$$\lim_{x\to -۲}\left(\frac{۳}{(۲x+۱)(x+۲)}-\frac{۴}{(x+۲)(x-۲)}\right)=\lim_{x\to -۲}\left(\frac{۳(x-۲)-۴(۲x+۱)}{(۲x+۱)(x+۲)(x-۲)}\right)$$
$$=\lim_{x\to -۲}\left(\frac{-۵(x+۲)}{(۲x+۱)(x+۲)(x-۲)}\right)=\lim_{x\to -۲}\left(\frac{-۵}{(۲x+۱)(x-۲)}\right)=-\frac{۵}{۱۲}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۳

۲۹ گزینه ۲

در مرحلهٔ اول صورت و مخرج کسر را در مزدوج عبارت مخرج کسر ضرب می کنیم تا عبارت را به ساده ترین شکل ممکن به دست آوریم.

$$\frac{۱}{x-\sqrt{x^۲+۲x}}\times\frac{x+\sqrt{x^۲+۲x}}{x+\sqrt{x^۲+۲x}}=\frac{x+\sqrt{x^۲+۲x}}{x^۲-x^۲-۲x}=\frac{x+\sqrt{x^۲+۲x}}{-۲x}$$

راه‌حل اول:

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{x+\sqrt{x^۲+۲x}}{-۲x}=\lim_{x\to +\infty}\frac{x+|x|}{-۲x}=\lim_{x\to +\infty}\frac{x+x}{-۲x}=\lim_{x\to +\infty}\frac{۲x}{-۲x}=-۱$$

راه‌حل دوم: (فراتر از کتاب)

برای به دست آوردن حاصل حد وقتی $x\to +\infty$ از هم ارزی رادیکالی زیر استفاده می کنیم:

$$\sqrt{ax^۲+bx+c}\underset{x\to +\infty}{\sim}\sqrt{a}|x+\frac{b}{۲a}|$$

با استفاده از هم‌ارزی حاصل حد را به دست می آوریم:

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{x+\sqrt{x^۲+۲x}}{-۲x}=\lim_{x\to +\infty}\frac{x+\sqrt{۱}|x+\frac{۲}{۲}|}{-۲x}$$
$$=\lim_{x\to +\infty}\frac{x+x+۱}{-۲x}=\lim_{x\to +\infty}\frac{۲x+۱}{-۲x}=\lim_{x\to +\infty}\frac{۲x}{-۲x}=-۱$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۴

۳۰ گزینه ۳

راه‌حل اول: استفاده از هم‌ارزی:

$$\sqrt{ax^2+bx+c} \underset{x\to\pm\infty}{\sim} \sqrt{a}\left|x+\frac{b}{2a}\right|$$

$$\lim_{x\to-\infty}(2x+\sqrt{4x^2+x}) = \lim_{x\to-\infty}(2x+2\left|x+\frac{1}{8}\right|)$$

$$\lim_{x\to-\infty}(2x-2(x+\frac{1}{8})) = -\frac{1}{4}$$

راه‌حل دوم: با استفاده از اتحاد مزدوج داریم:

$$\lim_{x\to-\infty}(2x+\sqrt{4x^2+x}) = \lim_{x\to-\infty}\frac{(2x+\sqrt{4x^2+x})(2x-\sqrt{4x^2+x})}{2x-\sqrt{4x^2+x}}$$

$$-\lim_{x\to-\infty}\frac{4x^2-(4x^2+x)}{2x-\sqrt{4x^2}} - \lim_{x\to-\infty}\frac{-x}{2x-|2x|} - \lim_{x\to-\infty}\frac{-x}{4x} - -\frac{1}{4}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۳۱ گزینه ۱

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۶

گام اول

می‌دانیم:

$$\sqrt{ax^2+bx+c} \underset{x\to\pm\infty}{\sim} \sqrt{a}|x+\frac{b}{2a}|$$

گام دوم

باتوجه‌به گام اول داریم:

$$\sqrt{4x^2+9x} \underset{x\to+\infty}{\sim} \sqrt{4}|x+\frac{9}{8}| = 2(x+\frac{9}{8}) = 2x+\frac{9}{4}$$

چون $x\to+\infty$، می‌توان در مخرج کسر از عبارت $\sqrt{x}$ در برابر $3x$ صرف‌نظر کرد.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x-\sqrt{4x^2+9x}}{3x+\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x-(2x+\frac{9}{4})}{3x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x-2x-\frac{9}{4}}{3x} = -\frac{1}{3}$$

۳۲ گزینه ۳

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۳

گام اول

الف) برای به دست آوردن حاصل حد ابتدا عبارت $x(x+\sqrt{x^۲-۸})$ را در مزدوج عبارت $x+\sqrt{x^۲-۸}$ ضرب و تقسیم می کنیم.

ب) چون $x \to -\infty$، در عبارت کسری به دست آمده، برای محاسبهٔ حد حاصل تقسیم جملات پرتوان را در نظر می گیریم.

گام دوم

$$\lim_{x\to-\infty} x(x+\sqrt{x^۲-۸}) \times \frac{x-\sqrt{x^۲-۸}}{x-\sqrt{x^۲-۸}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x(x^۲-x^۲+۸)}{x-\sqrt{x^۲-۸}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{۸x}{x-\sqrt{x^۲-۸}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{۸x}{x-|x|} = \lim_{x\to-\infty} \frac{۸x}{x-(-x)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{۸x}{۲x} = ۴$$

۳۳ گزینه ۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۴

گام اول

حاصل حد $\infty - \infty$ و مبهم است.

گام دوم

برای رفع ابهام و به دست آوردن حاصل حد، از هم ارزی رادیکالی زیر استفاده می کنیم:

$$n = ۳ \Rightarrow \text{عدد فرد} \Rightarrow \sqrt[n]{ax^n+bx^{n-۱}+\dots} \underset{x\to\pm\infty}{\sim} \sqrt[n]{a}(x+\frac{b}{na})$$

$$\sqrt[۳]{۸x^۳+۲x^۲} \underset{x\to\infty}{\sim} \sqrt[۳]{۸}(x+\frac{۲}{۲۴}) = ۲(x+\frac{۱}{۱۲}) = ۲x+\frac{۱}{۶}$$

حالا حاصل حد را محاسبه می کنیم:

$$\lim_{x\to\infty} (\sqrt[۳]{۸x^۳+۲x^۲}-۲x) = \lim_{x\to\infty} (۲x+\frac{۱}{۶}-۲x) = \frac{۱}{۶}$$

۳۴ گزینه ۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۱

گام اول

الف) نمودار تابع از نقطهٔ $(۲,۱)$ می‌گذرد، پس مختصات این نقطه در ضابطهٔ تابع صدق می‌کند.

ب) می‌دانیم:

$$\sqrt{ax^۲+bx+c} \underset{x\to+\infty}{\sim} \sqrt{a}|x+\frac{b}{۲a}|$$

گام دوم

باتوجه‌به قسمت (الف) از گام اول داریم:

$$f(x)=\frac{ax+۱+\sqrt{۴x^۲+۹}}{۳x-۲} \xrightarrow{f(۲)=۱} ۱=\frac{۲a+۱+۵}{۴} \Rightarrow ۲a+۶=۴$$

$$\Rightarrow ۲a=-۲ \Rightarrow a=-۱$$

باتوجه‌به قسمت (ب) از گام اول می‌توان نوشت:

$$\sqrt{۴x^۲+۹} \underset{x\to+\infty}{\sim} ۲x$$

پس:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x+۱+\sqrt{۴x^۲+۹}}{۳x-۲}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x+۱+۲x}{۳x-۲}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+۱}{۳x-۲}=\frac{۱}{۳}$$

۳۵ گزینه ۱

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

گام اول

می‌دانیم: $\sqrt{x^۲+۵} \underset{x\to\infty}{\sim} x$

گام دوم

صورت و مخرج کسر، یک عبارت چندجمله‌ای است و حاصل حد تابع در بی‌نهایت برابر با یک عدد ثابت شده است؛ بنابراین درجهٔ بزرگ‌ترین جملهٔ صورت و بزرگ‌ترین جملهٔ مخرج باهم برابر است و حاصل حد از تقسیم ضرائب آن‌ها بر هم به دست می‌آید، پس داریم:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{۳-\sqrt{x^۲+۵}}{ax^n+۴} = \lim_{x\to+\infty} \frac{۳-x}{ax^n+۴}$$

$$\xrightarrow{n=۱} \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{۳-x}{ax+۴} = \frac{-۱}{a}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{۱}{۲} \Rightarrow -\frac{۱}{a} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow a = -۲ \Rightarrow f(x) = \frac{۳-\sqrt{x^۲+۵}}{-۲x+۴}$$

اکنون حاصل $\lim_{x\to۲} f(x)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\lim_{x\to۲} f(x) = \frac{۰}{۰} \text{ مبهم}$$

$$\lim_{x\to۲} \frac{۳-\sqrt{x^۲+۵}}{-۲x+۴} \times \frac{۳+\sqrt{x^۲+۵}}{۳+\sqrt{x^۲+۵}} = \lim_{x\to۲} \frac{۹-x^۲-۵}{۲(۲-x)(۳+\sqrt{x^۲+۵})}$$

$$= \lim_{x\to۲} \frac{(۲-x)(۲+x)}{۲(۲-x)(۳+\sqrt{x^۲+۵})} = \lim_{x\to۲} \frac{۲+x}{۲(۳+\sqrt{x^۲+۵})} = \frac{۲+۲}{۲(۳+\sqrt{۴+۵})} = \frac{۴}{۱۲} = \frac{۱}{۳}$$

۳۶ گزینه ۴

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۱

گام اول

صورت و مخرج کسر یک عبارت چندجمله‌ای است پس حاصل حد آن در بی‌نهایت از تقسیم بزرگ‌ترین جملهٔ صورت بر بزرگ‌ترین جملهٔ مخرج به دست می‌آید.

ازطرفی چون حاصل حد تابع در بی‌نهایت یک عدد ثابت شده است پس بزرگ‌ترین درجهٔ صورت و بزرگ‌ترین درجهٔ مخرج کسر باهم برابر است.

گام دوم

طبق گام اول داریم: $n = ۲$

بنابراین:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{ax^۲ - ۳x + ۱}{۳x^۲ + x} = \lim_{x\to\infty} \frac{ax^۲}{۳x^۲} = \frac{a}{۳}$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{۲}{۳} \Rightarrow \frac{a}{۳} = \frac{۲}{۳} \Rightarrow a = ۲$$

اکنون با مشخص شدن مقدار a، حاصل $f(-۱)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{۲x^۲ - ۳x + ۱}{۳x^۲ + x} \Rightarrow f(-۱) = \frac{۲(-۱)^۲ - ۳(-۱) + ۱}{۳(-۱)^۲ - ۱} = \frac{۲ + ۳ + ۱}{۳ - ۱} = \frac{۶}{۲} = ۳$$

۳۷ گزینه ۴

ابتدا حاصل حد تابع $f(x)=\frac{|x^۲-۴|}{ax^۲-x+۲}$ را وقتی $x\to+\infty$ برابر -۱ قرار داده و مقدار a را محاسبه می کنیم. وقتی $x\to+\infty$ عبارت $x^۲-۴$ مثبت بوده و می توان از قدرمطلق چشم پوشی کرد. برای محاسبهٔ $\lim\limits_{x\to(-۲)^+} f(x)$ ابتدا تکلیف قدرمطلق را روشن می کنیم و سپس حاصل حد را به دست می آوریم.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{|x^۲-۴|}{ax^۲-x+۲}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^۲-۴}{ax^۲-x+۲}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^۲}{ax^۲}=\frac{۱}{a}=-۱$$

$$\Rightarrow a=-۱\Rightarrow f(x)=\frac{|x^۲-۴|}{-x^۲-x+۲}$$

برای به دست آوردن $\lim\limits_{x\to(-۲)^+} f(x)$ ، ابتدا علامت عبارت داخل قدرمطلق را تعیین می کنیم:

$$x\to(-۲)^+\Rightarrow x>-۲\Rightarrow x^۲<۴\Rightarrow x^۲-۴<۰\Rightarrow |x^۲-۴|=-(x^۲-۴)$$

$$\lim_{x\to(-۲)^+} f(x)=\lim_{x\to(-۲)^+}\frac{-(x^۲-۴)}{-x^۲-x+۲}=\lim_{x\to(-۲)^+}\frac{-(x-۲)(x+۲)}{-(x+۲)(x-۱)}$$

$$=\lim_{x\to(-۲)^+}\frac{x-۲}{x-۱}=\frac{-۲-۲}{-۲-۱}=\frac{-۴}{-۳}=\frac{۴}{۳}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۰

پیوستگی

پیوستگی f در نقطه‌ی x_0

در فصل حد تابع در نقطه‌ی x_0 گفته شد، که عرض دو نقطه طرفین x_0 را پیدا می‌کنیم، در این فصل کلاً به اتصال نقطه $(x_0, f(x_0))$ به دو طرف آن توجه می‌کنیم.

تابع $y=f(x)$ را در نقطه‌ی $x=a$ پیوسته گوییم هرگاه دو شرط زیر همواره و هم‌زمان برقرار باشد:

۱) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$ $\quad \lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=f(a)$

۲) $a\in D_f$

به زبان ساده‌تر در نقطه‌ی a که در دامنه‌ی تابع است، حد تابع با مقدار تابع برابر شود.

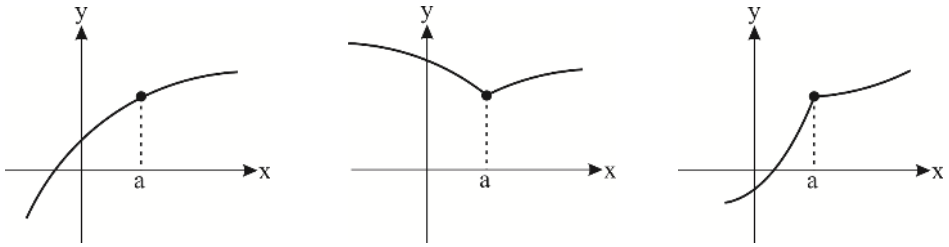
نکته: در مبحث حد مشاهده کردیم که در محاسبه‌ی حد توابع گاهی نیاز است، حد چپ و راست را به دست آوریم پس در این صورت تعریف پیوستگی نیز به صورت معادل به فرم زیر بیان می‌شود:

۱) $a\in D_f$

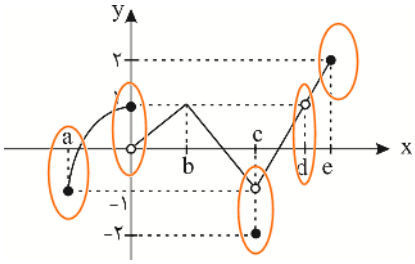
۲) $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=f(a)$

مفهوم پیوستگی از روی نمودار

هر سه نمودار نشان‌دهنده‌ی پیوستگی تابع در $x=a$ می‌باشند.



تمرین: نمودار تابع f به صورت مقابل است. با توجه به نمودار، تابع در چند نقطه ناپیوسته است؟



۱) ۳

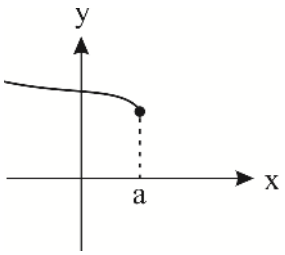
۲) ۴

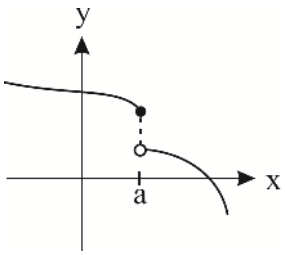
۳) ۶

۴) ۵

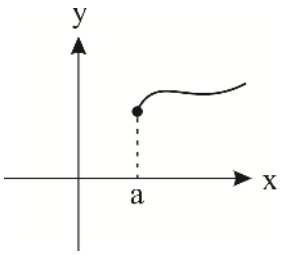
پیوستگی یک طرفه

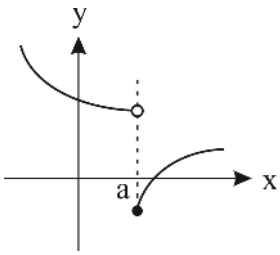
۱) پیوستگی چپ: تابع f در $x=a$ را از چپ پیوسته گوییم هرگاه: $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=f(a) \quad (a\in D_f)$





۲) پیوستگی راست: تابع f در $x=a$ را از راست پیوسته گوییم هرگاه: $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=f(a) \quad (a\in D_f)$



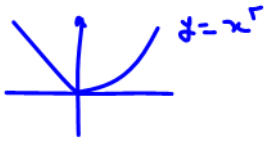


نکته: f در a پیوسته است اگر و تنها اگر f در a هم از راست و هم از چپ پیوسته باشد.

تمرین: به ازای کدام مقدار a تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\dfrac{8+x^3}{|x+2|} & x\neq -2\\ a & x=-2\end{cases}$ در نقطهٔ $x=-2$ فقط از چپ پیوسته است؟ (تجربی ۹۸)

۱) -12 ۲) -6 ۳) 6 ۴) 12

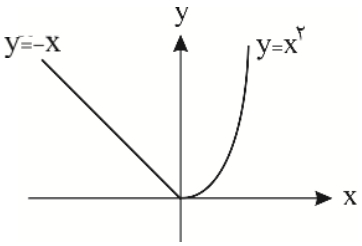
$\lim\limits_{x\to(-2)^-} \dfrac{8+x^3}{|x+2|}=\dfrac{0}{0}\overset{H\text{op}}{\longrightarrow}\dfrac{+3x^2}{-1}=-12=f(-2)=a$



تمرین: تابع $f(x)=\begin{cases} x^2 & x\geq 0 \\ -x & x<0 \end{cases}$ در مبدأ ..... است.

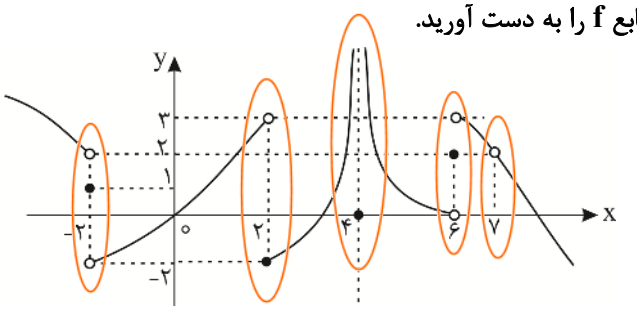
۱) پیوسته ۲) فقط پیوسته‌ی راست ۳) فقط پیوسته‌ی چپ ۴) ناپیوسته

پاسخ: گزینه‌ی «۱» ـ واضح است که شکل به صورت یکپارچه به هم متصل است پس تابع در تمام نقاط به‌خصوص در صفر پیوسته است.



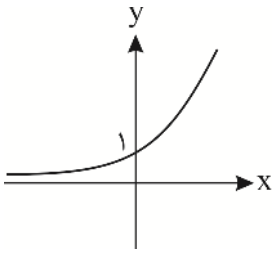
$$\begin{cases} 0\in D_f \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} x^2=0=f(0) \\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} (-x)=0 \end{cases} \Rightarrow$$ تابع در $x=0$ پیوسته است.

تمرین: در شکل زیر نمودار تابع $f(x)$ رسم شده است. نقاط ناپیوستگی تابع f را به دست آورید.

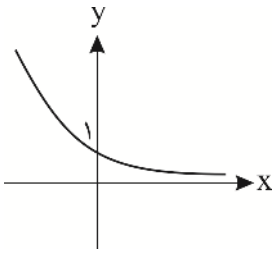


۱) توابع چندجمله‌ای در هر نقطه‌ای پیوسته هستند و در کل $\mathbb{R}$ در تمام نقاط پیوستگی دارند. مثلاً $f(x)=x^3-2x^2$، $f(x)=2$، $f(x)=2x^2-5$ و ... در تمام نقاط پیوسته هستند.

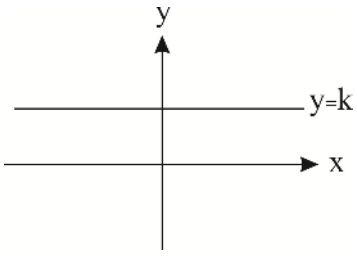
توابع به فرم $y=a^x\ (a\neq 1, a>0)$، $y=\sin ax$ و $y=\cos ax$ روی $\mathbb{R}$ پیوسته‌اند.

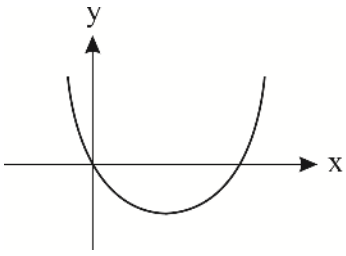


$y=2^x$

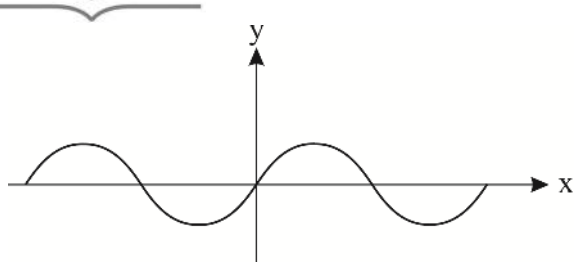


$y=(\frac{1}{2})^x$

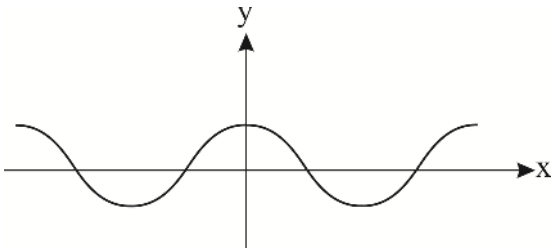




$y=x^2-x=x(x-1)$

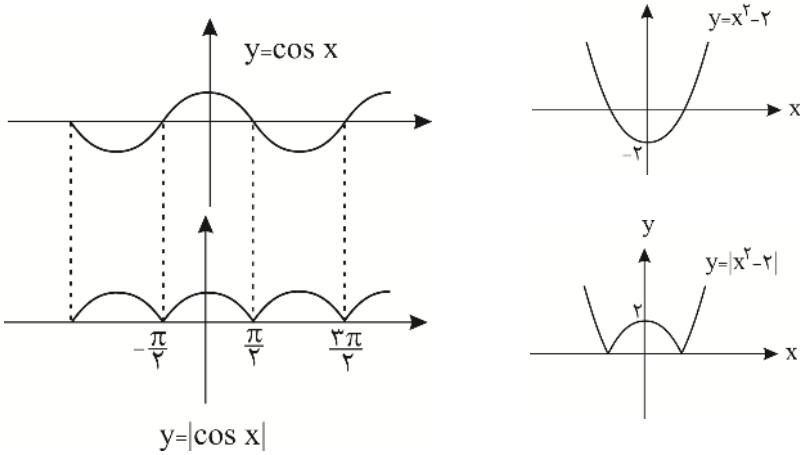


$y = \sin ax \quad (a > 0)$

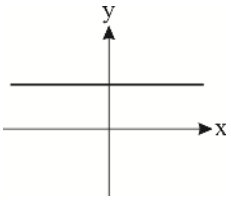


$y = \cos ax$

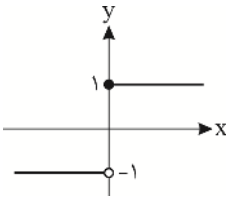
۲) اگر $f(x)$ در x_0 پیوسته باشد، $|f(x)|$ در x_0 پیوسته است، مـثلاً $y = \cos x$ و $y = x^2 - 2$ پیوسـته‌اند، پـس $y = |\cos x|$ و $y = |x^2 - 2|$ نیز پیوسته‌اند.



عکس مطلب فوق درست نیست، یعنی اگـر $|f|$ در x_0 پیوسـته باشـد، نمی‌تـوان گفـت کـه لزومـاً f در x_0 پیوسـته بـوده اسـت، مـثلاً

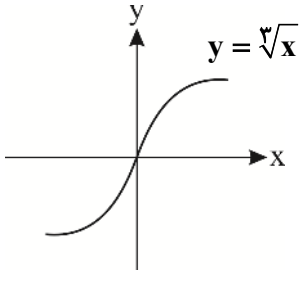


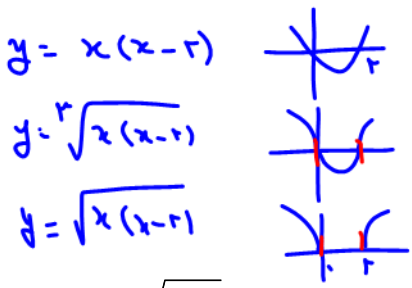
$y = |f(x)| = 1$ در $x = 0$ پیوسته است در حالی که $f(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$ در $x = 0$



ناپیوسته است.

۳) اگر $f(x)$ پیوسته باشد، $f^n(x)$ و $\sqrt[2n+1]{f(x)}$ نیز پیوسته است. مثلاً $f(x) = \sqrt[3]{2x^2 - 7}$ و یا $f(x) = (x^2 - 6)^5$.





۴) تابع $y = \sqrt[2n]{f(x)}$ (f تابعی پیوسته) در هر نقطه‌ای غیر از نقاط انتهایی دامنه پیوسته است. برای مثال تابع $y = \sqrt{x-1}$ (دامنه‌ی تابع $x \geq 1$ است) در $x = 2$ پیوسته است ولی در $x = 1$ (نقطه‌ی انتهایی دامنه) ناپیوسته است، چون در همسایگی چپ $x = 1$ تعریف نمی‌شود.

تمرین: تابع با ضابطهٔ $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1 - \sqrt{1-x}} & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$، به ازای کدام مقدار a در نقطهٔ $x = 0$ پیوسته است؟ (تجربی ۹۶)

$\sqrt{1+u} \sim 1 + \frac{u}{2}$ $(u \to 0)$

$\lim_{x \to 0} \frac{x}{1 - (1 - \frac{x}{2})} = 2 = f(0) = a$

۱) ۲- ۲) ۱- ۳) ۱ ۴) ۲

راه دیگر

$\lim_{x\to 0} \frac{x}{1-\sqrt{1-x}} \overset{Hop}{\underset{x\to 0}{=}} \frac{1}{\frac{-1}{2\sqrt{1-x}}} = 2 = f(0)$

$x \to 0^+$

$x \to 0^-$

تمرین: تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\frac{x-1}{x-\sqrt{x}} & x>1\\ ax-a+2 & x\le 1\end{cases}$، به ازای کدام مقدار a در نقطهٔ $x=1$ پیوسته است؟ (تجربی خارج ۹۶)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) هر مقدار a ۴) هیچ مقدار a

$\lim_{x\to 1^+} \frac{x-1}{x-\sqrt{x}} = \frac{0}{0} \overset{Hop}{\underset{x\to 1}{=}} \frac{1}{1-\frac{1}{2\sqrt{x}}} = 2 = l_2 = \lim_{x\to 1^-} ax-a+2 = 2 = l_1$

$f(1) = 2 = l_1 = l_2$

تمرین: به ازای کدام مقدار A تابع $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2+|x|}{x^2-2|x|} & x\neq 0\\ A & x=0\end{cases}$ در نقطه‌ی $x=0$ پیوسته است؟ (تجربی خارج ۹۰)

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۲ ۳) $-\frac{1}{2}$ ۴) ۲-

$\lim_{x\to 0} \frac{x^2+|x|}{x^2-2|x|} \overset{\text{می‌توان}}{\underset{x\to 0}{=}} -\frac{1}{2} = f(0) = A$

۵) در توابع دو ضابطه‌ای یا چندضابطه‌ای نقاط مرزی (تغییر ضابطه) مشکوک به ناپیوستگی هستند و باید پیوستگی را در آن‌ها کنترل کنیم.

تمرین: به ازای کدام مقدار a، تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases} x^2+ax-5 & x>2 \\ ax-1 & x\le 2 \end{cases}$ بر روی مجموعه‌ی اعداد حقیقی پیوسته است؟ (تجربی ۹۱)

۱) هر مقدار حقیقی a ۲) هیچ مقدار a ۳) فقط $a=-2$ ۴) فقط $a=2$

$f(1)=l_1=l_2$

$4+2a-5=2a-1$

$2a-1=2a-1$

تمرین: تابع $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin 2x}{\sqrt{1-\cos 2x}} & x\neq 0 \\ 2a & x=0 \end{cases}$ به ازای کدام مقدار a در $x=0$ پیوسته است؟

۱) $\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ۲) $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ۳) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ۴) هیچ مقدار a

$\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sqrt{1-\cos 2x}}=\dfrac{2\sin x\cos x}{\sqrt{2\sin^2 x}}=\sqrt{2}|\sin x|$

$x\to 0^-:\ \dfrac{2\sin x\cos x}{-\sqrt{2}\sin x}=-\sqrt{2}$

$x\to 0^+:\ \dfrac{2\sin x\cos x}{\sqrt{2}\sin x}=\sqrt{2}$

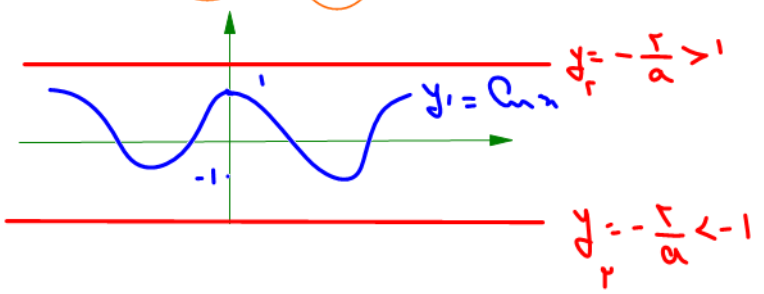
$l_1\neq l_2$ پس در $x=0$ حد ندارد که بخواهد پیوسته باشد.

تمرین: تابع $f(x)=\dfrac{1}{a\cos x+2}$ در $\mathbb{R}$ پیوسته است. مجموعهٔ مقادیر a کدام است؟

۱) $-\dfrac{1}{2}<a<\dfrac{1}{2}$ ۲) $-2<a<2$ ۳) $a<-2$ یا $a>2$ ۴) $a<-\dfrac{1}{2}$ یا $a>\dfrac{1}{2}$

نکته: اگر مخرج تابع گویا ریشه نداشته باشد روی $\mathbb{R}$ پیوسته است.

حل: مخرج $a\cos x+2=0$ یا $\cos x=-\dfrac{2}{a}$ ریشه نداشته باشد.

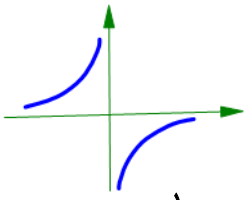


$-\dfrac{2}{a}>1$ یا $-\dfrac{2}{a}<-1$

$\left|-\dfrac{2}{a}\right|>1$

$\dfrac{2}{|a|}>1$ $\quad 2>|a|$

$-2<a<2$



۶) در توابع کسری ریشه‌های مخرج نقاط ناپیوستگی تابع هستند. مثلاً $y=\frac{-1}{x}$ در $x=0$ ناپیوسته است.

تمرین: تابع $y=\frac{2x-3}{x^2-ax+9}$ به ازای چه مقادیری از a همواره پیوسته است؟

۱) $a>6$ ۲) $-6<a<6$ ۳) $a<-6$ ۴) $\varnothing$

$x^2-ax+9=0$ خرج کسر ریشه ندارد باید این‌طور نشود

$\Delta=(-a)^2-4(9)<0$ خ ق ج

$a^2<36$

$|a|<6$

$-6<a<6$

۷) تابع $y=[ax]$ در نقاط توش $\mathbb{Z}$ کن دچار ناپیوستگی می‌شود. مثلاً $y=[\frac{x}{2}]$ در نقاط $\frac{x}{2}=k$ و در نتیجه $x=2k$ یعنی xهای زوج ناپیوسته است. نقطه‌ی $x=4$ را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to 4^+}[\frac{x}{2}]=[\frac{4^+}{2}=2^+]=2\\ \lim\limits_{x\to 4^-}[\frac{x}{2}]=[\frac{4^-}{2}=2^-]=1\\ f(4)=[\frac{4}{2}]=2\end{cases}$$

در این نقطه حد چپ و راست نابرابر است پس تابع پیوسته نیست. (چون اصلاً حد ندارد.)

دقت کنید که در xهای توش $\mathbb{Z}$کُنِ ضریب صفرکن، تابع پیوسته می‌باشد. مثلاً اگر $f(x)=(x-4)[\frac{x}{2}]$ باشد، تابع در $x=4$ پیوسته است زیرا:

$$\lim_{x\to 4^+}(x-4)[\frac{x}{2}]=(4-4)[\frac{4^+}{2}=2^+]=0\times 2=0$$

$$\lim_{x\to 4^-}(x-4)[\frac{x}{2}]=(4-4)[\frac{4^-}{2}=2^-]=0\times 1=0$$

$$f(4)=(4-4)[\frac{4}{2}]=0\times 2=0$$

$\lim\limits_{x\to 6}(x-6)[\frac{x}{3}]$ $\begin{cases}x\to 6^+\\ x\to 6^-\end{cases}$

$x=6$ توش $\mathbb{Z}$کُن ضریب صفرکُن

صفر $\left([\frac{6^+}{3}=2^+]=2\right)=0=l_1$

صفر $\left([\frac{6^-}{3}=2^-]=1\right)=0=l_2$

$l_1=l_2=f(6)$

اگر $x=6$ پیوسته است

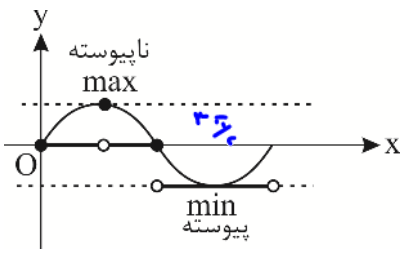
یه دقتِ دیگه:

اگه xهایِ توش $\mathbb{Z}$ کن، طول نقطه‌ی min نسبی عبارت درون جزء صحیح باشند باز هم تابع در آن‌جا پیوسته خواهد بود. مثلاً $f(x)=[\sin x]$ در $x=\frac{3\pi}{2}$ توش $\mathbb{Z}$ می‌شود ولی باز هم پیوسته است چون:

$$\lim_{x\to\frac{3\pi}{2}^+}[\sin x]=[-1^+]=-1$$

$$\lim_{x\to\frac{3\pi}{2}^-}[\sin x]=[-1^+]=-1$$

$$f(\frac{3\pi}{2})=[\sin\frac{3\pi}{2}]=-1$$



تمرین: تابع $f(x)=(-1)^{[x]}\sin\pi x$ در نقاط $x\in\mathbb{Z}$ از نظر پیوستگی چگونه است؟ (ریاضی خارج ۹۳)

۱) همواره پیوسته

۲) فقط در اعداد فرد پیوسته

۳) فقط در اعداد زوج پیوسته

۴) از چپ پیوسته، از راست ناپیوسته

$\sin(k\pi)=0$

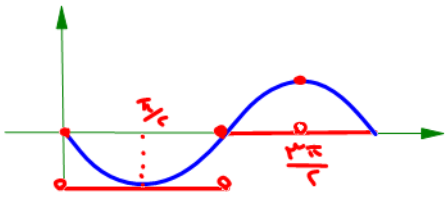
تمرین: پیوستگی تابع $f(x)=(x^2-9)[\frac{x}{3}]$ در نقاط $x=3$ و $x=-3$ به ترتیب چگونه است؟

۱) در دو نقطه ناپیوسته است.

۲) در دو نقطه پیوسته است.

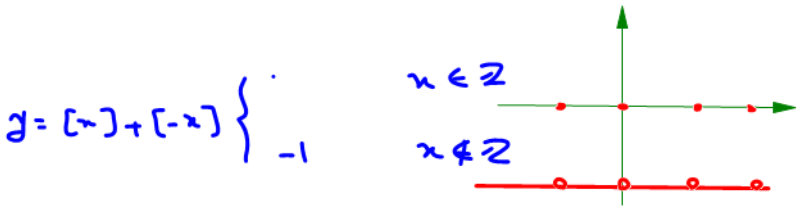
۳) در نقطه‌ی $x=3$ پیوسته و در نقطه‌ی $x=-3$ ناپیوسته است.

۴) در نقطه‌ی $x=3$ ناپیوسته و در نقطه‌ی $x=-3$ پیوسته است.



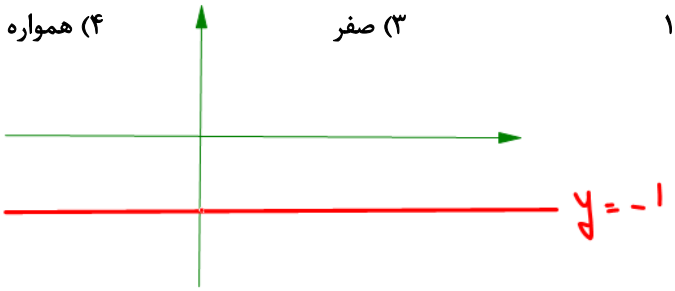
تمرین: تابع $f(x)=[-\sin x]$ در $x=\frac{\pi}{2}$، ..... است.

۱) فقط پیوسته‌ی راست
۲) فقط پیوسته‌ی چپ
۳) پیوسته
۴) نه از راست و نه از چپ پیوسته



تمرین: تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}[x]+[-x] & x\notin\mathbb{Z}\\ a & x\in\mathbb{Z}\end{cases}$ به ازای کدام مقدار a، بر روی مجموعه‌ی اعداد حقیقی پیوسته است؟ (ریاضی ۹۶)

۱) -1
۲) ۱
۳) صفر
۴) همواره ناپیوسته

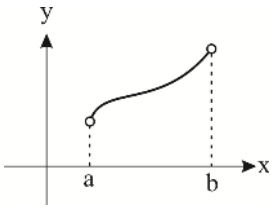


تمرین: تابع $f(x)=(-1)^{[x]}\sin\frac{\pi x}{2}$ در نقاط $x\in\mathbb{Z}$ از نظر پیوستگی، چگونه است؟ (ریاضی ۹۳)

۱) فقط در اعداد زوج پیوسته است.
۲) فقط در اعداد فرد پیوسته است.
۳) همواره ناپیوسته است.
۴) همواره پیوسته است.

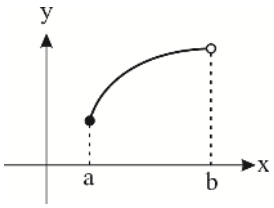
پیوستگی در بازه

۱) تابع $f(x)$ در بازه‌ی (a,b) پیوسته است، هرگاه در هر نقطه از بازه‌ی (a,b) پیوسته باشد:



$$\forall x_0 \in (a,b): \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

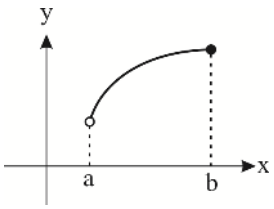
۲) تابع $y=f(x)$ در بازه‌ی $[a,b)$ پیوسته است اگر دو شرط زیر توأماً برقرار باشند:



۱) در هر نقطه از (a,b) پیوسته باشد. $\forall x_0 \in (a,b): \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

۲) در a پیوسته از راست باشد. $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$

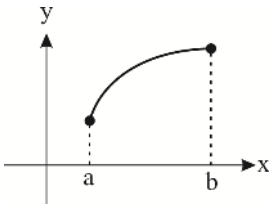
۳) تابع $y=f(x)$ در بازه‌ی $(a,b]$ پیوسته است اگر دو شرط زیر توأماً برقرار باشند:



۱) در هر نقطه از (a,b) پیوسته باشد. $\forall x_0 \in (a,b): \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

۲) در b پیوسته از چپ باشد. $\lim_{x\to b^-} f(x) = f(b)$

۴) تابع $y=f(x)$ در بازه‌ی $[a,b]$ پیوسته است اگر شرط‌های زیر همگی برقرار باشند:



۱) در هر نقطه از (a,b) پیوسته باشد. $\forall x_0 \in (a,b): \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

۲) در b پیوسته از چپ باشد. $\lim_{x\to b^-} f(x) = f(b)$

۳) در a پیوسته از راست باشد. $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$

تمرین: تابع $y = x^2[x] + 3x$ در بازه‌ی $[0,1]$ ..... است.

۱) همواره پیوسته ۲) در یک نقطه ناپیوسته ۳) در دو نقطه ناپیوسته ۴) در بی‌شمار نقطه ناپیوسته

پاسخ: گزینه‌ی «۲» ـ برای آن که f در بازه‌ی $[0,1]$ پیوسته باشد:

۱) باید در بازه‌ی $(0,1)$ پیوسته باشد. $[x]=0$ پس $y=3x$ که همواره پیوسته است.

۲) در $x=0$ پیوسته‌ی راست باشد.

۳) در $x=1$ پیوسته‌ی چپ باشد.

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0 \\ f(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{در } x=0 \text{ پیوسته‌ی راست است.}$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 1[1^-] + 3(1) = 3 \\ f(1) = 1[1] + 3 = 4 \end{cases} \Rightarrow \text{در } x=1 \text{ ناپیوسته است.}$$

پس در بازه‌ی $[0,1]$ در کل ناپیوسته است. به بیان دیگر این تابع در بازه‌ی $[0,1)$ پیوسته است ولی در $x=1$ ناپیوسته است.

تمرین: تعداد نقاط ناپیوستگی تابع با ضابطه‌ی $f(x)=[x]^2-[x]$ روی بازه‌ی $(-1,2)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

تمرین: تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=(x-3)[\frac{1}{3}x-1]$ روی بازه‌ی $(0,9)$ در چند نقطه ناپیوسته است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

تمرین: تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}\frac{x-[x]}{x^3-x-6} & x\neq 2\\ a & x=2\end{cases}$، به ازای کدام مقدار a، در بازه‌ی $[2,3)$، پیوسته است؟ (ریاضی ۹۷)

۱) $\frac{1}{11}$ ۲) $\frac{1}{9}$ ۳) $\frac{1}{8}$ ۴) $\frac{1}{6}$

تمرین: اگر $f(x)=(ax+b-2x^2)[x]$ در بازهٔ $(2,5)$ پیوسته باشد، مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) -۱۰ ۲) -۵ ۳) ۵ ۴) ۱۰

تقسیم و روابط آن

یکی از سؤالات معروف در دوره‌ی اول این بود که «عدد ۳۱ را بر ۷ تقسیم کنید و خارج‌قسمت و باقی‌مانده را بیابید.»

باقی‌مانده + خارج‌قسمت × مقسوم‌علیه = مقسوم

$$۳۱ = ۷ \times ۴ + ۳$$

با استفاده از همین موضوع ساده، تقسیم چندجمله‌ای‌ها را به این صورت انجام می‌دهیم:

۱- مقسوم را بر اساس توان‌های نزولی از بزرگ به کوچک مرتب می‌کنیم.

۲- جمله‌ای که در مقسوم، بزرگ‌ترین درجه را دارد بر جمله‌ای از مقسوم‌علیه که بزرگ‌ترین درجه را دارد تقسیم می‌کنیم.

۳- عبارت به‌دست‌آمده در خارج‌قسمت را در مقسوم‌علیه ضرب می‌کنیم و علامتش را قرینه کرده با مقسوم جمع می‌کنیم.

۴- این مراحل سه‌گانه را تا جایی ادامه می‌دهیم که درجه‌ی به‌دست‌آمده در ردیف باقی‌مانده کم‌تر از درجه‌ی مقسوم‌علیه باشد.

مثلاً: عبارت $x^۳ + x^۲ - ۲$ را بر $x - ۱$ تقسیم می‌کنیم:

مقسوم	مقسوم‌علیه
$x^۳ + x^۲ - ۲$	$x - ۱$
$-x^۳ + x^۲$	$x^۲ + ۲x + ۲$
$۲x^۲ - ۲$	خارج‌قسمت
$-۲x^۲ + ۲x$	
$۲x - ۲$	
$-۲x + ۲$	
$۰ = R$	
باقی‌مانده	

$x^۳+x^۲-۲ \mid x-۱$

$-(x^۳-x^۲)$

$۲x^۲-۲$

$-(۲x^۲-۲x)$

$۲x-۲$

$-(۲x-۲)$

صفر

$\frac{x^۳}{x}=x^۲$

$\frac{۲x^۲}{x}=۲x$

$\frac{۲x}{x}=۲$

با توجه به قانون تقسیم داریم: $x^۳+x^۲-۲=(x-۱)(x^۲+۲x+۲)$

باقی‌مانده + خارج‌قسمت × مقسوم‌علیه = مقسوم

$$x^۳ + x^۲ - ۲ = (x-۱)(x^۲ + ۲x + ۲) + ۰$$

پس اگر مقسوم را با $P(x)$، مقسوم‌علیه را با $D(x)$، خارج‌قسمت را با $Q(x)$ و باقی‌مانده را با $R(x)$ نمایش دهیم، خواهیم داشت:

باقی‌مانده + خارج‌قسمت × مقسوم‌علیه = مقسوم

$$P(x) = D(x) \times Q(x) + R(x)$$

یادت باشه همواره باقی‌مانده حداقل یک درجه کم‌تر از مقسوم‌علیه است.

۱- محاسبه‌ی باقی‌مانده‌ی تقسیم $P(x)$ بر چندجمله‌ای درجه اول $ax+b$:

وقتی $P(x)$ را بر $ax+b$ تقسیم می‌کنیم کافی است، برای یافتن باقی‌مانده، به جای x قرار دهیم $\frac{-b}{a}$. به این ترتیب داریم:

$$ax+b=۰ \Rightarrow x=-\frac{b}{a}$$

باقی‌مانده $R = P(-\frac{b}{a})$

$P(x) \mid ax+b=۰ \to x=-\frac{b}{a}$

$R=P(-\frac{b}{a})$

$۴x^۳-۷x^۲+۵x-۱ \mid x-۱=۰$

$R=۴-۷+۵-۱=۱$ جواب

تمرین: باقی‌مانده‌ی تقسیم $x^۴-ax^۳+x^۲+۲ax+۱$ بر $x+۱$ برابر ۴ شده است. a کدام است؟ (سراسری ریاضی ۸۰)

پاسخ:

$$x+۱=۰ \Rightarrow x=-۱$$

$$R=P(-۱)=۴ \Rightarrow (-۱)^۴-a(-۱)^۳+(-۱)^۲+۲a(-۱)+۱=۴ \Rightarrow ۱+a+۱-۲a+۱=۴ \Rightarrow -a=۱ \Rightarrow a=-۱$$

تمرین: باقی‌مانده‌ی تقسیم $۱۵x^۲+۱۴x-۲۹$ را بر $x-۱$ بیابید.

پاسخ:

$$x-۱=۰ \Rightarrow x=۱$$

$$R=P(۱)=۱۵(۱)^۲+۱۴(۱)-۲۹=۲۹-۲۹=۰ \Rightarrow R=۰$$

باقی‌مانده صفر شد، یعنی این که $۱۵x^۲+۱۴x-۲۹$ بر $x-۱$ بخش‌پذیر است. پس عامل $x-۱$ را در خود دارد.

۲- محاسبه‌ی باقی‌مانده‌ی تقسیم $P(x)$ بر یک چندجمله‌ای با درجه‌ی بیشتر از یک:

گفتیم برای پیدا کردن باقی‌مانده، مقسوم‌علیه را صفر می‌کنیم:

$$P(x)=\overbrace{D(x)}\times Q(x)+R(x)$$

و این برای وقتی بود که مقسوم‌علیه از درجه‌ی اول بود. حال اگر مقسوم‌علیه از درجه‌ی اول نباشد باز هم آن را مساوی صفر قرار می‌دهیم. اما این‌جا، جمله‌های پرتوان را برحسب جمله‌های با توان کم‌تر می‌نویسیم و با ظاهر کردن جملات پرتوان در مقسوم، معادل کم‌توانشان را جاگذاری می‌کنیم.

تمرین: باقی‌مانده‌ی تقسیم $۲x^۹+x^۵+۲$ را بر $x^۳-۱$ بیابید.

پاسخ: ابتدا قرار می‌دهیم $x^۳-۱=۰$ پس $x^۳=۱$ (این یک معادله نیست. یعنی نباید نتیجه بگیرید که $x=۱$ است). حال در رابطه‌ی $۲x^۹+x^۵+۲$، $x^۳$ می‌سازیم و به جایش $(x^۳=۱)$ قرار می‌دهیم.

$$۲x^۹+x^۵+۲=۲(x^۳)^۳+(x^۳)x^۲+۲ \overset{x^۳=۱}{=\!=} ۲(۱)^۳+(۱)x^۲+۲=x^۲+۴$$

یعنی باقی‌مانده، $x^۲+۴$ است.

تمرین: فرض کنید چندجمله‌ای $p(x)$ بر $x^۲-۱$، بخش‌پذیر باشد، اگر $Q(x)=p(x-۱)+p(۱-x)$، آن‌گاه باقی‌ماندهٔ تقسیم $Q(x)$ بر $x-۲$ کدام است؟ (تجربی ۹۹)

۱) -۱ ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ۲

تمرین: فرض کنید باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $p(x)$ بر $x-۴$ و $x+۲$، به ترتیب ۳ و ۱ باشند. باقی‌ماندهٔ تقسیم $p(x^۲)+۴p(-x)$ بر $x-۲$، کدام است؟ (تجربی خارج ۹۹)

۱) ۷ ✓ ۲) ۱ ۳) صفر ۴) -۱

$P(x) \mid x-۴=۰$, $P(۴)=۳$; $P(x) \mid x+۲=۰$, $P(-۲)=۱$

$P(x^۲)+۴P(-x) \mid x-۲=۰ \longrightarrow x=۲$

$R=P(۴)+۴P(-۲)=۷$

۳- اگر باقی‌مانده‌ی تقسیم عبارت $P(x)$ بر $x-a$ و $x-b$ به ترتیب $R_۱$ و $R_۲$ باشد، باقی‌مانده‌ی تقسیم $P(x)$ بر $(x-a)(x-b)$ برابر است با $R(x)=Ax+B$ چرا که مقسوم‌علیه از درجه دو است و باقی‌مانده باید درجه‌اش از مقسوم‌علیه کم‌تر باشد:

$$\frac{P(x)}{R=Ax+B} \Big| \frac{(x-a)(x-b)}{Q(x)}$$

$f(-۱)=-a+b=-۱$, $f(x)=Q(x)(x+۱)(x-۲)+ax+b$, $f(۲)=۲a+b=۵$

$\begin{cases} -b+a=+۱ \\ ۲a+b=۵ \end{cases} \Rightarrow a=۲ \;,\; b=۱$

تمرین: اگر باقی‌مانده‌ی تقسیم $f(x)$ بر $x+۱$ و $x-۲$ به ترتیب -۱ و ۵ باشد، باقی‌مانده‌ی $f(x)$ بر $x^۲-x-۲$ کدام است؟

$$\frac{f(x)}{R=Ax+B} \Big| \frac{x^۲-x-۲}{Q(x)}$$

$f(x) \mid (x+۱)(x-۲)=۰$, $R=ax+b$

$f(x) \mid x+۱$, $f(-۱)=-۱$; $f(x) \mid x-۲=۰$, $f(۲)=۵$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+۱=۰ \Rightarrow x=-۱ \Rightarrow R=f(-۱)=-۱ \Rightarrow A(-۱)+B=-۱ \;\; (I) \\ x-۲=۰ \Rightarrow x=۲ \Rightarrow R=f(۲)=۵ \Rightarrow A(۲)+B=۵ \;\; (II) \end{cases}$$

$$\Rightarrow (I)\times ۲ \begin{cases} -۲A+۲B=-۲ \\ (II)\;\; ۲A+B=۵ \end{cases} \Rightarrow ۳B=۳ \Rightarrow B=۱ \Rightarrow A=۲ \Rightarrow R=Ax+B=۲x+۱$$

پس باقی‌مانده $R=۲x+۱$ است.

تمرین: باقی‌مانده‌ی تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x-۱$ و $۲x+۱$ به ترتیب ۸ و ۵ است. باقی‌مانده‌ی تقسیم $P(x)$ بر $۲x^۲-x-۱$، کدام است؟ (ریاضی ۹۹)

۱) $-x+۴$ ۲) $x+۳$ ۳) $۲x+۶$ ۴) $۲x-۳$

$P(x) \mid x-۱=۰$, $P(۱)=۸$; $P(x) \mid ۲x+۱=۰$, $P(-\frac{۱}{۲})=۵$

$P(x) \mid ۲(x-۱)(x+\frac{۱}{۲})=(x-۱)(۲x+۱)$

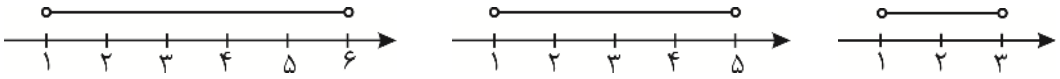
$R=ax+b$

$\begin{cases} a+b=۸ \\ -\frac{۱}{۲}a+b=۵ \end{cases} \longrightarrow a=۲ \;,\; b=۶$

همسایگی

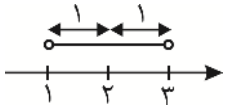
۱) اگر عددی مانند x_0 عضو درونی بازهٔ (c,d) باشد آن‌گاه می‌نویسیم $x_0 \in (c,d)$ و بازهٔ (c,d) را یک همسایگی باز x_0 می‌نامیم.

هر بازهٔ بازی که شامل عدد x_0 باشد، یک همسایگی x_0 نامیده می‌شود. مثلاً بازه‌های $(1,3)$، $(1,5)$ و $(1,6)$ همگی یک همسایه نقطهٔ ۲ هستند:

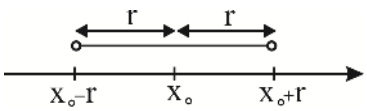


بین این بازه‌ها، بازهٔ $(1,3)$ یک همسایگی متقارن نقطهٔ ۲ است.

یعنی نقطهٔ ۲ دقیقاً در وسط بازه واقع شده است:

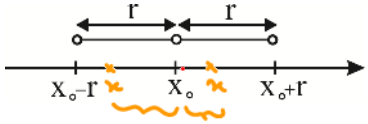


در حالت کلی بازهٔ (x_0-r, x_0+r) یک همسایگی متقارن نقطهٔ x_0 به شعاع r است.



همسایگی متقارن عدد x_0، به مرکز x_0 و شعاع r علاوه بر (x_0-r, x_0+r) به صورت روبه‌رو نیز نمایش می‌دهیم:

$$\{x \mid x \in \mathbb{R}, |x-x_0| < r\}$$



در فصل حد با یک نوع دیگر از همسایگی آشنا می‌شوید بـه اسـم همسـایگی محـذوف متقارن نقطهٔ x_0، فرق این همسایگی با قبلی در این است که در این‌جا خود x_0 جـزء همسایگی نیست یعنی نقطهٔ x_0 در بازه حضور ندارد:

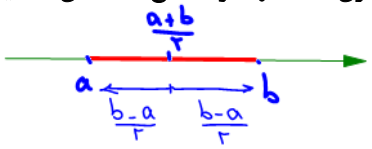
در حالت کلی $(x_0-r, x_0+r)-\{x_0\}$ یک همسایگی محذوف متقارن نقطهٔ x_0 به شعاع r است که آن را بـه صـورت روبـه‌رو نمـایش می‌دهند:

$$\{x \mid x \in \mathbb{R}, 0 < |x-x_0| < r\} = (x_0-r, x_0) \cup (x_0, x_0+r)$$

یعنی این‌که x نمی‌تواند x_0 باشد، یعنی x_0 را حذف کرده‌ایم به این خاطر است که قدرمطلق را بزرگ‌تر از صفر قرار داده‌ایم. ضمناً در این حالت نیز مرکز همسایگی نقطهٔ x_0 است.

یادت باشه: همسایگی متقارن نقطهٔ x_0 به شعاع r معادل $|x-x_0| < r$ و همسایگی محذوف (حذف‌شده) نقطهٔ x_0 به شعاع r معـادل $0 < |x-x_0| < r$ است.

یـادت باشـه: بـرای آن‌کـه نامسـاوی $a < x < b$ را بـه صـورت یـک همسـایگی متقـارن عـدد x_0 و شـعاع r نشـان دهـیم از دسـتور $|x-\frac{a+b}{2}| < \frac{b-a}{2}$ استفاده می‌کنیم.



تمرین: نامساوی $-2 < x < 8$ را به صورت یک همسایگی متقارن نمایش دهید.

پاسخ: طبق رابطهٔ فوق داریم:

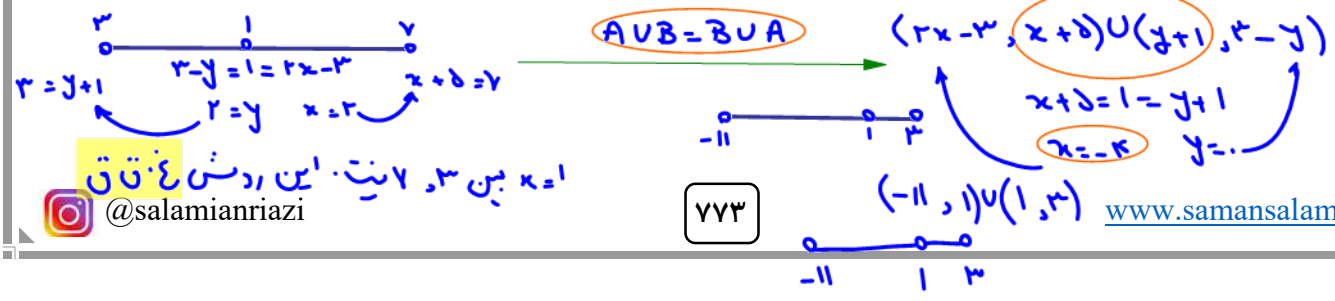
$$|x-\frac{8+(-2)}{2}| < \frac{8-(-2)}{2}$$

یعنی $|x-3| < 5$ و به این معنی است که در این همسایگی متقارن، عدد ۳ مرکز و عدد ۵ شعاع است.

یادت باشه: همسایگی محذوف متقارن از اجتماع دو بازه تشکیل شده که در بالا نیز به آن اشاره کردیم: $(x_0-r, x_0) \cup (x_0, x_0+r)$

تمرین: اگر $(2x-3, x+5) \cup (y+1, 3-y)$ یک همسایگی محذوف نقطهٔ ۱ باشد، مقدار x کدام است؟

۱) -۲ ۲) ۲ ۳) -۴ ۴) ۴



@salamianriazi
www.samansalamian.ir

-

۱ تابع ناصفر $f(x)=b[x^۲-ax]-۲a$ در $\mathbb{R}$ پیوسته است. مقدار $\frac{a}{f(b)}$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۲}$
۲) $-\frac{۱}{۴}$
۳) ۱
۴) صفر

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

۲ تابع $f(x)=\begin{cases}(۱-a)[x]+(۳a^۲-۱)[-x] & x\notin\mathbb{Z}\\ b\sin(\frac{\pi}{a}) & x\in\mathbb{Z}\end{cases}$ روی مجموعه اعداد حقیقی پیوسته است. مقدار $\frac{a}{b}$ کدام است؟

۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۳

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۳

۳ تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\frac{x^۳-۳x^۲+۴}{x-۲} & ;x>۲\\ ۲x+b & ;x\le ۲\end{cases}$، به ازای کدام مقدار b همواره پیوسته است؟

۱) -۴
۲) -۲
۳) ۲
۴) ۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۹

۴ به ازای کدام مقادیر a تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\frac{۱}{x} & ;۰<x<a\\ ۱-\frac{x}{۴} & ;x\ge a\end{cases}$، همواره پیوسته است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) هیچ مقدار a

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۵

۵ تابع $f(x)=\begin{cases}|x|+[-x] & ;|x^۳|<x^۲\\ ۱+\cos \pi x & ;|x^۳|=x^۲\\ [x^۲]-[x] & ;|x^۳|>x^۲\end{cases}$ در چند نقطه ناپیوسته است؟

۱) ۲
۲) ۳
۳) بی‌شمار
۴) در همهٔ نقاط پیوسته است

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۱

۶ به ازای کدام مقدار a تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\sin\frac{\pi}{x} & ;x\neq ۰\\ a & ;x=۰\end{cases}$، در نقطهٔ $x=۰$ پیوسته است؟

۱) -۱
۲) صفر
۳) ۱
۴) هیچ مقدار a

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۰

۷ اگر تابع $f(x)=\begin{cases}\frac{\sqrt{۳x^۲+(m-۱)x+(m-۴)}}{|x^۳+((m-۷)x+a)^۲|} & :x\neq a\\ \frac{۲\sin b}{۳\sqrt{x+۲}} & :x=a\end{cases}$ در $\mathbb{R}$ پیوسته باشد، مقدار b کدام می‌تواند باشد؟

۱) $\frac{\pi}{۳}$
۲) $\frac{\pi}{۶}$
۳) $\frac{۵\pi}{۳}$
۴) $\frac{۵\pi}{۶}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۸ اگر تابع $f(x)=\begin{cases}\frac{\sqrt{۶x^۲+(m+۳)x+\frac{m}{۲}}}{|۲x^۳+(m-۳)x^۲+a^۲|} & ;x\neq a\\ \frac{۲\tan b}{\sqrt{-x}} & ;x=a\end{cases}$ در $\mathbb{R}$ پیوسته باشد، کدام مورد می‌تواند مقدار b باشد؟

۱) $\frac{\pi}{۶}$
۲) $\frac{\pi}{۳}$
۳) $\frac{۲\pi}{۳}$
۴) $\frac{۵\pi}{۶}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

۹ برای مقدار مشخص k، تابع $f(x)=\begin{cases}|[-x]-x| & ;[x]\text{ فرد}\\ k-x+[x] & ;[x]\text{ زوج}\end{cases}$ در $x=n$ و $x=-n$ پیوسته است. کدام مورد در خصوص n صحیح است؟ $(k,n\in\mathbb{N})$

۱) برای هیچ مقداری از n، پیوسته نیست.
۲) برای جمیع مقادیر n پیوسته است.
۳) n فرد
۴) n زوج

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۲

۱۰ تابع f با ضابطهٔ $f(x) = (x-۳)\left[\frac{۱}{۳}x - ۱\right]$ روی بازهٔ $(۰, ۹)$ در چند نقطه ناپیوسته است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۵

۱۱ تابع با ضابطهٔ $f(x) = \begin{cases} \frac{x-[x]}{x^۳-x-۶} & ; x \neq ۲ \\ a & ; x = ۲ \end{cases}$، به ازای کدام مقدار a در بازهٔ $[۲, ۳]$ پیوسته است؟

۱) $\frac{۱}{۱۱}$
۲) $\frac{۱}{۹}$
۳) $\frac{۱}{۸}$
۴) $\frac{۱}{۶}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۷

۱۲ اگر تابع $f(x) = \begin{cases} |x-[x]| & ; [x] \text{ زوج} \\ |x-[x-a]| & ; [x] \text{ فرد} \end{cases}$ در $\mathbb{R}$ پیوسته باشد، مجموعه مقادیر $[a]$ شامل چند عضو است؟ $(a < -۱)$

۱) صفر
۲) ۲
۳) ۱
۴) ۳

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۲

۱۳ تابع $f(x) = \begin{cases} \tan\frac{(۲x+۱)\pi}{۴} & ; x \leq ۱ \\ \frac{|x^۲+x-۲|}{a(۱-x)} & ; ۱ < x < ۵ \\ b(x-[-x]) & ; x \geq ۵ \end{cases}$ روی بازهٔ $[۱, ۵]$ پیوسته است، مقدار ab کدام است؟

۱) $-۰/۷$
۲) $-۰/۵$
۳) $۰/۷$
۴) $۰/۵$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۱۴ اگر در ریشه‌ای از معادلهٔ $۵x^۲ - ax + b = ۰$، حد تابع $f(x) = \frac{x^۲+ax+b}{x-۱}$ موجود بوده و تابع f در آن پیوسته نباشد، مقدار $[\frac{b-۲a}{۳}]$ کدام است؟

۱) -۳
۲) -۲
۳) ۱
۴) صفر

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۱۵ به ازای کدام مقدار a، تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases} a+\sin^۲ x & ;\ ۰\le x<\frac{\pi}{۴} \\ \sqrt{۲}\cos ۳x & ;\ \frac{\pi}{۴}\le x\le ۲\pi \end{cases}$، روی بازهٔ $[۰\ ,\ ۲\pi]$ پیوسته است؟

۱) $-\frac{۳}{۲}$ ۲) $-\frac{۱}{۲}$

۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) هیچ مقدار a

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۸

۱۶ به ازای کدام مقدار a، تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases} ۳x-[x] & ;\ x<۲ \\ a & ;\ x=۲ \\ x+۲ & ;\ x>۲ \end{cases}$، در نقطهٔ $x=۲$ پیوسته است؟

۱) ۴ ۲) ۴/۵

۳) ۵ ۴) هیچ مقدار a

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۲

۱۷ با کدام مجموعه مقادیر a، تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases} \frac{۱}{x+a} & ;\ x\ge -۱ \\ x^۲+ax & ;\ x<-۱ \end{cases}$ در $x=-۱$ پیوسته است؟

۱) $\{۱,\sqrt{۲}\}$ ۲) $\{۱+\sqrt{۲},۱-\sqrt{۲}\}$

۳) $\varnothing$ ۴) $\mathbb{R}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۷

۱۸ به ازای کدام مقدار a، تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases} \frac{۲\sin^۲ x-\sin x-۱}{\cos^۲ x} & ;\ x\neq \frac{\pi}{۲} \\ a & ;\ x=\frac{\pi}{۲} \end{cases}$، در $x=\frac{\pi}{۲}$، پیوسته است؟

۱) ۱/۵ ۲) ۱

۳) -۱ ۴) $-۱/۵$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۱۹ به ازای کدام مقدار a تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases} \frac{\cos x-\sqrt{\cos x}}{\sin^۲ x} & ;\ x\neq ۰ \\ a & ;\ x=۰ \end{cases}$ در نقطهٔ $x=۰$ پیوسته است؟

۱) $-\frac{۱}{۴}$ ۲) $-\frac{۱}{۲}$

۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) هیچ مقدار a

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

۲۰ تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\frac{x-1}{x-\sqrt{x}} & ;x>1\\ ax-a+2 & ;x\le 1\end{cases}$، به ازای کدام مقدار a در نقطهٔ $x=1$ پیوسته است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) هر مقدار a
۴) هیچ مقدار a

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۶

۲۱ تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\frac{x-\sqrt{2x}}{2-x} & ;x\neq 2\\ a & ;x=2\end{cases}$ به ازای کدام مقدار a، در نقطهٔ $x=2$ پیوسته است؟

۱) -۲
۲) -۱
۳) $-\frac{1}{2}$
۴) ۱

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۷

۲۲ تعداد نقاط ناپیوستهٔ تابع با ضابطهٔ $f(x)=[x^2]$، در بازهٔ $[-1,2]$ کدام است؟

۱) ۳
۲) ۴
۳) ۵
۴) ۶

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۵

۲۳ تعداد نقاط ناپیوستهٔ نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{3-\sqrt{x+4}}{1+\sqrt[3]{x+1}}+\frac{1}{x+5}$، کدام است؟

۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۳

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۷

۲۴ تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\frac{x}{1-\sqrt{1-x}} & ;x\neq 0\\ a & ;x=0\end{cases}$، به ازای کدام مقدار a در نقطهٔ $x=0$ پیوسته است؟

۱) -2
۲) -1
۳) ۱
۴) ۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۶

۲۵ به ازای مقادیری از a و b، تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases} x[x] & ;|x|<1 \\ ax+b & ;|x|\geq 1 \end{cases}$، بر روی $\mathbb{R}$ پیوسته است. a کدام است؟

۱) $-\frac{۳}{۲}$ ۲) -۱

۳) $-\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۸

۲۶ تعداد نقاط ناپیوستهٔ تابع با ضابطهٔ $f(x)=[x-\frac{۱}{۳}]+[x+\frac{۲}{۳}]$، در بازهٔ $[-\frac{۵}{۳},\frac{۵}{۳}]$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳

۳) ۴ ۴) ۵

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۷

۲۷ تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases} ax+۲^{x-۳} & ;x<۳ \\ a\log_{۲}^{(۱+x)} & ;x\geq ۳ \end{cases}$ در نقطهٔ $x=۳$ پیوسته است. $f(۲)$ کدام است؟

۱) ۲- ۲) $-۱/۵$

۳) ۱ ۴) صفر

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۷

۲۸ تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases} \frac{x^{۲}-۴}{۲|x-۲|} & ;x\neq ۲ \\ ۲ & ;x=۲ \end{cases}$، از نظر پیوستگی در $x=۲$ چگونه است؟

۱) از چپ پیوسته ۲) پیوسته

۳) از چپ ناپیوسته و از راست ناپیوسته ۴) از راست پیوسته

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

۲۹ به ازای کدام مقدار a، تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases} \frac{۸+x^{۳}}{|x+۲|} & ;x\neq -۲ \\ a & ;x=-۲ \end{cases}$، در نقطهٔ $x=-۲$ فقط از چپ پیوسته است؟

۱) ۱۲- ۲) ۶-

۳) ۶ ۴) ۱۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۳۰ به ازای کدام مقدار a تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\frac{۲-\sqrt{۳-x}}{x+۱} & ;x<-۱\\ ax+۱ & ;x\geq -۱\end{cases}$ بر روی $\mathbb{R}$ پیوسته است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$

۳) $\frac{۵}{۴}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۷

۳۱ به ازای کدام مقدار a، تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}x^۲+ax-۵ & ;x>۲\\ ax-۱ & ;x\leq ۲\end{cases}$ بر روی مجموعهٔ اعداد حقیقی پیوسته است؟

۱) هر مقدار حقیقی a ۲) هیچ مقدار a

۳) فقط $a=-۲$ ۴) فقط $a=۲$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۱

۳۲ تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}[x]+[-x] & ;x\notin\mathbb{Z}\\ a & ;x\in\mathbb{Z}\end{cases}$، به ازای کدام مقدار a روی مجموعهٔ اعداد حقیقی پیوسته است؟ (نماد $[\ ]$ به مفهوم جزء صحیح است)

۱) -۱ ۲) ۱

۳) ۰ ۴) همواره ناپیوسته

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۶

۳۳ تعداد نقاط ناپیوستگی تابع $f(x)=[x]\sin\pi x\ ;\ |x|\leq ۲$، کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۲

۳) ۱ ۴) صفر

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

۳۴ فرض کنید $f(x)=\begin{cases}(x-۱)[x] & ;|x-۱|<۱\\ x^۲+ax+b & ;|x-۱|\geq ۱\end{cases}$، یک تابع همواره پیوسته باشد. مقدار a، کدام است؟

۱) $-\frac{۳}{۲}$ ۲) -۱

۳) ۱ ۴) $\frac{۵}{۲}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۹

۳۵ تعداد نقاط ناپیوستگی تابع با ضابطهٔ $f(x)=\sin(x-[x])\pi$ روی بازهٔ $(۲,۶)$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱

۳) ۲ ۴) ۳

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۴

۳۶ تابع با ضابطهٔ $f(x)=[x^۲-۳]$ روی بازهٔ $[۲, ۲+k)$ پیوسته است، بیشترین مقدار k کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}-۱$
۲) $\sqrt{۵}-۲$
۳) $\sqrt{۳}-۱$
۴) $\sqrt{۲}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۸

۳۷ اگر تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases} ax+b & ; |x|\geq ۱ \\ x[x] & ; |x|<۱ \end{cases}$ روی $\mathbb{R}$ پیوسته باشد، نمودار این تابع خط $x=۳$ را با کدام عرض قطع می‌کند؟

۱) -۲
۲) -۱
۳) ۱
۴) ۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۰

۳۸ به ازای کدام مقدار a، تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases} \frac{۳x-۶}{x-\sqrt{x+۲}} & ; x>۲ \\ ax-۱ & ; x\leq ۲ \end{cases}$، بر روی مجموعهٔ اعداد حقیقی، پیوسته است؟

۱) ۱/۵
۲) ۲
۳) ۲/۵
۴) ۳

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۸

۳۹ به ازای کدام مقدار a تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases} \frac{\sqrt[۳]{۱-\sqrt{x}}}{x-۱} & ; x\neq ۱ \\ a & ; x=۱ \end{cases}$، در نقطهٔ $x=۱$ پیوسته است؟

۱) $\frac{-۱}{۲}$
۲) $\frac{۱}{۶}$
۳) $\frac{۱}{۳}$
۴) هیچ مقدار a

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۲

۴۰ تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases} \frac{x^۲-۱}{x+۱} & ; |x|>۱ \\ ۲x & ; |x|\leq ۱ \end{cases}$ از نظر پیوستگی در دو نقطه به طول‌های ۱ و ۱- چگونه است؟

۱) در ۱- ناپیوسته، در ۱ ناپیوسته
۲) در ۱- ناپیوسته، در ۱ پیوسته
۳) در ۱- پیوسته، در ۱ پیوسته
۴) در ۱- پیوسته، در ۱ ناپیوسته

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۸

۴۱ تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\frac{|x^۲+x-۲|}{x-۱} & ;x\neq ۱\\ a & ;x=۱\end{cases}$ به ازای کدام مقدار a، در $x=۱$ پیوسته است؟

۱) هر مقدار a
۲) ۳-
۳) ۳
۴) هیچ مقدار a

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

۴۲ اگر $f(x)=[x]+[-x]$ و $g(x)=\begin{cases}f(x) & ;x\notin\mathbb{Z}\\ f(x)-۱ & ;x\in\mathbb{Z}\end{cases}$، آنگاه تعداد نقاط ناپیوستهٔ تابع g روی بازهٔ $[-۴,۴]$، کدام است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) صفر

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۲

۴۳ اگر تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}ax+b & ;x>۲\\ x^۲+bx-۱ & ;x<۲\end{cases}$ با شرط $f(۲)=۵$ بر روی مجموعه اعداد حقیقی پیوسته باشد، a کدام است؟

۱) ۱-
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۳

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۱

۴۴ تابع با ضابطهٔ $f(x)=(-۱)^{[x]}\sin\frac{\pi}{۲}x$، در نقاط $x\in\mathbb{Z}$ از نظر پیوستگی چگونه است؟

۱) فقط در اعداد زوج پیوسته
۲) فقط در اعداد فرد پیوسته
۳) همواره ناپیوسته
۴) همواره پیوسته

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۳

۴۵ به ازای کدام مقدار a، تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\sin\frac{\pi}{x} & ;۱\le x\le ۶\\ a+\cos^۲\frac{\pi x}{۳۶} & ;x>۶\end{cases}$ بر روی مجموعه اعداد حقیقی بزرگ‌تر از ۱، پیوسته است؟

۱) $-\frac{۱}{۲}$
۲) $-\frac{۱}{۴}$
۳) $\frac{۱}{۴}$
۴) $\frac{۱}{۲}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۴

۴۶ اگر تابع $f(x)=\begin{cases}\sqrt{ax+۳} & ; x<۱\\ x^۲+ax & ; x\geq ۱\end{cases}$ در نقطهٔ $x=۱$ پیوسته باشد، $f(-\frac{۳}{۴})$ کدام است؟

۱) ۰/۵
۲) ۱/۲۵
۳) ۱/۵
۴) ۲/۵

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۷

۴۷ تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}a\sin ۲x & ; \frac{\pi}{۴}\leq x<\frac{۳\pi}{۴}\\ \cos(x+\frac{\pi}{۴}) & ; \frac{۳\pi}{۴}\leq x<۲\pi\end{cases}$، در $x=\frac{۳\pi}{۴}$ پیوسته است. مقدار a کدام است؟

۱) -۱
۲) صفر
۳) $-\frac{۱}{۲}$
۴) ۱

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۰

پاسخ Homework

۱ گزینه ۱

تابع $[x^۲ - ax]$ روی $\mathbb{R}$ ناپیوسته است، برای آنکه تابع $f(x)$ روی $\mathbb{R}$ پیوسته باشد باید $b = ۰$ شود. در این صورت $f(x) = -۲a$ خواهد بود.

$$\frac{a}{f(b)} = \frac{a}{f(۰)} = \frac{a}{-۲a} = -\frac{۱}{۲}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

۲ گزینه ۳

در نقاط صحیح حد تابع از ضابطه اول و مقدار تابع از ضابطه دوم به‌دست می‌آید مثلاً در نقطه $x = ۱$ بررسی می‌کنیم.

$$\lim_{x\to ۱^+} f(x) = (۱ - a) \times ۱ + (۳a^۲ - ۱) \times (-۲)$$
$$= -۶a^۲ - a + ۳$$
$$\lim_{x\to ۱^-} f(x) = (۱ - a) \times ۰ + (۳a^۲ - ۱) \times (-۱)$$
$$= -۳a^۲ + ۱$$

پس لازم است:

$$-۶a^۲ - a + ۳ = -۳a^۲ + ۱$$
$$\Rightarrow ۳a^۲ + a - ۲ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} a = -۱ \\ a = \frac{۲}{۳} \end{cases}$$

اگر $a = -۱$ باشد:

$$b\sin(\frac{\pi}{-۱}) = -۳a^۲ + ۱ \Rightarrow ۰ = -۲ \text{ غ‌ق‌ق}$$

اگر $a = \frac{۲}{۳}$ باشد:

$$b\sin(\frac{\pi}{\frac{۲}{۳}}) = -۳a^۲ + ۱ \Rightarrow b \times (-۱) = -۳ \times \frac{۴}{۹} + ۱$$
$$\Rightarrow -b = -\frac{۱}{۳} \Rightarrow b = \frac{۱}{۳}$$

بنابراین:

$$\frac{a}{b} = \frac{\frac{۲}{۳}}{\frac{۱}{۳}} = ۲$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۳

۳ گزینه ۱

بایستی تابع در $x = ۲$ پیوسته باشد.

$$f(۲) = ۴ + b \ , \ \lim_{x \to ۲^-} f(x) = \lim_{x \to ۲^-} (۲x + b) = ۴ + b$$
$$\lim_{x \to ۲^+} \frac{x^۳ - ۳x^۲ + ۴}{x - ۲} = \lim_{x \to ۲^+} \frac{(x - ۲)(x^۲ - x - ۲)}{x - ۲} = \lim_{x \to ۲^+} (x^۲ - x - ۲) = ۰$$
$$\Rightarrow ۴ + b = ۰ \Rightarrow b = -۴$$

برای تجزیهٔ $x^۳ - ۳x^۲ + ۴$ از تقسیم بر $x - ۲$ استفاده شده است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۹

۴ گزینه ۲

شرط پیوستگی در نقطهٔ a:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$
$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \frac{۱}{a} \\ f(a) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = ۱ - \frac{a}{۴} \end{cases} \Rightarrow \frac{۱}{a} = ۱ - \frac{a}{۴} \Rightarrow \frac{۱}{a} = \frac{۴ - a}{۴}$$
$$\Rightarrow ۴ = ۴a - a^۲ \Rightarrow a^۲ - ۴a + ۴ = ۰ \Rightarrow (a - ۲)^۲ = ۰ \Rightarrow a = ۲$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۵

۵ گزینه ۳

$$|x^۳| = x^۲ \Rightarrow x^۲|x| = x^۲ \Rightarrow x^۲(|x| - ۱) = ۰ \Rightarrow x = ۰, ۱, -۱$$
$$f(x) = \begin{cases} |x| + [-x] & ; x \in (-۱, ۱) - \{۰\} \\ ۱ + \cos \pi x & ; x = ۰, ۱, -۱ \\ [x^۲] - [x] & ; x < -۱ \text{ یا } x > ۱ \end{cases}$$

ضابطهٔ سوم به‌ازای تمام xهایی که در آن $x^۲$ صحیح ولی x غیرصحیح می‌شود، ناپیوسته است. همچنین در همهٔ xهای صحیح منفی ناپیوسته است. پس تابع f در بی‌شمار نقطه ناپیوسته است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۱

۶ گزینه ۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۰

گام اول

الف) شرط پیوستگی در نقطه‌ای به طول $x = ۰$ عبارت است از:

$$\lim_{x\to ۰^+} f(x) = \lim_{x\to ۰^-} f(x) = f(۰)$$

ب) در این تست $f(۰) = a$ است، پس برای اینکه تابع پیوسته باشد باید $\lim_{x\to ۰} \sin\frac{\pi}{x} = a$ باشد.

گام دوم

با به دست آوردن حد تابع $f(x)$ وقتی $x \to ۰$، شرط پیوستگی را بررسی می‌کنیم:

$$\lim_{x\to ۰} f(x) = \lim_{x\to ۰} \sin\frac{\pi}{x} \to \text{وجود ندارد}$$

بنابراین به ازای هیچ مقدار a تابع $f(x)$ در $x = ۰$ پیوسته نیست.

۷ گزینه ۱

چون در پیوستگی، باید مقدار حد چپ و راست با هم برابر باشد پس زیر رادیکال باید ریشه مضاعف داشته باشیم:

$$\sqrt{۳x^۲ + (m-۱)x + (m-۴)} = \sqrt{(x+۱)(۳x+m-۴)} \Rightarrow m - ۴ = ۳ \Rightarrow m = ۷$$

$$m = ۷ : |x^۳ + ((m-۷)x + a)^۲| = |x^۳ + a^۲|$$

$x = a$ ریشه صورت و مخرج است، پس: $a = -۱$

$$\lim_{x\to -۱} \frac{\sqrt{۳(x+۱)^۲}}{|x^۳+۱|} = \lim_{x\to -۱} \frac{\sqrt{۳}|x+۱|}{|x+۱|(x^۲-x+۱)} = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

$$x = -۱ : f(-۱) = \frac{۲\sin b}{۳\sqrt{-۱+۲}} = \frac{۲\sin b}{۳} = \frac{\sqrt{۳}}{۳} \Rightarrow \sin b = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow b = \frac{\pi}{۳}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۸ گزینه ۱

a باید ریشهٔ مضاعف زیر رادیکال باشد تا پیوستگی برقرار شود. ازطرفی ریشهٔ مخرج هم باشد.

$$\Delta = (m+۳)^۲ - ۴(۶)(\frac{m}{۲}) = m^۲ + ۶m + ۹ - ۱۲m = m^۲ - ۶m + ۹ = ۰$$

$$\Rightarrow (m-۳)^۲ = ۰ \Rightarrow m = ۳$$

$$x = a = \frac{-(m+۳)}{۲ \times ۶} = -\frac{۱}{۲}$$

$$\lim_{x \to -\frac{۱}{۲}} \frac{\sqrt{۶(x+\frac{۱}{۲})^۲}}{|۲x^۳ + \frac{۱}{۴}|} = \lim_{x \to -\frac{۱}{۲}} \frac{\sqrt{۶}|x+\frac{۱}{۲}|}{۲|x^۳ + \frac{۱}{۸}|}$$

$$= \lim_{x \to -\frac{۱}{۲}} \frac{\sqrt{۶}|x+\frac{۱}{۲}|}{۲|x+\frac{۱}{۲}||x^۲ + \frac{۱}{۴} - \frac{x}{۲}|} = \frac{\sqrt{۶}}{\frac{۳}{۲}} = \frac{۲\sqrt{۶}}{۳}$$

$$f(-\frac{۱}{۲}) = \frac{۲\tan b}{\sqrt{\frac{۱}{۲}}} = \frac{۲\sqrt{۶}}{۳} \Rightarrow \sqrt{۲}\tan b = \frac{\sqrt{۶}}{۳} \Rightarrow \tan b = \frac{\sqrt{۳}}{۳} \Rightarrow b = \frac{\pi}{۶}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

۹ گزینه ۴

اگر تابع را در $x = ۳$ یعنی به ازای $n = ۳$ بررسی کنیم:

$$\lim_{x \to ۳^+} f(x) = \lim_{x \to ۳^+} |[-x] - x| = |[-(۳^+)] - ۳| = ۷$$
$$f(۳) = |[-۳] - ۳| = ۶$$

درنتیجه قطعاً در $x = ۳$ ناپیوسته است و n نمی‌تواند فرد باشد.

و اگر در $x = ۲$ و $x = -۲$ بررسی کنیم:

$$\begin{cases} \lim_{x \to ۲^+} f(x) = k - ۲ + ۲ = k \\ f(۲) = k \\ \lim_{x \to ۲^-} f(x) = |[-۲^-] - ۲| = ۴ \end{cases} \Rightarrow k = ۴$$

$$\begin{cases} \lim_{x \to -۲^+} f(x) = k + ۲ - ۲ = k \\ f(-۲) = k \\ \lim_{x \to -۲^-} f(x) = |[-(-۲^-)] + ۲| = ۴ \end{cases} \Rightarrow k = ۴$$

پس در n زوج پیوسته است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۲

۱۰ گزینه ۱

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۵

گام اول

الف) نقاط مشکوک به ناپیوستگی برای تابع $f(x)$ نقاطی هستند که در آن عبارت $\frac{۱}{۳}x - ۱$ برابر یک عدد صحیح شود. (اصولاً نقاطی که در آن عبارت داخل جزء صحیح برابر یک عدد صحیح شود، نقاط ناپیوستگی تابع جزء صحیح محسوب می شوند.)

ب) $\frac{۱}{۳}x - ۱$ را برابر عدد صحیح K فرض کرده و مشخص می کنیم در چه نقاطی از بازهٔ $(۰,۹)$ برابر عدد صحیح می شود. سپس در آن نقاط پیوستگی تابع $f(x)$ را مورد بررسی قرار می دهیم.

گام دوم

$$\frac{۱}{۳}x - ۱ = K \Rightarrow \frac{۱}{۳}x = K + ۱ \Rightarrow x = ۳K + ۳ \ , \ x \in (۰,۹)$$

x یک عدد مضرب ۳ به دست می آید. در بازهٔ $(۰,۹)$ دو عدد مضرب ۳ وجود دارد، $x = ۳$ و $x = ۶$. پیوستگی تابع را در این نقاط بررسی می کنیم:

بررسی پیوستگی تابع در $x = ۳$:

تابع $f(x)$ قطعاً در $x = ۳$ پیوسته است. زیرا در ضابطهٔ تابع عامل صفر کننده $(x - ۳)$ وجود دارد که باعث می شود بدون توجه به مقادیری که تابع جزء صحیح به خود می گیرد، حد راست و حد چپ و مقدار تابع در این نقطه برابر صفر شود. در نتیجه تابع در این نقطه پیوسته است.

بررسی پیوستگی تابع در $x = ۶$:

$$\lim_{x \to ۶^-} f(x) = \lim_{x \to ۶^-} (x - ۳)[\frac{۱}{۳}x - ۱] = (۶ - ۳)[۱^-] = ۳ \times ۰ = ۰$$

$$\lim_{x \to ۶^+} f(x) = \lim_{x \to ۶^+} (x - ۳)[\frac{۱}{۳}x - ۱] = (۶ - ۳)[۱^+] = ۳ \times ۱ = ۳$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to ۶^-} f(x) = \lim_{x \to ۶^+} f(x)$$

تابع در $x = ۶$ ناپیوسته است. بنابراین تابع $f(x)$ در بازهٔ $(۰,۹)$ تنها در ۱ نقطه ناپیوسته است.

۱۱ گزینه ۱

راه‌حل اول:

$$\lim_{x\to ۲^+} f(x) = \lim_{x\to ۲^+} \frac{x-[x]}{x^۳-x-۶} = \lim_{x\to ۲^+} \frac{x-۲}{x^۳-x-۶} = \frac{۰}{۰}$$

$$\lim_{x\to ۲^+} \frac{x-۲}{x^۳-x-۶} = \lim_{x\to ۲^+} \frac{x-۲}{(x^۲+۲x+۳)(x-۲)}$$

$$= \lim_{x\to ۲^+} \frac{۱}{x^۲+۲x+۳} = \frac{۱}{۱۱}$$

$$f(۲) = a \Rightarrow a = \frac{۱}{۱۱}$$

راه‌حل دوم:

$$\lim_{x\to ۲^+} f(x) = \lim_{x\to ۲^+} \frac{x-[x]}{x^۳-x-۶} = \lim_{x\to ۲^+} \frac{x-۲}{x^۳-x-۶}$$

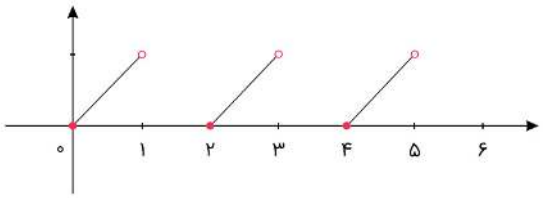
$$\xrightarrow{\text{HOP}} \lim_{x\to ۲^+} \frac{۱}{۳x^۲-۱} = \frac{۱}{۱۲-۱} = \frac{۱}{۱۱}$$

$$f(۲) = a \Rightarrow a = \frac{۱}{۱۱}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۷

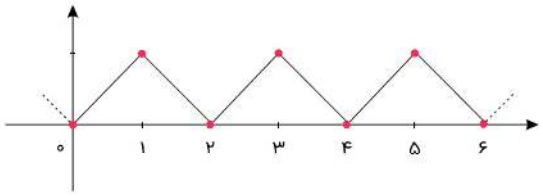
۱۲ گزینه ۱

بخشی از نمودار تابع $x - [x]$ وقتی که $[x]$ زوج باشد، به صورت زیر است:



$$y = |x - [x]| \quad , \quad [x] = ۲k$$

تابع را به صورت $f(x) = \begin{cases} |x - [x]| & ; \ [x] \text{ زوج} \\ |x - a - [x - a] + a| & ; \ [x] \text{ فرد} \end{cases}$ در نظر می‌گیریم. اگر a مثبت باشد، شکل بالا را a واحد به سمت بالا و راست منتقل می‌کنیم، پس پیوسته نمی‌شود. اما اگر $a < ۰$ باشد، با انتقال، نمودار به‌صورت زیر پیوسته می‌شود:



برای پیوستگی در $\mathbb{R}$ لازم است ضابطهٔ دوم یعنی $|x - [x - a]|$ به شکل زیر شود؛ یعنی شیب آن منفی شود و a زوج منفی باشد که امکان‌پذیر نیست پس a وجود ندارد.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۲

۱۳ گزینه ۱

تابع در $x = ۱$ پیوستگی راست دارد:

$$f(۱) = \tan\frac{۳\pi}{۴} = -۱$$

$$\lim_{x\to ۱^+} f(x) = \lim_{x\to ۱^+} \frac{|x^۲ + x - ۲|}{a(۱ - x)} = \lim_{x\to ۱^+} \frac{|(x-۱)(x+۲)|}{a(۱-x)}$$

$$= \lim_{x\to ۱^-} \frac{(x-۱)(x+۲)}{-a(x-۱)} = \lim_{x\to ۱^+} \frac{x+۲}{-a} = \frac{-۳}{a}$$

$$\frac{-۳}{a} = -۱ \Rightarrow a = ۳$$

در $x = ۵$ پیوستگی چپ دارد:

$$f(۵) = b(۵ - [-۵]) = ۱۰b$$

$$\lim_{x\to ۵^-} f(x) = \lim_{x\to ۵^-} \frac{|x^۲ + x - ۲|}{a(۱-x)} = \frac{۲۸}{-۴a} = \frac{-۷}{a}$$

$$f(۵) = \lim_{x\to ۵^-} f(x) \Rightarrow \frac{-۷}{a} = ۱۰b \Rightarrow ab = \frac{-۷}{۱۰} = -۰/۷$$

توجه: در حل سؤال بالا نیازی به محاسبه مقدار a نبود.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۱۴ گزینه ۱

تابع f فقط در $x = ۱$ ناپیوسته است:

$$\lim_{x\to ۱} \frac{x^۲ + ax + b}{x - ۱} = \frac{۰}{۰} \Rightarrow ۱ + a + b = ۰ \Rightarrow a + b = -۱$$

$$۵x^۲ - ax + b = ۰ \xrightarrow{x=۱} ۵ - a + b = ۰ \Rightarrow -a + b = -۵$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + b = -۱ \\ -a + b = -۵ \end{cases} \xrightarrow{+} ۲b = -۶ \Rightarrow b = -۳, \ a = ۲$$

$$[\frac{b - ۲a}{۳}] = [\frac{-۳ - ۴}{۳}] = [\frac{-۷}{۳}] = -۳$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۱۵ گزینه ۱

کافی است تابع در $x = \frac{\pi}{۴}$ پیوسته باشد.

$$f(\frac{\pi}{۴}) = \lim_{x \to \frac{\pi}{۴}^+} f(x) = \sqrt{۲}\cos\frac{۳\pi}{۴} = \sqrt{۲}\cos(\pi - \frac{\pi}{۴}) = \sqrt{۲}(-\frac{\sqrt{۲}}{۲}) = -۱$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{۴}^-} f(x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{۴}^-} (a + \sin^۲ x) = a + \frac{۱}{۲}$$

چون f در $x = \frac{\pi}{۴}$ پیوسته است، پس:

$$a + \frac{۱}{۲} = -۱ \Rightarrow a = -\frac{۳}{۲}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۸

۱۶ گزینه ۴

باتوجه‌به ضابطهٔ تابع f، می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to ۲^-} f(x) = \lim\limits_{x \to ۲^-} (۳x - [x]) = ۶ - [۲^-] = ۶ - ۱ = ۵ \\ f(۲) = a \\ \lim\limits_{x \to ۲^+} f(x) = \lim\limits_{x \to ۲^+} (x + ۲) = ۴ \end{cases}$$

برای آنکه تابع f در $x = ۲$ پیوسته باشد، باید $\lim\limits_{x \to ۲^+} f(x) = f(۲) = \lim\limits_{x \to ۲^-} f(x)$، پس باتوجه‌به مقادیر به‌دست‌آمده در بالا، ازآنجاکه $\lim\limits_{x \to ۲^-} f(x) = \lim\limits_{x \to ۲^+} f(x)$، بنابراین تابع f در $x = ۲$، به ازای هیچ مقداری برای a پیوسته نیست.

تذکر:

$$a \in \mathbb{Z} \Rightarrow \begin{cases} [a^-] = a - ۱ \\ [a^+] = a \end{cases}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۲

۱۷ گزینه ۳

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۷

گام اول

تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x = x_0$ پیوسته است هرگاه داشته باشیم:

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

گام دوم

برای بررسی شرط پیوستگی تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x = -1$، ابتدا لازم است حد چپ و راست تابع را در این نقطه به دست آوریم.

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} \frac{1}{x+a} = \frac{1}{-1+a}$$

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} x^2 + ax = 1 - a$$

$$f(-1) = \frac{1}{-1+a}$$

باتوجه‌به گام اول داریم:

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^-} f(x) = f(-1) \Rightarrow \frac{1}{-1+a} = 1 - a$$

$$\Rightarrow -(1-a)(1-a) = 1 \Rightarrow -(1-a)^2 = 1 \Rightarrow (1-a)^2 = -1 \quad (*)$$

معادلهٔ $(*)$ فاقد ریشهٔ حقیقی است، پس مجموعه مقادیر a برابر $\varnothing$ می‌شود.

۱۸ گزینه ۴

تابع در $x = \frac{\pi}{2}$ پیوسته است، پس:

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} f(x) = f(\frac{\pi}{2}) = a$$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} f(x) = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{2\sin^2 x - \sin x - 1}{\cos^2 x} = \frac{0}{0} \text{ مبهم}$$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{2\sin^2 x - \sin x - 1}{\cos^2 x} = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{(2\sin x + 1)(\sin x - 1)}{(1 - \sin^2 x)}$$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{(2\sin x + 1)\cancel{(\sin x - 1)}}{-\cancel{(\sin x - 1)}(\sin x + 1)} = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} (-\frac{2\sin x + 1}{\sin x + 1}) = -\frac{3}{2}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۱۹ گزینه ۱

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\cos x-\sqrt{\cos x}}{\sin^{۲}x} & ;x\neq ۰\\ a & ;x=۰\end{cases}$$

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\cos x-\sqrt{\cos x}}{\sin^{۲}x}=\lim_{x\to ۰}\frac{\sqrt{\cos x}(\sqrt{\cos x}-۱)}{۱-\cos^{۲}x}$$

$$=\lim_{x\to ۰}\frac{\sqrt{\cos x}(\sqrt{\cos x}-۱)}{(۱-\cos x)(۱+\cos x)}=\lim_{x\to ۰}\frac{\sqrt{\cos x}(\sqrt{\cos x}-۱)}{(۱-\sqrt{\cos x})(۱+\sqrt{\cos x})(۱+\cos x)}=-\frac{۱}{۴}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

۲۰ گزینه ۳

شرط پیوستگی تابع در نقطهٔ $x=۱$ به صورت زیر است:

$$\lim_{x\to ۱^{+}}f(x)=\lim_{x\to ۱^{-}}f(x)=f(۱)$$

بنابراین داریم:

$$f(۱)=a-a+۲=۲$$

$$\lim_{x\to ۱^{-}}f(x)=\lim_{x\to ۱^{-}}(ax-a+۲)=a-a+۲=۲$$

$$\lim_{x\to ۱^{+}}f(x)=\lim_{x\to ۱^{+}}\frac{x-۱}{x-\sqrt{x}}=\frac{۰}{۰}$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to ۱^{+}}\frac{x-۱}{\sqrt{x}\,(\sqrt{x}-۱)}=\lim_{x\to ۱^{+}}\frac{(\sqrt{x}-۱)(\sqrt{x}+۱)}{(\sqrt{x})(\sqrt{x}-۱)}=\frac{۲}{۱}=۲$$

پس به ازای هر مقدار a، تابع در $x=۱$ پیوسته است.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۶

۲۱ گزینه ۳

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۷

گام اول

تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x = x_۰$ پیوسته است هرگاه حد تابع و مقدار تابع در این نقطه باهم برابر باشد؛ به عبارت دیگر داشته باشیم:

$$\lim_{x \to x_۰} f(x) = f(x_۰)$$

گام دوم

ابتدا مقدار حد تابع را در نقطهٔ $x = ۲$ محاسبه می‌کنیم:

$$\lim_{x \to ۲} f(x) = \lim_{x \to ۲} \frac{x - \sqrt{۲x}}{۲ - x} = \frac{۰}{۰}$$

برای رفع ابهام، صورت و مخرج کسر را در مزدوج صورت، ضرب می‌کنیم. داریم:

$$\lim_{x \to ۲} \frac{x - \sqrt{۲x}}{۲ - x} \times \frac{x + \sqrt{۲x}}{x + \sqrt{۲x}} = \lim_{x \to ۲} \frac{x^۲ - ۲x}{(۲ - x)(x + \sqrt{۲x})} = \lim_{x \to ۲} \frac{x(x - ۲)}{(۲ - x)(x + \sqrt{۲x})}$$

$$= \lim_{x \to ۲} \frac{-x}{x + \sqrt{۲x}} = \frac{-۲}{۲ + ۲} = \frac{-۲}{۴} = -\frac{۱}{۲}$$

باتوجه‌به گام اول، شرط پیوستگی تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x = ۲$ به‌صورت زیر است:

$$\lim_{x \to ۲} f(x) = f(۲) \Rightarrow a = -\frac{۱}{۲}$$

۲۲ گزینه ۳

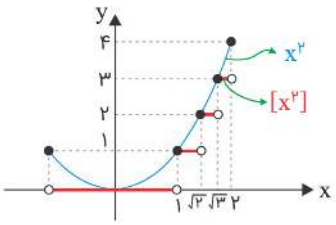
کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۵

گام اول

تابع $y = [f(x)]$ در نقاطی که $f(x)$ مقداری صحیح باشد، ناپیوسته است.

گام دوم

بهترین راه برای تشخیص نقاط ناپیوستگی تابع با ضابطهٔ $f(x) = [x^۲]$ در بازهٔ $[-۱, ۲]$، رسم نمودار این تابع در بازهٔ موردنظر است:



باتوجه‌به نمودار، تابع $f(x)$ در نقاط $x = ۱$، $x = \sqrt{۲}$، $x = \sqrt{۳}$، $x = ۲$ و $x = -۱$ ناپیوسته است؛ بنابراین تابع در بازهٔ $[-۱, ۲]$ دارای پنج نقطهٔ ناپیوستگی است.

۲۳ گزینه ۲

$$\xrightarrow{\text{دامنه}} \begin{cases} x + ۴ \geq ۰ \Rightarrow x \geq -۴ \\ ۱ + \sqrt[۳]{x+۱} \neq ۰ \Rightarrow x \neq -۲ \\ x + ۵ \neq ۰ \Rightarrow x \neq -۵ \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{اشتراک}} \text{دامنه} = [-۴, +\infty) - \{-۲\}$$

بنابراین تنها در $x = -۲$ ناپیوسته است.

پی‌نوشت: اگر بخواهیم با تعریف پیوستگی در نقطه پاسخ دهیم، باتوجه‌به اینکه در کتاب درسی نقاط ابتدا و انتهای بازهٔ بسته با تعریف پیوستگی در نقطه، ناپیوسته محسوب می‌شوند، دو نقطهٔ ناپیوستگی داریم.

کلید سنجش ۱ نقطه است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۷

۲۴ گزینه ۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۶

گام اول

تابع در $x = ۰$ پیوسته است؛ بنابراین $\lim\limits_{x\to ۰} f(x) = f(۰)$ است.

گام دوم

$$f(۰) = \lim_{x\to ۰} \frac{x}{۱-\sqrt{۱-x}} = \lim_{x\to ۰} \frac{x}{۱-\sqrt{۱-x}} \times \frac{۱+\sqrt{۱-x}}{۱+\sqrt{۱-x}}$$

$$= \lim_{x\to ۰} \frac{x(۱+\sqrt{۱-x})}{(۱-\sqrt{۱-x})(۱+\sqrt{۱-x})} = \lim_{x\to ۰} \frac{x(۱+\sqrt{۱-x})}{۱-۱+x}$$

$$= \lim_{x\to ۰} \frac{x(۱+\sqrt{۱-x})}{x} \Rightarrow a = ۱+\sqrt{۱-۰} = ۱+۱ = ۲ \Rightarrow a = ۲$$

۲۵ گزینه ۳

تابع f به‌صورت زیر خلاصه می‌شود:

$$f(x) = \begin{cases} x[x] & ; -۱ < x < ۱ \\ ax+b & ; (x \geq ۱) \text{ یا } (x \leq -۱) \end{cases}$$

تابع $x[x]$ در فاصلهٔ $(-۱, ۱)$ و تابع $ax+b$ در هر فاصله‌ای پیوسته است، پس فقط کافی است که تابع f در ۱ و ۱- پیوسته باشد.

$$f(۱) = \lim_{x\to ۱^-} f(x) = \lim_{x\to ۱^+} (ax+b) = a+b$$

$$\lim_{x\to ۱^-} f(x) = \lim_{x\to ۱^-} (x[x]) = ۰$$

f در $x = ۱$ پیوسته است، پس $a+b = ۰$ یا $a = -b$ است. ازطرفی f در ۱- پیوسته است؛ پس:

$$f(-۱) = \lim_{x\to (-۱)^-} f(x) = \lim_{x\to (-۱)^-} (ax+b) = -a+b$$

$$\lim_{x\to (-۱)^+} f(x) = \lim_{x\to (-۱)^+} (x[x]) = (-۱)\left[(-۱)^+\right] = (-۱)(-۱) = ۱$$

$$\Rightarrow -a+b = ۱ \xrightarrow{b=-a} -a-a = ۱ \Rightarrow a = -\frac{۱}{۲}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۸

۲۶ گزینه ۲

$$f(x)=\left[x-\frac{۱}{۳}\right]+\left[x+\frac{۲}{۳}\right]=\left[x-\frac{۱}{۳}\right]+\left[x-\frac{۱}{۳}+۱\right]$$
$$=\left[x-\frac{۱}{۳}\right]+\left[x-\frac{۱}{۳}\right]+۱=۲\left[x-\frac{۱}{۳}\right]+۱$$

عبارت خطی $x-\frac{۱}{۳}$ در نقاط صحیح کنندهٔ $\left\{\frac{۴}{۳},\frac{۱}{۳},\frac{-۲}{۳}\right\}$ از بازهٔ $\left(-\frac{۵}{۳},\frac{۵}{۳}\right)$ ناپیوسته است.

$$\lim_{x\to(-\frac{۵}{۳})^+}\left(۲\left[x-\frac{۱}{۳}\right]+۱\right)=۲\left[(-۲)^+\right]+۱=۲(-۲)+۱=-۳$$
$$f\left(-\frac{۵}{۳}\right)=-۳$$
$$\lim_{x\to(\frac{۵}{۳})^-}\left(۲\left[x-\frac{۱}{۳}\right]+۱\right)=۲\left[(\frac{۴}{۳})^-\right]+۱=۲\times۱+۱=۳\quad,\quad f\left(\frac{۵}{۳}\right)=۳$$

پس f در $-\frac{۵}{۳}$ پیوستگی راست و در $\frac{۵}{۳}$ پیوستگی چپ دارد. درنهایت در سه نقطه ناپیوسته است.

پی‌نوشت: اگر بخواهیم با تعریف پیوستگی در نقطه پاسخ دهیم، باتوجه‌به اینکه در کتاب درسی نقاط ابتدا و انتهای بازهٔ بسته با تعریف پیوستگی در نقطه، ناپیوسته محسوب می‌شوند، ۵ نقطهٔ ناپیوستگی داریم.
کلید سنجش ۳ نقطه است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۷

۲۷ گزینه ۲

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to۳^+}f(x)=a\log_{۲}^{۴}=۲a\\ \lim\limits_{x\to۳^-}f(x)=۳a+۱\end{cases}\Rightarrow ۳a+۱=۲a\Rightarrow a=-۱$$

$$x<۳:\ f(x)=ax+۲^{x-۳}=-x+۲^{x-۳}$$

$$f(۲)=-۲+۲^{-۱}=-۲+\frac{۱}{۲}=-۱/۵$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۷

۲۸ گزینه ۴

$$\text{حد راست}: \lim_{x\to ۲^+} f(x) = \lim_{x\to ۲^+} \frac{x^۲-۴}{۲|x-۲|} = \lim_{x\to ۲^-} \frac{(x-۲)(x+۲)}{۲(x-۲)} = \frac{۴}{۲} = ۲$$

$$\text{حد چپ} = \lim_{x\to ۲^-} f(x) = \lim_{x\to ۲^-} \frac{x^۲-۴}{-۲(x-۲)} = \lim_{x\to ۲^-} \frac{x+۲}{-۲} = -۲$$

$$f(۲) = ۲$$

$$\Rightarrow f(۲) = \lim_{x\to ۲^+} f(x)$$

پس تابع فقط از راست پیوسته است.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

۲۹ گزینه ۱

$$\text{مقدار تابع}: f(-۲) = a$$

$$\lim_{x\to(-۲)^-} f(x) = \lim_{x\to(-۲)^-} \frac{۸+x^۳}{|x+۲|} = \lim_{x\to(-۲)^-} \frac{(x+۲)(x^۲-۲x+۴)}{-(x+۲)}$$

$$= -\lim_{x\to(-۲)^-} (x^۲-۲x+۴) = -(۴+۴+۴) = -۱۲$$

برای پیوستگی چپ، باید $a = -۱۲$ باشد.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۳۰ گزینه ۲

برای اینکه تابع در $\mathbb{R}$ پیوسته باشد، باید در $x = -۱$ که مرز ضابطه های تابع است نیز پیوسته باشد. پس پیوستگی تابع را در نقطه ای به طول $x = -۱$ بررسی می کنیم. حد چپ تابع در نقطه ای به طول $x = -۱$ برابر $\frac{۰}{۰}$ و مبهم است. بنابراین برای به دست آوردن حد چپ صورت و مخرج را در مزدوج صورت ضرب کرده و با ساده کردن آن حاصل حد را به دست می آوریم.

$$\lim_{x\to(-۱)^-} f(x) = \lim_{x\to(-۱)^-} \frac{۲-\sqrt{۳-x}}{x+۱} \times \frac{۲+\sqrt{۳-x}}{۲+\sqrt{۳-x}}$$

$$= \lim_{x\to(-۱)^-} \frac{(۴-۳+x)}{(x+۱)(۲+\sqrt{۳-x})} = \lim_{x\to(-۱)^-} \frac{(x+۱)}{(x+۱)(۲+\sqrt{۳-x})}$$

$$= \frac{۱}{۲+\sqrt{۴}} = \frac{۱}{۲+۲} = \frac{۱}{۴}$$

$$\lim_{x\to(-۱)^+} f(x) = \lim_{x\to(-۱)^+} ax+۱ = -a+۱\ ,\ \ f(-۱) = -a+۱$$

طبق شرط پیوستگی داریم:

$$\lim_{x\to(-۱)^-} f(x) = \lim_{x\to(-۱)^+} f(x) = f(-۱) \Rightarrow -a+۱ = \frac{۱}{۴}$$

$$\Rightarrow -a = -\frac{۳}{۴} \Rightarrow a = \frac{۳}{۴}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۷

۳۱ گزینه ۱

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۱

گام اول

الف) تابع $f(x)$ بر روی مجموعهٔ $\mathbb{R}$ پیوسته است هرگاه در تمام نقاط این مجموعه پیوسته باشد.

ب) تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x = x_0$ پیوسته است هرگاه داشته باشیم:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

گام دوم

تابع $f(x)$ بر روی دو بازهٔ $x > 2$ و $x < 2$ به‌صورت یک تابع چندجمله‌ای بوده و پیوسته است؛ بنابراین کافی است پیوستگی تابع را فقط در نقطهٔ $x = 2$ بررسی کنیم. باتوجه‌به قسمت (ب) از گام اول، حد چپ و راست تابع را در نقطهٔ $x = 2$ محاسبه کرده و با مقدار تابع در این نقطه مساوی قرار می‌دهیم.

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} x^2 + ax - 5 = 2^2 + 2a - 5 = 2a - 1$$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} ax - 1 = 2a - 1$$

$$f(2) = 2a - 1$$

به ازای هر مقدار حقیقی a، تساوی $2a - 1 = 2a - 1$ برقرار است.

۳۲ گزینه ۱

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۶

گام اول

اگر $x \notin \mathbb{Z}$، در این صورت حاصل $[x] + [-x] = -1$ است.

گام دوم

$$f(x) = \begin{cases} -1 & ; x \notin \mathbb{Z} \\ a & ; x \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\lim_{x \to t^-} f(x) = \lim_{x \to t^+} f(x) = f(t) \Rightarrow a = -1$$

۳۳ گزینه ۴

$$f(x) = [x]\sin \pi x \;\; ; \;\; x \in [-۲, ۲]$$

کافی است پیوستگی تابع را در نقاط صحیح بررسی کنیم. اما ازآنجاکه در نقاط صحیح، تابع $\sin \pi x$ همواره برابر با صفر است، پس $f(x)$ نیز برابر با صفر می‌شود. بنابراین در کل تابع $f(x)$ در این بازه پیوسته است.

پینوشت: اگر بخواهیم با تعریف پیوستگی در نقطه پاسخ دهیم، باتوجه‌به اینکه در کتاب درسی نقاط ابتدا و انتهای بازهٔ بسته با تعریف پیوستگی در نقطه، ناپیوسته محسوب می‌شوند، دو نقطهٔ ناپیوستگی داریم.

کلید سنجش صفر نقطه است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

۳۴ گزینه ۱

$$f(x) = \begin{cases} (x-۱)[x] & ; |x-۱| < ۱ \\ x^۲ + ax + b & ; |x-۱| \geq ۱ \end{cases} = \begin{cases} (x-۱)[x] & ; -۱ < x-۱ < ۱ \\ x^۲ + ax + b & ; x-۱ \geq ۱ \;\; \text{یا} \;\; x-۱ \leq -۱ \end{cases}$$

$$= \begin{cases} (x-۱)[x] & ; ۰ < x < ۲ \\ x^۲ + ax + b & ; x \geq ۲ \;\; \text{یا} \;\; x \leq ۰ \end{cases}$$

بنابراین برای اینکه تابع همواره پیوسته باشد، باید در $x = ۰$ و $x = ۲$ پیوسته باشد؛ پس:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to ۲^+} f(x) = ۴ + ۲a + b \\ \lim\limits_{x \to ۲^-} f(x) = (۲-۱)[۲^-] = ۱ \end{cases} \Rightarrow ۴ + ۲a + b = ۱ \quad (I)$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to ۰^+} f(x) = (۰-۱)[۰^+] = ۰ \\ \lim\limits_{x \to ۰^-} f(x) = b \end{cases} \Rightarrow b = ۰ \quad (II)$$

$$\xrightarrow{(I),(II)} a = -\frac{۳}{۲}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۹

۳۵ گزینه ۱

اگر قرار باشد تابع $f(x)$ در نقاطی ناپیوسته باشد، باید دنبال نقاطی باشیم که در آن $[x]$ ناپیوسته است. در تابع $y=[x]$ نقاط $x\in\mathbb{Z}$ نقاط مشکوک به ناپیوستگی برای تابع $f(x)$ هستند. (در نقاط $x\in\mathbb{Z}$ خود تابع $y=[x]$ همواره ناپیوسته است، اما ممکن است تابع $f(x)$ در این نقاط پیوسته باشد. پس باید نقاط $x\in\mathbb{Z}$ در بازهٔ $(۲,۶)$ را مورد بررسی قرار دهیم.) پس برای تعیین تعداد نقاط ناپیوستگی، نقاط $x=۳$، $x=۴$ و $x=۵$ را مورد بررسی قرار می دهیم.

بررسی پیوستگی تابع $f(x)$ در نقطه ای به طول $x=۳$:

$$\lim_{x\to ۳^-} f(x)=\lim_{x\to ۳^-} \sin(x-[x])\pi=\lim_{x\to ۳^-} \sin(x-۲)\pi=\sin\pi=۰$$
$$\lim_{x\to ۳^+} f(x)=\lim_{x\to ۳^+} \sin(x-[x])\pi=\sin(۳-۳)\pi=\sin ۰=۰$$

$$f(۳)=\sin(۳-۳)\pi=\sin ۰=۰$$

بنابراین تابع در $x=۳$ پیوسته است.

بررسی پیوستگی تابع در $x=۴$:

$$\lim_{x\to ۴^-} f(x)=\lim_{x\to ۴^-} \sin(x-[x])\pi=\sin(۴-۳)\pi=\sin\pi=۰$$
$$\lim_{x\to ۴^+} f(x)=\lim_{x\to ۴^+} \sin(x-[x])\pi=\sin(۴-۴)\pi=\sin ۰=۰$$

$$f(۴)=\sin(۴-۴)\pi=\sin ۰=۰$$

تابع در $x=۴$ هم پیوسته است.

بررسی پیوستگی تابع در $x=۵$:

$$\lim_{x\to ۵^-} f(x)=\lim_{x\to ۵^-} \sin(x-[x])\pi=\sin(۵-۴)\pi=\sin\pi=۰$$
$$\lim_{x\to ۵^+} f(x)=\lim_{x\to ۵^+} \sin(x-[x])\pi=\sin(۵-۵)\pi=\sin ۰=۰$$
$$f(۵)=\sin(۵-۵)\pi=\sin ۰=۰$$

تابع در $x=۵$ هم پیوسته است. ثابت شد تابع در کلیهٔ نقاط مشکوک به ناپیوستگی پیوسته است بنابراین تعداد نقاط ناپیوستگی تابع $f(x)$ برابر صفر می شود.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۴

۳۶ گزینه ۲

در تابع به فرم $y = [f(x)]$ هر جا حاصل $f(x)$ برابر عدد صحیح شود، تابع در آن نقاط ناپیوسته است. بنابراین در بازهٔ $[۲, ۲+k)$ حاصل عبارت جبری $x^۲ - ۳$ نباید برابر یک عدد صحیح شود. (البته در نقطهٔ شروع بازه درصورتی‌که تابع از راست پیوسته باشد، این نقطه جزء نقاط ناپیوستگی تابع محسوب نمی‌شود.)

ضابطهٔ تابع $f(x)$ را به صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$f(x) = [x^۲ - ۳] = [x^۲] - ۳$$

سپس بررسی می‌کنیم عبارت $[x^۲]$ در اولین نقطه‌ای که بعد از $x = ۲$ برابر یک عدد صحیح می‌شود کدام نقطه است. آن نقطه را برابر $۲ + k$ قرار داده و درنهایت مقدار k را محاسبه می‌کنیم.

$$x = ۲ \Rightarrow x^۲ = ۴ \xrightarrow{\text{اولین عدد صحیح بعد از ۴}} x^۲ = ۵ \Rightarrow x = \sqrt{۵}$$

پس تابع $f(x)$ به ازای $x = \sqrt{۵}$ ناپیوسته می‌شود. $۲ + k$ را برابر $\sqrt{۵}$ فرض می‌کنیم، داریم:

$$۲ + k = \sqrt{۵} \Rightarrow k = \sqrt{۵} - ۲$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۸

۳۷ گزینه ۲

مرز ضابطه ها خیلی شفاف مشخص نشده است. باتوجه‌به نامعادلات قدر مطلقی، ضابطه ها را با مرز شفاف آن یک بار دیگر می‌نویسیم:

$$f(x)=\begin{cases} ax+b & , \quad x\geq ۱ \text{ یا } x\leq -۱ \\ x[x] & , \quad -۱<x<۱ \end{cases}$$

برای اینکه تابع $f(x)$ بر روی $\mathbb{R}$ پیوسته باشد، باید در دو نقطهٔ $x=۱$ و $x=-۱$ که مرز ضابطه ها هستند پیوسته باشد.
می‌دانیم خط $x=۳$ بالای خط $x=۱$ قرار دارد، بنابراین باید برای به دست آوردن نقطهٔ برخورد آن با محور عرض ها از ضابطهٔ $f(x)=ax+b$ استفاده کرد.
بررسی پیوستگی تابع در $x=۱$:

$$\lim_{x\to ۱^+} f(x)=\lim_{x\to ۱^-} f(x)=f(۱)\Rightarrow$$
$$\lim_{x\to ۱^+} ax+b=\lim_{x\to ۱^-} x[x]\Rightarrow a+b=۱\times ۰=۰\Rightarrow a+b=۰ \quad (I)$$

بررسی پیوستگی تابع در $x=-۱$:

$$\lim_{x\to (-۱)^-} f(x)=\lim_{x\to (-۱)^-} ax+b=-a+b \ , \ f(-۱)=-a+b$$
$$\lim_{x\to (-۱)^+} f(x)=\lim_{x\to (-۱)^+} x[x]=(-۱)[-۱^+]=(-۱)(-۱)=۱$$
$$\lim_{x\to (-۱)^+} f(x)=\lim_{x\to (-۱)^-} f(x)=f(-۱)\Rightarrow -a+b=۱ \quad (II)$$

از دو رابطهٔ (I) و (II) نتیجه می‌شود:

$$\begin{cases} a+b=۰ \\ -a+b=۱ \end{cases} \overset{(+)}{\Rightarrow} ۲b=۱\Rightarrow b=\frac{۱}{۲} \overset{(۱)}{\Rightarrow} a=-\frac{۱}{۲}$$
$$\Rightarrow ax+b=-\frac{۱}{۲}x+\frac{۱}{۲} \xrightarrow{x=۳} f(۳)=-\frac{۳}{۲}+\frac{۱}{۲}=-۱$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۰

۳۸ گزینه ۳

برای پیوستگی این تابع در $\mathbb{R}$، بایستی در $x = ۲$ پیوسته باشد.

$$f(۲) = \lim_{x\to ۲^-} f(x) = \lim_{x\to ۲^-} (ax - ۱) = ۲a - ۱$$

$$\lim_{x\to ۲^+} f(x) = \lim_{x\to ۲^+} \frac{۳x - ۶}{x - \sqrt{x+۲}} = \frac{۰}{۰} \text{ مبهم}$$

$$= \lim_{x\to ۲^+} \frac{۳(x-۲)\left(x+\sqrt{x+۲}\right)}{\left(x-\sqrt{x+۲}\right)\left(x+\sqrt{x+۲}\right)}$$

$$= \lim_{x\to ۲^+} \frac{۳(x-۲)\left(x+\sqrt{x+۲}\right)}{x^۲ - x - ۲} = \lim_{x\to ۲^+} \frac{۳(x-۲)\left(x+\sqrt{x+۲}\right)}{(x-۲)(x+۱)}$$

$$= \lim_{x\to ۲^+} \frac{۳\left(x+\sqrt{x+۲}\right)}{x+۱} = \frac{۳(۲+۲)}{۲+۱} = ۴$$

ضمناً برای رفع ابهام $\frac{۰}{۰}$ از قاعدهٔ هوپیتال نیز می‌توانید استفاده کنید:

$$\lim_{x\to ۲^+} \frac{۳x - ۶}{x - \sqrt{x+۲}} = \frac{۰}{۰} \xrightarrow{\text{HOP}} \lim_{x\to ۲^+} \frac{۳}{۱ - \frac{۱}{۲\sqrt{x+۲}}} = \frac{۳}{۱ - \frac{۱}{۴}} = ۴$$

حال برای پیوستگی f در $x = ۲$، مقدار تابع را برابر حد آن قرار می‌دهیم:

$$۲a - ۱ = ۴ \Rightarrow a = \frac{۵}{۲} = ۲/۵$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۸

۳۹ گزینه ۴

حد تابع $f(x)$ را وقتی $x \to ۱$ محاسبه می کنیم. برای این که تابع در $x = ۱$ پیوسته باشد، باید رابطهٔ $\lim_{x\to ۱} f(x) = a$ برقرار باشد. این رابطه را بررسی کرده و مقداری از a را تعیین می کنیم که به ازای آن تابع پیوسته باشد.

$$\lim_{x\to ۱} f(x) = \lim_{x\to ۱} \frac{\sqrt[۳]{۱-\sqrt{x}}}{x-۱} = \frac{۰}{۰}$$

$$\lim_{x\to ۱} \frac{\sqrt[۳]{۱-\sqrt{x}}}{x-۱} = \lim_{x\to ۱} \frac{\sqrt[۳]{۱-\sqrt{x}}}{-(۱-\sqrt{x})(۱+\sqrt{x})} =$$

$$\lim_{x\to ۱} \frac{-۱}{\sqrt[۳]{(۱-\sqrt{x})^۲}(۱+\sqrt{x})} = \frac{-۱}{۰^+} = -\infty$$

تابع $f(x)$ در نقطه ای به طول $x = ۱$ فاقد حد است بنابراین به ازای هیچ مقدار a در $x = ۱$ پیوسته نیست.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۲

۴۰ گزینه ۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۸

گام اول

الف) تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x = x_0$ پیوسته است هرگاه حد چپ و راست تابع در این نقطه برابر با مقدار تابع در این نقطه باشد؛ به عبارت دیگر داشته باشیم:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

ب) می‌دانیم:

$$|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$$

$$|x| > a \Leftrightarrow x > a \text{ یا } x < -a$$

گام دوم

ابتدا باتوجه‌به قسمت (ب) از گام اول، محدودهٔ دو ضابطهٔ تابع را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x + 1} & ; |x| > 1 \\ 2x & ; |x| \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x + 1} & ; x > 1 \text{ یا } x < -1 \\ 2x & ; -1 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

اکنون حد چپ و راست تابع $f(x)$ را در دو نقطهٔ $x = 1$ و $x = -1$ محاسبه می‌کنیم تا بتوانیم پیوستگی تابع را در این دو نقطه بررسی کنیم.

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{x^2 - 1}{x + 1} = \frac{1 - 1}{1 + 1} = 0$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} 2x = 2(1) = 2$$

$$f(1) = 2(1) = 2$$

باتوجه‌به اینکه $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x)$ است، تابع در $x = 1$ ناپیوسته است.

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} 2x = 2(-1) = -2$$

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} \frac{x^2 - 1}{x + 1} = \lim_{x \to -1^-} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x + 1} = \lim_{x \to -1^-} (x - 1) = -1 - 1 = -2$$

$$f(-1) = 2(-1) = -2$$

داریم:

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^+} f(x) = f(-1)$$

بنابراین تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x = -1$ پیوسته است.

۴۱ گزینه ۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

گام اول

الف) تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x = x_0$ پیوسته است هرگاه داشته باشیم:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$$

ب) می‌دانیم:

$$|u| = \begin{cases} u & ; u \geq 0 \\ -u & ; u < 0 \end{cases}$$

گام دوم

ضابطهٔ تابع شامل یک عبارت قدر مطلقی است، پس ابتدا این عبارت را تجزیه و تعیین علامت می‌کنیم.

$$x^2 + x - 2 = (x+2)(x-1)$$

		-۲		۱	
x^2+x-2	+	‖	-	‖	+

بنابراین ضابطهٔ تابع $f(x)$ به‌صورت زیر می‌شود:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + x - 2}{x - 1} & ; x \leq -2 \\ \dfrac{-x^2 - x + 2}{x - 1} & ; -2 < x < 1 \\ a & ; x = 1 \\ \dfrac{x^2 + x - 2}{x - 1} & ; x > 1 \end{cases}$$

اکنون باتوجه‌به قسمت (الف) از گام اول، پیوستگی تابع $f(x)$ را در نقطهٔ $x = 1$ بررسی می‌کنیم:

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{(x+2)(x-1)}{(x-1)} = \lim_{x \to 1^+} (x+2) = 1 + 2 = 3$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{-x^2 - x + 2}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{-(x+2)(x-1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} (-x - 2) = -1 - 2 = -3$$

باتوجه‌به اینکه حد چپ و راست تابع در نقطهٔ $x = 1$ مساوی نیستند، پس این تابع به ازای هیچ مقدار a، در نقطهٔ $x = 1$ پیوسته نخواهد بود.

۴۲ گزینه ۴

ابتدا تعیین می‌کنیم مقادیر $f(x)$ به ازای $x \in \mathbb{Z}$ و $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$ چند است:

$$f(x) = [x] + [-x] = \begin{cases} ۰ & ; x \in \mathbb{Z} \\ -۱ & ; x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z} \end{cases}$$

ضابطهٔ $g(x)$ را باتوجه‌به مقادیر $f(x)$ تشکیل داده و بررسی می‌کنیم در بازهٔ $[-۴, ۴]$ تابع در چه نقاطی ناپیوسته است.

$$f(x) = \begin{cases} -۱ & ; x \notin \mathbb{Z} \\ ۰ & ; x \in \mathbb{Z} \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} f(x) & ; x \notin \mathbb{Z} \\ f(x) - ۱ & ; x \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Rightarrow g(x) = \begin{cases} -۱ & ; x \notin \mathbb{Z} \\ -۱ & ; x \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow g(x) = -۱ \ ; x \in \mathbb{R}$$

در تمام نقاط بازهٔ $[-۴, ۴]$ تابع $g(x) = -۱$ (چون یک تابع ثابت است) پیوسته است. پس تعداد نقاط ناپیوستگی تابع در این بازه برابر صفر است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۲

۴۳ گزینه ۳

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۱

گام اول

الف) تابع $f(x)$ بر روی مجموعهٔ اعداد حقیقی پیوسته است هرگاه در همهٔ نقاط این مجموعه پیوسته باشد.

ب) تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x = x_۰$ پیوسته است هرگاه داشته باشیم:

$$\lim_{x \to x_۰^+} f(x) = \lim_{x \to x_۰^-} f(x) = f(x_۰)$$

گام دوم

تابع $f(x)$ بر روی دو بازهٔ $x > ۲$ و $x < ۲$ به‌صورت یک تابع چندجمله‌ای بوده و پیوسته است، بنابراین کافی است پیوستگی تابع را در نقطهٔ $x = ۲$ بررسی کنیم. باتوجه‌به قسمت (ب) از گام اول، حد چپ و راست تابع $f(x)$ را در نقطهٔ $x = ۲$ محاسبه کرده و با مقدار تابع در این نقطه مساوی قرار می‌دهیم.

$$\lim_{x \to ۲^+} f(x) = \lim_{x \to ۲^+} ax + b = ۲a + b$$

$$\lim_{x \to ۲^-} f(x) = \lim_{x \to ۲^-} x^۲ + bx - ۱ = ۴ + ۲b - ۱ = ۳ + ۲b$$

$$f(۲) = ۵ \Rightarrow ۲a + b = ۳ + ۲b = ۵$$

داریم:

$$۳ + ۲b = ۵ \Rightarrow ۲b = ۲ \Rightarrow b = ۱$$

$$۲a + b = ۵ \Rightarrow ۲a + ۱ = ۵ \Rightarrow ۲a = ۴ \Rightarrow a = ۲$$

۴۴ گزینه ۱

اگر $x = ۲k$ (یک عدد زوج) فرض شود، در این صورت $\sin\frac{\pi}{۲}x$ همواره برابر صفر می‌شود زیرا $\sin k\pi$ به ازای $k \in \mathbb{Z}$ همواره برابر صفر است. صفر شدن این عبارت باعث می‌شود کل تابع $f(x)$ برابر صفر شده و درنتیجه در نقاط زوج تابع $f(x)$ همواره پیوسته است.

حالا فرض می‌کنیم x فرد بوده و آن را به صورت $x = ۲k + ۱$ در نظر می‌گیریم. پیوستگی آن را در نقاط فرد مورد بررسی قرار می‌دهیم. نقطهٔ فردی مانند $x = ۱$ در نظر گرفته و پیوستگی تابع را در این نقطه بررسی می‌کنیم:

$$\lim_{x\to ۱^+} f(x) = \lim_{x\to ۱^-} (-۱)^{[x]} \sin\frac{\pi}{۲}x = (-۱)^{۱} \sin\frac{\pi}{۲} = (-۱)(۱) = -۱$$

$$\lim_{x\to ۱^-} f(x) = \lim_{x\to ۱^-} (-۱)^{[x]} \sin\frac{\pi}{۲}x = (-۱)^{۰} \sin\frac{\pi}{۲} = (۱)(۱) = ۱$$

$$f(۱) = (-۱)^{۱} \sin\frac{\pi}{۲} = (-۱)(۱) = -۱$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to ۱^+} f(x) \neq \lim_{x\to ۱^-} f(x) \Rightarrow \text{در اعداد فرد ناپیوسته است}$$

بنابراین تابع $f(x)$ فقط در اعداد زوج پیوسته است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۳

۴۵ گزینه ۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۴

گام اول

الف) تابع $f(x)$ بر روی یک بازه پیوسته است هرگاه در همهٔ نقاط این بازه پیوسته باشد.

ب) تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x = x_0$ پیوسته است هرگاه داشته باشیم:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$$

گام دوم

تابع $f(x)$ با ضابطهٔ داده‌شده روی بازهٔ $[1, +\infty)$ تعریف شده است. برای بررسی پیوستگی تابع $f(x)$ روی این بازه کافی است شرط پیوستگی تابع فقط در نقطهٔ $x = 6$ بررسی شود. داریم:

$$\lim_{x \to 6^-} f(x) = \lim_{x \to 6^-} \sin \frac{\pi}{x} = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$$f(6) = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \to 6^+} f(x) = \lim_{x \to 6^+} a + \cos^2 \frac{\pi x}{36} = a + \cos^2 \frac{\pi}{6} = a + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = a + \frac{3}{4}$$

برای پیوستگی تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x = 6$ کافی است تساوی زیر برقرار باشد:

$$a + \frac{3}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = -\frac{1}{4}$$

۴۶ گزینه ۳

تابع در $x = ۱$ پیوسته است، پس مقادیر حد چپ و راست تابع در $x = ۱$ برابرند.

$$\lim_{x\to ۱^-} f(x) = \sqrt{a+۳} \quad , \quad \lim_{x\to ۱^+} f(x) = ۱ + a$$

$$\Rightarrow ۱ + a = \sqrt{a+۳} \Rightarrow a^۲ + ۲a + ۱ = a + ۳ \Rightarrow a^۲ + a - ۲ = ۰$$

$$\Rightarrow (a+۲)(a-۱) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} a = ۱ & \checkmark \\ a = -۲ & \times \end{cases}$$

به ازای $a = -۲$ تساوی بالا برقرار نیست. حالا $f(-\frac{۳}{۴})$ را پیدا می‌کنیم:

$$f(x) = \sqrt{ax+۳} = \sqrt{x+۳}$$

$$\Rightarrow f(-\frac{۳}{۴}) = \sqrt{-\frac{۳}{۴}+۳} = \sqrt{\frac{۹}{۴}} = \frac{۳}{۲} = ۱/۵$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۷

۴۷ گزینه ۴

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۰

گام اول

تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x = \frac{۳\pi}{۴}$ پیوسته است؛ بنابراین رابطهٔ زیر برقرار است:

$$\lim_{x\to \frac{۳\pi}{۴}^+} f(x) = \lim_{x\to \frac{۳\pi}{۴}^-} f(x) = f(\frac{۳\pi}{۴})$$

گام دوم

باتوجه‌به گام اول، حد چپ و راست تابع را در نقطهٔ $x = \frac{۳\pi}{۴}$ به دست آورده و با مقدار تابع در این نقطه مساوی قرار می‌دهیم.

$$\lim_{x\to \frac{۳\pi}{۴}^-} f(x) = \lim_{x\to \frac{۳\pi}{۴}^-} a\sin ۲x = a\sin ۲(\frac{۳\pi}{۴}) = a\sin\frac{۳\pi}{۲} = -a$$

$$\lim_{x\to \frac{۳\pi}{۴}^+} f(x) = \lim_{x\to \frac{۳\pi}{۴}^+} \cos(x+\frac{\pi}{۴}) = \cos(\frac{۳\pi}{۴}+\frac{\pi}{۴}) = \cos\pi = -۱$$

$$f(\frac{۳\pi}{۴}) = \cos(\frac{۳\pi}{۴}+\frac{\pi}{۴}) = \cos\pi = -۱$$

بنابراین داریم:

$$\lim_{x\to \frac{۳\pi}{۴}^+} f(x) = \lim_{x\to \frac{۳\pi}{۴}^-} f(x) = f(\frac{۳\pi}{۴}) \Rightarrow -a = -۱ \Rightarrow a = ۱$$

همسایگی چپ و راست

اگر r عددی مثبت باشد، آن‌گاه (x_0, x_0+r) یک همسایگی راست (x_0-r, x_0) یک همسایگی چپ از x_0 نامیده می‌شود.

تست ۱۳۷: به ازای کدام مجموعه مقادیر x، بازهٔ $(x+1, 2x-1)$ یک همسایگی عدد ۳ می‌باشد؟ (ریاضی ۹۸)

۱) $\varnothing$ ۲) $\{2\}$ ۳) $2 < x < 2/5$ ۴) $1/5 < x < 2$

پاسخ: وقتی می‌گوید که بازهٔ (c,d) یک همسایگی عدد x_0 است یعنی $x_0 \in (c,d)$ است (طبق درس‌نامه)، پس در این‌جا داریم:

$$3 \in (x+1, 2x-1) \Rightarrow x+1 < 3 < 2x-1 \Rightarrow \begin{cases} x+1<3 \Rightarrow x<2 \\ 2x-1>3 \Rightarrow 2x>4 \Rightarrow x>2 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} \varnothing$$

تمرین: در همسایگی محذوف متقارن به صورت $(3a-7, a+5)-\{3\}$ شعاع همسایگی کدام است؟ (ریاضی ۸۹)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

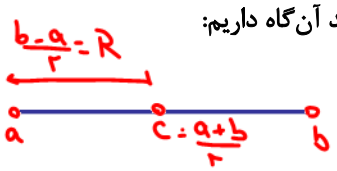
پاسخ: طبق درس‌نامه، مرکز همسایگی نقطهٔ ۳ است، پس $\frac{3a-7+a+5}{2} = 3$ و در نتیجه $a=2$ می‌باشد. پس همسایگی به صورت $(-1,7)-\{3\}$ درمی‌آید که شعاعش برابر $\frac{7-(-1)}{2} = 4$ است.

$\frac{(3a-7)+(a+5)}{2} = 3$ $\quad 4a-2=6$ $\quad a=2$

یادت باشه: اگر $(a,b)-\{c\}$ یک همسایگی محذوف متقارن باشد آن‌گاه داریم:

مرکز همسایگی $c = \frac{a+b}{2}$

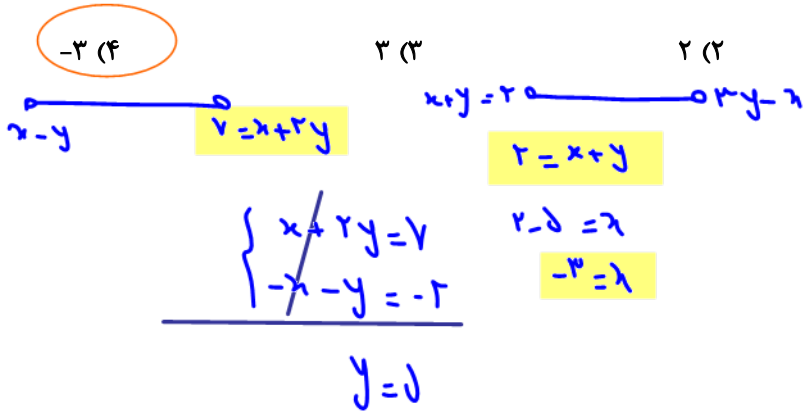
شعاع همسایگی $= \frac{b-a}{2}$



$$|x - \frac{a+b}{2}| < \frac{b-a}{2}$$

تمرین: اگر بازهٔ $(x+y, 3y-x)$ یک همسایگی راست نقطهٔ ۲ و بازهٔ $(x-y, x+2y)$ یک همسایگی چپ نقطهٔ ۷ باشد، مقدار x کدام است؟

۱) ۲- ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۳-



تمرین: بازهٔ (a,b) یک همسایگی متقارن ..... به شعاع ..... است.

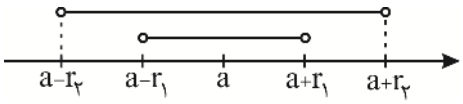
۱) $\frac{a+b}{2}$ ، $\frac{a-b}{2}$ ۲) $\frac{a+b}{2}$ ، $\frac{b-a}{2}$ ۳) $\frac{a-b}{2}$ ، $\frac{a+b}{2}$ ۴) $\frac{a+b}{2}$ ، $\frac{a+b}{2}$

پاسخ: بازهٔ (a,b) وقتی یک همسایگی متقارن است که مرکز همسایگی نقطهٔ میانی بازه باشد یعنی $\frac{a+b}{2}$ و شعاع همسایگی هم باید برابر نصف طول بازه باشد یعنی $\frac{b-a}{2}$.

تمرین: اگر اجتماع دو همسایگی باز متقارن یک عدد، یک همسایگی باز متقارن آن عدد شده باشد، آن‌گاه الزاماً:

۱) اشتراک دو همسایگی تهی است.
۲) اشتراک دو همسایگی برابر یکی از آن‌ها است.
۳) دو همسایگی برابرند.
۴) یکی از دو همسایگی تهی است.

پاسخ: دو همسایگی باز متقارن یک عدد را روی محور در نظر بگیرید:



اجتماعشان برابر همسایگی بزرگ‌تر و اشتراکشان برابر همسایگی کوچک‌تر است. پس اشتراک دو همسایگی برابر یکی از آن‌ها است.

تمرین: یک همسایگی متقارن به مرکز a و شعاع بیشترین مقدار ممکن، زیرمجموعهٔ جواب نامعادلهٔ $|\frac{x-3}{2x-1}|>1$ است. a کدام است؟ (ریاضی خارج ۸۹)

۱) $-\frac{3}{4}$ ۲) $-\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{11}{6}$

پاسخ: طبق خاصیت $|\frac{x}{y}|=\frac{|x|}{|y|}$، نامعادلهٔ داده‌شده را به صورت $\frac{|x-3|}{|2x-1|}>1$ می‌نویسیم. حالا چون مطمئن هستیم که مخرج هرگز منفی نیست، طرفین وسطین می‌کنیم:

$$|x-3|>|2x-1| \xrightarrow[x\neq\frac{1}{2}]{\text{توان ۲}} x^2-6x+9>4x^2-4x+1 \Rightarrow 3x^2+2x-8<0$$

برای حل نامعادلهٔ $3x^2+2x-8<0$ باید تعیین علامت کنیم. ریشه‌های آن عبارت می‌شوند $\frac{-2\pm\sqrt{100}}{6}$ یعنی $x=-2$ و $x=\frac{4}{3}$. (از روش دلتا، ریشه‌ها را پیدا کردیم.)

پس جدول تعیین علامت عبارت به صورت

x	$-\infty$		-2		$\frac{4}{3}$		$+\infty$
		$+$	0	$-$	0	$+$	

است و البته حواسمان هست که به ازای $x=\frac{1}{2}$ مخرج نامعادلهٔ $|\frac{x-3}{2x-1}|>1$ صفر می‌شود پس $x\neq\frac{1}{2}$. بنابراین جواب به صورت زیر خواهد بود:

$$x\in(-2,\frac{4}{3})-\{\frac{1}{2}\}=(-2,\frac{1}{2})\cup(\frac{1}{2},\frac{4}{3})$$

بین این دو بازه، بیشترین شعاع متعلق به بازهٔ $(-2,\frac{1}{2})$ است پس مرکز همین بازه که مدنظر طراح است، می‌شود:

$$a=\frac{-2+\frac{1}{2}}{2}=\frac{-3}{4}$$

Homework

۱ اگر در تقسیم $f(x)=mx^{۳}+(۲m-۱)x-۷$ بر $x-۲$، باقی‌مانده آن ۱۵ باشد، باقی‌مانده تقسیم $p(x)=x\cdot f(x)$ بر $x+۲$ را به‌دست آورید.

۲ اگر در تقسیم $f(x)=mx^{۳}+(۲m-۱)x-۷$ بر $x-۲$، باقی‌ماندهٔ آن ۱۵ باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم $p(x)=x\,.\,f(x)$ بر $x+۲$ را به دست آورید.

۳ اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم $P(x)=۲x^{۳}+mx-۱$ بر $x-۲$ برابر ۳ باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم $P(۲x)$ بر $x-۲$ کدام است؟

۱) ۱۰۳ ۲) ۱۰۲

۳) ۱۰۰ ۴) ۱۰۴

۴ اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم $p(x)$ بر $x+۲$ برابر ۴ باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم $g(x)=xp^{۲}(x)-p(x)+x^{۴}$ بر $x+۲$ کدام است؟

۱) ۲۰ ۲) ۱۶

۳) -۲۰ ۴) -۱۶

۵ اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم $f(x)=x^{۳}+ax+b$ بر $x-۲$ برابر ۲ و باقی‌ماندهٔ تقسیم $f(۲x)$ بر $x+۱$ برابر ۴ باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم $f(x)f(۲x)$ بر $x-۱$ چقدر است؟

۱) -۱ ۲) -۲

۳) ۱ ۴) ۲

۶ اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم $f(x)$ بر $x-۵$ و $x+۵$ به‌ترتیب ۵- و ۵ باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم $g(x)=x(fof)(x)$ بر $x^{۲}-۲۵$ کدام است؟

۱) ۲۵ ۲) -۲۵

۳) $۵x$ ۴) $-۵x$

درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

۷ $x-۲$ یک عامل چندجمله‌ای $x^{۵}+۳۲$ می‌باشد.

۸ مینیمم تابع $y=-۳\cos \pi x+۲$ برابر با یک است.

۹ می‌توان بازه‌ای یافت که تابع تانژانت در آن نزولی باشد.

۱۰ تابع $f(x)=\frac{۲x+۱}{x-۲}$ دو مجانب دارد.

۱۱ اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم $f(x)=x^۳+۳x-k$ بر $x-۲$ برابر ۳ باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم $kf(۲x)+f(۳x-۱)$ بر $x-۱$ کدام است؟

۱) ۱۲
۲) ۱۱
۳) ۴
۴) ۳۶

۱۲ اگر بازهٔ $(x-۱\ ,\ ۲x+۳)$ یک همسایگی عدد ۲ باشد، حدود x کدام است؟

۱) $-۳<x<\frac{۱}{۲}$
۲) $۱<x<۳$
۳) $\frac{۱}{۲}<x<۳$
۴) $-\frac{۱}{۲}<x<۳$

۱۳ اگر دو تابع $f(x+۱)$ و $f(۲x-۱)$ بر $x+۴$ بخش‌پذیر باشند، باقی‌ماندهٔ تقسیم $f(x)$ بر $(x+۳)(x+۹)$ کدام است؟

۱) صفر
۲) ۱
۳) -۱
۴) ۲

۱۴ مقدار k را طوری بیابید که باقی‌ماندهٔ تقسیم $x^۳+۲kx+۳$ بر $x-۲$ برابر (-۳) باشد.

۱۵ اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم $p(x)$ بر $x^۲-۴$ برابر x باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم $xp(x)$ بر $x^۲+۲x$ کدام است؟

۱) -۴
۲) ۱
۳) -۱
۴) صفر

۱۶ اگر دو تابع $f(x)=x^۳+ax-۱$ و $g(x)=x^۴-x^۲-a$ بر $x-۱$ هم‌باقی‌مانده باشند، باقی‌ماندهٔ تقسیم $(fg)(x)$ بر $x-۲$ چقدر است؟

۱) ۸۴
۲) ۷۵
۳) ۷۴
۴) ۸۵

۱۷ اگر $f(x)=x^۳-x-m$ باشد و تابع $۱-f(x-۱)$ بر $x+۱$ بخش‌پذیر باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم $f(x)$ بر $x-۱$ کدام است؟

۱) ۳
۲) ۴
۳) ۷
۴) ۵

۱۸ اگر باقی‌مانده تقسیم $f(x+۱)$ بر $۲x+۴$ برابر a و باقی‌مانده تقسیم $f(x)$ بر $x+۱$ برابر $a-۴$ باشد، آنگاه باقی‌مانده تقسیم $g(x)=ax^۳+x^۲-a$ بر $x-۲$ کدام است؟

۱) ۲۰
۲) ۱۸
۳) ۱۶
۴) ۲

۱۹ بازه $(x-۱\ ,\ ۲x+۳)$، یک همسایگی چپ برای ۱ است. حدود x کدام است؟

۱) $(-۱\ ,\ ۲)$
۲) $(-\infty\ ,\ -۱)$
۳) $(۲\ ,\ +\infty)$
۴) $(-۴\ ,\ -۱)$

۲۰ چند مورد از موارد زیر دربارهٔ مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ $\sqrt{۲x-۱}-\sqrt{x-۱}<۱$ درست است؟

الف) همسایگی محذوف ۲ است.

ب) همسایگی ۴ است.

پ) همسایگی چپ ۵ است.

ت) همسایگی راست ۱ است.

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۲۱ کدام گزینهٔ زیر در مورد دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{۱}{\sqrt{۴-x^۲}([x]-۱)}$ درست نیست؟

۱) همسایگی راست ۲- است.
۲) همسایگی چپ ۱ است.
۳) همسایگی صفر
۴) همسایگی عددی نیست.

۲۲ اگر بازهٔ $(۲x-۱\ ,\ ۵x)$ همسایگی راست عدد ۵ باشد، همسایگی چپ کدام عدد زیر است؟

۱) ۱۴
۲) ۱۵
۳) ۱۱
۴) ۱۳

۲۳ اگر $f(x)=۴x^۲+۲(a+۱)x+۳$ بر $۳x+۱$ بخش‌پذیر باشد، a کدام است؟

۱) $\frac{۲۵}{۳}$
۲) $\frac{۱۰۱}{۵}$
۳) $\frac{۲۵}{۶}$
۴) $\frac{۱۲۵}{۳}$

۲۴ اگر باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $f(x)=ax^۳+bx^۲+cx+d$ بر $x+۱$، $x+۲$ و x برابر ۹ باشد و بر دوجمله‌ای $x+۳$ بخش‌پذیر باشد. حاصل $۳a+b+c$ کدام است؟

۱) ۱۵
۲) ۵
۳) ۱۲
۴) ۱۰

۲۵ در تجزیهٔ عبارت $x^{۱۵}-۳۲$ کدام عبارت وجود دارد؟

۱) $x^{۱۲}+۲x^۹+۴x^۶+۸x^۳+۱۶$
۲) $x^{۱۲}+۲x^۹+۳x^۶+۲x^۳+۱۰$
۳) $x^۳+۲$
۴) $x^۳+x^۲-۲$

پاسخ Homework

۱

$x-۲=۰ \Rightarrow x=۲ \qquad r=f(۲)=۱۵$

$۸m+۲(۲m-۱)-۷=۱۵ \Rightarrow ۱۲m=۲۴$

$\Rightarrow m=۲ \;:\; f(x)=۲x^{۳}+۳x-۷ \Rightarrow x+۲=۰ \Rightarrow x=-۲$

$r=p(-۲)=(-۲)f(-۲)=-۲(۲(-۲)^{۳}+۳(-۲)-۷)=(-۲)(-۲۹)=۵۸$

۲

$x-۲=۰ \Rightarrow x=۲ \qquad r=f(۲)=۱۵$

$۸m+۲(۲m-۱)-۷=۱۵ \Rightarrow ۱۲m=۲۴$

$\Rightarrow m=۲ \;:\; f(x)=۲x^{۳}+۳x-۷ \Rightarrow x+۲=۰ \Rightarrow x=-۲$

$r=p(-۲)=(-۲)f(-۲)=-۲(۲(-۲)^{۳}+۳(-۲)-۷)=(-۲)(-۲۹)=۵۸$

۳ گزینه ۱

$P(۲)=۳ \Rightarrow ۱۶+۲m-۱=۳ \Rightarrow ۲m=-۱۲ \Rightarrow m=-۶$

$P(۴)=۲\times ۶۴-۶\times ۴-۱=۱۲۸-۲۴-۱=۱۰۳$

۴ گزینه ۳

$p(-۲)=۴$

$g(x)=xp^{۲}(x)-p(x)+x^{۴}$

$g(-۲)=-۲p^{۲}(-۲)-p(-۲)+(-۲)^{۴}=-۲(۴)^{۲}-۴+۱۶=-۲۰$

۵ گزینه ۱

$f(۲)=۲ \Rightarrow ۸+۲a+b=۲ \Rightarrow ۲a+b=-۶$

$x+۱=۰ \Rightarrow x=-۱ \xrightarrow{f(۲x)} f(-۲)=۴$

$\Rightarrow -۸-۲a+b=۴ \Rightarrow -۲a+b=۱۲$

$\begin{cases} ۲a+b=-۶ \\ -۲a+b=۱۲ \end{cases} \xrightarrow{+} ۲b=۶ \Rightarrow b=۳ \;,\; a=-\frac{۹}{۲}$

$x-۱=۰ \Rightarrow x=۱$

$f(۱)f(۲)=(۱+a+b)(۲)=(۱-\frac{۹}{۲}+۳)(۲)=-۱$

۶ گزینه ۱

$f(۵) = -۵\ ,\ f(-۵) = ۵$

فرض می‌کنیم باقی‌ماندهٔ $g(x)$ بر $x^۲ - ۲۵$ برابر $ax + b$ باشد، پس:

$$xf(f(x)) = (x^۲ - ۲۵)q(x) + ax + b$$

$$x = ۵ \ \Rightarrow \ ۵f(f(۵)) = ۵a + b \ \Rightarrow \ ۵f(-۵) = ۵a + b \ \Rightarrow \ ۵a + b = ۲۵$$

$$x = -۵ \ \Rightarrow \ -۵f(f(-۵)) = -۵a + b \ \Rightarrow \ -۵f(۵) = -۵a + b \ \Rightarrow \ -۵a + b = ۲۵$$

$$\begin{cases} ۵a + b = ۲۵ \\ -۵a + b = ۲۵ \end{cases} \xrightarrow{+} ۲b = ۵۰ \Rightarrow \ b = ۲۵ \ \Rightarrow a = ۰$$

پس باقی‌مانده برابر ۲۵ خواهد بود.

پاسخ سؤالات ۷ تا ۱۰

۷ نادرست

۸ نادرست.

$$\min = -|a| + c = -۳ + ۲ = -۱$$

۹ نادرست

۱۰ درست

۱۱ گزینه ۴

$$f(۲) = ۳ \Rightarrow ۸ + ۶ - k = ۳ \Rightarrow k = ۱۱$$

$$f(x) = x^۳ + ۳x - ۱۱$$

$$g(x) = kf(۲x) + f(۳x - ۱)$$

$$x - ۱ = ۰ \Rightarrow x = ۱$$

$$g(۱) = kf(۲) + f(۲) = ۱۲f(۲) = ۱۲ \times ۳ = ۳۶$$

۱۲ گزینه ۴

$$x - ۱ < ۲ < ۲x + ۳ \Rightarrow \begin{cases} x - ۱ < ۲ \\ ۲x + ۳ > ۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < ۳ \\ x > -\frac{۱}{۲} \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} -\frac{۱}{۲} < x < ۳$$

۱۳ گزینه ۱

$x+۴=۰ \Rightarrow x=-۴$

$g(x)=f(x+۱)\,,\ g(-۴)=۰ \Rightarrow f(-۳)=۰$

$h(x)=f(۲x-۱)\,,\ h(-۴)=f(-۹)=۰$

چون $f(-۹)=f(-۳)=۰$ است، پس $f(x)$ بر $(x+۳)$ و $(x+۹)$ بخش‌پذیر و درنتیجه بر $(x+۳)(x+۹)$ بخش‌پذیر است، پس باقی‌مانده صفر خواهد بود.

۱۴

$x-۲=۰ \Rightarrow x=۲ \Rightarrow f(۲)=-۳$

$f(۲)=۸+۴k+۳ \Rightarrow ۱۱+۴k=-۳ \Rightarrow k=-\frac{۷}{۲}$

۱۵ گزینه ۴

طبق امتحان تقسیم:

$p(x)=(x^۲-۴)q(x)+x \Rightarrow p(۲)=p(-۲)=۰ \quad (۱)$

رابطهٔ (۱) نشان می‌دهد که $p(x)$ بر $x+۲$ بخش‌پذیر است.

$p(x)=(x+۲)Q(x) \xrightarrow{\times x} xp(x)=(x^۲+۲x)Q(x) \quad (۲)$

رابطهٔ (۲) نشان می‌دهد که $xp(x)$ بر $x^۲+۲x$ بخش‌پذیر است، بنابراین باقی‌ماندهٔ $xp(x)$ بر $x^۲+۲x$ برابر صفر است.

۱۶ گزینه ۱

$f(۱)=g(۱) \Rightarrow ۱+a-۱=۱-۱-a \Rightarrow a=۰$

$(fg)(۲)=f(۲)g(۲)=(۸-۱)(۱۶-۴)=۷\times ۱۲=۸۴$

۱۷ گزینه ۳

$g(x)=۱-f(x-۱)$

$x+۱=۰ \Rightarrow x=-۱\,,\ g(-۱)=۱-f(-۲)=۰ \Rightarrow f(-۲)=۱$

$\Rightarrow -۸+۲-m=۱ \Rightarrow m=-۷$

$f(۱)=۱-۱-m=۷$

۱۸ گزینه ۲

$۲x+۴=۰ \Rightarrow x=-۲\,,\ f(-۲+۱)=a \Rightarrow f(-۱)=a$

$x+۱=۰ \Rightarrow x=-۱ \Rightarrow f(-۱)=۴-a$

$۴-a=a \Rightarrow a=۲ \Rightarrow g(x)=۲x^۳+x^۲-۲ \Rightarrow g(۲)=۱۸$

۱۹ گزینه ۴

$$\begin{cases} ۲x+۳<۱ \Rightarrow ۲x<-۲ \Rightarrow x<-۱ \\ x-۱<۲x+۳ \Rightarrow -۴<x \end{cases} \xrightarrow{\cap} -۴<x<-۱$$

۲۰ گزینه ۳

$$\sqrt{۲x-۱}-\sqrt{x-۱}<۱ \Rightarrow \sqrt{۲x-۱}<۱+\sqrt{x-۱}$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} ۲x-۱<۱+x-۱+۲\sqrt{x-۱} \Rightarrow x-۱<۲\sqrt{x-۱}$$

$$\Rightarrow x^۲-۲x+۱<۴x-۴ \Rightarrow x^۲-۶x+۵<۰ \Rightarrow ۱<x<۵$$

مورد "الف" درست نیست. زیرا $۱<x<۵$ یک همسایگی برای ۲ است، اما همسایگی محذوف نیست. موارد "ب"، "پ" و "ت" در مورد بازهٔ $۱<x<۵$ درست هستند.

۲۱ گزینه ۴

$$\begin{cases} \sqrt{۴-x^۲} \Rightarrow ۴-x^۲>۰ \Rightarrow -۲<x<۲ \\ [x]-۱\neq ۰ \Rightarrow [x]\neq ۱ \Rightarrow x\in \mathbb{R}-[۱,۲) \end{cases} \xrightarrow{\cap} D_f=(-۲,۱)$$

باتوجه‌به بازهٔ به‌دست‌آمده، تنها گزینهٔ "۴" درست است.

۲۲ گزینه ۲

$$۲x-۱=۵ \Rightarrow x=۳ \Rightarrow \text{بازه}=(۵,۱۵)$$

بازهٔ $(۵,۱۵)$ همسایگی چپ ۱۵ است.

۲۳ گزینه ۳

$f(x)$ بر $۳x+۱$ بخش‌پذیر است، پس $f(\frac{-۱}{۳})=۰$.

$$f(-\frac{۱}{۳})=\frac{۴}{۹}-\frac{۲}{۳}a-\frac{۲}{۳}+۳=۰$$
$$\Rightarrow \frac{۲۵}{۹}=\frac{۲}{۳}a \Rightarrow a=\frac{۲۵}{۶}$$

۲۴ گزینه ۳

باقی‌مانده تقسیم $f(x)$ بر $x+۱$، $x+۲$ و x، ۹ است، بنابراین f به‌صورت $f(x)=ax(x+۱)(x+۲)+۹$ است. حال چون f بر $x+۳$ بخش‌پذیر است، پس $f(-۳)=۰$:

$$f(-۳)=a(-۳)(-۳+۱)(-۳+۲)+۹=۰ \Rightarrow -۶a=-۹ \Rightarrow a=\frac{۳}{۲}$$

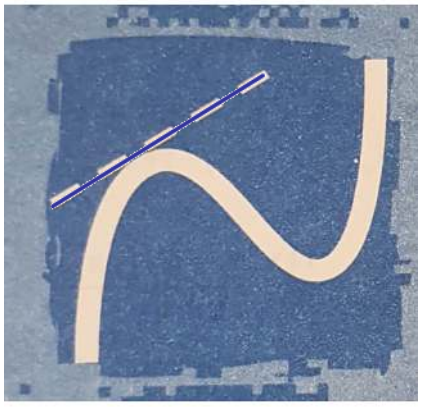
$$\Rightarrow f(x)=\frac{۳}{۲}x(x+۱)(x+۲)+۹=\frac{۳}{۲}(x^۳+۳x^۲+۲x)+۹$$

$$\Rightarrow ۳a+b+c=\frac{۳}{۲}(۳+۳+۲)=۱۲$$

۲۵ گزینه ۱

با کمک فرمول $(x^n-y^n)=(x-y)(x^{n-۱}+x^{n-۲}y+\cdots+y^{n-۱})$ داریم:

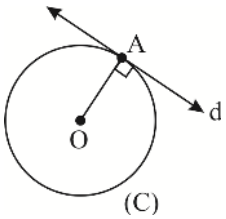
$$x^{۱۵}-۳۲=(x^۳)^۵-۲^۵=(x^۳-۲)(x^{۱۲}+۲x^۹+۴x^۶+۸x^۳+۱۶)$$



مشتق

درس ۱: آشنایی با مفهوم مشتق

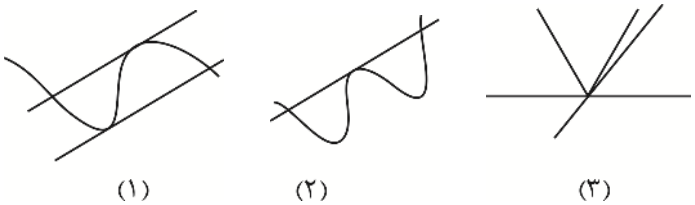
خط مماس بر منحنی



فرض کنیم دایره‌ی **C** و خط **d** در یک صفحه باشند، اگر خط و دایره فقط یک نقطه‌ی مشترک داشته باشند، آن‌گاه خط را بر دایره «مماس» می‌گوییم و آن نقطه را، نقطه‌ی تماس خط و دایره می‌نامند.

اگر این نقطه را **A** بنامیم می‌گوییم، خط در نقطه‌ی **A** بر دایره مماس است.

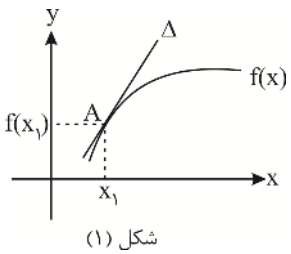
دقت کنید که این تعریف فقط مخصوص دایره است و نمی‌تواند برای هر منحنی دلخواه درست باشد. به شکل‌های زیر دقت کنید.



در شکل‌های (۱) و (۲) خط مماس، منحنی را در بیش از یک نقطه قطع کرده است. در شکل (۳) خط، نمودار را در یک نقطه قطع کرده است ولی در هیچ نقطه‌ای بر آن مماس نیست.

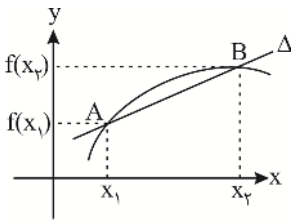
تعریف مشتق

در شکل (۱) خط Δ در نقطه‌ی **A** بر منحنی $y = f(x)$ مماس است و می‌خواهیم شیب خط Δ را پیدا کنیم. اول ببینیم که خط مماس را چه‌طور تعریف می‌کنیم.



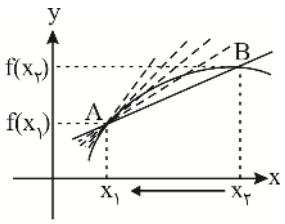
شکل (۱)

به شکل (۲) نگاه کنید. در این شکل خط Δ منحنی $f(x)$ را در دو نقطه‌ی A و B قطع کرده است.



شکل (۲)

حالا اگر مانند شکل (۳) نقطه‌ی B به سمت نقطه‌ی A حرکت کند خط Δ کم‌کم به خط مماس بر منحنی تبدیل می‌شود یعنی خط مماس حالت حدی خط قاطعی است که منحنی تابع را در دو نقطه قطع کند و نقطه‌ی دوم به سمت نقطه‌ی اول حرکت کند. برای پیداکردن شیب خط مماس هم از همین موضوع استفاده می‌کنیم.



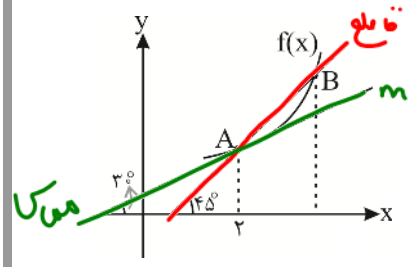
شکل (۳)

می‌دانیم شیب خط قاطع که منحنی را در دو نقطه‌ی A و B قطع می‌کند برابر $\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$ یا $m=\frac{f(x_۲)-f(x_۱)}{x_۲-x_۱}$ است. حالا وقتی نقطه‌ی B به سمت نقطه‌ی A حرکت می‌کند مثل آن است که بگوییم $x_۲ \to x_۱$، پس شیب خط مماس برابر حد $\lim\limits_{x_۲\to x_۱}\frac{f(x_۲)-f(x_۱)}{x_۲-x_۱}$ است. نقطه‌ی B یک نقطه‌ی متحرک است و در نتیجه به جای $x_۲$ می‌توانیم بنویسیم x (چون $x_۲$ در حال حرکت است) پس شیب خط مماس برابر $m_{\text{مماس}}=\lim\limits_{x\to x_۱}\frac{f(x)-f(x_۱)}{x-x_۱}$ است. حالا می‌توانیم مشتق را تعریف کنیم.

اگر در تابع $f(x)$ حاصل حد $\lim\limits_{x\to x_۱}\frac{f(x)-f(x_۱)}{x-x_۱}$ وجود داشته باشد (یعنی برابر عدد مشخصی شود) آن را مشتق تابع $f(x)$ در نقطه‌ی $x_۱$ می‌نامیم و با $f'(x_۱)$ نشان می‌دهیم. یعنی $f'(x_۱)=\lim\limits_{x\to x_۱}\frac{f(x)-f(x_۱)}{x-x_۱}$ و مقدارش برابر شیب خط مماس بر منحنی تابع $f(x)$ در نقطه‌ی $x_۱$ است.

مشتق تابع به ازای طول نقطه‌ی تماس برابر شیب خط مماس بر منحنی در نقطه‌ی تماس می‌باشد، یعنی: $m=\lim\limits_{B\to A} m_{AB}=f'(x_۱)$

تمرین: با توجه به شکل مقابل $f'(۲)$ کدام است؟



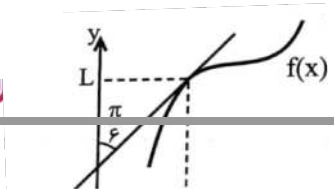
۱) $\sqrt{۳}$

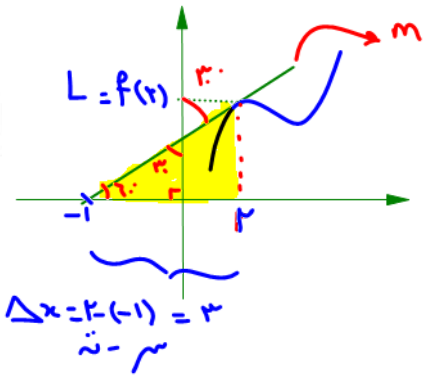
۲) ۱

۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ ✓

۴) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

تمرین: با توجه به شکل مقابل، حاصل $f'(۲)+f(۲)$ کدام است؟





$m = \tan\theta = \sqrt{3} = f'(2)$

$\tan\theta = \sqrt{3} : \frac{L = f(2)}{3} \rightarrow f(2) = 3\sqrt{3}$

$f(2) + f'(2) = 3\sqrt{3} + \sqrt{3} = 4\sqrt{3}$

۱) $\frac{10\sqrt{3}}{3}$

۲) $\frac{\sqrt{3}}{3} + 3$

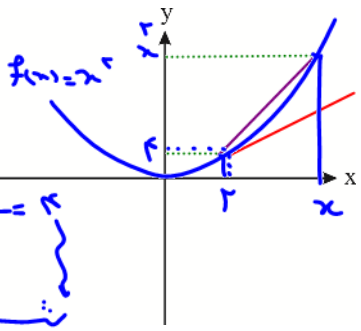
۳) $3\sqrt{3}$

۴) $4\sqrt{3}$

تمرین: شیب خط مماس بر منحنی توابع زیر را در نقاط خواسته‌شده به کمک تعریف مشتق پیدا کنید.

$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$

$f(x) = x^2 \; ; \; x = 2$



۲ نقطه به طول های x و 2

x^2 را روی y در نظر بگیرید

$f'(2) = \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} \overset{\frac{0}{0}}{=} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = 4$

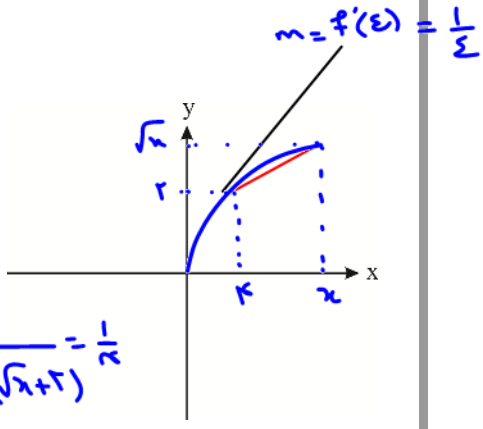
شیب خط مماس بر تابع f در نقطه $x = 2$

شیب خط واصل این ۲ نقطه را

وقتی $x \to 2$ بدست آورید $m = 4$

$f(x) = x^2 \longrightarrow f'(x) = 2x \quad f'(2) = 4$

$f(x) = \sqrt{x} \; ; \; x = 4$

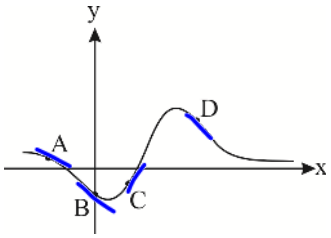


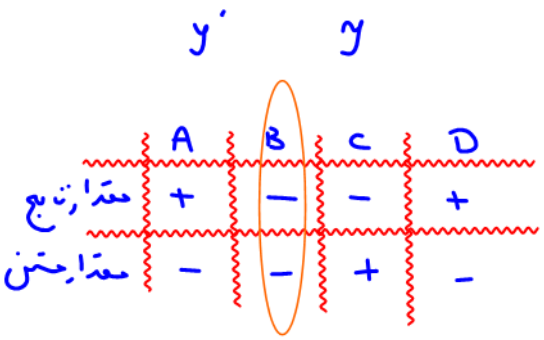
$m = f'(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}$

$f'(4) = \lim_{x \to 4} \frac{f(x) - f(\varepsilon)}{x - 4} = \lim_{x \to \varepsilon} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} = \lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)} = \frac{1}{4}$

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ (مثبت) تابع نزولی $\quad f'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$

تمرین: با توجه به نمودار روبه‌رو، در کدام‌یک از نقاط زیر مقدار تابع و مقدار مشتق، هم‌علامت هستند؟





	A	B	C	D
مقدار تابع	+	−	−	+
مقدار مشتق	−	−	+	−

$\begin{cases} f(B) < 0 \\ f'(B) < 0 \end{cases}$

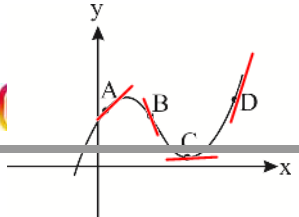
۱) A

۲) B ✓

۳) C

۴) D

تمرین: نمودار تابع مشتق‌پذیر f به صورت روبه‌رو است. اگر m شیب خط مماس در هر نقطه باشد، کدام گزینه درست است؟



۱) $m_D > m_A > m_B > m_C$

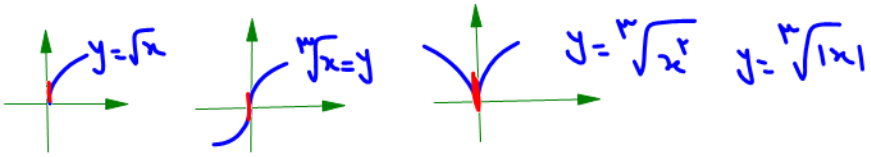
نکته: هرجا بتوان برتابع مماس افقی کشید مشتق صفر است و برعکس

۲) $m_A > m_D > m_B > m_C$

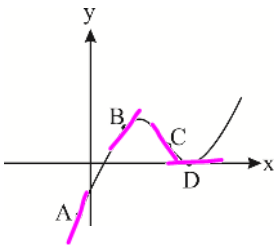
۳) $m_D > m_A > m_C > m_B$ ✓

۴) $m_A > m_D > m_C > m_B$

نکته: هرجا بتوان برتابع مماس قائم کشید مشتق ∞ است و برعکس



تمرین: نمودار تابع مشتق‌پذیر f به صورت زیر است. در کدام نقطه از نقاط مشخص‌شده روی شکل، مشتق کم‌ترین مقدار خود را دارد؟



$m_A > 0$
$m_B > 0$
$m_C < 0$
$m_D = 0$

۱) A

۲) B

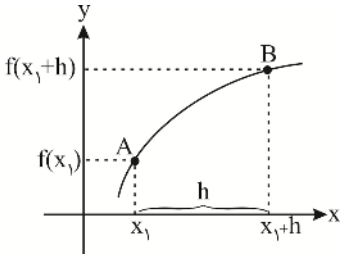
۳) C ✓ ($m_C < 0$)

۴) D

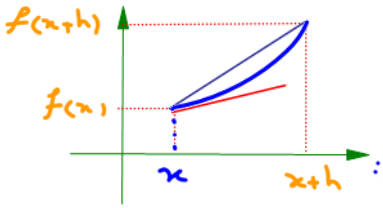
تعریف مشتق و محاسبه‌ی حد

گفتیم مشتق تابع f در نقطه‌ی x_1 از رابطه‌ی $f'(x_1) = \lim\limits_{x \to x_1} \frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}$ به دست می‌آید. این تعریف را می‌شود به شکل دیگری هم بنویسیم. اگر فرض کنیم $x - x_1 = h$ داریم $x = x_1 + h$ و وقتی $x \to x_1$ یعنی $h \to 0$، پس:

$$f'(x_1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h}$$



$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h}$$



تعریف مشتق در حالت کلی: $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

با استفاده از تعریف $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ می‌توانیم تابع مشتق بعضی از تابع‌ها را حساب کنیم. مثلاً اگر از ما بپرسند مشتق $f(x) = x^2$ را بیابید (و نگویند در چه نقطه‌ای، یعنی به صورت کلی) باید تعریف را بنویسیم:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2xh+h^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h(2x+h)}{h}=\lim_{h\to 0}2x+h=2x$$

اگر می‌گفت مشتق $f(x)=x^2$ رو توی مثلاً نقطه‌ی $x=2$ حساب کنید بهتر بود از تعریف مشتق در نقطه، یعنی $\lim_{x\to x_1}\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}$ استفاده می‌کردیم.

پس مشتق $f(x)=x^2$ همیشه به صورت $f'(x)=2x$ است یعنی شما هر عددی دوست داری جاگذاری کن و مشتق رو توی اون نقطه به دست بیار. مثلاً مشتق $f(x)=x^2$ در نقاط $x=1,2,3$ به ترتیب $f'(1)=2(1)=2$، $f'(2)=2(2)=4$ و $f'(3)=2(3)=6$ است.

معمولاً از تعریف دوم زمانی استفاده می‌کنیم که ضابطهٔ مشتق را بخواهیم. ولی با کمک تعریف اول، مقدار شیب خط مماس یا همان مقدار مشتق را در نقطهٔ $x=x_1$ محاسبه می‌کنیم.

تمرین: اگر $f'(1)=2$ باشد، حاصل $\lim_{h\to 0}\frac{f(1)-f(1+h)}{3h}$ کدام است؟

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) $-\frac{2}{3}$ ۴) $-\frac{3}{2}$

اگر مشتق تابع f در $x=a$ موجود باشد، آن‌گاه:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+mh)-f(a+nh)}{kh}=\frac{m-n}{k}f'(a)$$

تمرین: حاصل کدام‌یک با بقیه فرق می‌کند؟

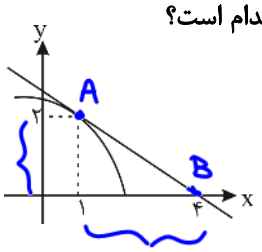
۱) $\lim_{h\to 0}\frac{f(2+3h)-f(2-h)}{2h}$ ۲) $\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{\frac{1}{2}h}$

۳) $\lim_{h\to 0}\frac{f(2-h)-f(2-5h)}{2h}$ ۴) $\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2+5h)}{2h}$

تمرین: اگر تابع f مشتق‌پذیر باشد و $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x-h)}{h}=2\sqrt{x}$، آن‌گاه $f'(4)$ کدام است؟ (سراسری ریاضی)

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{4}{3}$ ۳) ۴ ۴) ۲

تمرین: در شکل مقابل، خط مماس بر منحنی f در $x=1$ رسم شده است. حاصل $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$ کدام است؟



۱) $-\frac{۳}{۲}$ ۲) -۲

۳) $-\frac{۲}{۳}$ ✓ ۴) $-\frac{۱}{۲}$

$f'(1)=$ شیب خط مماس بر f در $x=1$

$\Delta x = ۴-۱ = ۳$ $\quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-۲}{۳}$

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{۰-۲}{۴-۱} = -\frac{۲}{۳} = f'(1)$

تعریف مشتق همیشه به شکل یک حد $\frac{۰}{۰}$ است پس برای رفع ابهام آن می‌توانیم از قاعده‌ی هوپیتال استفاده کنیم (به شرط آن که f مشتق‌پذیر باشد). فقط نکته‌ای که باید به آن خیلی دقت کنید، این است که هنگام هوپیتال گرفتن از صورت و مخرج کسر، نسبت به متغیری مشتق می‌گیریم که دارد به سمت صفر (یا هر چیز دیگر) میل می‌کند.

تمرین: اگر تابع f در $x=1$ مشتق‌پذیر و $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1-۲h)}{h+h^۲}=۴$ باشد، حاصل $f(1)+f'(1)$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) -۲ ۳) ۴ ۴) -۴

$f(1)=۰$ $\quad -۲$

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1-۲h)}{h+h^۲}$ مبهم $\frac{۰}{۰}$ صورت صفر

$\overset{\text{Hop}}{=} \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(-۲)f'(1-۲h)}{۱+۲h} = -۲f'(1) = ۴$ $\quad f'(1)=-۲$

تمرین: اگر $f(۳)=۲$ باشد و f تابعی مشتق‌پذیر باشد، حاصل حد $\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{f(۳x)-۲}{۶x-۶}$ چند برابر $f'(۳)$ است؟

پاسخ: خوب می‌بینی که جواب حد $\frac{۰}{۰}$ می‌شه:

$\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{f(۳)-۲}{۶-۶}=\dfrac{۲-۲}{۶-۶}=\dfrac{۰}{۰}$ مبهم

$\overset{\text{Hop}}{=}\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{۳f'(۳x)}{۶}=\frac{۱}{۲}f'(۳)$

واسه رفع ابهام نسبت به x، هُپ می‌زنیم:

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{۳f'(۳x)-۰}{۶}=\dfrac{۳}{۶}f'(۳)=\dfrac{۱}{۲}f'(۳)$

راستی $(f(۳x))'=۳f'(۳x)$ است. مثل $f(x^۲)$ که داشتیم: $(f(x^۲))'=۲xf'(x^۲)$

مثال $\begin{cases} f(x^۲) \text{ شود } ۲x f'(x^۲) \\ f(۳x) \text{ شود } ۳ f'(۳x) \end{cases}$

Homework (1)

۱ به ازای کدام مقدار a خط به معادلهٔ $y = -۳x + ۲$، بر منحنی به معادلهٔ $y = \frac{x^۲ + a}{x - ۲}$، مماس است؟

۱) -۱ ۲) صفر

۳) ۱ ۴) ۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۵

۲ مشتق تابع f در نقطهٔ $x = ۲$ به‌صورت $\lim_{h \to ۰} \frac{۲(۲+h)^۲ + k(۲+h) - ۲k - ۸}{h} = ۱۲$ بیان شده است، k کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳

۳) ۴ ۴) ۶

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۱

۳ خط گذرا از دو نقطهٔ $(۱, ۲)$ و $(-۱, ۳)$، بر منحنی پیوستهٔ $y = f(x)$ در نقطهٔ $x = ۳$ مماس است. حد عبارت $\frac{f^۲(x) + ۴f(x) - ۵}{۳ - x}$ وقتی $x \to ۳$، کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳

۳) ۴ ۴) ۵

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۲

۴ خط $۷y - x = ۵$ در ناحیهٔ اول صفحه مختصات بر منحنی $y = \frac{ax - ۱}{۳x + ۱}$ مماس است. مقدار a کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴

۳) $\frac{۴}{۷}$ ۴) $\frac{۹}{۷}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

پاسخ Homework (1)

۱ گزینه ۲

درصورتی‌که خط بر منحنی مماس باشد، معادلهٔ تلاقی دو منحنی، ریشهٔ مضاعف دارد:

$$\begin{matrix} y = \dfrac{x^۲ + a}{x - ۲} \\ y = -۳x + ۲ \end{matrix} \Rightarrow \frac{x^۲ + a}{x - ۲} = -۳x + ۲$$

$$\Rightarrow x^۲ + a = -۳x^۲ + ۸x - ۴ \Rightarrow ۴x^۲ - ۸x + (a + ۴) = ۰$$

برای به دست آوردن ریشهٔ مضاعف، $\Delta = ۰$ قرار می‌دهیم:

$$\Delta = ۰ \Rightarrow (-۸)^۲ - ۴(۴)(a + ۴) = ۰ \Rightarrow ۶۴ - ۱۶a - ۶۴ = ۰ \Rightarrow a = ۰$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۵

۲ گزینه ۳

روش اول:

حد داده‌شده را ساده کرده و سپس مقدار k را تعیین می‌کنیم:

$$\lim_{h \to ۰} \frac{۲(۲ + h)^۲ + k(۲ + h) - ۲k - ۸}{h} = ۱۲$$

$$\Rightarrow \lim_{h \to ۰} \frac{۲(۴ + ۴h + h^۲) + ۲k + kh - ۲k - ۸}{h} = ۱۲$$

$$\Rightarrow \lim_{h \to ۰} \frac{۸ + ۸h + ۲h^۲ + kh - ۸}{h} = ۱۲ \Rightarrow \lim_{h \to ۰} \frac{۲h^۲ + ۸h + kh}{h} = ۱۲$$

$$\Rightarrow \lim_{h \to ۰} ۲h + ۸ + k = ۱۲ \Rightarrow ۸ + k = ۱۲ \Rightarrow k = ۴$$

روش دوم: (فراتر از کتاب)

حد داده‌شده را با استفاده از قاعدهٔ هوپیتال حل می‌کنیم:

$$\lim_{h \to ۰} \frac{۲(۲ + h)^۲ + k(۲ + h) - ۲k - ۸}{h} = \frac{۰}{۰}$$

$$\xrightarrow{\text{هوپیتال}} \lim_{h \to ۰} \frac{۲ \times ۲(۱)(۲ + h) + k}{۱} = \lim_{h \to ۰} \frac{۸ + ۴h + k}{۱} = ۱۲$$

$$\Rightarrow ۸ + k = ۱۲ \Rightarrow k = ۴$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۱

۳ گزینه ۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۲

گام اول

الف) معادلهٔ خط گذرا از دو نقطهٔ (x_1, y_1) و (x_2, y_2) به‌صورت زیر است:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

ب) شیب خط مماس بر منحنی در یک نقطه، برابر مشتق تابع در آن نقطه است.

ج) خط در نقطهٔ $x = 3$ بر منحنی مماس است، بنابراین مختصات این نقطه در معادلهٔ خط و منحنی صدق می‌کند.

گام دوم

ابتدا معادلهٔ خط گذرا از دو نقطهٔ $A(1, 2)$ و $B(-1, 3)$ را به دست می‌آوریم:

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{3 - 2}{-1 - 1} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$$

$$y - y_A = m_{AB}(x - x_A) \Rightarrow y - 2 = -\frac{1}{2}(x - 1) \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$

طبق قسمت ج از گام اول داریم:

$$f(3) = y(3) = -\frac{1}{2}(3) + \frac{5}{2} = -\frac{3}{2} + \frac{5}{2} = 1 \Rightarrow f(3) = 1$$

باتوجه‌به قسمت ب از گام اول $f'(3) = \frac{-1}{2}$ است. اکنون با دو روش حاصل حد داده‌شده را به دست می‌آوریم.

روش اول:

$$\lim_{x\to 3} \frac{f^2(x) + 4f(x) - 5}{3 - x} = \lim_{x\to 3}\left(-\frac{(f(x) + 5)(f(x) - 1)}{x - 3}\right) = \lim_{x\to 3}\left(-(f(x) + 5)\frac{(f(x) - f(3))}{x - 3}\right)$$

$$= \lim_{x\to 3}\left(-(f(x) + 5)(f'(3))\right) = -(f(3) + 5)f'(3) = -6\left(-\frac{1}{2}\right) = 3$$

روش دوم: (فراتر از کتاب)

$$\lim_{x\to 3} \frac{f^2(x) + 4f(x) - 5}{3 - x} = \frac{f^2(3) + 4f(3) - 5}{3 - 3} = \frac{1 + 4 - 5}{3 - 3} = \frac{0}{0}$$

برای رفع ابهام از قاعدهٔ هوپیتال استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 3} \frac{f^2(x) + 4f(x) - 5}{3 - x} = \lim_{x\to 3} \frac{2f'(x)f(x) + 4f'(x)}{-1} = \frac{2f'(3)f(3) + 4f'(3)}{-1}$$

$$= \frac{2\left(-\frac{1}{2}\right)(1) + 4\left(-\frac{1}{2}\right)}{-1} = \frac{-1 - 2}{-1} = \frac{-3}{-1} = 3$$

۴ گزینه ۲

$$۷y - x = ۵ \Rightarrow y = \frac{x+۵}{۷}$$

$$\frac{ax-۱}{۳x+۱} = \frac{x+۵}{۷} \Rightarrow ۳x^۲ + ۱۵x + x + ۵ = ۷ax - ۷$$

$$\Rightarrow ۳x^۲ + (۱۶ - ۷a)x + ۱۲ = ۰ \quad (۱)$$

$$\Delta = ۰ \Rightarrow (۱۶ - ۷a)^۲ - ۱۲^۲ = ۰ \Rightarrow (۱۶ - ۷a)^۲ = ۱۲^۲ \Rightarrow \begin{cases} ۱۶ - ۷a = ۱۲ \\ ۱۶ - ۷a = -۱۲ \end{cases}$$

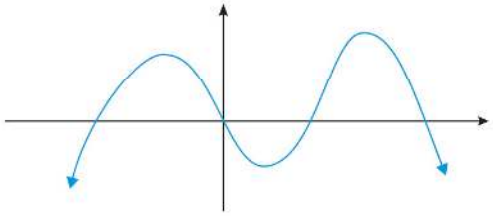
باید معادلهٔ (۱) ریشهٔ مضاعف مثبت داشته باشد، بنابراین $۱۶ - ۷a < ۰$ است.

$$۱۶ - ۷a = -۱۲ \Rightarrow ۷a = ۲۸ \Rightarrow a = ۴$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

Homework (2)

۱ نمودار تابع $y = f(x)$ مطابق شکل زیر است. معادلهٔ $f'(x) = ۰$ چند ریشهٔ حقیقی دارد؟



۱) صفر

۲) یک

۳) دو

۴) سه

۲ دو نقطه روی تابع $f(x) = x^۲$ مشخص کنید که شیب خط مماس در آن‌ها مثبت باشد و مشخص کنید که شیب خط مماس در کدام نقطه بزرگ‌تر است.

۳ اگر $f(x) = \frac{m}{x}$ باشد و شیب خط مماس بر f در نقطه‌ای به طول ۲ بزرگ‌تر از شیب خط $۲y = x + ۱$ باشد، حدود m کدام است؟

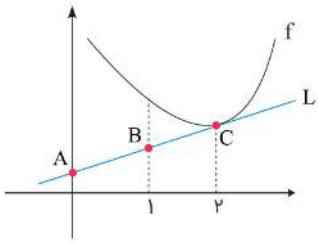
۱) $m > -۲$

۲) $m < -۲$

۳) $m < ۲$

۴) $m > ۲$

۴ در شکل زیر، تابع $f(x)$ بر خط L در نقطه‌ای به طول ۲ مماس است. اگر $f'(۲) = ۱$ و $f(۲) - ۲$ باشد، مقدار $\frac{|BC|}{|AB|}$ چقدر است؟



۱) ۱

۲) ۲

۳) ۳

۴) ۴

۵ اگر $f(x) = (x^۲ - ۹)\sin\frac{\pi}{۲x}$ باشد، مقدار $\lim\limits_{x\to ۳}\frac{f(x) - f(۳)}{x - ۳}$ کدام است؟

۱) ۳

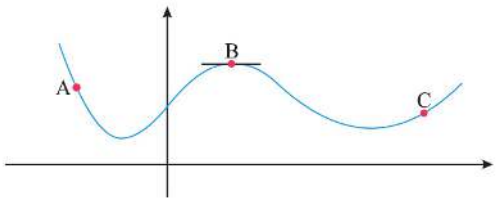
۲) ۲

۳) ۱

۴) ۴

۶ مشتق تابع $f(x) = \sqrt{x + ۸}$ را با استفاده از تعریف مشتق در $x_۰ = ۱$ به دست آورید.

۷ اگر نمودار $f(x)$ به‌صورت زیر باشد، کدام رابطه صحیح است؟



۱) $f'(x_A) + f'(x_C) > ۰$

۲) $f'(x_A) + f'(x_B) = ۰$

۳) $f'(x_A) > f'(x_C)$

۴) $|f'(x_A)| > f'(x_C)$

۸ خط گذرا از دو نقطهٔ $A(۱, ۲)$ و $B(-۱, -۶)$ با خط مماس بر تابع $f(x) = x^۲$ در نقطه‌ای به طول c موازی است، c کدام است؟

۱) ۲

۲) ۳

۳) ۱

۴) -۱

۹ اگر $\lim_{x \to ۴} \frac{f(x) - f(۴)}{۲(x - ۴)} = ۱ - \lim_{h \to ۰} \frac{f(۴ + h) - f(۴)}{h}$ باشد، مشتق تابع $f(x)$ در نقطه‌ای به طول ۴ واقع بر منحنی چقدر است؟

۱) $\frac{۳}{۲}$

۲) $\frac{۲}{۳}$

۳) ۲

۴) ۳

۱۰ در چند نقطه از تابع $f(x) = \log x$ شیب خط مماس برابر صفر است؟

۱) صفر

۲) یک

۳) دو

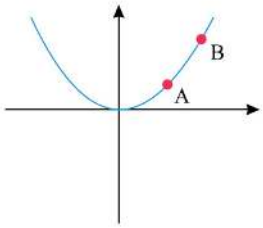
۴) بی‌شمار

پاسخ Homework (2)

۱ گزینه ۴

در نقاطی که خطوط مماس در آن‌ها موازی محور xها است، مشتق برابر صفر است، پس در سه نقطه مشتق برابر صفر است.

۲



$$m_B > m_A$$

۳ گزینه ۲

$$f'(۲) = \lim_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲} = \lim_{x\to ۲}\frac{\frac{m}{x}-\frac{m}{۲}}{x-۲} = \lim_{x\to ۲}\frac{-m(x-۲)}{۲x(x-۲)} = \lim_{x\to ۲}\frac{-m}{۲x} = -\frac{m}{۴} > \frac{۱}{۲}$$
$$\xrightarrow{\times(-۴)} m < -۲$$

۴ گزینه ۱

باتوجه‌به اطلاعات مسئله $f(۲) = ۳$ و $f'(۲) = ۱$ است.

$$m_L = f'(۲) = m_{AB} = m_{BC} \Rightarrow \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = ۱ \Rightarrow \frac{y_B - y_A}{۱} = \frac{۳ - y_B}{۱} = ۱$$
$$\Rightarrow \begin{cases} y_B = ۲ \\ y_A = ۱ \end{cases} \Rightarrow A(۰\,,\,۱)\,,\, B(۱\,,\,۲)$$

$$\frac{|BC|}{|AB|} = \frac{\sqrt{(۲-۳)^۲ + (۱-۲)^۲}}{\sqrt{(۲-۱)^۲ + (۱-۰)^۲}} = ۱$$

۵ گزینه ۱

$$f'(۳)=\lim_{x\to ۳}\frac{(x^۲-۹)\sin\frac{\pi}{۲x}}{x-۳}=\lim_{x\to ۳}(x+۳)\sin\frac{\pi}{۲x}=۶\times\frac{۱}{۲}=۳$$

۶

$$\lim_{x\to x_۰}\frac{f(x)-f(x_۰)}{x-x_۰}=\lim_{x\to ۱}\frac{\sqrt{x+۸}-۳}{x-۱}\times\frac{\sqrt{x+۸}+۳}{\sqrt{x+۸}+۳}=\lim_{x\to ۱}\frac{(x-۱)}{(x-۱)(\sqrt{x+۸}+۳)}=\frac{۱}{۶}$$

۷ گزینه ۴

شیب خط مماس در نقاط A، B و C به‌ترتیب منفی، صفر و مثبت است، اما دقت کنید که اندازهٔ شیب در نقطهٔ A از اندازهٔ شیب در نقطهٔ C بیش‌تر است، پس $|f'(x_A)|>f'(x_C)$ است.

۸ گزینه ۱

$$f'(c)=m_{AB}\Rightarrow\lim_{x\to c}\frac{x^۲-c^۲}{x-c}=\frac{۲-(-۶)}{۱-(-۱)}=\lim_{x\to c}\frac{(x-c)(x+c)}{x-c}=۴\Rightarrow ۲c=۴\Rightarrow c=۲$$

۹ گزینه ۲

باتوجه‌به تعریف مشتق:

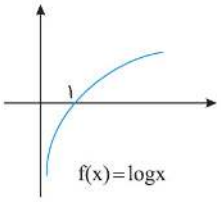
$$f'(۴)=\lim_{x\to ۴}\frac{f(x)-f(۴)}{x-۴}=\lim_{h\to ۰}\frac{f(۴+h)-f(۴)}{h}$$

طبق دادهٔ مسئله:

$$f'(۴)=۱-\frac{۱}{۲}f'(۴)\Rightarrow\frac{۳}{۲}f'(۴)=۱\Rightarrow f'(۴)=\frac{۲}{۳}$$

۱۰ گزینه ۱

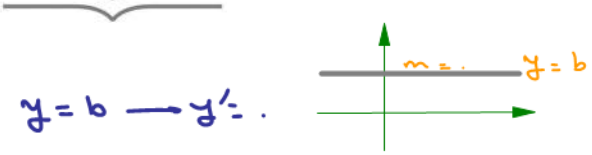
روی تابع $\log x$ هیچ نقطه‌ای وجود ندارد که مماس در آن‌ها موازی محور xها باشد. (نمودار آن را ببینید)



درس ۲: روابط محاسبه‌ی مشتق

محاسبه‌ی مشتق بعضی از توابع

۱) تابع ثابت $f(x)=c$ به صورت خط افقی است که شیب آن صفر است. پس $f'(x)=0$ می‌باشد.



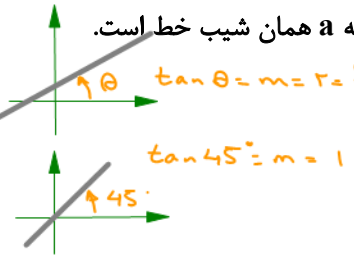
۲) مشتق تابع $f(x)=ax+b$ برابر a است یعنی $f'(x)=a$ که a همان شیب خط است.

مثلاً:

$f(x)=2x+6 \Rightarrow f'(x)=2$

$f(x)=\frac{x}{2} \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2}$

$f(x)=x \Rightarrow f'(x)=1$



۳) مشتق تابع $f(x)=x^m$ به صورت $f'(x)=mx^{m-1}$ است.

مثلاً:

$f(x)=x^2 \rightsquigarrow f'(x)=2x$

$f(x)=x^3 \rightsquigarrow f'(x)=3x^2$

$f(x)=\frac{1}{x^2}=x^{-2} \rightsquigarrow f'(x)=-2x^{-3}=-\frac{2}{x^3}$

$f(x)=\frac{1}{x^3}=x^{-3} \rightsquigarrow f'(x)=-3x^{-4}=-\frac{3}{x^4}$

$f(x)=\sqrt[5]{x^3}=x^{\frac{3}{5}} \rightsquigarrow f'(x)=\frac{3}{5}x^{\frac{3}{5}-1}=\frac{3}{5}x^{-\frac{2}{5}}=\frac{3}{5}\frac{1}{x^{\frac{2}{5}}}=\frac{3}{5\sqrt[5]{x^2}}$

$f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}=x^{-\frac{1}{3}} \rightsquigarrow f'(x)=-\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}$

۴) اگر عددی پشت تابع ضرب شده باشد، عیناً پشت تابعِ مشتق نیز ضرب می‌شود. یعنی مشتقِ $kf(x)$ برابر است با $kf'(x)$.

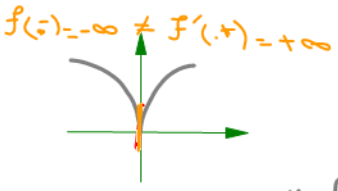
$f(x)=3x^7 \rightsquigarrow y'=3(7x^6)$

$f(x)=5\sqrt[3]{x^2}=5x^{\frac{2}{3}} \rightarrow y'=5\left(\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}\right)=\frac{10}{3\sqrt[3]{x}}$

$f(x)=\frac{3}{x^2}=3x^{-2} \rightsquigarrow y'=3(-2x^{-3})$

$f(x)=2\sqrt{x}+5 \rightarrow y'=2\left(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)=x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{x}}$

$f(x)=\frac{3}{2}\sqrt{2x+3}+7 \rightarrow y'=\frac{3}{2}\left(\frac{2}{2\sqrt{2x+3}}\right)+0$



$\begin{cases} y=\sqrt{u} \\ y'=\frac{u'}{2\sqrt{u}} \end{cases} \quad \begin{cases} y=\sqrt{x} \\ y'=\frac{1}{2\sqrt{x}} \end{cases}$

۵) اگر بین تابع‌ها جمع و تفریق داشته باشیم کافیه از هر کدوم از تابع‌ها جداگانه مشتق بگیریم و علامت جمع و تفریق هم بذاریم باشه.

$f(x)=x^3-x^2 \rightarrow y'=3x^2-2x$

$f(x)=6x-x^2+7\sqrt{x} \rightarrow f'(x)=6-2x+7\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$

۶) اگر دو تابع در هم ضرب شده باشند، مشتق حاصل ضربشان از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید. (u و v توابعی برحسب x هستند.)

$$y=u\cdot v \Rightarrow y'=\underbrace{u'}_{\text{مشتق اولی}}\cdot\underbrace{v}_{\text{خود دومی}}+\underbrace{v'}_{\text{مشتق دومی}}\cdot\underbrace{u}_{\text{خود اولی}}$$

به زبان فارسی: مشتق اولی در خود دومی به علاوه‌ی مشتق دومی در خود اولی.

$f(x)=(x^2-1)(7x^3+5x^2+x^5)$

$f'(x)=(2x)(7x^3+5x^2+x^5)+(21x^2+10x+5x^4)(x^2-1)$

۷) اگر دو تابع به هم تقسیم شوند برای محاسبه‌ی مشتق تقسیم آن‌ها به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$y=\frac{u}{v} \Rightarrow y'=\frac{u'v-v'u}{v^2}$$

u و v توابعی برحسب x هستند.

به زبان فارسی: مشتق صورت در خود مخرج منهای مشتق مخرج در خود صورت تقسیم بر مخرج به توانِ دو.

$$f(x)=\frac{u}{v} \Rightarrow f'(x)=\frac{u'v-v'u}{v^2}$$

به زبان فارسی:

$$f'=\frac{(\text{مشتق صورت})\times(\text{خود مخرج})-(\text{مشتق مخرج})\times(\text{خود صورت})}{(\text{مخرج})^2}$$

مثلاً:

$$f(x)=\frac{2x^2-7x}{3x^2+9x+5}$$

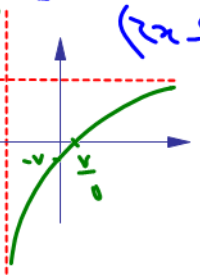
$$y'=\frac{(4x-7)(\text{مخرج})-(6x+9)(2x^2-7x)}{(3x^2+9x+5)^2}$$

$$f'(x)=\frac{(2(2x)-7)(3x^2+9x+5)-(3(2x)+9)(2x^2-7x)}{(3x^2+9x+5)^2}$$

$$f(x)=\frac{2x+5}{6x-9} \longrightarrow y'=\frac{2(2x-9)-2(2x+5)}{(2x-9)^2}=\frac{2(-9)-2(5)}{(2x-9)^2}$$

تابع هموگرافیک: $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ ، $y'=\frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$

$$f(x)=\frac{5x-7}{x+1} \qquad y'=\frac{5(1)-(-7)(1)}{(x+1)^2}$$



$$f(x)=\frac{x+7}{x-2} \qquad y'=\frac{1(-2)-7(1)}{(x-2)^2}$$

در حالت کلی مشتق تابع هموگرافیک $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ به صورت $f'(x)=\frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$ است.

جون هر کی دوست داری فقط وقتی از این فرمول استفاده کن که صورت و مخرج با عبارتِ xدار شروع بشن یعنی این غلطه:

$$f(x)=\frac{1-2x}{6x-7} \Rightarrow f'(x)=\frac{(1)(-7)-(6)(-2)}{(6x-7)^2}$$ ✗ غ

درستش اینه:

$$f(x)=\frac{-2x+1}{6x-7} \Rightarrow f'(x)=\frac{(-2)(-7)-(6)(1)}{(6x-7)^2}$$

حالا یه چیزه باحال. یادته که مشتق $f(x)=\frac{1}{x}$ رو چطوری به دست می‌آوردیم؟

$$f(x)=\frac{1}{x}=x^{-1} \Rightarrow f'(x)=(-1)x^{-2}=\frac{-1}{x^2}$$

ولی از راه مشتق کسری هم می‌تونیم به دست بیاریمش:

$$f(x)=\frac{1}{x} \Rightarrow f'(x)=\frac{0-1}{x^2}=-\frac{1}{x^2}$$

$$y=\frac{1}{u} \qquad y'=\frac{-u'}{u^2}$$

$$y=\frac{3}{x^2+4x} \qquad y'=\frac{-3(2x+4)}{(x^2+4x)^2}$$

ولی در حالت کلی یادت باشه که:

$y=\frac{k}{u} \longrightarrow y'=\frac{-ku'}{u^2}$

$$f(x)=\frac{k}{x} \Rightarrow f'(x)=\frac{-k}{x^2} \quad k \text{ یک عدد است.}$$

$f(x)=\frac{2}{x} \longrightarrow y'=\frac{-2}{x^2}$

$f(x)=\frac{-3}{x} \longrightarrow y'=\frac{3}{x^2}$

اگر در تمام فرمول‌های مشتق به جای x عبارت u که عبارتی برحسب x است قرار بگیرد، در این صورت داریم:

۱) $y=u^n \Rightarrow y'=nu'u^{n-1}$

توی u ایکس داریم u تابعی برحسب x است مثلاً $u=x^3-4x$

$y=(x^3-4x)^7 \rightsquigarrow y'=7(3x^2-4)(x^3-4x)^6$

پایه عبارت توان‌دار را u می‌گیریم.

۲) $y=\frac{1}{u} \Rightarrow y'=\frac{-u'}{u^2}$

۳) $y=\sqrt{u} \Rightarrow y'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$

۴) $y=\sqrt[3]{u} \Rightarrow y'=\frac{u'}{3\sqrt[3]{u^2}}$

۵) $y=\sqrt[n]{u} \Rightarrow y'=\frac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$

۶) $y=\frac{au+b}{cu+d} \Rightarrow y'=\frac{ad-bc}{(cu+d)^2}(u')$ شبیه هموگرافیک

تمرین: مشتق توابع زیر را به‌دست آورید:

الف) $y=(x^2+3x-1)^7$

$y'=7(2x+3-0)(x^2+3x-1)^6$

ب) $y=5(x^2+x-1)^6$

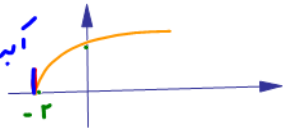
$y'=5(7)(2x+1-0)(x^2+x-1)^6$

پ) $y=f^3(x)=u^3$

$y'=3f'(x)f^2(x)$

$\begin{cases} y=f^2(x) \\ y'=2f'(x)f(x) \end{cases}$ $\quad \begin{cases} y=\sqrt{f(x)} \\ y'=\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} \end{cases}$

ت) $y=\sqrt{4+2x}$ $\quad y'=\frac{2}{2\sqrt{4+2x}}>0$ ابتدا صعودی



$f'_+(-2)=\oplus$ صعودی

پس حتماً قائم

ث) $y=\sqrt{x^2-3x}$ $\quad y'=\frac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x}}$

ج) $y=\sqrt{\frac{2x-1}{3x+2}}$

$y'=\frac{\frac{2(2)-(-1)(3)}{(3x+2)^2}}{2\sqrt{\frac{2x-1}{3x+2}}}$

ج) $y=\sqrt{f(x)}$

$y'=\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$

ح) $y=\frac{3x^2+1}{x^2+1}$

$y'=\left(\frac{3(1)-(1)(1)}{(x^2+1)^2}\right)(2x)$

خ) $y=\frac{5\sqrt{x}-1}{3\sqrt{x}+2}$

$y'=\left(\frac{5(2)-(-1)(3)}{(3\sqrt{x}+2)^2}\right)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$

تمرین: مشتق تابع $y=\frac{f(x)}{g(x)}$ در نقطه‌ی $x=1$ برابر ۳ است. اگر $f(1)=0$، $f'(1)=-4$ و $g'(1)$ موجود باشد، مقدار $g(1)$ کدام است؟ (سراسری تجربی)

۱) $-\frac{4}{3}$ ۲) $-\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) $\frac{4}{3}$

$y'=\frac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{g^2(x)}$

$x=1$

$3=\frac{f'(1)g(1)-g'(1)f(1)}{g^2(1)}$ ($f'(1)=-4$، $f(1)=0$ صفر)

$3=\frac{-4}{g(1)}\rightarrow g(1)=-\frac{4}{3}$

تمرین: مقدار مشتق تابع $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x-1}}$ در $x=5$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{16}$ ۲) $\frac{3}{32}$ ۳) $\frac{5}{16}$ ۴) $\frac{5}{32}$

$y'=\frac{1(\sqrt{x-1})-(\frac{1}{2\sqrt{x-1}})x}{(\sqrt{x-1})^2}=\frac{2-\frac{5}{4}}{4}=\frac{\frac{3}{4}}{4}=\frac{3}{16}$

تمرین: مشتق تابع $f(x)=x\sqrt[3]{\frac{3x+1}{x+2}}$ در نقطهٔ $x=-3$، کدام است؟ (تجربی خارج از کشور ۹۸)

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۴}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

$f(x)=x\sqrt[۳]{\frac{۳x+۱}{x+۲}}$

$f'(x)=۱\sqrt[۳]{\frac{۳x+۱}{x+۲}}+\left(\frac{\frac{۳(x+۲)-۱(۱)}{(x+۲)^۲}}{۳\sqrt[۳]{\left(\frac{۳x+۱}{x+۲}\right)^۲}}\right)x \xrightarrow{x=-۳} ۲+\left(\frac{۵}{۱۲}\right)(-۳)=۲-\frac{۵}{۴}=\frac{۳}{۴}$

تمرین: مقدار مشتق تابع با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt[۳]{(\frac{۲x-x^۲}{۳x+۵})^۲}$ در نقطهٔ $x=-۲$، کدام است؟ (سراسری تجربی خارج از کشور ۹۹)

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

$y=\left(\frac{۲x-x^۲}{۳x+۵}\right)^{\frac{۲}{۳}}$ $y=u^n \rightarrow y'=n\,u'\,u^{n-۱}$

$y'=\frac{۲}{۳}\left(\frac{(۲-۲x)(۳x+۵)-۳(۲x-x^۲)}{(۳x+۵)^۲}\right)\left(\frac{۲x-x^۲}{۳x+۵}\right)^{-\frac{۱}{۳}} \xrightarrow{x=-۲} \frac{۲}{۳}(۱۸)\left(\frac{۱}{۲}\right)=۶$

$-۶+۲۴=۱۸$ $\frac{۱}{۲}$

تمرین: مشتق تابع با ضابطهٔ $f(x)=(\frac{\sqrt[۳]{x^۲+۲x}}{x^۲-x})^۳$، در نقطهٔ $x=۲$، کدام است؟ (سراسری تجربی ۹۹)

۱) $-\frac{۳}{۴}$ ۲) $-\frac{۵}{۴}$ ۳) $-\frac{۵}{۲}$ ۴) $-\frac{۱۵}{۴}$

$y=u^۳ \rightarrow y'=۳\,u'\,u^۲$

$f'(x)=۳\left(\frac{\left(\frac{۲x+۲}{۳\sqrt[۳]{(x^۲+۲x)^۲}}\right)(x^۲-x)-(۲x-۱)\sqrt[۳]{x^۲+۲x}}{(x^۲-x)^۲}\right)\left(\frac{\sqrt[۳]{x^۲+۲x}}{x^۲-x}\right)^۲ = ۳\left(-\frac{۵}{۴}\right)=-\frac{۱۵}{۴}$

بیژن حسابان

تمرین: فرض کنید $f(x)=\cos^۳(۲x)-ax^۲+b$، $\lim\limits_{x\to ۰^+}\frac{f(x)}{x}=۰$ و $\lim\limits_{x\to ۰^-}\frac{f'(x)}{x}=۲$. مقدار $a+b$ کدام است؟ (سراسری ریاضی ۱۴۰۰)

$f(x)=۱-۳\left(\frac{۱+\cos(۴x)}{۲}\right)+ax^۲+b$

$f(x)=(-۲+a)x^۲+(b+۱)$

$\lim\limits_{x\to ۰}\frac{f(x)}{x}=\frac{b+۱}{۰}=۰ \Rightarrow b+۱=۰ \Rightarrow b=-۱$

$\lim\limits_{x\to ۰^-}\frac{f'(x)}{x}=\frac{۲(-۲+a)x}{x}=۲ \Rightarrow -۲+a=۱ \Rightarrow a=۳$

۱) ۸ ۲) ۶ ۳) ۴ ۴) −۸

پاسخ: گزینهٔ «۲» ـ چون $x \to ۰$، پس حق داریم از هم‌ارزی $\cos^n(u) \sim ۱ - \frac{nu^۲}{۲}$ استفاده کنیم. ابتدا هم‌ارز تابع f را در $x = ۰$ می‌نویسیم:

$$f(x) = \cos^۳(۲x) + ax^۲ + b \sim (۱ - \frac{۳(۲x)^۲}{۲}) + ax^۲ + b = ۱ - ۶x^۲ + ax^۲ + b = (a-۶)x^۲ + b + ۱$$

ضابطهٔ f' را هم حساب می‌کنیم:

$$f'(x) = ۲(a-۶)x$$

حالا از دو حد داده‌شده، کمک می‌گیریم:

$$۱)\ \lim_{x \to ۰^+} \frac{f(x)}{x} = ۰ \Rightarrow \lim_{x \to ۰^+} \frac{(a-۶)x^۲ + (b+۱)}{x} = ۰ \Rightarrow b + ۱ = ۰ \Rightarrow b = -۱$$

اگر $b+۱$ صفر نمی‌شد، حاصل حد، بی‌نهایت می‌شد.

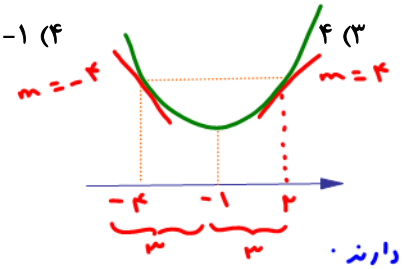
$$۲)\ \lim_{x \to ۰^-} \frac{f'(x)}{x} = ۲ \Rightarrow \lim_{x \to ۰^-} \frac{۲(a-۶)x}{x} = ۲ \Rightarrow ۲(a-۶) = ۲ \Rightarrow a = ۷$$

پس:

$$a + b = ۷ + (-۱) = ۶$$

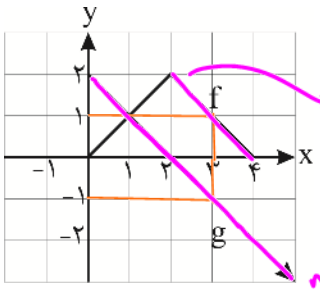
تمرین: اگر f تابعی درجه دوم و مختصات رأس آن $S(-۱,۲)$ و $f'(۲) = ۴$ باشد، آن‌گاه $f'(-۴)$ کدام است؟

۱) −۴ ۲) −۲ ۳) ۴ ۴) −۱



تمرین: نمودار دو تابع f و g در زیر رسم شده است. حاصل $(f.g)'(۳)$ کدام است؟

۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) −۲



یادآوری: اگر u، عبارتی برحسب x باشد آن‌گاه مشتق $f(u)$ به شکل روبه‌رو محاسبه می‌شود:

$$y = f(u) \Rightarrow y' = u'f'(u)$$

به مثال‌های زیر دقت کنید:

$y = f(\frac{x}{2}) \longrightarrow y' = \frac{1}{2} f'(\frac{x}{2})$

$y = f(x^2) \longrightarrow y' = 2x f'(x^2)$

$y = f(\sqrt{x}) \longrightarrow y' = (\frac{1}{2\sqrt{x}}) f'(\sqrt{x})$

$y = f(x^3 + 5x) \longrightarrow y' = (3x^2 + 5) f'(x^3 + 5x)$

می‌توان ثابت کرد که مشتق تابع $f(x) = u^n$ که در آن u عبارتی برحسب x است (یعنی u تو دلش x داره) به صورت زیر حساب می‌شود:

$$f(x) = u^n \Rightarrow f'(x) = nu'u^{n-1}$$

مثلاً:

$$f(x) = (x^2 - 3x)^7 \Rightarrow f'(x) = \underbrace{7}_{n}\underbrace{(2x-3)}_{u'}\underbrace{(x^2-3x)^6}_{u^{n-1}}$$

$$f(x) = (2x-3)^6 \Rightarrow f'(x) = 6(2)(2x-3)^5$$

تمرین: در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = (\sqrt{\frac{x+2}{2x-3}})^3$، حاصل $\lim\limits_{x\to 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2}$ کدام است؟ (سراسری ۹۵)

۱) -21 ۲) -18 ۳) ۱۲ ۴) ۱۵

تعریف مشتق تابع در $x=2$: $f'(2)$

$$f'(x) = 3\left(\frac{\frac{-3-4}{(2x-3)^2}}{2\sqrt{\frac{x+2}{2x-3}}}\right)\left(\sqrt{\frac{x+2}{2x-3}}\right)^2$$

$$f'(2) = 3\left(\frac{-7}{1}\right)\left(\frac{4}{4}\right) = -21$$

دیزه حسابان: مشتق توابع مثلثاتی در حالت کلی:

تابع مثلثاتی × مشتق تابع × مشتق کل × توان × ضریب به توان یکی کمتر

$$\begin{cases} y = 3\sin^7(\sqrt{x}) \\ y' = 3(7)(\frac{1}{2\sqrt{x}})\cos(\sqrt{x})\sin^6(\sqrt{x}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 4\cos^3(\frac{1}{x}) \\ y' = 4(3)(-\frac{1}{x^2})(-\sin\frac{1}{x})\cos^2(\frac{1}{x}) \end{cases}$$

۱ به ازای کدام مقدار a خط به معادلهٔ $y = -۳x + ۲$، بر منحنی به معادلهٔ $y = \frac{x^۲ + a}{x - ۲}$، مماس است؟

۱) -۱ ۲) صفر

۳) ۱ ۴) ۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۵

۲ مشتق تابع با ضابطهٔ $f(x) = \frac{(x-۱).\sqrt[۵]{۳x-۲}}{(۵x-۳)^۴}$ در نقطهٔ $x = ۱$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۱۶}$ ۲) $\frac{۱}{۸}$

۳) $\frac{۳}{۴۰}$ ۴) $\frac{۵}{۱۶}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۳

۳ اگر $f(x) = (x-۴)\sqrt[۳]{x+۳}$ باشد، حاصل $\lim_{h\to ۰} \frac{f^۲(۵-h) - ۳f(۵-h) + ۲}{h(۵-h)}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱۳}{۳۰}$ ۲) $-\frac{۵}{۱۲}$

۳) $\frac{۵}{۶}$ ۴) $-\frac{۱۳}{۱۵}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۱

۴ مشتق تابع f در نقطهٔ $x = ۲$ به‌صورت $\lim_{h\to ۰} \frac{۲(۲+h)^۲ + k(۲+h) - ۲k - ۸}{h} = ۱۲$ بیان شده است، k کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳

۳) ۴ ۴) ۶

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۱

۵ خط گذرا از دو نقطهٔ $(۱, ۲)$ و $(-۱, ۳)$، بر منحنی پیوستهٔ $y = f(x)$ در نقطهٔ $x = ۳$ مماس است. حد عبارت $\frac{f^۲(x) + ۴f(x) - ۵}{۳ - x}$ وقتی $x \to ۳$، کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳

۳) ۴ ۴) ۵

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۲

۶ خط $۷y - x = ۵$ در ناحیهٔ اول صفحه مختصات بر منحنی $y = \frac{ax - ۱}{۳x + ۱}$ مماس است. مقدار a کدام است؟

۱) ۳
۲) ۴
۳) $\frac{۴}{۷}$
۴) $\frac{۹}{۷}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

۷ اگر $f(x) = \sqrt{x + ۸} - \sqrt{x}$ و $g(x) = \frac{۱}{\sqrt{x + ۸} + \sqrt{x}}$ باشد، حاصل عبارت $f'(۱)g(۱) - g'(۱)f(۱)$ کدام است؟

۱) صفر
۲) ۱
۳) ۳
۴) ۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۳

۸ اگر $g(x) = \sqrt{۲x}$ و $f(x) = (x^۲ - x)$، حاصل $\lim_{\Delta x \to ۰} \frac{f(۲ + \Delta x)\, g(۲ + \Delta x) - f(۲)\, g(۲)}{\Delta x}$ برابر کدام است؟

۱) ۳
۲) ۴
۳) ۶
۴) ۷

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۲

۹ به ازای کدام مقدار m نمودار تابع $y = ۲x^۲ + (m + ۱)x + m + ۶$ بر نیمساز ناحیهٔ اوّل محورهای مختصات، مماس است؟

۱) -۴
۲) ۴ و -۱۲
۳) ۴- و ۱۲
۴) ۱۲

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۳

۱۰ اگر $f(x) = (x - ۲)\sqrt[۳]{x^۲}$، حاصل $\lim_{\Delta x \to ۰} \frac{f(-۱ + \Delta x) - f(-۱)}{\Delta x}$ کدام است؟

۱) ۲
۲) ۳
۳) $\frac{۲}{۳}$
۴) $\frac{۴}{۳}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۴

۱۱ مشتق تابع $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ در نقطهٔ $x = ۱$ برابر ۳ است. اگر $f(۱) = ۰$ و $f'(۱) = -۴$ و $g'(۱)$ موجود باشد، مقدار $g(۱)$ کدام است؟

۱) $-\frac{۴}{۳}$
۲) $-\frac{۳}{۴}$
۳) $\frac{۳}{۴}$
۴) $\frac{۴}{۳}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۱

۱۲ اگر تابع f در $x=-۲$ مشتق‌پذیر و $\lim\limits_{h\to ۰}\frac{f(-۲+h)+۳}{h}=\frac{۱}{۲}$ باشد، آنگاه مشتق $x^۲f(x)$ در $x=-۲$، کدام است؟

۱) ۸
۲) ۱۰
۳) ۱۲
۴) ۱۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۶

۱۳ تابع چندجمله‌ای درجهٔ دوم با ضرایب طبیعی $P(x)$ مفروض است. اگر باقی‌مانده و خارج‌قسمت تقسیم $P(x)$ بر $P'(x)$ (مشتق تابع $P(x)$) به‌ترتیب -۲ و $\frac{۱}{۲}x+۱$ باشند، کمترین مقدار مجموع ضرایب $P(x)$، کدام است؟

۱) ۴
۲) ۶
۳) ۷
۴) ۹

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۰

۱۴ باقی‌مانده و خارج قسمت تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x^۲+۲x$ به‌ترتیب $۳x+۱$ و $Q(x)$ است. اگر $Q(-۲)=۳$، آنگاه مقدار باقی‌ماندهٔ تقسیم $P'(x)$ بر $x+۲$، کدام است؟

۱) -۶
۲) -۵
۳) -۴
۴) -۳

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۰

۱۵ فرض کنید نمودارهای دو تابع $y=x\sqrt{x}$ و $y=x^۲+ax+b$ در یک نقطهٔ مشترک، بر یک خط مماس باشند. اگر طول نقطهٔ مشترک ۴ باشد، مقدار b کدام است؟

۱) ۸
۲) ۹
۳) ۱۰
۴) ۱۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

۱۶ خط مماس بر نمودارهای دو تابع با ضابطه‌های $f(x)=\frac{x+۲}{x-۱}$ و $g(x)=ax^۲+bx$، در نقطهٔ $x=۲$، مشترک‌اند. مقدار b کدام است؟

۱) ۴
۲) ۵
۳) ۶
۴) ۷

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۱۷ در تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{۱+\sqrt{x}}{۵-۲x}$، حاصل $\lim\limits_{x\to ۴}\frac{f(x)-f(۴)}{x-۴}$ کدام است؟

۱) $\frac{۴}{۹}$
۲) $\frac{۵}{۱۲}$
۳) $\frac{۷}{۱۲}$
۴) $\frac{۵}{۶}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۱۸ در تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{-x-۱}{\sqrt{x}}$، حاصل $\lim_{h\to ۰}\frac{f(\frac{۱}{۴}+h)-f(\frac{۱}{۴})}{h}$ کدام است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

پاسخ Homework

-

۱ گزینه ۲

درصورتی‌که خط بر منحنی مماس باشد، معادلهٔ تلاقی دو منحنی، ریشهٔ مضاعف دارد:

$$\left.\begin{matrix} y=\dfrac{x^۲+a}{x-۲} \\ y=-۳x+۲ \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{x^۲+a}{x-۲}=-۳x+۲$$

$$\Rightarrow x^۲+a=-۳x^۲+۸x-۴ \Rightarrow ۴x^۲-۸x+(a+۴)=۰$$

برای به دست آوردن ریشهٔ مضاعف، $\Delta=۰$ قرار می‌دهیم:

$$\Delta=۰ \Rightarrow (-۸)^۲-۴(۴)(a+۴)=۰ \Rightarrow ۶۴-۱۶a-۶۴=۰ \Rightarrow a=۰$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۵

۲ گزینه ۱

به ازای $x=۱$ عبارت $(x-۱)$ برابر صفر می‌شود (عامل صفرشونده)، همچنین تابع $g(x)=\dfrac{\sqrt[۵]{۳x-۲}}{(۵x-۳)^۴}$ نیز در نقطهٔ $x=۱$ پیوسته است؛ بنابراین برای به دست آوردن مقدار $f'(۱)$ کافی است مشتق عبارت $(x-۱)$ را در تابع $g(x)$ ضرب و حاصل را به ازای $x=۱$ محاسبه می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{(x-۱)\sqrt[۵]{۳x-۲}}{(۵x-۳)^۴} \xrightarrow[\text{در نقطهٔ } x=۱]{\text{عبارت } (x-۱) \text{ عامل صفرشونده}} f'(x)=۱\times\frac{\sqrt[۵]{۳x-۲}}{(۵x-۳)^۴}$$

$$\Rightarrow f'(۱)=\frac{\sqrt[۵]{۳-۲}}{(۵-۳)^۴}=\frac{۱}{۲^۴}=\frac{۱}{۱۶} \Rightarrow f'(۱)=\frac{۱}{۱۶}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۳

۳ گزینه ۲

$$f(x)=(x-۴)\sqrt[۳]{x+۳} \Rightarrow f'(x)=\sqrt[۳]{x+۳}+(x-۴)\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{(x+۳)^۲}}$$

$$f(۵)=۲ \quad , \quad f'(۵)=\frac{۲۵}{۱۲}$$

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f^۲(۵-h)-۳f(۵-h)+۲}{h(۵-h)}=\lim_{h\to ۰}\frac{(f(۵-h)-۱)(f(۵-h)-۲)}{h(۵-h)}$$

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(۵-h)-۱}{(۵-h)}\times\lim_{h\to ۰}\frac{-(f(۵-h)-۲)}{-h}$$

$$=(\frac{f(۵)-۱}{۵})(-f'(۵))=\frac{۱}{۵}\times(-\frac{۲۵}{۱۲})=\frac{-۵}{۱۲}$$

راه حل دوم: از قاعدهٔ هوپیتال نیز می‌توان برای به دست آوردن حد استفاده کرد.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۱

۴ گزینه ۳

روش اول:

حد داده‌شده را ساده کرده و سپس مقدار k را تعیین می‌کنیم:

$$\lim_{h\to ۰}\frac{۲(۲+h)^۲+k(۲+h)-۲k-۸}{h}=۱۲$$

$$\Rightarrow \lim_{h\to ۰}\frac{۲(۴+۴h+h^۲)+۲k+kh-۲k-۸}{h}=۱۲$$

$$\Rightarrow \lim_{h\to ۰}\frac{۸+۸h+۲h^۲+kh-۸}{h}=۱۲ \Rightarrow \lim_{h\to ۰}\frac{۲h^۲+۸h+kh}{h}=۱۲$$

$$\Rightarrow \lim_{h\to ۰}۲h+۸+k=۱۲ \Rightarrow ۸+k=۱۲ \Rightarrow k=۴$$

روش دوم: (فراتر از کتاب)

حد داده‌شده را با استفاده از قاعدهٔ هوپیتال حل می‌کنیم:

$$\lim_{h\to ۰}\frac{۲(۲+h)^۲+k(۲+h)-۲k-۸}{h}=\frac{۰}{۰}$$

$$\xrightarrow{\text{هوپیتال}} \lim_{h\to ۰}\frac{۲\times ۲(۱)(۲+h)+k}{۱}=\lim_{h\to ۰}\frac{۸+۴h+k}{۱}=۱۲$$

$$\Rightarrow ۸+k=۱۲ \Rightarrow k=۴$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۱

۵ گزینه ۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۲

گام اول

الف) معادلهٔ خط گذرا از دو نقطهٔ (x_1, y_1) و (x_2, y_2) به‌صورت زیر است:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

ب) شیب خط مماس بر منحنی در یک نقطه، برابر مشتق تابع در آن نقطه است.

ج) خط در نقطهٔ $x = ۳$ بر منحنی مماس است، بنابراین مختصات این نقطه در معادلهٔ خط و منحنی صدق می‌کند.

گام دوم

ابتدا معادلهٔ خط گذرا از دو نقطهٔ $A(۱, ۲)$ و $B(-۱, ۳)$ را به دست می‌آوریم:

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{۳ - ۲}{-۱ - ۱} = \frac{۱}{-۲} = -\frac{۱}{۲}$$

$$y - y_A = m_{AB}(x - x_A) \Rightarrow y - ۲ = -\frac{۱}{۲}(x - ۱) \Rightarrow y = -\frac{۱}{۲}x + \frac{۵}{۲}$$

طبق قسمت ج از گام اول داریم:

$$f(۳) = y(۳) = -\frac{۱}{۲}(۳) + \frac{۵}{۲} = -\frac{۳}{۲} + \frac{۵}{۲} = ۱ \Rightarrow f(۳) = ۱$$

باتوجه‌به قسمت ب از گام اول $f'(۳) = \frac{-۱}{۲}$ است. اکنون با دو روش حاصل حد داده‌شده را به دست می‌آوریم.

روش اول:

$$\lim_{x\to ۳} \frac{f^۲(x) + ۴f(x) - ۵}{۳ - x} = \lim_{x\to ۳}\left(-\frac{(f(x) + ۵)(f(x) - ۱)}{x - ۳}\right) = \lim_{x\to ۳}\left(-(f(x) + ۵)\frac{(f(x) - f(۳))}{x - ۳}\right)$$

$$= \lim_{x\to ۳}\left(-(f(x) + ۵)(f'(۳))\right) = -(f(۳) + ۵)f'(۳) = -۶\left(-\frac{۱}{۲}\right) = ۳$$

روش دوم: (فراتر از کتاب)

$$\lim_{x\to ۳} \frac{f^۲(x) + ۴f(x) - ۵}{۳ - x} = \frac{f^۲(۳) + ۴f(۳) - ۵}{۳ - ۳} = \frac{۱ + ۴ - ۵}{۳ - ۳} = \frac{۰}{۰}$$

برای رفع ابهام از قاعدهٔ هوپیتال استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to ۳} \frac{f^۲(x) + ۴f(x) - ۵}{۳ - x} = \lim_{x\to ۳} \frac{۲f'(x)f(x) + ۴f'(x)}{-۱} = \frac{۲f'(۳)f(۳) + ۴f'(۳)}{-۱}$$

$$= \frac{۲\left(-\frac{۱}{۲}\right)(۱) + ۴\left(-\frac{۱}{۲}\right)}{-۱} = \frac{-۱ - ۲}{-۱} = \frac{-۳}{-۱} = ۳$$

۶ گزینه ۲

$$۷y - x = ۵ \Rightarrow y = \frac{x+۵}{۷}$$

$$\frac{ax-۱}{۳x+۱} = \frac{x+۵}{۷} \Rightarrow ۳x^۲ + ۱۵x + x + ۵ = ۷ax - ۷$$

$$\Rightarrow ۳x^۲ + (۱۶ - ۷a)x + ۱۲ - ۰ \quad (۱)$$

$$\Delta = ۰ \Rightarrow (۱۶ - ۷a)^۲ - ۱۲^۲ = ۰ \Rightarrow (۱۶ - ۷a)^۲ = ۱۲^۲ \Rightarrow \begin{cases} ۱۶ - ۷a = ۱۲ \\ ۱۶ - ۷a = -۱۲ \end{cases}$$

باید معادلهٔ (۱) ریشهٔ مضاعف مثبت داشته باشد، بنابراین $۱۶ - ۷a < ۰$ است.

$$۱۶ - ۷a = -۱۲ \Rightarrow ۷a = ۲۸ \Rightarrow a = ۴$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

۷ گزینه ۱

ابتدا توابع f و g را به هم تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{f}{g} = \frac{\sqrt{x+۸} - \sqrt{x}}{\frac{۱}{\sqrt{x+۸} + \sqrt{x}}} \Rightarrow \frac{f}{g} = x + ۸ - x \Rightarrow \frac{f}{g} = ۸$$

از عبارت بالا مشتق می‌گیریم:

$$\frac{f' \cdot g - g' \cdot f}{g^۲} = ۰ \Rightarrow f' \cdot g - g' \cdot f = ۰$$

یعنی حاصل عبارت خواسته شده همواره بر روی تمام نقاط صفر است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۳

۸ گزینه ۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۲

گام اول

الف) طبق تعریف مشتق داریم:

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to ۰} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

ب) می‌دانیم: $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

گام دوم

باتوجه‌به اینکه می‌دانیم $(fg)(x) = f(x)g(x)$ است، می‌توان نوشت:

$$\lim_{\Delta x \to ۰} \frac{f(۲+\Delta x)\, g(۲+\Delta x) - f(۲)\, g(۲)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to ۰} \frac{(fg)(۲+\Delta x) - (fg)(۲)}{\Delta x} = (fg)'(۲)$$

باتوجه‌به قسمت ب از گام اول داریم:

$$(fg)'(x) = f'(x)\, g(x) + g'(x)\, f(x) = (۲x - ۱)\sqrt{۲x} + (x^۲ - x)\frac{۲}{۲\sqrt{۲x}}$$

$$\Rightarrow (fg)'(۲) = (۴ - ۱)\sqrt{۴} + (۲^۲ - ۲)\frac{۱}{\sqrt{۴}} = (۳ \times ۲) + \frac{۲}{۲} = ۶ + ۱ = ۷$$

۹ گزینه ۱

برای آنکه نمودار تابع $y = ۲x^۲ + (m+۱)x + m + ۶$ بر نیمساز ناحیهٔ اول مماس باشد، باید معادلهٔ تقاطع تابع را با خط $y = x$ نوشته و Δ را برابر صفر قرار دهیم.

$$\begin{cases} y = x \\ y = ۲x^۲ + (m+۱)x + m + ۶ \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = ۲x^۲ + (m+۱)x + m + ۶ \Rightarrow ۲x^۲ + mx + m + ۶ = ۰$$

$$\Delta = ۰ \;\Rightarrow\; m^۲ - ۸(m+۶) = ۰ \Rightarrow m^۲ - ۸m - ۴۸ = ۰$$

$$\Rightarrow (m - ۱۲)(m + ۴) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} m = ۱۲ \\ m = -۴ \end{cases}$$

شیب نمودار در نقطهٔ برخورد برابر ۱ است. از معادلهٔ کلی، مشتق می‌گیریم. داریم:

$$y' = ۴x + m + ۱ \xrightarrow{y'=۱} ۱ = ۴x + m + ۱ \Rightarrow x = -\frac{m}{۴}$$

چون نمودار بر نیمساز ناحیهٔ اول مماس می‌باشد، بنابراین $x > ۰$ لذا $m = -۴$ قابل‌قبول است.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۳

۱۰ گزینه ۲

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۴

گام اول

الف) طبق تعریف مشتق یک تابع داریم:

$$f'(-۱)=\lim_{\Delta x\to ۰}\frac{f(-۱+\Delta x)-f(-۱)}{\Delta x}$$

ب) هرگاه u و v دو تابع برحسب x باشند و داشته باشیم $f(x)=u\times v$، آنگاه مشتق تابع f چنین تعریف می‌شود:

$$f'(x)=u'\times v+v'\times u$$

گام دوم

باتوجه‌به قسمت ب از گام اول ابتدا ضابطهٔ مشتق $f'(x)$ را تعیین می‌کنیم:

$$f(x)=(x-۲)\sqrt[۳]{x^۲}=(x-۲)x^{\frac{۲}{۳}}$$
$$f'(x)=۱\times x^{\frac{۲}{۳}}+\frac{۲}{۳}x^{-\frac{۱}{۳}}(x-۲)=\sqrt[۳]{x^۲}+\frac{۲(x-۲)}{۳\sqrt[۳]{x}}$$

هدف ما محاسبه $f'(-۱)$ است، پس داریم:

$$f'(-۱)=\sqrt[۳]{(-۱)^۲}+\frac{۲(-۱-۲)}{۳\sqrt[۳]{-۱}}=۱+\frac{۲(-۳)}{۳(-۱)}=۱+۲=۳$$

۱۱ گزینه ۱

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۱

گام اول

مشتق تابع کسری $y=\frac{f(x)}{g(x)}$ از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$y=\frac{f(x)}{g(x)}\Rightarrow y'=\frac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{g^۲(x)}$$

گام دوم

باتوجه‌به مشخص بودن مقادیر $y'(۱)$، $f(۱)$ و $f'(۱)$، مقدار $g(۱)$ را حساب می‌کنیم (دلیل اینکه مقدار دقیق $g'(۱)$ ذکرنشده صفر بودن $f(۱)$ است).

$$y'(۱)=\frac{f'(۱)g(۱)-g'(۱)f(۱)}{g^۲(۱)}\Rightarrow ۳=\frac{(-۴)g(۱)-۰}{g^۲(۱)}\Rightarrow ۳=\frac{-۴g(۱)}{g^۲(۱)}\Rightarrow ۳=\frac{-۴}{g(۱)}\Rightarrow g(۱)=-\frac{۴}{۳}$$

۱۲ گزینه ۴

باتوجه‌به اینکه حد وجود دارد، پس صورت کسر نیز باید به ازای $h = ۰$ صفر باشد، بنابراین داریم:

$$f(-۲+h)+۳=۰ \xrightarrow{h=۰} f(-۲)=-۳$$

طبق تعریف مشتق داریم:

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(-۲+h)+۳}{h}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\begin{cases}f(-۲)=-۳\\ f'(-۲)=\frac{۱}{۲}\end{cases}$$

$$(x^۲f(x))'=۲xf(x)+x^۲f'(x)$$

$$\xrightarrow{x=-۲} -۴f(-۲)+۴f'(-۲)=-۴(-۳)+۴(\frac{۱}{۲})=۱۲+۲=۱۴$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۶

۱۳ گزینه ۳

تابع P به‌صورت زیر است:

$$P(x) = ax^۲ + bx + c$$

P' به‌صورت زیر است:

$$P'(x) = ۲ax + b$$

سؤال گفته اگر P را بر P' تقسیم کنیم، خارج‌قسمت $\frac{x}{۲} + ۱$ و باقی‌مانده -۲ است. اتحاد تقسیم را می‌نویسیم:

$$P(x) = P'(x).\left(\frac{x}{۲} + ۱\right) + (-۲) \Rightarrow ax^۲ + bx + c = (۲ax + b)\left(\frac{x}{۲} + ۱\right) - ۲$$
$$\Rightarrow ax^۲ + bx + c = ax^۲ + \left(۲a + \frac{b}{۲}\right)x + (b - ۲)$$

ضرایب عبارات هم‌درجه را برابر قرار می‌دهیم:

$$x^۲ \text{ ضرایب} \Rightarrow a = a$$
$$x \text{ ضرایب} \Rightarrow b = ۲a + \frac{b}{۲} \xrightarrow{\times ۲} ۲b = ۴a + b \Rightarrow b = ۴a$$
$$\text{جملات درجه صفر} \Rightarrow c = b - ۲$$

a، b و c، سه عدد طبیعی‌اند. چون می‌خواهیم کمترین مقدار $a + b + c$ را حساب کنیم، پس باید در رابطهٔ $b = ۴a$، $a = ۱$ و $b = ۴$ باشد، پس:

$$c = b - ۲ = ۴ - ۲ = ۲$$
$$\Rightarrow \min(a + b + c) = ۱ + ۴ + ۲ = ۷$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۰

۱۴ گزینه ۴

با اطلاعات مسئله داریم:

$$P(x) = (x^۲ + ۲x)Q(x) + ۳x + ۱ \quad (۱)$$

از طرفین رابطهٔ (۱) مشتق می‌گیریم:

$$P'(x) = (۲x + ۲)Q(x) + (x^۲ + ۲x)Q'(x) + ۳$$
$$P'(-۲) = -۲Q(-۲) + ۳ = -۲(۳) + ۳ = -۳$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۰

۱۵ گزینه ۴

ازآنجاکه این دو نمودار در یک نقطه بر یک خط مماس هستند، پس هم مقادیر و هم مشتق‌هایشان در این نقطه برابر است.

داریم:

$$y_۱ = x\sqrt{x} \Rightarrow y'_۱ = \sqrt{x} + \frac{x}{۲\sqrt{x}}$$
$$y_۲ = x^۲ + ax + b \Rightarrow y'_۲ = ۲x + a$$
$$y'_۱(۴) = y'_۲(۴) \Rightarrow ۲ + \frac{۴}{۴} = ۸ + a \Rightarrow a = -۵$$

و نیز داریم:

$$y_۱(۴) = y_۲(۴) \Rightarrow ۸ = ۱۶ - ۵(۴) + b \Rightarrow ۸ = -۴ + b \Rightarrow b = ۱۲$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

۱۶ گزینه ۴

$$\begin{cases} f(۲) = \frac{۲+۲}{۲-۱} = ۴ \\ g(۲) = ۴a + ۲b \end{cases} \xrightarrow{f(۲)=g(۲)} ۴a + ۲b = ۴ \quad (۱)$$

$$\begin{cases} f'(x) = \frac{x-۱-(x+۲)}{(x-۱)^۲} = \frac{-۳}{(x-۱)^۲} \Rightarrow f'(۲) = -۳ \\ g'(x) = ۲ax + b \Rightarrow g'(۲) = ۴a + b \end{cases}$$

$$\xrightarrow{f'(۲)=g'(۲)} ۴a + b = -۳ \quad (۲)$$

باتوجه‌به (۱) و (۲) داریم:

$$\begin{cases} ۴a + ۲b = ۴ \\ ۴a + b = -۳ \end{cases} \Rightarrow b = ۷$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۱۷ گزینه ۳

$\lim\limits_{x\to ۴} \frac{f(x) - f(۴)}{x - ۴}$ برابر $f'(۴)$ است، بنابراین برای به دست آوردن $\lim\limits_{x\to ۴} \frac{f(x) - f(۴)}{x - ۴}$ کافی است $f'(۴)$ را محاسبه کنیم:

$$f(x) = \frac{۱+\sqrt{x}}{۵-۲x} \Rightarrow f'(x) = \frac{\frac{۱}{۲\sqrt{x}}(۵-۲x) + ۲(۱+\sqrt{x})}{(۵-۲x)^۲}$$

$$\Rightarrow f'(۴) = \frac{\frac{۱}{۴}(۵-۸) + ۲(۱+۲)}{(۵-۸)^۲} = \frac{-\frac{۳}{۴} + ۶}{۹} = \frac{۲۱}{۳۶} = \frac{۷}{۱۲}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۱۸ گزینه ۳

حاصل $f'(\frac{۱}{۴})$ را می‌خواهیم:

$$f(x)=\frac{-x-۱}{\sqrt{x}} \Rightarrow f'(x)=\frac{-۱(\sqrt{x})-\frac{۱}{۲\sqrt{x}}(-x-۱)}{x}$$

$$\xrightarrow{x=\frac{۱}{۴}} \frac{-\frac{۱}{۲}-۱(-\frac{۵}{۴})}{\frac{۱}{۴}}=\frac{-\frac{۱}{۲}+\frac{۵}{۴}}{\frac{۱}{۴}}=۳$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

ساده‌سازی و سپس مشتق‌گیری (ساده سپس)

اگر تابعی قابل ساده‌شدن باشد، می‌توانیم ابتدا آن را ساده کرده سپس از تابع ساده‌شده مشتق بگیریم.

تمرین: مشتق تابع $y=\frac{\sqrt[3]{x^2}+1}{x+\sqrt[3]{x}}$ به ازای $x=1$ کدام است؟

۱) $-\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{1}{9}$ ۴) $-\frac{1}{9}$

$$f(x)=\frac{\sqrt[3]{x^2}+1}{\sqrt[3]{x}\left(\sqrt[3]{x^2}+1\right)}=x^{-\frac{1}{3}} \rightarrow y'=-\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}} \xrightarrow{x=1} -\frac{1}{3}$$

تمرین: مشتق تابع $f(x)=\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x^2-2x}}{1+\sqrt{x-2}}$ در $x=4$ کدام است؟

۱) -1 ۲) صفر ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) ۲

پاسخ: کافی است در صورت کسر از $\sqrt{x}$ فاکتورگیری کنیم:

$$f(x)=\frac{\sqrt{x}\,(1+\sqrt{x-2})}{1+\sqrt{x-2}}=\sqrt{x}$$

حالا از $f(x)=\sqrt{x}$ مشتق می‌گیریم:

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(4)=\frac{1}{2\sqrt{4}}=\frac{1}{4}$$

تمرین: مشتق تابع $f(x)=\frac{x+\sqrt[3]{x^2-x^3}}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{1-x}}$ کدام است؟

۱) $\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ ۲) $\frac{2x}{3\sqrt[3]{x^2}}$ ۳) $\frac{2}{3\sqrt[3]{x^2}}$ ۴) $\frac{2x}{3\sqrt[3]{x}}$

پاسخ: کافی است در صورت کسر از $\sqrt[3]{x^2}$ فاکتورگیری کنیم (یعنی به $\sqrt[3]{x^2}$ تقسیم کنیم):

$$y=\frac{\sqrt[3]{x^2}\,(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{1-x})}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{1-x}}=\sqrt[3]{x^2}=x^{\frac{2}{3}}$$

حالا از ضابطهٔ ساده‌شده مشتق‌گیری می‌کنیم:

$$y'=\frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1}=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}=\frac{2}{3x^{\frac{1}{3}}}=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

تمرین: مشتق تابع $y=(\sqrt{x+4}-\sqrt{x+1})^3(\sqrt{x+4}+\sqrt{x+1})^2$ در $x=0$ کدام است؟

۱) $\frac{9}{4}$ ۲) $\frac{27}{4}$ ۳) $-\frac{27}{4}$ ۴) $-\frac{9}{4}$

$y=(\sqrt{x+4}-\sqrt{x+1})\underbrace{(\sqrt{x+4}-\sqrt{x+1})^2}_{(a-b)}\underbrace{(\sqrt{x+4}+\sqrt{x+1})^2}_{(a+b)}$

$y=(\sqrt{x+4}-\sqrt{x+1})(x+4-x-1=3)^2=9(\sqrt{x+4}-\sqrt{x+1})$

$y'=9\left(\frac{1}{2\sqrt{x+4}}-\frac{1}{2\sqrt{x+1}}\right)$ $\quad y'_{(x=0)}=f'(0)=9\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)=9\left(-\frac{1}{4}\right)=-\frac{9}{4}$

تمرین: اگر $f(x)=\frac{\sqrt{x+1}}{x+2}$ و $g(x)=\frac{x^2+4x+4}{(x+1)\sqrt{x+1}}$ باشند، حاصل $f'(x)g(x)+g'(x)f(x)$ به ازای $x=1$ کدام است؟

۱) $-\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ ۴) $-\frac{1}{2\sqrt{2}}$

$(f(x)\cdot g(x))'=\left(\frac{(x+2)^2}{(x+1)\sqrt{x+1}}\cdot\frac{\sqrt{x+1}}{x+2}=\frac{x+2}{x+1}\right)'=\frac{1-2}{(x+1)^2}\overset{x=1}{=}-\frac{1}{4}$

تمرین: اگر $f(x)=\frac{x^3+x^2+1}{x+1}$ و $g(x)=\frac{x+2}{x+1}$ باشد، حاصل $f'(x)-g'(x)$ برابر است با: $(x\neq -1)$

S.T.D

۱) $-2x$ ۲) $\frac{2x^2}{x+1}$ ۳) $\frac{x^2+1}{x+1}$ ۴) $2x$

$y=f(x)-g(x)=\frac{x^3+x^2+1-x-2}{x+1}=\frac{(x^3+x^2-x-1)}{x+1}=\frac{x^2(x+1)-(x+1)}{x+1}$

$=\frac{(x+1)(x^2-1)}{x+1}=x^2-1$ $\quad y=f(x)-g(x)=x^2-1\rightarrow y'=f'(x)-g'(x)=2x$

تمرین: اگر $f(x)=(\sqrt{1+x^2}-x)^5$ و $g(x)=\frac{1}{(\sqrt{1+x^2}+x)^5}$، مقدار $f'(x)g(x)-f(x)g'(x)$ کدام است؟

۱) ۱- ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ۲

یاد تقسیم بیفت!

$y=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{(\sqrt{1+x^2}-x)^5}{\frac{1}{(\sqrt{1+x^2}+x)^5}}=(1+x^2-x^2=1)^5=1$

$y=\frac{f}{g}=1$ ← از تقسیم مشتق بگیر

$y'=\frac{f'g-g'f}{g^2}=0$

$(f^2 g)'$ $\quad\quad$ $\left(f^2 g = \frac{x}{x+1}\right)' = \frac{1}{(x+1)^2}$

تمرین: اگر $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{x+\sin x}$ و $g(x)=\frac{x^2+\sin^2 x+2x\sin x}{x+1}$، آن‌گاه $2ff'g+g'f^2$ به ازای $x=1$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ $\quad$ ۲) $\frac{1}{4}$ $\quad$ ۳) $-\frac{1}{4}$ $\quad$ ۴) ۱

پاسخ: اگر توجه کنید $2ff'g+g'f^2$ همان مشتق $f^2.g$ است، پس:

$$y=(f^2.g)'=\left(\left(\frac{\sqrt{x}}{x+\sin x}\right)^2.\frac{(x+\sin x)^2}{x+1}\right)'=\left(\frac{x}{(x+\sin x)^2}.\frac{(x+\sin x)^2}{x+1}\right)'=\left(\frac{x}{x+1}\right)'=\frac{1}{(x+1)^2}\overset{x=1}{=}\frac{1}{4}$$

بررسی مشتق در نقطه‌ی $x=a$ در توابعی که به ازای نقطه‌ی $x=a$، عاملِ صفرکننده دارند یعنی $x=a$ بخشی از تابع را صفر می‌کند.

در توابع به صورت $f(x)=g(x)\times h(x)$ در صورتی که $g(a)=0$ باشد، برای محاسبه‌ی $f'(a)$ کافیست فقط از تابع $g(x)$ مشتق گرفته و آن را در $h(x)$ ضرب کنیم. در واقع برای محاسبه‌ی $f'(a)$ باید از عامل صفرشونده مشتق گرفته و آن را در بقیه عوامل ضرب کنیم.

تمرین:

$y=(x^2-2x)(x+1)^3(2x-5)^7$ $\quad\quad$ $y'(2)=?$

$f'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\frac{x(x-2)(x+1)^3(2x-5)^7}{x-2}$

$f'(2)=\lim_{x\to 2} x(x+1)^3(2x-5)^7=2(27)(-1)=-54$

(حاصل بقیه تابع به ازای $x=2$) . (مشتق عامل صفرکننده یا بقیه را)

$y'(2)=(2x-2)(2+1)^3(2(2)-5=-1)^7=-54$

$y=(x-1)(x-2)\dots(x-8)$ $\quad\quad$ $y'(2)=?$

$f'(2)=(x-2)'(x-1)(x-3)(x-4)(x-5)(x-6)(x-7)(x-8)$

(بین) $(1)(-1)(-2)(-3)(-4)(-5)(-6)=6!$

تمرین: مشتق تابع $f(x)=\frac{(x-1)\sqrt[5]{3x-2}}{(5x-3)^4}$ در نقطه‌ی $x=1$ کدام است؟ (سراسری ریاضی)

۱) $\frac{1}{16}$ $\quad$ ۲) $\frac{1}{8}$ $\quad$ ۳) $\frac{3}{40}$ $\quad$ ۴) $\frac{5}{16}$

$f'(1)=\frac{(1)\sqrt[5]{3-2=1}}{(5-3=2)^4=16}=\frac{1}{16}$

تمرین: اگر $f(x)=(x^۲-x-۲)\sqrt[۳]{x^۲-۷x}$ باشد، حاصل $\lim\limits_{h\to ۰}\dfrac{f(-۱+h)-f(-۱)}{h}$ کدام است؟ (سراسری ریاضی ۹۲)

۱) -۶ ۲) -۳ ۳) $-\frac{۳}{۲}$ ۴) $-\frac{۳}{۴}$

$f'(-۱)=(۲(-۱)-۱)\sqrt[۳]{(-۱)^۲-۷(-۱)}=۸$

$(-۳)\ (۲)\ =-۶$

تمرین: اگر $f(x)=\dfrac{(x+۱)h(x)}{(۲x+۱)h(۲x+۱)}$ باشد، $f'(-۱)$ کدام است؟ $(h(-۱)\neq ۰)$ (سراسری تجربی)

۱) -۲ ۲) -۱ ۳) ۱ ۴) ۲

$f'(-۱)=\dfrac{(\text{یک})\,h(-۱)}{(-۱)h(-۱)}=-۱$

تمرین: مشتق تابع $f(x)=\dfrac{۱۰x}{\sqrt{۵+x}+\sqrt{۵-x}}$ در $x=۰$ کدام است؟ (قلم‌چی ریاضی ۹۹)

۱) $\sqrt{۱۰}$ ۲) $\frac{\sqrt{۵}}{۲}$ ۳) ۵ ۴) $\sqrt{۵}$

پاسخ: گزینهٔ «۴» ـ ابتدا ضابطهٔ تابع را ساده‌تر می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{۱۰x}{\sqrt{۵+x}+\sqrt{۵-x}}\left(\frac{\sqrt{۵+x}-\sqrt{۵-x}}{\sqrt{۵+x}-\sqrt{۵-x}}\right)=\frac{۱۰x(\sqrt{۵+x}-\sqrt{۵-x})}{۲x}\Rightarrow f(x)=۵(\sqrt{۵+x}-\sqrt{۵-x})$$

$$\Rightarrow f'(x)=۵\left(\frac{۱}{۲\sqrt{۵+x}}+\frac{۱}{۲\sqrt{۵-x}}\right)\Rightarrow f'(۰)=۵\left(\frac{۱}{۲\sqrt{۵}}+\frac{۱}{۲\sqrt{۵}}\right)=\frac{۵}{\sqrt{۵}}=\sqrt{۵}$$

روش دوم: اگر $u(x_۰)=۰$ و $v(x_۰)\neq ۰$ باشد، با فرض مشتق‌پذیری تابع u در $x=x_۰$، برای مشتق تابع $h=u.v$ در $x=x_۰$ می‌توانیم بنویسیم:

$$h'(x_۰)=u'(x_۰).v(x_۰)$$

یعنی کافی است از عامل صفرکننده، مشتق بگیریم. با توجه به این نکته داریم:

$$f'(۰)=\frac{۱۰}{\sqrt{۵+۰}+\sqrt{۵-۰}}=\frac{۱۰}{۲\sqrt{۵}}=\sqrt{۵}$$

مشتق تابع مرکب

$y = f\circ g = f(g(x)) \longrightarrow y' = g'(x)\, f'(g(x))$

اگر تابع g در x و تابع f در $g(x)$ مشتق‌پذیر باشند، آن‌گاه تابع fog در x مشتق دارد و داریم:

$$y = f(g(x)) \Rightarrow y' = g'(x)f'(g(x))$$

و به طور مشابه برای gof داریم:

$$y = g(f(x)) \Rightarrow y' = f'(x)g'(f(x))$$

که در این حالت باید، تابع f در x و تابع g در $f(x)$ مشتق‌پذیر باشد.

تمرین: اگر $f(x) = x^2 + x$ و $g(x) = \sqrt{x+2}$، مشتق تابع $y = (fog)(x)$ را نقطهٔ $x = 7$ حساب کنید.

پاسخ: $y = f(g(x)) \Rightarrow y' = g'(x)f'(g(x))$ $\quad g'(7)\, f'(g(7)-3)$ $\quad g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+2}}$ $\quad f'(x) = 2x+1$

الان باید مشتق f و g را پیدا کنیم و در ضابطهٔ $f'(x)$ به جای xها، $g(7)$ها را قرار دهیم، ببینید:

$$y' = g'(x)f'(g(x)) \overset{x=7}{=\!=} g'(7)f'(g(7))$$

$$\begin{cases} g(x) = \sqrt{x+2} \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+2}} \xrightarrow{x=7} g'(7) = \frac{1}{2\sqrt{9}} = \frac{1}{6} \\ \begin{cases} g(7) = \sqrt{7+2} = \sqrt{9} = 3 \\ f'(x) = 2x+1 \end{cases} \Rightarrow f'(g(7)) = f'(3) = 2(3)+1 = 7 \end{cases}$$

پس:

$$y' = g'(7)f'(g(7)) = \frac{1}{6} \times 7 = \frac{7}{6}$$

تمرین: اگر $\lim\limits_{x\to 2} \frac{g(x)-g(2)}{x-2} = \frac{3}{2}$ و $f(x) = \sqrt{5-x^2}$ باشند، آن‌گاه $(gof)'(1)$ کدام است؟ *(سراسری ریاضی خارج از کشور)*

۱) $-\frac{3}{4}$ $\quad$ ۲) $-\frac{1}{2}$ $\quad$ ۳) $\frac{1}{2}$ $\quad$ ۴) $\frac{3}{2}$

$f(1) = \sqrt{5-1} = 2$

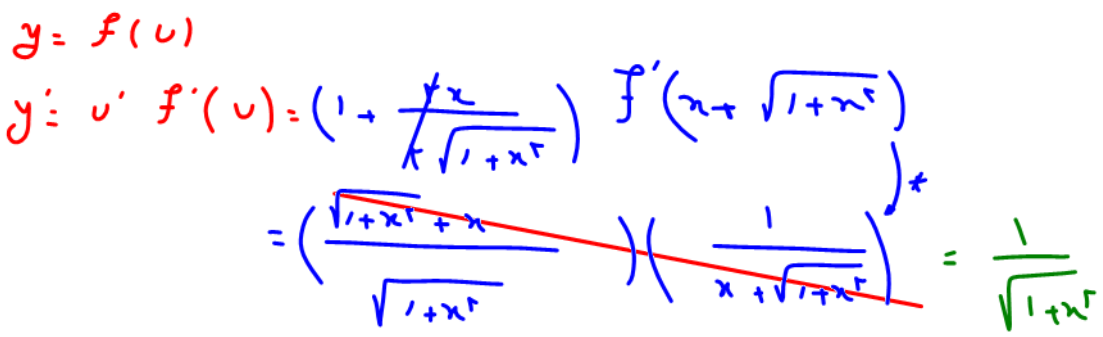
$f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{5-x^2}}$ $\quad g'(2) = \frac{3}{2}$

$y = g(f(x))$

$y' = f'(x)\, g'(f(x)) \overset{x=1}{=\!=} f'(1)\, g'(f(1)) = -\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{4}$

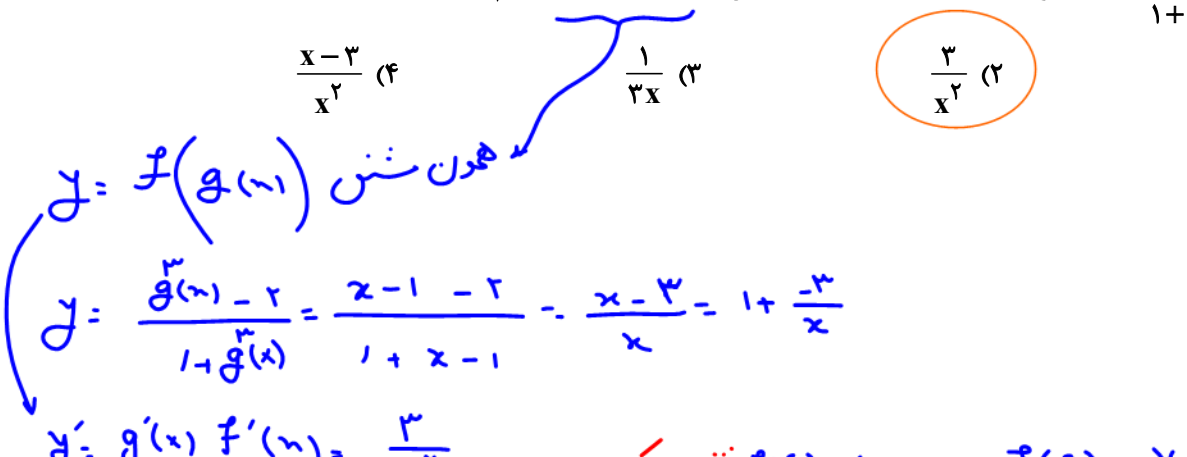
تمرین: اگر $f'(x)=\frac{1}{x}$، مشتق تابع $f(x+\sqrt{1+x^2})$ کدام است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور ۸۵)

۱) $-x+\sqrt{1+x^2}$ ۲) $x-\sqrt{1+x^2}$ ۳) $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ ۴) $\sqrt{1+x^2}$



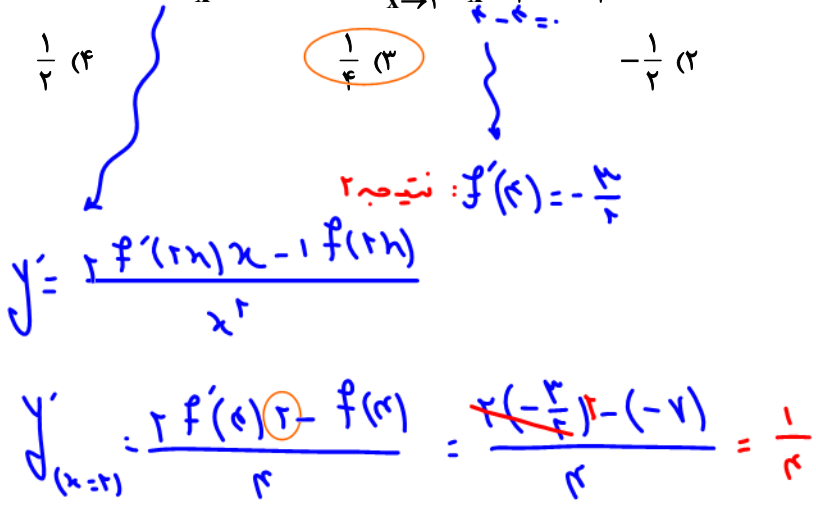
تمرین: اگر $f(x)=\frac{x^3-2}{1+x^3}$ و $g(x)=\sqrt[3]{x-1}$ باشد، حاصل $f'(g(x))g'(x)$ کدام است؟ (ریاضی ۹۲)

۱) $\frac{3}{x}$ ۲) $\frac{3}{x^2}$ ۳) $\frac{1}{3x}$ ۴) $\frac{x-3}{x^2}$



تمرین: اگر تابع f در $x=4$ مشتق‌پذیر و $\lim_{x\to 4}\frac{f(x)+7}{x-4}=\frac{-3}{2}$ آن‌گاه مشتق $\frac{f(2x)}{x}$ در $x=2$ کدام است؟ (سراسری ریاضی ۹۶)

۱) $-\frac{1}{4}$ ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{1}{2}$



۱ اگر $f(x)=\frac{۱}{\sqrt[۳]{x-|x|}}$ و $g(x)=\frac{۱}{x^۳-|x^۳|}$ باشد، مقدار $g'(-\sqrt[۳]{۲})f'(g(-\sqrt[۳]{۲}))$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$

۳) ۱ ۴) -۱

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۲ اگر $f'(x)=\frac{۱}{x}$، مشتق تابع $f(x+\sqrt{۱+x^۲})$ کدام است؟

۱) $-x+\sqrt{۱+x^۲}$ ۲) $x-\sqrt{۱+x^۲}$

۳) $\frac{۱}{\sqrt{۱+x^۲}}$ ۴) $\sqrt{۱+x^۲}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۵

۳ اگر $h(۰)=۲h'(۰)=-g(۱)=-g'(۱)=f'(-۱)=۱$، مقدار مشتق تابع fogoh در صفر کدام است؟

۱) -۲ ۲) $-\frac{۱}{۲}$

۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) ۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۵

۴ اگر $f(x)=(x^۲-x-۲)\sqrt[۳]{x^۲-۷x}$ باشد، حاصل $\lim_{h\to ۰}\frac{f(-۱+h)-f(-۱)}{h}$ کدام است؟

۱) -۶ ۲) -۳

۳) $-\frac{۳}{۲}$ ۴) $-\frac{۳}{۴}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۲

۵ اگر $\lim_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}=-\frac{۱}{۳}$، مشتق $f(\sqrt{|x|+۳})$ در نقطهٔ $x=-۱$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۶}$ ۲) $\frac{۱}{۱۲}$

۳) $-\frac{۱}{۶}$ ۴) $-\frac{۱}{۱۲}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۷

۶ مشتق عبارت $\left(\frac{۱۶}{x} - \sqrt[۳]{x^۲}\right)^۲$ به ازای $x = -۸$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) $\frac{-۱}{۲}$

۳) ۱ ۴) ۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۸

۷ اگر $f(x) = \frac{۳}{۲} - \sqrt{x+۲}$، آنگاه مشتق تابع $f(xf(x))$، در نقطهٔ $x = ۲$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) $-\frac{۱}{۲}$

۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) ۱

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۹

۸ اگر $f(x) = \frac{x^۳ - ۲}{۱ + x^۳}$ و $g(x) = \sqrt[۳]{x-۱}$، حاصل $f'(g(x)) \cdot g'(x)$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{x}$ ۲) $\frac{۳}{x^۲}$

۳) $\frac{۱}{۳x}$ ۴) $\frac{x-۳}{x^۲}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۲

۹ اگر $f(x) = \frac{x}{\sqrt{۱-x^۲}}$ و $g(x) = \frac{x}{\sqrt{۱+x^۲}}$، حاصل $f'(x) \cdot g'(f(x))$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) ۱

۳) x ۴) $\frac{۱}{۲}x$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۲

۱۰ تابع f در $x = ۲$ مشتق‌پذیر است. اگر $\lim_{h \to ۰} \frac{f(۲+h) - ۹}{h} = \frac{۳}{۲}$ باشد، مشتق تابع $g(x)$ با ضابطهٔ $g(x) = x\sqrt{f(x)}$ در $x = ۲$ کدام است؟ (با تغییر)

۱) $۲/۵$ ۲) ۳

۳) $۳/۵$ ۴) ۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۵

۱۱ خط به معادلهٔ $y = ۳x - ۵$ در نقطهٔ $x = ۲$ بر نمودار تابع $y = g(x)$ مماس است. اگر $\lim_{x \to ۱} \frac{f(x) - f(۱)}{۲x - ۲} = \frac{۲}{۳}$ باشد، $(fog)'(۲)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۳ ۴) ۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۸

۱۲ مشتق تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{(x-1).\sqrt[5]{3x-2}}{(5x-3)^4}$ در نقطهٔ $x=1$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{16}$
۲) $\frac{1}{8}$
۳) $\frac{3}{40}$
۴) $\frac{5}{16}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۳

۱۳ اگر $f(x)=(x-4)\sqrt[3]{x+3}$ باشد، حاصل $\lim_{h\to 0}\frac{f^2(5-h)-3f(5-h)+2}{h(5-h)}$ کدام است؟

۱) $\frac{13}{30}$
۲) $-\frac{5}{12}$
۳) $\frac{5}{6}$
۴) $-\frac{13}{15}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۱

۱۴ اگر $f(x)=\sqrt{x+8}-\sqrt{x}$ و $g(x)=\frac{1}{\sqrt{x+8}+\sqrt{x}}$ باشد، حاصل عبارت $f'(1)g(1)-g'(1)f(1)$ کدام است؟

۱) صفر
۲) ۱
۳) ۳
۴) ۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۳

۱۵ اگر $f(x)=-\frac{1}{\sqrt[5]{x+|x|}}$ و $g(x)=\frac{1}{x^5+|x^5|}$ باشد، مقدار $g'(\sqrt[5]{3})f'(g(\sqrt[5]{3}))$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{3}$
۲) $-\frac{1}{3}$
۳) -1
۴) ۱

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

۱۶ اگر $g(x)=\sqrt{2x}$ و $f(x)=(x^2-x)$، حاصل $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(2+\Delta x)\,g(2+\Delta x)-f(2)\,g(2)}{\Delta x}$ برابر کدام است؟

۱) ۳
۲) ۴
۳) ۶
۴) ۷

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۲

۱۷ به ازای کدام مقدار m نمودار تابع $y=2x^2+(m+1)x+m+6$ بر نیمساز ناحیهٔ اوّل محورهای مختصات، مماس است؟

۱) -۴
۲) ۴ و -۱۲
۳) -۴ و ۱۲
۴) ۱۲

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۳

۱۸ اگر $f(x) = (x-۲)\sqrt[۳]{x^۲}$، حاصل $\lim\limits_{\Delta x \to ۰} \dfrac{f(-۱+\Delta x) - f(-۱)}{\Delta x}$ کدام است؟

۱) ۲
۲) ۳
۳) $\frac{۲}{۳}$
۴) $\frac{۴}{۳}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۴

۱۹ اگر $g(x) = \dfrac{۲x+۱}{x-۱}$ و $(fog)'(۲) = ۶$ باشد، $f'(۵)$ کدام است؟

۱) -۲
۲) -۱
۳) ۲
۴) ۳

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۲۰ اگر $f(x) = \frac{۴}{۵}x - \frac{۱}{۵}|x|$ و $g(x) = ۴x + |x|$ باشند، مشتق تابع fog کدام است؟

۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) مشتق ندارد.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۴

۲۱ مشتق تابع $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ در نقطهٔ $x = ۱$ برابر ۳ است. اگر $f(۱) = ۰$ و $f'(۱) = -۴$ و $g'(۱)$ موجود باشد، مقدار $g(۱)$ کدام است؟

۱) $-\frac{۴}{۳}$
۲) $-\frac{۳}{۴}$
۳) $\frac{۳}{۴}$
۴) $\frac{۴}{۳}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۱

۲۲ اگر تابع f در $x = -۲$ مشتق‌پذیر و $\lim\limits_{h \to ۰} \dfrac{f(-۲+h)+۳}{h} = \frac{۱}{۲}$ باشد، آنگاه مشتق $x^۲f(x)$ در $x = -۲$، کدام است؟

۱) ۸
۲) ۱۰
۳) ۱۲
۴) ۱۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۶

۲۳ اگر تابع f در $x = ۴$ مشتق‌پذیر و $\lim\limits_{x \to ۴} \dfrac{f(x)+۷}{x-۴} = \frac{-۳}{۲}$ باشد، آنگاه مشتق $\dfrac{f(۲x)}{x}$ در $x = ۲$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۴}$
۲) $-\frac{۱}{۲}$
۳) $\frac{۱}{۴}$
۴) $\frac{۱}{۲}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۶

۲۴ تابع f مشتق‌پذیر و با دورهٔ تناوب ۵ است. اگر $f'(-1) = \frac{۳}{۲}$ و $g(x) = f(x+1) + f(۳x+۱۰)$ باشد، حاصل $g'(-۲)$ کدام است؟

۱) ۳
۲) $\frac{۷}{۲}$
۳) ۶
۴) $\frac{۱۳}{۲}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۱

۲۵ تابع چندجمله‌ای درجهٔ دوم با ضرایب طبیعی $P(x)$ مفروض است. اگر باقی‌مانده و خارج‌قسمت تقسیم $P(x)$ بر $P'(x)$ (مشتق تابع $P(x)$) به‌ترتیب -۲ و $\frac{۱}{۲}x + ۱$ باشند، کمترین مقدار مجموع ضرایب $P(x)$، کدام است؟

۱) ۴
۲) ۶
۳) ۷
۴) ۹

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۰

۲۶ مشتق تابع $f(x) = x\sqrt[۳]{\frac{۳x+۱}{x+۲}}$ در نقطهٔ $x = -۳$، کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۳}$
۲) $\frac{۳}{۴}$
۳) $\frac{۴}{۳}$
۴) $\frac{۳}{۲}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

۲۷ اگر $f(x) = \sqrt{\frac{۳x-۱}{۲x+۱}}$، آنگاه $f'(۲)$ کدام است؟

۱) ۰/۲-
۲) ۰/۱-
۳) ۰/۱
۴) ۰/۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۱

۲۸ در تابع با ضابطهٔ $f(x) = \left(\sqrt{\frac{x+۲}{۲x-۳}}\right)^{۳}$، حاصل $\lim_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}$، کدام است؟

۱) ۲۱-
۲) ۱۸-
۳) ۱۲
۴) ۱۵

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

۲۹ در تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^۲+۶x} & ;\ ۰\le x<۴\\ \left[\frac{x}{۴}\right](x^۲-۹x) & ;\ ۴\le x<۸\end{cases}$، مقدار $f'(۲)-f'(۵)$، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$
۲) $\frac{۱}{۲}$
۳) $\frac{۳}{۴}$
۴) $\frac{۳}{۲}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

۳۰ در تابع با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt{\frac{۴x+۵}{x+۳}}$، حاصل $\lim\limits_{h\to ۰}\frac{f(۱+h)-f(۱)}{h}$، کدام است؟

۱) $\frac{۷}{۴۸}$
۲) $\frac{۵}{۲۴}$
۳) $\frac{۷}{۲۴}$
۴) $\frac{۷}{۱۶}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

۳۱ فرض کنید $f(x)=(x[x^۲+\frac{۱}{۲}])^۲+۱$ و $g(x)=\frac{۱}{\sqrt[۳]{x^۲-۱}}$. مقدار مشتق تابع fog در $x=\frac{۳}{\sqrt{۸}}$، چندبرابر $(-۱۲۸\sqrt{۲})$ است؟

۱) -۴
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

۳۲ باقی‌مانده و خارج قسمت تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x^۲+۲x$ به‌ترتیب $۳x+۱$ و $Q(x)$ است. اگر $Q(-۲)=۳$، آنگاه مقدار باقی‌ماندهٔ تقسیم $P'(x)$ بر $x+۲$، کدام است؟

۱) -۶
۲) -۵
۳) -۴
۴) -۳

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۰

۳۳ مشتق تابع با ضابطهٔ $f(x)=\left(\frac{\sqrt[۳]{x^۲+۲x}}{x^۲-x}\right)^۳$، در نقطهٔ $x=۲$، کدام است؟

۱) $-\frac{۳}{۴}$
۲) $-\frac{۵}{۴}$
۳) $-\frac{۵}{۲}$
۴) $-\frac{۱۵}{۴}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

۳۴ مقدار مشتق تابع با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt[۳]{\left(\frac{۲x-x^۲}{۳x+۵}\right)^۲}$ در نقطهٔ $x=-۲$، کدام است؟

۱) ۳
۲) ۴
۳) ۵
۴) ۶

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۳۵ فرض کنید نمودارهای دو تابع $y=x\sqrt{x}$ و $y=x^۲+ax+b$ در یک نقطهٔ مشترک، بر یک خط مماس باشند. اگر طول نقطهٔ مشترک ۴ باشد، مقدار b کدام است؟

۱) ۸
۲) ۹
۳) ۱۰
۴) ۱۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

۳۶ خط مماس بر نمودارهای دو تابع با ضابطه‌های $f(x)=\frac{x+۲}{x-۱}$ و $g(x)=ax^۲+bx$، در نقطهٔ $x=۲$، مشترک‌اند. مقدار b کدام است؟

۱) ۴
۲) ۵
۳) ۶
۴) ۷

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۳۷ اگر $\lim\limits_{x\to ۲}\frac{g(x)-g(۲)}{x-۲}=\frac{۳}{۲}$ و $f(x)=\sqrt{۵-x^۲}$، آنگاه $(gof)'(۱)$ کدام است؟

۱) $-\frac{۳}{۴}$
۲) $-\frac{۱}{۲}$
۳) $\frac{۱}{۲}$
۴) $\frac{۳}{۲}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۷

۳۸ اگر $g(x)=x+\sqrt{x}$ و $\lim\limits_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}=\frac{۴}{۳}$ باشد، $(fog)'(۱)$ کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۳}$
۲) $\frac{۳}{۲}$
۳) ۲
۴) ۳

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۸

۳۹ در تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{۱+\sqrt{x}}{۵-۲x}$، حاصل $\lim\limits_{x\to ۴}\frac{f(x)-f(۴)}{x-۴}$ کدام است؟

۱) $\frac{۴}{۹}$
۲) $\frac{۵}{۱۲}$
۳) $\frac{۷}{۱۲}$
۴) $\frac{۵}{۶}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۴۰ در تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{-x-۱}{\sqrt{x}}$، حاصل $\lim_{h\to ۰}\frac{f(\frac{۱}{۴}+h)-f(\frac{۱}{۴})}{h}$ کدام است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

پاسخ Homework

-

۱ گزینه ۳

$$g'f'(g) = (fog)'$$

$$D_g(-\infty, ۰) \Rightarrow g(x) = \frac{۱}{x^۳ + x^۳} = \frac{۱}{۲x^۳}$$

$$(fog)(x) = f(g(x)) = \frac{۱}{\sqrt[۳]{\frac{۱}{۲x^۳} - \left|\frac{۱}{۲x^۳}\right|}} \overset{g<۰}{=} \frac{۱}{\sqrt[۳]{\frac{۱}{۲x^۳} + \frac{۱}{۲x^۳}}} = \sqrt[۳]{x^۳} = x$$

$$(fog)'(x) = (x)' = ۱$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۲ گزینه ۳

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۵

گام اول

اگر $y = f(u)$ به‌طوری‌که u خود تابعی از x باشد، آنگاه داریم:

$$y' = u'f'(u)$$

گام دوم

باتوجه‌به گام اول و با فرض اینکه $u = x + \sqrt{۱ + x^۲}$ است، مشتق تابع $f\left(x + \sqrt{۱ + x^۲}\right)$ را به دست می‌آوریم، همچنین داریم:

$$f'(x) = \frac{۱}{x} \Rightarrow f'(u) = \frac{۱}{u}$$

$$y = f\left(x + \sqrt{۱ + x^۲}\right) \Rightarrow y' = \left(x + \sqrt{۱ + x^۲}\right)' f'\left(x + \sqrt{۱ + x^۲}\right) = \left(۱ + \frac{۲x}{۲\sqrt{۱ + x^۲}}\right)\left(\frac{۱}{x + \sqrt{۱ + x^۲}}\right)$$

$$= \left(۱ + \frac{x}{\sqrt{۱ + x^۲}}\right)\left(\frac{۱}{x + \sqrt{۱ + x^۲}}\right) = \left(\frac{\sqrt{۱ + x^۲} + x}{\sqrt{۱ + x^۲}}\right)\left(\frac{۱}{x + \sqrt{۱ + x^۲}}\right) = \frac{۱}{\sqrt{۱ + x^۲}}$$

۳ گزینه ۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۵

گام اول

می‌دانیم $(gof)(x) = g(f(x))$ و $(gof)'(x) = g'(f(x))f'(x)$ است.

گام دوم

باتوجه‌به گام اول و فرض‌های صورت سؤال، مشتق تابع $y = (fogoh)(x)$ را در نقطهٔ $x = ۰$ به دست می‌آوریم:

$$y = (fogoh)(x) = f(g(h(x)))$$

$$\Rightarrow y' = (g(h(x)))' \times f'(g(h(x))) = h'(x) \times g'(h(x)) \times f'(g(h(x)))$$

$$\xrightarrow{x=۰} y'(۰) = h'(۰) \times g'(h(۰)) \times f'(g(h(۰)))$$

$$\xrightarrow{h(۰)=۱\ ,\ ۲h'(۰)=۱} y'(۰) = \frac{۱}{۲} \times g'(۱) f'(g(۱))$$

$$\xrightarrow{-g(۱)=-۱\ ,\ -g'(۱)=-۱} y'(۰) = \frac{۱}{۲} \times (-۱) f'(-۱)$$

$$\xrightarrow{f'(-۱)=۱} \quad y'(۰) = \frac{۱}{۲}(-۱)(۱) = -\frac{۱}{۲}$$

۴ گزینه ۱

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۲

گام اول

طبق تعریف مشتق، حد خواسته‌شده مشتق تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x = -۱$ است، یعنی:

$$f'(-۱) = \lim_{h \to ۰} \frac{f(-۱+h) - f(-۱)}{h}$$

گام دوم

به ازای $x = -۱$ عبارت $(x^۲ - x - ۲)$ برابر صفر می‌شود و تابع $g(x) = \sqrt[۳]{x^۲ - ۷x}$ نیز در $x = -۱$ پیوسته است؛ بنابراین برای محاسبهٔ مشتق در نقطهٔ $x = -۱$، کافی است از عامل صفرشونده (عبارت $(x^۲ - x - ۲)$) مشتق گرفته، در تابع $g(x)$ ضرب کنیم و درنهایت مقدار آن را به ازای $x = -۱$ به دست آوریم:

$$x = -۱ : \quad (x^۲ - x - ۲)' \sqrt[۳]{x^۲ - ۷x} = (۲x - ۱) \sqrt[۳]{x^۲ - ۷x}$$

$$\Rightarrow f'(-۱) = (-۲ - ۱) \sqrt[۳]{(-۱)^۲ - ۷(-۱)} = (-۳) \sqrt[۳]{۸} = -۳ \times ۲ = -۶$$

۵ گزینه ۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۳۸۷

گام اول

الف) با استفاده از تعریف مشتق داریم:

$$\lim_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}=f'(۲)$$

ب) اگر $y=f(u)$ به‌طوری‌که u خود تابعی از x باشد، آنگاه داریم:

$$y'=u'f'(u)$$

گام دوم

مشتق تابع $f\left(\sqrt{|x|+۳}\right)$ در همسایگی نقطهٔ $x=-۱$ محاسبه می‌شود، بنابراین داریم:

$$\xrightarrow{x=-۱} \quad |x|=-x \quad \Rightarrow \quad f\left(\sqrt{|x|+۳}\right)=f\left(\sqrt{۳-x}\right)$$

باتوجه‌به قسمت ب از گام اول می‌توان چنین نوشت:

$$y=f\left(\sqrt{۳-x}\right) \quad \Rightarrow \quad y'=\frac{-۱}{۲\sqrt{۳-x}}f'\left(\sqrt{۳-x}\right)$$

$$\Rightarrow \quad y'(-۱)=\frac{-۱}{۲\sqrt{۳+۱}}f'\left(\sqrt{۳+۱}\right)=\frac{-۱}{۲\times ۲}f'(۲)$$

$$\xrightarrow{f'(۲)=-\frac{۱}{۳}} \quad y'(-۱)=\left(-\frac{۱}{۴}\right)\left(-\frac{۱}{۳}\right)=\frac{۱}{۱۲}$$

۶ گزینه ۱

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۸

گام اول

می‌دانیم مشتق تابع $y = u^n$ که u تابعی برحسب x است، از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$y' = nu'u^{n-1}$$

گام دوم

با استفاده از گام اول مشتق را محاسبه می‌کنیم:

$$y = \left(\frac{16}{x} - \sqrt[3]{x^2}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad y = \left(\frac{16}{x} - x^{\frac{2}{3}}\right)^2$$

$$\Rightarrow y' = 2 \times \left(-\frac{16}{x^2} - \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}\right)\left(\frac{16}{x} - x^{\frac{2}{3}}\right)$$

$$\Rightarrow \quad y' = 2\left(-\frac{16}{x^2} - \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}\right)\left(\frac{16}{x} - x^{\frac{2}{3}}\right)$$

$$\xrightarrow{x=-8} y' = 2\left(-\frac{16}{64} - \frac{2}{3 \times (-2)}\right)\left(\frac{16}{-8} - 4\right)$$

$$= 2\left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{3}\right)(-2 - 4) = 2\left(\frac{1}{12}\right)(-6) = -\frac{12}{12} = -1$$

۷ گزینه ۳

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۹

گام اول

می‌دانیم: $y = f(u) \Rightarrow y' = u'f'(u)$

گام دوم

با تعریف $u = xf(x)$ و باتوجه‌به گام اول، مشتق $f(xf(x))$ را تعیین و مقدار آن را در $x = ۲$ محاسبه می‌کنیم.

$$u = xf(x) \Rightarrow u' = f(x) + xf'(x)$$

$$y = f(xf(x)) \Rightarrow y' = (f(x) + xf'(x))\, f'(xf(x))$$

اکنون ضابطهٔ $f'(x)$ را به دست می‌آوریم:

$$f(x) = \frac{۳}{۲} - \sqrt{x+۲} \Rightarrow f'(x) = -\frac{۱}{۲\sqrt{x+۲}}$$

بنابراین داریم:

$$y' = \left(\frac{۳}{۲} - \sqrt{x+۲} - \frac{x}{۲\sqrt{x+۲}}\right)\left(-\frac{۱}{۲\sqrt{xf(x)+۲}}\right)$$

$$= \left(\frac{۳}{۲} - \sqrt{x+۲} - \frac{x}{۲\sqrt{x+۲}}\right)\left(-\frac{۱}{۲\sqrt{\frac{۳}{۲}x - x\sqrt{x+۲}+۲}}\right)$$

$$\Rightarrow y'(۲) = \left(\frac{۳}{۲} - ۲ - \frac{۱}{۲}\right)\left(-\frac{۱}{۲\sqrt{۳-۴+۲}}\right) = (-۱)\left(-\frac{۱}{۲}\right) = \frac{۱}{۲}$$

۸ گزینه ۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۲

گام اول

می‌دانیم $(fog)(x) = f(g(x))$ و $(fog)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ است.

گام دوم

با داشتن ضابطه‌های $f(x)$ و $g(x)$، ابتدا ضابطهٔ $(fog)(x)$ را تعیین کرده، سپس از آن مشتق می‌گیریم.

$$f(x) = \frac{x^۳ - ۲}{۱ + x^۳} \quad , \quad g(x) = \sqrt[۳]{x - ۱}$$

$$(fog)(x) = f(g(x)) = \frac{(g(x))^۳ - ۲}{۱ + (g(x))^۳} = \frac{\left(\sqrt[۳]{x - ۱}\right)^۳ - ۲}{۱ + \left(\sqrt[۳]{x - ۱}\right)^۳} = \frac{x - ۱ - ۲}{۱ + x - ۱} = \frac{x - ۳}{x}$$

$$\Rightarrow \quad y = (fog)(x) = \frac{x - ۳}{x}$$

ضابطهٔ y' را به دست می‌آوریم:

$$f'(g(x)) \cdot g'(x) = y' = \frac{x - (x - ۳)}{x^۲} = \frac{x - x + ۳}{x^۲} = \frac{۳}{x^۲}$$

۹ گزینه ۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۲

گام اول

می‌دانیم $(gof)(x) = g(f(x))$ و $(gof)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$ است. توجه کنید که دامنهٔ تعریف تابع $(gof)(x)$ به‌صورت زیر است:

$$D_{gof} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$

گام دوم

باتوجه‌به گام اول، ابتدا ضابطهٔ $(gof)(x)$ را تعیین کرده و مشتق آن را به دست می‌آوریم. برای تعیین ضابطهٔ $g(f(x))$ کافی است در ضابطهٔ $g(x)$ به‌جای متغیر x، ضابطهٔ $f(x)$ را قرار دهیم.

$$D_f = (-1, 1), D_g = \mathbb{R} \Rightarrow D_{gof} = (-1, 1)$$

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, g(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$(gof)(x) = g(f(x)) = \frac{f(x)}{\sqrt{1+(f(x))^2}} = \frac{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2}}} = \frac{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{\frac{1-x^2}{1-x^2}+\frac{x^2}{1-x^2}}} = \frac{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}} = x \quad ; \quad -1 < x < 1$$

$$\Rightarrow y = (gof)(x) = x \Rightarrow f'(x)\, g'(f(x)) = y' = 1 \quad ; -1 < x < 1$$

۱۰ گزینه ۳

باتوجه‌به عبارت $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(2+h) - 9}{h} = \frac{3}{2}$، $f(2) = 9$ و $f'(2) = \frac{3}{2}$ می‌شود.

$$g(x) = x\sqrt{f(x)} \Rightarrow g'(x) = \sqrt{f(x)} + x\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} \Rightarrow g'(2) = \sqrt{f(2)} + 2\frac{f'(2)}{2\sqrt{f(2)}}$$

$$\Rightarrow g'(2) = \sqrt{9} + 2 \times \frac{\frac{3}{2}}{2\sqrt{9}} = 3 + \frac{1}{2} = 3/5$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۵

۱۱ گزینه ۴

چون خط $y = ۳x - ۵$ در $x = ۲$ بر $g(x)$ مماس است، پس $g'(۲) = ۳$ و $A(۲,۱) \in g$ خواهد بود.
ازطرفی چون $\lim\limits_{x\to ۱} \frac{f(x) - f(۱)}{۲(x-۱)} = \frac{۲}{۳}$ است، پس:

$$\frac{۱}{۲}f'(۱) = \frac{۲}{۳} \Rightarrow f'(۱) = \frac{۴}{۳}$$
$$y = (fog)(x) \Rightarrow y' = g'(x)f'(g(x)) \Rightarrow y'(۲) = g'(۲)f'(g(۲))$$
$$\Rightarrow y'(۲) = ۳f'(۱) = ۳ \times \frac{۴}{۳} = ۴$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۸

۱۲ گزینه ۱

به ازای $x = ۱$ عبارت $(x-۱)$ برابر صفر می‌شود (عامل صفرشونده)، همچنین تابع $g(x) = \frac{\sqrt[۵]{۳x-۲}}{(۵x-۳)^۴}$ نیز در نقطهٔ $x = ۱$ پیوسته است؛ بنابراین برای به دست آوردن مقدار $f'(۱)$ کافی است مشتق عبارت $(x-۱)$ را در تابع $g(x)$ ضرب و حاصل را به ازای $x = ۱$ محاسبه می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{(x-۱)\sqrt[۵]{۳x-۲}}{(۵x-۳)^۴} \xrightarrow[\text{در نقطهٔ } x=۱]{\text{عبارت } (x-۱) \text{ عامل صفرشونده}} f'(x) = ۱ \times \frac{\sqrt[۵]{۳x-۲}}{(۵x-۳)^۴}$$
$$\Rightarrow \quad f'(۱) = \frac{\sqrt[۵]{۳-۲}}{(۵-۳)^۴} = \frac{۱}{۲^۴} = \frac{۱}{۱۶} \quad \Rightarrow \quad f'(۱) = \frac{۱}{۱۶}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۳

۱۳ گزینه ۲

$$f(x) = (x-۴)\sqrt[۳]{x+۳} \Rightarrow f'(x) = \sqrt[۳]{x+۳} + (x-۴)\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{(x+۳)^۲}}$$
$$f(۵) = ۲ \quad , \quad f'(۵) = \frac{۲۵}{۱۲}$$
$$\lim_{h\to ۰} \frac{f^۲(۵-h) - ۳f(۵-h) + ۲}{h(۵-h)} = \lim_{h\to ۰} \frac{(f(۵-h)-۱)(f(۵-h)-۲)}{h(۵-h)}$$
$$\lim_{h\to ۰} \frac{f(۵-h)-۱}{(۵-h)} \times \lim_{h\to ۰} \frac{-(f(۵-h)-۲)}{-h}$$
$$= (\frac{f(۵)-۱}{۵})(-f'(۵)) = \frac{۱}{۵} \times (-\frac{۲۵}{۱۲}) = \frac{-۵}{۱۲}$$

راه حل دوم: از قاعدهٔ هوپیتال نیز می‌توان برای به دست آوردن حد استفاده کرد.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۱

۱۴ گزینه ۱

ابتدا توابع f و g را به هم تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{f}{g}=\frac{\sqrt{x+۸}-\sqrt{x}}{\frac{۱}{\sqrt{x+۸}+\sqrt{x}}}\Rightarrow\frac{f}{g}=x+۸-x\Rightarrow\frac{f}{g}=۸$$

از عبارت بالا مشتق می‌گیریم:

$$\frac{f'\cdot g-g'\cdot f}{g^{۲}}=۰\Rightarrow f'\cdot g-g'\cdot f=۰$$

یعنی حاصل عبارت خواسته شده همواره بر روی تمام نقاط صفر است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۳

۱۵ گزینه ۳

$$g'(x)f'(g(x))=(fog)'(x)$$

$$x>۰:g(x)=\frac{۱}{۲x^{۵}}\quad,\quad x>۰:f(x)=\frac{-۱}{\sqrt[۵]{۲x}}$$

$$(fog)(x)=f(g(x))\overset{x>۰}{=}-\frac{۱}{\sqrt[۵]{۲(\frac{۱}{۲x^{۵}})}}=-x$$

$$(fog)'(x)=-۱\Rightarrow(fog)'(\sqrt[۵]{۳})=g'(\sqrt[۵]{۳})f'(g(\sqrt[۵]{۳}))=-۱$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

۱۶ گزینه ۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۲

گام اول

الف) طبق تعریف مشتق داریم:

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to ۰} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

ب) می‌دانیم: $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

گام دوم

باتوجه‌به اینکه می‌دانیم $(fg)(x) = f(x)g(x)$ است، می‌توان نوشت:

$$\lim_{\Delta x \to ۰} \frac{f(۲+\Delta x)\, g(۲+\Delta x) - f(۲)\, g(۲)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to ۰} \frac{(fg)(۲+\Delta x) - (fg)(۲)}{\Delta x} = (fg)'(۲)$$

باتوجه‌به قسمت ب از گام اول داریم:

$$(fg)'(x) = f'(x)\, g(x) + g'(x)\, f(x) = (۲x-۱)\sqrt{۲x} + (x^۲ - x)\frac{۲}{۲\sqrt{۲x}}$$

$$\Rightarrow (fg)'(۲) = (۴-۱)\sqrt{۴} + (۲^۲ - ۲)\frac{۱}{\sqrt{۴}} = (۳ \times ۲) + \frac{۲}{۲} = ۶ + ۱ = ۷$$

۱۷ گزینه ۱

برای آنکه نمودار تابع $y = ۲x^۲ + (m+۱)x + m + ۶$ بر نیمساز ناحیهٔ اول مماس باشد، باید معادلهٔ تقاطع تابع را با خط $y = x$ نوشته و Δ را برابر صفر قرار دهیم.

$$\begin{cases} y = x \\ y = ۲x^۲ + (m+۱)x + m + ۶ \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = ۲x^۲ + (m+۱)x + m + ۶ \Rightarrow ۲x^۲ + mx + m + ۶ = ۰$$

$$\Delta = ۰ \;\Rightarrow\; m^۲ - ۸(m+۶) = ۰ \Rightarrow m^۲ - ۸m - ۴۸ = ۰$$

$$\Rightarrow (m-۱۲)(m+۴) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} m = ۱۲ \\ m = -۴ \end{cases}$$

شیب نمودار در نقطهٔ برخورد برابر ۱ است. از معادلهٔ کلی، مشتق می‌گیریم. داریم:

$$y' = ۴x + m + ۱ \xrightarrow{y'=۱} ۱ = ۴x + m + ۱ \Rightarrow x = -\frac{m}{۴}$$

چون نمودار بر نیمساز ناحیهٔ اول مماس می‌باشد، بنابراین $x > ۰$ لذا $m = -۴$ قابل‌قبول است.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۳

۱۸ گزینه ۲

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۴

گام اول

الف) طبق تعریف مشتق یک تابع داریم:

$$f'(-۱) = \lim_{\Delta x \to ۰} \frac{f(-۱+\Delta x) - f(-۱)}{\Delta x}$$

ب) هرگاه u و v دو تابع برحسب x باشند و داشته باشیم $f(x) = u \times v$، آنگاه مشتق تابع f چنین تعریف می‌شود:

$$f'(x) = u' \times v + v' \times u$$

گام دوم

باتوجه‌به قسمت ب از گام اول ابتدا ضابطهٔ مشتق $f'(x)$ را تعیین می‌کنیم:

$$f(x) = (x-۲)\sqrt[۳]{x^۲} = (x-۲)x^{\frac{۲}{۳}}$$
$$f'(x) = ۱ \times x^{\frac{۲}{۳}} + \frac{۲}{۳}x^{-\frac{۱}{۳}}(x-۲) = \sqrt[۳]{x^۲} + \frac{۲(x-۲)}{۳\sqrt[۳]{x}}$$

هدف ما محاسبه $f'(-۱)$ است، پس داریم:

$$f'(-۱) = \sqrt[۳]{(-۱)^۲} + \frac{۲(-۱-۲)}{۳\sqrt[۳]{-۱}} = ۱ + \frac{۲(-۳)}{۳(-۱)} = ۱ + ۲ = ۳$$

۱۹ گزینه ۱

$$y = fog(x) \Rightarrow y' = g'(x)f'(g(x))$$
$$\xrightarrow{x=۲} y'(۲) = g'(۲)f'(g(۲)) \Rightarrow ۶ = g'(۲)f'(\frac{۴+۱}{۲-۱}) \Rightarrow ۶ = g'(۲)f'(۵) \quad (۱)$$
$$g(x) = \frac{۲x+۱}{x-۱} \Rightarrow g'(x) = \frac{۲(x-۱)-(۲x+۱)}{(x-۱)^۲} = \frac{-۳}{(x-۱)^۲}$$
$$\Rightarrow g'(۲) = -۳$$
$$(۱) : ۶ = -۳f'(۵) \Rightarrow f'(۵) = -۲$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۲۰ گزینه ۲

ابتدا تابع fog را تشکیل می‌دهیم:

$$(fog)(x) = \frac{۴}{۵}(۴x + |x|) - \frac{۱}{۵}|۴x + |x||$$

$$\text{اگر } x \geq ۰ \Rightarrow (fog)(x) = \frac{۴}{۵}(۵x) - \frac{۱}{۵}(۵x) = ۴x - x = ۳x$$

$$\text{اگر } x < ۰ \Rightarrow fog(x) = \frac{۴}{۵}(۴x - x) - \frac{۱}{۵}\left|\underbrace{۴x - x}_{۳x}\right|$$

$$= \frac{۱۲}{۵}x - \frac{۱}{۵}(-۳x) = \frac{۱۵}{۵}x = ۳x$$

بنابراین $(fog)(x) = ۳x$، پس:

$$(fog)'(x) = ۳$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۴

۲۱ گزینه ۱

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۱

گام اول

مشتق تابع کسری $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$y = \frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow y' = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g^۲(x)}$$

گام دوم

باتوجه‌به مشخص بودن مقادیر $y'(۱)$، $f(۱)$ و $f'(۱)$، مقدار $g(۱)$ را حساب می‌کنیم (دلیل اینکه مقدار دقیق $g'(۱)$ ذکرنشده صفر بودن $f(۱)$ است).

$$y'(۱) = \frac{f'(۱)g(۱) - g'(۱)f(۱)}{g^۲(۱)} \Rightarrow ۳ = \frac{(-۴)g(۱) - ۰}{g^۲(۱)} \Rightarrow ۳ = \frac{-۴g(۱)}{g^۲(۱)} \Rightarrow ۳ = \frac{-۴}{g(۱)} \Rightarrow g(۱) = -\frac{۴}{۳}$$

۲۲ گزینه ۴

باتوجه‌به اینکه حد وجود دارد، پس صورت کسر نیز باید به ازای $h = ۰$ صفر باشد، بنابراین داریم:

$$f(-۲+h)+۳=۰ \xrightarrow{h=۰} f(-۲)=-۳$$

طبق تعریف مشتق داریم:

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(-۲+h)+۳}{h}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\begin{cases}f(-۲)=-۳\\ f'(-۲)=\frac{۱}{۲}\end{cases}$$

$$(x^۲f(x))'=۲xf(x)+x^۲f'(x)$$

$$\xrightarrow{x=-۲} -۴f(-۲)+۴f'(-۲)=-۴(-۳)+۴(\frac{۱}{۲})=۱۲+۲=۱۴$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۶

۲۳ گزینه ۳

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۶

گام اول

باتوجه‌به اینکه حد وجود دارد، پس صورت کسر نیز باید به ازای $x = ۴$ صفر باشد، بنابراین داریم:

$$f(x)+۷=۰ \xrightarrow{x=۴} f(۴)=-۷$$

تابع f در $x = ۴$ مشتق‌پذیر است؛ بنابراین می‌توان نوشت:

$$\lim_{x\to ۴}\frac{f(x)+۷}{x-۴}=-\frac{۳}{۲}\Rightarrow f'(۴)=-\frac{۳}{۲}\ ,\ f(۴)=-۷$$

گام دوم

$$(\frac{f(۲x)}{x})'=\frac{۲f'(۲x)x-f(۲x)}{x^۲}$$

$$\xrightarrow{x=۲}\frac{۲f'(۴)\times ۲-f(۴)}{۴}=\frac{۲(-\frac{۳}{۲})(۲)-(-۷)}{۴}=\frac{-۶+۷}{۴}=\frac{۱}{۴}$$

۲۴ گزینه ۳

$$g'(x) = f'(x+۱) + ۳f'(۳x+۱۰)$$
$$x = -۲ : g'(-۲) = f'(-۲+۱) + ۳f'(۳(-۲)+۱۰)$$
$$= f'(-۱) + ۳f'(۴)$$

تابع f دورهٔ تناوب ۵ دارد، پس $f'(-۱) = f'(۴)$:

$$g'(-۲) = ۴f'(-۱) = ۴ \times \frac{۳}{۲} = ۶$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۱

۲۵ گزینه ۳

تابع P به‌صورت زیر است:

$$P(x) = ax^۲ + bx + c$$

P' به‌صورت زیر است:

$$P'(x) = ۲ax + b$$

سؤال گفته اگر P را بر P' تقسیم کنیم، خارج‌قسمت $\frac{x}{۲} + ۱$ و باقی‌مانده -۲ است. اتحاد تقسیم را می‌نویسیم:

$$P(x) = P'(x).\left(\frac{x}{۲}+۱\right) + (-۲) \Rightarrow ax^۲ + bx + c = (۲ax+b)\left(\frac{x}{۲}+۱\right) - ۲$$
$$\Rightarrow ax^۲ + bx + c = ax^۲ + \left(۲a + \frac{b}{۲}\right)x + (b-۲)$$

ضرایب عبارات هم‌درجه را برابر قرار می‌دهیم:

$$x^۲ \text{ ضرایب} \Rightarrow a = a$$
$$x \text{ ضرایب} \Rightarrow b = ۲a + \frac{b}{۲} \xrightarrow{\times ۲} ۲b = ۴a + b \Rightarrow b = ۴a$$
$$\text{جملات درجه صفر} \Rightarrow c = b - ۲$$

a، b و c، سه عدد طبیعی‌اند. چون می‌خواهیم کمترین مقدار $a+b+c$ را حساب کنیم، پس باید در رابطهٔ $b = ۴a$، $a = ۱$ و $b = ۴$ باشد، پس:

$$c = b - ۲ = ۴ - ۲ = ۲$$
$$\Rightarrow \min(a+b+c) = ۱ + ۴ + ۲ = ۷$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۰

۲۶ گزینه ۲

$$f(x)=x\sqrt[3]{\frac{3x+1}{x+2}}$$

$$\Rightarrow f'(x)=\sqrt[3]{\frac{3x+1}{x+2}}+\frac{1}{3}\times\frac{3(x+2)-(3x+1)}{(x+2)^2}\times\frac{1}{\sqrt[3]{(\frac{3x+1}{x+2})^2}}\times x$$

$$=\sqrt[3]{\frac{3x+1}{x+2}}+\frac{5x}{3(x+2)^2\sqrt[3]{(\frac{3x+1}{x+2})^2}}\xrightarrow{x=-3}2-\frac{5}{4}=\frac{3}{4}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

۲۷ گزینه ۳

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۱

گام اول

الف) مشتق تابع $y=\sqrt{u}$ از رابطهٔ $y'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$ به دست می‌آید.

ب) مشتق تابع کسری $y=\frac{f(x)}{g(x)}$ از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$y'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

گام دوم

با استفاده از روابط گام اول، ابتدا $f'(x)$ و سپس $f'(2)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$f(x)=\sqrt{\frac{3x-1}{2x+1}}\Rightarrow f'(x)=\frac{\frac{3(2x+1)-2(3x-1)}{(2x+1)^2}}{2\sqrt{\frac{3x-1}{2x+1}}}=\frac{\frac{5}{(2x+1)^2}}{2\sqrt{\frac{3x-1}{2x+1}}}$$

$$\Rightarrow f'(2)=\frac{\frac{5}{(4+1)^2}}{2\sqrt{\frac{6-1}{4+1}}}=\frac{\frac{5}{5^2}}{2\sqrt{\frac{5}{5}}}=\frac{\frac{1}{5}}{2}=\frac{1}{10}$$

۲۸ گزینه ۱

حد داده‌شده برابر مشتق تابع $f(x)$ در $x=۲$ است، بنابراین مشتق تابع را در $x=۲$ به دست می‌آوریم.

$$\lim_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}=f'(۲)$$

$$f'(x)=۳\left(\sqrt{\frac{x+۲}{۲x-۳}}\right)^{۲}\times\left(\frac{-۷}{۲\sqrt{\frac{x+۲}{۲x-۳}}(۲x-۳)^{۲}}\right)$$

$$\Rightarrow f'(۲)=۱۲\times\frac{-۷}{۲\times\sqrt{\frac{۲+۲}{۴-۳}}(۴-۳)^{۲}}=-۲۱$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

۲۹ گزینه ۱

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^{۲}+۶x} & ;\ ۰\le x<۴\\ \left[\frac{x}{۴}\right](x^{۲}-۹x) & ;\ ۴\le x<۸\end{cases}$$

$$۲<۴\Rightarrow f(x)=\sqrt{x^{۲}+۶x}\Rightarrow f'(x)=\frac{۲x+۶}{۲\sqrt{x^{۲}+۶x}}=\frac{x+۳}{\sqrt{x^{۲}+۶x}}\quad (I)$$

$$۵>۴\Rightarrow f(x)=\left[\frac{x}{۴}\right](x^{۲}-۹x)\ ,\ \left[\frac{۵}{۴}\right]=۱\Rightarrow f'(x)=۲x-۹\quad (II)$$

$$\xrightarrow{(I)} f'(۲)=\frac{۵}{۴}$$

$$\xrightarrow{(II)} f'(۵)=۱$$

پس $f'(۲)-f'(۵)=\frac{۱}{۴}$ است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

۳۰ گزینه ۱

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

گام اول

می‌دانیم: $f'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ بنابراین حاصل حد $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$ برابر $f'(1)$ است.

گام دوم

کافی است مقدار مشتق تابع $f(x)$ را در نقطهٔ $x=1$ محاسبه کنیم:

$$f(x)=\sqrt{\frac{4x+5}{x+3}} \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{\frac{4x+5}{x+3}}}\times\frac{4(x+3)-(4x+5)}{(x+3)^2}$$

$$\Rightarrow f'(1)=\frac{1}{2\sqrt{\frac{4+5}{1+3}}}\times\frac{4(1+3)-(4+5)}{(1+3)^2}=\frac{1}{3}\times\frac{7}{16}=\frac{7}{48}$$

۳۱ گزینه ۴

می‌دانیم: $(fog(x))'=g'(x)\,f'(g(x))$

$$g(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2-1}}\Rightarrow g'(x)=\frac{\frac{-2x}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}}{\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}=\frac{-2x}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^4}}$$

$$\Rightarrow g'\left(\frac{3}{\sqrt{8}}\right)=\frac{-2\times\frac{3}{\sqrt{8}}}{3\sqrt[3]{\left(\frac{9}{8}-1\right)^4}}=\frac{\frac{-6}{\sqrt{8}}}{3\times\frac{1}{16}}=\frac{-6\times 16}{3\sqrt{8}}=\frac{-16}{\sqrt{2}}=-8\sqrt{2}$$

$$g\left(\frac{3}{\sqrt{8}}\right)=\frac{1}{\sqrt[3]{\frac{9}{8}-1}}=2$$

حال باید $f'(2)$ را حساب کنیم. در همسایگی $x=2$ حاصل براکت ۴ می‌شود.

$$f(x)=16x^2+1\Rightarrow f'(x)=32x\Rightarrow f'(2)=64$$

$$(fog)'\left(\frac{3}{\sqrt{8}}\right)=-8\sqrt{2}\times 64=(-128\sqrt{2})\times 4$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

۳۲ گزینه ۴

با اطلاعات مسئله داریم:

$$P(x) = (x^۲ + ۲x)Q(x) + ۳x + ۱ \quad (۱)$$

از طرفین رابطهٔ (۱) مشتق می‌گیریم:

$$P'(x) = (۲x + ۲)Q(x) + (x^۲ + ۲x)Q'(x) + ۳$$
$$P'(-۲) = -۲Q(-۲) + ۳ = -۲(۳) + ۳ = -۳$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۰

۳۳ گزینه ۴

ابتدا تابع را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = \left(\frac{\sqrt[۳]{x^۲ + ۲x}}{x^۲ - x}\right)^۳ = \frac{x^۲ + ۲x}{(x^۲ - x)^۳}$$

سپس مشتق می‌گیریم:

$$f'(x) = \frac{(x^۲ + ۲x)'(x^۲ - x)^۳ - ((x^۲ - x)^۳)'(x^۲ + ۲x)}{(x^۲ - x)^۶}$$
$$= \frac{(۲x + ۲)(x^۲ - x)^۳ - (۳(۲x - ۱)(x^۲ - x)^۲)(x^۲ + ۲x)}{(x^۲ - x)^۶}$$
$$f'(۲) = \frac{۶ \times ۸ - ۳ \times ۳ \times ۴ \times ۸}{۶۴} = -\frac{۱۵}{۴}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

۳۴ گزینه ۴

$$f(x) = \left(\frac{۲x - x^۲}{۳x + ۵}\right)^{\frac{۲}{۳}}$$
$$f'(x) = \frac{۲}{۳}\left(\frac{۲x - x^۲}{۳x + ۵}\right)^{-\frac{۱}{۳}}\left(\frac{(۲ - ۲x)(۳x + ۵) - ۳(۲x - x^۲)}{(۳x + ۵)^۲}\right)$$
$$\Rightarrow f'(-۲) = \frac{۲}{۳}\left(\frac{-۴ - ۴}{-۶ + ۵}\right)^{-\frac{۱}{۳}}\left(\frac{۶(-۱) - ۳(-۴ - ۴)}{(-۶ + ۵)^۲}\right)$$
$$= \frac{۲}{۳}(۸)^{\frac{-۱}{۳}}(-۶ + ۲۴) = \frac{۲ \times ۱۸}{۳\sqrt[۳]{۸}} = ۶$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۳۵ گزینه ۴

ازآنجاکه این دو نمودار در یک نقطه بر یک خط مماس هستند، پس هم مقادیر و هم مشتق‌هایشان در این نقطه برابر است. داریم:

$$y_۱ = x\sqrt{x} \Rightarrow y'_۱ = \sqrt{x} + \frac{x}{۲\sqrt{x}}$$
$$y_۲ = x^۲ + ax + b \Rightarrow y'_۲ = ۲x + a$$
$$y'_۱(۴) = y'_۲(۴) \Rightarrow ۲ + \frac{۴}{۴} = ۸ + a \Rightarrow a = -۵$$

و نیز داریم:

$$y_۱(۴) = y_۲(۴) \Rightarrow ۸ = ۱۶ - ۵(۴) + b \Rightarrow ۸ = -۴ + b \Rightarrow b = ۱۲$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

۳۶ گزینه ۴

$$\begin{cases} f(۲) = \frac{۲+۲}{۲-۱} = ۴ \\ g(۲) = ۴a + ۲b \end{cases} \xrightarrow{f(۲)=g(۲)} ۴a + ۲b = ۴ \quad (۱)$$

$$\begin{cases} f'(x) = \frac{x-۱-(x+۲)}{(x-۱)^۲} = \frac{-۳}{(x-۱)^۲} \Rightarrow f'(۲) = -۳ \\ g'(x) = ۲ax + b \Rightarrow g'(۲) = ۴a + b \end{cases}$$

$$\xrightarrow{f'(۲)=g'(۲)} ۴a + b = -۳ \quad (۲)$$

باتوجه‌به (۱) و (۲) داریم:

$$\begin{cases} ۴a + ۲b = ۴ \\ ۴a + b = -۳ \end{cases} \Rightarrow b = ۷$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۳۷ گزینه ۱

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۷

گام اول

الف) با استفاده از تعریف مشتق داریم:

$$\lim_{x\to ۲}\frac{g(x)-g(۲)}{x-۲}=g'(۲)$$

ب) می‌دانیم:

$$(gof)'(۱)=f'(۱)\,g'(f(۱))$$

گام دوم

با استفاده از ضابطهٔ تابع $f(x)$، مقادیر $f(۱)$ و $f'(۱)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$f(x)=\sqrt{۵-x^{۲}}\Rightarrow f(۱)=\sqrt{۵-۱}=۲$$

$$f'(x)=\frac{-۲x}{۲\sqrt{۵-x^{۲}}}=\frac{-x}{\sqrt{۵-x^{۲}}}\quad\Rightarrow\quad f'(۱)=\frac{-۱}{\sqrt{۵-۱}}=\frac{-۱}{\sqrt{۴}}=-\frac{۱}{۲}$$

پس مقدار $(gof)'(۱)$ برابر است با:

$$(gof)'(۱)=f'(۱)\,g'(f(۱))\xrightarrow{f(۱)=۲}(gof)'(۱)=f'(۱)\times g'(۲)=-\frac{۱}{۲}\times\frac{۳}{۲}=-\frac{۳}{۴}$$

۳۸ گزینه ۳

فرض دوم مسئله، تعریف مشتق تابع $f(x)$ در $x = ۲$ است:

$$\lim_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}=\frac{۴}{۳}\Rightarrow f'(۲)=\frac{۴}{۳}$$

$$g(۱)=۱+\sqrt{۱}=۲$$

طبق قاعدهٔ زنجیره‌ای داریم:

$$(fog)'(۱)=g'(۱)\times f'(g(۱))=g'(۱)\times f'(۲)=\frac{۴}{۳}g'(۱)$$

ازطرفی:

$$g(x)=x+\sqrt{x}\Rightarrow g'(x)=۱+\frac{۱}{۲\sqrt{x}}$$

$$\xrightarrow{x=۱} g'(۱)=۱+\frac{۱}{۲}=\frac{۳}{۲}$$

درنتیجه:

$$(fog)'(۱)=\frac{۴}{۳}g'(۱)=\frac{۴}{۳}\times\frac{۳}{۲}=۲$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۸

۳۹ گزینه ۳

$\lim_{x\to ۴}\frac{f(x)-f(۴)}{x-۴}$ برابر $f'(۴)$ است، بنابراین برای به دست آوردن $\lim_{x\to ۴}\frac{f(x)-f(۴)}{x-۴}$ کافی است $f'(۴)$ را محاسبه کنیم:

$$f(x)=\frac{۱+\sqrt{x}}{۵-۲x}\Rightarrow f'(x)=\frac{\frac{۱}{۲\sqrt{x}}(۵-۲x)+۲(۱+\sqrt{x})}{(۵-۲x)^{۲}}$$

$$\Rightarrow f'(۴)=\frac{\frac{۱}{۴}(۵-۸)+۲(۱+۲)}{(۵-۸)^{۲}}=\frac{-\frac{۳}{۴}+۶}{۹}=\frac{۲۱}{۳۶}=\frac{۷}{۱۲}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۴۰ گزینه ۳

حاصل $f'(\frac{۱}{۴})$ را می‌خواهیم:

$$f(x)=\frac{-x-۱}{\sqrt{x}}\Rightarrow f'(x)=\frac{-۱(\sqrt{x})-\frac{۱}{۲\sqrt{x}}(-x-۱)}{x}$$

$$\xrightarrow{x=\frac{۱}{۴}}\frac{-\frac{۱}{۲}-۱(-\frac{۵}{۴})}{\frac{۱}{۴}}=\frac{-\frac{۱}{۲}+\frac{۵}{۴}}{\frac{۱}{۴}}=۳$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

مشتق توابع شامل قدرمطلق

برای محاسبه‌ی مشتق و یا مشتق راست و یا مشتق چپ این نوع از توابع در نقطه‌ی دلخواه $x=a$ ابتدا باید عبارت داخل قدرمطلق را در همسایگی آن نقطه تعیین علامت کنیم. حالا اگه توش به ازای اون نقطه مثبت بشه، خودش میاد بیرون و اگه توش به ازای اون نقطه منفی بشه قرینه‌اش میاد بیرون و حالا وقت مشتق‌گیریه. مثلاً مشتق تابع $f(x)=|2x^3-5x|$ به ازای $x=1$ این‌طوری به دست میاد: در همسایگی نقطه‌ی $x=1$ توی قدرمطلق منفی می‌شه پس قرینه‌اش میاد بیرون: $f(x)=5x-2x^3$

حالا مشتق می‌گیریم و توی مشتق، $x=1$ رو جاگذاری می‌کنیم:

$$f'(x)=5-6x^2 \Rightarrow f'(1)=5-6=-1$$

تمرین: مشتق تابع $f(x)=|x-1|+|x-2|+\cdots+|x-50|$ در نقطهٔ $x=7\sqrt{3}$ برابر کدام است؟

۱) -28 ۲) -27 ۳) -26 ۴) -25

$\sqrt{144}=12<7\sqrt{3}=\sqrt{147}<\sqrt{169}=13 \rightarrow 7\sqrt{3}=\sqrt{147}=12/\cdots$

عدد

$f(x)=(x-1+x-2+\cdots+x-12)(-x+13-x+14\cdots-x+24)-x+25\cdots-x+50$

عدد $\times -26x+$

$y'=-26$

تمرین: اگر $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=-\frac{1}{3}$، مشتق $f(\sqrt{|x|+3})$ در نقطه‌ی $x=-1$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{6}$ ۲) $\frac{1}{12}$ ۳) $-\frac{1}{6}$ ۴) $-\frac{1}{12}$

$y=f(\sqrt{-x+3})$

$y'=u'f'(u)$

$y'=\left(\frac{-1}{2\sqrt{-x+3}}\right)f'(\sqrt{-x+3})$

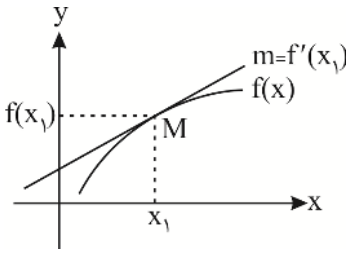
$y'=\left(\frac{-1}{4}\right)f'(\sqrt{4}=2)=\frac{1}{12}$

$f'(2)=-\frac{1}{3}$

درس ۳: خط مماس

$y-y_A=m_A(x-x_A)$

خط مماس بر منحنی از یک نقطه روی آن



گفتیم مقدار مشتق تابع $f(x)$ در نقطه‌ی x_1 برابر است با شیب خط مماس بر منحنی تابع f در آن نقطه.

پس برای نوشتن معادله‌ی خط مماس بر منحنی $y=f(x)$ در نقطه‌ای مانند M به طول x_1 کافی است $m=f'(x_1)$ را پیدا کنیم و معادله‌ی خط مماس را با استفاده از رابطه‌ی $y-f(x_1)=f'(x_1)(x-x_1)$ بنویسیم.

$f'(۳)=\frac{-۴-۱}{(۳-۲)^۲}$ $f'(۴)=\frac{-۵}{۴}=m_A$

$f(۴)=\frac{۹}{۲}$ $A(۴,\frac{۹}{۲})$

به نظر می‌رسد حرف دیگری نمانده ولی بگذارید برای آن که یاد بگیرید معادله‌ی مماس را سریع‌تر بنویسید یک مثال حل کنیم. می‌خواهیم معادله‌ی خط مماس بر منحنی تابع $f(x)=\frac{۲x+۱}{x-۲}$ را در نقطه‌ای به طول ۴ واقع بر منحنی بنویسیم. اول $x=۴$ را می‌گذاریم توی ضابطه‌ی تابع و عرض نقطه را پیدا می‌کنیم. $f(۴)=\frac{۹}{۲}$ پس مختصات نقطه شد $(۴,\frac{۹}{۲})$ حالا مشتق می‌گیریم $y'=\frac{-۵}{(x-۲)^۲}$، $x=۴$ را می‌گذاریم توی مشتق تا شیب مماس به دست آید: $m=\frac{-۵}{۴}$ حالا برای نوشتن معادله‌ی مماس دو تا کار می‌توانید بکنید:

۱) از همان فرمول بالا استفاده کنید: $y-\frac{۹}{۲}=-\frac{۵}{۴}(x-۴) \Rightarrow y=-\frac{۵}{۴}x+۵+\frac{۹}{۲} \Rightarrow y=-\frac{۵}{۴}x+\frac{۱۹}{۲} \Rightarrow ۴y+۵x=۳۸$

علت این که معادله را ساده کردیم، این است که در گزینه‌ها معمولاً با این شکل معادله سروکار دارید.

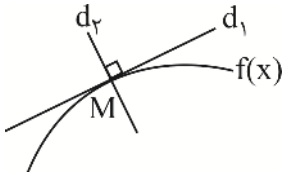
۲) یک راه دیگر داریم که معادله‌ی ساده‌شده‌ی خط را سریع‌تر بنویسیم. (این راه کاملاً اختیاری است.)

فرض کنید مختصات نقطه به صورت (α,β) و شیب خط برابر $m=\frac{a}{b}$ است. معادله‌ی خط را به صورت $by-ax=?$ بنویسید و مختصات (α,β) را در آن قرار دهید تا طرف دیگر تساوی به دست آید.

می‌شود در ذهن انجام بدهید

در این‌جا مختصات نقطه بود $(۴,\frac{۹}{۲})$ و شیب هم $m=-\frac{۵}{۴}$ پس: $۴y+۵x=?$ $\Rightarrow$ $(۴(\frac{۹}{۲})+۵(۴)=۳۸)$ $\Rightarrow$ $۴y+۵x=۳۸$

خط قائم بر منحنی $f(x)$ در نقطه‌ی M، خطی است که بر خط مماس بر منحنی در آن نقطه عمود باشد. پس شیب خط قائم برابر $\frac{-۱}{m_{مماس}}$ یا $-\frac{۱}{f'(x_۱)}$ است. بنابراین برای نوشتن معادله‌ی خط قائم هم مثل نوشتن معادله‌ی خط مماس عمل می‌کنیم: اول مختصات نقطه، بعد مشتق و پیدا کردن شیب مماس، بعد پیدا کردن شیب خط قائم و در آخر هم نوشتن معادله‌ی خط قائم.



تمرین: خط مماس بر منحنی تابع $f(x)=\frac{۵x-۴}{\sqrt{x}}$ در نقطهٔ $x=۴$ واقع بر آن، محور yها را با کدام عرض، قطع می‌کند؟ (سراسری ریاضی ۹۹)

۱) -۴ ۲) -۱ ۳) ۲ ۴) ۳

$f(۴)=\frac{۱۶}{۲}=۸$ $A(۴,۸)$

$f'(x)=\frac{۵\sqrt{x}-(\frac{۱}{۲\sqrt{x}})(۵x-۴)}{x}$

$f'(۴)=\frac{۱۰-۴}{۴}=\frac{۶}{۴}=\frac{۳}{۲}=m_A$

$y-y_A=m_A(x-x_A)$

$y-۸=\frac{۳}{۲}(x-۴)$

$y_B=-۶+۸=۲$

تمرین: خط مماس بر منحنی به معادله‌ی $y=\frac{۱}{\sqrt[۳]{۴x}}$ در نقطه‌ی $(۲,\frac{۱}{۲})$، محور yها را با کدام عرض قطع می‌کند؟ (خارج ۸۹)

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۵}{۶}$ ۳) $\frac{۷}{۶}$ ۴) $\frac{۴}{۳}$

$y=(۴x)^{-\frac{۱}{۳}}$

$y'=(-\frac{۱}{۳})(۴)(۴x)^{-\frac{۴}{۳}}$

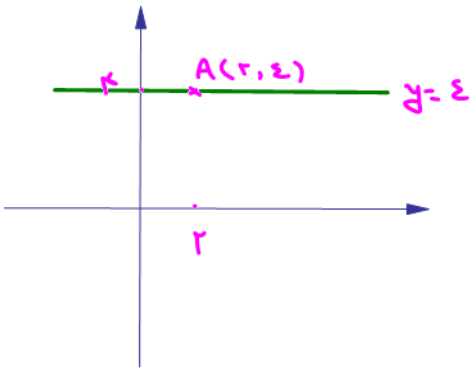
$y'=-\frac{۴}{۳}\frac{۱}{\sqrt[۳]{۶۴}}=\frac{-۴}{۳(۱۶)}=\frac{-۱}{۱۲}$

$y-\frac{۱}{۲}=-\frac{۱}{۱۲}(x-۲)$

$y_B=\frac{۱}{۶}+\frac{۱}{۲}=\frac{۱+۳=۴}{۶}=\frac{۲}{۳}$

تمرین: خط مماس بر منحنی به معادله‌ی $y=\frac{x^2}{x-1}$ در نقطه‌ای به طول ۲ واقع بر آن، محور yها را با کدام عرض قطع می‌کند؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴ (سراسری ریاضی خارج از کشور)



$A(2,4)$

$y'=\frac{2x(x-1)-(1)x^2}{(x-1)^2}$

$y'_{(2)}=\frac{4-4}{1}=0=m_A$

مماس بر تابع در $A(2,4)$ افقی است

تعیین نقاطی از منحنی که مماس بر منحنی در آن نقطه دارای شیب معلوم باشد

برای تعیین این نقاط از منحنی مشتق گرفته و مشتق را برابر شیب خط مماس قرار می‌دهیم.

نکته: هرجا بتوان مماس موازی محورها کشید شیب صفر است و برعکس

تمرین: مماس بر منحنی $y=x^3-3x^2-9x$ در چه نقاطی موازی محور xها است؟

شیب صفر

$y'=3x^2-6x-9=0$

$3(x^2-2x-3)=0$

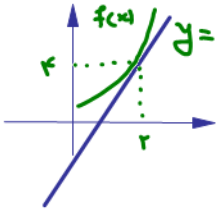
$x^2-2x-3=0$

$x=-1,3$

$f(x)(f(x)-4)$

تمرین: خط به معادلهٔ $y=3x-2$ در نقطهٔ $x=2$ بر منحنی پیوستهٔ $y=f(x)$ مماس است. حاصل $\lim_{x\to 2}\frac{f^2(x)-4f(x)}{x-2}$ کدام است؟ (سراسری ریاضی ۹۵)

۱) ۳ ۲) ۶ ۳) ۱۲ ۴) ۱۵



تابع و خط مماس بر آن در نقطه تماس هم رسند:

$f(2)=4$ هم مختصاتند

$f'(2)=3$ هم شیب

تعریف مشتق تابع در $x=2$

$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-4}{x-2}=f'(2)\quad f'(2)=4(3)=12$

راه دوم $f(x)\xrightarrow[x\to 2]{}3x-2$

$\lim_{x\to 2}\frac{f^2(x)-4f(x)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(3x-2)^2-4(3x-2)}{x-2}\overset{\text{H.Hop}}{=}\lim_{x\to 2}\frac{2(3)(3x-2)-12}{1}=12$

تمرین: در تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{4x-5}{x+1}$ و دامنهٔ $[0,8]$ خط مماس بر نمودار آن موازی پاره‌خطی است که ابتدا و انتهای منحنی را به هم

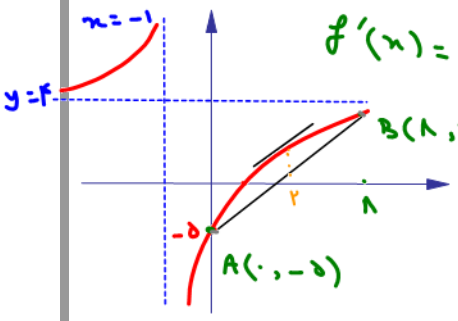
وصل می‌کند. این خط مماس، محور yها را با کدام عرض قطع می‌کند؟ (خارج تجربی ۹۸)

۱) ۲- ۲) ۱/۵- ۳) ۱- ۴) ۰/۵-

شیب خط واصل اول و آخر بازه

$x \in [0, 8]$

$f(x) = \frac{4x-5}{x+1}$ $A(0,-5)$ $B(8,3)$ $m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{3-(-5)}{8-0} = 1$



$f'(x) = \frac{4-(-5)(1)}{(x+1)^2} = \frac{9}{(x+1)^2}$ $\frac{9}{(x+1)^2} = 1 \rightarrow 9 = (x+1)^2$

$\pm 3 = x+1$

مماس برمنحنی موازی خط واصل اول و آخر بازه است. $x = 2$

$x = -4 \notin [0,8]$

اگر یک خط و یک منحنی بر هم مماس باشند (طول نقطه‌ی تماس را نداریم) معادله‌ی تلاقی آن‌ها ریشه‌ی مکرر (معمولاً مضاعف) می‌دهد. در این‌جا دو حالت زیر می‌تواند رخ دهد:

۱) اگر معادله‌ی تلاقی، درجه دوم باشد، باید $\Delta = 0$ قرار دهیم.

تمرین: اگر خط $y = 4x + a$ بر منحنی $y = x^2 + 2x + 3$ مماس باشد، مقدار a کدام است؟ (مشابه خارج تجربی ۹۷)

۱) ۱ ۲) ۱- ۳) ۲ ۴) ۲-

پاسخ: گزینه‌ی «۳» ـ روش تلاقی: معادله‌ی خط و منحنی را قطع می‌دهیم و شرط وجود ریشه‌ی مضاعف را می‌نویسیم:

$$\begin{cases} y = x^2 + 2x + 3 \\ y = 4x + a \end{cases} \Rightarrow x^2 + 2x + 3 = 4x + a \Rightarrow x^2 - 2x + (3-a) = 0 \Rightarrow \Delta = 0 \Rightarrow 4 - 4(3-a) = 0$$

$$\Rightarrow -8 + 4a = 0 \Rightarrow a = 2$$

۲) مشتق هر دو را مساوی می‌گذاریم و معادله‌ی جدید را حل می‌کنیم و x را به دست می‌آوریم. به این x، طول نقطه‌ی تماس می‌گویند. این x را در منحنی و خط جاگذاری می‌کنیم و عرض‌هایشان را مساوی قرار می‌دهیم. روش دوم سؤال قبل رو ببینید:

$$\begin{cases} y = x^2 + 2x + 3 \Rightarrow y' = 2x + 2 \\ y = 4x + a \Rightarrow y' = 4 \end{cases} \xrightarrow{\text{مشتق‌ها رو مساوی بذار}} 2x + 2 = 4 \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 1$$

به $x = 1$ طول نقطه‌ی تماس می‌گویند.

حالا $x = 1$ رو توی منحنی و خط جاگذاری کن و عرض‌هاشون رو مساوی قرار بده:

$$\begin{cases} x = 1 \xrightarrow{\text{در منحنی}} y = 1 + 2 + 3 = 6 \\ x = 1 \xrightarrow{\text{در خط}} y = 4 + a \end{cases} \xrightarrow{\text{عرض‌ها مساوی}} 6 = 4 + a \Rightarrow \boxed{a = 2} \quad \text{خلاص}$$

روش ۲ همیشه کارآمده ولی روش ۱ یعنی تلاقی و سپس $\Delta = 0$ وقتی به درد می‌خوره که معادله‌ی تلاقی درجه ۲ باشه.

تمرین: به ازای کدام مقدار b خط به معادله‌ی $y = -3x + b$ بر نمودار تابع $y = x^3 - 3x^2$ مماس است؟

۱) ۲- ۲) ۱- ۳) ۱ ۴) ۲

$A(1,-2)$

$-2 = -3 + b$

$b = 1$

$3x^2 - 6x = -3$

$x^2 - 2x = -1$

$x^2 - 2x + 1 = 0 \quad (x-1)^2 = 0 \rightarrow x = 1$

پاسخ: گزینه‌ی «۳» ـ چون با یک تابع درجه سوم روبه‌رو هستیم از مشتق استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases} y = x^3 - 3x^2 \Rightarrow y' = 3x^2 - 6x \\ y = -3x + b \Rightarrow y' = -3 \end{cases} \xrightarrow{\text{مشتق‌ها برومساوی بذار}} 3x^2 - 6x = -3 \Rightarrow 3x^2 - 6x + 3 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow (x-1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ طول نقطه‌ی تماس}$$

$$\begin{cases} x = 1 \xrightarrow{\text{درمنحنی}} y = 1 - 3 = -2 \\ x = 1 \xrightarrow{\text{درخط}} y = -3 + b \end{cases} \xrightarrow{\text{عرض‌ها مساوی}} -2 = -3 + b \Rightarrow b = 1 \text{ خلاص}$$

تمرین: خط مماس بر نمودارهای دو تابع با ضابطه‌های $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$ و $g(x) = ax^2 + bx$، در نقطهٔ $x = 2$، مشترک‌اند. مقدار b کدام است؟ (سراسری تجربی خارج از کشور ۹۹)

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

$g(2) = 4a + 2b$ $\quad f(2) = 4$ $\quad f'(x) = \frac{-1-2}{(x-1)^2}$ $\quad f'(2) = -3$

$4a + 2b = 4 \rightarrow 2a + b = 2$ $\quad g'(x) = 2ax + b$ $\quad g'(2) = 4a + b = -3$

$-4a - b = 3$ $\quad -2a = 5$ $\quad a = -\frac{5}{2}$ $\quad b = 2 - 2a = 2 + 5 = 7$

تمرین: دو نقطه بر منحنی $y = \frac{x-3}{x-1}$ وجود دارد که مماس در آن نقاط موازی خط $y = 2x$ است. فاصلهٔ این دو نقطه برابر چقدر است؟

۱) $\sqrt{5}$ ۲) $2\sqrt{5}$ ۳) $2\sqrt{2}$ ۴) $\sqrt{2}$

$A(2,-1)$ $\quad B(0,3)$ $\quad AB = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{4+16} = 2\sqrt{5}$

$y' = \frac{-1+3}{(x-1)^2} = \frac{2}{(x-1)^2} = 2$ $\quad (x-1)^2 = 1 \rightarrow \begin{cases} x-1=1 & x=2 \\ x-1=-1 & x=0 \end{cases}$

تمرین: منحنی $y = \frac{x^2 + mx + 3}{x+2}$ بر محور xها مماس است. مقدار m کدام است؟

۱) -1 ۲) $-2\sqrt{3}$ ۳) -3 ۴) -4

$y = 0$ معادله تقاطع منحنی با محور xها $\quad x^2 + mx + 3 = 0$ $\quad \Delta = m^2 - 12 = 0 \rightarrow \begin{cases} m = 2\sqrt{3} \\ m = -2\sqrt{3} \end{cases}$

$y = \frac{(x+\sqrt{3})^2}{x+2}$ $\quad x^2 \pm 2\sqrt{3}x + 3$

تمرین: حداکثر چند خط موازی محور xها می‌توان بر تابع $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ مماس کرد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

$y' = 0$ $\quad f'(x) = 4ax^3 + 2bx = 0$ $\quad 2x(ax^2 + b) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ ax^2 + b = 0 \rightarrow x^2 = -\frac{b}{a} \rightarrow x = \pm\sqrt{-\frac{b}{a}} \end{cases}$

برای تابع ۳ تا مماس افقی می‌توان کشید

حالت $\frac{b}{a} < 0$ در حالت $a > 0$ یا $ab < 0$ تابع ۴ مجهولی

$a > 0$ $\quad a < 0$

$f\left(-\sqrt{-\frac{b}{a}}\right) = f\left(\sqrt{-\frac{b}{a}}\right)$ اما چون ۲ تا خط مماس افقی داریم

۳ تا مماس موازی xها و ۲ تا خط موازی xهای می‌توان کشید

۱ به ازای کدام مقادیر m، خط به معادلهٔ $(m+۲)y = mx$، موازی یکی از خطوط مماس بر منحنی $y = \sqrt{۱+x^۲}$ است؟

۱) $m > -۱$
۲) $m < -۱$
۳) $m > ۱$
۴) $m < ۱$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۵

۲ خط مماس بر منحنی به معادلهٔ $y = \frac{x^۲}{x-۱}$ در نقطه‌ای به طول ۲ واقع بر آن، محور yها را با کدام عرض قطع می‌کند؟

۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۵

۳ خط مماس بر منحنی به معادلهٔ $y = \frac{۲x-۱}{x+۱}$ در نقطه‌ای به طول α واقع بر آن، از نقطهٔ $(-۱, ۰)$ می‌گذرد. α کدام است؟

۱) -۱
۲) ۱
۳) $\frac{۳}{۲}$
۴) ۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۷

۴ خط d موازی محور xها، سهمی $y = x^۲ - ۱$ را در دو نقطه قطع می‌کند و مماس‌های رسم‌شده در این نقاط بر هم عمودند. مجموع عرض‌های این دو نقطه کدام است؟

۱) $-\frac{۳}{۲}$
۲) $-\frac{۱}{۲}$
۳) $-\frac{۱}{۴}$
۴) $-\frac{۳}{۴}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۲

۵ خط d موازی محور xها، قرینهٔ سهمی $y = x^۲ + ۱$ نسبت به محور xها را در دو نقطه قطع می‌کند و مماس‌های رسم‌شده در این نقاط بر هم عمودند. فاصلهٔ خط d از مبدأ مختصات کدام است؟

۱) ۱/۲۵
۲) ۳/۲۵
۳) ۰/۷۵
۴) ۲/۷۵

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۲

۶ خط $y = -۱$ بر نمودار تابع f با ضابطهٔ $f(x) = ۲x^۲ - x + a$ مماس است. a کدام است؟

۱) $-\frac{۹}{۸}$ ۲) $-\frac{۷}{۸}$

۳) $\frac{۷}{۸}$ ۴) $\frac{۹}{۸}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۰

۷ خط d در نقطهٔ $(-۱, ۵)$ بر نمودار تابع f مماس است. اگر شیب خط d برابر $-\frac{۱}{۲}$ و $g(x) = \sqrt[۳]{x}f(x)$ باشد، مقدار $g'(-۱)$ کدام است؟

۱) $-\frac{۴}{۳}$ ۲) $-\frac{۱}{۳}$

۳) $\frac{۷}{۶}$ ۴) $\frac{۱۳}{۶}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۸ اگر $y = ۲x + b$ بر نمودار $y = \frac{x + a}{ax + ۱}$ در نقطه‌ای به طول واحد مماس باشد، مقدار $a - b$ کدام است؟

۱) صفر ۲) $\frac{۱}{۲}$

۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) ۱

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

۹ در کدام نقطه از منحنی $y = x^۲ - ۴x + ۵$، خط مماس بر منحنی، بر $۶y - ۳x = ۱$ عمود است؟

۱) $(-۲, ۱۷)$ ۲) $(-۱, ۱۰)$

۳) $(۱, ۲)$ ۴) $(۲, ۱)$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۱

۱۰ معادلهٔ خط مماس بر نمودار $y = \frac{x^۲ + mx + ۱}{x + ۳}$ در نقطه‌ای به طول واحد بر روی نمودار، به‌صورت $۴y - ۳x = n$ است. مقدار $m + n$ چقدر است؟

۱) -۳ ۲) -۲

۳) ۲ ۴) ۳

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

۱۱ به ازای کدام مقدار a، خط به معادلهٔ $y = ۵x + a$، بر نمودار تابع $y = ۲x^۲ - ۳x + ۶$ مماس است؟

۱) -۳ ۲) -۲

۳) ۲ ۴) ۳

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۷

۱۲ تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$ را در نظر بگیرید، شیب خط مماس بر منحنی $f^{-1}(x)$ در نقطه‌ای به طول ۲ واقع بر آن، کدام است؟

۱) ۱۲
۲) ۸
۳) -8
۴) -12

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

۱۳ خط مماس بر منحنی تابع $f(x)=\frac{5x-4}{\sqrt{x}}$ در نقطهٔ $x=4$ واقع بر آن، محور yها را با کدام عرض، قطع می‌کند؟

۱) -۴
۲) -۱
۳) ۲
۴) ۳

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۹

۱۴ خط به معادلهٔ $y=3x-2$ در نقطهٔ $x=2$، بر منحنی پیوستهٔ $y=f(x)$ مماس است. حاصل $\lim_{x\to 2}\frac{f^2(x)-4f(x)}{x-2}$، کدام است؟

۱) ۳
۲) ۶
۳) ۱۲
۴) ۱۵

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۵

۱۵ خط مماس بر نمودار تابع $f(x)=-\frac{1}{3}x^3+2x^2-x$، با بیشترین شیب ممکن، محور yها را با کدام عرض قطع می‌کند؟

۱) $-\frac{4}{3}$
۲) $-\frac{5}{3}$
۳) $-\frac{7}{3}$
۴) $-\frac{8}{3}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۷

۱۶ خط مماس بر منحنی به معادلهٔ $y=x^3+3x^2+1$، بر خط به معادلهٔ $x-3y=2$ عمود است. این خط مماس، از نقطه‌ای با کدام مختصات می‌گذرد؟

۱) $(1,3)$
۲) $(1,4)$
۳) $(2,-6)$
۴) $(2,-4)$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۹

۱۷ عرض از مبدأ خط مماس بر منحنی به معادلهٔ $y=\sqrt{x^2+3x}$ در نقطهٔ $x=1$ واقع بر آن کدام است؟

۱) $-\frac{3}{5}$
۲) $\frac{3}{4}$
۳) $\frac{3}{2}$
۴) ۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۷

۱۸ خط مماس بر منحنی به معادلهٔ $y = x^۳ - x^۲$ در نقطهٔ $x = ۱$ واقع بر آن، منحنی را در نقطهٔ دیگر (A) قطع می‌کند. عرض نقطهٔ A کدام است؟

۱) -۳ ۲) -۲

۳) ۲ ۴) ۳

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۷

۱۹ در تابع با ضابطهٔ $f(x) = \frac{۴x - ۵}{x + ۱}$ و دامنهٔ $[۰, ۸]$، خط مماس بر نمودار آن، موازی پاره‌خطی است که ابتدا و انتهای منحنی را به هم وصل کند. این خط مماس، محور yها را با کدام عرض قطع می‌کند؟

۱) -۲ ۲) -۱/۵

۳) -۱ ۴) -۰/۵

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

۲۰ خط به معادلهٔ $y = ۲x - ۵$ در نقطه‌ای به طول ۱ بر منحنی به معادلهٔ $y = ax^۲ + bx + ۱$ مماس است، a کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳

۳) ۴ ۴) ۶

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۶

پاسخ Homework

-

۱ گزینه ۱

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۹۵

گام اول

الف) دو خط موازی‌اند اگر و تنها اگر شیب آن‌ها باهم برابر باشد.

ب) شیب خط مماس بر منحنی تابع در یک نقطه، برابر مقدار مشتق تابع در آن نقطه است.

گام دوم

برای یافتن شیب خط، ابتدا معادلهٔ آن را به‌صورت استاندارد بازنویسی می‌کنیم:

$$(m+2)\,y = mx \Rightarrow y = \left(\frac{m}{m+2}\right)x$$

شیب این خط برابر $\left(\frac{m}{m+2}\right)$ است. کافی است ضابطهٔ $f'(x)$ را تعیین کنیم و مساوی شیب خط قرار دهیم:

$$f(x) = \sqrt{1+x^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$f'(x_0) = \frac{m}{m+2} \Rightarrow \frac{x_0}{\sqrt{1+x_0^2}} = \frac{m}{m+2}$$

می‌دانیم $-1 < \frac{x_0}{\sqrt{1+x_0^2}} < 1$ همواره برقرار است، بنابراین:

$$\begin{cases} \frac{m}{m+2} > -1 \Rightarrow \frac{m}{m+2} + 1 > 0 \Rightarrow \frac{m+m+2}{m+2} > 0 \Rightarrow m < -2 \text{ یا } m > -1 \\ \frac{m}{m+2} < 1 \Rightarrow \frac{m}{m+2} - 1 < 0 \Rightarrow \frac{m-m-2}{m+2} < 0 \Rightarrow m > -2 \end{cases}$$

از اشتراک جواب‌های دو معادلهٔ فوق داریم: $m > -1$

۲ گزینه ۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۵

گام اول

الف) شیب خط مماس بر منحنی در یک نقطه، برابر مشتق تابع در آن نقطه است.

ب) معادلهٔ خطی به شیب m که از نقطهٔ $(x_۰, y_۰)$ عبور می‌کند، به‌صورت زیر است:

$$y - y_۰ = m(x - x_۰)$$

ج) در محل برخورد یک منحنی با محور عرض‌ها، مقدار x برابر صفر است.

گام دوم

$$y = \frac{x^۲}{x-۱} \xrightarrow{x=۲} y(۲) = \frac{۲^۲}{۲-۱} = ۴$$

$$y' = \frac{۲x(x-۱) - x^۲}{(x-۱)^۲} = \frac{۲x^۲ - ۲x - x^۲}{(x-۱)^۲} = \frac{x^۲ - ۲x}{(x-۱)^۲}$$

$$m_{\text{مماس}} = y'(۲) = \frac{۲^۲ - (۲ \times ۲)}{(۲-۱)^۲} = \frac{۴-۴}{۱} = ۰$$

بنابراین معادلهٔ خط مماس بر منحنی در نقطهٔ $(۲, ۴)$ به‌صورت زیر است:

$$y - y(۲) = y'(۲)(x-۲) \xrightarrow[x=۲]{y'(۲)=۰} y - ۴ = ۰ \Rightarrow y = ۴$$

پس محل برخورد خط مماس بر منحنی در نقطهٔ $(۲, ۴)$ یعنی خط $y = ۴$ با محور yها دارای عرض ۴ است.

۳ گزینه ۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۷

گام اول

الف) شیب خط مماس بر منحنی در یک نقطه روی آن، برابر مشتق تابع در آن نقطه است.

ب) معادلهٔ خطی به شیب m که از نقطهٔ (x_1, y_1) عبور می‌کند به‌صورت زیر است:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

گام دوم

فرض می‌کنیم نقطهٔ $A\left(\alpha, \frac{2\alpha - 1}{\alpha + 1}\right)$ بر روی منحنی قرار داشته باشد. با محاسبهٔ مشتق تابع در این نقطه، معادلهٔ خط مماس را تشکیل می‌دهیم.

$$y' = \frac{2(x+1) - (2x-1)}{(x+1)^2}$$

$$\xrightarrow{A\left(\alpha, \frac{2\alpha-1}{\alpha+1}\right)} y'_A = \frac{2(\alpha+1) - (2\alpha-1)}{(\alpha+1)^2} = \frac{2\alpha + 2 - 2\alpha + 1}{(\alpha+1)^2} = \frac{3}{(\alpha+1)^2}$$

$$y - y_A = y'_A(x - x_A) \Rightarrow y - \frac{2\alpha - 1}{\alpha + 1} = \frac{3}{(\alpha+1)^2}(x - \alpha)$$

خط مماس از نقطهٔ $(-1, 0)$ می‌گذرد و بنابراین مختصات این نقطه در معادلهٔ خط صدق می‌کند:

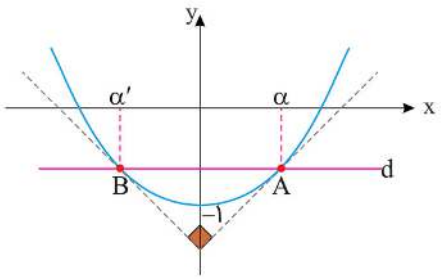
$$\xrightarrow{x=-1, y=0} 0 - \frac{2\alpha - 1}{\alpha + 1} = \frac{3}{(\alpha+1)^2}(-1 - \alpha)$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{2\alpha - 1}{\alpha + 1} = -\frac{3(\alpha+1)}{(\alpha+1)^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{2\alpha - 1}{\alpha + 1} = \frac{3}{\alpha + 1}$$

دقت کنید که نقطهٔ $x = -1$ عضو دامنهٔ تابع $y = \frac{2x - 1}{x + 1}$ نیست و تابع در این نقطه تعریف نشده است، بنابراین $\alpha \neq -1$ است (زیرا نقطه $A\left(\alpha, \frac{2\alpha - 1}{\alpha + 1}\right)$ روی منحنی تابع قرار دارد)، پس می‌توان عبارت $\alpha + 1$ را در کسر فوق ساده کرد. داریم:

$$2\alpha - 1 = 3 \Rightarrow 2\alpha = 4 \Rightarrow \alpha = 2$$

۴ گزینه ۱



نقاط تماس را $A(\alpha, \alpha^۲ - ۱)$ و $B(-\alpha, \alpha^۲ - ۱)$ فرض می‌کنیم. چون مماس‌های رسم‌شده در این نقاط بر هم عمود هستند، داریم:

$$f'(\alpha) \times f'(-\alpha) = -۱ \qquad (*)$$
$$f(x) = x^۲ - ۱ \Rightarrow f'(x) = ۲x$$
$$\xrightarrow{(*)} (۲\alpha) \times (-۲\alpha) = -۱ \Rightarrow ۴\alpha^۲ = ۱ \Rightarrow \alpha = \pm\frac{۱}{۲}$$
$$f(\frac{۱}{۲}) + f(-\frac{۱}{۲}) = \frac{۱}{۴} - ۱ + \frac{۱}{۴} - ۱ = -\frac{۳}{۲}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۲

۵ گزینه ۱

خط d را به معادلهٔ $y = k$ فرض می‌کنیم. قرینهٔ سهمی نسبت به محور xها به‌صورت $y = -x^۲ - ۱$ می‌باشد. اگر خط و سهمی در دو نقطه متقاطع باشند، پس:

$$-x^۲ - ۱ = k \Rightarrow x^۲ = -k - ۱ \Rightarrow x = \pm\sqrt{-k - ۱}$$

شیب مماس‌ها عبارت‌اند از:

$$y' = -۲x \Rightarrow m = \pm۲\sqrt{-k - ۱}$$

اگر این دو شیب بر هم عمود باشند، پس:

$$-۲\sqrt{-k - ۱} \times ۲\sqrt{-k - ۱} = -۱ \Rightarrow ۴(-k - ۱) = ۱ \Rightarrow -k - ۱ = \frac{۱}{۴} \Rightarrow k = -\frac{۵}{۴}$$

فاصلهٔ خط d یعنی $y = -\frac{۵}{۴}$ از مبدأ برابر $\frac{۵}{۴}$ یعنی ۱/۲۵ است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۲

۶ گزینه ۲

راه‌حل اول:

الف) شیب خط مماس بر منحنی تابع در یک نقطه روی منحنی، برابر مشتق تابع در آن نقطه است.

ب) مختصات نقطهٔ تماس در معادلهٔ خط مماس و معادلهٔ منحنی صدق می‌کند.

ج) شیب خطی به معادلهٔ $y = ax + b$ برابر a است.

شیب خط $y = -۱$ برابر صفر است:

$$f'(x) = ۴x - ۱ = ۰ \Rightarrow x = \frac{۱}{۴}$$

$$(\frac{۱}{۴}, -۱) \in f \Rightarrow ۲(\frac{۱}{۴})^۲ - \frac{۱}{۴} + a = -۱ \Rightarrow a = \frac{-۷}{۸}$$

راه‌حل دوم:

خط بر یک منحنی مماس است درصورتی‌که معادلهٔ تلاقی آن‌ها ریشهٔ مضاعف داشته باشد.

با مساوی قرار دادن معادلهٔ خط و منحنی، معادلهٔ تلاقی آن‌ها را به دست می‌آوریم:

$$۲x^۲ - x + a = -۱ \Rightarrow ۲x^۲ - x + a + ۱ = ۰$$

می‌دانیم معادلهٔ درجه‌دو در صورتی ریشهٔ مضاعف دارد که $\Delta = ۰$ شود:

$$\Delta = (-۱)^۲ - ۴(۲)(a+۱) = ۰ \Rightarrow ۱ - ۸(a+۱) = ۰$$
$$\Rightarrow ۸(a+۱) = ۱ \Rightarrow a + ۱ = \frac{۱}{۸} \Rightarrow a = -\frac{۷}{۸}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۰

۷ گزینه ۴

اطلاعات مسئله نشان می‌دهد که $f(-۱) = ۵$ و $f'(-۱) = -\frac{۱}{۲}$ است.

$$g(x) = \sqrt[۳]{x} f(x) \Rightarrow g'(x) = \frac{۱}{۳\sqrt[۳]{x^۲}} f(x) + \sqrt[۳]{x} f'(x)$$

$$g'(-۱) = \frac{۱}{۳} f(-۱) - f'(-۱) = \frac{۱}{۳} \times ۵ + \frac{۱}{۲} = \frac{۵}{۳} + \frac{۱}{۲} = \frac{۱۳}{۶}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۸ گزینه ۳

$x = ۱$، عرض دو تابع را مقدار یکسانی قرار می‌دهد:

$$۲ + b = \frac{۱ + a}{a + ۱} = ۱ \Rightarrow b = -۱$$

پس توابع به صورت $y = ۲x - ۱$ و $y = \frac{x + a}{ax + ۱}$ هستند و در $x = ۱$ مشتق یکسانی دارند.

$$y' = ۲$$

$$y' = \frac{۱ - a^۲}{(ax + ۱)^۲} \xrightarrow{x=۱} \frac{۱ - a^۲}{(a + ۱)^۲}$$

حال داریم:

$$\frac{۱ - a^۲}{(a + ۱)^۲} = ۲ \Rightarrow \frac{۱ - a}{(a + ۱)} = ۲$$

$$\Rightarrow ۲a + ۲ = ۱ - a \Rightarrow ۳a = -۱ \Rightarrow a = \frac{-۱}{۳}$$

$$a - b = -\frac{۱}{۳} + ۱ = \frac{۲}{۳}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

۹ گزینه ۳

$$۶y - ۳x = ۱ \Rightarrow y = \frac{x}{۲} + \frac{۱}{۶} \Rightarrow \text{شیب} = \frac{۱}{۲}$$

چون خط مماس بر منحنی بر خط داده‌شده عمود است، شیب آن ۲- است. حالا داریم:

$$y' = ۲x - ۴ \Rightarrow ۲x - ۴ = -۲ \Rightarrow x = ۱ \xrightarrow{\text{نقطه}} (۱, ۲)$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۱

۱۰ گزینه ۴

$$y' = \frac{(۲x+m)(x+۳)-(x^۲+mx+۱)}{(x+۳)^۲}$$

$$\Rightarrow y'(۱) = \frac{(۲+m)(۴)-(m+۲)}{۱۶} = \frac{۳m+۶}{۱۶} \quad (۱)$$

$$۴y-۳x=n \Rightarrow y = \frac{۳}{۴}x + \frac{n}{۴} \Rightarrow y'(۱) = \frac{۳}{۴} \quad (۲)$$

$$(۱),(۲) \Rightarrow \frac{۳m+۶}{۱۶} = \frac{۳}{۴} \Rightarrow ۳m+۶ = ۱۲ \Rightarrow ۳m = ۶ \Rightarrow m = ۲$$

$$y(۱) = \frac{m+۲}{۴} \xrightarrow{m=۲} y(۱) = ۱$$

$$y-۱ = \frac{۳}{۴}(x-۱) \Rightarrow ۴y-۳x = ۱ \Rightarrow n = ۱$$

$$\Rightarrow m+n = ۲+۱ = ۳$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

۱۱ گزینه ۲

خط $y = ۵x + a$ بر نمودار تابع $y = ۲x^۲ - ۳x + ۶$ در نقطه‌ای مماس می‌شود که شیب خط مماس برابر با ۵ باشد.

$$y = ۲x^۲ - ۳x + ۶ \Rightarrow \text{مشتق} = \text{شیب خط مماس} \Rightarrow ۴x - ۳ = ۵ \Rightarrow x = ۲$$

پس خط در نقطه‌ای به طول ۲ بر تابع مماس است. به‌علاوه خط و تابع در این نقطه برخورد دارند. اگر $x = ۲$ را در تابع قرار دهیم داریم:

$$y(۲) = ۲(۲)^۲ - ۳(۲) + ۶ = ۸ - ۶ + ۶ = ۸ \Rightarrow \text{نقطهٔ تماس } (۲, ۸)$$

نقطهٔ تماس در معادلهٔ خط مماس باید صدق کند:

$$y = ۵x + a \xrightarrow{(۲,۸)} ۸ = ۵(۲) + a \Rightarrow a = -۲$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۷

۱۲ گزینه ۴

راه‌حل اول: وارون تابع را حساب می‌کنیم، سپس از آن مشتق می‌گیریم:

$$y=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\Rightarrow y\sqrt{x}-y=\sqrt{x}+1\Rightarrow \sqrt{x}(y-1)=y+1\Rightarrow \sqrt{x}=\frac{y+1}{y-1}$$
$$\Rightarrow x=\left(\frac{y+1}{y-1}\right)^{2}\Rightarrow f^{-1}(x)=\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{2}=g(x)$$
$$g'(x)=2\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\times\frac{-2}{(x-1)^{2}}\Rightarrow g'(2)=2\times 3\times\frac{-2}{1}=-12$$

راه‌حل دوم: اگر نقطه‌ای به طول ۲ واقع بر f^{-1} باشد، آنگاه متناظر با آن نقطه‌ای به عرض ۲ واقع بر f خواهد بود.

$$2=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\Rightarrow 2\sqrt{x}-2=\sqrt{x}+1\Rightarrow x=9$$

پس نقطهٔ $A(9,2)$ روی f قرار دارد.

$$f'(x)=\frac{-2}{(\sqrt{x}-1)^{2}}\times\frac{1}{2\sqrt{x}}\Rightarrow f'(9)=\frac{-2}{4}\times\frac{1}{6}=\frac{-1}{12}$$

پس شیب خط مماس بر f^{-1} در نقطهٔ $A'(2,9)$ برابر -12 است.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

۱۳ گزینه ۳

$$f(x)=\frac{5x-4}{\sqrt{x}}$$

حال $f(4)$ و $f'(4)$ را به دست آورده و معادلهٔ خط مماس را می‌نویسیم:

$$f(4)=\frac{5\times 4-4}{\sqrt{4}}=\frac{16}{2}=8$$
$$f'(x)=\frac{5\sqrt{x}-\frac{1}{2\sqrt{x}}(5x-4)}{x}\Rightarrow f'(4)=\frac{10-\frac{1}{4}(16)}{4}=\frac{3}{2}$$

معادلهٔ خط مماس:

$$y-f(4)=f'(4)(x-4)\Rightarrow y-8=\frac{3}{2}(x-4)$$
$$\xrightarrow[x=0]{\text{عرض از مبدأ}} y-8=\frac{3}{2}(-4)\Rightarrow y-8=-6\Rightarrow y=2$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۹

۱۴ گزینه ۳

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۵

گام اول

الف) شیب خط مماس بر منحنی تابع در یک نقطه، برابر مقدار مشتق تابع در آن نقطه است.

ب) مختصات نقطهٔ تماس، هم در معادلهٔ خط مماس و هم در معادلهٔ تابع صدق می‌کند.

گام دوم

شیب خط $y = ۳x - ۲$ برابر ۳ است؛ بنابراین طبق قسمت الف از گام اول نتیجه می‌گیریم $f'(۲) = ۳$ است. با جایگذاری $x = ۲$ در معادلهٔ خط، عرض نقطهٔ تماس نیز برابر است با:

$$f(۲) = ۳(۲) - ۲ = ۶ - ۲ = ۴$$

اکنون با ساده کردن حد داده‌شده حاصل آن را به دست می‌آوریم:

$$\lim_{x\to ۲} \frac{f^۲(x) - ۴f(x)}{x - ۲} = \lim_{x\to ۲} \frac{f(x)\,(f(x) - ۴)}{x - ۲}$$

$$= \underbrace{\lim_{x\to ۲} f(x)}_{f(۲)} \times \underbrace{\lim_{x\to ۲} \frac{f(x) - ۴}{x - ۲}}_{f'(۲)} = f(۲) \times f'(۲) = ۴ \times ۳ = ۱۲$$

۱۵ گزینه ۴

$$f(x) = -\frac{۱}{۳}x^۳ + ۲x^۲ - x \Rightarrow f'(x) = -x^۲ + ۴x - ۱$$

بیشترین شیب مماس، ماکزیمم مقدار مشتق است که در رأس سهمی $-x^۲ + ۴x - ۱$ اتفاق می‌افتد.

$$x_{max} = \frac{-b}{۲a} = \frac{-۴}{۲(-۱)} = ۲ \quad , \quad f(۲) = \frac{۱۰}{۳} \Rightarrow A\left(۲, \frac{۱۰}{۳}\right)$$

شیب خط مماس : $m = f'(۲) = -۴ + ۸ - ۱ = ۳$

معادلهٔ خط مماس : $y - \frac{۱۰}{۳} = ۳(x - ۲) \xrightarrow{x=۰} y = \frac{۱۰}{۳} - ۶ = \frac{-۸}{۳}$ عرض از مبدأ

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۷

۱۶ گزینه ۳

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۹

گام اول

الف) شیب دو خط عمود بر هم، قرینه و معکوس یکدیگر است؛ بنابراین حاصل‌ضرب آن‌ها برابر ۱- می‌شود.

۲) شیب خطی به معادلهٔ $y = ax + b$ برابر a است.

ج) شیب خط مماس بر منحنی تابع در یک نقطه واقع بر آن برابر مشتق تابع در آن نقطه است.

د) معادلهٔ خط به شیب m که از نقطهٔ $(x_۱, y_۱)$ عبور می‌کند به‌صورت زیر است:

$$y - y_۱ = m(x - x_۱)$$

گام دوم

ابتدا معادلهٔ خط داده‌شده را به فرم استاندارد نوشته و شیب آن را به دست می‌آوریم.

$$x - ۳y = ۲ \Rightarrow ۳y = x - ۲ \Rightarrow y = \frac{۱}{۳}x - \frac{۲}{۳} \Rightarrow m = \frac{۱}{۳}$$

پس طبق قسمت الف از گام اول، شیب خط مماس بر منحنی برابر ۳- است. فرض می‌کنیم خط در نقطهٔ $x = x_۰$ بر منحنی مماس شده است بنابراین:

$$y = x^۳ + ۳x^۲ + ۱ \Rightarrow y' = ۳x^۲ + ۶x \Rightarrow y'(x_۰) = ۳x_۰^۲ + ۶x_۰ = -۳$$

$$\Rightarrow ۳x_۰^۲ + ۶x_۰ + ۳ = ۰ \xrightarrow{\div ۳} x_۰^۲ + ۲x_۰ + ۱ = ۰ \Rightarrow (x_۰ + ۱)^۲ = ۰$$

$$\Rightarrow x_۰ + ۱ = ۰ \Rightarrow x_۰ = -۱$$

$$y(-۱) = (-۱)^۳ + ۳(-۱)^۲ + ۱ = -۱ + ۳ + ۱ = ۳$$

پس نقطهٔ تماس دارای مختصات $(-۱, ۳)$ است. طبق قسمت د از گام اول، معادلهٔ خط مماس برابر است با:

$$y - ۳ = -۳(x + ۱) \Rightarrow y = -۳x - ۳ + ۳ \Rightarrow y = -۳x$$

از میان گزینه‌ها، فقط نقطهٔ $(۲, -۶)$ در معادلهٔ خط صدق می‌کند.

۱۷ گزینه ۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۷

گام اول

الف) عرض از مبدأ یک خط، به ازای جایگذاری $x = ۰$، در معادلهٔ آن به دست می‌آید.

ب) شیب خط مماس بر منحنی تابع در یک نقطه، برابر با مشتق تابع در آن نقطه است.

ج) معادلهٔ خطی به شیب m که از نقطهٔ $(x_۱, y_۱)$ عبور می‌کند به‌صورت زیر است:

$$y - y_۱ = m(x - x_۱)$$

گام دوم

ابتدا معادلهٔ خط مماس را می‌نویسیم. طبق قسمت "ب" از گام اول، شیب این خط برابر است با:

$$y = \sqrt{x^۲ + ۳x} \Rightarrow y' = \frac{۲x + ۳}{۲\sqrt{x^۲ + ۳x}}$$

$$y'(۱) = \frac{۲ + ۳}{۲\sqrt{۱ + ۳}} = \frac{۵}{۲\sqrt{۴}} = \frac{۵}{۲ \times ۲} = \frac{۵}{۴} \Rightarrow m_{\text{مماس}} = \frac{۵}{۴}$$

$$x = ۱ \Rightarrow y = \sqrt{۱ + ۳} = \sqrt{۴} = ۲ \Rightarrow y(۱) = ۲$$

بنابراین، طبق قسمت "ج" از گام اول، معادلهٔ خط مماس در نقطهٔ $(۱, ۲)$ برابر است با:

$$y - y(۱) = y'(۱)(x - ۱) \Rightarrow y - ۲ = \frac{۵}{۴}(x - ۱)$$

$$\Rightarrow y = \frac{۵}{۴}x - \frac{۵}{۴} + ۲ \Rightarrow y = \frac{۵}{۴}x + \frac{۳}{۴}$$

با جایگذاری $x = ۰$ در معادلهٔ خط مماس، داریم:

$$\xrightarrow{x=۰} y = \frac{۵}{۴}(۰) + \frac{۳}{۴} = \frac{۳}{۴}$$

بنابراین عرض از مبدأ خط مماس بر منحنی، برابر $\frac{۳}{۴}$ است.

۱۸ گزینه ۲

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۷

گام اول

الف) شیب خط مماس بر منحنی تابع در یک نقطه، برابر با مشتق تابع در آن نقطه است.

ب) معادلهٔ خطی به شیب m که از نقطهٔ $(x_۱, y_۱)$ عبور می‌کند، به‌صورت زیر است:

$$y - y_۱ = m(x - x_۱)$$

ج) مختصات نقطهٔ تلاقی در هر دو معادله، صدق می‌کند.

گام دوم

باتوجه‌به قسمت "الف" و "ب" از گام اول، معادلهٔ خط مماس را به دست می‌آوریم:

$$y = x^۳ - x^۲ \Rightarrow y' = ۳x^۲ - ۲x \Rightarrow m_{\text{مماس}} = y'(۱) = ۳ - ۲ = ۱$$
$$x = ۱ \Rightarrow y(۱) = (۱)^۳ - (۱)^۲ = ۱ - ۱ = ۰$$
$$y - y(۱) = y'(۱)(x - ۱) \Rightarrow y - ۰ = x - ۱ \Rightarrow y = x - ۱$$

سپس با مساوی قرار دادن معادلهٔ خط $y = x - ۱$ و معادلهٔ منحنی، مختصات نقطهٔ تلاقی را محاسبه می‌کنیم:

$$x - ۱ = x^۳ - x^۲ \Rightarrow x - ۱ = x^۲(x - ۱) \Rightarrow (x - ۱)(۱ - x^۲) = ۰$$
$$\Rightarrow (x - ۱)(۱ - x)(۱ + x) = ۰ \xrightarrow{x \neq ۱} ۱ + x = ۰ \Rightarrow x = -۱$$

بنابراین $x_A = -۱$ است و داریم:

$$y_A = (-۱)^۳ - (-۱)^۲ = -۱ - ۱ = -۲$$

۱۹ گزینه ۳

شیب پاره‌خطی که ابتدا و انتهای بازه را به هم وصل می‌کند، پیدا می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{۴x-۵}{x+۱} \Rightarrow \begin{cases} f(۰)=-۵ \\ f(۸)=\frac{۲۷}{۹}=۳ \end{cases} \Rightarrow m=\frac{۳-(-۵)}{۸-۰}=۱$$

بنابراین شیب خط مماس هم باید ۱ باشد:

$$f'(x)=\frac{۴(x+۱)-(۴x-۵)}{(x+۱)^۲} \Rightarrow \frac{۹}{(x+۱)^۲}=۱ \Rightarrow (x+۱)^۲=۹$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x+۱=۳ \Rightarrow x=۲ \quad \text{ق.ق} \\ x+۱=-۳ \Rightarrow x=-۴ \quad \text{غ.ق.ق} \end{cases}$$

خطی را می‌خواهیم که در $x=۲$ بر منحنی مماس است:

$$f(۲)=\frac{۳}{۳}=۱ \Rightarrow (۲,۱), m=۱$$
$$y-۱=۱(x-۲) \xrightarrow{x=۰} y=-۱$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

۲۰ گزینه ۴

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۶

گام اول

الف) شیب خط مماس بر منحنی تابع در یک نقطه روی منحنی، برابر مشتق تابع در آن نقطه است.

ب) مختصات نقطهٔ تماس در معادلهٔ خط مماس و معادلهٔ منحنی صدق می‌کند.

ج) شیب خطی به معادلهٔ $y=ax+b$ برابر a است.

گام دوم

شیب خط $y=۲x-۵$ برابر ۲ است؛ بنابراین مشتق تابع به معادلهٔ $y=ax^۲+bx+۱$ در نقطهٔ $x=۱$ نیز برابر ۲ می‌شود:

$$y=ax^۲+bx+۱ \Rightarrow y'=۲ax+b \xrightarrow{x=۱} m_{\text{مماس}}=y'(۱)=۲ \Rightarrow ۲a+b=۲ \quad (I)$$

طبق قسمت ب از گام اول، به ازای $x=۱$ مقدار به‌دست‌آمده از معادلهٔ خط و منحنی برابر است، پس داریم:

$$y=۲x-۵ \Rightarrow y(۱)=۲-۵=-۳$$
$$y=ax^۲+bx+۱ \Rightarrow y(۱)=a+b+۱=-۳ \Rightarrow a+b=-۴ \quad (II)$$

از دو معادلهٔ (I) و (II)، a و b را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} ۲a+b=۲ \\ a+b=-۴ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۲a+b=۲ \\ -a-b=۴ \end{cases} \Rightarrow a=۶$$

درس ۴: مشتق‌پذیری و پیوستگی

اگر در تابع پیوسته $f(x)$ حاصل حد $\lim\limits_{x\to x_1}\dfrac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}$ وجود داشته باشد (یعنی برابر عدد مشخصی شود) آن را مشتق تابع $f(x)$ در نقطه‌ی x_1 می‌نامیم و با $f'(x_1)$ نشان می‌دهیم. یعنی $f'(x_1)=\lim\limits_{x\to x_1}\dfrac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}$ و مقدارش برابر شیب خط مماس بر منحنی تابع $f(x)$ در نقطه‌ی x_1 است.

اگر این حد را از سمت راست حساب کنیم می‌گوییم مشتق راست تابع را در نقطه‌ی x_1 پیدا کرده‌ایم و آن را با $f'_+(x_1)$ نشان می‌دهیم:

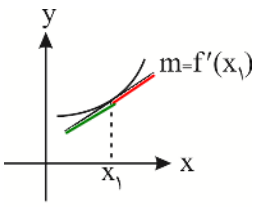
$$f'_+(x_1)=\lim_{x\to x_1^+}\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}$$

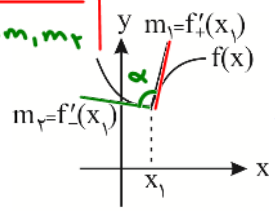
و اگر این حد را از سمت چپ حساب کنیم می‌گوییم مشتق چپ تابع را در نقطه‌ی x_1 پیدا کرده‌ایم و آن را با $f'_-(x_1)$ نشان می‌دهیم:

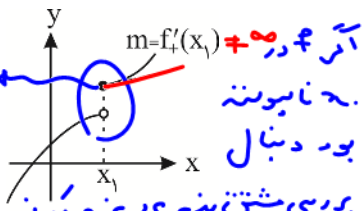
$$f'_-(x_1)=\lim_{x\to x_1^-}\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}$$

وقتی مقدار حد راست و حد چپ (یعنی همان مشتق راست و مشتق چپ) هر دو موجود و با هم برابر باشند، می‌گوییم تابع در نقطه‌ی x_1 مشتق‌پذیر است و اگر هر کدام از حدهای بالا وجود نداشته باشد یا $\pm\infty$ شود و یا $f'_+(x_1)\neq f'_-(x_1)$ باشد، می‌گوییم تابع در نقطه‌ی x_1 مشتق‌پذیر نیست.

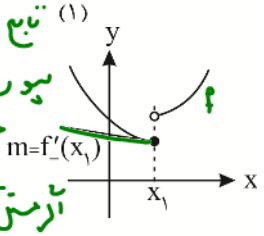
گفتیم که مقدار مشتق تابع در یک نقطه همان شیب خط مماس بر منحنی تابع است. حالا به شکل‌های زیر نگاه کنید:



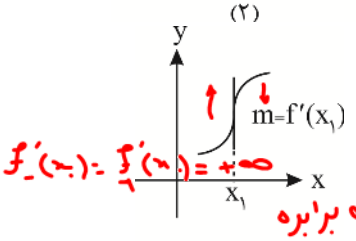




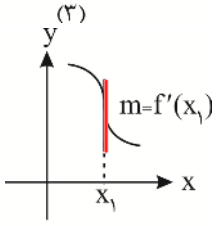
(۱)



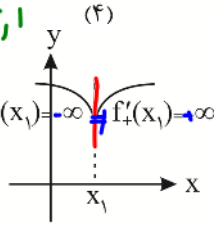
(۲)



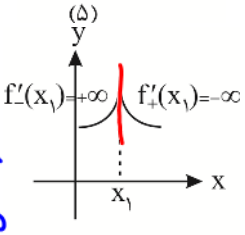
(۳)



(۴)



(۵)



(۶)

(۷)

(۸)

۱) تابع در نقطه‌ی x_1 پیوسته است و مقدار مشتق راست (شیب نیم‌مماس راست) و مشتق چپ (شیب نیم‌مماس چپ) با هم برابرند. دو نیم‌مماس (یعنی دو نیم‌خط مماس) در امتداد یکدیگرند و تابع در نقطه‌ی x_1 مشتق‌پذیر و دارای خط مماس است.

۲) تابع در نقطه‌ی x_1 پیوسته است و مقدار مشتق راست و چپ با هم فرق می‌کند. تابع هم مشتق راست دارد و هم مشتق چپ ولی

مشتق‌پذیر نیست. نیم‌مماس راست و چپ در امتداد هم نیستند و با هم زاویه می‌سازند و به همین خاطر به این نقطه می‌گوییم نقطه‌ی زاویه‌دار یا نقطه‌ی گوشه‌ای.

۳) تابع در نقطه‌ی x_1 فقط از سمت راست پیوسته و دارای مشتق راست است، پس فقط نیم‌مماس راست داریم و تابع در نقطه‌ی x_1 مشتق‌پذیر نیست.

۴) تابع در نقطه‌ی x_1 فقط از سمت چپ پیوسته و دارای مشتق چپ است، پس فقط نیم‌مماس چپ داریم و تابع در نقطه‌ی x_1 مشتق‌پذیر نیست.

۵) تابع در نقطه‌ی x_1 پیوسته است و مشتق راست و چپ تابع در این نقطه هر دو برابر $+\infty$ هستند و تابع در این نقطه مشتق‌پذیر نیست اما خط مماس قائم دارد. به این نقاط می‌گوییم عطف قائم.

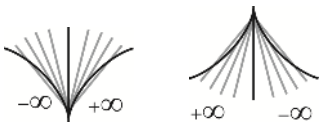
۶) تابع در نقطه‌ی x_1 پیوسته است و مشتق راست و چپ تابع در این نقطه هر دو برابر $-\infty$ هستند و تابع در این نقطه مشتق‌پذیر نیست اما خط مماس قائم دارد. به این نقاط می‌گوییم عطف قائم.

۷) تابع در نقطه‌ی x_1 پیوسته است و مشتق چپ تابع برابر $-\infty$ و مشتق راست برابر $+\infty$ است. تابع در این نقطه مشتق‌پذیر نیست و به این نقطه می‌گوییم نقطه‌ی بازگشتی.

۸) تابع در نقطه‌ی x_1 پیوسته است و مشتق چپ برابر $+\infty$ و مشتق راست برابر $-\infty$ است. تابع در این نقطه مشتق‌پذیر نیست و به این نقطه می‌گوییم نقطه‌ی بازگشتی.

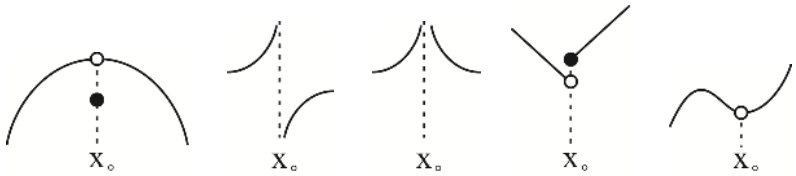
در تمام حالت‌های بالا تابع به شرطی در نقطه‌ی x_1 دارای خط مماس است که در آن پیوسته باشد. به عبارت دیگر تابع از هر سمت که پیوسته نباشد حتماً از همان سمت خط مماس ندارد. یعنی پیوستگی شرط لازم و نه کافی برای مشتق‌پذیری است.

برای تعیین علامت ∞ وقتی که خط مماس قائم داریم کافی است از نقاط نزدیک به نقطه‌ی مزبور به آن وصل کنیم و به سمت آن نقطه میل کنیم. علامت شیب خط قاطع (که حالت حدی‌اش می‌شود شیب خط مماس) همان علامت ∞ است.

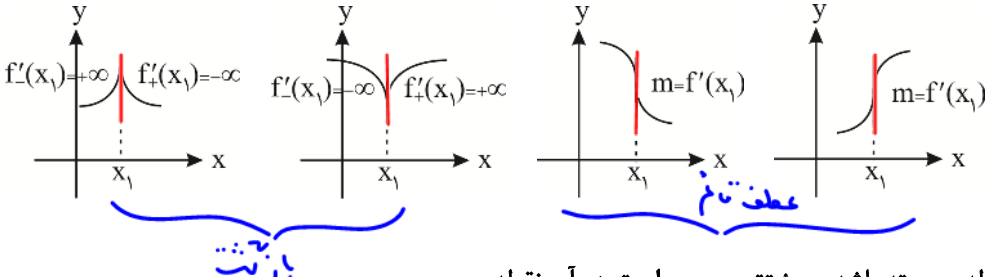


جمع‌بندی:

۱) اگر f در یک نقطه ناپیوسته باشد، در آن نقطه مشتق‌پذیر نیست.

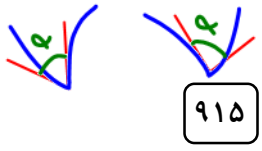


۲) اگر f در یک نقطه پیوسته باشد و مماس قائم داشته باشد (و یا نیم‌مماس قائم) در آن نقطه مشتق‌پذیر نیست. (مشتق چپ و راست، هر دو نامتناهی)



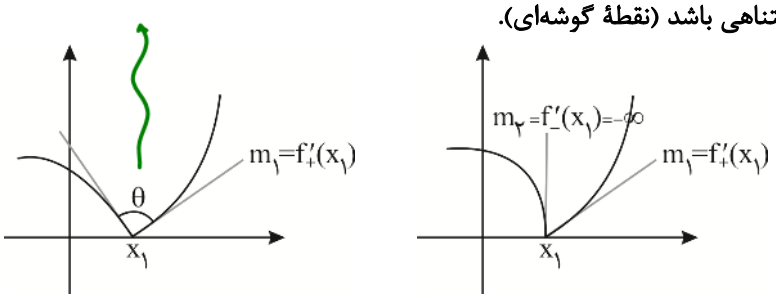
۳) اگر f در یک نقطه پیوسته باشد و مشتق چپ و راست در آن نقطه:

الف) هر دو موجود (متناهی) ولی نابرابر باشند (نقطهٔ گوشه‌ای).



$$\tan\theta = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right|$$

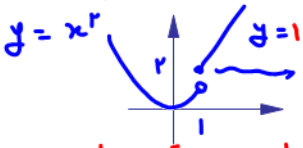
ب) یکی متناهی و دیگری نامتناهی باشد (نقطهٔ گوشه‌ای).



بیایید مواردی را که گفتم در مورد ضابطه‌ها هم بررسی کنیم.

شرط اصلی مشتق‌پذیری، پیوستگی است. یعنی باید $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ باشد. اگر f در $x = a$ پیوسته نباشد، قطعاً مشتق‌پذیر هم نیست.

مثلاً $y = [x]$ و $y = \begin{cases} x+1 & x \geq 1 \\ x^2 & x < 1 \end{cases}$ در $x = 1$ مشتق‌پذیر نیستند چون در این نقطه پیوسته نیستند.



پیوستگی راست شرط لازم برای وجود مشتق راست و پیوستگی چپ شرط لازم برای وجود مشتق چپ است. به عبارتی تابع از هر طرف که پیوسته نباشد، از همان طرف مشتق‌پذیر نخواهد بود.

مشتق توابع چندضابطه‌ای در نقاط مرزی

در توابع چندضابطه‌ای برای تعیین مشتق تابع در نقطه مرزی ابتدا پیوستگی تابع را در این نقطه بررسی می‌کنیم. تابع از هر طرف که پیوسته نباشد، مشتق‌پذیر هم نیست. اگر تابع در نقطه مرزی پیوسته بود، از هر یک از ضابطه‌ها به طور مستقل مشتق گرفته و مشتق چپ و راست را جداگانه محاسبه می‌کنیم. اگر مشتق چپ و راست با هم برابر باشند، تابع در نقطه مرزی مشتق‌پذیر خواهد بود.

در تمام تابع‌ها نقطه‌ی $x = 1$ را بررسی می‌کنیم:

۱) $f(x) = \begin{cases} x^3 + 2x & x \geq 1 \\ x^2 + 3x - 1 & x < 1 \end{cases} \Rightarrow$ پیوستگی $\begin{cases} \text{مقدار} = 3 \\ \text{حدراست} = 3 \Rightarrow f'_+(1) = 3x^2 + 2 = 5 \\ \text{حدچپ} = 3 \Rightarrow f'_-(1) = 2x + 3 = 5 \end{cases} \Rightarrow$ مشتق‌پذیر

تابع هم از راست پیوسته است و هم از چپ، از ضابطه‌های راست و چپ به طور مستقیم مشتق گرفتیم و در آخر چون مشتق راست و چپ برابر شدند، پس تابع مشتق‌پذیر است.

۲) $f(x) = \begin{cases} x^4 + x & x \geq 1 \\ x^3 + x & x < 1 \end{cases} \Rightarrow$ پیوستگی $\begin{cases} \text{مقدار} = 2 \\ \text{حدراست} = 2 \Rightarrow f'_+(1) = 4x^3 + 1 = 5 \\ \text{حدچپ} = 2 \Rightarrow f'_-(1) = 3x^2 + 1 = 4 \end{cases} \Rightarrow$ مشتق‌ناپذیر

تابع هم از راست پیوسته است و هم از چپ، از ضابطه‌های راست و چپ به طور مستقیم مشتق گرفتیم و در آخر چون مشتق راست و چپ با هم برابر نشدند پس تابع مشتق‌پذیر نیست ولی هم مشتق راست دارد و هم مشتق چپ.

۳) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & x \geq 1 \\ x^3 + x & x < 1 \end{cases} \Rightarrow$ پیوستگی $\begin{cases} \text{مقدار} = 3 \\ \text{حدراست} = 3 \Rightarrow f'_+(1) = 2x + 2 = 4 \\ \text{حدچپ} = 2 \Rightarrow f'_-(1) = \text{وجودندارد} \end{cases} \Rightarrow$ مشتق‌ناپذیر

تابع از سمت راست پیوسته است پس از ضابطه‌ی راست به طور مستقیم مشتق گرفتیم و مشتق راست را پیدا کردیم. تابع از سمت چپ پیوسته نیست پس مشتق چپ وجود ندارد. حواستان باشد که بدون توجه به پیوستگی از ضابطه‌ها مشتق نگیرید. اگر به پیوستگی توجه نکنیم

و فقط از ضابطه‌ها مشتق بگیریم به اشتباه نتیجه می‌گیریم که تابع مشتق‌پذیر است.

۴) $f(x)=\begin{cases}x+\sqrt{x} & x>1\\ x^2-1 & x=1\\ x^3-x & x<1\end{cases}\Rightarrow$ پیوستگی $\begin{cases}\text{مقدار}=0\\ \text{حدراست}=2\Rightarrow f'_+(1)=\text{وجودندارد}\\ \text{حدچپ}=0\Rightarrow f'_-(1)=3x^2-1=2\end{cases}\Rightarrow$ مشتق‌ناپذیر

$y'=3x^2-1$

تابع از سمت راست پیوسته نیست و مشتق راست ندارد. ولی از سمت چپ پیوسته است پس از ضابطه‌ی چپ مشتق گرفتیم و مقدار مشتق چپ را حساب کردیم.

۵) $f(x)=\begin{cases}x^2+2x & x>1\\ x+\sqrt{x} & x=1\\ x^4+2 & x<1\end{cases}\Rightarrow$ پیوستگی $\begin{cases}\text{مقدار}=2\\ \text{حدراست}=3\Rightarrow f'_+(1)=\text{وجودندارد}\\ \text{حدچپ}=3\Rightarrow f'_-(1)=\text{وجودندارد}\end{cases}\Rightarrow$ مشتق‌ناپذیر

تابع نه از سمت راست پیوسته است و نه از سمت چپ، پس نه مشتق راست داریم و نه مشتق چپ، باز هم حواستان را جمع کنید که قبل از بررسی پیوستگی از ضابطه‌ها مشتق نگیرید.

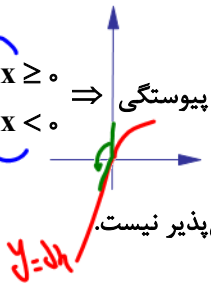
۶) $f(x)=\begin{cases}x^2+x & x>1\\ x^3+1 & x<1\end{cases}\Rightarrow$ پیوستگی $\begin{cases}\text{حدراست}=2\\ \text{مقدار}=\text{ندارد}\Rightarrow\text{مشتق‌ناپذیر}\\ \text{حدچپ}=2\end{cases}$

$y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

۷) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & x\geq 0\\ 5x & x<0\end{cases}\Rightarrow$ پیوستگی $\begin{cases}\text{مقدار}=0\\ \text{حدراست}=0\Rightarrow f'_+(0)=\frac{1}{2\sqrt{x}}=+\infty\ \text{وجودندارد}\\ \text{حدچپ}=0\Rightarrow f'_-(0)=5\end{cases}\Rightarrow$ مشتق‌ناپذیر

گوشه

$y'=5$



تابع در $x=0$ پیوسته است اما چون مشتق راست نامتناهی $(+\infty)$ شده است، پس تابع مشتق‌پذیر نیست.

تمرین: تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\sqrt{5-2x} & x\leq -2\\ -\frac{1}{2}x^2+bx+c & x>-2\end{cases}$، در $x=-2$، مشتق‌پذیر است. مقدار c کدام است؟ (سراسری تجربی ۹۹)

۱) $-\frac{2}{3}$ ۲) $-\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ✓ ۴) $\frac{2}{3}$

هم پیوسته هم مشتق پذیر

$f_1=\sqrt{5-2(-2)}=3=f_2=-2-2b+c=f(-2)$

$5=-2b+c$

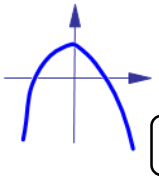
$f':\begin{cases}\frac{-2}{2\sqrt{5-2x}} & x<-2\\ -x+b & x>-2\end{cases}$

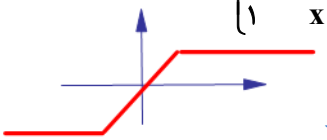
$f'_-(-2)=\frac{-1}{\sqrt{5-2(-2)}}=-\frac{1}{3}=f'_+(-2)=2+b\rightsquigarrow b=-\frac{1}{3}-2=-\frac{7}{3}$

$c=5+2b=5-\frac{14}{3}=\frac{1}{3}$

$c=\frac{1}{3}$

تمرین: فرض کنید $f(x)=\begin{cases}-1 & x<-1\\ x & -1\leq x\leq 1\\ 1 & x>1\end{cases}$ و $g(x)=1-x^2$. تعداد عناصر مجموعه نقاطی که gof یا fog در آن‌ها مشتق‌پذیر

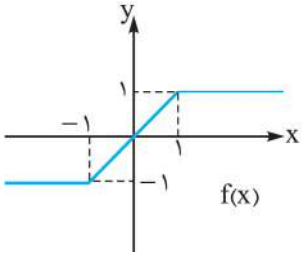


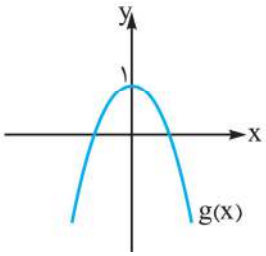


نیست، کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

پاسخ: گزینهٔ «۳» ـ نمودار توابع f و g را رسم می‌کنیم:





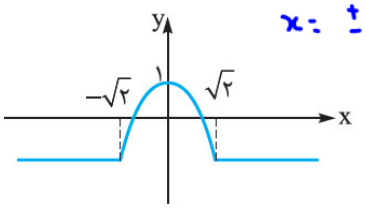
۱) fog را تشکیل می‌دهیم. باید در f، جای تمام xها، g(x) بنویسیم.

$$f(x)=\begin{cases}-1 & x<-1\\ x & -1\le x\le 1\\ 1 & x>1\end{cases}$$

$$f(g(x))=\begin{cases}-1 & g(x)<-1\\ g(x) & -1\le g(x)\le 1\\ 1 & g(x)>1\end{cases}=\begin{cases}-1 & 1-x^2<-1\\ 1-x^2 & -1\le 1-x^2\le 1\\ 1 & 1-x^2>1\end{cases}=\begin{cases}-1 & x^2>2\\ 1-x^2 & 0\le x^2\le 2\\ 1 & \underbrace{x^2<0}_{\text{همواره نادرست!}}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}-1 & x>\sqrt{2}\ ,\ x<-\sqrt{2}\\ 1-x^2 & -\sqrt{2}\le x\le\sqrt{2}\\ 1 & \text{تهی!}\end{cases}$$

نمودار fog را رسم می‌کنیم:

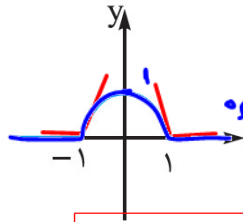


دو نقطه به طول‌های $\pm\sqrt{2}$، نقطهٔ گوشه هستند و fog در آن‌ها مشتق‌پذیر نیست.

۲) gof را تشکیل می‌دهیم:

$$g(f(x))=1-f^2(x)=\begin{cases}1-(-1)^2 & x<-1\\ 1-x^2 & -1\le x\le 1\\ 1-1^2 & x>1\end{cases}=\begin{cases}0 & x<-1\\ 1-x^2 & -1\le x\le 1\\ 0 & x>1\end{cases}$$

نمودار gof را رسم می‌کنیم:



دو نقطه به طول‌های ±1، نقطهٔ گوشه هستند، پس gof در آن‌ها مشتق‌پذیر نیست. پس دو تابع gof و fog، در کل در ۴ نقطه مشتق‌ناپذیرند.

تمرین: فرض کنید $g(x)=ax^2+bx+c$، $(a\neq 0)$ و $f(x)=\begin{cases}g(x) & x\ge k\\ g'(x) & x<k\end{cases}$ باشد. اگر f یک تابع مشتق‌پذیر باشد، حداکثر مقدار k به شرط $b+c=a$ کدام است؟

(سراسری تجربی ۱۴۰۰)

نکته: ریشه مشترک هر معادله هم معادله دوم هم این معادله دوم است. مثلاً در $x^2-2x+1=0$ عدد $x=1$ هم این معادله دوم است.

$ak^2+bk+c=2ak+b$

$ak^2+(b-2a)k+(c-b)=0$ *

از * و ** نتیجه میشه که k ریشه مشترک معادله * است.

$\Delta=(b-2a)^2-4a(c-b)=0$ $\xrightarrow{a=b+c}$

۱) $\frac{3}{4}$ ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ «۳» ـ با توجه به تابع $g(x)=ax^2+bx+c$ ضابطهٔ تابع f به شکل $f(x)=\begin{cases} ax^2+bx+c & x\geq k \\ 2ax+b & x<k \end{cases}$ است. حالا برای

این که تابع f مشتق‌پذیر باشد:

$f'(x)=\begin{cases} 2ax+b & x\geq k \\ 2a & x<k \end{cases}$ $\xrightarrow{x\geq k}$ $2ak+b=2a$ $\xrightarrow{**}$ $2ak+(b-2a)=0$

راه اول: با استفاده از شرط پیوستگی و مشتق‌پذیری باید معادلهٔ $ak^2+bk+c=2ak+b$ ریشهٔ مضاعف داشته باشد. چون $b+c=a$

است، پس $c=a-b$ و در نتیجه: $ak^2+bk+a-b=2ak+b \Rightarrow ak^2+(b-2a)k+a-2b=0$

ریشهٔ مضاعف $\Delta=0 \Rightarrow (b-2a)^2-4a(a-2b)=0 \Rightarrow b^2-4ab+4a^2-4a^2+8ab=0$

$\Rightarrow b^2+4ab=0 \Rightarrow b(b+4a)=0 \Rightarrow b=0$ یا $b=-4a$

پس معادله به شکل زیر درمی‌آید:

$b=0 \Rightarrow ak^2-2ak+a=0 \Rightarrow a(k^2-2k+1)=0 \Rightarrow$ ریشهٔ مضاعف $k=1$

$b=-4a \Rightarrow ak^2-6ak+9a=0 \Rightarrow a(k^2-6k+9)=0 \Rightarrow$ ریشهٔ مضاعف $k=3$

بنابراین حداکثر مقدار k برابر است با $k=3$.

راه دوم: تابع $f(x)=\begin{cases} ax^2+bx+c & x\geq k \\ 2ax+b & x<k \end{cases}$ باید در $x=k$ هم پیوسته باشد و هم مشتق‌پذیر، پس:

پیوستگی $\Rightarrow ak^2+bk+c=2ak+b \quad (1)$

مشتق‌پذیری $f'(x)=\begin{cases} 2ax+b & x>k \\ 2a & x<k \end{cases} \Rightarrow 2ak+b=2a \quad (2)$

با مقایسهٔ (۱) و (۲) می‌توانیم بنویسیم:

$ak^2+bk+c=2a \Rightarrow ak^2+bk+c-2a=0$

مجموع ضرایب این معادله برابر است با:

$a+\overbrace{b}^{a}+c-2a=2a-2a=0$

پس ریشه‌هایش برابرند با $k=1$ و $k=\frac{c-2a}{a}$.

از طرف دیگر این ریشه‌ها باید در معادلهٔ (۲) هم صدق کنند: $2a(\frac{c-2a}{a})+\overbrace{b}^{a-c}=2a \Rightarrow 2c-4a+a-c=2a \Rightarrow c=5a$

پس $\frac{c}{a}=5$ و در نتیجه مقدار ریشهٔ $k=\frac{c-2a}{a}$ برابر است با: $k=\frac{c}{a}-2=5-2=3$

پس حداکثر k برابر است با $k=3$.

تمرین: به ازای کدام مجموعه مقادیر a تابع $f(x)=\begin{cases} ax+5 & x\geq 1 \\ x^2-a & x<1 \end{cases}$ در $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است؟

۱) $\{2,-2\}$ ۲) $\{-2\}$ ۳) $\{2\}$ ۴) $\varnothing$

$f'=\begin{cases} a & x\geq 1 \\ 2x & x<1 \end{cases}$ $a+5=1-a$ $2a=-4$ $a=-2$ $a=2$

پاسخ: گزینه‌ی «۴» ـ اول پیوستگی و سپس مشتق‌پذیری در نقاط مرزی را بررسی می‌کنیم:

$$f(x)=\begin{cases} ax+5 & x\geq 1 \\ x^2-a & x<1 \end{cases} \Rightarrow \text{پیوستگی} \begin{cases} \text{مقدار}=a+5 \\ \text{حدراست}=a+5 \\ \text{حدچپ}=1-a \end{cases} \Rightarrow a+5=1-a \Rightarrow a=-2$$

$$\text{مشتق‌پذیری} \begin{cases} f'_+(1)=a \\ f'_-(1)=2x=2 \end{cases} \Rightarrow a=2$$

چون جواب‌های a برای پیوستگی و مشتق‌پذیری تابع با هم متفاوت است پس مقداری برای a یافت نمی‌شود یعنی $a\in\varnothing$؛ نکند به اشتباه فقط پیوستگی یا فقط مشتق‌پذیری را بررسی کنید و جواب غلط بدهید. باید هم مشتق‌پذیری را بررسی کنیم و هم پیوستگی را، مخصوصاً وقتی در گزینه‌ها «جواب ندارد» یا «تهی»، داشته باشیم.

تمرین: اگر $f(x)=\begin{cases} x^2+2x & x\geq 1 \\ \frac{3}{x} & x<1 \end{cases}$، حاصل $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(1+3h^2)-f(1-h^2)}{h^2}$ کدام است؟

۱) ۱۶ ۲) -12 ۳) ۹ ۴) ۱۵

(آزمون گزینه دو جامع)

$y=f(u)$
$y'=u'f'(u)$

$f(1^+)=3$ ، $f(1^-)=3$ ، $3-3=0$ ، $h^2\to 0^+$

$\div$ مبر $\xrightarrow{\text{Hop}} \lim\limits_{h\to 0}\frac{6h\,f'(1+3h^2)-(-2h)f'(1-h^2)}{2h}$

$f'(x)=\begin{cases} 2x+2 & x>1 \\ -\frac{3}{x^2} & x<1 \end{cases}$ ، $D_{f'}=\mathbb{R}-\{1\}$

$\frac{24h-2h}{2h}=\frac{18h}{2h}=9$

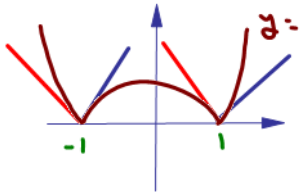
f در $x=1$: $\begin{cases} f'(1^+)=2x+2=4 \\ f'(1^-)=-\frac{3}{x^2}=-3 \end{cases}$ مشتق ناپذیر

مشتق توابع قدرمطلقی به ازای نقطه‌ی x_0، وقتی که x_0 داخل قدرمطلق را صفر می‌کند

چنان‌چه تابع قدرمطلقی در نقطه‌ی x_0 پیوسته باشد:

اگر عبارت داخل قدرمطلق به ازای این نقطه صفر شود، یعنی نقطه‌ی x_0 ریشه عبارت داخل قدرمطلق باشد، باید عبارت داخل قدرمطلق را تعیین علامت کرده و در سمت چپ و راست نقطه موردنظر عبارت را از قدرمطلق خارج کنیم سپس مشتق‌های راست و چپ را جداگانه بررسی می‌کنیم.

تذکر: گفتیم که $f'(x_0)$ همان شیب خط مماس بر منحنی $y=f(x)$ در نقطه‌ی x_0 است. اگر در تابعی مشتق‌های راست و چپ در نقطه‌ی x_0 جداگانه محاسبه شوند، مشتق راست $(f'_+(x_0))$ نشان‌دهنده شیب خط مماس بر منحنی در طرف راست نقطه و مشتق چپ $(f'_-(x_0))$ نشان‌دهنده شیب خط مماس بر منحنی در طرف چپ نقطه x_0 است. واضح است که اگر $f'_+(x_0)=f'_-(x_0)$ تابع در نقطه‌ی x_0 مشتق‌پذیر خواهد بود.



$y=|x^2-1|$

تمرین: مشتق‌پذیری تابع $f(x)=|x^2-1|$ را در نقطه‌ی $x=-1$ بررسی کنید.

مشتق ناپذیر (زاویه)

$y=|x^2-1|=\begin{cases} x^2-1 & x^2-1\geq 0 \quad x^2\geq 1 \quad |x|\geq 1 \quad x\leq -1 \text{ یا } x\geq 1 \\ -x^2+1 & x^2-1<0 \quad x^2<1 \quad |x|<1 \quad -1<x<1 \end{cases}$ ، $D_f=\mathbb{R}$

$y'=\begin{cases} 2x & x<-1 \text{ یا } x>1 \\ -2x & -1<x<1 \end{cases}$ ، $D_{f'}=\mathbb{R}-\{\pm 1\}$

$f'_-(-1)=2x=-2$ ، $f'_+(-1)=-2x=2$

تمرین: در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=x\sqrt{x}+|x-1|$ مقدار $f'_+(1)+3f'_-(1)$ کدام است؟ (سراسری ۹۰)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

تمرین: مشتق چپ تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}$ در نقطه‌ی $x=0$ کدام است؟ (سراسری ۸۹)

۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۲) $-\sqrt{2}$ ۳) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۴) $\sqrt{2}$

مشتق توابع شامل جزء صحیح

برای تعیین مشتق توابع شامل براکت در یک نقطه باز هم باید به پیوستگی تابع در آن نقطه دقت کنیم. اگر تابع پیوسته باشد، برای محاسبه مشتق ابتدا حاصل براکت را به ازای آن نقطه تعیین کرده سپس مشتق‌گیری می‌کنیم.

نکته: توابع شامل براکت در نقاطی که داخل براکت عدد صحیح نشود، پیوسته خواهند بود.

تمرین: در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=|x|.[x]$، مقدار $f'_-(0)-f'_+(0)$ کدام است؟ (سراسری تجربی ۸۷)

۱) -1 ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ۲

تمرین: تابع $f(x)=x^2[x]$ در نقطه‌ی $x=1$:

۱) مشتق دارد.
۲) فقط مشتق چپ دارد.
۳) فقط مشتق راست دارد.
۴) نه مشتق چپ نه مشتق راست دارد.

تمرین: فرض کنید $f(x)=(x[x^۲+\frac{۱}{۲}])^۲+۱$ و $g(x)=\frac{۱}{\sqrt[۳]{x^۲-۱}}$. مقدار مشتق تابع fog در $x=\frac{۳}{\sqrt{۸}}$، چند برابر $(-۱۲۸\sqrt{۲})$ است؟

(سراسری تجربی ۱۴۰۰)

۱) -۴ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ «۴» ـ می‌دانیم $(fog)'(x)=g'(x)f'(g(x))$ پس باید $g'(\frac{۳}{\sqrt{۸}})$ و $f'(g(\frac{۳}{\sqrt{۸}}))$ را پیدا کنیم:

$$g(x)=\frac{۱}{\sqrt[۳]{x^۲-۱}}=(x^۲-۱)^{-\frac{۱}{۳}} \Rightarrow g'(x)=-\frac{۱}{۳}(x^۲-۱)^{-\frac{۴}{۳}}(۲x)=-\frac{۲x}{۳\sqrt[۳]{(x^۲-۱)^۴}}$$

$$\Rightarrow g'(\frac{۳}{\sqrt{۸}})=-\frac{۲\frac{۳}{\sqrt{۸}}}{۳\sqrt[۳]{(\frac{۹}{۸}-۱)^۴}}=-\frac{\frac{۲\times۳}{\sqrt{۸}}}{۳(\frac{۱}{۲})^۴}=-\frac{۳۲}{\sqrt{۸}}=\frac{-۳۲}{۲\sqrt{۲}}=-\frac{۱۶}{\sqrt{۲}}$$

و چون:

$$g(\frac{۳}{\sqrt{۸}})=\frac{۱}{\sqrt[۳]{(\frac{۹}{۸}-۱)}}=\frac{۱}{\sqrt[۳]{\frac{۱}{۸}}}=۲$$

پس باید $f'(۲)$ را پیدا کنیم:

$$f(x)=(x\underbrace{[x^۲+\frac{۱}{۲}]}_{[۴+\frac{۱}{۲}]=۴})^۲+۱ \Rightarrow f(x)=(۴x)^۲+۱ \Rightarrow f'(x)=۳۲x \Rightarrow f'(۲)=۳۲\times۲=۶۴$$

بنابراین $(fog)'(\frac{۳}{\sqrt{۸}})$ برابر است با:

$$(fog)'(\frac{۳}{\sqrt{۸}})=g'(\frac{۳}{\sqrt{۸}})f'(۲)=-\frac{۱۶}{\sqrt{۲}}\times۶۴=-۸\sqrt{۲}\times۶۴=(-۱۲۸\sqrt{۲})\times۴$$

پس حاصل مشتق، ۴ برابر $(-۱۲۸\sqrt{۲})$ است.

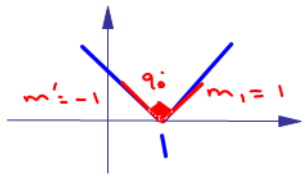
تمرین: اگر $f(x)=\sqrt{x^۲-[x]+|x|}$ باشد، $\lim\limits_{h\to۰^+}\frac{f(۱+h)-f(۱)}{h}$ کدام است؟

(سراسری ریاضی ۹۷)

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۵}{۴}$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $\frac{۵}{۲}$

مشتق‌پذیری توابع شامل قدرمطلق

۱) در تابع $y=|f(x)|$ (که $f(x)$ تابعی پیوسته باشد)، در ریشه‌های سادهٔ مرتبه اول داخل قدرمطلق، تابع مشتق‌ناپذیر است. به این نقاط، گوشه‌ای می‌گویند.



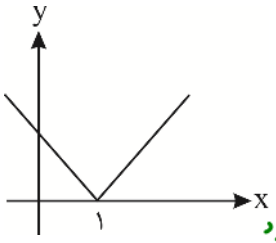
تمرین: مشتق‌پذیری $f(x)=|x-1|$ را در $x=1$ بررسی کنید.

پاسخ: چون به ازای $x=1$ تابع صفر می‌شود بهتر است از تعریف مشتق استفاده کنیم:

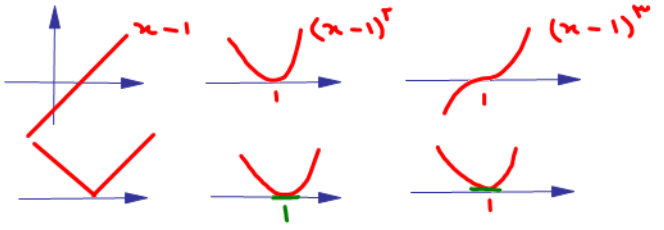
$$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{|x-1|-0}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{|x-1|}{x-1}\quad \frac{\text{قدرمطلق‌دار}}{\text{حد چپ و راست را جدا کن}}\quad \begin{cases}\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x-1}{x-1}=1\\ \lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{-(x-1)}{x-1}=-1\end{cases}$$

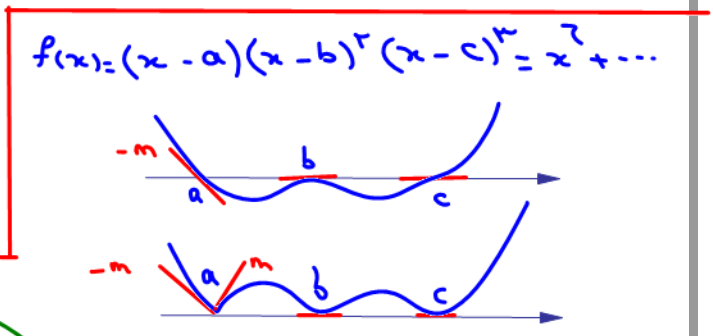
$$\Rightarrow \begin{cases}f'_+(1)=1\\ f'_-(1)=-1\end{cases}\Rightarrow f'_+(1)\neq f'_-(1)$$

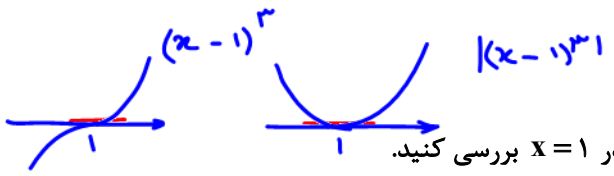
مشتق چپ و راست f را در $x=1$ نابرابرند پس تابع در این نقطه مشتق‌پذیر نیست. به این نقطه گوشه می‌گویند.



۲) مشتق $y=|f(x)|$ (که در آن $f(x)$ پیوسته است) در نقاطی که $f(x)$ دارای مرتبهٔ بزرگ‌تر از ۱ باشد مشتق‌پذیر است و مشتق تابع در این نقاط برابر صفر است. یعنی منحنی تابع در این نقاط بر محور xها مماس است. مثلاً







تمرین: مشتق‌پذیری تابع $y=|(x-1)^3|$ را در $x=1$ بررسی کنید.

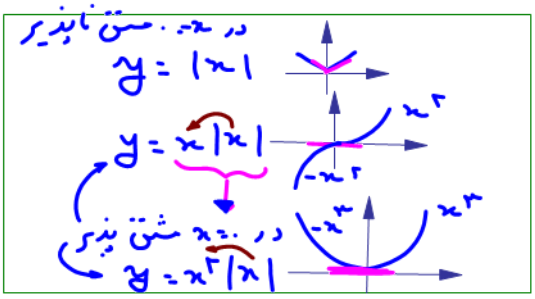
پاسخ: اولاً این تابع در $x=1$ پیوسته است. ثانیاً برای پیداکردن مشتق، بهتر است از تعریف مشتق استفاده کنیم:

$$y'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{|(x-1)^3|-0}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{|(x-1)^3|}{x-1}$$

حد چپ و راست را جداگانه پیدا می‌کنیم:

$$y'_+(1)=\lim_{x\to 1^+}\frac{\overbrace{|(x-1)^3|}^{+}}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1)^3}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}(x-1)^2=0$$

$$y'_-(1)=\lim_{x\to 1^-}\frac{\overbrace{|(x-1)^3|}^{-}}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{-(x-1)^3}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}-(x-1)^2=0$$



تابع $|(x-1)^3|$ در $x=1$ مشتق‌پذیر است: $y'_+(1)=y'_-(1)$

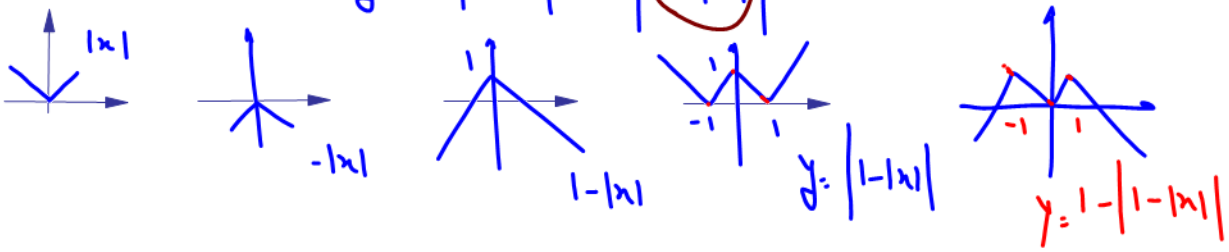
۳) تابع $y=h(x)|f(x)|$ (که f و h پیوسته هستند) در ریشه‌های مشترک f و h مشتق‌پذیر هستند. مثلاً $y=(x-1)|x-1|$ در $x=1$ مشتق‌پذیر است چون:

$$y'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)|x-1|-0}{x-1}=\lim_{x\to 1}|x-1|=0 \Rightarrow y'(1)=0$$

نکته: تابع $y=(x-a)^n|x-a|$ در $x=a$ مشتق‌پذیر است هرگاه $(n\in\mathbb{N})n\geq 1$ باشد.

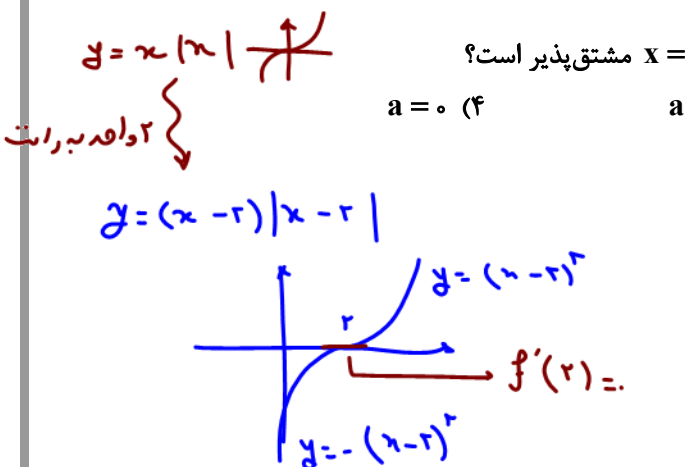
تمرین: اگر $f(x)=1-|x|$ باشد، تعداد نقاط مشتق‌ناپذیر تابع با ضابطه‌ی $y=f(f(x))$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر



تمرین: به ازای کدام مقدار a، تابع $f(x)=x|x-2|-a|x-2|$ در $x=2$ مشتق‌پذیر است؟

۱) $a=2$ ۲) $a\in\varnothing$ ۳) $a=-2$ ۴) $a=0$



تمرین: اگر تابع $f(x)=(2x^2+ax+b)|(x-1)(x-2)|$ در $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر باشد، b کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) −۶

$f(x)=(2x^2+ax+b)\,|(x-1)(x-2)|$

$=2(x-1)(x-2)\,|(x-1)(x-2)|$

$=2(x^2-3x+2)\,|(x-1)(x-2)|$

$-(2x^2-6x+4)\,|(x-1)(x-2)|$

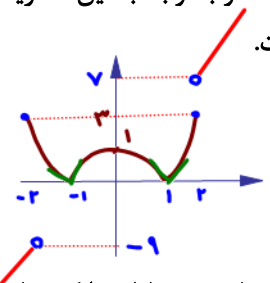
$-6=a \qquad b=4$

$y=x|x(x-1)|$

تمرین: تابع $y=x\,|x^2-x|$، در چند نقطه مشتق‌پذیر نیست؟

۱) ۲ ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ۳

پاسخ: گزینه‌ی «۳» ـ در تابع $f(x)=x\,|x^2-x|$ ریشه‌های عبارت داخل قدرمطلق $x=0$ و $x=1$ هستند و با توجه به این که ریشه‌ی $x=0$ همان ریشه‌ی x خارج قدرمطلق است، پس تابع در $x=0$ مشتق‌پذیر و در $x=1$ مشتق‌ناپذیر است.



$x=\pm1 \qquad (x+1)(x-1) \qquad -2\le x\le 2$

تمرین: تابع $f(x)=\begin{cases}|x^2-1| & |x|\le 2\\ 4x-1 & |x|>2\end{cases}$ در چند نقطه مشتق‌پذیر نیست؟

۱) ۱ ۲) ۴ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ: گزینه‌ی «۲» ـ برای بررسی مشتق‌پذیری تابع $f(x)=\begin{cases}|x^2-1| & |x|\le 2\\ 4x-1 & |x|>2\end{cases}$ اول هر کدام از ضابطه‌ها و بعد نقاطی را که ضابطه‌ی تابع در آن عوض می‌شود، بررسی می‌کنیم. ضابطه‌ی $|x^2-1|$ در نقاط $x=1$ و $x=-1$ مشتق‌پذیر نیست (کـه در محـدوده‌ی تعریـف ضابطه هستند و ریشه‌های ساده داخل قدرمطلق‌اند) ضابطه‌ی $4x-1$ همواره مشتق‌پذیر است. ضابطه‌ی تابع در نقاط $x=2$ و $x=-2$ عوض می‌شود، پس:

$$f(x)=\begin{cases}|x^2-1| & |x|\le 2\\ 4x-1 & |x|>2\end{cases}$$

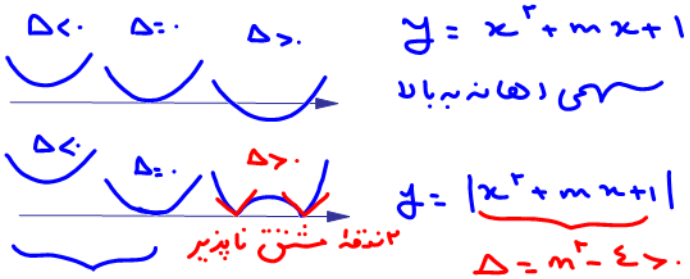
$$x=2 \text{ پیوستگی } \begin{cases}\text{مقدار}=3\\ \text{حدراست}=\lim\limits_{x\to 2^+}4x-1=7\\ \text{حدچپ}=\lim\limits_{x\to 2^-}|x^2-1|=3\end{cases} \Rightarrow \text{ناپیوسته} \Rightarrow \text{مشتق‌ناپذیر}$$

$$x=-2 \text{ پیوستگی } \begin{cases}\text{مقدار}=3\\ \text{حدراست}=\lim\limits_{x\to(-2)^+}|x^2-1|=3\\ \text{حدچپ}=\lim\limits_{x\to(-2)^-}4x-1=-9\end{cases} \Rightarrow \text{ناپیوسته} \Rightarrow \text{مشتق‌ناپذیر}$$

پس تابع در چهار نقطه مشتق‌پذیر نیست.

تمرین [مهم]: حدود m را برای آن که تابع $f(x)=|x^2+mx+1|$:

الف) در دو نقطه مشتق‌ناپذیر باشد، بیابید.



$\Delta = m^2 - 4 > 0 \quad m^2 > 4 \rightarrow |m| > 2$

$m > 2$ یا $m < -2$ جواب

$y = x^2 + mx + 1 \quad a=1 \quad b=m \quad c=1$

$\Delta = b^2 - 4ac$

ب) در $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر باشد، بیابید. $\Leftarrow$ یعنی Δ داخل قدرمطلق منفی یا صفر باشد:

$\Delta = m^2 - 4 \leq 0 \quad m^2 \leq 4 \quad |m| \leq 2$

$-2 \leq m \leq 2$

بررسی مشتق‌پذیری تابع شامل جزء صحیح

الف) تابع $[f(x)]$ در نقاطی که پیوسته است، مشتق‌پذیر بوده و مشتق آن همواره صفر است. در نقاط ناپیوسته نیز مشتق‌ناپذیر است. (در نقاط ناپیوسته تابع از هر طرف که پیوسته باشد از همان طرف مشتق‌پذیر است و مشتق آن صفر است.)

تمرین: اگر $f(x) = [x^2]$، مشتق‌پذیری آن را در نقاط $x = \frac{3}{2}$ و $x = 2$ بررسی کنید.

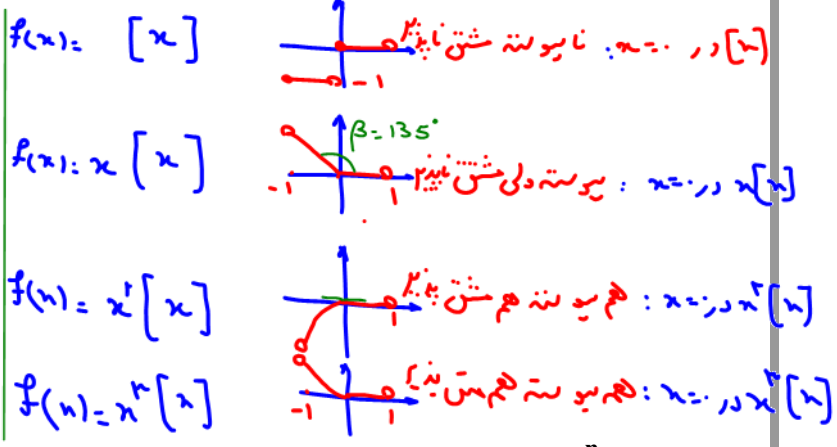
۱) $f(x) = [x^2] \ , \ x = \frac{3}{2}$

$f(\frac{3}{2}) = [\frac{9}{4} \notin \mathbb{Z}] \Rightarrow f'(\frac{3}{2}) = 0$

۲) $f(x) = [x^2] \ , \ x = 2$

$f(2) = [4 \in \mathbb{Z}]$

$$\begin{cases} f(2) = 4 \\ f(2^+) = [4^+] = 4 \xrightarrow{\text{از راست پیوسته است.}} f'_+(2) = 0 \\ f(2^-) = [4^-] = 3 \Rightarrow f'_-(2) : \text{وجود ندارد} \end{cases}$$



ب) تابع $f(x) = (x-a)^n[x]$ در نقطهٔ $a \in \mathbb{Z}$ باشد با شرط $n \geq 2$ مشتق‌پذیر است. اگر $n = 1$ پیوسته ولی مشتق‌ناپذیر است. به مثال‌های زیر توجه کنید:

می‌خواهیم توابع $[x]$، $x[x]$ و $x^2[x]$ را در $x = 0$ از لحاظ پیوستگی و مشتق‌پذیری مقایسه کنیم:

۱) $f(x) = [x] \Rightarrow$

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(0^+) = 0 \xrightarrow{\text{از راست پیوسته}} f'_+(0) = 0 \\ f(0^-) = -1 \Rightarrow f'(0) : \text{وجود ندارد} \end{cases}$$

این تابع در $x = 0$ ناپیوسته، مشتق‌ناپذیر است.

۲) $f(x) = x[x] \Rightarrow$

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(0^+) = 0 \Rightarrow f'_+(0) = 0 \\ f(0^-) = x[0^-] = x(-1) = -x \Rightarrow f'_-(0) = -1 \end{cases}$$

تابع در $x=0$ پیوسته است. مشتق راست و چپ هم دارد ولی چون $f'_+(0)=f'_-(0)$ شد پس مشتق‌ناپذیر است. به این نقطه گوشه می‌گویند.

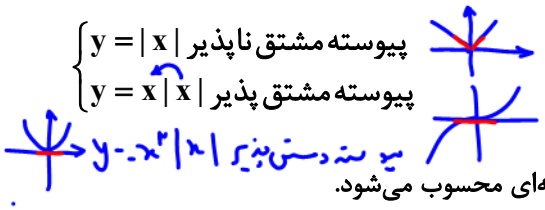
$$۳)\ f(x)=x^۲[x] \Rightarrow \begin{cases} f(0)=0 \\ f(0^+)=0 \Rightarrow f'_+(0)=0 \\ f(0^-)=x^۲[0^-]=x^۲(-۱)=-x^۲ \Rightarrow f'_-(0)=-۲x=0 \end{cases}$$

تابع در $x=0$ پیوسته است و مشتق چپ و راست هم دارد و چون $f'_+(0)=f'_-(0)$ شد پس در $x=0$ مشتق‌پذیر است.

جمع‌بندی:

یک بار به مقایسه‌ها توجه کنید: (در $x=0$)

$$\begin{cases} y=[x] \text{ ناپیوسته} \\ y=x[x] \text{ پیوسته مشتق ناپذیر} \\ y=x^۲[x] \text{ پیوسته مشتق پذیر} \end{cases} \qquad \begin{cases} y=|x| \text{ پیوسته مشتق ناپذیر} \\ y=x|x| \text{ پیوسته مشتق پذیر} \end{cases}$$



نقطهٔ $x=0$ در $|x|$ و $x[x]$ نقطهٔ گوشه‌ای محسوب می‌شود.

تمرین: تابع $f(x)=(x-۱)[x]$ و $f(x)=(x-۱)^۲[x]$ به ترتیب در $x=۱$، ..... و ..... هستند.

۱) فقط پیوسته، فقط پیوسته
۲) مشتق‌پذیر، مشتق‌پذیر
✓ ۳) فقط پیوسته، مشتق‌پذیر
۴) مشتق‌پذیر، فقط پیوسته

تمرین: اگر تابع $f(x)=(x^2+ax+b)[x]$ در $x=3$ مشتق‌پذیر باشد، $a+b$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۳ ۳) -3 ۴) مقداری برای a و b وجود ندارد.

$f(x)=(x-3)^2[x]$ باید ۳ ضریب $[x]$ را با رشته صفر صفر کند.

$=(x^2-6x+9)[x]$

$a=-6$ $b=9$

$a+b=3$

مشتق‌پذیری روی یک بازه

تابع f روی بازهٔ (a,b) مشتق‌پذیر است، هرگاه f در هر نقطه در این بازه مشتق‌پذیر باشد، تابع f روی بازهٔ $[a,b]$ مشتق‌پذیر است، هرگاه f در بازهٔ (a,b) مشتق‌پذیر باشد و در نقطهٔ a مشتق راست داشته باشد. تابع f روی بازهٔ $(a,b]$ مشتق‌پذیر است، هرگاه f در بازهٔ (a,b) مشتق‌پذیر باشد و در نقطهٔ b مشتق چپ داشته باشد.

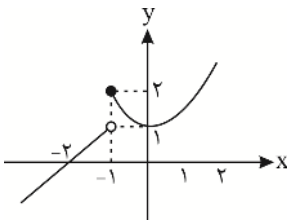
تابع f روی بازهٔ $[a,b]$ مشتق‌پذیر است، هرگاه f در بازهٔ (a,b) مشتق‌پذیر باشد و در نقطهٔ a مشتق راست و در b مشتق چپ داشته باشد.

تمرین: نمودار تابع $f(x)=\begin{cases}x+2 & x<-1\\ x^2+1 & x\geq -1\end{cases}$ روی چند تا از بازه‌های $[-2,-3]$، $[-1,-2]$، $(-1,-3]$، $[0,-2]$ و $[0,-1]$ مشتق‌پذیر است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) صفر

$x=-1$ رأس نابیوسته مشتق نیزیر

پاسخ: بررسی تک‌تک بازه‌ها سخت و زمان‌بر است، پس تابع را رسم می‌کنیم:



تابع در نقطهٔ $x=-1$ ناپیوسته است و در این نقطه پیوستگی راست دارد و در $x=-1$ مشتق راست هم داریم (نیم مماس راست داریم) ولی مشتق چپ نداریم.

$[-2,0]$ مشتق‌ناپذیر است چون در $x=-1$ مشتق ندارد.

$[0,2]$: مشتق‌پذیر

$(-1,-3]$: مشتق‌پذیر

$[-1,0]$: مشتق‌پذیر

$[-1,-2]$: مشتق‌ناپذیر، چون در $x=-1$ مشتق چپ ندارد.

$[-2,-3]$: مشتق‌پذیر

تمرین: نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=[x+\frac{1}{3}]+[x]$ روی بازهٔ $(0,3)$ در چند نقطه مشتق‌ناپذیر است؟ (ریاضی خارج)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

پاسخ: تابع $y=[x]$ در بازهٔ $(0,3)$ در نقاط $x=1$ و $x=2$ ناپیوسته و مشتق‌ناپذیر است. تابع $y=[x+\frac{1}{3}]$ هم در بازهٔ $(0,3)$ در نقاط $x=\frac{2}{3}$، $x=\frac{5}{3}$، $x=\frac{8}{3}$ ناپیوسته و مشتق‌ناپذیر است. پس این تابع جمعاً در ۵ نقطه ناپیوسته و در نتیجه مشتق‌ناپذیر است.

نکته: اگر دو تابع در $x=a$ یکی پیوسته و دیگری ناپیوسته باشد، آن‌وقت مجموعشان در آن نقطه ناپیوسته است. در این سؤال $x=1$ و $x=2$ که باعث ناپیوستگی $[x]$ شدند، تابع $[x+\frac{1}{3}]$ را پیوسته می‌کنند و هم‌چنین نقاط $x=\frac{2}{3},\frac{5}{3},\frac{8}{3}$ که باعث ناپیوستگی $[x+\frac{1}{3}]$ شدند تابع $[x]$ را پیوسته می‌کنند پس هر ۵ نقطه یکی را پیوسته و دیگری را ناپیوسته می‌کنند پس جمعشان نیز حتماً به ازای هر ۵ نقطه ناپیوسته می‌شود.

مشتق‌پذیری رادیکال‌ها

قبلاً در خصوص مماس قائم‌ها صحبت کرده‌ایم ولی در خصوص مشتق‌پذیری یک بار به نکات زیر توجه کنید.

۱) تابع در ریشه‌های زیر رادیکال وقتی توان عبارت زیر رادیکال از فرجه کم‌تر است، مشتق‌پذیر نیست، مثل $y=\sqrt[3]{x}$ و $y=\sqrt[3]{x-1}$ و $y=\sqrt[3]{(x-2)^2}$ به ترتیب در نقاط $x=0$، $x=1$ و $x=2$ مشتق‌ناپذیرند.

۲) اگر توان و فرجه مساوی باشند، چنان‌چه هر دو فرد باشند تابع در آن‌جا مشتق‌پذیر است. مثلاً $y=\sqrt[3]{(x-1)^3}$ چون می‌شود $y=x-1$ پس در $x=1$ مشتق‌پذیر است.

۳) اگر توان و فرجه مساوی باشند، چنان‌چه هر دو زوج باشند تابع در آن نقطه مشتق‌ناپذیر است (نقطهٔ گوشه‌ای). مثلاً:

$y=\sqrt{(x-1)^2}=|x-1| \Rightarrow$ در $x=1$ گوشه می‌شود و مشتق‌ناپذیر است.

تیپ‌های متداول

تمرین: تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{(x-1)(x-2)^3} & x\geq 0\\ |(x+1)(x+2)^2| & x<0\end{cases}$ در چند نقطه مشتق‌پذیر نیست؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

پاسخ: تابع را ساده‌تر می‌نویسیم:

$$f(x)=\begin{cases}(x-2)\sqrt[3]{x-1} & x\geq 0\\ |(x+1)(x+2)^2| & x<0\end{cases}$$

$$\begin{cases}f(0)=(-2)\sqrt[3]{-1}=2\\ f(0^+)=2\\ f(0^-)=(1)(2)^2=4\end{cases}\Rightarrow f(0^+)\neq f(0^-)$$ ناپیوسته و مشتق‌ناپذیر

تابع در $x=0$ ناپیوسته و مشتق‌ناپذیر است. در $x=1$ که ریشه زیر رادیکال است خط مماس عمودی می‌باشد و مشتق‌پذیر نیست البته $x=1$ در محدودهٔ ضابطهٔ بالایی $(x\geq 0)$ قرار دارد و می‌توانیم به آن گیر بدهیم.

در $x=-1$ از ضابطهٔ پایینی نقطهٔ گوشه (مشتق‌ناپذیر) داریم و در $x=-2$ چون ریشهٔ مرتبهٔ دوم است، مشکلی نداریم:

مشتق‌ناپذیرها $=\{1,-1,0\}$

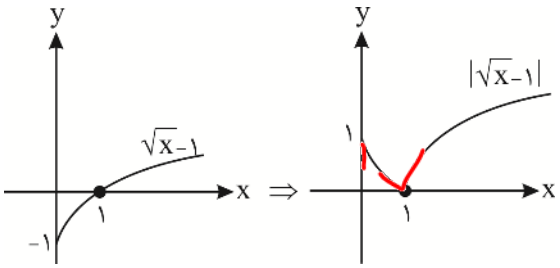
تمرین: تابع $f(x)=|\sqrt{x}-1|$ در دامنهٔ تعریف خود در چند نقطه مشتق‌پذیر نیست؟

۱) هیچ ۲) یک ۳) دو ۴) بی‌شمار

پاسخ: دامنهٔ $f(x)$ را پیدا می‌کنیم:

$$x\geq 0 \Rightarrow D_f=[0,+\infty)$$

عامل $\sqrt{x}$ در $x=0$ مشتق‌پذیر نیست و عامل $\sqrt{x}-1$ در $x=1$ (ریشهٔ مرتبه اول در داخل قدرمطلق) نقطه گوشه می‌دهد و مشتق‌ناپذیر است. پس تابع در دو نقطه از دامنهٔ تعریفش مشتق‌پذیر نیست. به شکل توجه کنید:



همان‌طور که می‌بینید در $x=0$ (روی محور yها) نیم‌مماس عمودی داریم و $f'_+(0)=-\infty$ است پس مشتق ندارد و در $x=1$ هم نقطهٔ گوشه‌ای ایجاد شده است.

تمرین: خطوط $x=2$ و $x=a$ بر تابع $f(x)=\sqrt[3]{x^2-6x+b}$ مماس‌اند. مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۲

پاسخ: چون خطوط $x=2$ و $x=a$ هر دو موازی محور yها هستند پس مماس عمودی‌اند بنابراین هر دو، ریشهٔ زیر رادیکال هستند:

$$x=2 \Rightarrow \sqrt[3]{4-12+b}=0 \Rightarrow -8+b=0 \Rightarrow b=8$$

حالا $b=8$ را جاگذاری می‌کنیم:

$$f(x)=\sqrt[3]{x^2-6x+8}$$

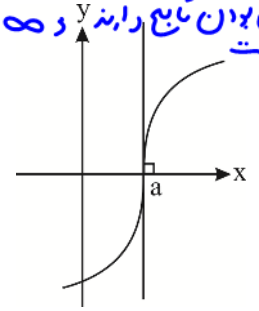
اکنون ریشه‌های زیر رادیکال را پیدا می‌کنیم:

$$x^2-6x+8=0 \Rightarrow (x-2)(x-4)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=4 \end{cases}$$

$x=2$ را که خودش گفته بود، پس حتماً $x=4$ همان $x=a$ است پس $a=4$ بنابراین:

$$a+b=4+8=12$$

تمرین: اگر نمودار f به صورت مقابل باشد، کدام گزینه صحیح است؟



۱) $\begin{cases} f'_-(a)=-\infty \\ f'_+(a)=+\infty \end{cases}$ ۲) $\begin{cases} f'_-(a)=+\infty \\ f'_+(a)=-\infty \end{cases}$

۳) $\begin{cases} f'_-(a)=+\infty \\ f'_+(a)=+\infty \end{cases}$ ۴) $\begin{cases} f'_-(a)=-\infty \\ f'_+(a)=-\infty \end{cases}$

$y=\sqrt[4]{(x-1)^2}=\sqrt{|x-1|}$

$y=\sqrt[12]{(x-1)^4}=\sqrt[3]{|x-1|}$

$y=|x-1|$ توشه

$x=1$ بازآشت

بررسی نمودار مشتق

برای آن که از نمودار تابع، پی به وضعیت نمودار مشتق ببریم کافی است به موارد زیر توجه داشته باشیم:

۱) اگر تابع $f(x)$ در یک بازه اکیداً صعودی باشد تابع مشتق آن در ناحیهٔ اول یا دوم قرار می‌گیرد. این جمله به این معنی است که مشتق تابع یعنی $f'(x)$ در این بازه مثبت است پس بالای محور xها قرار می‌گیرد. به جملهٔ زیر نیز توجه داشته باشید:

اگر در نقطهٔ $x=a$ شیب خط مماس بر منحنی تابع مثبت باشد، نمودار تابع $f'(x)$ در این نقطه بالای محور xها قرار می‌گیرد.

۲) اگر تابع $f(x)$ در یک بازه اکیداً نزولی باشد، تابع مشتق آن در ناحیهٔ سوم یا چهارم قرار می‌گیرد. این جمله به این معنی است که مشتق تابع یعنی $f'(x)$ در این بازه منفی است پس پایین محور xها قرار می‌گیرد. به جملهٔ زیر نیز توجه داشته باشید:

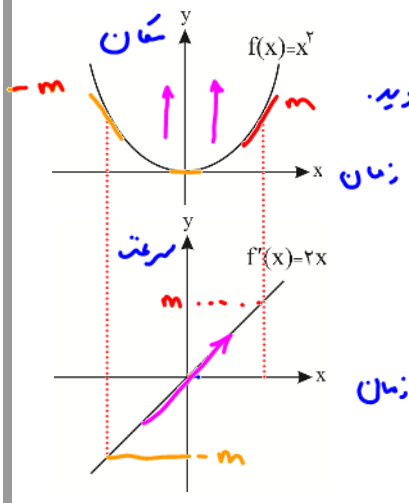
اگر در نقطهٔ $x=a$ شیب خط مماس بر منحنی تابع منفی باشد، نمودار تابع $f'(x)$ در این نقطه پایین محور xها قرار می‌گیرد.

۳) اگر تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x=a$ خط مماس افقی داشته باشد، تابع مشتق یعنی $f'(x)$ در این نقطه صفر است و برعکس.

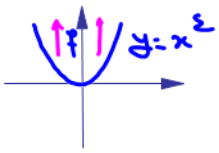
۴) اگر تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x=a$ خط مماس قائم داشته باشد (و یا نیم‌مماس قائم)، تابع مشتق یعنی $f'(x)$ در این نقطه حد بی‌نهایت دارد.

۵) اگر در تابع $f(x)$ نقطهٔ $x=a$ یک نقطهٔ گوشه‌ای باشد تابع مشتق یعنی $f'(x)$ در این نقطه تعریف نمی‌شود و حد راست و چپ $f'(x)$ در این نقطه نابرابر (و حداقل یکی از این حدها متناهی یعنی عدد مشخص) می‌شود.

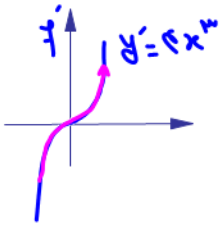
تمرین: به نمودار تابع $f(x)=x^2$ توجه کنید:



تابع f با عرض های خود (y ها یش) شیب های f' را در هر نقطه‌ای تولید.

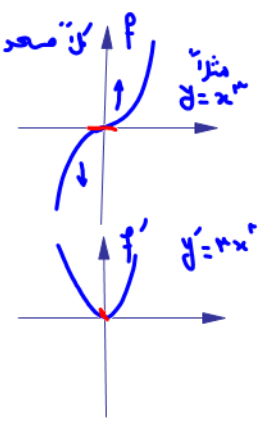


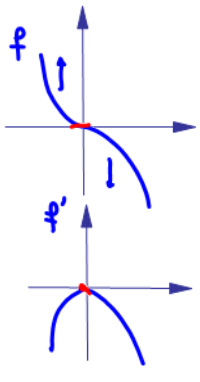
مشتق این تابع برابر $f'(x)=2x$ است که شکل آن به صورت مقابل است:

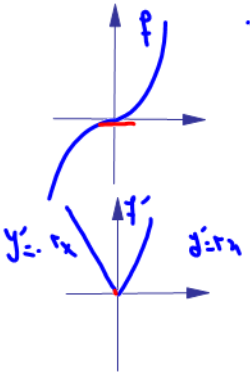


طبق شکل، در $x>0$ تابع $f(x)$ اکیداً صعودی است پس نمودار $f'(x)$ در $x>0$ بالای محور xها قرار می‌گیرد. هم‌چنین در $x<0$ تابع $f(x)$ اکیداً نزولی است پس نمودار $f'(x)$ در $x<0$ پایین محور xها قرار می‌گیرد و در $x=0$ چون به نمودار $f(x)$ خط مماس افقی رسم می‌شود پس شیب خط مماس برابر صفر است پس $f'(x)$ در این نقطه صفر می‌شود و به محور xها برخورد می‌کند. حالا یک بار با دقت به شکل‌های زیر توجه کنید:

تابع صعودی ⟸ f' کل بالای x

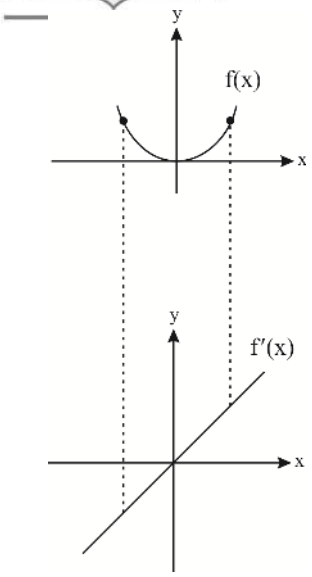






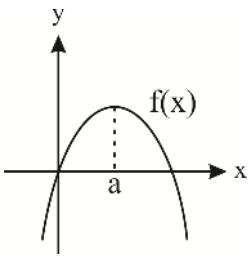
مثلاً $f(x)=x|x|=\begin{cases}x^2 & x\geq 0\\ -x^2 & x<0\end{cases}$

$f'=\begin{cases}2x & x>0\\ -2x & x<0\end{cases}$



می‌بینید که در یک نقطهٔ دلخواه سمت راست مبدأ مختصات، شیب خط مماس بر $f(x)$ مثبت شده است پس در همین نقطه، نمودار $f'(x)$ بالای محور xها قرار گرفته و در یک نقطهٔ دلخواه سمت چپ مبدأ مختصات، شیب خط مماس بر $f(x)$ منفی شده است پس در همین نقطه نمودار $f'(x)$ پایین محور xها قرار گرفته است و در $x = 0$ که خط مماس افقی شده، نمودار $f'(x)$ به محور xها برخورد کرده و صفر شده است.

تمرین: اگر نمودار $f(x)$ به شکل زیر باشد، نمودار $f'(x)$ را رسم کنید.



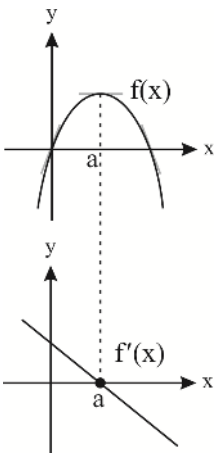
پاسخ: یک بار دیگر $f(x)$ را رسم می‌کنیم و زیر آن نمودار $f'(x)$ با این اطلاعات رسم می‌شود:

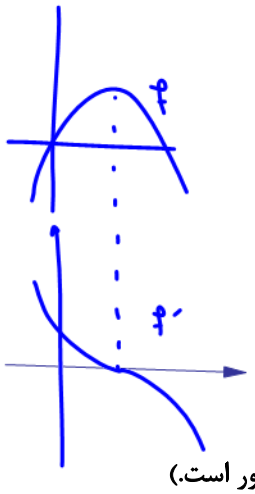
الف) در نقطهٔ $x = a$ خط مماس بر $f(x)$ افقی است پس $f'(x)$ در این نقطه صفر است.

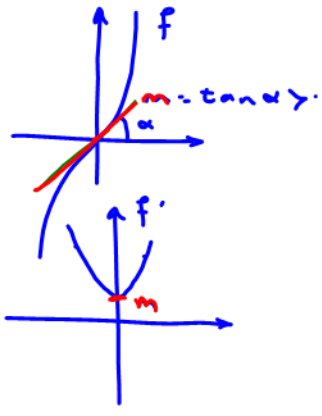
ب) در فاصلهٔ $(a, +\infty)$ یعنی $x > a$، نمودار $f(x)$ اکیداً نزولی است (یا به عبارتی شیب خطهای مماس منفی است) بنابراین $f'(x)$ منفی است و زیر محور xها قرار می‌گیرد.

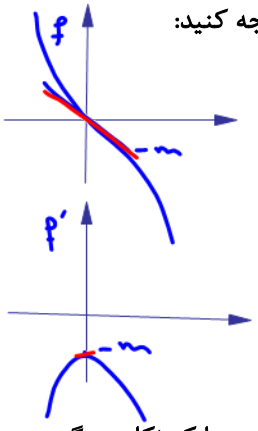
پ) در فاصلهٔ $(-\infty, a)$ یعنی $x < a$، نمودار $f(x)$ اکیداً صعودی است (یا به عبارتی شیب خطهای مماس مثبت است) بنابراین $f'(x)$ مثبت است و بالای محور xها قرار می‌گیرد.

حالا به شکل‌ها توجه کنید:



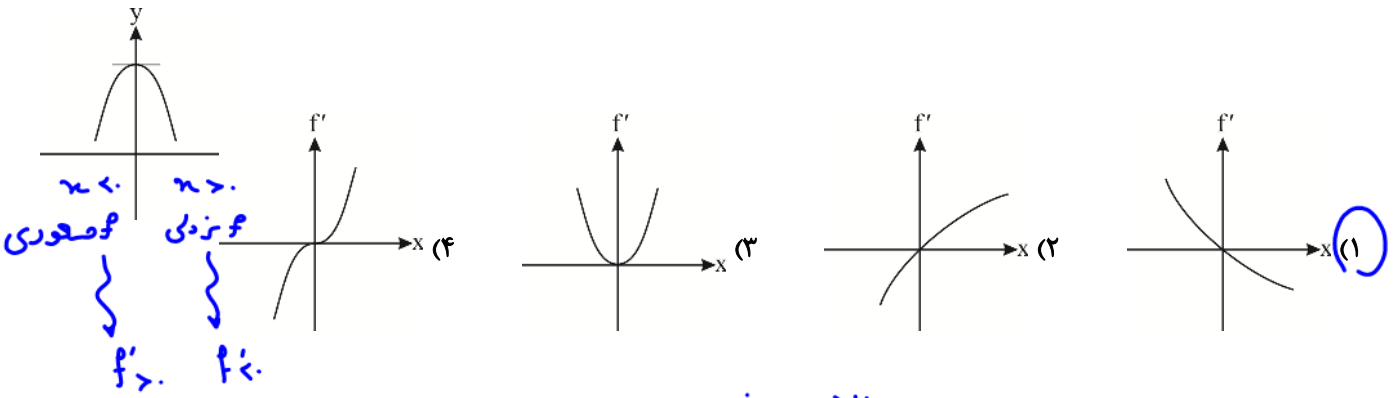




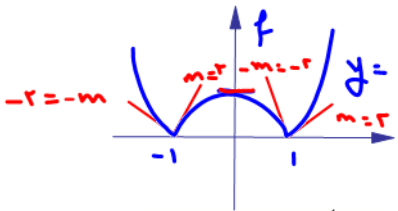


حالا برویم سراغ تست‌ها که نکات دیگر هم ببینیم؛ (البته در اندازه‌ای که موردنیاز کنکور است.)

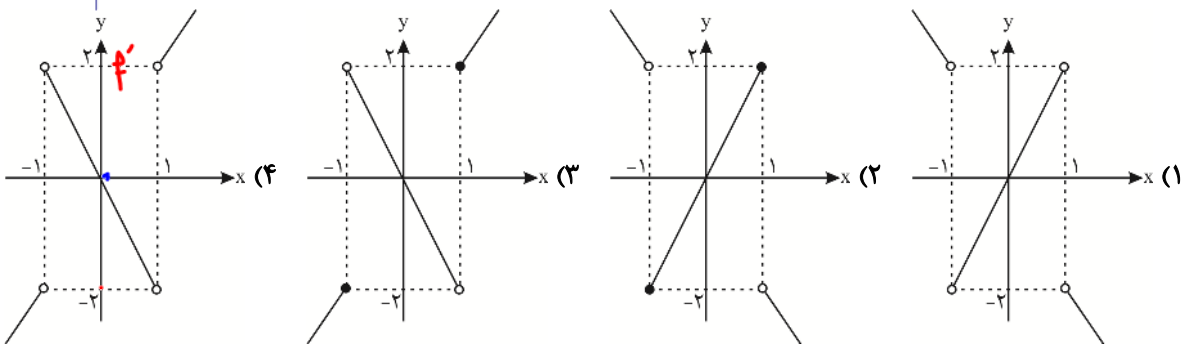
تمرین: اگر نمودار $y=f(x)$ در همسایگی $x=0$ به صورت روبه‌رو باشد، نمودار f' در همسایگی $x=0$ به کدام صورت است؟



نکته: نقاط تلاقی f و f' به صورت تابع قدرمطلق جهش ظاهری می‌شوند.



تمرین: نمودار مشتق تابع $f(x)=|x^2-1|$ کدام است؟



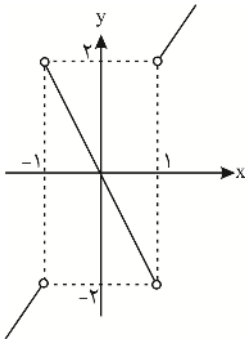
پاسخ: با ضابطه‌بندی تابع خواهیم داشت:

$$f(x)=\begin{cases} x^2-1 & x\geq 1 \text{ یا } x\leq -1 \\ 1-x^2 & -1<x<1 \end{cases}$$

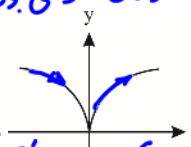
$x=\pm 1$ ریشه‌های ساده داخل قدرمطلق هستند (گوشه) و مشتق‌ناپذیرند.

$$f'(x)=\begin{cases} 2x & x>1 \text{ یا } x<-1 \\ \text{تعریف نشده} & x=1, x=-1 \\ -2x & -1<x<1 \end{cases}$$

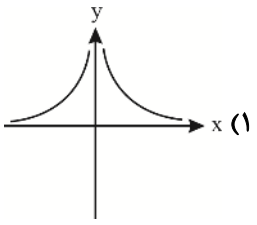
حالا f' را رسم می‌کنیم:

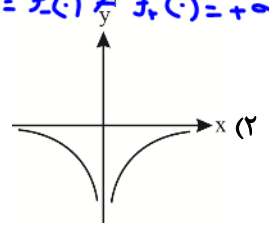


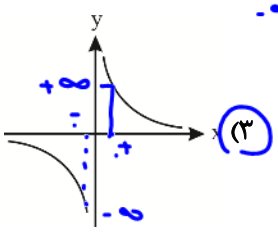
برای صعودی نزولی بودن بنگاه از چپ به راست درجهت افزایش x

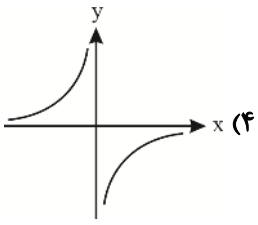
تمرین: هرگاه نمودار تابع f به صورت  باشد، نمودار f' به کدام شکل است؟

$f'_+(0) = +\infty \neq f'_-(0) = -\infty$

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

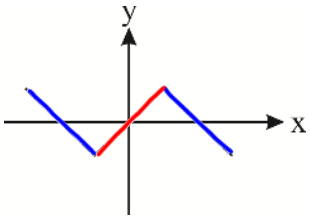
نکته: نقطه بازگشتی f روی f' مماس تام با انفصال ساده است زیرا مشتق (شیب) چپ و راست در نقطه بازگشت ∞ نابرابر است.

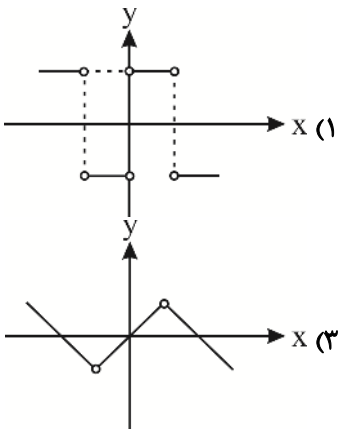
$y = \sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}} \rightarrow y' = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

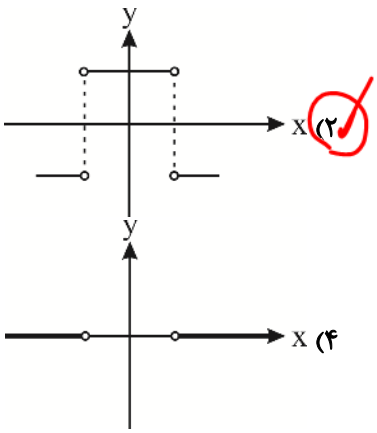
$x \to 0^+ : y' = \frac{2}{0^+} = +\infty$

$x \to 0^- : y' = \frac{2}{0^-} = -\infty$

تمرین: اگر نمودار تابع f به صورت مقابل باشد، نمودار تابع f' کدام است؟



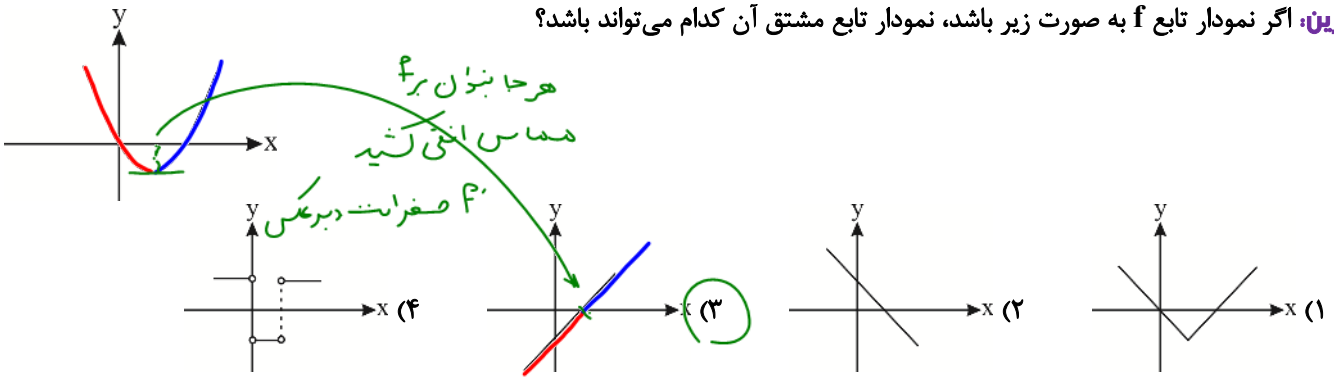
۱) 

۲) 

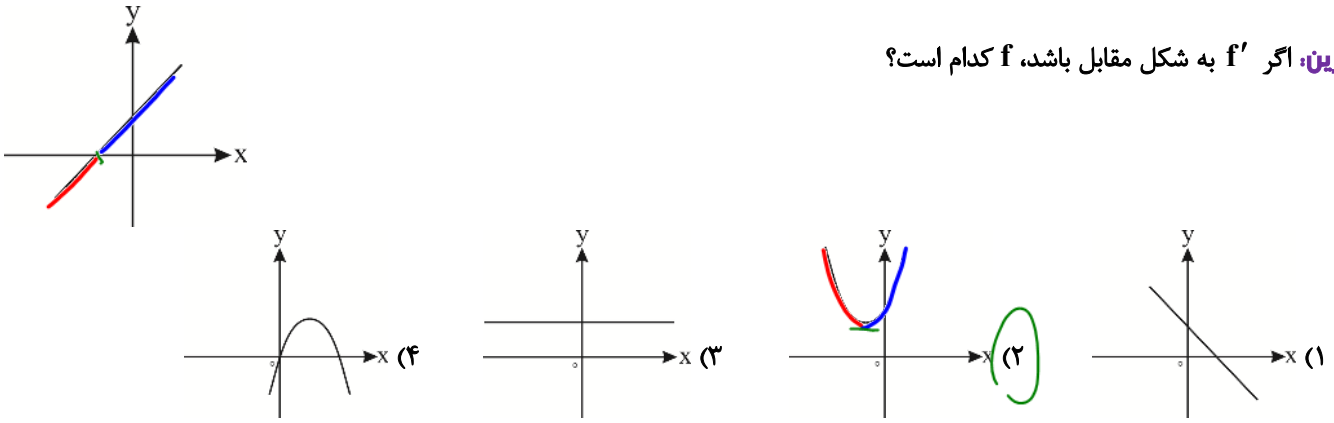
۳)

۴)

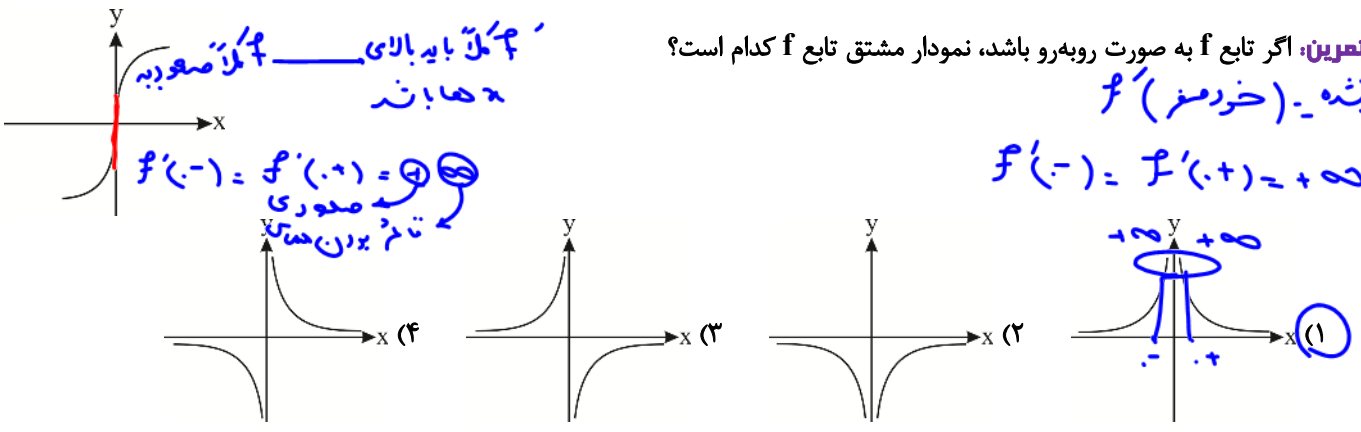
تمرین: اگر نمودار تابع f به صورت زیر باشد، نمودار تابع مشتق آن کدام می‌تواند باشد؟



تمرین: اگر f' به شکل مقابل باشد، f کدام است؟



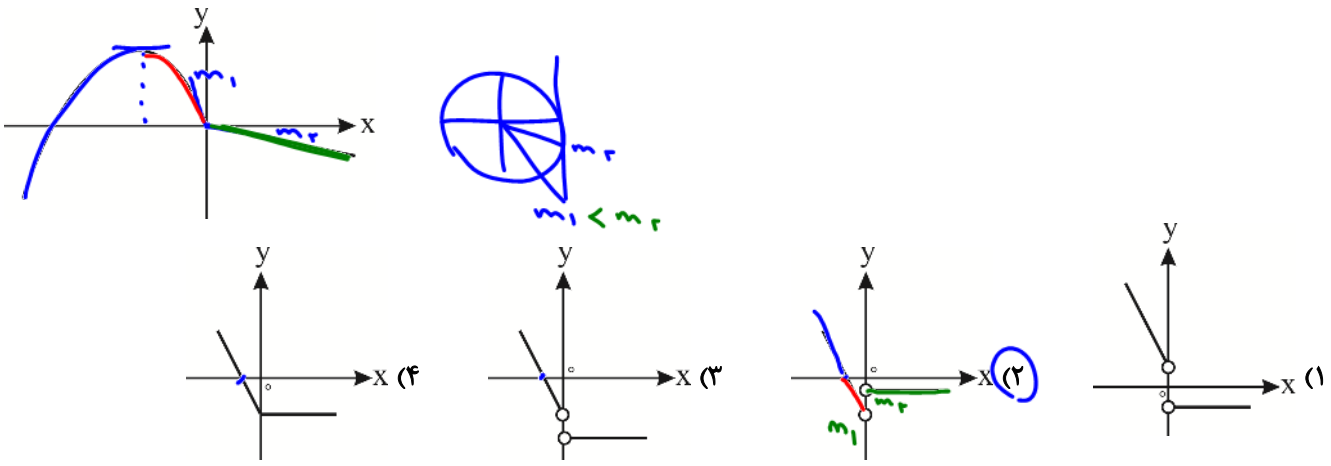
تمرین: اگر تابع f به صورت روبه‌رو باشد، نمودار مشتق تابع f کدام است؟



نکته: نقطه عطف تمام f روی تابع f' تعریف نشده بوده و در ۲ طرف آن مماس تمام با انحنای مختلف داریم.

$y = \sqrt[3]{x} \rightarrow y' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ → $x = 0$ می‌باشد $\lim_{x \to 0^+} y' = \lim_{x \to 0^-} y' = \frac{1}{0^+} = +\infty$

تمرین: نمودار تابع f در شکل روبه‌رو، تشکیل شده از بخشی از نمودار یک تابع درجه دوم و یک نیم‌خط است. نمودار f' شبیه کدام است؟



ضابطه و دامنهٔ تابع مشتق

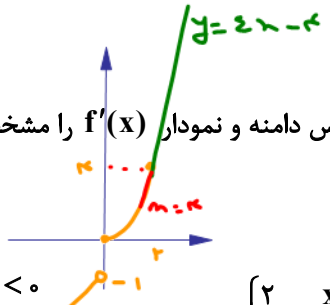
برای یافتن تابع مشتق تابع با ضابطهٔ $y = f(x)$ از تابع مشتق می‌گیریم و التبه حواسمان هست که $f'(x)$ در نقاطی تعریف می‌شود که تابع f در آن نقاط مشتق‌پذیر باشد. به عبارتی باید حواسمان به دامنهٔ مشتق باشد حالا دامنهٔ تابع مشتق اصلاً یعنی چی؟

همان‌طور که قبلاً دیدیم تابع گاهی اوقات و یا در برخی نقاط مشتق‌پذیر نیست. دامنهٔ تابع مشتق مجموعهٔ تمام نقاطی از دامنهٔ تابع f است که در آن‌ها مشتق f وجود داشته باشد. حواستان باشد دامنهٔ تابع مشتق، زیرمجموعهٔ دامنهٔ خود تابع است. پس می‌توان نوشت:

$$D_{f'} = D_f - \{\text{نقاط مشتق‌ناپذیر}\}$$

در توابع چندجمله‌ای اگر دامنه را محدود نکنیم، دامنهٔ تابع با دامنهٔ تابع مشتق برابر است و داریم $D_{f'} = \mathbb{R}$ و در توابع گویا $D_{f'} = \mathbb{R} - \{\text{ریشه‌های مخرج}\}$.

تمرین: مشتق‌پذیری تابع $f(x) = \begin{cases} 2x-1 & x<0 \\ x^2 & 0 \le x \le 2 \\ 4x-4 & x>2 \end{cases}$ را بررسی کرده و سپس دامنه و نمودار $f'(x)$ را مشخص کنید.



پاسخ:

$D_f : \mathbb{R}$

$D_{f'} : \mathbb{R} - \{0\}$ در ۰ پیوسته ولی مشتق ناپذیر

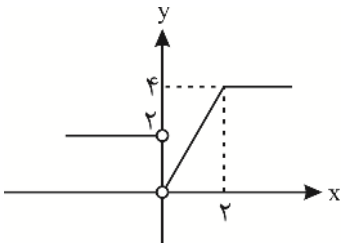
$$f(x) = \begin{cases} 2x-1 & x<0 \\ x^2 & 0 \le x \le 2 \\ 4x-4 & x>2 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2 & x<0 \\ 2x & 0<x<2 \\ 4 & x>2 \end{cases}$$

ابتدا علامت مساوی را برای $x=0$ و $x=2$ نمی‌گذاریم و بعد از بررسی وضعیت مشتق‌پذیری اگر تابع در هر کدام از آن‌ها مشتق‌پذیر باشد علامت مساوی را برایش قرار می‌دهیم.

در $x=2$ تابع پیوسته است و همچنین مشتق چپ و راست برابر است. پس $x=2$ در دامنهٔ تابع مشتق قرار دارد ولی در $x=0$ تابع ناپیوسته است بنابراین مشتق ندارد و $x=0$ در دامنهٔ تابع مشتق قرار ندارد.

$$f'(x)=\begin{cases}۲ & x<۰\\ ۲x & ۰<x\le ۲\\ ۴ & x>۲\end{cases}$$

$$D_{f'}=D_f-\{۰\}=\mathbb{R}-\{۰\}$$



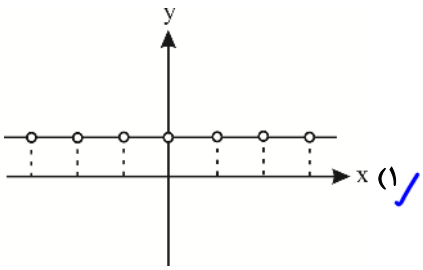
تمرین: دامنهٔ مشتق تابع $f(x)=\sqrt[۳]{x+۱}+|x-۱|$ را پیدا کنید.

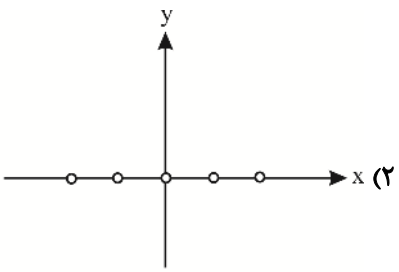
پاسخ: اولاً دامنهٔ خود تابع $\mathbb{R}$ است. ثانیاً این تابع در نقطهٔ $x=۱$ به علت آن‌که نقطـهٔ گوشـه‌ای محسـوب می‌شـود و هم‌چنـین در نقطـهٔ $x=-۱$ به علت آن‌که ریشهٔ زیر رادیکال است مشتق‌پذیر نیست، پس:

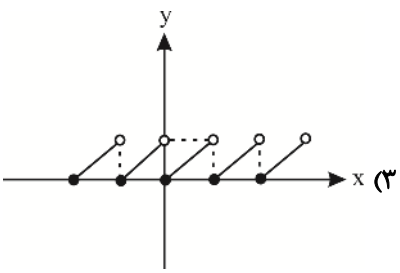
$$D_{f'}=\mathbb{R}-\{-۱,۱\}$$

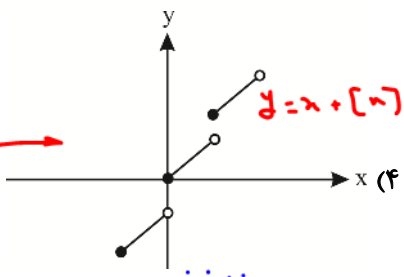
تیپ‌های متداول

تمرین: نمودار مشتق تابع $f(x)=x+[x]$ کدام است؟

۱)


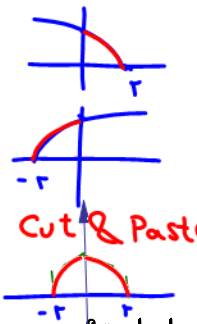
۲)


۳)


۴)


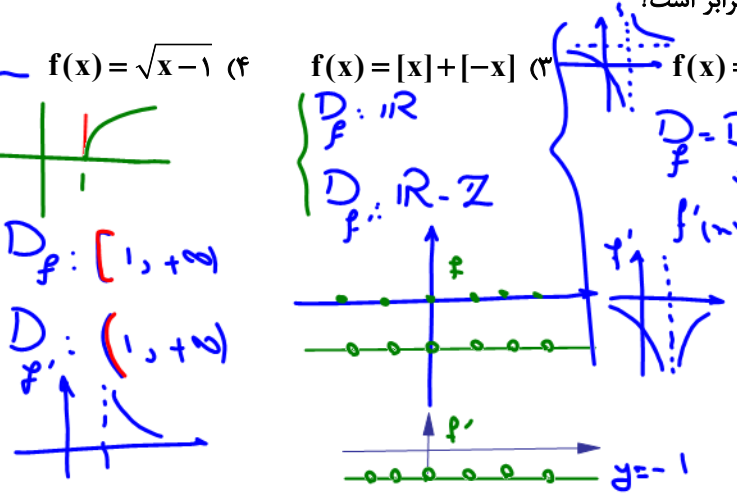
تمرین: دامنهٔ مشتق تابع $f(x)=\sqrt[4]{2-|x|}$ کدام است؟

۱) $[-2,2]$ ۲) $(-2,2)-\{0\}$ ۳) $(-2,2)$ ۴) $(-2,0)$



تمرین: در کدام تابع دامنهٔ تابع f با دامنهٔ f' برابر است؟

۱) $f(x)=|x^2-1|$ ۲) $f(x)=\frac{x}{x-1}$ ۳) $f(x)=[x]+[-x]$ ۴) $f(x)=\sqrt{x-1}$



مشتق مرتبهٔ دوم

مشتق تابع $y=f(x)$ را با نماد $y'=f'(x)$ نمایش می‌دهیم. به طریق مشابه می‌توانیم مشتق مرتبهٔ دوم تابع f را با نماد $y''=f''(x)$ نمایش بدهیم. به عنوان مثال اگر $f(x)=x^5-3x^4+x^2$ باشد، در این صورت:

$$f'(x)=5x^4-12x^3+2x \Rightarrow f''(x)=20x^3-36x^2+2$$

تمرین: در تابع $f(x)=(2x-1)^2\sqrt{x^2+4x}$ مقدار $f''(\frac{1}{2})$ را پیدا کنید.

پاسخ: اگر توجه کنید $x=\frac{1}{2}$ باعث می‌شود تا $f(x)$ صفر شود. مشتق عامل صفرشونده یادتان هست؟ این‌جا عامل $(2x-1)^2$ در $\sqrt{x^2+4x}$ ضرب شده است پس برای یافتن مشتق در نقطهٔ $x=\frac{1}{2}$ کافی است فقط از عامل صفرشونده یعنی $(2x-1)^2$ مشتق بگیریم.

فقط فرقش با مثال‌های آن قسمت در این است که این‌جا توان عامل صفرشونده ۲ است ما هم مشتق مرتبه دوم را در $x=\frac{1}{2}$ می‌خواهیم پس کافی است ۲ بار از $(2x-1)^2$ مشتق بگیریم و $x=\frac{1}{2}$ را در بقیهٔ عبارت جاگذاری کنیم:

$$(2x-1)^2 \xrightarrow{\text{مشتق}} 4(2x-1) \xrightarrow{\text{مشتق}} 8 \Rightarrow f''(\tfrac{1}{2})=8\sqrt{(\tfrac{1}{2})^2+4(\tfrac{1}{2})}=8\sqrt{\tfrac{1}{4}+2}=8\sqrt{\tfrac{9}{4}}=8(\tfrac{3}{2})=12$$

حالا اگر در همین سؤال از ما مشتق اول را در $x=\frac{1}{2}$ می‌پرسید، جواب برابر صفر می‌شد.

توجه کنید که اگر درجهٔ عبارت صفرشونده بیشتر از مرتبهٔ مشتق باشد، مشتق برابر صفر است.

یادت باشه: اگر $f(x)$ یک چندجمله‌ای از درجهٔ n باشد آن‌گاه f' از درجهٔ $n-1$ و f'' از درجهٔ $n-2$ است.

تمرین: اگر f یک چندجمله‌ای باشد و داشته باشیم $f'(x)f''(x)=x^9+mx^8$ آن‌گاه $f''(x)$ از درجهٔ چند است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: اگر فرض کنیم تابع f یک چندجمله‌ای از درجهٔ n باشد، f' از درجهٔ $n-1$ و f'' از درجهٔ $n-2$ خواهد بود. در این سؤال چون $f'f''$ از درجهٔ ۹ است، پس:

$$(n-1)+(n-2)=9 \Rightarrow 2n=12 \Rightarrow n=6$$

پس f'' از درجهٔ $n-2$ یعنی ۴ است.

راستی اگر ۲ تابع چندجمله‌ای در هم ضرب شوند، درجه‌هایشان با هم جمع می‌شود پس در این سؤال f' و f'' که در هم ضرب شدند درجه‌هایشان با هم جمع شد.

تمرین: اگر $f(x)$ یک چندجمله‌ای از درجهٔ n و $g(x)=f(f'(x)).f''(x)$ یک چندجمله‌ای از درجهٔ ۱۴ باشد، مقدار n کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

پاسخ: در درس‌نامه دیدیم که اگر f یک چندجمله‌ای از درجهٔ n باشد، f' از درجهٔ $n-1$ و f'' از درجهٔ $n-2$ است و هم‌چنین دیدیم که اگر ۲ تابع چندجمله‌ای در هم ضرب شوند درجه‌هایشان با هم جمع می‌شوند.

یک نکتهٔ دیگر هم باید بدانید که وقتی ۲ تابع چندجمله‌ای با هم ترکیب می‌شوند درجه‌هایشان در هم ضرب می‌شود مثلاً اگر $f(x)=x^2$ و $g(x)=x^5$ باشد:

$f(g(x))=(x^5)^2=x^{10}$ و درجه $=2\times5$

حالا برویم سراغ سؤال:

$$g(x)=\underset{\text{درجهٔ } n}{f}(f'(x)).\underset{\text{درجهٔ } n-2}{f''}(x)$$

(درجهٔ $n-1$ روی $f'(x)$)

$f(f'(x))$ درجه $=n(n-1)=n^2-n$

$g(x)$ درجه $=n^2-n+n-2=n^2-2=14 \Rightarrow n^2=16 \Rightarrow n=4$

تمرین: تابع درجه دوم f چنان است که $f(1)=2$ و $f'(1)=3$ مقدار $f''(1)=4$ مقدار $f(2)$ کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۰

$f(x)=ax^2+bx+c$

$f'(x)=2ax+b$

$f''(x)=2a \quad f''(1)=2a=4 \rightarrow a=2$

$f'(x)=4x+b \quad f'(1)=4+b=3 \rightarrow b=-1$

$f(x)=2x^2-x+c$

$f(1)=2-1+c=2 \rightsquigarrow c=1$

$f(x)=2x^2-x+1$

$f(2)=8-2+1=7$

تمرین: برای عدد مثبت a، تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases} x^3-x+c & x\le a \\ bx^4 & x>a \end{cases}$ در نقطهٔ $x=a$ مشتق مرتبهٔ دوم دارد. مقدار c کدام است؟

$l_1=l_2=f(a)$

$f'(a^-)=f'(a^+)$

$f''(a^-)=f''(a^+)$

۱) ۱ ۲) -1 ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{-1}{2}$

پاسخ: برای این که این تابع در نقطهٔ مرزی a مشتق دوم داشته باشد، باید اولاً مشتق اول داشته باشد:

شرط پیوستگی: $\begin{cases} f(a)=a^3-a+c \\ f(a^-)=a^3-a+c \Rightarrow ba^4=a^3-a+c \\ f(a^+)=ba^4 \end{cases}$

شرط مشتق‌پذیری: $\begin{cases} f'_-(a)=3x^2-1=3a^2-1 \\ f'_+(a)=4bx^3=4ba^3 \end{cases} \xrightarrow{f'_+(a)=f'_-(a)} 4ba^3=3a^2-1$

دوماً حواستان باشد برای آن که f در $x=a$ مشتق دوم داشته باشد باید f' در a پیوسته باشد و $f''_+(a)=f''_-(a)$ باشد:

$\begin{cases} f''_+(a)=12bx^2=12ba^2 \\ f''_-(a)=6x=6a \end{cases} \Rightarrow 12ba^2=6a \xrightarrow{\div 12a} ab=\frac{1}{2}$

حالا باید در رابطهٔ $4ba^3=3a^2-1$ به جای ab قرار دهیم: $\frac{1}{2}$

$4(ba)a^2=3a^2-1 \Rightarrow 4(\frac{1}{2})a^2=3a^2-1 \Rightarrow 2a^2=3a^2-1 \Rightarrow a^2=1 \Rightarrow a=\pm 1 \xrightarrow[a>0 \text{ است}]{\text{خودش گفته}} a=1$

چون $ab=\frac{1}{2}$ است و $a=1$ پس: $b=\frac{1}{2}$.

حالا در رابطهٔ پیوستگی a و b را جاگذاری می‌کنیم:

$ba^4=a^3-a+c \Rightarrow \frac{1}{2}(1)^4=(1)^3-1+c \Rightarrow c=\frac{1}{2}$

۱ تابع با ضابطهٔ $y = x\sqrt{x^۲}$ از نظر پیوستگی و مشتق‌پذیری در صفر چگونه است؟

۱) پیوسته و مشتق‌پذیر است.

۲) پیوسته است ولی مشتق‌پذیر نیست.

۳) نه پیوسته است و نه مشتق‌پذیر

۴) فقط از راست پیوسته و از راست مشتق‌پذیر است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۷

۲ تابع با ضابطهٔ $f(x) = x[\sin x]$ روی بازهٔ $(-\pi, \frac{\pi}{۲})$ کدام وضعیت را دارد؟

۱) پیوسته-مشتق‌پذیر

۲) ناپیوسته-مشتق‌پذیر

۳) پیوسته-مشتق‌ناپذیر

۴) ناپیوسته-مشتق‌ناپذیر

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۳

۳ تابع f با ضابطهٔ زیر، در چند نقطه ناپیوسته و در چند نقطه مشتق‌ناپذیر است؟

$$f(x) = \begin{cases} ۱ & ;x < ۰ \\ x + ۱ & ;۰ \le x < ۱ \\ ۲x + ۲ & ;۱ \le x < ۲ \\ x^۲ + ۲ & ;x \ge ۲ \end{cases}$$

۱) یک نقطه ناپیوسته و دو نقطه مشتق‌ناپذیر

۲) دو نقطه ناپیوسته و دو نقطه مشتق‌ناپذیر

۳) یک نقطه ناپیوسته و سه نقطه مشتق‌ناپذیر

۴) دو نقطه ناپیوسته و سه نقطه مشتق‌ناپذیر

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۲

۴ تابع با ضابطهٔ $f(x) = \begin{cases} (x-۱)\,|x-۱| & ;x \neq ۱ \\ a & ;x = ۱ \end{cases}$ در نقطهٔ $x = ۱$ مشتق‌پذیر است. a کدام است؟

۱) صفر

۲) ۱

۳) ۲

۴) -۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۴

۵ نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=\left[x+\frac{۱}{۳}\right]+[x]$ روی بازهٔ $(۰,۳)$ در چند نقطه، مشتق‌ناپذیر است؟

۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۵

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۶

۶ اگر $f(x)=۱-|x|$ باشد، تعداد نقاط مشتق‌ناپذیری تابع با ضابطهٔ $y=f(f(x))$ کدام است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) صفر

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۸

۷ تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\frac{۲\sqrt{x}}{x} & ;x\geq ۱\\ ax^۲+bx & ;x<۱\end{cases}$ بر روی $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است. b کدام است؟

۱) -۲
۲) -۱
۳) ۳
۴) ۵

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۹

۸ تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}ax^۳+bx & ;x<۱\\ ۲\sqrt{۴x-۳} & ;x\geq ۱\end{cases}$ بر روی مجموعه اعداد حقیقی مشتق‌پذیر است. b کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$
۲) ۱
۳) $\frac{۳}{۲}$
۴) ۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۲

۹ در تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}x-\frac{۱}{x} & ;x\geq ۱\\ x^۲+ax+b & ;x<۱\end{cases}$ مقدار $f'(۱)$ موجود است، $f(۱-\sqrt{۲})$ کدام است؟

۱) $۳-\sqrt{۲}$
۲) $۲-\sqrt{۲}$
۳) $۲-۲\sqrt{۲}$
۴) $۳-۲\sqrt{۲}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۲

۱۰ دو تابع با ضابطه‌های $f(x)=۳x+|x|$ و $g(x)=\frac{۳}{۴}x+a|x|$ مفروض‌اند. به ازای کدام مقدار a، تابع gof در مبدأ مختصات مشتق‌پذیر است؟

۱) $-\frac{۱}{۴}$
۲) $-\frac{۱}{۲}$
۳) $\frac{۱}{۲}$
۴) هیچ مقدار a

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۳

۱۱ فرض کنید $f(x)=\begin{cases}-۱ & ;x<-۱\\ x & ;-۱\le x\le ۱\\ ۱ & ;x>۱\end{cases}$ و $g(x)=۱-x^۲$. تعداد عناصر مجموعه نقاطی که gof یا fog در آن‌ها مشتق‌پذیر نیست، کدام است؟

۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۵

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۰

۱۲ به ازای کدام مقدار a، اختلاف شیب نیم‌خط‌های مماس چپ و راست بر منحنی تابع $f(x)=|۴x-۳|\sqrt{ax}$، در نقطهٔ $x=\frac{۳}{۴}$ برابر $۲\sqrt{۶}$ می‌شود؟

۱) ۲
۲) ۸
۳) $\frac{۱}{۲}$
۴) $\frac{۱}{۸}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۲

۱۳ به‌ازای هر مقدار حقیقی و ناصفر a، تابع $f(x)=\begin{cases}bx+c & ;x<a\\ \frac{۱}{x} & ;x\ge a\end{cases}$ روی $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است. مقدار ac کدام است؟

۱) -۱
۲) ۱
۳) -۲
۴) ۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۳

۱۴ فرض کنید $g(x)=ax^۲+bx+c$، $(a\neq ۰)$ و $f(x)=\begin{cases}g(x) & ;x\ge k\\ g'(x) & ;x<k\end{cases}$ باشد. اگر f یک تابع مشتق‌پذیر باشد، حداکثر مقدار k به شرط $b+c=a$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۴}$
۲) ۱
۳) ۳
۴) ۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

۱۵ تابع با ضابطهٔ $f(x)=\left[\frac{۱}{x}\right]$ در کدام بازه مشتق‌پذیر است؟

۱) $[۰,۱]$
۲) $(-۱,۰)$
۳) $[۱,+\infty)$
۴) $(-\infty,-۱)$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۱

۱۶ اگر $f(x) = |x-۲| + \sqrt{۲x}$ باشد، حاصل $\lim\limits_{\Delta x \to ۰^-} \dfrac{f(۲+\Delta x) - f(۲)}{\Delta x}$ کدام است؟

۱) -۲ ۲) $-\frac{۱}{۲}$

۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۳

۱۷ تابع با ضابطهٔ $f(x) = \begin{cases} \frac{۳}{x} - ۵ & ; x \geq ۱ \\ x^۲ + ax + b & ; x < ۱ \end{cases}$، در نقطهٔ $x = ۱$ مشتق‌پذیر می‌باشد. b کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۳ ۴) ۴

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۳

۱۸ اگر تابع با ضابطهٔ $f(x) = \begin{cases} ax^۲ + bx + ۴ & ; x \geq -۲ \\ x^۳ - x & ; x < -۲ \end{cases}$، همواره مشتق‌پذیر باشد، $f(۱)$ کدام است؟

۱) -۳ ۲) صفر

۳) ۱ ۴) ۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۷

۱۹ در تابع با ضابطهٔ $f(x) = |x|.[x]$، مقدار $f'_-(۰) - f'_+(۰)$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) صفر

۳) ۱ ۴) ۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۷

۲۰ تابع با ضابطهٔ $f(x) = \begin{cases} \sqrt{۵ - ۲x} & ; x \leq -۲ \\ -\frac{۱}{۲}x^۲ + bx + c & ; x > -۲ \end{cases}$، در $x = -۲$، مشتق‌پذیر است. مقدار c کدام است؟

۱) $-\frac{۲}{۳}$ ۲) $-\frac{۱}{۳}$

۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

۲۱ اگر $f(x) = x^۳ - [۲x^۲]x$ باشد، مقدار $f'_-(\sqrt{۲})$ و $f'_+(\sqrt{۲})$، از راست به چپ کدام است؟ (با تغییر)

۱) $f'_-(\sqrt{۲})$ وجود ندارد و $f'_+(\sqrt{۲})$ وجود ندارد.

۲) $f'_-(\sqrt{۲})$ وجود ندارد و $f'_+(\sqrt{۲}) = ۲$

۳) $f'_-(\sqrt{۲}) = ۳$ و $f'_+(\sqrt{۲})$ وجود ندارد.

۴) $f'_-(\sqrt{۲}) = ۳$ و $f'_+(\sqrt{۲}) = ۲$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۴

۲۲ اگر $f(x)=\sqrt{x^۲-[x]+|x|}$ باشد، $\lim\limits_{h\to ۰^+}\dfrac{f(۱+h)-f(۱)}{h}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۵}{۴}$

۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $\frac{۵}{۲}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۷

۲۳ در تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\dfrac{۸}{ax+b} & ;x>۲\\ -x^۳+۶x & ;x\le ۲\end{cases}$، اگر $f'(۲)$ موجود باشد، a کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۳ ۴) ۴

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

۲۴ اگر $f(x)=\dfrac{x^۲}{|۱-x|}[x]$ باشد، $\lim\limits_{h\to ۰^-}\dfrac{f(۳+h)-f(۳)}{h}$ کدام است؟ (با تغییر)

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$

۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) وجود ندارد.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۷

۲۵ فرض کنید $g(x)=ax^۲+۵x+b$ اگر $f(x)=\begin{cases}g(x) & ;x\le ۲\\ g'(x) & ;x>۲\end{cases}$ مشتق‌پذیر باشد، مقدار $a+b$، کدام است؟

۱) $-\frac{۱۵}{۲}$ ۲) $-\frac{۵}{۲}$

۳) $\frac{۵}{۲}$ ۴) $\frac{۱۵}{۲}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

۲۶ فرض کنید $f(x)=(x[x])^۳$ و $g(x)=\dfrac{۱}{\sqrt{x^۲-۱}}$، مقدار مشتق چپ تابع fog در $x=\dfrac{\sqrt{۵}}{۲}$ چندبرابر $(-۴۸\sqrt{۵})$ است؟

۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۴ ۴) ۸

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

۲۷ اگر $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & ;x\ge ۰\\ -\sqrt{-x} & ;x<۰\end{cases}$، مشتق اول و دوم تابع $f^{-۱}(x)$ در نقطهٔ $x=۰$ چگونه است؟

۱) مشتق اول دارد - مشتق دوم دارد. ۲) مشتق اول دارد - مشتق دوم ندارد.

۳) مشتق اول ندارد - مشتق دوم دارد. ۴) مشتق اول ندارد - مشتق دوم ندارد.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۵

۲۸ تعداد نقاط مشتق‌ناپذیری تابع با ضابطهٔ $f(x) = ||x| - ۱|$ بر روی $\mathbb{R}$ کدام است؟

۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۳

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۵

۲۹ اگر مماس چپ و راست تابع با ضابطهٔ $f(x) = |x|(x + a)$ در نقطهٔ گوشه‌ای (زاویه‌دار) آن عمود برهم باشند، مجموعهٔ مقادیر a کدام است؟

۱) $\{-۱\}$
۲) $\{۱\}$
۳) $\{-۱, ۱\}$
۴) $\varnothing$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۰

۳۰ مشتق چپ تابع با ضابطهٔ $f(x) = \sqrt{۱ - \sqrt{۱ - x^۲}}$ در نقطهٔ $x = ۰$ کدام است؟

۱) $-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$
۲) $-\sqrt{۲}$
۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$
۴) $\sqrt{۲}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۹

۳۱ تابع با ضابطهٔ $f(x) = \begin{cases} |x^۲ - ۲x| & ; x < ۲ \\ \frac{۱}{۲}x^۲ + ax + b & ; x \geq ۲ \end{cases}$ در نقطهٔ $x = ۲$ مشتق‌پذیر است. $a + b$ کدام است؟

۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۵

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۸

۳۲ تابع با ضابطهٔ $f(x) = \begin{cases} \frac{۱}{x - ۱} & ; x \geq ۲ \\ -x^۲ + ax + b & ; x < ۲ \end{cases}$، روی مجموعهٔ اعداد حقیقی مشتق‌پذیر است. b کدام است؟

۱) -۲
۲) -۱
۳) ۱
۴) ۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۳۳ مشتق راست تابع با ضابطهٔ $f(x) = ([x] - |x|)\sqrt[۳]{۹x}$ در نقطهٔ $x = -۳$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱۶}{۳}$
۲) -۵
۳) -۴
۴) $\frac{۷}{۳}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۳

۳۴ در تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\sqrt[۳]{(۲x+۶)^۲} & ;x>۱\\ ax+b & ;x\le ۱\end{cases}$، مقدار $f'(۱)$ موجود است. b کدام است؟

۱) $\frac{۴}{۳}$
۲) $\frac{۷}{۳}$
۳) $\frac{۸}{۳}$
۴) $\frac{۱۰}{۳}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۰

۳۵ در تابع با ضابطهٔ $f(x)=x\sqrt{x}+|x-۱|$، مقدار $f'_+(۱)+۳f'_-(۱)$ کدام است؟

۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۵

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

۳۶ تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{|x^۳-۲x|}{x}$، در چند نقطه مشتق‌ناپذیر است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۸

۳۷ تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}x^۲ & ;x\text{ گویا}\\ ۰ & ;x\text{ گنگ}\end{cases}$ در چند نقطه مشتق دارد؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) بی‌شمار
۴) هیچ نقطه

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۸

۳۸ تابع با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt{۱+|x|}$ در نقطهٔ $x=\alpha$ مشتق ندارد، مقدار $f'_+(\alpha)-f'_-(\alpha)$ کدام است؟

۱) -۱
۲) $\frac{۱}{۲}$
۳) ۱
۴) تعریف‌نشده

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۵

۳۹ تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}ax-a & ;x<۱\\ x^۲-x & ;x\ge ۱\end{cases}$ به ازای کدام مقادیر a در نقطهٔ $x=۱$ مشتق‌پذیر است؟

۱) -۱
۲) ۱
۳) هر مقدار a
۴) هیچ مقدار a

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۶

پاسخ Homework

۱ گزینه ۱

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۷

گام اول

الف) عبارت زیر رادیکال با فرجهٔ زوج همواره نامنفی است.

ب) تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x = ۰$ پیوسته است هرگاه شرط زیر برقرار باشد:

$$\lim_{x \to ۰^-} f(x) = \lim_{x \to ۰^+} f(x) = f(۰) \quad ; \quad ۰ \in D_f$$

ج) تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x = ۰$ مشتق‌پذیر است درصورتی‌که اولاً در این نقطه پیوسته باشد و ثانیاً مشتق راست و چپ تابع موجود و باهم برابر باشند یعنی $f'_-(۰) = f'_+(۰)$.

گام دوم

چون $x^۲ \geq ۰$ همواره برقرار است پس $D_f = \mathbb{R}$.

اکنون ضابطهٔ تابع را به ازای $x \geq ۰$ و $x < ۰$ تعیین می‌کنیم:

$$y = x\sqrt{x^۲} = x|x| = \begin{array}{lll} x \geq ۰ & \Rightarrow & |x| = x \Rightarrow y = x^۲ \\ x < ۰ & \Rightarrow & |x| = -x \Rightarrow y = -x^۲ \end{array}$$

باتوجه‌به قسمت ب از گام اول، شرط پیوستگی تابع را بررسی می‌کنیم:

$$\begin{array}{c} \lim\limits_{x \to ۰^+} y = \lim\limits_{x \to ۰^+} x^۲ = ۰ \\ \lim\limits_{x \to ۰^-} y = \lim\limits_{x \to ۰^-} -x^۲ = ۰ \\ y(۰) = ۰ \end{array}$$

بنابراین تابع در $x = ۰$ پیوسته است.

باتوجه‌به قسمت ج از گام اول، شرط مشتق‌پذیری تابع را بررسی می‌کنیم:

$$y' = \begin{array}{ll} ۲x & ; \ x > ۰ \\ -۲x & ; \ x < ۰ \end{array} \Rightarrow y'_-(۰) = y'_+(۰) = ۰$$

پس تابع در نقطهٔ $x = ۰$ مشتق‌پذیر است.

۲ گزینه ۳

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۳

گام اول

الف) تابع $y = [\sin x]$ به ازای xهایی که $\sin x$ مقداری صحیح شود، ناپیوسته است(دقت کنید که طبق صورت سؤال $x \in (-\pi, \frac{\pi}{۲})$ اختیار می‌شود).

ب) تابع $f(x)$ روی یک بازه پیوسته و مشتق‌پذیر است درصورتی‌که در تمام نقاط بازهٔ موردنظر پیوسته و مشتق‌پذیر باشد.

گام دوم

ابتدا بازهٔ $(-\pi, \frac{\pi}{۲})$ به زیربازه‌هایی که $[\sin x]$ روی آن‌ها مقداری ثابت است، به‌صورت مناسب تقسیم کرده و ضابطهٔ تابع $f(x)$ را در هریک از زیربازه‌ها تعیین می‌کنیم:

$$-\pi < x < -\frac{\pi}{۲} \Rightarrow -۱ < \sin x < ۰ \Rightarrow [\sin x] = -۱ \Rightarrow f(x) = -x$$

$$-\frac{\pi}{۲} \leq x < ۰ \Rightarrow -۱ \leq \sin x < ۰ \Rightarrow [\sin x] = -۱ \Rightarrow f(x) = -x$$

$$۰ \leq x < \frac{\pi}{۲} \Rightarrow ۰ \leq \sin x < ۱ \Rightarrow [\sin x] = ۰ \Rightarrow f(x) = ۰$$

بنابراین ضابطهٔ تابع $f(x)$ به‌صورت زیر می‌شود:

$$f(x) = \begin{cases} -x & ; -\pi < x < ۰ \\ ۰ & ; ۰ \leq x < \frac{\pi}{۲} \end{cases}$$

تنها نقطهٔ مرزی که باید پیوستگی و مشتق‌پذیری در آن بررسی شود، نقطهٔ $x = ۰$ است. داریم:

$$\lim_{x \to ۰^-} f(x) = \lim_{x \to ۰^-} -x = ۰$$

$$\lim_{x \to ۰^+} f(x) = f(۰) = ۰$$

پس تابع در $x = ۰$ پیوسته است. اکنون ضابطهٔ $f'(x)$ را تعیین و مشتق‌پذیری آن را در $x = ۰$ بررسی می‌کنیم:

$$f'(x) = \begin{cases} -۱ & ; -\pi < x < ۰ \\ ۰ & ; ۰ < x < \frac{\pi}{۲} \end{cases}$$

$$\left.\begin{matrix} f'_-(۰) = -۱ \\ f'_+(۰) = ۰ \end{matrix}\right\} \Rightarrow f'_-(۰) \neq f'_+(۰)$$

پس تابع در $x = ۰$ مشتق‌ناپذیر است.

بنابراین تابع $f(x)$ روی بازهٔ $(-\pi, \frac{\pi}{۲})$ پیوسته و مشتق‌ناپذیر است.

۳ گزینه ۳

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۲

گام اول

الف) تابع $f(x)$ در یک نقطه مشتق‌پذیر است درصورتی‌که اولاً در آن نقطه پیوسته باشد، ثانیاً مشتق راست و چپ تابع در آن نقطه، موجود و باهم برابر باشند.

ب) تابع $f(x)$ در یک نقطه پیوسته است هرگاه حد چپ و راست تابع موجود و برابر مقدار تابع در آن نقطه باشد.

گام دوم

تابع $f(x)$ در نقاط درونی هریک از زیربازه‌ها، پیوسته و مشتق‌پذیر است بنابراین کافی است پیوستگی و مشتق‌پذیری تابع در سه نقطهٔ مرزی $x=۰$، $x=۱$ و $x=۲$ بررسی شود.

بررسی پیوستگی و مشتق‌پذیری در نقطهٔ $x=۰$:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to ۰^-} f(x)=\lim\limits_{x\to ۰^-} ۱=۱\\ \lim\limits_{x\to ۰^+} f(x)=\lim\limits_{x\to ۰^+} x+۱=۰+۱=۱\\ f(۰)=۱\end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to ۰^-} f(x)=\lim_{x\to ۰^+} f(x)=f(۰)$$

پس تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x=۰$ پیوسته است.

$$f'(x)=\begin{cases}۰ & ;x<۰\\ ۱ & ;x>۰\end{cases}\quad\Rightarrow\quad f'_-(۰)\neq f'_+(۰)$$

پس تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x=۰$ مشتق‌پذیر نیست.

بررسی پیوستگی و مشتق‌پذیری در $x=۱$:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to ۱^-} f(x)=\lim\limits_{x\to ۱^-} x+۱=۲\\ \lim\limits_{x\to ۱^+} f(x)=\lim\limits_{x\to ۱^+} ۲x+۲=۴\\ f(x)=۲(۱)+۲=۴\end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to ۱^-} f(x)\neq\lim_{x\to ۱^+} f(x)$$

تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x=۱$ ناپیوسته و درنتیجه مشتق‌ناپذیر است.

بررسی پیوستگی و مشتق‌پذیری در $x=۲$:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to ۲^-} f(x)=\lim\limits_{x\to ۲^-} ۲x+۲=۴+۲=۶\\ \lim\limits_{x\to ۲^+} f(x)=\lim\limits_{x\to ۲^+} x^۲+۲=۴+۲=۶\\ f(۲)=۲^۲+۲=۴+۲=۶\end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to ۲^-} f(x)=\lim_{x\to ۲^+} f(x)=f(۲)$$

پس تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x=۲$ پیوسته است.

$$f'(x)=\begin{cases}۲ & ;x<۲\\ ۲x & ;x>۲\end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l}f'_-(۲)=۲\\ f'_+(۲)=۴\end{array}\right\}\Rightarrow\quad f'_-(۲)\neq f'_+(۲)$$

پس تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x=۲$ مشتق‌پذیر نیست.

بنابراین تابع $f(x)$ در یک نقطه ناپیوسته و در سه نقطه مشتق‌ناپذیر است.

۴ گزینه ۱

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۴

گام اول

تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x = ۱$ مشتق‌پذیر است درصورتی‌که:

اولاً در این نقطه پیوسته باشد یعنی:

$$\lim_{x \to ۱^+} f(x) = \lim_{x \to ۱^-} f(x) = f(۱)$$

ثانیاً مشتق راست و چپ تابع موجود و باهم برابر باشند یعنی:

$$f'_-(۱) = f'_+(۱)$$

گام دوم

ابتدا شرط پیوستگی را بررسی می‌کنیم:

$$x \to ۱^+ \Rightarrow x > ۱ \Rightarrow x - ۱ > ۰ \Rightarrow |x - ۱| = x - ۱$$

$$\Rightarrow f(x) = (x-۱)(x-۱) = (x-۱)^۲ \Rightarrow \lim_{x \to ۱^+} f(x) = ۰$$

$$x \to ۱^- \Rightarrow x < ۱ \Rightarrow x - ۱ < ۰ \Rightarrow |x - ۱| = -(x-۱)$$

$$\Rightarrow f(x) = (x-۱)(-(x-۱)) = -(x-۱)^۲ \Rightarrow \lim_{x \to ۱^-} f(x) = ۰$$

$$\lim_{x \to ۱^+} f(x) = \lim_{x \to ۱^-} f(x) = f(۱) \Rightarrow a = ۰$$

همچنین داریم:

$$f'_-(x) = ۲(x-۱) \Rightarrow f'_-(۱) = ۰$$
$$f'_+(x) = -۲(x-۱) \Rightarrow f'_+(۱) = ۰$$

بنابراین تابع به ازای $a = ۰$ در نقطهٔ $x = ۱$ مشتق‌پذیر است.

۵ گزینه ۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۶

گام اول

الف) تابع $y = [f(x)]$ به ازای مقادیری که تابع $f(x)$ برابر یک عدد صحیح می‌شود، ناپیوسته و درنتیجه مشتق‌ناپذیر است.

ب) اگر هرکدام از دو تابع $\left[x + \frac{۱}{۳}\right]$ و $[x]$ روی بازهٔ $(۰, ۳)$ مشتق‌ناپذیر شوند، کل تابع $f(x) = \left[x + \frac{۱}{۳}\right] + [x]$ مشتق‌ناپذیر خواهد شد.

گام دوم

روش اول:

بررسی می‌کنیم در چه نقاطی از بازهٔ $(۰, ۳)$، عبارت درون جزء صحیح برابر یک عدد صحیح می‌شود:

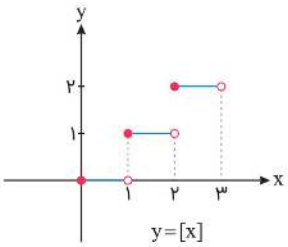
$$۱)\quad y = [x]: \quad x \in \mathbb{Z},\ x \in (۰, ۳) \ \Rightarrow\ x = ۱,\ x = ۲$$

$$۲)\quad y = \left[x + \frac{۱}{۳}\right]: \quad x + \frac{۱}{۳} \in \mathbb{Z},\ x \in (۰, ۳) \ \Rightarrow x = \frac{۲}{۳},\ x = \frac{۵}{۳},\ x = \frac{۸}{۳}$$

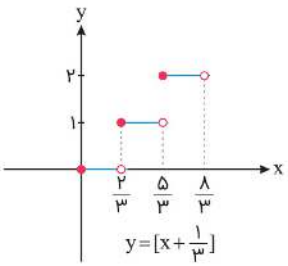
بنابراین تابع $f(x)$ درمجموع در ۵ نقطه ناپیوسته و درنتیجه مشتق‌ناپذیر دارد.

روش دوم:

با رسم نمودار توابع $y = \left[x + \frac{۱}{۳}\right]$ و $y = [x]$، نقاط ناپیوستگی تابع $f(x)$ را مشخص می‌کنیم:



نقاط ناپیوستگی: $x = ۱,\ x = ۲$



نقاط ناپیوستگی: $x = \frac{۸}{۳},\ x = \frac{۵}{۳},\ x = \frac{۲}{۳}$

بنابراین تابع $f(x)$ در ۵ نقطه ناپیوسته و درنتیجه مشتق‌ناپذیر است.

۶ گزینه ۳

برای تعیین ضابطهٔ تابع $f(f(x))$، کافی است در ضابطهٔ $f(x)$ به‌جای متغیر x تابع $f(x)$ را جایگذاری کنیم:

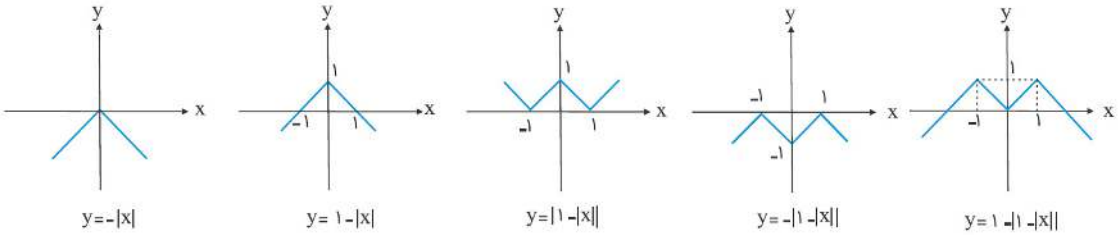
$$f(x) = ۱ - |x| \quad \Rightarrow \quad f(f(x)) = ۱ - |f(x)| = ۱ - |۱ - |x||$$

می‌دانیم تابع در ریشه‌های سادهٔ عبارت درون قدر مطلق مشتق‌ناپذیر است:

$$۱) |x| \ : \quad x = ۰$$

$$۲) |۱ - |x|| \ : \quad ۱ - |x| = ۰ \quad \Rightarrow \quad |x| = ۱ \quad \Rightarrow \quad x = \pm ۱$$

علاوه‌برآن، با رسم نمودار تابع نیز می‌توان نقاط مشتق‌ناپذیر را مشخص کرد:



بنابراین تابع $y = ۱ - |۱ - |x||$، دارای سه نقطهٔ مشتق‌ناپذیر $x = ۰, \ x = ۱, \ x = -۱$ است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۸

۷ گزینه ۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۹

گام اول

الف) تابع $f(x)$ بر روی مجموعهٔ $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است هرگاه در تمام نقاط این مجموعه مشتق‌پذیر باشد.

ب) تابع $f(x)$ در یک نقطه مشتق‌پذیر است درصورتی‌که اولاً در این نقطه پیوسته باشد، ثانیاً مشتق راست و چپ تابع در این نقطه، موجود و باهم برابر باشند.

گام دوم

تابع $f(x)$ به ازای نقاط $x > ۱$ و $x < ۱$ پیوسته و مشتق‌پذیر است. کافی است پیوستگی و مشتق‌پذیری تابع را در نقطهٔ $x = ۱$ بررسی کنیم. با بررسی این دو شرط، مقادیر a و b را می‌یابیم.

بررسی شرط پیوستگی:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to ۱^+} f(x) = \lim\limits_{x\to ۱^+} \dfrac{۲\sqrt{x}}{x} = \dfrac{۲\times ۱}{۱} = ۲ \\ \lim\limits_{x\to ۱^-} f(x) = \lim\limits_{x\to ۱^-} ax^۲ + bx = a + b \\ f(۱) = \dfrac{۲\times ۱}{۱} = ۲\end{array}\right\} \xrightarrow{\lim\limits_{x\to ۱^+} f(x) = \lim\limits_{x\to ۱^-} f(x) = f(۱)} a + b = ۲ \quad (I)$$

بررسی شرط مشتق‌پذیری:

$$f'(x) = \begin{cases} -x^{-\frac{۳}{۲}} & ; x > ۱ \\ ۲ax + b & ; x < ۱ \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'_+(۱) = -(۱)^{-\frac{۳}{۲}} = -۱ \\ f'_-(۱) = ۲a + b \end{array}\right\} \xrightarrow{f'_+(۱) = f'_-(۱)} \quad ۲a + b = -۱ \qquad (II)$$

دو رابطهٔ I و II را به‌صورت یک دستگاه دو معادله و دو مجهولی حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} a + b = ۲ \\ ۲a + b = -۱ \end{cases} \xrightarrow{(-)} -a = ۳ \Rightarrow a = -۳ \xrightarrow{(I)} -۳ + b = ۲ \Rightarrow b = ۵$$

۸ گزینه ۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۲

گام اول

الف) تابع $f(x)$ بر روی یک مجموعه مشتق‌پذیر است هرگاه در تمام نقاط این مجموعه مشتق‌پذیر باشد.

ب) تابع $f(x)$ در یک نقطه مشتق‌پذیر است درصورتی‌که اولاً در این نقطه پیوسته باشد، ثانیاً مشتق راست و چپ تابع در این نقطه، موجود و باهم برابر باشند.

گام دوم

تابع $f(x)$ به ازای نقاط $x > ۱$ و $x < ۱$ پیوسته و مشتق‌پذیر است. کافی است پیوستگی و مشتق‌پذیری تابع را در نقطهٔ $x = ۱$ بررسی کنیم.

بررسی شرط پیوستگی:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to ۱^+} f(x) = \lim\limits_{x\to ۱^+} ۲\sqrt{۴x-۳} = ۲\sqrt{۴-۳} = ۲ \\ \lim\limits_{x\to ۱^-} f(x) = \lim\limits_{x\to ۱^-} ax^۳ + bx = a + b \\ f(۱) = ۲\sqrt{۴-۳} = ۲\end{array}\right\} \xrightarrow{\lim\limits_{x\to ۱^+} f(x) = \lim\limits_{x\to ۱^-} f(x) = f(۱)} a + b = ۲ \qquad (I)$$

بررسی شرط مشتق‌پذیری:

$$f'(x) = \begin{cases} ۳ax^۲ + b & ; \quad x < ۱ \\ ۲ \times \dfrac{۴}{۲\sqrt{۴x-۳}} & ; \quad x > ۱ \end{cases}$$

تابع در نقطهٔ $x = ۱$ مشتق‌پذیر است درصورتی‌که $f'_-(۱)$ و $f'_+(۱)$ موجود و باهم برابر باشند، داریم:

$$f'_-(۱) = f'_+(۱) \quad \Rightarrow \quad ۳a + b = \frac{۴}{\sqrt{۴-۳}} \quad \Rightarrow \quad ۳a + b = ۴ \qquad (II)$$

دو معادلهٔ I و II را در یک دستگاه حل کرده و مجهول‌های a و b را می‌یابیم:

$$\begin{cases} ۳a + b = ۴ \\ a + b = ۲ \end{cases} \xrightarrow{(-)} ۲a = ۲ \quad \Rightarrow \quad a = ۱ \xrightarrow{(I)} ۱ + b = ۲ \quad \Rightarrow \quad b = ۱$$

۹ گزینه ۳

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۲

گام اول

الف) $f'(۱)$ موجود است؛ یعنی در $x = ۱$ تابع $f(x)$ هم پیوسته است و هم مشتق‌پذیر.

ب) تابع در نقطهٔ $x = ۱$ پیوسته است هرگاه:

$$\lim_{x\to ۱^+} f(x) = \lim_{x\to ۱^-} f(x) = f(۱)$$

ج) تابع در نقطهٔ $x = ۱$ مشتق‌پذیر است هرگاه:

$$f'_+(۱) = f'_-(۱)$$

گام دوم

باتوجه‌به اینکه $۱ - \sqrt{۲} < ۱$ است، برای محاسبهٔ $f(۱ - \sqrt{۲})$ باید از ضابطهٔ مربوط به xهای کوچک‌تر از ۱ استفاده کنیم.

لازم است ابتدا با بررسی شرط پیوستگی و مشتق‌پذیری، مقادیر a و b را بیابیم.

بررسی شرط پیوستگی:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to ۱^+} f(x) = \lim\limits_{x\to ۱^+} \left(x - \frac{۱}{x}\right) = ۱ - ۱ = ۰ \\ \lim\limits_{x\to ۱^-} f(x) = \lim\limits_{x\to ۱^-} x^۲ + ax + b = a + b + ۱ \\ f(۱) = ۰ \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\lim\limits_{x\to ۱^+} f(x) = \lim\limits_{x\to ۱^-} f(x) = f(۱)} a + b + ۱ = ۰ \Rightarrow a + b = -۱ \quad (I)$$

برای بررسی شرط مشتق‌پذیری، ابتدا ضابطهٔ مشتق تابع را به دست آورده و سپس مشتق چپ و راست را در نقطهٔ $x = ۱$ مساوی قرار می‌دهیم:

$$f'(x) = \begin{cases} ۱ + \frac{۱}{x^۲} & ; x > ۱ \\ ۲x + a & ; x < ۱ \end{cases}$$

$$f'_+(۱) = f'_-(۱) \quad \Rightarrow \quad ۱ + ۱ = ۲ + a \quad \Rightarrow \quad a + ۲ = ۲ \quad \Rightarrow \quad a = ۰$$

با جایگذاری در رابطهٔ (I) مقدار b را محاسبه می‌کنیم:

$$a + b = -۱ \quad \Rightarrow \quad ۰ + b = -۱ \quad \Rightarrow \quad b = -۱$$

بنابراین ضابطهٔ تابع به ازای $x < ۱$ به‌صورت زیر می‌شود:

$$x < ۱ \ : \ f(x) = x^۲ - ۱$$

$$\Rightarrow \quad f\left(۱ - \sqrt{۲}\right) = \left(۱ - \sqrt{۲}\right)^۲ - ۱ = ۱ - ۲\sqrt{۲} + ۲ - ۱ = ۲ - ۲\sqrt{۲}$$

۱۰ گزینه ۱

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۳

گام اول

الف) تابع در یک نقطه مشتق‌پذیر است؛ هرگاه مشتق چپ و راست تابع در آن نقطه موجود و باهم برابر باشد.

ب) مشتق تابع $gof(x)$ از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$y = (gof)(x) = g(f(x)) \Rightarrow y' = f'(x)g'(f(x))$$

گام دوم

دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ در نقطهٔ $x = ۰$ پیوسته‌اند؛ بنابراین مشتق چپ و راست تابع gof را در نقطهٔ $x = ۰$ به‌طور مستقیم تعیین می‌کنیم.

$$x \to ۰^+ \Rightarrow x > ۰ \Rightarrow |x| = x \Rightarrow \begin{cases} f(x) = ۴x \Rightarrow f'(x) = ۴ \\ g(x) = (\frac{۳}{۴} + a)x \Rightarrow g'(x) = \frac{۳}{۴} + a \end{cases}$$

$$\Rightarrow (gof)'_+(۰) = f'_+(۰)g'_+(f(۰)) = ۴(\frac{۳}{۴} + a) = ۳ + ۴a$$

$$x \to ۰^- \Rightarrow x < ۰ \Rightarrow |x| = -x \Rightarrow \begin{cases} f(x) = ۲x \Rightarrow f'(x) = ۲ \\ g(x) = (\frac{۳}{۴} - a)x \Rightarrow g'(x) = \frac{۳}{۴} - a \end{cases}$$

$$\Rightarrow (gof)'_-(۰) = f'_-(۰)g'_-(f(۰)) = ۲(\frac{۳}{۴} - a) = \frac{۳}{۲} - ۲a$$

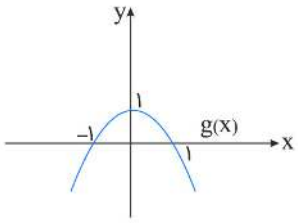
باتوجه‌به قسمت (الف) از گام اول، تابع gof در $x = ۰$ پیوسته است هرگاه داشته باشیم:

$$(gof)'_+(۰) = (gof)'_-(۰) \Rightarrow ۳ + ۴a = \frac{۳}{۲} - ۲a \Rightarrow ۶a = -\frac{۳}{۲} \Rightarrow a = -\frac{۱}{۴}$$

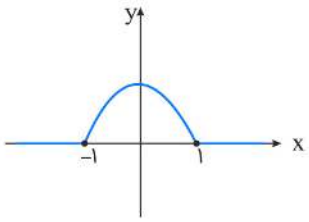
۱۱ گزینه ۳

$$f(x)=\begin{cases}-1 & ;x\le -1\\ x & ;-1\le x\le 1\\ 1 & ;x>1\end{cases}$$

$$g(x)=1-x^2$$



$$(gof)(x)=\begin{cases}g(-1)=0 & ;x\le -1\\ 1-x^2 & ;-1\le x\le 1\\ g(1)=0 & ;x>1\end{cases}$$

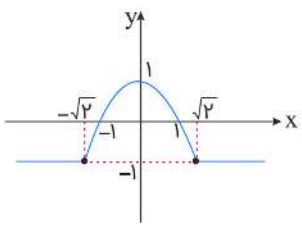


در $x=1$ و $x=-1$ نقطهٔ گوشه‌ای داریم و gof مشتق‌پذیر نیست.

$$(fog)(x)=\begin{cases}-1 & ;g(x)\le -1\\ g(x) & ;-1\le g(x)\le 1\\ 1 & ;g(x)>1\end{cases}=\begin{cases}-1 & ;x\le -\sqrt{2}\ \text{یا}\ x\ge \sqrt{2}\\ 1-x^2 & ;-\sqrt{2}\le x\le \sqrt{2}\end{cases}$$

$$g(x)\le -1\Rightarrow 1-x^2\le -1\Rightarrow x^2\ge 2\Rightarrow \begin{cases}x\ge \sqrt{2}\\ \text{یا}\\ x\le -\sqrt{2}\end{cases}$$

در $x=\pm\sqrt{2}$ نقطهٔ گوشه‌ای داریم و تابع مشتق‌پذیر نیست!



۱۲ گزینه ۳

$$y=\begin{cases}(۴x-۳)\sqrt{ax} & ;x\geq \frac{۳}{۴}\\ -(۴x-۳)\sqrt{ax} & ;x<\frac{۳}{۴}\end{cases}$$

$$\text{به دلیل جملهٔ صفرکننده} \Rightarrow \begin{cases}y'_{+}(\frac{۳}{۴})=۴\sqrt{a\times\frac{۳}{۴}}=۲\sqrt{۳a}\\ y'_{-}(\frac{۳}{۴})=-۴\sqrt{a\times\frac{۳}{۴}}=-۲\sqrt{۳a}\end{cases}$$

$$۲\sqrt{۳a}-(-۲\sqrt{۳a})=۲\sqrt{۶}\Rightarrow ۴\sqrt{۳a}=۲\sqrt{۶}\Rightarrow ۴\times ۳a=۶\Rightarrow a=\frac{۱}{۲}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۲

۱۳ گزینه ۴

لازم است تابع در $x=a$ پیوسته باشد، پس:

$$f(a)=\lim_{x\to a^{+}}f(x)=\lim_{x\to a}f(x)$$
$$\Rightarrow ba+c=\frac{۱}{a}\Rightarrow ba^{۲}+ac=۱\quad (۱)$$

در ضمن مشتقات چپ و راست باید باهم برابر باشند، یعنی:

$$b=-\frac{۱}{x^{۲}}\Rightarrow b=-\frac{۱}{a^{۲}}\Rightarrow a^{۲}b=-۱$$

در رابطهٔ (۱) جایگذاری می‌کنیم:

$$ba^{۲}+ac=۱\Rightarrow -۱+ac=۱\Rightarrow ac=۲$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۳

۱۴ گزینه ۳

$$f(x)=\begin{cases} ax^{۲}+bx+a-b & ;x\geq k \\ ۲ax+b & ;x<k \end{cases}$$

$$\lim_{x\to k} f(x)=f(k)\Rightarrow ak^{۲}+bk+a-b=۲ak+b$$

$$\Rightarrow ak^{۲}+(b-۲a)k+a-۲b=۰ \quad (۱)$$

$$f'(x)=\begin{cases} ۲ax+b & ;x\geq k \\ ۲a & ;x<k \end{cases}$$

$$f'_{+}(k)=f'_{-}(k)\Rightarrow ۲ak+b=۲a \quad (۲)$$

$$(۱),(۲): ak^{۲}+(۲a-۲ak-۲a)k+a-۲(۲a-۲ak)=۰$$

$$\Rightarrow ak^{۲}-۲ak^{۲}+a-۴a+۴ak=۰$$

$$\Rightarrow -ak^{۲}+۴ak-۳a=۰\Rightarrow -k^{۲}+۴k-۳=۰\Rightarrow k=۱,۳$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

۱۵ گزینه ۴

تابع $y = [f(x)]$ به ازای مقادیری که عبارت درون جزء صحیح برابر عدد صحیح شود، ناپیوسته و درنتیجه مشتق‌ناپذیر است؛ بنابراین تابع روی بازه‌ای مشتق‌پذیر است که خروجی آن فقط یک مقدار باشد.

بررسی گزینهٔ اول:

$$x \in [0, 1] \Rightarrow 0 \leq x \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{x} \in [1, \infty)$$

$x = 0$ ریشهٔ مخرج کسر است. به ازای $0 < x \leq 1$، $\frac{1}{x}$ بی‌شمار مقدار صحیح می‌پذیرد پس تابع در این بازه ناپیوسته و درنتیجه مشتق‌ناپذیر است.

بررسی گزینهٔ دوم:

$$x \in (-1, 0) \Rightarrow -1 < x < 0, \Rightarrow \frac{1}{x} \in (-\infty, -1)$$

در این بازه، $\frac{1}{x}$ بی‌شمار مقدار صحیح می‌پذیرد پس تابع ناپیوسته و درنتیجه مشتق‌ناپذیر است.

بررسی گزینهٔ سوم:

$$x \in [1, +\infty) \Rightarrow x \geq 1 \Rightarrow 0 < \frac{1}{x} \leq 1 \Rightarrow \left[\frac{1}{x}\right] = \begin{cases} 0 & ; 0 < \frac{1}{x} < 1 \\ 1 & ; \frac{1}{x} = 1 \end{cases}$$

تابع $f(x) = \left[\frac{1}{x}\right]$ در نقطهٔ $x = 1$ ناپیوسته است بنابراین روی بازهٔ $[1, +\infty)$ مشتق‌ناپذیر می‌شود.

بررسی گزینهٔ چهارم:

$$x \in (-\infty, -1) \Rightarrow x < -1 \Rightarrow -1 < \frac{1}{x} < 0 \Rightarrow \left[\frac{1}{x}\right] = -1$$

تابع $f(x) = \left[\frac{1}{x}\right]$ روی بازهٔ $(-\infty, -1)$، یک تابع ثابت است پس روی این بازه پیوسته و مشتق‌پذیر می‌شود.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۱

۱۶ گزینه ۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۳

گام اول

حاصل $\lim\limits_{\Delta x \to ۰^-} \dfrac{f(۲+\Delta x)-f(۲)}{\Delta x}$ بیانگر مقدار مشتق چپ تابع در نقطهٔ $x=۲$ یا همان $f'_-(۲)$ است.

گام دوم

ابتدا ضابطهٔ تابع $f(x)$ را وقتی $x<۲$ است، تعیین می‌کنیم سپس ضابطهٔ $f'(x)$ و مقدار $f'(-۲)$ را به دست می‌آوریم.

$$x<۲ \Rightarrow x-۲<۰ \Rightarrow |x-۲| = -(x-۲) = ۲-x$$

$$f(x) = ۲-x+\sqrt{۲x} \Rightarrow f'(x) = -۱+\frac{۲}{۲\sqrt{۲x}} = \frac{۱}{\sqrt{۲x}} - ۱$$

$$\lim_{\Delta x \to ۰^-} \frac{f(۲+\Delta x)-f(۲)}{\Delta x} = f'_-(۲) = \frac{۱}{\sqrt{۲\times ۲}} - ۱ = \frac{۱}{\sqrt{۴}} - ۱ = \frac{۱}{۲} - ۱ = -\frac{۱}{۲}$$

۱۷ گزینه ۲

ابتدا از ضوابط داده‌شده مشتق چپ و راست را به دست می‌آوریم:

$$x \to ۱^+ \Rightarrow f'(x) = \frac{-۳}{x^۲} \Rightarrow f'_+(۱) = -۳$$
$$x \to ۱^- \Rightarrow f'(x) = ۲x + a \Rightarrow f'_-(۱) = ۲ + a$$
$$f'_+(۱) = f'_-(۱) \Rightarrow -۳ = ۲ + a \Rightarrow a = -۵$$

چون تابع در $x=۱$ مشتق‌پذیر می‌باشد، بنابراین پیوسته نیز هست.

$$\lim_{x \to ۱^-} f(x) = f(۱) \Rightarrow ۳ - ۵ = (۱)^۲ - ۵(۱) + b \Rightarrow b = ۲$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۳

۱۸ گزینه ۲

برای اینکه تابع در یک نقطه مشتق‌پذیر باشد باید ابتدا در آن نقطه پیوسته باشد، بنابراین داریم:

$$\lim_{x\to(-۲)^+} f(x) = ۴a - ۲b + ۴$$
$$\lim_{x\to(-۲)^-} f(x) = -۸ + ۲ = -۶ \Rightarrow ۴a - ۲b = -۱۰ \Rightarrow ۲a - b = -۵$$

$$f'(x) = \begin{cases} ۲ax + b & ; x > -۲ , f'_+(-۲) = -۴a + b \\ ۳x^۲ - ۱ & ; x < -۲ , f'_-(-۲) = ۱۱ \end{cases}$$

$$\begin{cases} -۴a + b = ۱۱ \\ ۲a - b = -۵ \end{cases} \xrightarrow{\text{جمع}} -۲a = ۶ \Rightarrow a = -۳ , b = -۱$$

$$f(x) = \begin{cases} -۳x^۲ - x + ۴ & ; x \geq -۲ \\ x^۳ - x & ; x < -۲ \end{cases}$$

$$f(۱) = -۳ - ۱ + ۴ = ۰$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۷

۱۹ گزینه ۳

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۷

گام اول

الف) $f'_+(۰)$ بیانگر مشتق راست تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x = ۰$ و $f'_-(۰)$ بیانگر مشتق چپ تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x = ۰$ است.

ب) می‌دانیم: $|x| = \begin{cases} x & ; x \geq ۰ \\ -x & ; x < ۰ \end{cases}$

گام دوم

ابتدا ضابطهٔ تابع $f(x)$ را به‌ازای $x > ۰$ و $x < ۰$ تعیین و مشتق چپ و راست آن را در نقطهٔ $x = ۰$ محاسبه می‌کنیم.

$$x > ۰ : |x| = x \ , \ [x] = ۰ \Rightarrow f(x) = x \times ۰ = ۰ \Rightarrow f'_+(۰) = ۰$$
$$x < ۰ : |x| = -x \ , \ [x] = -۱ \Rightarrow f(x) = (-x)(-۱) = x \Rightarrow f'_-(۰) = ۱$$

بنابراین:

$$f'_-(۰) - f'_+(۰) = ۱ - ۰ = ۱$$

۲۰ گزینه ۳

تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x=a$ مشتق‌پذیر است، هرگاه:

۱) در نقطهٔ $x=a$ پیوسته باشد.

۲) مشتق چپ و راست در نقطهٔ $x=a$ موجود و متناهی و باهم برابر باشند.

ابتدا شرط پیوستگی را بررسی می‌کنیم:

$$\lim_{x\to(-۲)^-} f(x) = \lim_{x\to(-۲)^+} f(x) = f(-۲)$$

$$\lim_{x\to(-۲)^-} \sqrt{۵-۲x} = \sqrt{۵-۲(-۲)} = ۳$$

$$\lim_{x\to(-۲)^+} (-\frac{۱}{۲}x^۲ + bx + c) = -\frac{۱}{۲}(-۲)^۲ + b(-۲) + c = -۲ - ۲b + c$$

$$f(-۲) = \sqrt{۵-۲(-۲)} = ۳$$

$$\Rightarrow -۲ - ۲b + c = ۳ \Rightarrow -۲b + c = ۵ \quad (*)$$

اکنون شرط مشتق‌پذیری را بررسی می‌کنیم:

$$f'_-(-۲) = f'_+(-۲)$$

$$\begin{cases} f'_-(x) = \dfrac{-۲}{۲\sqrt{۵-۲x}} \Rightarrow f'_-(-۲) = \dfrac{-۲}{۲\times ۳} = -\dfrac{۱}{۳} \\ f'_+(x) = -x + b \Rightarrow f'_+(-۲) = ۲ + b \end{cases}$$

$$\Rightarrow -\frac{۱}{۳} = ۲ + b \Rightarrow b = -\frac{۷}{۳} \xrightarrow{(*)} -۲(-\frac{۷}{۳}) + c = ۵$$

$$\Rightarrow c = ۵ - \frac{۱۴}{۳} = \frac{۱}{۳}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

۲۱ گزینه ۲

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۴

گام اول

$f'_+(\sqrt{۲})$ مشتق راست تابع f در نقطه‌ای به طول $x=\sqrt{۲}$ و $f'_-(\sqrt{۲})$ مشتق چپ تابع f در نقطه‌ای به طول $x=\sqrt{۲}$ است.

گام دوم

ابتدا پیوستگی تابع را در نقطهٔ $\sqrt{۲}$ بررسی می‌کنیم:

$$f(\sqrt{۲})=(\sqrt{۲})^۳-[۲(\sqrt{۲})^۲](\sqrt{۲})=۲\sqrt{۲}-۴\sqrt{۲}=-۲\sqrt{۲}$$

$$\lim_{x\to\sqrt{۲}^+} f(x)=\lim_{x\to\sqrt{۲}^+} x^۳-[۲x^۲]x=(\sqrt{۲})^۳-\underbrace{[۲(\sqrt{۲}^+)^۲]}_{۴^+}\sqrt{۲}=۲\sqrt{۲}-۴\sqrt{۲}=-۲\sqrt{۲}$$

$$\lim_{x\to\sqrt{۲}^-} f(x)=\lim_{x\to\sqrt{۲}^-} x^۳-[۲x^۲]x=(\sqrt{۲})^۳-\underbrace{[۲(\sqrt{۲}^-)^۲]}_{۴^-}\sqrt{۲}=۲\sqrt{۲}-۳\sqrt{۲}=-\sqrt{۲}$$

بنابراین تابع از سمت چپ ناپیوسته است، درنتیجه مشتق چپ وجود ندارد. مشتق راست تابع را به دست می‌آوریم:

$$x\to\sqrt{۲}^+ \Rightarrow x>\sqrt{۲}\Rightarrow x^۲>۲\Rightarrow ۲x^۲>۴\Rightarrow [۲x^۲]=۴$$

$$\Rightarrow f(x)=x^۳-۴x\Rightarrow f'_+(x)=۳x^۲-۴$$

$$\Rightarrow f'_+(\sqrt{۲})=۳(\sqrt{۲})^۲-۴=۳(۲)-۴=۶-۴=۲$$

۲۲ گزینه ۳

$$\lim_{h\to ۰^+}\frac{f(۱+h)-f(۱)}{h}=f'_+(۱)$$

تابع در $x=۱$ پیوستگی راست دارد. مشتق تابع را در همسایگی راست بررسی می‌کنیم.

$$x>۱: f(x)=\sqrt{x^۲-۱+x}=\sqrt{x^۲+x-۱}$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{۲x+۱}{۲\sqrt{x^۲+x-۱}}\Rightarrow f'_+(۱)=\frac{۳}{۲}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۷

۲۳ گزینه ۳

تابع باید در $x = ۲$ پیوسته باشد:

$$\lim_{x\to ۲^+} f(x) = \lim_{x\to ۲^+} \frac{۸}{ax+b} = \frac{۸}{۲a+b}$$
$$\lim_{x\to ۲^-} f(x) = \lim_{x\to ۲^-} (-x^۳ + ۶x) = -۸ + ۱۲ = ۴ \Rightarrow \frac{۸}{۲a+b} = ۴ \Rightarrow ۲a+b = ۲$$

مشتق چپ و راست هم باید در این نقطه برابر باشند:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{-۸a}{(ax+b)^۲} & ; x > ۲ \\ -۳x^۲ + ۶ & ; x \le ۲ \end{cases}$$

$$\begin{cases} f'_+(۲) = \frac{-۸a}{(۲a+b)^۲} = \frac{-۸a}{۲^۲} = -۲a \\ f'_-(۲) = -۱۲ + ۶ = -۶ \end{cases} \Rightarrow -۲a = -۶ \Rightarrow a = ۳ \quad , \quad b = -۴$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

۲۴ گزینه ۴

راه‌حل اول:

$$f'_-(۳) = \lim_{h\to ۰^-} \frac{f(۳+h) - f(۳)}{h}$$

تابع f در $x = ۳$ پیوستگی چپ ندارد و درنتیجه $\lim_{h\to ۰^-} \frac{f(۳+h) - f(۳)}{h}$ وجود ندارد.

راه‌حل دوم:

بدون توجه به تعریف مشتق، حد خواسته‌شده را حساب می‌کنیم:

$$\lim_{h\to ۰^-} \frac{f(۳+h) - f(۳)}{h} = \lim_{h\to ۰^-} \frac{\frac{(۳+h)^۲}{|۱-(۳+h)|}[۳+h] - \frac{۲۷}{۲}}{h}$$
$$= \lim_{h\to ۰^-} \frac{\frac{(۳+h)^۲}{|-۲-h|} \times ۲ - \frac{۲۷}{۲}}{h} = \frac{\frac{۹}{۲} \times ۲ - \frac{۲۷}{۲}}{۰^-} = \frac{-\frac{۹}{۲}}{۰^-} = +\infty$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۷

۲۵ گزینه ۱

$$f(x)=\begin{cases} ax^{۲}+۵x+b & ;x\le ۲ \\ ۲ax+۵ & ;x>۲ \end{cases} \Rightarrow f'(x)=\begin{cases} ۲ax+۵ & ;x\le ۲ \\ ۲a & ;x>۲ \end{cases}$$

$$f'_{+}(۲)=f'_{-}(۲) \Rightarrow ۴a+۵=۲a \Rightarrow a=\frac{-۵}{۲}$$

$$f(۲)=\lim_{x\to ۲} f(x) \Rightarrow ۴a+۱۰+b=۴a+۵ \Rightarrow b=-۵$$

$$a+b=\frac{-۵}{۲}-۵=\frac{-۱۵}{۲}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

۲۶ گزینه ۴

$$g(x)=\frac{۱}{\sqrt{x^{۲}-۱}} \Rightarrow g'(x)=\frac{۰-\frac{۲x}{۲\sqrt{x^{۲}-۱}}}{x^{۲}-۱}=\frac{-x}{(x^{۲}-۱)\sqrt{x^{۲}-۱}}$$

$$g'\left(\frac{\sqrt{۵}}{۲}\right)=\frac{\frac{-\sqrt{۵}}{۲}}{\frac{۱}{۴}\times\frac{۱}{۲}}=-۴\sqrt{۵}$$

در حالتی که f' وجود داشته باشد، داریم:

$$f(x)=(x[x])^{۳} \Rightarrow f'(x)=۳(x[x])^{۲}[x]$$

برای همسایگی چپ $\frac{\sqrt{۵}}{۲}$ داریم:

$$x\to\left(\frac{\sqrt{۵}}{۲}\right)^{-} \Rightarrow g(x)=\frac{۱}{\sqrt{\frac{۵}{۴}^{-}-۱}}=\frac{۱}{\sqrt{\left(\frac{۱}{۴}\right)^{-}}}=\frac{۱}{\left(\frac{۱}{۲}\right)^{-}}=۲^{+}$$

$$y=(fog)(x) \Rightarrow y'=g'(x)f'(g(x))$$

برای همسایگی چپ $\frac{\sqrt{۵}}{۲}$ داریم:

$$y'\left(\left(\frac{\sqrt{۵}}{۲}\right)^{-}\right)=g'\left(\frac{\sqrt{۵}}{۲}\right)f'\left(g\left(\frac{\sqrt{۵}}{۲}\right)^{-}\right)=(-۴\sqrt{۵})f'(۲^{+})=(-۴\sqrt{۵})\times ۳(۴)^{۲}\times ۲=(-۴۸\sqrt{۵})(۸)$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

۲۷ گزینه ۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۵

گام اول

الف) مشتق اول تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x=0$ موجود است درصورتی‌که اولاً تابع در این نقطه پیوسته باشد، ثانیاً داشته باشیم: $f'_+(0)=f'_-(0)$.

ب) مشتق دوم تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x=0$ موجود است درصورتی‌که اولاً مشتق اول تابع در این نقطه موجود و پیوسته باشد، ثانیاً داشته باشیم: $f''_+(0)=f''_-(0)$.

گام دوم

ابتدا ضابطهٔ معکوس تابع $f(x)$ را برای $x\geq 0$ و $x<0$ تعیین کرده و در ادامه وجود و عدم وجود $(f^{-1})'(x)$ و $(f^{-1})''(x)$ در نقطهٔ $x=0$ را بررسی می‌کنیم.

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & ;x\geq 0\\ -\sqrt{-x} & ;x<0\end{cases}$$

$$x\geq 0, y\geq 0 \Rightarrow f(x)=\sqrt{x} \Rightarrow y=\sqrt{x}$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲(دو طرف مثبت)}} y^2=x\Rightarrow f^{-1}(x)=x^2 \quad ; \quad x\geq 0$$

$$x<0, y<0 \Rightarrow f(x)=-\sqrt{-x}\Rightarrow y=-\sqrt{-x}$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲(دو طرف منفی)}} y^2=-x\Rightarrow x=-y^2\Rightarrow f^{-1}(x)=-x^2 \quad ; \quad x<0$$

پس ضابطهٔ تابع $f^{-1}(x)$ به‌صورت زیر می‌شود:

$$f^{-1}(x)=\begin{cases}x^2 & ;x\geq 0\\ -x^2 & ;x<0\end{cases}$$

تابع $f^{-1}(x)$ در $x=0$ پیوسته است زیرا:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^-} f(x)=f(0)=0$$

همچنین داریم:

$$(f^{-1})'(x)=\begin{cases}2x & ;x>0\\ -2x & ;x<0\end{cases} \Rightarrow (f^{-1})'_+(0)=(f^{-1})'_-(0)=0$$

پس تابع $f^{-1}(x)$ در $x=0$ مشتق اول دارد و مشتق اول در این نقطه پیوسته است.

$$(f^{-1})''(x)=\begin{cases}2 & ;x>0\\ -2 & ;x<0\end{cases}$$

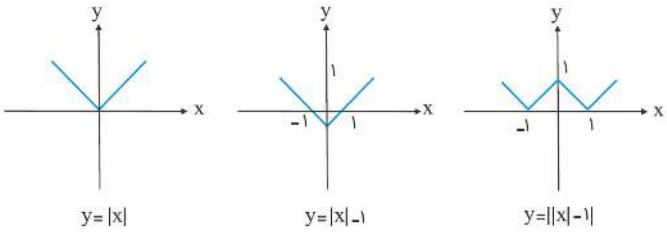
$$\left.\begin{array}{l}(f^{-1})''_+(0)=2\\ (f^{-1})''_-(0)=-2\end{array}\right\} \Rightarrow (f^{-1})''_+(0)\neq(f^{-1})''_-(0)$$

بنابراین تابع $f^{-1}(x)$ در $x = 0$ مشتق دوم ندارد.

۲۸ **گزینه ۴**

روش اول: رسم نمودار تابع

یکی از راه‌های تشخیص نقاط مشتق‌ناپذیر، رسم نمودار توابع است. دقت کنید که نقاط زاویه‌دار، بازگشتی، دارای مماس قائم و ... در نمودار تابع، نقاط مشتق‌ناپذیر تابع محسوب می‌شوند.



باتوجه‌به نمودار، سه نقطه به طول‌های $x = 1, x = 0, x = -1$، نقاط زاویه‌دار بوده و تابع در این نقاط مشتق‌ناپذیر است.

روش دوم: تعیین ریشه‌های ساده عبارت‌های داخل قدر مطلق

تابع در ریشه‌های سادهٔ عبارت داخل قدر مطلق نیز مشتق‌ناپذیر است. این تابع دو عبارت قدر مطلقی دارد؛ یکی $|x|$ و دیگری $||x| - 1|$. ریشه‌ها را تعیین می‌کنیم:

$$۱) |x| \ : \quad x = 0$$

$$۲) ||x| - 1| \ : \quad |x| - 1 = 0 \ \Rightarrow \ |x| = 1 \ \Rightarrow \ x = \pm 1$$

تابع در سه نقطهٔ $x = 1, x = 0, x = -1$ مشتق‌ناپذیر است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۵

۲۹ گزینه ۳

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۰

گام اول

الف) نکته: در توابع دارای عبارت قدر مطلقی، ریشهٔ سادهٔ عبارت درون قدر مطلق نقطهٔ گوشه‌ای (زاویه‌دار) یا مشتق‌ناپذیر تابع است؛ بنابراین در تابع $f(x) = |x|(x+a)$ نقطهٔ گوشه‌ای (زاویه‌دار) تابع، نقطهٔ $x = ۰$ است.

ب) شیب مماس راست در نقطهٔ $x = ۰$ برابر $f'_+(۰)$ و شیب مماس چپ در نقطهٔ $x = ۰$ برابر $f'_-(۰)$ است.

ج) مماس چپ و راست در نقطهٔ $x = ۰$ بر هم عمودند پس داریم: $f'_-(۰) \cdot f'_+(۰) = -۱$

گام دوم

$$x > ۰ : |x| = x \Rightarrow f(x) = x(x+a) = x^۲ + ax$$

$$\Rightarrow f'(x) = ۲x + a \Rightarrow f'_+(۰) = ۲(۰) + a = ۰ + a = a$$

$$x < ۰ : |x| = -x \Rightarrow f(x) = (-x)(x+a) = -x^۲ - ax$$

$$\Rightarrow f'(x) = -۲x - a \Rightarrow f'_-(۰) = -۲(۰) - a = ۰ - a = -a$$

$$f'_+(۰) f'_-(۰) = -۱ \Rightarrow a(-a) = -۱ \Rightarrow -a^۲ = -۱ \Rightarrow a^۲ = ۱ \Rightarrow a = \pm ۱$$

۳۰ گزینه ۱

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۹

گام اول

الف) عبارت زیر رادیکال با فرجهٔ زوج، باید همواره نامنفی باشد.

ب) پیوستگی تابع در یک نقطه، شرط لازم برای مشتق‌پذیری در آن نقطه است.

ج) مشتق چپ تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x = ۰$ از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$f'_-(۰) = \lim_{x \to ۰^-} \frac{f(x) - f(۰)}{x - ۰}$$

گام دوم

ابتدا دامنهٔ تعریف تابع را مشخص می‌کنیم:

$$۱ - x^۲ \geq ۰ \Rightarrow x^۲ \leq ۱ \Rightarrow -۱ \leq x \leq ۱ \Rightarrow D_f = [-۱, ۱]$$

تابع $f(x)$ در $x = ۰$ پیوسته است (باتوجه‌به اینکه گزینهٔ "وجود ندارد" نداریم، پس تابع حتماً در نقطهٔ $x = ۰$ پیوسته است و برای یافتن مشتق چپ در این نقطه، نیازی به بررسی پیوستگی نیست). اکنون مشتق چپ تابع را محاسبه می‌کنیم:

$$f'_-(۰) = \lim_{x \to ۰^-} \frac{f(x) - f(۰)}{x - ۰} = \lim_{x \to ۰^-} \frac{\sqrt{۱ - \sqrt{۱ - x^۲}}}{x} = \frac{۰}{۰}$$

برای رفع ابهام، صورت و مخرج کسر را در مزدوج عبارت زیر رادیکال صورت ضرب می‌کنیم تا عامل صفرکنندهٔ صورت و مخرج حذف شود:

$$f'_-(۰) = \lim_{x \to ۰^-} \frac{\sqrt{۱ - \sqrt{۱ - x^۲}}}{x} \times \frac{\sqrt{۱ + \sqrt{۱ - x^۲}}}{\sqrt{۱ + \sqrt{۱ - x^۲}}} = \lim_{x \to ۰^-} \frac{\sqrt{۱ - \left(\sqrt{۱ - x^۲}\right)^۲}}{x\sqrt{۱ + \sqrt{۱ - x^۲}}}$$

$$= \lim_{x \to ۰^-} \frac{\sqrt{۱ - ۱ + x^۲}}{x\sqrt{۱ + \sqrt{۱ - x^۲}}} = \lim_{x \to ۰^-} \frac{\sqrt{x^۲}}{x\sqrt{۱ + \sqrt{۱ - x^۲}}} = \lim_{x \to ۰^-} \frac{|x|}{x\sqrt{۱ + \sqrt{۱ - x^۲}}}$$

چون داریم:

$$x \to ۰^- \quad \Rightarrow \quad x < ۰ \quad \Rightarrow \quad |x| = -x$$

بنابراین:

$$f'_-(۰) = \lim_{x \to ۰^-} \frac{-x}{x\sqrt{۱ + \sqrt{۱ - x^۲}}} = \lim_{x \to ۰^-} \frac{-۱}{\sqrt{۱ + \sqrt{۱ - x^۲}}} = \frac{-۱}{\sqrt{۱ + \sqrt{۱ - ۰}}} = \frac{-۱}{\sqrt{۲}} = -\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

۳۱ گزینه ۱

تابع f در $x=۲$ مشتق‌پذیر است، پس بایستی در $x=۲$ پیوسته باشد و همچنین مشتق چپ و راست تابع در $x=۲$ برابر باشند.

$$f(۲)=\lim_{x\to ۲^+} f(x)=\lim_{x\to ۲^-} f(x)$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۲}\times ۴+۲a+b=|۴-۴| \Rightarrow \frac{۱}{۲}\times ۴+۲a+b=۰$$

$$\Rightarrow ۲a+b=-۲ \quad (۱)$$

تابع f را در همسایگی چپ $x=۲$ (به دلیل وجود قدرمطلق) تعیین علامت می‌کنیم:

$$x^۲-۲x=۰ \Rightarrow x=۰,۲$$

x		۰		۲	
$x^۲-۲x$	$+$	۰	$-$	۰	$+$

بنابراین باتوجه‌به جدول تعیین علامت اگر $۰<x<۲$ باشد، $|x^۲-۲x|=۲x-x^۲$ است.

$$f(x)=\begin{cases} x^۲-۲x & ;x<۰ \\ -x^۲+۲x & ;۰\le x<۲ \\ \frac{۱}{۲}x^۲+ax+b & ;x\ge ۲ \end{cases} \Rightarrow f'(x)=\begin{cases} ۲x-۲ & ;x<۰ \\ -۲x+۲ & ;۰<x<۲ \\ x+a & ;x\ge ۲ \end{cases}$$

$$f'_+(۲)=f'_-(۲) \Rightarrow ۲+a=-۲(۲)+۲ \Rightarrow a=-۴$$

$$(۱) \xrightarrow{a=-۴} -۸+b=-۲ \Rightarrow b=۶$$

$$\Rightarrow a+b=۲$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۸

۳۲ گزینه ۲

زمانی تابع f روی $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است که در $x = ۲$ مشتق داشته باشد.
بنابراین باید f در $x = ۲$ پیوسته باشد و مشتق چپ و راست آن برابر باشد.

$$f(۲) = \lim_{x\to ۲^-} f(x) = \lim_{x\to ۲^+} f(x) \Rightarrow -۴ + ۲a + b = ۱ \Rightarrow ۲a + b = ۵ \quad (۱)$$

$$f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{۱}{(x-۱)^۲} & ; x \geq ۲ \\ -۲x + a & ; x < ۲ \end{cases}$$

$$f'_-(۲) = f'_+(۲) \Rightarrow -۴ + a = -۱ \Rightarrow a = ۳$$

$$(۱) : ۶ + b = ۵ \Rightarrow b = -۱$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۳۳ گزینه ۲

باتوجه‌به اینکه ضابطهٔ تابع شامل جزء صحیح است، وقتی $x \to (-۳)^+$ داریم:

$$x \to (-۳)^+ \Rightarrow x > -۳ \Rightarrow [x] = -۳, |x| = -x$$

$$\Rightarrow f(x) = (-۳ + x)\sqrt[۳]{۹x} = (x - ۳)\sqrt[۳]{۹x}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \sqrt[۳]{۹x} + \frac{۹}{۳\sqrt[۳]{۸۱x^۲}}(x - ۳)$$

$$\Rightarrow f'_+(-۳) = \sqrt[۳]{-۲۷} + \frac{۹}{۳\sqrt[۳]{۷۲۹}}(-۶) = -۳ + \frac{۹}{۳ \times ۹}(-۶) = -۳ - ۲ = -۵$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۳

۳۴ گزینه ۴

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۰

گام اول

مشتق تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x = ۱$ موجود است هرگاه:

اولاً تابع در این نقطه پیوسته باشد.

ثانیاً مشتق چپ و راست تابع در این نقطه موجود و برابر باشند.

گام دوم

بررسی شرط پیوستگی در نقطهٔ $x = ۱$:

$$\lim_{x\to ۱^+} f(x) = \lim_{x\to ۱^-} f(x) = f(۱) \Rightarrow \sqrt[۳]{(۲+۶)^۲} = a+b \Rightarrow \sqrt[۳]{۸^۲} = a+b \Rightarrow a+b = ۴ \quad (I)$$

بررسی شرط مشتق‌پذیری در نقطهٔ $x = ۱$:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[۳]{(۲x+۶)^۲} & ;x>۱ \\ ax+b & ;x\le ۱ \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} (۲x+۶)^{\frac{۲}{۳}} & ;x>۱ \\ ax+b & ;x\le ۱ \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} ۲\times\frac{۲}{۳}\times(۲x+۶)^{-\frac{۱}{۳}} & ;x>۱ \\ a & ;x<۱ \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} \frac{۴}{۳}\times\frac{۱}{\sqrt[۳]{۲x+۶}} & ;x>۱ \\ a & ;x<۱ \end{cases}$$

$$f'_+(۱) = f'_-(۱) \Rightarrow \frac{۴}{۳}\times\frac{۱}{\sqrt[۳]{۲+۶}} = a \Rightarrow a = \frac{۴}{۳}\times\frac{۱}{۲} = \frac{۲}{۳}$$

با جایگذاری در رابطهٔ (I) داریم:

$$a+b=۴ \xrightarrow{a=\frac{۲}{۳}} \frac{۲}{۳}+b=۴ \Rightarrow b = ۴-\frac{۲}{۳} = \frac{۱۰}{۳}$$

۳۵ گزینه ۳

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

گام اول

$f'_+(1)$ یعنی مشتق راست تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x=1$ و $f'_-(1)$ یعنی مشتق چپ تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x=1$.

گام دوم

برای تعیین مشتق راست و چپ تابع در نقطهٔ $x=1$، ابتدا باید تکلیف قدر مطلق را روشن کنیم. ضابطهٔ تابع و مشتق آن را به ازای $x>1$ و $x<1$ تعیین می‌کنیم.

$$\begin{cases} x>1 \Rightarrow x-1>0 \Rightarrow |x-1|=x-1 \\ x<1 \Rightarrow x-1<0 \Rightarrow |x-1|=-x+1 \end{cases}$$

می‌دانیم $x\sqrt{x}=x^{\frac{3}{2}}$ پس:

$$\Rightarrow f(x)=\begin{cases} x^{\frac{3}{2}}+x-1 & ;x>1 \\ x^{\frac{3}{2}}-x+1 & ;x<1 \end{cases} \Rightarrow f'(x)=\begin{cases} \frac{3}{2}\sqrt{x}+1 & ;x>1 \\ \frac{3}{2}\sqrt{x}-1 & ;x<1 \end{cases}$$

با جایگذاری $x=1$ در ضابطه‌های بالا و پایین تابع $f'(x)$، مقدار $f'_+(1)$ و $f'_-(1)$ را به دست می‌آوریم:

$$f'_+(1)=\frac{3}{2}\sqrt{1}+1=\frac{3}{2}+1=\frac{5}{2}$$

$$f'_-(1)=\frac{3}{2}\sqrt{1}-1=\frac{3}{2}-1=\frac{1}{2}$$

بنابراین:

$$f'_+(1)+3f'_-(1)=\frac{5}{2}+\frac{3}{2}=\frac{8}{2}=4$$

۳۶ گزینه ۳

$$f(x)=\frac{|x|\,|x^2-2|}{x}$$

دامنهٔ تابع f، $\mathbb{R}-\{0\}$ است. تابع f در ریشه‌های سادهٔ داخل قدرمطلق یعنی $\pm\sqrt{2}$ مشتق ندارد. همچنین در ریشهٔ مخرج یعنی $x=0$ مشتق‌پذیر نیست.

دقت کنید که تعداد نقاط مشتق‌ناپذیری روی دامنه دو نقطه و روی $\mathbb{R}$ سه نقطه است. منظور سؤال بررسی مشتق‌ناپذیری روی $\mathbb{R}$ است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۸

۳۷ گزینه ۱

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۸

گام اول

الف) تابع $f(x)$ در یک نقطه مشتق‌پذیر است درصورتی‌که اولاً در آن نقطه پیوسته باشد، ثانیاً مشتق راست و چپ تابع در آن نقطه، موجود و باهم برابر باشند.

ب) تابع دو ضابطه‌ای که روی اعداد گنگ و گویا تعریف‌شده، در نقاطی پیوسته است که ضابطه‌ها باهم برابر باشند و در نقاط پیوسته‌ای که ضابطهٔ مشتق باهم برابرند، مشتق‌پذیر است.

گام دوم

برای یافتن نقاط مشتق‌پذیر تابع $f(x)$ ابتدا دو ضابطهٔ آن را مساوی قرار می‌دهیم تا نقاط پیوسته را به دست آوریم:

$$f(x)=\begin{cases} x^{۲} & ;\ x\text{ گویا} \\ ۰ & ;\ x\text{ گنگ} \end{cases} \Rightarrow x^{۲}=۰ \Rightarrow x=۰$$

تابع $f(x)$ فقط در نقطهٔ $x=۰$ پیوسته است. بررسی می‌کنیم که آیا در این نقطه مشتق‌پذیر نیز هست یا نه!

$$f'(x)=\begin{cases} ۲x & ;\ x\text{ گویا} \\ ۰ & ;\ x\text{ گنگ} \end{cases} \Rightarrow ۲x=۰ \Rightarrow x=۰$$

بنابراین تابع $f(x)$ فقط در نقطهٔ $x=۰$ مشتق دارد.

۳۸ گزینه ۳

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۵

گام اول

توابع شامل قدر مطلق در ریشه‌های سادهٔ عبارت درون قدر مطلق مشتق ندارند؛ بنابراین تابع $f(x)=\sqrt{1+|x|}$ در $x=0$ مشتق ندارد پس $\alpha=0$ است.

گام دوم

به ازای $x>0$ و $x<0$ ضابطهٔ مشتق تابع $f(x)$ و مقادیر $f'_+(0)$ و $f'_-(0)$ را تعیین می‌کنیم سپس حاصل عبارت $f'_+(0)-f'_-(0)$ را به دست می‌آوریم:

$$x>0 \;:\; |x|=x \;\Rightarrow\; f(x)=\sqrt{1+x} \;\Rightarrow\; f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{1+x}}$$

$$\Rightarrow\; f'_+(0)=\frac{1}{2\sqrt{1+0}}=\frac{1}{2\times 1}=\frac{1}{2}$$

$$x<0 \;:\; |x|=-x \;\Rightarrow\; f(x)=\sqrt{1-x} \;\Rightarrow\; f'(x)=\frac{-1}{2\sqrt{1-x}}$$

$$\Rightarrow\; f'_-(0)=\frac{-1}{2\sqrt{1-0}}=\frac{-1}{2\times 1}=-\frac{1}{2}$$

بنابراین:

$$f'_+(0)-f'_-(0)=\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$

۳۹ گزینه ۲

تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x=1$ مشتق‌پذیر است اگر اولاً در این نقطه پیوسته باشد $\left(\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=f(1)\right)$، ثانیاً مشتق چپ و راست تابع در نقطهٔ $x=1$ موجود و باهم برابر باشند.

بررسی پیوستگی در نقطهٔ $x=1$:

$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^+}f(x)=f(1)\Rightarrow a-a=1-1\Rightarrow 0=0$$

به یک رابطهٔ همواره درست رسیدیم، پس تابع در $x=1$ پیوسته است.

بررسی مشتق‌پذیری در نقطهٔ $x=1$:

$$f(x)=\begin{cases}ax-a & ;x<1\\ x^2-x & ;x\geq 1\end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}a & ;x<1\\ 2x-1 & ;x>1\end{cases}$$

$$f'_-(1)=f'_+(1)\Rightarrow a=2-1=1\Rightarrow a=1$$

بنابراین تابع $f(x)$ تنها به ازای $a=1$ در نقطهٔ $x=1$ مشتق‌پذیر است.

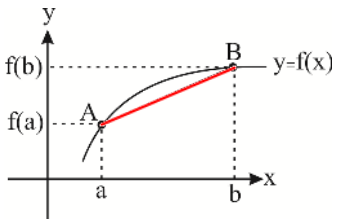
کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۶

آهنگ تغییر

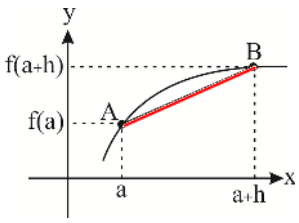
با مفهوم سرعت متوسط در فیزیک آشنا شده‌اید و دیدید که از رابطهٔ $\bar{V}=\frac{\Delta x}{\Delta t}$ برای پیداکردن سرعت متوسط استفاده می‌کنیم و هم‌چنین برای یافتن سرعت لحظه‌ای کافی است در لحظهٔ t مقدار مشتق تابع (مکان ـ زمان) را حساب کنیم. در درس ریاضی آهنگ متوسط و آهنگ تغییر لحظه‌ای را برای تابع f تعریف می‌کنیم. به طور کلی آهنگ متوسط تابع $y=f(x)$ در فاصلهٔ $[a,b]$ برابر است با:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

یعنی اگر دو نقطهٔ $A(a,f(a))$ و $B(b,f(b))$ روی تابع $y=f(x)$ باشند، آن‌گاه شیب خط قاطع A و B برابر آهنگ متوسط تابع f در بازهٔ $[a,b]$ است.



هم‌چنین می‌توان این تعریف را این‌گونه بیان کرد:



$$\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

تمرین: آهنگ متوسط تغییر تابع با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt{x^2+144}$ نسبت به متغیر x روی بازه‌ای از $x=5$ تا $x=9$ کدام است؟ (سراسری تجربی)

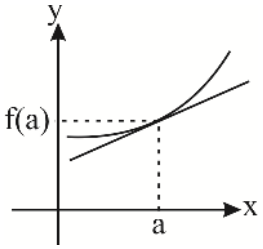
۱) ۰/۴ ۲) ۰/۵ ۳) ۰/۶ ۴) ۰/۷

پاسخ:

$$\text{آهنگ متوسط تغییر}=\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{f(9)-f(5)}{9-5}=\frac{\sqrt{81+144}-\sqrt{25+144}}{4}=\frac{\sqrt{225}-\sqrt{169}}{4}=\frac{15-13}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}=0/5$$

آهنگ لحظه‌ای (آنی)

آهنگ لحظه‌ای تابع $y=f(x)$ در نقطهٔ $x=a$ برابر $f'(a)$ است. به عبارت دیگر آهنگ لحظه‌ای تابع $y=f(x)$ در $x=a$ برابر شیب خط مماس بر $f(x)$ در نقطهٔ $x=a$ است.

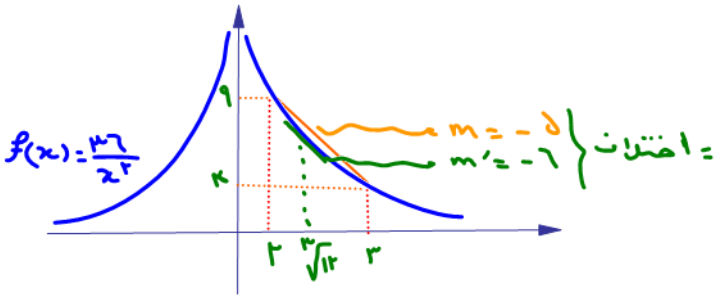


از نظر هندسی شیب خط مماس بر تابع f در $x=a$ برابر آهنگ لحظه‌ای تغییر در $x=a$ می‌باشد.

تمرین: در تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{۳۶}{x^۲}$، آهنگ متوسط تابع از $x_۱=۲$ تا $x_۲=۳$ چه‌قدر از آهنگ لحظه‌ای آن در $x=\sqrt[۳]{۱۲}$ بیشتر است؟ (تجربی خارج ۹۰)

۱) ۱ ۲) ۱/۵ ۳) ۲ ۴) ۲/۵

پاسخ: آهنگ متوسط تغییر تابع $y=f(x)$ از $x=a$ تا $x=b$ برابر $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ و آهنگ لحظه‌ای همان مقدار مشتق تابع است.



$$\text{آهنگ متوسط}=\frac{f(۳)-f(۲)}{۳-۲}=\frac{\frac{۳۶}{۹}-\frac{۳۶}{۴}}{۳-۲}=\frac{۴-۹}{۱}=-۵$$

$$f(x)=\frac{۳۶}{x^۲}=۳۶x^{-۲} \Rightarrow f'(x)=-۷۲x^{-۳}=\frac{-۷۲}{x^۳}$$

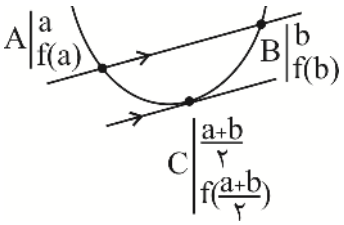
$$\text{آهنگ لحظه‌ای}=f'(\sqrt[۳]{۱۲})=\frac{-۷۲}{(\sqrt[۳]{۱۲})^۳}=\frac{-۷۲}{۱۲}=-۶$$

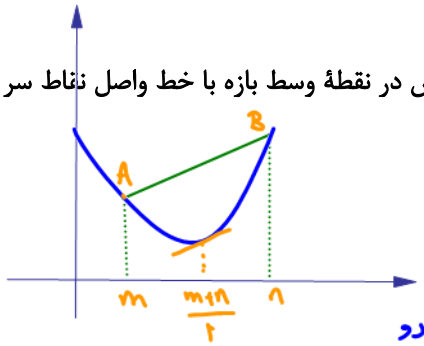
بنابراین آهنگ متوسط یک واحد از آهنگ لحظه‌ای بیشتر است.

یادت باشه: در تابع درجه دوم $f(x)=ax^۲+bx+c$ آهنگ متوسط در هر بازه، با آهنگ لحظه‌ای در وسط بازه برابر است یعنی:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\frac{a+b}{۲})$$

مفهوم: در تابع درجه دوم خط مماس در نقطهٔ وسط بازه با خط واصل نقاط سر و ته بازه موازی است.





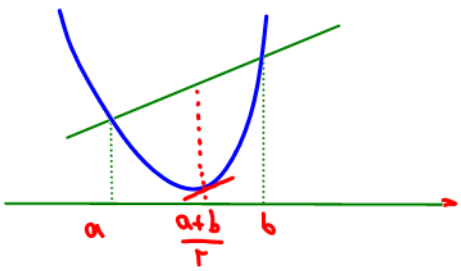
تمرین: در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=۳x^۲+۴x-۲$، تفاضل آهنگ لحظه‌ای در نقطه‌ی $a+\frac{h}{۲}$ از آهنگ متوسط تغییر تابع وقتی متغیر x از عدد a به عدد $a+h$ تغییر کند، کدام است؟

۱) h ۲) $۲h$ ۳) $۳h$ ۴) صفر

پاسخ: گزینه‌ی «۴» ــ در این سؤال $f(x)=۳x^۲+۴x-۲$ یک تابع درجه‌ی دوم و بازه‌ی $[a,a+h]$ است ضمناً وسط بازه $a+\frac{h}{۲}=\frac{a+a+h}{۲}$ است پس طبق درس‌نامه:

$$f'(a+\frac{h}{۲})=\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \Rightarrow f'(a+\frac{h}{۲})-\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=۰$$

نکته: در تابع درجه دو یا سهمی در یک بازه همواره می‌توان یک و فقط یک در وسط بازه به موازات خط واصل ابتدا و انتهای بازه یافت.



تمرین: در تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{x}$، اختلاف آهنگ تغییر لحظه‌ای در $x=2$، از آهنگ تغییر متوسط در بازهٔ $[1,4]$ کدام است؟ (تجربی ۹۸)

۱) ۰/۲۵ ۲) ۰/۵ ۳) ۰/۴۵ ۴) ۰/۷۵

$f'(x)=x+\frac{1}{x^2} \xrightarrow{x=2} 2+\frac{1}{4}=2,25$

$\frac{f(4)-f(1)}{4-1}=\frac{(8-\frac{1}{4})-(\frac{1}{2}-1)}{3}=\frac{9-\frac{3}{4}}{3}=3-\frac{1}{4}=2,75$

اختلاف = ۰/۵

تمرین: آهنگ متوسط تغییر تابع $y=\sqrt{21-x^2+4x}$ در بازهٔ $[5,6]$، برابر آهنگ تغییر لحظه‌ای این تابع، با کدام مقدار x است؟ (سراسری ریاضی ۹۹)

۱) $4+\sqrt{2}$ ۲) $3+2\sqrt{2}$ ۳) $2+\frac{3}{2}\sqrt{2}$ ۴) $2+\frac{5}{2}\sqrt{2}$

پاسخ: گزینهٔ «۴»

$y=\sqrt{21-x^2+4x}$

آهنگ متوسط در بازهٔ $[5,6]$ برابر است با:

$$\frac{f(6)-f(5)}{6-5}=\frac{\sqrt{21-36+24}-\sqrt{21-25+20}}{1}=\frac{\sqrt{9}-\sqrt{16}}{1}=-1$$

آهنگ لحظه‌ای نیز برابر است با:

$$y'=\frac{-2x+4}{2\sqrt{21-x^2+4x}}=\frac{2(-x+2)}{2\sqrt{21-x^2+4x}}=\frac{-x+2}{\sqrt{21-x^2+4x}}$$

با برابر قرار دادن این دو داریم:

$x-2\geq 0 \Rightarrow x\geq 2$

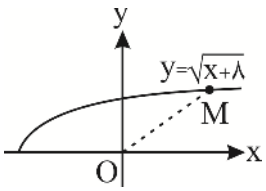
$$\frac{-x+2}{\sqrt{21-x^2+4x}}=-1 \Rightarrow x-2=\sqrt{21-x^2+4x}\ (*) \xrightarrow{\text{به توان ۲}} x^2-4x+4=21-x^2+4x$$

$$\Rightarrow 2x^2-8x-17=0 \Rightarrow x=\frac{8\pm\sqrt{200}}{4}=2\pm\frac{5}{2}\sqrt{2} \xrightarrow[(*)]{x\geq 2} x=2+\frac{5}{2}\sqrt{2}$$

تمرین: نقطه‌ی $M(x,y)$ بر روی منحنی به معادله‌ی $y=\sqrt{x+8}$ در حال حرکت است. T فاصله‌ی نقطه‌ی M تا مبداء مختصات است. آهنگ تغییر لحظه‌ای T در نقطه‌ی $x=7$ کدام است؟

۱) $\frac{15}{16}$ ۲) $\frac{15}{8}$ ۳) $\frac{3}{7}$ ۴) $\frac{5}{4}$

پاسخ: گزینه‌ی «۱» ـ ابتدا منحنی تابع را رسم می‌کنیم:



نقطه‌ای مانند $M(x,\sqrt{x+8})$ را روی منحنی در نظر می‌گیریم و فاصله‌ی آن را تا مبداء با فرمول $T=\sqrt{x^2+y^2}$ پیدا می‌کنیم:

$$T=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{x^2+(\sqrt{x+8})^2}=\sqrt{x^2+x+8}$$

حالا از T نسبت به x مشتق می‌گیریم:

$$T=\sqrt{x^2+x+8}\Rightarrow T'=\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+8}}$$

حالا به T مقدار ۷ را می‌دهیم:

$$T(7)=\frac{2(7)+1}{2\sqrt{7^2+7+8}}=\frac{15}{2\sqrt{64}}=\frac{15}{16}$$

سرعت متوسط و سرعت لحظه‌ای

دو مفهومی که در درس فیزیک بارها نام آن را شنیده‌اید، مفاهیم سرعت لحظه‌ای و سرعت متوسط است. بیایید یک بار دیگر با هم این مفاهیم را ببینیم:

سرعت متوسط: فرض کنیم معادلهٔ حرکت یک متحرک که در امتداد یک خط حرکت می‌کند به صورت $S=f(t)$ باشد در این صورت:

$$\bar{V}=\text{سرعت متوسط}=\frac{\text{تغییرات مکان}}{\text{تغییرات زمان}}=\frac{\Delta S}{\Delta t}=\frac{S_2-S_1}{t_2-t_1}=\frac{f(t_2)-f(t_1)}{t_2-t_1}$$

سرعت لحظه‌ای: آهنگ لحظه‌ای تغییر S را سرعت لحظه‌ای می‌نامیم:

$$V=S'=f'(t)$$

راستی خوبه که با چند تا از اصطلاحات آشنا شوید:

۱) برخورد با زمین: اگر جسمی در راستای قائم حرکت کند و معادلهٔ ارتفاع برحسب زمان آن $h=f(t)$ باشد، با قراردادن $h=0$ زمان برخوردبا زمین به دست می‌آید.

۲) جهت حرکت: اگر $V>0$ باشد حرکت در جهت مثبت محور مکان است و اگر $V<0$ باشد حرکت در خلاف جهت محور مکان است.

۳) توقف: لحظه‌ای که سرعت لحظه‌ای صفر می‌شود.

تمرین: ماشینی که با سرعت ثابت در حال حرکت است در لحظهٔ $t = ۰$ ترمز می‌گیرد تا این‌که متوقف شود. اگر فاصلهٔ مکان ماشین از لحظهٔ ترمز برحسب زمان به صورت $S(t) = ۲۴t - ۲t^۲$ باشد:

الف) سرعت ماشین پس از چند ثانیه صفر می‌شود؟

ب) سرعت ماشین در لحظهٔ شروع ترمز چقدر بوده است؟

پ) سرعت متوسط ماشین از لحظهٔ شروع ترمز تا توقف کامل چقدر است؟

پاسخ: الف) به دنبال لحظه‌ای هستیم که سرعت لحظه‌ای برابر صفر می‌شود:

کافی است از معادلهٔ داده‌شده نسبت به t مشتق بگیریم: $S(t) = ۲۴t - ۲t^۲$

$$V = S'(t) = ۲۴ - ۴t \Rightarrow S'(t) = ۰ \Rightarrow ۴t = ۲۴ \Rightarrow t = ۶$$

توجه کنید که ۶ ثانیه از لحظهٔ ترمزگرفتن تا ایستادن ماشین طول می‌کشد.

ب) لحظهٔ شروع ترمز یعنی $t = ۰$، پس سرعت لحظه‌ای ماشین در $t = ۰$ را پیدا می‌کنیم:

$$S'(۰) = ۲۴ - ۴(۰) = ۲۴$$

پ) با توجه به (الف) و (ب)، سرعت متوسط متحرک از لحظهٔ ترمز $(t = ۰)$ تا لحظهٔ توقف $(t = ۶)$ برابر است با:

$$\text{سرعت متوسط} = \frac{S(۶) - S(۰)}{۶ - ۰} = \frac{(۲۴(۶) - ۲(۶)^۲) - ۰}{۶ - ۰} = \frac{۶(۲۴ - ۱۲)}{۶} = ۱۲$$

۱ آهنگ تغییر متوسط تابع $f(x)=(x^۲+۱)^۳(ax+۱)$ در بازهٔ $[-۱,۰]$ برابر -۱۱ است. آهنگ تغییر لحظه‌ای این تابع در نقطهٔ $x=-۲a$ کدام است؟

۱) ۱
۲) -۱
۳) ۸
۴) -۸

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

۲ در تابع با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt{x}$، آهنگ متوسط تغییر تابع نسبت به متغیر x، از نقطهٔ $x=۱$ تا $x=۱/۲۱$، از آهنگ لحظه‌ای تابع در نقطهٔ $x=۱$، چقدر کمتر است؟ (با تغییر)

۱) $\frac{۱}{۴۲}$
۲) $\frac{۱}{۲۱}$
۳) $\frac{۳}{۴۲}$
۴) $\frac{۲}{۲۱}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۴

۳ در تابع با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt{x}$ آهنگ متوسط تغییر تابع وقتی متغیر x از ۴ به ۲۵ تغییر کند، برابر آهنگ لحظه‌ای در نقطهٔ a می‌باشد. a کدام است؟

۱) ۱۱/۷۵
۲) ۱۲/۲۵
۳) ۱۲/۵
۴) ۱۳/۵

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۳

۴ در تابع با ضابطهٔ $f(x)=(۲x+۱)^{-\frac{۱}{۲}}$، آهنگ متوسط تغییر تابع، از نقطهٔ $x=۴$ تا $x=۱۲$، از آهنگ لحظه‌ای آن در نقطهٔ $x=۴$، چقدر بیشتر است؟

۱) $\frac{۷}{۵۴۰}$
۲) $\frac{۱۱}{۵۴۰}$
۳) $\frac{۷}{۲۷۰}$
۴) $\frac{۱۱}{۲۷۰}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۳

۵ در تابع با ضابطهٔ $f(x)=۳x^۲+۴x-۲$، تفاضل آهنگ لحظه‌ای در نقطهٔ $a+\frac{h}{۲}$ از آهنگ متوسط تغییر تابع وقتی متغیر x از عدد a به $a+h$ تغییر کند، کدام گزینه است؟

۱) h
۲) $۲h$
۳) $۳h$
۴) صفر

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۶

۶ در تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{x-1}{\sqrt{x}}$، آهنگ متوسط تغییر تابع نسبت به متغیر x، در نقطهٔ $x=1$ با $\Delta x=0/44$، از آهنگ لحظه‌ای تابع در این نقطه، چقدر کمتر است؟ (با تغییر)

۱) $\frac{1}{30}$
۲) $\frac{1}{24}$
۳) $\frac{1}{12}$
۴) $\frac{1}{6}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۴

۷ در بازهٔ $[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}]$، آهنگ متوسط تغییر تابع $y=\sin x\cos 2x$ چند برابر آهنگ متوسط تغییر تابع $y=\sin^4 x-\cos^4 x$ است؟

۱) -۱
۲) ۱
۳) $-\frac{1}{2}$
۴) $\frac{1}{2}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۱

۸ آهنگ متوسط تغییر تابع $f(x)=\sqrt{x^2+16}$ نسبت به متغیر x روی بازهٔ $[0,3]$، از آهنگ لحظه‌ای تابع در $x=\sqrt{2}$، چقدر کمتر است؟

۱) صفر
۲) $\frac{1}{18}$
۳) $\frac{1}{12}$
۴) $\frac{1}{9}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۸

۹ آهنگ متوسط تغییر تابع $y=\sqrt{21-x^2+4x}$ در بازهٔ $[5,6]$، برابر آهنگ تغییر لحظه‌ای این تابع، با کدام مقدار x است؟

۱) $4+\sqrt{2}$
۲) $3+2\sqrt{2}$
۳) $2+\frac{3}{2}\sqrt{2}$
۴) $2+\frac{5}{2}\sqrt{2}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۹

۱۰ نقطهٔ $M(x,y)$ بر روی منحنی به معادلهٔ $y=\sqrt{x+8}$ در حرکت است. T فاصلهٔ نقطهٔ M تا مبدأ مختصات است. آهنگ لحظه‌ای تغییر T در نقطهٔ $x=7$ کدام است؟

۱) $\frac{15}{16}$
۲) $\frac{15}{8}$
۳) $\frac{3}{7}$
۴) $\frac{5}{4}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۴

۱۱ آهنگ متوسط تغییر تابع با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt{x^2+144}$ نسبت به تغییر x روی بازه‌ای از $x=5$ تا $x=9$ کدام است؟

۱) ۰/۴
۲) ۰/۵
۳) ۰/۶
۴) ۰/۷

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۴

۱۲ در تابع با ضابطهٔ $f(x)=(x+۲)\sqrt{۴x+۱}$، آهنگ تغییر متوسط تابع در بازهٔ $[۰,۲]$ از آهنگ تغییر لحظه‌ای آن در $x=\frac{۳}{۴}$ چقدر بیشتر است؟

۱) ۰/۱۰ ۲) ۰/۱۵

۳) ۰/۲۰ ۴) ۰/۲۵

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۸

۱۳ در تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{۱}{۲}x^{۲}-\frac{۱}{x}$، اختلاف آهنگ تغییر لحظه‌ای در $x=۲$، از آهنگ تغییر متوسط در بازهٔ $[۱,۴]$ کدام است؟

۱) ۰/۲۵ ۲) ۰/۵

۳) ۰/۴۵ ۴) ۰/۷۵

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۱۴ در تابع با ضابطهٔ $f(x)=x+\frac{۱}{x}$، آهنگ متوسط تغییر تابع، وقتی متغیر از عدد ۲ به عدد $۲+h$ تغییر کند برابر $\frac{۸}{۹}$ است. h کدام است؟

۱) ۱/۵ ۲) ۲

۳) ۲/۵ ۴) ۳

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۶

۱۵ در تابع با ضابطهٔ $f(x)=x^{۳}$، آهنگ متوسط تغییر این تابع وقتی $x=۳$ و $\Delta x=۰/۱$، از آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع در نقطهٔ $x=۳$ چقدر بیشتر است؟

۱) ۰/۳۱ ۲) ۰/۴۲

۳) ۰/۶۲ ۴) ۰/۹۱

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۷

۱۶ در تابع $f(x)=\sqrt{x}$، آهنگ متوسط تغییر تابع نسبت به تغییر متغیر روی بازهٔ $[۲/۲۵,\ ۲/۵۶]$، از آهنگ آنی در شروع این بازه چقدر کمتر است؟

۱) $\frac{۱}{۹۳}$ ۲) $\frac{۲}{۹۳}$

۳) $\frac{۱}{۶۲}$ ۴) $\frac{۱}{۳۱}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۷

۱۷ در تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{x}{x-1}$، آهنگ متوسط از $x_1=2$ تا $x_2=5$، برابر آهنگ لحظه‌ای آن در $x=\alpha$ است. α کدام است؟

۱) ۲/۵
۲) $1+\sqrt{3}$
۳) ۳
۴) ۴

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۰

۱۸ در تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{36}{x^2}$، آهنگ متوسط تابع از $x_1=2$ تا $x_2=3$ چقدر از آهنگ لحظه‌ای آن در $x=\sqrt[3]{12}$ بیشتر است؟

۱) ۱
۲) ۱/۵
۳) ۲
۴) ۲/۵

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

۱۹ در تابع با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt{x}$، آهنگ متوسط تغییر تابع، از نقطهٔ $x=4$ تا $x=6/25$، از آهنگ لحظه‌ای آن در نقطهٔ $x=4$، چقدر کمتر است؟

۱) $\frac{1}{36}$
۲) $\frac{1}{18}$
۳) $\frac{5}{72}$
۴) $\frac{1}{12}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۳

۲۰ در تابع با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt{2x+1}+\frac{1}{x+1}$، آهنگ تغییر متوسط تابع در بازهٔ $[0,4]$ از آهنگ تغییر لحظه‌ای آن در $x=\frac{3}{2}$، چقدر کمتر است؟

۱) ۰/۰۳
۲) ۰/۰۴
۳) ۰/۰۵
۴) ۰/۰۶

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۸

۱ گزینه ۳

$$\text{آهنگ تغییر متوسط} = -۱۱ \Rightarrow \frac{f(۰)-f(-۱)}{۰-(-۱)} = -۱۱ \Rightarrow ۱-۸(۱-a) = -۱۱$$

$$\Rightarrow ۸(۱-a) = ۱۲ \Rightarrow ۱-a = \frac{۳}{۲} \Rightarrow a = -\frac{۱}{۲}$$

$$f(x) = (x^۲+۱)^۳(۱-\frac{x}{۲})$$

$$f'(x) = ۳(۲x)(x^۲+۱)^۲(۱-\frac{x}{۲}) - \frac{۱}{۲}(x^۲+۱)^۳$$

$$f'(-۲a) = f'(۱) = ۳\times۲\times۴\times\frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۲}\times۸ = ۱۲-۴ = ۸$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

۲ گزینه ۱

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۴

گام اول

الف) آهنگ متوسط تغییر تابع در بازه‌ای از x تا $x + \Delta x$ از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

ب) آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع در یک نقطه برابر مقدار مشتق تابع در آن نقطه است.

گام دوم

باتوجه‌به گام اول، آهنگ متوسط و آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع در نقطهٔ $x = ۱$ را به دست می‌آوریم:

$$\text{آهنگ متوسط تغییر تابع از } x_۱ = ۱ \text{ تا } x_۲ = ۱/۲۱ = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(۱/۲۱) - f(۱)}{۱/۲۱ - ۱}$$

$$= \frac{\sqrt{۱/۲۱} - \sqrt{۱}}{۰/۲۱} = \frac{۱/۱ - ۱}{۰/۲۱} = \frac{۰/۱}{۰/۲۱} = \frac{\frac{۱}{۱۰}}{\frac{۲۱}{۱۰۰}} = \frac{۱۰}{۲۱}$$

برای به دست آوردن آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع در $x = ۱$، ابتدا باید ضابطهٔ مشتق تابع را به دست آوریم:

$$f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{۱}{۲\sqrt{x}}$$

بنابراین:

$$\text{آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع در } x = ۱ = f'(۱) = \frac{۱}{۲\sqrt{۱}} = \frac{۱}{۲}$$

درنهایت، اختلاف آهنگ لحظه‌ای و آهنگ متوسط برابر است با:

$$f'(۱) - \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{۱}{۲} - \frac{۱۰}{۲۱} = \frac{۲۱ - ۲۰}{۴۲} = \frac{۱}{۴۲}$$

۳ گزینه ۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۳

گام اول

الف) آهنگ متوسط تغییر تابع $f(x)$ از x_1 به x_2 چنین تعریف می‌شود:

$$\text{آهنگ متوسط تغییر} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

ب) آهنگ لحظه‌ای (آنی) تغییر تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x = a$ برابر $f'(a)$ است.

گام دوم

برای محاسبهٔ مقدار a کافی است معادلهٔ $f'(a) = \frac{f(۲۵) - f(۴)}{۲۵ - ۴}$ را حل کنیم.

$$f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{۱}{۲\sqrt{x}}$$

$$\text{آهنگ متوسط تغییر از ۴ به ۲۵} = \frac{f(۲۵) - f(۴)}{۲۵ - ۴} = \frac{\sqrt{۲۵} - \sqrt{۴}}{۲۱} = \frac{۵ - ۲}{۲۱} = \frac{۳}{۲۱} = \frac{۱}{۷}$$

$$\text{آهنگ لحظه‌ای تغییر در } a = f'(a) = \frac{۱}{۲\sqrt{a}}$$

$$f'(a) = \frac{۱}{۷} \Rightarrow \frac{۱}{۲\sqrt{a}} = \frac{۱}{۷} \Rightarrow ۲\sqrt{a} = ۷ \xrightarrow{\text{به توان ۲}} ۴a = ۴۹ \Rightarrow a = \frac{۴۹}{۴} = ۱۲/۲۵$$

۴ گزینه ۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۳

گام اول

الف) آهنگ متوسط تغییر تابع از x_1 تا x_2 از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

ب) آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع در یک نقطه برابر مقدار مشتق تابع آن نقطه است.

گام دوم

$$f(x) = (2x+1)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$$

ابتدا آهنگ متوسط تغییر تابع از $x = 4$ تا $x = 12$ را به دست می‌آوریم:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(12) - f(4)}{12 - 4} = \frac{\frac{1}{\sqrt{24+1}} - \frac{1}{\sqrt{8+1}}}{8} = \frac{\frac{1}{5} - \frac{1}{3}}{8} = -\frac{1}{60}$$

طبق قسمت ب از گام اول، $f'(x)$ و سپس مقدار $f'(4)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$f'(x) = \frac{0 - \frac{2}{2\sqrt{2x+1}}}{2x+1} = -\frac{1}{(2x+1)\sqrt{2x+1}}$$

$$x = 4 \text{ آهنگ لحظه‌ای تغییر در } = f'(4) = -\frac{1}{(8+1)\sqrt{8+1}} = -\frac{1}{9 \times 3} = -\frac{1}{27}$$

اختلاف آهنگ متوسط تغییر و آهنگ لحظه‌ای تغییر برابر است با:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} - f'(x) = -\frac{1}{60} - \left(-\frac{1}{27}\right) = -\frac{1}{60} + \frac{1}{27} = \frac{-9+20}{540} = \frac{11}{540}$$

۵ گزینه ۴

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۶

گام اول

الف) آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع در نقطهٔ $x = a$ برابر $f'(a)$ است.

ب) آهنگ متوسط تغییر تابع از x_1 تا x_2 چنین تعریف می‌شود:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

گام دوم

آهنگ لحظه‌ای در نقطهٔ $a + \frac{h}{2}$ یعنی محاسبهٔ $f'\left(a + \frac{h}{2}\right)$، پس ابتدا ضابطهٔ $f'(x)$ را تعیین و سپس $f'\left(a + \frac{h}{2}\right)$ را محاسبه می‌کنیم.

$$f(x) = 3x^2 + 4x - 2 \Rightarrow f'(x) = 6x + 4$$

$$\text{آهنگ لحظه‌ای تغییر در } a + \frac{h}{2} = f'\left(a + \frac{h}{2}\right) = 6\left(a + \frac{h}{2}\right) + 4 = 6a + 3h + 4$$

آهنگ متوسط تغییر تابع از a تا $a + h$ برابر است با:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a+h) - f(a)}{a + h - a} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$= \frac{\left[3(a+h)^2 + 4(a+h) - 2\right] - \left(3a^2 + 4a - 2\right)}{h}$$

$$= \frac{3a^2 + 6ah + 3h^2 + 4a + 4h - 2 - 3a^2 - 4a + 2}{h} = \frac{6ah + 3h^2 + 4h}{h} = 6a + 3h + 4$$

مقدار آهنگ متوسط و آهنگ لحظه‌ای در موارد خواسته‌شده برابر شد، پس تفاضل آن‌ها برابر صفر است.

۶ گزینه ۴

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۴

گام اول

الف) آهنگ متوسط تغییر تابع از $x = ۱$ تا $x = ۱/۴۴$ را با استفاده از رابطهٔ $\frac{f(۱/۴۴) - f(۱)}{۰/۴۴}$ به دست می‌آوریم.

ب) برای به دست آوردن آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع در $x = ۱$ باید ضابطهٔ مشتق تابع یا همان $f'(x)$ و سپس $f'(۱)$ را محاسبه کنیم. اختلاف آهنگ متوسط و آهنگ لحظه‌ای به‌عنوان جواب تست در نظر گرفته می‌شود.

گام دوم

$$\text{آهنگ متوسط تغییر} = \frac{f(۱/۴۴) - f(۱)}{۰/۴۴} = \frac{\frac{۰/۴۴}{\sqrt{۱/۴۴}} - ۰}{۰/۴۴} = \frac{۱}{\sqrt{۱/۴۴}} = \frac{۱}{۱/۲} = \frac{۱}{\frac{۶}{۵}} = \frac{۵}{۶}$$

$$f(x) = \frac{x-۱}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} - \frac{۱}{\sqrt{x}} \Rightarrow f'(x) = \frac{۱}{۲\sqrt{x}} - \frac{-\frac{۱}{۲\sqrt{x}}}{x}$$

$$= \frac{۱}{۲\sqrt{x}} + \frac{۱}{۲x\sqrt{x}} \Rightarrow f'(۱) = \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} = ۱$$

اختلاف آهنگ متوسط تغییر و آهنگ لحظه‌ای تغییر برابر است با:

$$۱ - \frac{۵}{۶} = \frac{۱}{۶}$$

۷ گزینه ۱

$$\text{آهنگ متوسط تابع اول} : \frac{\sin\frac{\pi}{۲}\cos\frac{۲\pi}{۲} - \sin\frac{\pi}{۴}\cos\frac{۲\pi}{۴}}{\frac{\pi}{۲} - \frac{\pi}{۴}} = \frac{-۱ - ۰}{\frac{\pi}{۴}} = \frac{-۴}{\pi}$$

$$\text{آهنگ متوسط تابع دوم} : \frac{(\sin^۴\frac{\pi}{۲} - \cos^۴\frac{\pi}{۲}) - (\sin^۴\frac{\pi}{۴} - \cos^۴\frac{\pi}{۴})}{\frac{\pi}{۲} - \frac{\pi}{۴}}$$

$$= \frac{(۱ - ۰) - (\frac{۱}{۴} - \frac{۱}{۴})}{\frac{\pi}{۲} - \frac{\pi}{۴}} = \frac{۱}{\frac{\pi}{۴}} = \frac{۴}{\pi}$$

از تقسیم دو مقدار حاصل، به ۱- می‌رسیم.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۱

۸ گزینه ۱

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۸

گام اول

الف) آهنگ متوسط تغییر تابع $f(x)$ روی بازه‌ای از x تا $x+\Delta x$ چنین تعریف می‌شود:

$$\text{آهنگ متوسط تغییر} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

ب) آهنگ لحظه‌ای تغییر $f(x)$ در نقطهٔ $x=a$ برابر $f'(a)$ است.

گام دوم

باتوجه‌به گام اول، دو مقدار آهنگ متوسط و آهنگ لحظه‌ای را به دست آورده، سپس اختلاف آن‌ها از یکدیگر را محاسبه می‌کنیم.

$$\text{آهنگ متوسط تغییر در بازهٔ } [0,3] = \frac{f(3)-f(0)}{3-0} = \frac{\sqrt{9+16}-\sqrt{16}}{3} = \frac{\sqrt{25}-\sqrt{16}}{3} = \frac{5-4}{3} = \frac{1}{3}$$

$$f(x) = \sqrt{x^2+16} \Rightarrow f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+16}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+16}}$$

$$\text{آهنگ لحظه‌ای تغییر در } x=\sqrt{2} = f'\left(\sqrt{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2+16}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2+16}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{18}} = \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{3}$$

مقدار آهنگ لحظه‌ای و آهنگ متوسط برابر شد، پس اختلاف آن‌ها برابر صفر است.

۹ گزینه ۴

$$y = \sqrt{21-x^2+4x}$$

آهنگ متوسط در بازهٔ $[5\ ,\ 6]$ برابر است با:

$$\frac{f(6)-f(5)}{6-5} = \frac{\sqrt{21-36+24}-\sqrt{21-25+20}}{1} = \frac{\sqrt{9}-\sqrt{16}}{1} = -1$$

آهنگ لحظه‌ای نیز برابر است با:

$$y' = \frac{-2x+4}{2\sqrt{21-x^2+4x}} = \frac{\not{2}(-x+2)}{\not{2}\sqrt{21-x^2+4x}} = \frac{-x+2}{\sqrt{21-x^2+4x}}$$

با برابر قرار دادن این دو داریم:

$$\frac{-x+2}{\sqrt{21-x^2+4x}} = -1 \Rightarrow x-2 = \sqrt{21-x^2+4x} \quad (*)$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} x^2-4x+4 = 21-x^2+4x \Rightarrow 2x^2-8x-17 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{8 \pm \sqrt{200}}{4} = 2 \pm \frac{5}{2}\sqrt{2} \xrightarrow[(*)]{x\geq 2} x = 2+\frac{5}{2}\sqrt{2}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۹

۱۰ گزینه ۱

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۴

گام اول

الف) فاصلهٔ نقطهٔ $M(x, y)$ از مبدأ مختصات از رابطهٔ $T = \sqrt{x^۲ + y^۲}$ به دست می‌آید.

ب) آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع در یک نقطه، برابر مشتق تابع در آن نقطه است.

گام دوم

در رابطهٔ T از قسمت الف از گام اول، عبارت $y = \sqrt{x + ۸}$ را جایگزین می‌کنیم تا T برحسب متغیر x به دست آید.

$$T = \sqrt{x^۲ + y^۲} \xrightarrow{y=\sqrt{x+۸}} T = \sqrt{x^۲ + \left(\sqrt{x+۸}\right)^۲} = \sqrt{x^۲ + x + ۸}$$

از T نسبت به x مشتق گرفته و مقدار آن را در $x = ۷$ حساب می‌کنیم:

$$T' = \frac{۲x + ۱}{۲\sqrt{x^۲ + x + ۸}}$$

$$\Rightarrow T'(۷) = \frac{۲(۷) + ۱}{۲\sqrt{۷^۲ + ۷ + ۸}} = \frac{۱۴ + ۱}{۲\sqrt{۴۹ + ۷ + ۸}} = \frac{۱۵}{۲\sqrt{۶۴}} = \frac{۱۵}{۲ \times ۸} = \frac{۱۵}{۱۶}$$

۱۱ گزینه ۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۴

گام اول

آهنگ متوسط تغییر تابع $f(x)$ روی بازه‌ای از x تا $x + \Delta x$ چنین تعریف می‌شود:

$$\text{آهنگ متوسط تغییر} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

گام دوم

باتوجه‌به تعریف آهنگ متوسط تغییر داریم:

$$\text{آهنگ متوسط تغییر تابع از } x = ۵ \text{ تا } x = ۹ = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(۹) - f(۵)}{۹ - ۵} = \frac{\sqrt{۹^۲ + ۱۴۴} - \sqrt{۵^۲ + ۱۴۴}}{۴}$$

$$= \frac{\sqrt{۸۱ + ۱۴۴} - \sqrt{۲۵ + ۱۴۴}}{۴} = \frac{\sqrt{۲۲۵} - \sqrt{۱۶۹}}{۴} = \frac{۱۵ - ۱۳}{۴} = \frac{۲}{۴} = \frac{۱}{۲} = ۰/۵$$

۱۲ گزینه ۴

آهنگ تغییر متوسط تابع در $[۰, ۲]$:

$$\frac{f(۲)-f(۰)}{۲-۰}=\frac{۱۲-۲}{۲}=۵$$

آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع، همان مشتق است:

$$f'(x)=۱\times\sqrt{۴x+۱}+\frac{۴}{۲\sqrt{۴x+۱}}(x+۲)\xrightarrow{x=\frac{۳}{۴}}f'\left(\frac{۳}{۴}\right)=\frac{۱۹}{۴}$$

تفاضل مقادیر به دست آمده برابر است با:

$$۵-\frac{۱۹}{۴}=\frac{۱}{۴}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۸

۱۳ گزینه ۲

$$f(x)=\frac{۱}{۲}x^{۲}-\frac{۱}{x}\Rightarrow f'(x)=x+\frac{۱}{x^{۲}}\Rightarrow f'(۲)=۲+\frac{۱}{۴}=\frac{۹}{۴}$$

آهنگ تغییر متوسط : $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(۴)-f(۱)}{۴-۱}=\frac{(۸-\frac{۱}{۴})-(\frac{۱}{۲}-۱)}{۳}=\frac{\frac{۳۱}{۴}+\frac{۱}{۲}}{۳}=\frac{۱۱}{۴}$

اختلاف : $\frac{۱۱}{۴}-\frac{۹}{۴}=\frac{۲}{۴}=۰/۵$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۱۴ گزینه ۳

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۶

گام اول

آهنگ متوسط تغییر تابع $f(x)$ از x به $x+\Delta x$ چنین تعریف می‌شود:

$$\text{آهنگ متوسط تغییر} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

گام دوم

طبق تعریف آهنگ متوسط تغییر داریم:

$$\text{آهنگ متوسط تغییر از ۲ به } ۲+h = \frac{f(۲+h)-f(۲)}{۲+h-۲} = \frac{f(۲+h)-f(۲)}{h}$$

بنابراین:

$$\text{آهنگ متوسط تغییر از ۲ به } ۲+h = \frac{\left(۲+h+\frac{۱}{۲+h}\right)-\left(۲+\frac{۱}{۲}\right)}{h} = \frac{h+\frac{۱}{۲+h}-\frac{۱}{۲}}{h} = \frac{۸}{۹}$$

$$\Rightarrow h+\frac{۱}{۲+h}-\frac{۱}{۲} = \frac{۸}{۹}h \xrightarrow{\times ۹} ۹h+\frac{۹}{۲+h}-\frac{۹}{۲} = ۸h$$

$$\Rightarrow h+\frac{۹}{۲+h} = \frac{۹}{۲} \Rightarrow \frac{h(h+۲)+۹}{۲+h} = \frac{۹}{۲} \Rightarrow \frac{h^۲+۲h+۹}{۲+h} = \frac{۹}{۲}$$

$$\Rightarrow ۲h^۲+۴h+۱۸ = ۹h+۱۸ \Rightarrow ۲h^۲-۵h = ۰ \Rightarrow h(۲h-۵) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} h = ۰ & \text{غ ق ق} \\ h = \frac{۵}{۲} = ۲/۵ \end{cases}$$

اگر $h = ۰$ باشد، متغیر اصلاً تغییری نکرده و آهنگ متوسط تغییر آن برابر صفر می‌شود.

۱۵ گزینه ۴

$$\text{آهنگ لحظه‌ای در } x = ۳ \quad = f'(۳)$$

$$f(x) = x^۳ \Rightarrow f'(x) = ۳x^۲ \Rightarrow f'(۳) = ۲۷ \quad (۱)$$

$$\text{آهنگ متوسط تغییر} = \frac{f(۳+\Delta x)-f(۳)}{\Delta x} = \frac{f(۳/۱)-f(۳)}{۰/۱} = \frac{(۳/۱)^۳-۳^۳}{۰/۱} = ۲۷/۹۱ \quad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۲)\ ,\ (۱)} ۲۷/۹۱-۲۷ = ۰/۹۱$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۷

۱۶ گزینه ۱

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۷

گام اول

الف) آهنگ متوسط تغییر تابع $f(x)$ روی بازه‌ای از x_1 تا x_2 چنین تعریف می‌شود:

$$\text{آهنگ متوسط تغییر} = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

ب) آهنگ آنی یا لحظه‌ای در نقطهٔ $x = a$ برابر $f'(a)$ است.

گام دوم

باتوجه‌به گام اول، آهنگ متوسط و آهنگ آنی خواسته‌شده را به دست می‌آوریم سپس اختلاف آن‌ها را محاسبه می‌کنیم.

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(۲/۵۶) - f(۲/۲۵)}{۲/۵۶ - ۲/۲۵} = \frac{\sqrt{۲/۵۶} - \sqrt{۲/۲۵}}{۰/۳۱} = \frac{۱/۶ - ۱/۵}{۰/۳۱} = \frac{۰/۱}{۰/۳۱} = \frac{۱۰}{۳۱}$$

$$f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{۱}{۲\sqrt{x}}$$

$$x = ۲/۲۵ \text{ آهنگ آنی در نقطهٔ } = f'(۲/۲۵) = \frac{۱}{۲\sqrt{۲/۲۵}} = \frac{۱}{۲ \times ۱/۵} = \frac{۱}{۳}$$

اختلاف آهنگ آنی و آهنگ لحظه‌ای برابر است با:

$$f'(۲/۲۵) - \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{۱}{۳} - \frac{۱۰}{۳۱} = \frac{۳۱ - ۳۰}{۹۳} = \frac{۱}{۹۳}$$

۱۷ گزینه ۳

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۰

گام اول

الف) آهنگ متوسط تغییر تابع $f(x)$ از x_1 تا x_2 چنین تعریف می‌شود:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

ب) آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x = a$ برابر $f'(a)$ است.

گام دوم

$f'(\alpha)$ و $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ را محاسبه و باهم برابر قرار می‌دهیم، سپس مقدار α را تعیین می‌کنیم.

$$\text{آهنگ متوسط تغییر تابع از } x_1 = ۲ \text{ تا } x_2 = ۵ = \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

$$= \frac{f(۵) - f(۲)}{۵ - ۲} = \frac{\frac{۵}{۵-۱} - \frac{۲}{۲-۱}}{۳} = \frac{\frac{۵}{۴} - ۲}{۳} = \frac{\frac{۵-۸}{۴}}{۳} = \frac{-\frac{۳}{۴}}{۳} = \frac{-۱}{۴}$$

$$f(x) = \frac{x}{x-۱} \Rightarrow f'(x) = \frac{x - ۱ - x}{(x-۱)^۲} = \frac{-۱}{(x-۱)^۲}$$

$$\text{آهنگ لحظه‌ای در } x = \alpha = f'(\alpha) = \frac{-۱}{(\alpha - ۱)^۲}$$

$$\Rightarrow f'(\alpha) = \frac{\Delta f}{\Delta x} \Rightarrow -\frac{۱}{(\alpha-۱)^۲} = -\frac{۱}{۴} \Rightarrow (\alpha - ۱)^۲ = ۴ \Rightarrow \begin{cases} \alpha - ۱ = ۲ \Rightarrow \alpha = ۳ \\ \alpha - ۱ = -۲ \Rightarrow \alpha = -۱ \end{cases} \text{ غ ق ق}$$

۱۸ گزینه ۱

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

گام اول

الف) آهنگ متوسط تغییر تابع $f(x)$ روی بازه‌ای از x_1 تا x_2 چنین تعریف می‌شود:

$$\text{آهنگ متوسط تغییر} = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

ب) آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x = a$ برابر $f'(a)$ است.

گام دوم

باتوجه‌به قسمت الف از گام اول، آهنگ متوسط تغییر تابع از $x_1 = ۲$ تا $x_2 = ۳$ برابر است با:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(۳) - f(۲)}{۳ - ۲} = \frac{\frac{۳۶}{۹} - \frac{۳۶}{۴}}{۱} = \frac{۳۶}{۹} - \frac{۳۶}{۴} = ۴ - ۹ = -۵$$

برای به دست آوردن آهنگ لحظه‌ای در نقطهٔ $x = \sqrt[3]{12}$، ابتدا ضابطهٔ مشتق تابع را تعیین می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{36}{x^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{0 \times x^2 - 2x(36)}{x^4} = -\frac{72x}{x^4} = -\frac{72}{x^3}$$

$$x = \sqrt[3]{12} \text{ آهنگ آنی در } = f'\left(\sqrt[3]{12}\right) = -\frac{72}{\left(\sqrt[3]{12}\right)^3} = -\frac{72}{12} = -6$$

اختلاف آهنگ متوسط و لحظه‌ای برابر است با:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} - f'\left(\sqrt[3]{12}\right) = -5 - (-6) = 1$$

۱۹ گزینه ۱

$$\text{آهنگ متوسط تابع} = \frac{f(6/25) - f(4)}{6/25 - 4} = \frac{\sqrt{6/25} - \sqrt{4}}{2/25} = \frac{2/5 - 2}{2/25} = \frac{0/5}{2/25} = \frac{1}{4/5}$$

$$\text{آهنگ لحظه‌ای} = f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(4) = \frac{1}{2 \times 2} = \frac{1}{4}$$

$$\text{آهنگ لحظه‌ای} - \text{آهنگ متوسط} = \frac{10}{45} - \frac{1}{4} = \frac{40 - 45}{180} = \frac{-5}{180} = \frac{-1}{36}$$

بنابراین آهنگ متوسط به مقدار $\frac{1}{36}$ از آهنگ لحظه‌ای کمتر است.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۳

۲۰ گزینه ۲

$$\text{آهنگ تغییر متوسط در بازهٔ } [0, 4] = \frac{f(4) - f(0)}{4 - 0} = \frac{(\sqrt{9} + \frac{1}{5}) - (\sqrt{1} + \frac{1}{1})}{4 - 0} = \frac{\frac{6}{5}}{4} = \frac{3}{10} = 0/3$$

$$f'(x) = \frac{2}{2\sqrt{2x+1}} - \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$x = \frac{3}{2} \text{ آهنگ تغییر لحظه‌ای در } = f'(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{(\frac{5}{2})^2} = \frac{1}{2} - \frac{4}{25} = 0/5 - 0/16 = 0/34$$

$$\Rightarrow \text{آهنگ تغییر لحظه‌ای} - \text{آهنگ تغییر متوسط} = 0/34 - 0/3 = 0/04$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۸

Homework نهایی مشتق

۱ درصورتی‌که $f(x)=\sqrt[۳]{(\frac{۳x+۲}{x-۳})^{۲}}$ باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱۰}{۳}$
۲) $\frac{۱۱}{۳}$
۳) $\frac{۱۳}{۳}$
۴) $\frac{۱۴}{۳}$

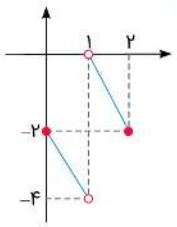
۲ معادله نیم‌مماس چپ تابع $f(x)=|۴-x^{۲}|[-x]$ در $x=۲$ کدام است؟

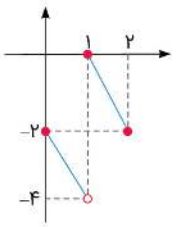
۱) $y-۱۶=۸x$
۲) $y+۱۶=۸x$
۳) $y-۸=۱۶x$
۴) $y+۸=۱۶x$

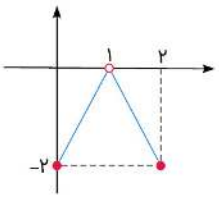
۳ درصورتی‌که $\lim\limits_{x\to -۲}\frac{f(x)-۷}{۲x+۴}=\frac{۱}{۲}$ باشد، مشتق تابع $g(x)=x^{۲}f(۲x)$ در $x=-۱$ چقدر است؟

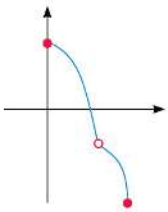
۱) -۱۷
۲) ۱۷
۳) -۱۲
۴) ۱۲

۴ درصورتی‌که $f(x)=-x^{۲}+۲|x-۱|$ و $۰\le x\le ۲$ باشد، نمودار تابع $f'(x)$ کدام است ؟

۱)


۲)


۳)


۴)


۵ تابع $f(x)=[-x]$ در کدام بازه مشتق‌پذیر است؟

۱) $(۱,۳)$
۲) $[۱,۲)$
۳) $(۱,۲]$
۴) $(\frac{۱}{۲},\frac{۳}{۲})$

۶ مشتق تابع $f(x) = \log(2x) + \log\frac{10}{x}$ در $x = 1$ چقدر است؟

۱) ۱
۲) صفر
۳) $\log 20$
۴) $-\log 20$

۷ اگر $\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^4 - x^4}{h} = f(x)$ باشد، $f'(2)$ کدام است؟

۱) ۴۸
۲) ۳۲
۳) ۲۴
۴) ۱۶

۸ اگر $y = 2\sqrt[3]{1-x^2}$ باشد، مقدار $y'y^2$ کدام است؟

۱) $\frac{16}{3}x$
۲) $-\frac{16}{3}x$
۳) $\frac{3}{16}x$
۴) $-\frac{3}{16}x$

۹ آهنگ لحظه‌ای تابع $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt[3]{x}}$ در نقطه‌ای به طول ۸ کدام است؟

۱) $\frac{17}{24}$
۲) $\frac{17}{12}$
۳) $\frac{15}{12}$
۴) $\frac{17}{48}$

۱۰ خط $y = 3x - 4$ در نقطه‌ای به طول ۲ بر تابع مشتق‌پذیر $f(x)$ مماس است. اگر $g(-1) = g'(-1) = 7$ باشد، مقدار مشتق تابع $h(x) = \frac{f(x+3)}{g(x)+3}$ در نقطه‌ای به طول -1 واقع بر $h(x)$ کدام است؟

۱) ۰/۱۵
۲) $-0/15$
۳) $-0/16$
۴) ۰/۱۶

۱۱ اگر $f(x) = [-x]|x-2|$ باشد، حاصل‌ضرب مشتق چپ و راست تابع $f(x)$ در $x = 2$ چقدر است؟ ($[]$ علامت جزء صحیح است.)

۱) -6
۲) ۶
۳) ۲
۴) -3

۱۲ اگر $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-3}{x^2-4} = 4$ و $f(2) = 3$ باشد، مشتق تابع $g(x) = xf(x)$ در نقطه‌ای به طول ۲ چقدر است؟

۱) ۳۰
۲) ۳۳
۳) ۳۵
۴) ۳۸

۱۳ اگر $f(x)=\sqrt[۳]{x^۲}$ و $g(x)=\sqrt[۳]{x}$ باشد، مقدار $f(x)g(x)f'(x)g'(x)$ کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۹}$
۲) $\frac{۱}{۳}$
۳) $\frac{۴}{۹}$
۴) $\frac{۵}{۹}$

۱۴ دو نقطه روی تابع $f(x)=x^۲$ مشخص کنید که شیب خط مماس در آن‌ها مثبت باشد و مشخص کنید که شیب خط مماس در کدام نقطه بزرگ‌تر است.

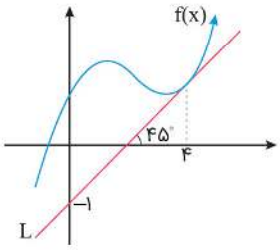
۱۵ درصورتی‌که $f(x)=\frac{x^۲+bx+a}{۲x+[-x]}$ در $x=۲$ مشتق‌پذیر باشد، $a+b^۲$ کدام است؟

۱) ۲۰
۲) ۱۸
۳) ۱۶
۴) ۲۴

۱۶ اگر $f(x)=|x||x+۱||x+۲||x+۳|$ باشد، مقدار $f'(-\frac{۱}{۲})$ کدام است؟

۱) -۲
۲) -۱
۳) ۲
۴) ۱

۱۷ خط L بر تابع $f(x)$ در $x=۴$ مماس است. اگر $g(x)=x^۲+f(x)$ باشد، حاصل $\lim_{x\to ۴}\frac{g(x)-g(۴)}{x-۴}$ کدام است؟

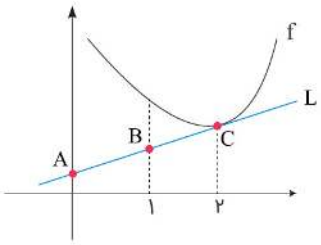


۱) ۸
۲) ۷
۳) ۱۰
۴) ۹

۱۸ اگر $f(x)=\frac{m}{x}$ باشد و شیب خط مماس بر f در نقطه‌ای به طول ۲ بزرگ‌تر از شیب خط $۲y=x+۱$ باشد، حدود m کدام است؟

۱) $m>-۲$
۲) $m<-۲$
۳) $m<۲$
۴) $m>۲$

۱۹ در شکل زیر، تابع $f(x)$ بر خط L در نقطه‌ای به طول ۲ مماس است. اگر $f(۲) - ۲ = f'(۲) = ۱$ باشد، مقدار $\frac{|BC|}{|AB|}$ چقدر است؟



۱) ۱

۲) ۲

۳) ۳

۴) ۴

۲۰ اگر دو تابع $f(x) = \frac{ax^۲ + bx}{۴}$ و $g(x) = x^۳ - ۱$ در نقطه‌ای به طول ۱ بر هم مماس باشند، $f(۲)$ کدام است؟

۱) ۴

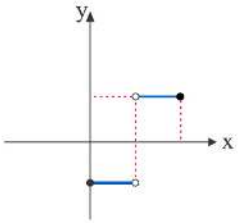
۲) ۵

۳) ۶

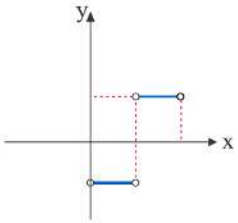
۴) ۸

۲۱ اگر $f(x) = |x - ۱| + [x]$، $D_f = [۰ , ۲]$ باشد، نمودار f' کدام است؟

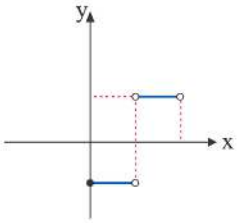
۱)



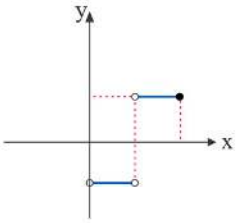
۲)



۳)



۴)



۲۲ تابع $f(x) = \sqrt[۳]{x^۲ + bx + c}$ در دو نقطه به طول‌های ۱ و ۲ مشتق‌پذیر نیست. مقدار $f'(۰)$ چقدر است؟

۱) $\frac{-۱}{\sqrt[۳]{۴}}$

۲) $\frac{۱}{\sqrt[۳]{۴}}$

۳) $\frac{۱}{\sqrt[۳]{۲}}$

۴) $\frac{-۱}{\sqrt[۳]{۲}}$

۲۳ درصورتی‌که $f(x) = ax^۲ + bx + c$ و $f(x) + f'(x) + f''(x) = x^۲$ باشد، مقدار $f(-۱)$ کدام است؟

۱) ۱

۲) ۲

۳) ۳

۴) ۴

۲۴ مجموع طول‌های نقاط گوشه‌ای تابع $f(x)=\begin{cases}۲x+۱ & ;x\le ۰\\ x+۱ & ;۰<x\le ۲\\ |x^۲-۹| & ;۲<x\le ۴\end{cases}$ کدام است؟

۱) صفر
۲) یک
۳) دو
۴) سه

۲۵ تابع $f(x)=\begin{cases}|x-۱| & ;۰<x<۲\\ x+۱ & ;x\ge ۲\end{cases}$ در چند نقطه از دامنهٔ خود مشتق‌ناپذیر است؟

۱) صفر
۲) یک
۳) دو
۴) سه

۲۶ اگر $f(x)=(x^۲-۹)\sin\frac{\pi}{۲x}$ باشد، مقدار $\lim\limits_{x\to ۳}\frac{f(x)-f(۳)}{x-۳}$ کدام است؟

۱) ۳
۲) ۲
۳) ۱
۴) ۴

۲۷ اگر $f(x)=|x-۱|[-۲x]$ باشد، طول نقطهٔ گوشه‌ای تابع $f(۲x+۱)$ کدام است؟

۱) صفر
۲) ۱
۳) ۳
۴) -۱

۲۸ مشتق تابع $f(x)=\sqrt{x+۸}$ را با استفاده از تعریف مشتق در $x_۰=۱$ به دست آورید.

۲۹ اگر $f(۴-\sqrt{x})=\frac{x}{۱+x}$، مقدار $f(۲)f'(۲)$ چقدر است؟

۱) $\frac{۱۶}{۱۲۵}$
۲) $-\frac{۱۶}{۱۲۵}$
۳) $\frac{۴}{۲۵}$
۴) $-\frac{۴}{۲۵}$

۳۰ مشتق تابع $f(x)=x^۲[x]$ در نقاط غیرصحیح کدام است؟

۱) $x[x]$
۲) صفر
۳) $۲x[x]$
۴) $[x]$

۳۱ اگر تابع $f(x)=\begin{cases}a[-x]-|x| & x\le ۲\\ \sqrt{x+۲} & x>۲\end{cases}$ در $x=۲$ پیوسته باشد، مقدار $af'_+(۲)f'_-(۲)$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$
۲) $\frac{۱}{۲}$
۳) $\frac{۱}{۳}$
۴) $\frac{۱}{۸}$

۳۲ نقطهٔ A روی تابع $f(x)=\sqrt{x}$ حرکت می‌کند و از مبدأ مختصات دور می‌شود. آهنگ لحظه‌ای فاصلهٔ نقطهٔ A از مبدأ مختصات در لحظه‌ای که $x=۱$ است چقدر است؟

۱) $\frac{۳}{۲\sqrt{۲}}$ ۲) $۴\sqrt{۲}$

۳) $\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}$ ۴) $\frac{۴\sqrt{۲}}{۳}$

۳۳ اگر $g(۲-\sqrt{x})=f(۴x-x^{۲})$، $g'(۱)=۴$ باشد، آهنگ لحظه‌ای تابع $f(x)$ در $x=۳$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) ۱

۳) ۲ ۴) -۲

۳۴ معادله نیم‌مماس چپ تابع $g(x)=[\frac{۴}{x}]|x^{۲}-۹|$ در $x=۳$ کدام است؟

۱) $y=۱۸+۶x$ ۲) $y=۱۸-۶x$

۳) $y=۶+۱۸x$ ۴) $y=۶-۱۸x$

۳۵ خط مماس بر تابع $f(x)=x^{۳}+x+a$ در نقطه‌ای به طول ۱ واقع بر منحنی از نقطه $B(۳,۴)$ می‌گذرد، $f(-۱)$ کدام است؟

۱) -۶ ۲) -۸

۳) -۴ ۴) ۸

۳۶ آهنگ لحظه‌ای تابع $y=\frac{\sqrt{x}-\sqrt[۳]{x}}{\sqrt{x}+\sqrt[۳]{x}}$ در نقطهٔ $x=۱$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۱۰}$ ۲) $\frac{۱}{۱۲}$

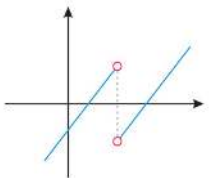
۳) $\frac{۱}{۸}$ ۴) $\frac{۱}{۱۴}$

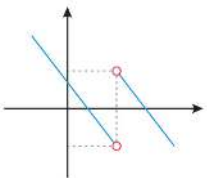
۳۷ اگر $\lim_{x\to ۱}\frac{a(x^{۳}-۱)}{a\sqrt{x}-۱}=a+b$ باشد، مقدار b کدام است؟ $(a\neq -b)$

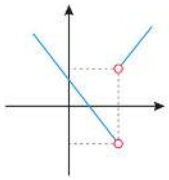
۱) ۶ ۲) ۱

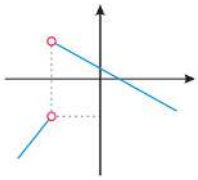
۳) ۵ ۴) ۴

۳۸ اگر $f(x) = x|x-۲|$ باشد، نمودار تابع $f'(x)$ کدام است؟

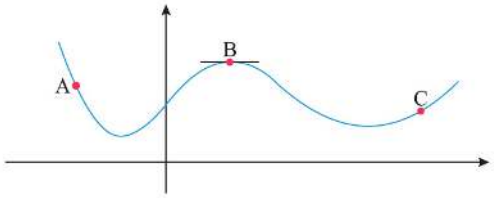
۱)


۲)


۳)


۴)


۳۹ اگر نمودار $f(x)$ به‌صورت زیر باشد، کدام رابطه صحیح است؟



۱) $f'(x_A) + f'(x_C) > ۰$

۲) $f'(x_A) + f'(x_B) = ۰$

۳) $f'(x_A) > f'(x_C)$

۴) $|f'(x_A)| > f'(x_C)$

۴۰ اگر $f(x) = \sqrt{x-۱} + \sqrt{۴-x}$ و $D_{f'} = (a\ ,\ b)$ باشد، $b-a$ چقدر است؟

۱) ۳

۲) ۲

۳) ۴

۴) ۱

۴۱ درصورتی‌که $f(x) = (x^۴ - ۸x)\log_۲ x$ باشد، $f'(۲)$ کدام است؟

۱) ۲۴

۲) ۳۲

۳) ۶۴

۴) ۳۰

۴۲ اگر $u = (\sqrt{x+۲} - \sqrt{x+۱})^۶$ و $v = (\sqrt{x+۲} + \sqrt{x+۱})^۵$ باشد، مقدار $u'v + v'u$ به‌ازای $x = ۰$ چقدر است؟

۱) $\frac{\sqrt{۲}-۲}{۴}$

۲) $\frac{\sqrt{۲}+۲}{۴}$

۳) $\frac{\sqrt{۲}-۲}{۲}$

۴) $\frac{\sqrt{۲}+۲}{۲}$

۴۳ خط گذرا از دو نقطهٔ $M(۲\ ,\ -۱)$ و $N(۳\ ,\ ۰)$ بر تابع $f(x) = x^۳ + x^۲ + ax$ مماس است. مقدار a کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$

۲) $\frac{۵}{۳}$

۳) $\frac{۴}{۳}$

۴) $\frac{۷}{۳}$

۴۴ اگر $y = ۲\sqrt[۳]{۱-x^۲}$ باشد، مقدار $y'y^۲$ کدام است؟

۱) $\frac{۱۶}{۳}x$
۲) $-\frac{۱۶}{۳}x$
۳) $\frac{۳}{۱۶}x$
۴) $-\frac{۳}{۱۶}x$

۴۵ اگر $x \geq ۳$، $f(x) = x^۲ - ۶x$، مشتق تابع $f^{-۱}(x)$ در نقطه‌ای به طول ۸- واقع بر آن چقدر است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$
۲) $\frac{۱}{۳}$
۳) $\frac{۱}{۴}$
۴) $\frac{۱}{۵}$

۴۶ اگر $f(۴-\sqrt{x}) = \frac{x}{۱+x}$، مقدار $f(۲)f'(۲)$ چقدر است؟

۱) $\frac{۱۶}{۱۲۵}$
۲) $-\frac{۱۶}{۱۲۵}$
۳) $\frac{۴}{۲۵}$
۴) $-\frac{۴}{۲۵}$

۴۷ آهنگ متوسط تابع $f(x) = x^۳ + ۲x^۲$ در بازهٔ $[۱\ ,\ ۲]$ برابر آهنگ لحظه‌ای در کدام نقطه است؟

۱) $\frac{\sqrt{۴۳}+۲}{۳}$
۲) $\frac{\sqrt{۴۳}-۲}{۳}$
۳) $\frac{\sqrt{۳۴}+۲}{۳}$
۴) $\frac{\sqrt{۳۴}-۲}{۳}$

۴۸ آهنگ لحظه‌ای تابع $f(t) = \frac{۳}{۱+۲\sqrt[۳]{t}}$ در لحظه‌ای که $f(t) = ۰/۶$ باشد چقدر است؟

۱) ۰/۰۱
۲) $-۰/۰۲$
۳) ۰/۰۳
۴) $-۰/۰۴$

۴۹ شیب خط مماس بر تابع $f(x) = \frac{x^۳}{x-۱} + \sqrt[۳]{۴x}$ در نقطه‌ای به طول (۲) کدام است؟

۱) $\frac{۸}{۳}$
۲) $\frac{۱۳}{۳}$
۳) $\frac{۱۵}{۴}$
۴) $\frac{۱۱}{۳}$

۵۰ مشتق تابع $f(x) = x^۲[x]$ در نقاط غیرصحیح کدام است؟

۱) $x[x]$
۲) صفر
۳) $۲x[x]$
۴) $[x]$

۵۱ اگر $f(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{x} & ;x>0\\ 0 & ;x=0\\ -x\sqrt[3]{x} & ;x<0\end{cases}$ باشد، کدام رابطه صحیح است؟

۱) $f'_+(0)=+\infty$ ۲) $f'_+(0)=-\infty$

۳) $f'_-(0)=-\infty$ ۴) $f'_-(0)=+\infty$

۵۲ خط گذرا از دو نقطهٔ $A(1,2)$ و $B(-1,-6)$ با خط مماس بر تابع $f(x)=x^2$ در نقطه‌ای به طول c موازی است، c کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳

۳) ۱ ۴) -۱

۵۳ اگر $\lim\limits_{x\to 4}\frac{f(x)-f(4)}{2(x-4)}=1-\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(4+h)-f(4)}{h}$ باشد، مشتق تابع $f(x)$ در نقطه‌ای به طول ۴ واقع بر منحنی چقدر است؟

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{2}{3}$

۳) ۲ ۴) ۳

۵۴ اگر $f(x)=(x^4-1)\sqrt[3]{x}$ باشد، حاصل $f'(1)+2f'(-1)$ چقدر است؟

۱) ۱۱ ۲) ۱۲

۳) ۱۰ ۴) -۸

۵۵ اگر $(f+g)'(4)=1$ و $(f-2g)'(4)=-5$ باشد، حاصل $(3f-g)'(4)$ چقدر است؟

۱) -۵ ۲) ۵

۳) ۴ ۴) -۴

۵۶ خط مماس بر تابع $f(x)=x^3$ در نقطه‌ای به طول ۱، خط مماس بر تابع $g(x)=3\sqrt[3]{x}$ در نقطه‌ای به طول ۱، را در نقطه‌ای با کدام عرض قطع می‌کند؟

۱) ۲ ۲) ۳

۳) ۴ ۴) ۵

پاسخ Homework نهایی مشتق

۱ گزینه ۲

خواسته مسئله $f'(۲)$ است.

$$f'(x)=\frac{۲\times\frac{-۹-۲}{(x-۳)^۲}}{۳\sqrt[۳]{\frac{۳x+۲}{x-۳}}}\Rightarrow f'(۲)=\frac{۲\times(-۱۱)}{۳\times(-۲)}=\frac{۱۱}{۳}$$

۲ گزینه ۲

در همسایگی چپ $x=۲$ داریم:

$$f(x)=(۴-x^۲)[-(۲^-)]=۲x^۲-۸\Rightarrow f'(x)=۴x\Rightarrow f'_-(۲)=۸$$

پس شیب نیم مماس چپ برابر ۸ و نقطه تماس $(۲\ ,\ ۰)$ است.

خط مماس: $y-۰=۸(x-۲)\Rightarrow y+۱۶=۸x$

۳ گزینه ۳

$$\lim_{x\to-۲}\frac{f(x)-۷}{۲(x+۲)}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\lim_{x\to-۲}\frac{f(x)-۷}{x-(-۲)}=۱\Rightarrow\begin{cases}f(-۲)=۷\\f'(-۲)=۱\end{cases}$$

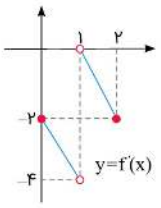
$$g(x)=x^۲f(۲x)\Rightarrow g'(x)=۲xf(۲x)+۲x^۲f'(۲x)$$
$$\Rightarrow g'(-۱)=-۲f(-۲)+۲f'(-۲)=-۲\times۷+۲\times۱=-۱۲$$

۴ گزینه ۱

تابع در $x = ۱$ مشتق ندارد.

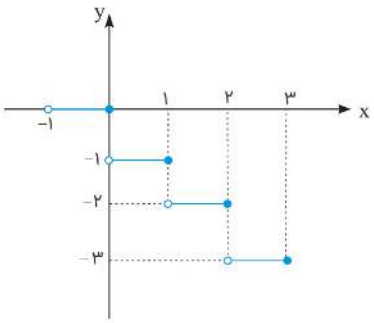
$$۰ \le x < ۱$$
$$\Rightarrow f(x) = -x^۲ - ۲(x-۱) = -x^۲ - ۲x + ۲$$
$$\Rightarrow f'(x) = -۲x - ۲$$

$$۱ < x \le ۲$$
$$\Rightarrow f(x) = -x^۲ + ۲(x-۱) = -x^۲ + ۲x - ۲$$
$$\Rightarrow f'(x) = -۲x + ۲$$



۵ گزینه ۳

نمودار تابع $f(x) = [-x]$ مطابق شکل زیر است:



تابع f در بازهٔ $[۱ , ۲)$ مشتق‌پذیر است، زیرا در بازهٔ $(۱ , ۲)$ مشتق‌پذیر است و در $x = ۲$ نیز مشتق چپ دارد. ضمناً مقدار مشتق آن صفر خواهد بود.
در سایر گزینه‌ها شرایط مشتق‌پذیری روی بازه برقرار نیست.

۶ گزینه ۲

$$f(x) = \log(۲x \times \frac{۱۰}{x}) = \log ۲۰ \Rightarrow f'(x) = ۰$$

۷ گزینه ۱

با فرض $g(x) = x^۴$:

$$f(x) = \lim_{h \to ۰} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = g'(x) \Rightarrow f(x) = ۴x^۳ \Rightarrow f'(x) = ۱۲x^۲ \Rightarrow f'(۲) = ۱۲ \times ۴ = ۴۸$$

۸ گزینه ۲

$$y = ۲\sqrt[۳]{۱-x^۲} \Rightarrow y^۳ = ۸(۱-x^۲) \Rightarrow ۳y^۲y' = -۱۶x \Rightarrow y'y^۲ = -\frac{۱۶}{۳}x$$

۹ گزینه ۴

$$f'(x) = \frac{\sqrt[۳]{x} - \frac{۱}{۳\sqrt[۳]{x^۲}}(x-۱)}{\sqrt[۳]{x^۲}} \Rightarrow f'(۸) = \frac{۲ - \frac{۱}{۱۲}(۷)}{۴} \Rightarrow f'(۸) = \frac{۲۴-۷}{۴\times ۱۲} = \frac{۱۷}{۴۸}$$

۱۰ گزینه ۴

$$f(۲) = ۲\ ,\ f'(۲) = ۳$$

$$h(x) = \frac{f(x+۳)}{g(x)+۳} \Rightarrow h'(x) = \frac{f'(x+۳)(g(x)+۳) - g'(x)f(x+۳)}{(g(x)+۳)^۲} \Rightarrow h'(-۱) = \frac{f'(۲)(g(-۱)+۳) - g'(-۱)f(۲)}{(g(-۱)+۳)^۲}$$

$$= \frac{۳(۷+۳) - ۷(۲)}{(۷+۳)^۲} \Rightarrow h'(-۱) = \frac{۳۰-۱۴}{۱۰۰} = ۰/۱۶$$

۱۱ گزینه ۱

تابع f در ۲ پیوسته است، زیرا:

$$f(۲) = \lim_{x\to ۲} f(x) = ۰$$

$$f'_+(۲) = \lim_{x\to ۲^+} \frac{[-x]|x-۲|}{x-۲} = \lim_{x\to ۲^+} \frac{-۳(x-۲)}{x-۲} = -۳$$

$$f'_-(۲) = \lim_{x\to ۲^-} \frac{[-x]|x-۲|}{x-۲} = \lim_{x\to ۲^-} \frac{-۲(۲-x)}{x-۲} = ۲$$

$$f'_-(۲) \times f'_+(۲) = -۳ \times ۲ = -۶$$

۱۲ گزینه ۳

$$\lim_{x\to ۲} \frac{f(x)-۳}{x^۲-۴} = ۴ \Rightarrow \lim_{x\to ۲} \frac{f(x)-f(۲)}{x-۲} \times \lim_{x\to ۲} \frac{۱}{x+۲} = ۴$$

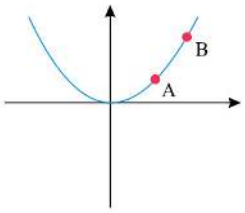
$$\xrightarrow{f(۲)=۳} f'(۲) \times \frac{۱}{۴} = ۴ \Rightarrow f'(۲) = ۱۶$$

$$g(x) = xf(x) \Rightarrow g'(x) = f(x) + xf'(x) \Rightarrow g'(۲) = f(۲) + ۲f'(۲) = ۳ + ۲ \times ۱۶ = ۳۵$$

۱۳ گزینه ۱

$$f(x)g(x)f'(x)g'(x) = \sqrt[۳]{x^۲} \times \sqrt[۳]{x} \times \frac{۲}{۳\sqrt[۳]{x}} \times \frac{۱}{۳\sqrt[۳]{x^۲}} = \frac{۲}{۹}$$

۱۴



$m_B > m_A$

۱۵ گزینه ۱

برای آنکه تابع $f(x) = (x^۲ + bx + a) \times \frac{۱}{۲x + [-x]}$ در $x = ۲$ مشتق‌پذیر باشد، باید معادلهٔ $x^۲ + bx + a = ۰$ ریشهٔ مضاعف $x = ۲$ داشته باشد.

$$(x-۲)^۲ = x^۲ - ۴x + ۴ \Rightarrow \begin{cases} b = -۴ \\ a = ۴ \end{cases} \Rightarrow a + b^۲ \Rightarrow ۴ + ۱۶ = ۲۰$$

۱۶ گزینه ۴

درون قدر مطلق اول منفی و درون سایر قدر مطلق‌ها مثبت می‌شود، پس در همسایگی $x = -\frac{۱}{۲}$ داریم:

$$f(x) = -x(x+۱)(x+۲)(x+۳) = -(x^۲+۳x)(x^۲+۳x+۲)$$
$$\Rightarrow f'(x) = -(۲x+۳)(x^۲+۳x+۲) - (۲x+۳)(x^۲+۳x)$$
$$\Rightarrow f'(x) = -(۲x+۳)(۲x^۲+۶x+۲)$$
$$f'(-\frac{۱}{۲}) = -(-۱+۳)(\frac{۱}{۲} - ۳ + ۲) = -۲ \times \frac{-۱}{۲} = ۱$$

۱۷ گزینه ۴

معادلهٔ خط مماس را می‌نویسیم:

$$m_L = \tan ۴۵^\circ = ۱ \Rightarrow f'(۴) = ۱$$
$$L : y + ۱ = x \xrightarrow{x=۴} y = ۳ \Rightarrow f(۴) = ۳$$
$$\lim_{x\to ۴} \frac{g(x) - g(۴)}{x - ۴} = g'(۴) = \lim_{x\to ۴} \frac{(x^۲ + f(x)) - (۴^۲ + f(۴))}{x - ۴}$$
$$= \lim_{x\to ۴} \frac{(x^۲ - ۱۶) + (f(x) - f(۴))}{x - ۴}$$
$$= \lim_{x\to ۴} \frac{(x^۲ - ۱۶)}{x - ۴} + \lim_{x\to ۴} \frac{f(x) - f(۴)}{x - ۴}$$
$$= \lim_{x\to ۴} (x + ۴) + f'(۴) = ۸ + ۱ = ۹$$

۱۸ گزینه ۲

$$f'(۲)=\lim_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}=\lim_{x\to ۲}\frac{\frac{m}{x}-\frac{m}{۲}}{x-۲}=\lim_{x\to ۲}\frac{-m(x-۲)}{۲x(x-۲)}=\lim_{x\to ۲}\frac{-m}{۲x}=-\frac{m}{۴}>\frac{۱}{۲}$$

$$\xrightarrow{\times(-۴)} m<-۲$$

۱۹ گزینه ۱

باتوجه‌به اطلاعات مسئله $f(۲)=۳$ و $f'(۲)=۱$ است.

$$m_L=f'(۲)=m_{AB}=m_{BC}\Rightarrow\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{y_C-y_B}{x_C-x_B}=۱\Rightarrow\frac{y_B-y_A}{۱}=\frac{۳-y_B}{۱}=۱$$

$$\Rightarrow\begin{cases}y_B=۲\\y_A=۱\end{cases}\Rightarrow A(۰,۱),\ B(۱,۲)$$

$$\frac{|BC|}{|AB|}=\frac{\sqrt{(۲-۳)^۲+(۱-۲)^۲}}{\sqrt{(۲-۱)^۲+(۱-۰)^۲}}=۱$$

۲۰ گزینه ۳

f و g بر هم در نقطه‌ای به طول ۱ مماس‌اند، پس:

$$f(۱)=g(۱)\Rightarrow\frac{a+b}{۴}=۰\Rightarrow a+b=۰\Rightarrow a=-b$$

$$f'(x)=\frac{۲ax+b}{۴},\ g'(x)=۳x^۲$$

$$f'(۱)=g'(۱)\Rightarrow\frac{۲a+b}{۴}=۳\Rightarrow ۲a+b=۱۲\xrightarrow{a=-b}a=۱۲,\ b=-۱۲$$

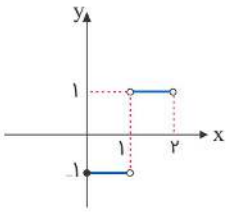
$$\Rightarrow f(x)=۳(x^۲-x)\Rightarrow f(۲)=۳(۴-۲)=۶$$

۲۱ گزینه ۳

تابع در $x = ۰$ پیوستگی راست دارد، اما در $x = ۲$ پیوستگی چپ ندارد و همچنین در $x = ۱$ مشتق‌پذیر نیست.

$$۰ \le x < ۱ \Rightarrow f(x) = -x + ۱ \Rightarrow f'(x) = -۱$$

$$۱ < x < ۲ \Rightarrow f(x) = x - ۱ + ۱ \Rightarrow f'(x) = ۱$$



۲۲ گزینه ۱

باید معادلهٔ $x^۲ + bx + c = ۰$ دو ریشهٔ ۱ و ۲ بدهد.

$$\begin{cases} ۱ + ۲ = \dfrac{-b}{۱} \Rightarrow b = -۳ \\ ۱ \times ۲ = \dfrac{c}{۱} \Rightarrow c = ۲ \end{cases} \Rightarrow f(x) = \sqrt[۳]{x^۲ - ۳x + ۲}$$

$$f'(۰) = \lim_{x \to ۰} \frac{f(x) - f(۰)}{x - ۰}$$

$$= \lim_{x \to ۰} \frac{\sqrt[۳]{x^۲ - ۳x + ۲} - \sqrt[۳]{۲}}{x} \times \frac{\sqrt[۳]{(x^۲ - ۳x + ۲)^۲} + \sqrt[۳]{۲(x^۲ - ۳x + ۲)} + \sqrt[۳]{۴}}{\sqrt[۳]{(x^۲ - ۳x + ۲)^۲} + \sqrt[۳]{۲(x^۲ - ۳x + ۲)} + \sqrt[۳]{۴}}$$

$$= \lim_{x \to ۰} \frac{x(x - ۳)}{x(\sqrt[۳]{(x^۲ - ۳x + ۲)^۲} + \sqrt[۳]{۲(x^۲ - ۳x + ۲)} + \sqrt[۳]{۴})} = \frac{-۳}{\sqrt[۳]{۴} + \sqrt[۳]{۴} + \sqrt[۳]{۴}} = \frac{-۱}{\sqrt[۳]{۴}}$$

۲۳ گزینه ۳

$$g(x) = f(x) + f'(x) + f''(x) = (ax^۲ + bx + c) + (۲ax + b) + ۲a$$

$$g(x) = ax^۲ + (b + ۲a)x + c + b + ۲a$$

اگر $g(x)$ را معادل با $x^۲$ در نظر بگیریم:

$$\begin{cases} a = ۱ \\ b + ۲a = ۰ \xrightarrow{a=۱} b = -۲ \\ c + b + ۲a = ۰ \xrightarrow{a=۱, b=-۲} c = ۰ \end{cases} \Rightarrow f(x) = x^۲ - ۲x \Rightarrow f(-۱) = ۳$$

۲۴ گزینه ۴

تابع در $x=۰$ پیوسته و در $x=۲$ ناپیوسته است. ضمناً تابع در $x=۰$ مشتق ندارد $(f'_+(۰)\neq f'(۰))$ و همچنین در $x=۳$ مشتق‌پذیر نیست، پس طول نقاط گوشه‌ای تابع $x=۰$ و $x=۳$ است.

۲۵ گزینه ۳

f در $x=۲$ ناپیوسته است و درنتیجه مشتق‌ناپذیر است و همچنین در $x=۱$ (نقطه گوشه‌ای) مشتق ندارد، پس مجموعاً در دو نقطهٔ $\{۱, ۲\}$ مشتق ندارد.

۲۶ گزینه ۱

$$f'(۳)=\lim_{x\to ۳}\frac{(x^۲-۹)\sin\frac{\pi}{۲x}}{x-۳}=\lim_{x\to ۳}(x+۳)\sin\frac{\pi}{۲x}=۶\times\frac{۱}{۲}=۳$$

۲۷ گزینه ۱

$$g(x)=f(۲x+۱)=|۲x|[-۲(۲x+۱)]$$

تنها $x=۰$ نقطه‌ای برای $g(x)$ است که g در آن پیوسته است، اما مشتق چپ و راست آن نابرابر است که همین نقطه را نقطهٔ گوشه‌ای می‌نامیم.

۲۸

$$\lim_{x\to x_۰}\frac{f(x)-f(x_۰)}{x-x_۰}=\lim_{x\to ۱}\frac{\sqrt{x+۸}-۳}{x-۱}\times\frac{\sqrt{x+۸}+۳}{\sqrt{x+۸}+۳}=\lim_{x\to ۱}\frac{(x-۱)}{(x-۱)(\sqrt{x+۸}+۳)}=\frac{۱}{۶}$$

۲۹ گزینه ۲

$$f(۴-\sqrt{x})=\frac{x}{۱+x}\xrightarrow{x=۴}f(۲)=\frac{۴}{۵}$$

$$f(۴-\sqrt{x})=\frac{x}{۱+x}\Rightarrow-\frac{۱}{۲\sqrt{x}}f'(۴-\sqrt{x})=\frac{۱+x-x}{(۱+x)^۲}$$

$$\xrightarrow{x=۴}-\frac{۱}{۴}f'(۲)=\frac{۱}{۲۵}\Rightarrow f'(۲)=-\frac{۴}{۲۵}$$

$$f(۲)f'(۲)=\frac{۴}{۵}\times\frac{-۴}{۲۵}=\frac{-۱۶}{۱۲۵}$$

۳۰ گزینه ۳

تابع $f(x)$ در نقاط غیرصحیح پیوسته و مشتق‌پذیر است و مشتق آن برابر $۲x[x]$ است، زیرا در همسایگی اعداد صحیح $[x]$ حکم یک عدد را دارد.

۳۱ گزینه ۲

$$f(۲) = \lim_{x\to ۲^-} f(x) = \lim_{x\to ۲^+} f(x) \Rightarrow -۲a - ۲ = ۲ \Rightarrow a = -۲$$

در همسایگی راست $x = ۲$ داریم:

$$f(x) = \sqrt{x+۲} \Rightarrow f'(x) = \frac{۱}{۲\sqrt{x+۲}} \Rightarrow f'_+(۲) = \frac{۱}{۴}$$

در همسایگی چپ $x = ۲$ داریم:

$$f(x) = -۲[-x] - x = -۲ \times (-۲) - x \Rightarrow f'(x) = -۱ \Rightarrow f'_-(۲) = -۱$$

$$af'_+(۲)f'_-(۲) = -۲ \times \frac{۱}{۴} \times (-۱) = \frac{۱}{۲}$$

۳۲ گزینه ۱

نقطهٔ A را به‌صورت $A(x\ ,\ \sqrt{x})$ در نظر می‌گیریم و فاصلهٔ آن را از مبدأ مختصات حساب می‌کنیم:

$$|OA| = \sqrt{x^۲ + x} = d(x) \Rightarrow d'(x) = \frac{۲x+۱}{۲\sqrt{x^۲+x}} \Rightarrow d'(۱) = \frac{۳}{۲\sqrt{۲}}$$

۳۳ گزینه ۱

$$f(۴x - x^۲) = g(۲ - \sqrt{x}) \Rightarrow (۴ - ۲x)f'(۴x - x^۲) = \frac{-۱}{۲\sqrt{x}}g'(۲ - \sqrt{x})$$

$$\xrightarrow{x=۱} ۲f'(۳) = -\frac{۱}{۲}g'(۱) \xrightarrow{g'(۱)=۴} f'(۳) = -۱$$

۳۴ گزینه ۲

در همسایگی چپ $x = ۳$ داریم:

$$g(x) = ۹ - x^۲ \Rightarrow g'(x) = -۲x \Rightarrow g'_-(۳) = -۶$$

به کمک نقطه $(۳\ ,\ ۰)$ و شیب ۶- معادله خط می‌نویسیم:

$$y - ۰ = -۶(x - ۳) \Rightarrow y = ۱۸ - ۶x$$

۳۵ گزینه ۲

$$f(۱) = ۲ + a \Rightarrow (۱\ ,\ ۲ + a) \in f$$

$$f'(x) = ۳x^۲ + ۱ \Rightarrow f'(۱) = ۴$$

خط مماس : $y - (۲ + a) = ۴(x - ۱) \xrightarrow{(۳\ ,\ ۴)} ۴ - ۲ - a = ۸ \Rightarrow a = -۶$

$$f(-۱) = -۱ - ۱ + a = -۸$$

۳۶ گزینه ۲

$$y' = \frac{(\frac{۱}{۲\sqrt{x}} - \frac{۱}{۳\sqrt[۳]{x^۲}})(\sqrt{x} + \sqrt[۳]{x}) - (\frac{۱}{۲\sqrt{x}} + \frac{۱}{۳\sqrt[۳]{x^۲}})(\sqrt{x} - \sqrt[۳]{x})}{(\sqrt{x} + \sqrt[۳]{x})^۲}$$

$$y'(۱) = \frac{(\frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۳})(۱+۱) - (\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳})(۱-۱)}{(۱+۱)^۲} = \frac{۱}{۱۲}$$

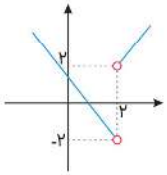
۳۷ گزینه ۳

$$\lim_{x\to ۱} \frac{a(x^۳ - ۱)}{a\sqrt{x} - ۱} = a + b \neq ۰ \Rightarrow \lim_{x\to ۱} (a\sqrt{x} - ۱) = ۰ \Rightarrow a = ۱$$

$$\lim_{x\to ۱} \frac{x^۳ - ۱}{\sqrt{x} - ۱} \overset{\frac{۰}{۰}\text{hop}}{=\!=} \lim_{x\to ۱} \frac{۳x^۲}{\frac{۱}{۲\sqrt{x}}} = ۶ \Rightarrow a + b = ۶ \xrightarrow{a=۱} b = ۵$$

۳۸ گزینه ۳

تابع f در $x = ۲$ مشتق‌پذیر نیست.



$$f(x) = \begin{cases} x(x-۲) & ; x \geq ۲ \\ x(۲-x) & ; x < ۲ \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} ۲x - ۲ & ; x > ۲ \\ ۲ - ۲x & ; x < ۲ \end{cases}$$

۳۹ گزینه ۴

شیب خط مماس در نقاط A، B و C به‌ترتیب منفی، صفر و مثبت است، اما دقت کنید که اندازهٔ شیب در نقطهٔ A از اندازهٔ شیب در نقطهٔ C بیش‌تر است، پس $|f'(x_A)| > f'(x_C)$ است.

۴۰ گزینه ۱

دامنهٔ تابع $D_f = [۱, ۴]$ است.

$$f'(x) = \frac{۱}{۲\sqrt{x-۱}} + \frac{-۱}{۲\sqrt{۴-x}} \Rightarrow D_{f'} = (۱, ۴) \Rightarrow b - a = ۴ - ۱ = ۳$$

۴۱ گزینه ۱

$$f(x) = (\underbrace{x^۴ - ۸x}_{H(x)})\log_۲ x \Rightarrow H'(x) = (۴x^۳ - ۸)$$

چون $H(x)$ عامل صفرکننده و پیوسته برای $f(x)$ است، پس:

$$f'(۲) = H'(۲)\log_۲ ۲ = ۴ \times ۸ - ۸ = ۲۴$$

۴۲ گزینه ۱

$$uv = (\sqrt{x+۲} - \sqrt{x+۱})^۶(\sqrt{x+۲} + \sqrt{x+۱})^۵ = \sqrt{x+۲} - \sqrt{x+۱}$$

$$(uv)' = \frac{۱}{۲\sqrt{x+۲}} - \frac{۱}{۲\sqrt{x+۱}} \xrightarrow{x=۰} \frac{۱}{۲\sqrt{۲}} - \frac{۱}{۲} = \frac{۱-\sqrt{۲}}{۲\sqrt{۲}} \times \frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}} \Rightarrow (uv)' = \frac{\sqrt{۲}-۲}{۴}$$

۴۳ گزینه ۳

شیب خط گذرا از M و N را برابر مشتق تابع قرار می‌دهیم:

$$f'(x) = \frac{۰-(-۱)}{۳-۲} = ۱ \Rightarrow ۳x^۲ + ۲x + a = ۱ \Rightarrow ۳x^۲ + ۲x + a - ۱ = ۰$$

$$\Delta = ۰ \Rightarrow ۴ - ۴(۳)(a-۱) = ۰ \Rightarrow a - ۱ = \frac{۱}{۳} \Rightarrow a = \frac{۴}{۳}$$

۴۴ گزینه ۲

$$y = ۲\sqrt[۳]{۱-x^۲} \Rightarrow y^۳ = ۸(۱-x^۲) \Rightarrow ۳y^۲y' = -۱۶x \Rightarrow y'y^۲ = -\frac{۱۶}{۳}x$$

۴۵ گزینه ۱

$$f(x) = y = x^۲ - ۶x \xrightarrow{+۹} y + ۹ = (x-۳)^۲ \xrightarrow{x\geq ۳} x = ۳ + \sqrt{y+۹} \Rightarrow f^{-۱}(x) = ۳ + \sqrt{x+۹}$$

$$\Rightarrow (f^{-۱})'(x) = \frac{۱}{۲\sqrt{x+۹}} \Rightarrow (f^{-۱})'(-۸) = \frac{۱}{۲}$$

۴۶ گزینه ۲

$$f(۴ - \sqrt{x}) = \frac{x}{۱+x} \xrightarrow{x=۴} f(۲) = \frac{۴}{۵}$$

$$f(۴ - \sqrt{x}) = \frac{x}{۱+x} \Rightarrow -\frac{۱}{۲\sqrt{x}}f'(۴ - \sqrt{x}) = \frac{۱+x-x}{(۱+x)^۲} \xrightarrow{x=۴} -\frac{۱}{۴}f'(۲) = \frac{۱}{۲۵} \Rightarrow f'(۲) = -\frac{۴}{۲۵}$$

$$f(۲)f'(۲) = \frac{۴}{۵} \times \frac{-۴}{۲۵} = \frac{-۱۶}{۱۲۵}$$

۴۷ گزینه ۲

$$f'(c)=\frac{f(۲)-f(۱)}{۲-۱}\Rightarrow ۳c^۲+۴c=\frac{(۸+۸)-(۱+۲)}{۱}\Rightarrow ۳c^۲+۴c=۱۳\Rightarrow ۳c^۲+۴c-۱۳=۰$$

$$\Rightarrow c=\frac{-۲\pm\sqrt{۴+۳۹}}{۳}=\frac{-۲\pm\sqrt{۴۳}}{۳}\xrightarrow{c\in(۱,۲)}c=\frac{\sqrt{۴۳}-۲}{۳}$$

۴۸ گزینه ۲

$$f(t)=۰/۶\Rightarrow\frac{۳}{۱+۲\sqrt[۳]{t}}=\frac{۶}{۱۰}\Rightarrow ۱+۲\sqrt[۳]{t}=۵\Rightarrow t=۸$$

$$f'(t)=\frac{-۲\times\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{t^۲}}\times ۳}{(۱+۲\sqrt[۳]{t})^۲}\Rightarrow f'(۸)=\frac{-\frac{۲}{۴}}{(۱+۴)^۲}=\frac{-\frac{۱}{۲}}{۲۵}=\frac{-۱}{۵۰}=-۰/۰۲$$

۴۹ گزینه ۲

$$f'(x)=\frac{۳x^۲(x-۱)-x^۳}{(x-۱)^۲}+\frac{۴}{۳\sqrt[۳]{(۴x)^۲}}\Rightarrow f'(۲)=\frac{۱۲\times ۱-۸}{۱}+\frac{۴}{۳\sqrt[۳]{۸^۲}}=۴+\frac{۱}{۳}=\frac{۱۳}{۳}$$

۵۰ گزینه ۳

تابع $f(x)$ در نقاط غیرصحیح پیوسته و مشتق‌پذیر است و مشتق آن برابر $۲x[x]$ است، زیرا در همسایگی اعداد صحیح $[x]$ حکم یک عدد را دارد.

۵۱ گزینه ۱

تابع f در $x=۰$ پیوسته است. حال به محاسبهٔ مشتق‌های چپ و راست می‌پردازیم:

$$f'_+(۰)=\lim_{x\to ۰^+}\frac{f(x)-f(۰)}{x-۰}=\lim_{x\to ۰^+}\frac{\sqrt[۳]{x}}{x}=\lim_{x\to ۰^+}\frac{۱}{\sqrt[۳]{x^۲}}=+\infty$$

$$f'_-(۰)=\lim_{x\to ۰^-}\frac{f(x)-f(۰)}{x-۰}=\lim_{x\to ۰^-}\frac{-x\sqrt[۳]{x}}{x}=\lim_{x\to ۰^-}(-\sqrt[۳]{x})=۰$$

۵۲ گزینه ۱

$$f'(c)=m_{AB}\Rightarrow\lim_{x\to c}\frac{x^۲-c^۲}{x-c}=\frac{۲-(-۶)}{۱-(-۱)}=\lim_{x\to c}\frac{(x-c)(x+c)}{x-c}=۴\Rightarrow ۲c=۴\Rightarrow c=۲$$

۵۳ گزینه ۲

باتوجه‌به تعریف مشتق:

$$f'(۴)=\lim_{x\to ۴}\frac{f(x)-f(۴)}{x-۴}=\lim_{h\to ۰}\frac{f(۴+h)-f(۴)}{h}$$

طبق دادهٔ مسئله:

$$f'(۴)=۱-\frac{۱}{۲}f'(۴)\Rightarrow\frac{۳}{۲}f'(۴)=۱\Rightarrow f'(۴)=\frac{۲}{۳}$$

۵۴ گزینه ۲

$$f(x)=\underbrace{(x^{۴}-۱)}_{h(x)}\sqrt[۳]{x}\Rightarrow h'(x)=۴x^{۳}$$

تابع $h(x)$ عامل صفرکننده‌ای است که در $x=۱$ و $x=-۱$ پیوسته است، بنابراین:

$$\left.\begin{array}{l}f'(۱)=h'(۱)\sqrt[۳]{۱}=۴\\ f'(-۱)=h'(-۱)\sqrt[۳]{-۱}=۴\end{array}\right\}\Rightarrow f'(۱)+۲f'(-۱)=۱۲$$

۵۵ گزینه ۱

$$\begin{cases}(f+g)'(۴)=۱\\ (f-۲g)'(۴)=-۵\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f'(۴)+g'(۴)=۱\\ f'(۴)-۲g'(۴)=-۵\end{cases}\xrightarrow{(-)}۳g'(۴)=۶\Rightarrow g'(۴)=۲\,,\ f'(۴)=-۱$$

$$(۳f-g)'(۴)=۳f'(۴)-g'(۴)=۳\times(-۱)-۲=-۵$$

۵۶ گزینه ۳

$$f(x)=x^{۳}\Rightarrow f(۱)=۱\Rightarrow A(۱,\,۱)$$

$$f'(x)=۳x^{۲}\Rightarrow f'(۱)=۳\Rightarrow \text{خط مماس}: y-۱=۳(x-۱)\Rightarrow y=۳x-۲$$

$$g(x)=۳\sqrt[۳]{x}\Rightarrow g(۱)=۳\Rightarrow(۱,\,۳)\in g$$

$$g(x)=۳\sqrt[۳]{x}\Rightarrow g'(x)=\frac{۱}{\sqrt[۳]{x^{۲}}}\Rightarrow g'(۱)=۱\Rightarrow \text{خط مماس}: y-۳=۱(x-۱)$$

$$\Rightarrow y=x+۲$$

دو خط مماس به‌دست‌آمده را تلاقی می‌دهیم:

$$۳x-۲=x+۲\Rightarrow ۲x=۴\Rightarrow x=۲\Rightarrow y=۴$$

پس دو خط مماس در نقطه‌ای به عرض ۴ متقاطع‌اند.

کاربرد مشتق

توابع صعودی و نزولی

بررسی جهت تغییرات تابع

۱) تابع $f(x)$ صعودی است، اگر به ازای $x_1 < x_2$ داشته باشیم $f(x_1) \le f(x_2)$.

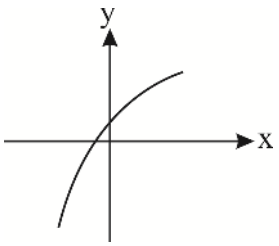
۲) تابع $f(x)$ نزولی است، اگر به ازای $x_1 < x_2$ داشته باشیم $f(x_1) \ge f(x_2)$.

۳) تابع $f(x)$ صعودی اکید است، اگر به ازای $x_1 < x_2$ داشته باشیم $f(x_1) < f(x_2)$.

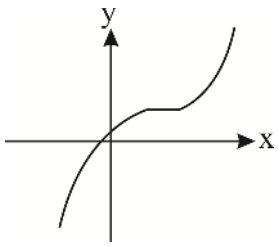
۴) تابع $f(x)$ نزولی اکید است، اگر به ازای $x_1 < x_2$ داشته باشیم $f(x_1) > f(x_2)$.

به بیان ساده‌تر تابع وقتی صعودی اکید است که با زیادشدن x، مقدار y هم زیاد شود و وقتی نزولی اکید است که با زیادشدن x، مقدار y کم شود.

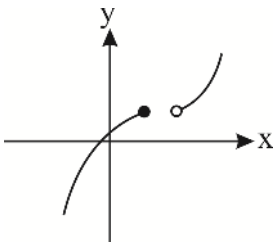
فرق تابع صعودی و صعودی اکید در این است که در هر دو با زیادشدن مقدار x، مقدار y زیاد می‌شود، ولی در تابع صعودی ممکن است مقدار y به ازای دو مقدار x با هم برابر باشند. به تابعی که صعودی یا نزولی باشد، می‌گوییم یکنوا و اگر تابع نه صعودی باشد و نه نزولی، غیریکنوا یا نایکنوا است. برای توضیح بهتر به شکل‌های زیر نگاه کنید:



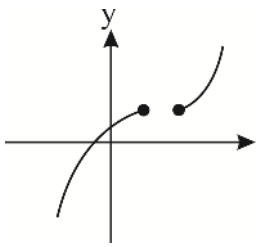
صعودی اکید



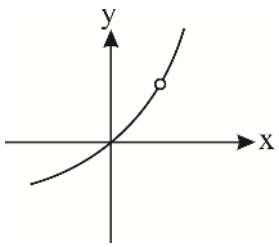
صعودی



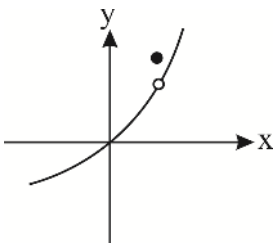
صعودی اکید



صعودی

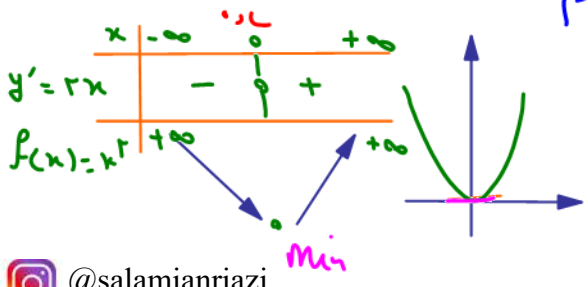


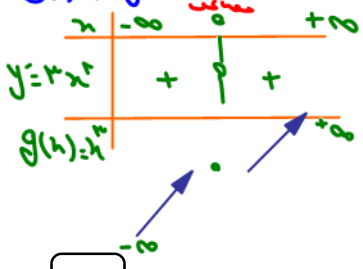
صعودی اکید

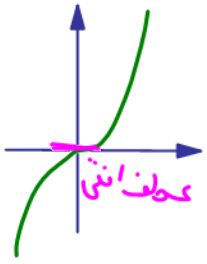


غیریکنوا

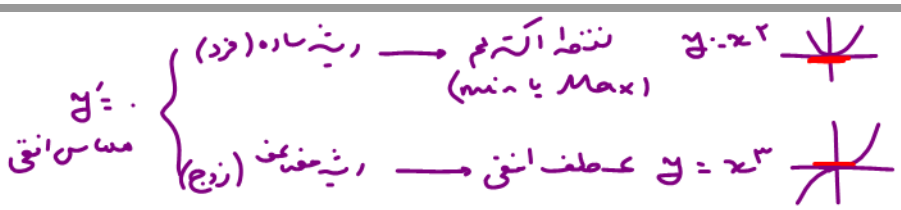
نکته: اگر مشتق در یک بازه صفر شود تابع در آن بازه ثابت است اما اگر در یک نقطه مشتق صفر شود باید دید که تغییر علامت می دهد یا خیر. دو تابع $f(x)=x^2$ و $g(x)=x^3$ را بررسی می‌کنیم.



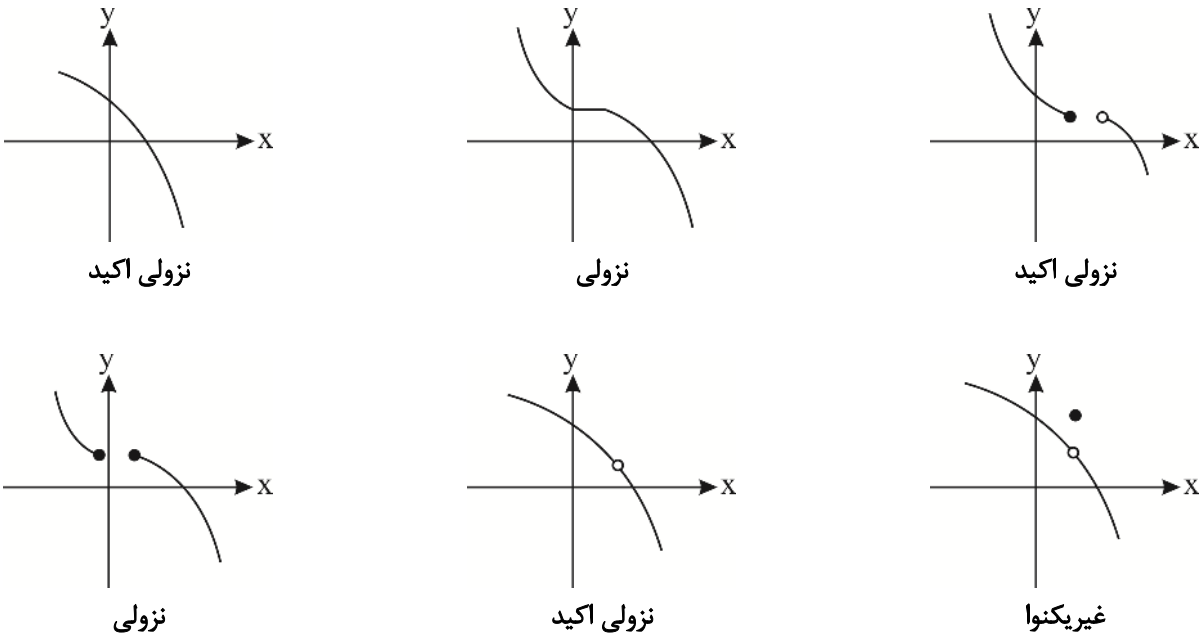




نکته:

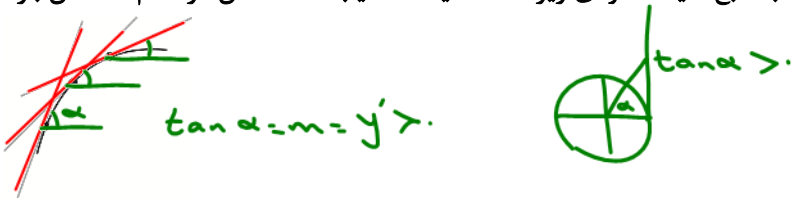


و به همین ترتیب فرق تابع نزولی و نزولی اکید در این است که در حالت اکید مقدار y همواره کم می‌شود، ولی در تابع نزولی ممکن است دو یا چند نقطه با xهای مختلف، yهای یکسان داشته باشند. به شکل‌های زیر نگاه کنید:



۱) اگر تابعی در بازه I مشتق‌پذیر باشد و مقدار f' مثبت باشد، آن‌گاه، f در آن بازه اکیداً صعودی است.

به تابع اکیداً صعودی زیر دقت کنید که شیب خط مماس در تمام نقاط آن بازهٔ مثبت است.



۲) اگر تابعی در بازهٔ I مشتق‌پذیر باشد و مقدار f' منفی باشد، آن‌گاه، f در آن بازه اکیداً نزولی است.

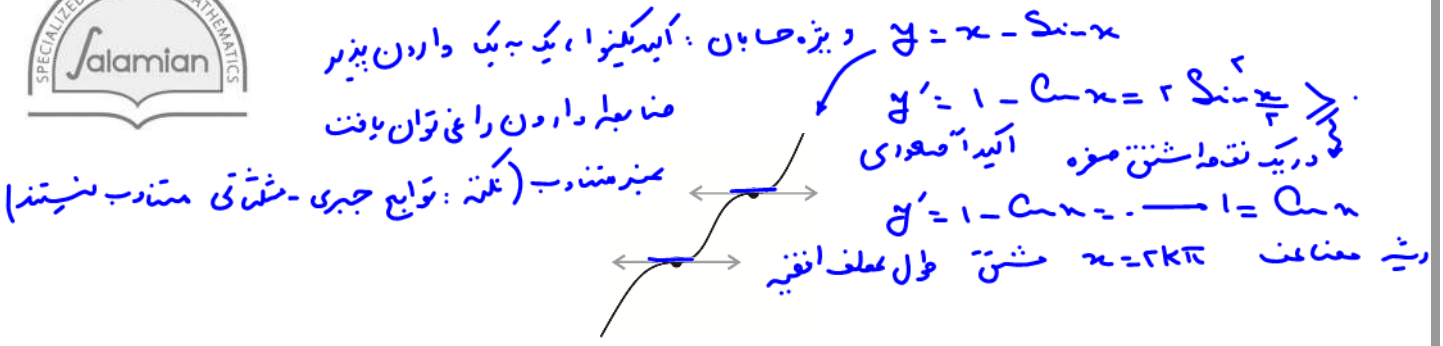
به تابع اکیداً نزولی زیر دقت کنید که شیب خط مماس در تمام نقاط آن بازه منفی است.

بنابراین با کمک تعیین علامت تابع مشتق تابع $y = f(x)$ می‌توانیم وضعیت یکنوایی تابع f را در بازه‌های مختلف مشخص کنیم.

۳) اگر تابعی در بازهٔ I مشتق‌پذیر باشد و مقدار f' برابر صفر باشد، آن‌گاه در آن بازه تابعی ثابت خواهیم داشت.

دقت کنید که در تمام نقاط یک تابع ثابت مشتق‌پذیر شیب خط مماس صفر است.

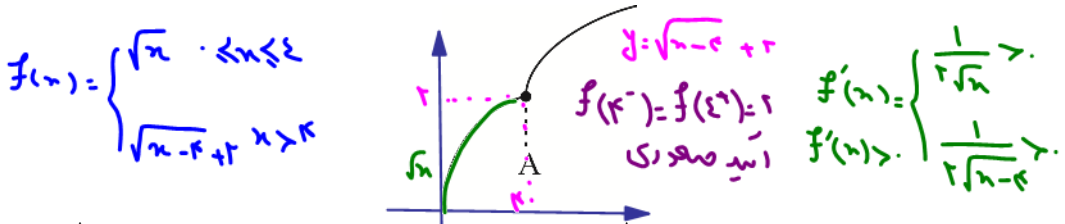
۴) اگر تابعی در بازهٔ I مشتق‌پذیر باشد و مقدار f'، بزرگ‌تر مساوی صفر باشد اما صفرکننده‌ها تشکیل یک بازه ندهند هم‌چنان تابع یک تابع اکیداً صعودی خواهد بود. بنابراین صفرشدن مشتق لزوماً قید اکید را از تابع یکنوا کنار نمی‌گذارد.



به تابع فوق خوب دقت کنید. مشتق این تابع در تمام نقاط به‌جز دو نقطه مثبت و در آن دو نقطه صفر است اما این موضوع ضربه‌ای به اکیداً صعودی‌بودن تابع نمی‌زند.

۵) اگر تابعی در بازهٔ I مشتق‌پذیر باشد و مقدار f' کوچک‌تر مساوی صفر باشد اما صفرکننده‌ها تشکیل یک بازه ندهند همچنان تابع، یک تابع اکیداً نزولی خواهد بود.

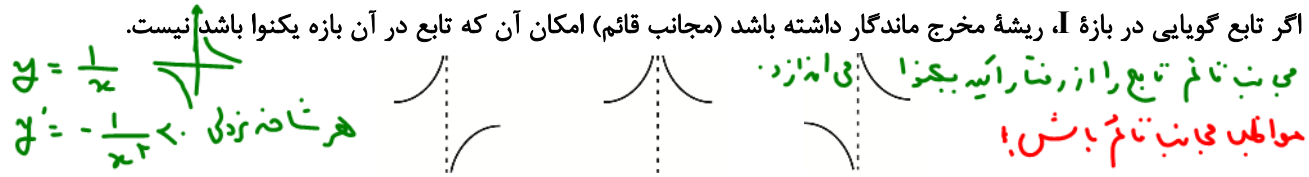
۶) اگر تابعی در بازهٔ I پیوسته باشد اما در این بازه نقطهٔ مشتق‌ناپذیری داشته باشد چنان‌چه در همسایگی راست و چپ آن مشتق تابع (هر دو) مثبت یا (هر دو) منفی باشد این نقطهٔ مشتق‌ناپذیر به یکنوایی تابع در آن بازه ضربه‌ای نمی‌زند.



به عنوان مثال تابع فوق در تمام حوزهٔ تعریفش به‌جز نقطهٔ A مشتق‌پذیر و مشتقی مثبت دارد. بنابراین خود نقطهٔ A که تابع در آن نقطه مشتق‌ناپذیر است ضربه‌ای به اکیداً صعودی بودن تابع نمی‌زند. (چون در همسایگی راست و چپ نقطهٔ $x = A$ تابع مشتق مثبت است.)

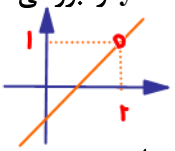
۷) در توابعی که در بازهٔ I ناپیوسته هستند، پیشنهاد ما رسم تابع و تحلیل یکنوایی تابع بر اساس نمودار آن است.

۸) اگر تابع گویایی در بازهٔ I، ریشهٔ مخرج ماندگار داشته باشد (مجانب قائم) امکان آن که تابع در آن بازه یکنوا باشد نیست.

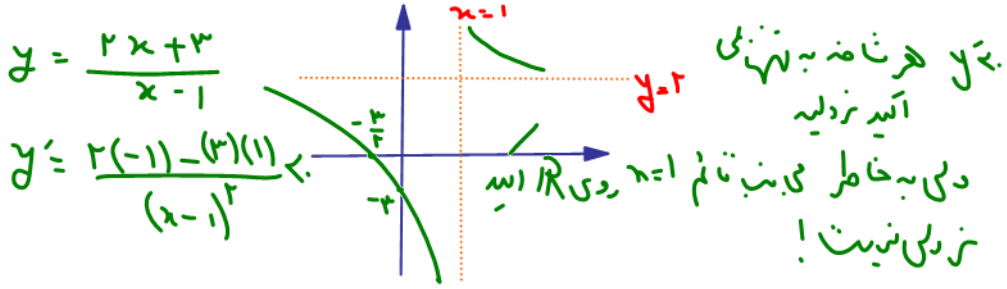


۹) اگر تابع گویایی در بازهٔ I، ریشهٔ مخرجی داشته باشد که در ساده‌سازی با صورت از بین برود (حفره)، تابع پس از ساده‌سازی را تحلیل می‌کنیم و وجود آن نقطه تأثیری بر یکنوایی تابع ندارد.

به عنوان مثال برای تحلیل تابع $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2}$ می‌توان یکنوایی تابع $y = \frac{(x-1)(x-2)}{x-2} = x - 1$ را بررسی کرد و گفت چون تابع $y = x - 1$ یک تابع اکیداً صعودی است تابع $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2}$ نیز اکیداً صعودی است.



۱۰) تابع هموگرافیک $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ دارای شاخه‌های اکیداً یکنوا می‌باشد اما به علت وجود مجانب قائم تابعی نه صعودی نه نزولی است، مگر این تابع در بازه‌ای تحلیل شود که مجانب قائم داخل آن بازه نباشد که در آن صورت علامت مشتق تابع در آن بازه یکنوایی تابع در آن بازه را نشان خواهد داد. (مجانب قائم در توابع کسری یعنی ریشهٔ مخرجی که حد تابع اطراف آن $+\infty$ یا $-\infty$ شود.)



تمرین: تابع $f(x)=-x^5+5x$ روی کدام بازه صعودی است؟

۱) $[0,1]$ ۲) $[0,2]$ ۳) $[1,+\infty)$ ۴) $(-\infty,-1]$

پاسخ: گزینهٔ «۱» ـ مشتق تابع $f'(x)=-5x^4+5$ و ریشه‌های مشتق برابر $x=1$ و $x=-1$ هستند. جدول تعیین علامت مشتق را رسم می‌کنیم:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
f'	$-$	0	$+$	0	$-$
f	$+\infty$ ↘	-4 (Min) ↗	4 (Max) ↘	$-\infty$

همان‌طور که در جدول می‌بینیم، مشتق تابع در بازهٔ $[-1,1]$ بزرگ‌تر یا مساوی صفر است، پس تابع در این بازه صعودی است. از بین گزینه‌ها فقط بازهٔ $[0,1]$ زیرمجموعهٔ این بازه است، پس تابع در بازهٔ $[0,1]$ هم صعودی است.

تمرین: اگر تابع $y=x^2+ax-4$ در بازهٔ $[2,+\infty)$ صعودی باشد، مجموعهٔ مقادیر a کدام است؟

۱) $a=-4$ ۲) $a\geq -4$ ۳) $a\leq -4$ ۴) $a\in\mathbb{R}$

پاسخ: گزینهٔ «۲» ـ مشتق تابع $y'=2x+a$ و ریشهٔ مشتق برابر $x=-\frac{a}{2}$ است پس جدول تعیین علامت مشتق به صورت زیر است:

x	$-\infty$	$-\frac{a}{2}$	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$
y	↘		↗

می‌بینیم که تابع در بازهٔ $[-\frac{a}{2},+\infty)$ صعودی است، پس برای آن که تابع در بازهٔ $[2,+\infty)$ صعودی باشد، باید $[2,+\infty)$ زیرمجموعه‌ای از بازهٔ $[-\frac{a}{2},+\infty)$ باشد؛ یعنی $-\frac{a}{2}\leq 2$ و در نتیجه $a\geq -4$.

تمرین: به ازای چه مقادیر از m، تابع $y=2x^3+3mx^2+24x+9$ اکیداً یکنوا است؟

۱) $-4\sqrt{2}\leq m\leq 4\sqrt{2}$ ۲) $-8\leq m\leq 8$ ۳) $0<m\leq 8$ ۴) $-4\leq m\leq 4$

تمرین: تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\frac{2x^2-3x}{x^2+x+3}$ در بازهٔ $(a,+\infty)$ صعودی اکید است. حداقل مقدار a کدام است؟

$$y=\frac{2x^2-3x}{x^2+x+3}$$

$$y'=\frac{(4x-3)(x^2+x+3)-(2x+1)(2x^2-3x)}{(x^2+x+3)^2}$$

۱) $-\frac{3}{5}$ ۲) $\frac{3}{5}$ ۳) -3 ۴) 3

$$y'=\frac{4x^3+4x^2+12x-3x^2-3x-9-4x^3+6x^2-2x^2+3x}{(\quad)^2}=\frac{5x^2+12x-9}{(\quad)^2}>0$$

پاسخ

$\frac{3}{5}=a$

x	-3		a		$+\infty$
$5x^2+12x-9$	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗		↘		↗

تمرین: اگر تابع $y=mx^3+mx^2-x+1$ به ازای $x\in\mathbb{R}$ نزولی اکید باشد، حدود m کدام است؟

۱) $m\le -3$ ۲) $m<-3$ ۳) $m\le -3$ یا $m=0$ ۴) $-3\le m\le 0$

پاسخ: گزینهٔ «۴» ـ برای آن که تابع چندجمله‌ای نزولی اکید باشد، باید مشتقش همواره کوچک‌تر یا مساوی صفر باشد، پس باید داشته باشیم:

$$y'=3mx^2+2mx-1\le 0$$

می‌دانیم اگر بخواهیم عبارت درجه دوم همواره $ax^2+bx+c\le 0$ باشد، باید الف) $a<0$ و ب) $\Delta\le 0$ باشد، پس:

$$\begin{cases}3m<0 \Rightarrow m<0 \quad (1)\\ \Delta\le 0 \Rightarrow 4m^2+12m\le 0 \Rightarrow 4m(m+3)\le 0 \Rightarrow -3\le m\le 0 \quad (2)\end{cases}$$

اشتراک (۱) و (۲) می‌شود $-3\le m<0$.

حالا اگر خوب به تابع نگاه کنید، تمام توضیحات بالا به شرطی صادق‌اند که $m\neq 0$ باشد؛ ولی وقتی که با یک تابع درجه سوم سروکار داشته باشیم اگر $m=0$ باشد، تابع به صورت $y=-x+1$ درمی‌آید که باز هم نزولی اکید است. پس تمام حدود m برابر است با $-3\le m\le 0$.

تمرین: تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{ax-2}{x+(a-3)}, x>1$ اکیداً صعودی است. بازهٔ مقادیر a کدام است؟

۱) $(-\infty,1)$ ۲) $(2,+\infty)$ ۳) $[2,+\infty)$ ۴) $(-\infty,1]$

$$y'=\frac{a(a-3)-(-2)(1)}{(\quad)^2}>0$$

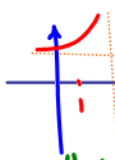
$a^2-3a+2>0$

a		1		2	
a^2-3a+2	$+$	0	$-$	0	$+$

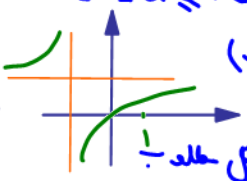
(شرط الف): $a<1$ یا $a>2$

$x=3-a\le 1$ ⟹ $2\le a$ شرط ب

(شرط الف) ∩ (شرط ب): $a\ge 2$



شکل نامطلوب

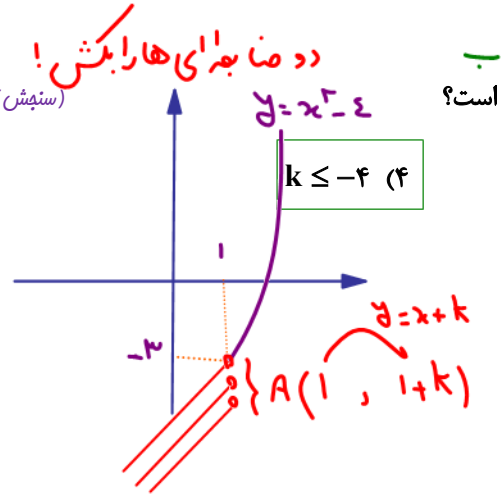


شکل مطلوب

if $a=2$: $y=\frac{2x-2}{x-1}=\frac{2(x-1)}{x-1}=2$

تمرین: به ازای کدام مقدار k، تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}x^2-4 & x\ge 1\\ x+k & x<1\end{cases}$ بر $\mathbb{R}$ صعودی است؟

۱) $k\le -1$ ۲) $k\le -2$ ۳) $k\le -3$ ۴) $k\le -4$



$y=x^2-4$

$y=x+k$

$A(1, 1+k)$

$1+k\le -3$

$k\le -4$

$$f'(x)=\begin{cases}2x>0 & x>1\\ 1>0 & x<1\end{cases}$$

۱ تعداد بازه‌هایی که تابع $f(x)=\frac{x^۴-۳}{x^۲-۲}; x\in(-۲,۲)$، در آن‌ها اکیداً نزولی باشد، کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳

۳) ۴ ۴) ۵

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۰

۲ به‌ازای چند مقدار صحیح m، تابع $y=\frac{mx+۲}{x-۱+m}$ روی بازهٔ $(۱,+\infty)$ نزولی است؟ $(m\neq ۲)$

۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۳ ۴) ۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۳

۳ مجموعهٔ مقادیری از اعداد حقیقی که در آن تابع $f(x)=۳\sqrt[۳]{x}+|x|$ صعودی باشند، کدام است؟

۱) $[-۱,+\infty)$ ۲) $(-\infty,\infty)$

۳) $[-۱,۰)\cup(۰,\infty)$ ۴) $[-۳\sqrt{۳},۰]$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۰

۴ کدام عبارت، برای تابع $f(x)=۲\sqrt{x}-\frac{۳}{۲\sqrt[۳]{x^۲-۱}}$، درست است؟

۱) تابع f در بازهٔ $(۱,\infty)\cup(۰,۱)$ صعودی است.

۲) تابع f در بازه‌های $(۱,\infty)$ و $(۰,۱)$ صعودی است.

۳) تابع f در بازهٔ $(۱,\infty)$ صعودی و در بازهٔ $(۰,۱)$ نزولی است.

۴) تابع f در بازهٔ $(۱,\infty)$ نزولی و در بازهٔ $(۰,۱)$ صعودی است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۰

۵ بازه‌هایی که تابع $f(x)=\frac{x^۴}{x^۳-۸}$ در آن‌ها اکیداً نزولی است را در نظر بگیرید. مینیمم طول این بازه‌ها، کدام است؟

۱) ۲ ۲) $\sqrt[۳]{۴}-۱$

۳) $۲\sqrt[۳]{۴}$ ۴) $۲(\sqrt[۳]{۴}-۱)$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۰

۶ کدام‌یک از تابع‌های زیر، یک‌به‌یک است؟

۱) $f(x) = x + \sqrt{x}$

۲) $g(x) = x - \sqrt{x}$

۳) $h(x) = ۲x + \frac{۱}{x}$

۴) $p(x) = \frac{x}{x^۲ + ۱}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۷

۷ نمودار تابع با ضابطهٔ $y = \frac{x}{۱ - x^۲}$ بر کدام بازه صعودی است؟

۱) $(-۲, ۰)$

۲) $(-\infty, -۲)$

۳) $(۰, ۲)$

۴) $(-۲, ۲)$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۰

پاسخ Homework

۱ گزینه ۳

$$f(x)=\frac{x^۴-۳}{x^۲-۲}\Rightarrow f'(x)=\frac{۴x^۳(x^۲-۲)-۲x(x^۴-۳)}{(x^۲-۲)^۲}$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{۲x(۲x^۴-۴x^۲-x^۴+۳)}{(x^۲-۲)^۲}=\frac{۲x(x^۴-۴x^۲+۳)}{(x^۲-۲)^۲}$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{۲x(x^۲-۱)(x^۲-۳)}{(x^۲-۲)^۲}$$

x	-۲	$-\sqrt{۳}$	$-\sqrt{۲}$	-۱	۰	۱	$\sqrt{۲}$	$\sqrt{۳}$	۲
f'	$-$	۰	$+$	∄	$+$	۰	$-$	۰	$+$	∄	$-$	۰	$+$

در چهار بازه، تابع اکیداً نزولی است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۰

۲ گزینه ۲

برای نزولی بودن تابع هموگرافیک فوق لازم است $y'\leq ۰$، پس:

$$y'=\frac{m(-۱+m)-۲}{(x-۱+m)^۲}\Rightarrow m^۲-m-۲\leq ۰$$

$$\Rightarrow (m+۱)(m-۲)\leq ۰\Rightarrow -۱\leq m\leq ۲$$

در ضمن مجانب قائم یعنی $x=۱-m$ نباید در منطقه $(۱,+\infty)$ باشد، پس:

$$۱-m\leq ۱\Rightarrow m\geq ۰$$

پس $۰\leq m\leq ۲$ و طبق صورت مسئله $m\neq ۲$، پس $m=۰\ ,\ ۱$، یعنی دو مقدار.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۳

۳ گزینه ۱

اگر $x \geq ۰$ باشد:

$$f(x) = ۳\sqrt[۳]{x} + x \Rightarrow f'(x) = \frac{۱}{\sqrt[۳]{x^۲}} + ۱ \geq ۰ \Rightarrow x \neq ۰ \quad (۱)$$

اگر $x < ۰$ باشد:

$$f(x) = ۳\sqrt[۳]{x} - x \Rightarrow f'(x) = \frac{۱}{\sqrt[۳]{x^۲}} - ۱ \geq ۰ \Rightarrow \frac{۱}{\sqrt[۳]{x^۲}} \geq ۱ \Rightarrow \sqrt[۳]{x^۲} \leq ۱$$

$$\Rightarrow x^۲ \leq ۱ \Rightarrow -۱ \leq x \leq ۱ \xrightarrow{\cap(x<۰)} -۱ \leq x < ۰ \quad (۲)$$

اجتماع جواب‌های به‌دست‌آمده $[-۱, ۰) \cup (۰, +\infty)$ است، اما جواب درست $[-۱, +\infty)$ است، زیرا $x = ۰$ در دامنهٔ تابع قرار دارد.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۰

۴ گزینه ۲

$$f(x) = ۲\sqrt{x} - \frac{۳}{۲\sqrt[۳]{x^۲ - ۱}}$$

تابع f در $x = ۱$ مجانب قائم دارد. پس نمی‌تواند در فاصلهٔ $(۰, ۱) \cup (۱, +\infty)$ اکیداً صعودی باشد و گزینهٔ ۱ حذف می‌شود.

برای $x > ۱$ یا $۰ < x < ۱$، $x^۲ - ۱$ صعودی، درنتیجه $۲\sqrt[۳]{x^۲ - ۱}$ هم صعودی و مثبت است. $\frac{۳}{\sqrt[۳]{x^۲ - ۱}}$ نزولی و درنتیجه $\frac{-۳}{\sqrt[۳]{x^۲ - ۱}}$ صعودی است. $۲\sqrt{x}$ هم که صعودی است، پس $۲\sqrt{x} - \frac{۳}{۲\sqrt[۳]{x^۲ - ۱}}$ هم صعودی می‌شود و گزینهٔ ۳ و ۴ حذف می‌شوند.

راه‌حل دوم:

$$f'(x) = \frac{۱}{\sqrt{x}} + \frac{x}{\sqrt[۳]{(x^۲ - ۱)^۴}}$$

اگر $x > ۰$ باشد، $f'(x)$ همواره مثبت است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۰

۵ گزینه ۴

$$f(x)=\frac{x^{۴}}{x^{۳}-۸} \Rightarrow f'(x)=\frac{۴x^{۳}(x^{۳}-۸)-۳x^{۲}x^{۴}}{(x^{۳}-۸)^{۲}}$$
$$\Rightarrow f'(x)=\frac{x^{۳}(۴x^{۳}-۳۲-۳x^{۳})}{(x^{۳}-۸)^{۲}}=\frac{x^{۳}(x^{۳}-۳۲)}{(x^{۳}-۸)^{۲}}$$

x	$-\infty$		۰		۲		$\sqrt[۳]{۳۲}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	۰	$-$	ت ن	$-$	۰	$+$	

تابع در بازه‌های $[۰, ۲)$ و $(۲, \sqrt[۳]{۳۲}]$ نزولی اکید است. طول بازه‌ها را حساب می‌کنیم:

$$۲-۰=۲$$
$$\sqrt[۳]{۳۲}-۲=\sqrt[۳]{۸\times ۴}-۲=۲(\sqrt[۳]{۴}-۱)\simeq ۱/۱۷$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۰

۶ گزینه ۱

تابع $y=x+\sqrt{x}$ یک‌به‌یک است زیرا صعودی اکید است.

$$y=x+\sqrt{x} \Rightarrow y'=۱+\frac{۱}{۲\sqrt{x}}>۰$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۷

۷ گزینه ۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۰

گام اول

تابع $f(x)$ روی یک بازه صعودی است هرگاه تابع روی این بازه پیوسته و $f'(x)>۰$ باشد.

گام دوم

$$۱-x^{۲}=۰ \Rightarrow x^{۲}=۱ \Rightarrow x=\pm ۱$$

تابع $f(x)$ در تمام نقاط $\mathbb{R}$ به جز دو نقطهٔ $x=۱$ و $x=-۱$ تعریف شده است. داریم:

$$y=\frac{x}{۱-x^{۲}} \Rightarrow y'=\frac{(۱-x^{۲})-(-۲x)x}{(۱-x^{۲})^{۲}}=\frac{x^{۲}+۱}{(۱-x^{۲})^{۲}}$$

تابع y' به‌ازای تمام نقاط عضو دامنهٔ تعریف تابع y، مثبت است؛ بنابراین کافی است بازه‌ای را انتخاب کنیم که هیچ‌کدام از دو مقدار $x=\pm ۱$ درون بازه نباشد، باتوجه‌به گزینه‌ها، نمودار تابع روی بازهٔ $(-\infty, -۲)$ صعودی است.

نقاط بحرانی

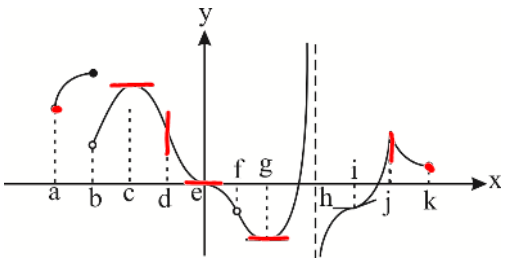
تعریف: تابع f با دامنه‌ی $[a,b]$ مفروض است. نقطه‌ی $c \in [a,b]$ را نقطه‌ی بحرانی تابع f می‌گوییم، هرگاه: $f'(c)=0$ یا $f'(c)$ موجود نباشد.

بنابراین بنا بر تعریف کتاب درسی نقاط بحرانی تابع به دو دستهٔ کلی زیر تقسیم می‌شوند:

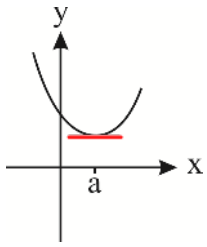
الف) نقاط مشتق‌ناپذیری
- ۱) ناپیوستگی‌ها
- ۲) نقاط پیوسته‌ای که نیم‌خط مماس راست و چپ در آن نقاط یکسان نیستند و یا نقاطی که در آن نقاط تابع دارای خط مماس قائم است.

ب) صفرکننده‌های مشتق که در این نقاط خط مماس بر منحنی به صورت افقی می‌باشد.

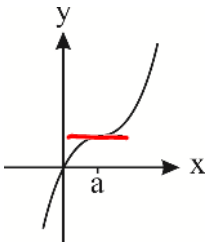
در شکل روبه‌رو انواع نقاط بحرانی را می‌بینید:



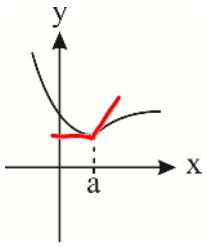
می‌خواهیم نقاط بحرانی تابع روبه‌رو را در بازه‌ی $[a,k]$ مشخص کنیم: اولاً نقاط به طول a و k نقطه‌ی بحرانی هستند، چون نقاط ابتدا و انتهای بازه‌اند. ثانیاً نقاط f و h نقاط بحرانی نیستند، چون متعلق به دامنه‌ی تابع نیستند. نقاط c، e و g بحرانی‌اند، چون مشتق‌شان برابر صفر است (خط مماس افقی داریم). نقاط d و j بحرانی‌اند، چون مشتق ندارند (خط مماس قائم داریم). نقطه‌ی i بحرانی است، چون نقطه‌ی گوشه‌ای (زاویه‌دار) است. نقطه‌ی b بحرانی است، چون ناپیوسته است. پس نقاط بحرانی تابع در بازه‌ی $[a,k]$ عبارت‌اند از a، b، c، d، e، g، i، j و k.



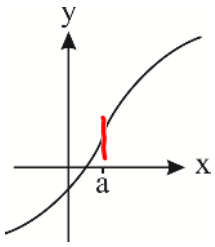
$f'(a)=0$



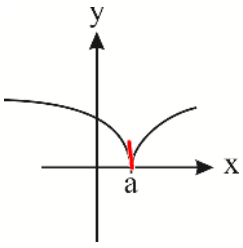
$f'(a)=0$



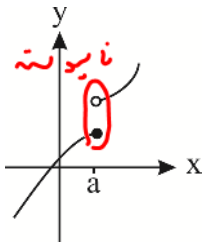
وجود ندارد $f'(a)=$



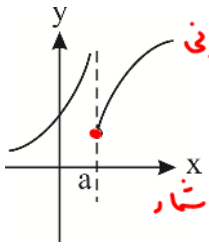
وجود ندارد $f'(a)=+\infty$



وجود ندارد $f'(a)=\pm\infty$



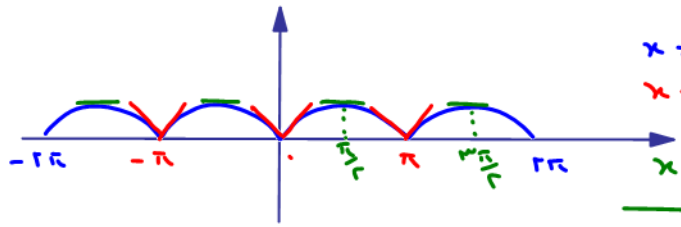
وجود ندارد $f'(a)=$



وجود ندارد $f'(a)=$

تمرین: نمودار تابع قدر مطلقی زیر را رسم کرده و نقاط بحرانی آن را بیابید.

الف) $y=|\sin x| \;;\; x\in[-2\pi,2\pi]$



سه دسته بازه $x=\pm 2\pi$

ته‌رشته $x=0,\pm\pi$

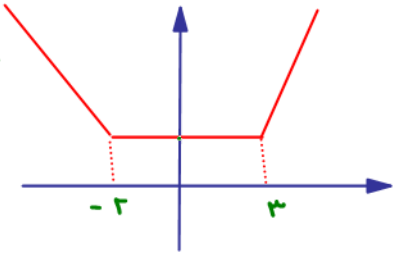
همگی انتهایی $x=\pm\frac{\pi}{2},\pm\frac{3\pi}{2}$

۹ بحرانی

ب) $y=|x-3|+|x+2|$

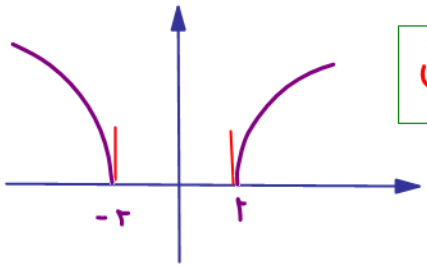
تکه ثابت تابع همان بی‌شمار بحرانی

$x\in[-2,3]$

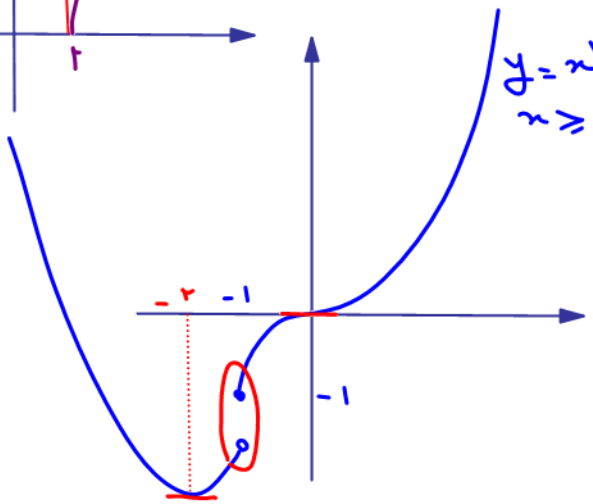


پ) $y=\sqrt{|x|-2}\geq 0$ $\quad |x|\geq 2 \longrightarrow x\leq -2$ یا $x\geq 2$ $\quad D_f=(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$

نقاط سرتلبه $x=\pm 2$ بحرانی بازه

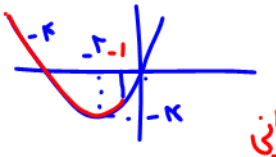


ت) $y=\begin{cases} x^3 & x\geq -1 \\ x^2+4x & x<-1 \end{cases}$



$x(x+4)=0$

$x=0,-4$



۳ نقطه بحرانی $\begin{cases} x=-1 & \text{ناپیوسته} \\ x=-2,0 & \text{همگی انتهایی} \end{cases}$

تعیین نقاط بحرانی از روی ضابطه:

حالا که توانستیم بر اساس درک هندسی از نقاط بحرانی و با کمک گرفتن از نمودار تابع نقاط بحرانی تابع را مشخص کنیم، باید به این مطلب نیز توجه داشته باشیم که همواره رسم نمودار یک تابع برای ما امکان‌پذیر نخواهد بود، بنابراین نیاز است که با تحلیل ریاضی ضابطهٔ تابع نیز بتوانیم در حد امکان نقاط بحرانی توابع را مشخص کنیم که برای رسیدن به این نقاط ابتدا نقاط ناپیوستگی متعلق به دامنهٔ تابع را به‌دست می‌آوریم و سپس با محاسبهٔ تابع مشتق نقاط مشتق‌ناپذیری و صفرکننده‌های مشتق را مشخص می‌کنیم.

تذکر: می‌توانیم نقاط ناپیوستگی و یا مشتق‌ناپذیری توابع را به کمک مطالب و تذکراتی که در فصل پیوستگی و مشتق آموختیم، به‌دست

نکته: $y=|u| \Rightarrow \begin{cases} u & u \geq 0 \\ -u & u<0 \end{cases} \rightarrow y' : \begin{cases} u' & u>0 \\ -u' & u<0 \end{cases}$ یعنی ضابطه‌ای $y'=\frac{u'u}{|u|}$

$y=|u| \Rightarrow y'=\frac{u'u}{|u|}$ برای محاسبه‌ی $y=|u|$ یک بار u یک بار $|u|$ را برابر صفر بگذار

آوریم.

تمرین: نقاط بحرانی تابع $f(x)=x^5-5x^2-1$ کدام است؟

۱) $\{0,\sqrt[3]{2}\}$ ۲) $\{0,\sqrt[3]{2},1\}$ ۳) $\{\sqrt[3]{2},-\sqrt[3]{2}\}$ ۴) $\{0,-\sqrt[3]{2}\}$

پاسخ: گزینهٔ «۱» ـ از آن‌جایی که تابع $y=x^5-5x^2-1$ یک تابع چندجمله‌ای پیوسته با دامنهٔ $\mathbb{R}$ می‌باشد و توابع چندجمله‌ای فاقد نقاط مشتق‌ناپذیری عضو دامنه هستند، فقط به دنبال صفرکننده‌های تابع مشتق می‌رویم.

$$y'(x)=5x^4-10x=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\sqrt[3]{2} \end{cases}$$

$5x(x^3-2)=0$

در توابع چندجمله‌ای و توابع گویا نقاط بحرانی لزوماً ریشه‌های تابع مشتق می‌باشند که اگر دامنهٔ تابع توسط صورت سؤال محدود شده باشد، ابتدا و انتهای بازهٔ تعریف (به شرط وجود در دامنه) نیز به علت ناپیوستگی به تعداد نقاط بحرانی تابع اضافه می‌شوند.

تمرین: نقاط بحرانی تابع با ضابطهٔ $f(x)=x^2(x-2)^2$ سه رأس یک مثلث‌اند. نوع این مثلث کدام است؟ (سراسری تجربی)

۱) متساوی‌الاضلاع ۲) فقط متساوی‌الساقین

۳) فقط قائم‌الزاویه ۴) ✓ قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین

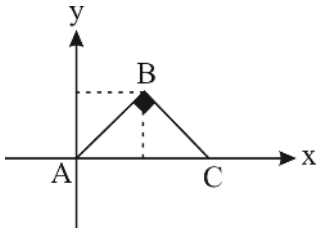
پاسخ: گزینهٔ «۴» ـ ابتدا ضابطهٔ تابع را کمی ساده‌تر می‌کنیم، تا مشتق‌گیری راحت‌تر شود:

$$f(x)=(x(x-2))^2=(x^2-2x)^2$$

$y=u^2 \rightarrow y'=2u'u$

$$f'=2(2x-2)(x^2-2x)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=0 \rightarrow A(0,0) \\ x=1 \rightarrow B(1,1) \\ x=2 \rightarrow C(2,0) \end{cases} \Rightarrow AB=BC$$



بنابراین با توجه به شکل، مثلث قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین است.

تمرین: تابع $f(x)=\frac{x}{x^2-1}$ چند نقطهٔ بحرانی دارد؟ (سراسری)

$y'=\frac{1(x^2-1)-2x(x)}{(\ )^2}=\frac{-x^2-1}{(\ )^2}=0 \rightarrow -1=x^2$ جواب ندارد. محاسبه‌ای ندارد.

۱) ✓ صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

آنالیز یا بررسی بیشتر برای رسم تابع: $y=\frac{x}{x^2-1}$ $D_f: \mathbb{R}-\{\pm 1\}$ $x=1$ و -1 مجانب‌های قائم

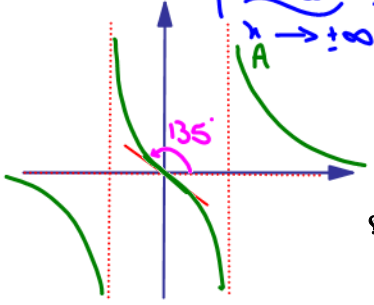
$\lim_{x\to\pm\infty} y=\frac{x}{x^2}=\frac{1}{x}=0$ مجانب افقی $y=0$

$y=\frac{x}{x^2-1}$ $\begin{cases} x \to 0 \text{ یعنی } x \text{ کم‌توان} & \frac{x}{-1}=-x \\ x \to \pm\infty \text{ یعنی } x \text{ پرتوان} & \frac{x}{x^2}=\frac{1}{x} \end{cases}$ 135°

$y'=-\frac{(x^2+1)}{(\ )^2}<0 \rightarrow$ هر شاخه به تنهایی نزولی

$\lim_{x\to 1^+} y=\frac{x}{x^2-1}=\frac{1}{1^2-1=0^+}=+\infty \quad A(1^+,+\infty)$

$x\to 1^- \quad y=\frac{1}{1^2-1=0^-}=-\infty \quad B(1^-,-\infty)$



تمرین: تابع $y=\frac{x}{x^2+1}$ در بازهٔ $[-2,4]$ تعریف شده است. مجموع طول نقاط بحرانی تابع کدام است؟

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۲-

پاسخ: گزینهٔ «۲» ـ از آن‌جا که این تابع گویا در بازهٔ $[-۲,۴]$ تعریف نشده است $\{-۲,۴\}$ به عنوان نقاط ابتدایی و انتهایی بازه، ناپیوستگی و بحرانی است.

حالا به دنبال صفرکننده‌های تابع مشتق که متعلق به بازهٔ $[-۲,۴]$ است، می‌گردیم:

$$f'(x)=\frac{(۱)(x^۲+۱)-(۲x)(x)}{(x^۲+۱)^۲}=\frac{۱-x^۲}{(x^۲+۱)^۲}=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۱ \\ x=-۱ \end{cases}$$

بنابراین صفرکننده‌های مشتق $\{\pm ۱\}$ و کلیهٔ نقاط بحرانی تابع $\{-۲,۴,\pm ۱\}$ می‌باشند که مجموع این نقاط عدد ۲ می‌باشد.

تمرین: تابع $f(x)=x^۲\sqrt[۳]{x}-\sqrt[۳]{x}$ چند نقطهٔ بحرانی دارد؟

۱) یک ۲) دو ۳) سه ۴) هیچ

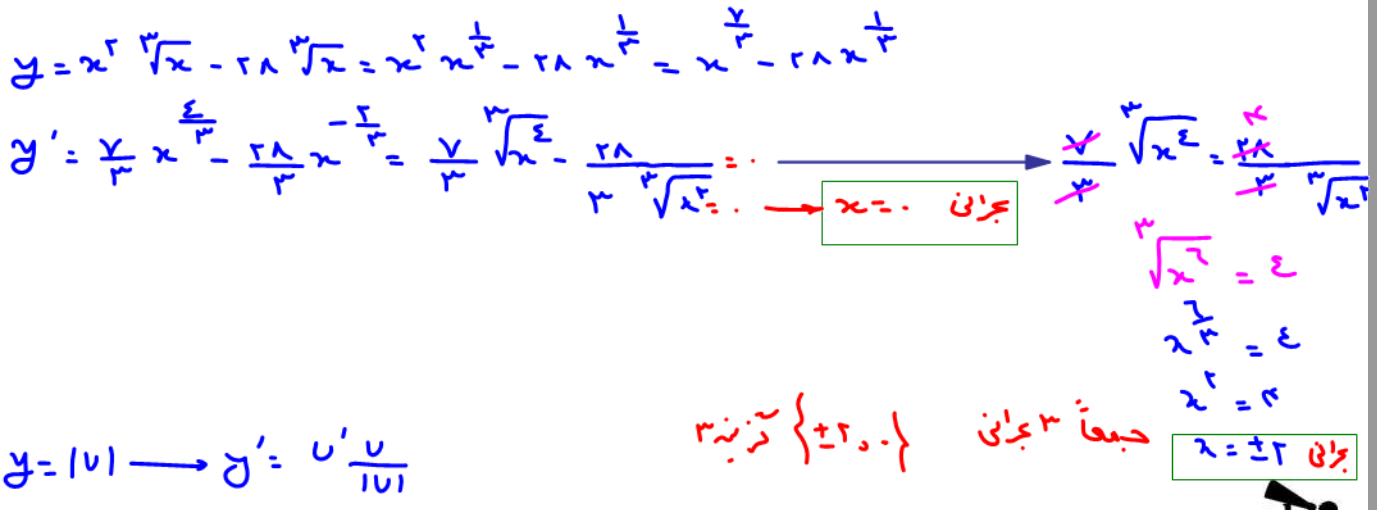
پاسخ: گزینهٔ «۳» ـ تابع را به صورت $f(x)=x^{\frac{۷}{۳}}-x^{\frac{۱}{۳}}$ می‌نویسیم و مشتقش را پیدا می‌کنیم:

$$f'(x)=\frac{۷}{۳}x^{\frac{۴}{۳}}-\frac{۱}{۳}x^{-\frac{۲}{۳}}=\frac{۱}{۳}x^{-\frac{۲}{۳}}(۷x^۲-۱)=\frac{۷x^۲-۱}{۳\sqrt[۳]{x^۲}}$$

ریشه‌های صورت مشتق برابر $x=\frac{\sqrt{۷}}{۷}$ و $x=-\frac{\sqrt{۷}}{۷}$ و ریشهٔ مخرجش برابر $x=۰$ است و هر سه نقطه متعلق به دامنهٔ تابع‌اند، پس تابع سه نقطهٔ بحرانی دارد.

تمرین: مجموعهٔ طول‌های نقاط بحرانی تابع با ضابطهٔ $f(x)=(x^۲-۲۸)\sqrt[۳]{x}$ کدام است؟ (سراسری تجربی)

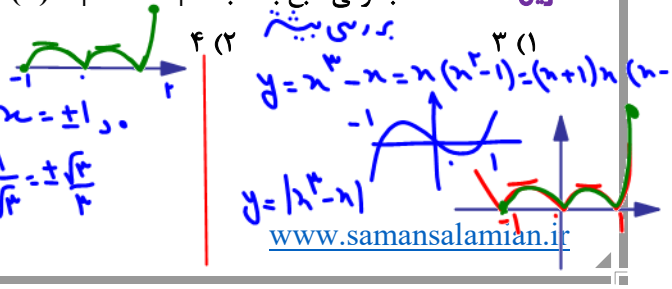
۱) $\{-۲,۲\}$ ۲) $\{-\sqrt{۷},\sqrt{۷}\}$ ۳) $\{-۲,۰,۲\}$ ۴) $\{-۷,۰,۱\}$



برای یافتن نقاط بحرانی تابع $y=|f(x)|$ (f تابعی پیوسته) کافی است معادلات $f(x)=۰$ و $f'(x)=۰$ را حل کنید.

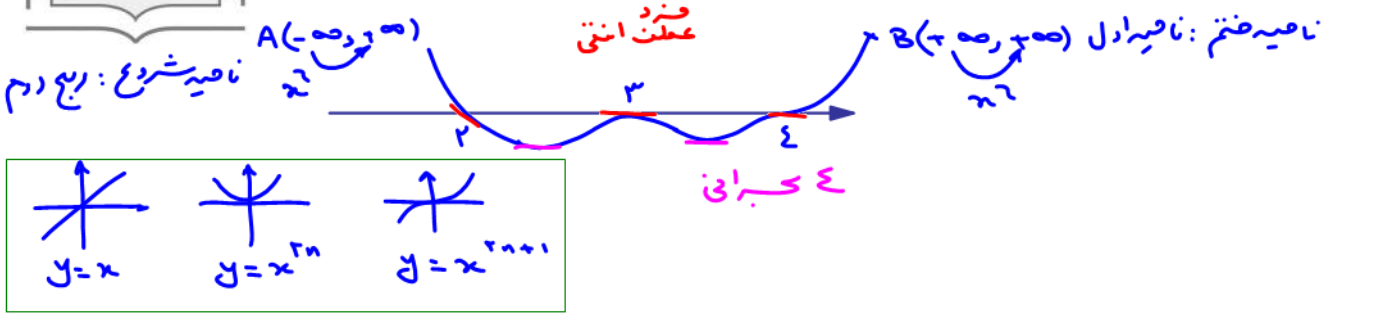
تمرین: تعداد نقاط بحرانی تابع با ضابطهٔ $f(x)=|x^۳-x|$ روی بازهٔ $[-۱,۲]$ کدام است؟ (سراسری ریاضی)

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶



نکته: رسم توابع به صورت ضرب چند پرانتز... $y=(x-2)^{1}(x-3)^{2}(x-4)^{3}=x^{6}+\dots$

ناحیه شروع: ربع دوم — ناحیه ختم: ناحیه اول



در تابع $y=g(x)|f(x)|$ (f تابعی پیوسته):

۱) جواب‌های معادلهٔ $f(x)=0$ نقاط بحرانی تابع هستند.

۲) با حذف قدرمطلق از تابع $y=g(x)f(x)$ مشتق گرفته و نقاطی (عضو دامنه) که مشتق صفر است یا موجود نیست بحرانی‌اند.

تمرین: تابع با ضابطهٔ $f(x)=x|x^2-1|$ و دامنهٔ $[-2,2]$ چند نقطهٔ بحرانی دارد؟ (ریاضی خارج از کشور)

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

$x^2-1=0 \Rightarrow x=\pm 1$

$x=\pm 2$ سر و ته لبنه بازه

$y=x(x^2-1)=x^3-x \rightsquigarrow y'=3x^2-1=0 \rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{1}{3}}=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$

تمرین: نقاط بحرانی بر روی نمودار تابع $f(x)=(x-1)|x^2+x-2|$ سه رأس مثلثی هستند. مساحت این مثلث کدام است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور)

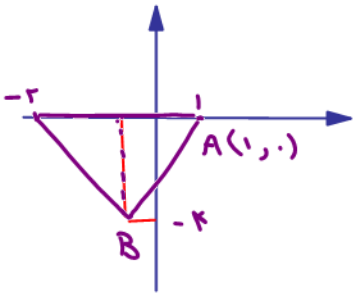
$x^2+x-2=0 \rightarrow x=1,-2$

۱) ۴ ۲) ۴/۵ ۳) ۶ ۴) ۸

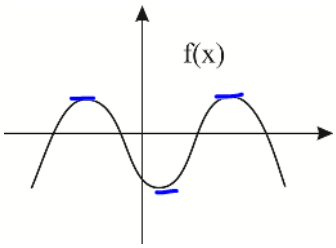
$y=(x-1)(x^2+x-2)=x^3+x^2-2x-x^2-x+2=x^3-3x+2 \rightarrow y'=3x^2-3=0 \rightarrow x=\pm 1$

$A(1,0)$ $B(-1,-4)$ $C(-2,0)$

$S=\frac{3(4)}{2}=6$



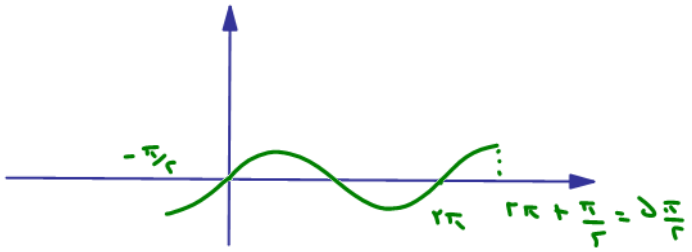
تمرین: اگر نمودار تابع $y=f(x)$ به صورت زیر باشد، تابع $y=\frac{1}{f(x)}$ چه تعداد نقطهٔ بحرانی دارد؟



مشتق $\rightarrow y'=-\frac{f'(x)}{f^2(x)}=0 \rightsquigarrow f'(x)=0$ جا

هرجا بتوان بر تابع مماس اش کشید مشتق صفره

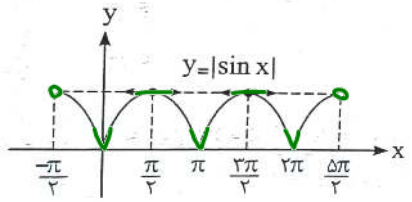
۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵



تمرین: تعداد نقاط بحرانی تابع f با ضابطهٔ $f(x)=|\sin x|$ بر بازهٔ $(-\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{2})$ کدام است؟

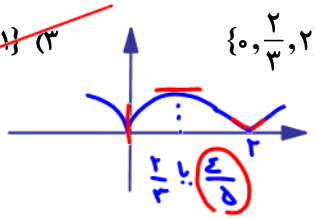
۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

پاسخ: با توجه به تعریف نقاط بحرانی منحنی یک تابع (مشتق ناموجود یا برابر با صفر)، نقاط به طول‌های $x=\{0,\frac{\pi}{2},\pi,\frac{3\pi}{2},2\pi\}$ نقاط بحرانی تابع f در بازهٔ $(-\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{2})$ به شمار می‌روند.



تمرین: مجموعه طول‌های نقاط بحرانی تابع با ضابطهٔ $f(x)=|x-2|\sqrt[3]{x^2}$ کدام است؟ (سراسری ریاضی)

۱) $\{0,\frac{4}{5},2\}$ ۲) $\{0,\frac{2}{3},2\}$ ۳) $\{0,1\}$ ۴) $\{\frac{2}{3},2\}$



تمرین: اگر تابع $f(x)=|x^2-mx+(m+3)|$ فقط یک نقطهٔ بحرانی داشته باشد، تمام مقادیر m کدام است؟

۱) $m=-2, m=6$ ۲) $-2<m<6$ ۳) $-2\le m\le 6$ ۴) $m\in\varnothing$

تعیین نقاط بحرانی در توابع چندضابطه‌ای

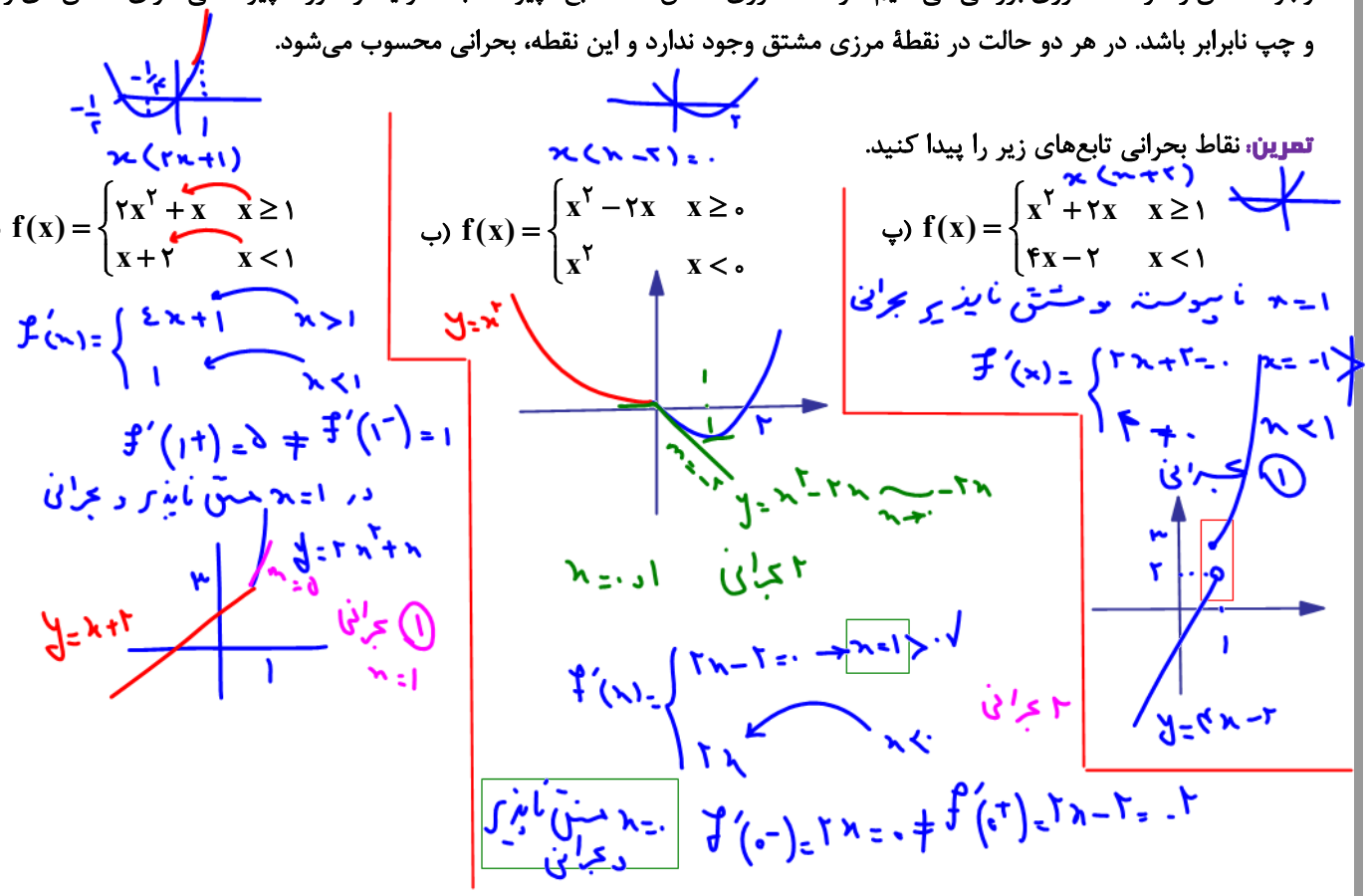
در توابع چندضابطه‌ای ابتدا از هر یک از ضابطه‌ها مشتق گرفته و نقاط بحرانی هر ضابطه را با توجه به دامنهٔ تعریفشان تعیین کرده سپس وجود مشتق را در نقاط مرزی بررسی می‌کنیم. در نقاط مرزی ممکن است تابع ناپیوسته باشد و یا در صورت پیوستگی دارای مشتق‌های راست و چپ نابرابر باشد. در هر دو حالت در نقطهٔ مرزی مشتق وجود ندارد و این نقطه، بحرانی محسوب می‌شود.

تمرین: نقاط بحرانی تابع‌های زیر را پیدا کنید.

الف) $f(x)=\begin{cases}2x^2+x & x\geq 1\\ x+2 & x<1\end{cases}$

ب) $f(x)=\begin{cases}x^2-2x & x\geq 0\\ x^2 & x<0\end{cases}$

پ) $f(x)=\begin{cases}x^2+2x & x\geq 1\\ 4x-2 & x<1\end{cases}$



Homework (1)

۱ تعداد نقاط بحرانی تابع با ضابطهٔ $f(x) = [x]\sin \pi x$ روی بازهٔ $[-۱, ۲]$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵

۳) ۶ ۴) بی‌شمار

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۵

۲ نقاط بحرانی بر روی نمودار تابع $f(x) = (x-۱)|x^۲ + x - ۲|$ سه رأس مثلثی هستند، مساحت این مثلث کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۴/۵

۳) ۶ ۴) ۸

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۲

۳ تعداد نقاط بحرانی تابع با ضابطهٔ $f(x) = \frac{\sqrt{۱+x^۲}}{x}$ بر روی دامنهٔ خود، کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱

۳) ۲ ۴) بی‌شمار

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۰

۴ تابع با ضابطهٔ $f(x) = x|x^۲ - ۱|$ با دامنهٔ $[-۲, ۲]$ چند نقطهٔ بحرانی دارد؟

۱) ۳ ۲) ۴

۳) ۵ ۴) ۶

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۷

۵ تابع $f(x) = \frac{x}{۱ - x|x|}$ چند نقطهٔ بحرانی دارد؟

۱) صفر ۲) ۱

۳) ۲ ۴) ۳

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۲

۶ تعداد نقاط بحرانی تابع با ضابطهٔ $f(x) = |x^۳ - x|$ روی بازهٔ $[-۱, ۲]$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴

۳) ۵ ۴) ۶

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۰

۷ نقاط بحرانی تابع با ضابطهٔ $f(x) = x^{۲}(x-۲)^{۲}$ سه رأس یک مثلث‌اند، نوع این مثلث کدام است؟

۱) متساوی‌الاضلاع
۲) فقط متساوی‌الساقین
۳) فقط قائم‌الزاویه
۴) قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۵

۸ مجموعهٔ طول‌های نقاط بحرانی تابع با ضابطهٔ $f(x) = |x-۲|\sqrt[۳]{x^{۲}}$ کدام است؟

۱) $\{۰, \frac{۴}{۵}, ۲\}$
۲) $\{۰, \frac{۲}{۳}, ۲\}$
۳) $\{۰, ۱\}$
۴) $\{\frac{۲}{۳}, ۲\}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۵

۹ مجموعهٔ طول‌های نقاط بحرانی تابع با ضابطهٔ $f(x) = (x^{۲}-۲۸).\sqrt[۳]{x}$ کدام است؟

۱) $\{-۲, ۲\}$
۲) $\{-\sqrt{۷}, \sqrt{۷}\}$
۳) $\{-۲, ۰, ۲\}$
۴) $\{-۷, ۰, ۱\}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۳

پاسخ Homework (1)

-

۱ گزینه ۴

باتوجه‌به وجود عبارت $[x]$ در ضابطهٔ تابع $f(x)$، ابتدا بازهٔ $[-۱, ۲]$ را به زیربازه‌های کوچک‌تر تقسیم کرده و ضابطهٔ تابع را روی هر زیربازه مشخص می‌کنیم.

$$-۱ \leq x < ۰ \Rightarrow [x] = -۱ \Rightarrow f(x) = -\sin \pi x$$

$$۰ \leq x < ۱ \Rightarrow [x] = ۰ \Rightarrow f(x) = ۰$$

$$۱ \leq x < ۲ \Rightarrow [x] = ۱ \Rightarrow f(x) = \sin \pi x$$

$$x = ۲ \Rightarrow [x] = ۲ \Rightarrow f(x) = ۲ \sin \pi x$$

باتوجه‌به اینکه ضابطهٔ تابع $f(x)$ در بازهٔ $[۰, ۱]$ به‌صورت خط افقی $y = ۰$ است پس هر $x \in [۰, ۱]$ می‌تواند یک نقطهٔ بحرانی تابع $f(x)$ باشد.

همچنین در دو بازهٔ $-۱ \leq x < ۰$ و $۱ \leq x < ۲$ نقاطی که به ازای آن‌ها مشتق برابر صفر است، بحرانی می‌باشند:

$$-۱ \leq x < ۰ \Rightarrow f(x) = -\sin \pi x \Rightarrow f'(x) = -\pi \cos \pi x = ۰ \Rightarrow x = -\frac{۱}{۲}$$

$$۱ \leq x < ۲ \Rightarrow f(x) = \sin \pi x \Rightarrow f'(x) = \pi \cos \pi x = ۰ \Rightarrow x = \frac{۳}{۲}$$

به‌علاوه نقاط ابتدا و انتهای بازهٔ $[-۱, ۲]$ یعنی $x = -۱, ۲$ نیز بحرانی هستند. بنابراین تابع $f(x)$ در بازهٔ $[-۱, ۲]$ دارای بی‌شمار نقطهٔ بحرانی است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۵

۲ گزینه ۳

گام اول:

نقاط بحرانی تابع $f(x)$، نقاطی از دامنهٔ تعریف آن است که $f'(x)$ برابر صفر باشد و یا در آن نقاط تعریف نشده باشد.

گام دوم:

ابتدا با تعیین علامت عبارت قدر مطلقی $|x^۲+x-۲|$، ضابطهٔ تابع را ساده‌تر می‌کنیم، داریم:

$$f(x)=(x-۱)|x^۲+x-۲|=(x-۱)|(x+۲)(x-۱)|$$

$x=-۲$ و $x=۱$ ریشه‌های عبارت درون قدر مطلق هستند پس می‌توان نوشت:

$$f(x)=\begin{cases}(x-۱)^۲(x+۲) & ;x\geq ۱ \text{ یا } x\leq -۲\\ -(x-۱)^۲(x+۲) & ;-۲<x<۱\end{cases}$$

تابع در نقاط $x=-۲$ و $x=۱$ پیوسته است پس ضابطهٔ $f'(x)$ برابر است با:

$$f'(x)=\begin{cases}(x-۱)(۳x+۳) & ;x>۱ \text{ یا } x<-۲\\ -(x-۱)(۳x+۳) & ;-۲<x<۱\end{cases}$$

اکنون ریشه‌های معادلهٔ $f'(x)=۰$ را به دست می‌آوریم:

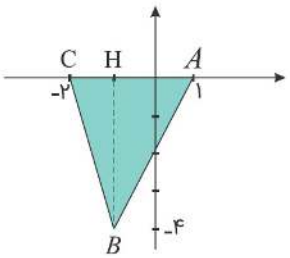
$$f'(x)=۰\Rightarrow\begin{cases}x>۱,\ x<-۲ : (x-۱)(۳x+۳)=۰\Rightarrow \begin{cases}x=۱\\ x=-۱\end{cases} \text{ غ ق ق}\\ -۲<x<۱ : -(x-۱)(۳x+۳)=۰\Rightarrow \begin{cases}x=۱\\ x=-۱\end{cases}\end{cases}$$

باتوجه‌به اینکه $f'_+(۱)=f'_-(۱)=۰$ است پس $x=۱$ نیز نقطهٔ بحرانی تابع $f(x)$ است. بررسی می‌کنیم $f'(x)$ در چه نقاطی تعریف‌نشده است. داریم:

$$\left.\begin{array}{l}f'_+(-۲)=-(-۲-۱)(-۳)=-۹\\ f'_-(-۲)=(-۲-۱)(-۳)=۹\end{array}\right\}\Rightarrow f'_+(-۲)\neq f'_-(-۲)\Rightarrow f'(-۲) \text{ وجود ندارد}$$

بنابراین تابع $f(x)$ دارای سه نقطهٔ بحرانی $A(۱,۰)$، $B(-۱,-۴)$ و $C(-۲,۰)$ است. مساحت مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ برابر است با:

$$S_{\overset{\Delta}{ABC}}=\frac{۱}{۲}BH\times AC=\frac{۱}{۲}\times ۴\times ۳=\frac{۱۲}{۲}=۶$$



کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۲

۳ گزینه ۱

گام اول:

نقاط بحرانی تابع $f(x)$، نقاطی از دامنهٔ تعریف این تابع است که $f'(x) = ۰$ باشد یا $f'(x)$ موجود نباشد.

گام دوم:

ابتدا دامنهٔ تعریف تابع $f(x)$ را تعیین می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{\sqrt{۱+x^۲}}{x} \Rightarrow \begin{cases} ۱+x^۲ \geq ۰ \Rightarrow x^۲ \geq -۱ \\ x \neq ۰ \end{cases} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{۰\}$$

حال ضابطهٔ $f'(x)$ را به دست می‌آوریم:

$$f'(x) = \frac{\frac{۲x^۲}{۲\sqrt{۱+x^۲}} - \sqrt{۱+x^۲}}{x^۲} = \frac{\frac{x^۲ - ۱ - x^۲}{\sqrt{۱+x^۲}}}{x^۲} = -\frac{۱}{x^۲\sqrt{۱+x^۲}}$$

معادلهٔ $f'(x) = ۰$ جواب ندارد. همچنین $f'(x)$ فقط به ازای $x = ۰$ تعریف‌نشده است اما $x = ۰$ عضو دامنهٔ تعریف تابع $f(x)$ نیست پس نقطهٔ بحرانی محسوب نمی‌شود، بنابراین تعداد نقاط بحرانی تابع $f(x)$ بر روی دامنهٔ تعریف آن برابر صفر است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۰

۴ گزینه ۴

ابتدا با تعیین علامت عبارت قدر مطلقی $|x^۲-۱|$ روی بازهٔ $[-۲,۲]$، ضابطهٔ تابع را ساده‌تر می‌کنیم. برای تعیین نقاط بحرانی تابع $f(x)$، کافی است نقاطی که $f'(x)$ برابر صفر باشد و یا در آن نقاط تعریف‌نشده باشد را بیابیم.

$$\begin{cases} x^۲-۱\geq ۰ \Rightarrow x^۲\geq ۱ \Rightarrow |x|\geq ۱ \Rightarrow \begin{cases} x\geq ۱ \\ x\leq -۱ \end{cases} \\ x^۲-۱< ۰ \Rightarrow x^۲< ۱ \Rightarrow |x|< ۱ \Rightarrow -۱< x< ۱ \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x)=\begin{cases} x(x^۲-۱) & ; x\geq ۱, x\leq -۱ \\ -x(x^۲-۱) & ; -۱< x< ۱ \end{cases} \Rightarrow f(x)=\begin{cases} x^۳-x & ; x\geq ۱, x\leq -۱ \\ -x^۳+x & ; -۱< x< ۱ \end{cases}$$

تابع $f(x)$ در دو نقطهٔ $x=۱$ و $x=-۱$ پیوسته است، پس ضابطهٔ $f'(x)$ برابر است با:

$$f'(x)=\begin{cases} ۳x^۲-۱ & ; x>۱, x<-۱ \\ -۳x^۲+۱ & ; -۱< x< ۱ \end{cases}$$

اکنون ریشه‌های معادلهٔ $f'(x)=۰$ را به دست می‌آوریم:

$$f'(x)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x>۱, x<-۱ : ۳x^۲-۱=۰ \Rightarrow x^۲=\frac{۱}{۳} \Rightarrow x=\pm\frac{\sqrt{۳}}{۳} \text{ غ.ق.ق} \\ -۱< x< ۱ : -۳x^۲+۱=۰ \Rightarrow x^۲=\frac{۱}{۳} \Rightarrow x=\pm\frac{\sqrt{۳}}{۳} \end{cases}$$

(دقت کنید که در ضابطهٔ اول، چون ریشه‌های به‌دست‌آمده در محدودهٔ تعریف‌شده برای x قرار نمی‌گیرند پس قابل‌قبول نیستند.)
بررسی می‌کنیم $f'(x)$ در چه نقاطی تعریف‌نشده است:

$$x=۱ : f'_+(۱)=۳-۱=۲ \ , \ f'_-(۱)=-۳+۱=-۲ \Rightarrow \text{مشتق‌ناپذیر}$$

$$x=-۱ : f'_+(-۱)=-۳+۱=-۲ \ , \ f'_-(-۱)=۳-۱=۲ \Rightarrow \text{مشتق‌ناپذیر}$$

همچنین تابع در نقاط ابتدا و انتهای بازهٔ $[-۲,۲]$ بحرانی است.
بنابراین تابع $f(x)$ دارای ۶ نقطهٔ بحرانی $x=\frac{\sqrt{۳}}{۳}$، $x=-\frac{\sqrt{۳}}{۳}$، $x=۱$، $x=-۱$، $x=۲$ و $x=-۲$ است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۷

۵ گزینه ۲

$$y=\begin{cases}\dfrac{x}{1-x^2} & ;x\geq 0\\ \dfrac{x}{1+x^2} & ;x<0\end{cases}$$

$$\Rightarrow y'=\begin{cases}\dfrac{1-x^2+2x^2}{(1-x^2)^2} & ;x\geq 0\Rightarrow y'=0\Rightarrow 1+x^2=0\Rightarrow \text{ریشه حقیقی ندارد}\\ \dfrac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2} & ;x<0\Rightarrow y'=0\Rightarrow 1-x^2=0\Rightarrow x=-1\end{cases}$$

پس فقط یک نقطهٔ بحرانی دارد.

تذکر: ضابطهٔ اول y' در $x=1$ مشتق ندارد، اما چون عضو دامنهٔ f نیست بحرانی نمی‌باشد.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۲

۶ گزینه ۴

هرگاه $f(x)$ یک تابع چندجمله‌ای باشد آنگاه نقاط بحرانی تابع $y=|f(x)|$، ریشه‌های سادهٔ دو معادلهٔ $f(x)=0$ و $f'(x)=0$ خواهد بود.

$$f(x)=|x^3-x|$$

$$x^3-x=0\Rightarrow x(x^2-1)=0\Rightarrow x=0,x=1,x=-1$$

$$(x^3-x)'=0\Rightarrow 3x^2-1=0\Rightarrow 3x^2=1$$

$$\Rightarrow x^2=\frac{1}{3}\Rightarrow x=\frac{\sqrt{3}}{3},x=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

همچنین تابع در ابتدا و انتهای بازهٔ $[-1,2]$ نیز بحرانی است، بنابراین تابع $f(x)=|x^3-x|$ روی بازهٔ $[-1,2]$ دارای شش نقطهٔ بحرانی $x=0$، $x=1$، $x=\frac{\sqrt{3}}{3}$، $x=-\frac{\sqrt{3}}{3}$، $x=-1$ و $x=2$ است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۰

۷ گزینه ۴

در توابع چندجمله‌ای نقاط بحرانی از حل معادلهٔ $y' = ۰$ به دست می‌آید، لذا:

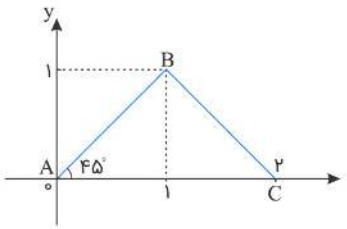
$$f(x) = x^۲(x-۲)^۲$$

$$\Rightarrow f'(x) = ۲x(x-۲)^۲ + ۲(x-۲)(x^۲)$$

$$\Rightarrow f'(x) = ۲x(x-۲)(x-۲+x) = ۰$$

$$\Rightarrow x = ۰, ۱, ۲$$

$$A\begin{vmatrix}۰\\۰\end{vmatrix} \quad , \quad B\begin{vmatrix}۱\\۱\end{vmatrix} \quad , \quad C\begin{vmatrix}۲\\۰\end{vmatrix}$$



$$\Rightarrow AB = BC$$

باتوجه‌به شکل و اینکه $AB = BC$، مثلث متساوی‌الساقین و قائم‌الزاویه است.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۵

۸ گزینه ۱

گام اول:

نقاط بحرانی تابع $f(x)$، نقاطی از دامنهٔ تعریف این تابع است که $f'(x)=۰$ یا $f'(x)$ تعریف‌نشده باشد.

گام دوم:

ابتدا با تعیین علامت عبارت قدر مطلقی $|x-۲|$، ضابطهٔ تابع $f(x)$ را ساده می‌کنیم. $x=۲$ ریشهٔ عبارت درون قدر مطلق است پس داریم:

$$f(x)=\begin{cases}(x-۲)\sqrt[۳]{x^۲} & ; \ x\geq ۲\\ -(x-۲)\sqrt[۳]{x^۲} & ; \ x<۲\end{cases}\Rightarrow f(x)=\begin{cases}(x-۲)x^{\frac{۲}{۳}} & ; \ x\geq ۲\\ -(x-۲)x^{\frac{۲}{۳}} & ; \ x<۲\end{cases}$$

تابع $f(x)$ در $x=۲$ پیوسته است پس ضابطهٔ تابع $f'(x)$ برابر است با:

$$f'(x)=\begin{cases}\sqrt[۳]{x^۲}+\dfrac{۲(x-۲)}{۳\sqrt[۳]{x}} & ; \ x>۲\\ -\sqrt[۳]{x^۲}-\dfrac{۲(x-۲)}{۳\sqrt[۳]{x}} & ; \ x<۲\end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}\dfrac{۵x-۴}{۳\sqrt[۳]{x}} & ; \ x>۲\\ \dfrac{-۵x+۴}{۳\sqrt[۳]{x}} & ; \ x<۲\end{cases}$$

ریشهٔ معادلهٔ $f'(x)=۰$ را به دست می‌آوریم:

$$f'(x)=۰\Rightarrow\begin{cases}x>۲ \ : \ ۵x-۴=۰\Rightarrow x=\dfrac{۴}{۵} \ \text{غ.ق.ق}\\ x<۲ \ : \ -۵x+۴=۰\Rightarrow x=\dfrac{۴}{۵}\end{cases}$$

بررسی می‌کنیم $f'(x)$ در چه نقاطی موجود نیست. $x=۰$ ریشهٔ مخرج $f'(x)$ است پس در این نقطه تعریف‌نشده است؛ ازطرفی به ازای $x=۲$ داریم:

$$\begin{aligned}f'_+(۲)&=\frac{۱۰-۴}{۳\sqrt[۳]{۲}}=\frac{۲}{\sqrt[۳]{۲}}=\sqrt[۳]{۴}\\ f'_-(۲)&=\frac{-۱۰+۴}{۳\sqrt[۳]{۲}}=\frac{-۲}{\sqrt[۳]{۲}}=-\sqrt[۳]{۴}\end{aligned}\Rightarrow f'(۲) \text{ موجود نیست}$$

بنابراین مجموعه نقاط بحرانی تابع $f(x)$ به‌صورت $\{۰,\frac{۴}{۵},۲\}$ است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۵

۹ گزینه ۳

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۳

گام اول

نقطهٔ $c \in D_f$ را نقطهٔ بحرانی تابع f گوئیم هرگاه $f'(c) = ۰$ یا $f'(c)$ موجود نباشد.

گام دوم

باتوجه‌به گام اول، نقاطی از دامنهٔ تابع f که در معادلهٔ $f'(x) = ۰$ صدق می‌کند یا به‌ازای آن‌ها $f'(x)$ تعریف‌نشده است را می‌یابیم.

$$f(x) = (x^۲ - ۲۸)\sqrt[۳]{x} \Rightarrow D_f = \mathbb{R}$$

$$f'(x) = ۲x\sqrt[۳]{x} + \frac{۱}{۳\sqrt[۳]{x^۲}}(x^۲ - ۲۸) = \frac{۶x^۲ + x^۲ - ۲۸}{۳\sqrt[۳]{x^۲}} = \frac{۷x^۲ - ۲۸}{۳\sqrt[۳]{x^۲}}$$

$$f'(x) = ۰ \Rightarrow ۷x^۲ - ۲۸ = ۰ \Rightarrow ۷x^۲ = ۲۸ \Rightarrow x^۲ = ۴ \Rightarrow x = \pm ۲$$

به‌ازای $x = ۰$، مخرج تابع $f'(x)$ برابر صفر و درنتیجه این تابع تعریف‌نشده است؛ بنابراین مجموعه نقاط بحرانی تابع $f(x)$ به‌صورت $\{-۲, ۰, ۲\}$ است.

Homework (2)

۱ کامل‌ترین بازه‌ای که تابع $y = x^۳ - ۳|x-۱|$ در آن اکیداً صعودی باشد کدام است؟

۱) $\mathbb{R}$
۲) $[۱, +\infty)$
۳) $(-\infty, ۱]$
۴) $(-\infty, -۱]$

۲ اگر تابع $y = x^۳ + x^۲ + \frac{x}{k}$ اکیداً صعودی باشد، حدود کامل k کدام است؟

۱) $(۰, ۳]$
۲) $[-۱, ۳]$
۳) $(۰, ۲]$
۴) $[-۱, ۰)$

۳ عرض نقطه بحرانی تابع $f(x) = ax^۴ - ۴ax + a^۲$ برابر ۱۰ است، $f(۲)$ کدام است؟ $(a < ۰)$

۱) ۱۲
۲) -۱۲
۳) ۱۴
۴) -۱۴

۴ در تابع $f(x) = |x-۱| + |x+۱|$ بر کدام بازه f' همواره صفر است؟

۱) $(-\infty, ۱)$
۲) $(-\infty, -۱)$
۳) $(-۱, ۱)$
۴) $(۱, +\infty)$

۵ در کدام بازه تابع $f(x) = ۳x\sqrt[۳]{x} - ۴x - ۸$ صعودی اکید است؟

۱) $(۰, +\infty)$
۲) $(-۱, +\infty)$
۳) $(۱, +\infty)$
۴) $(-\infty, ۱)$

۶ کدام تابع نقاط بحرانی بیشتری دارد؟

۱) $f(x) = x^۲ - ۶x$
۲) $g(x) = x^۳$
۳) $h(x) = |x-۲|$
۴) $m(x) = |x-۱| - x$

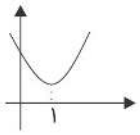
۷ فاصلهٔ دو نقطهٔ بحرانی تابع $y = x^۳ - ۳x^۲ - ۹x + ۱۷$ کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۶۵}$
۲) $۳\sqrt{۱۷}$
۳) $۴\sqrt{۵۳}$
۴) $۴\sqrt{۶۵}$

۸ تابع $f(x) = \sqrt[۳]{x-a} + x + b$ در نقطهٔ $A(۳\ ,\ -۱)$ بحرانی دارد. $a+b$ کدام است؟

۱) -۲
۲) ۲
۳) ۱
۴) -۱

۹ اگر نمودار $f'(x)$ به‌صورت زیر باشد، آنگاه تابع $f(x)$ در چه بازه‌ای اکیداً صعودی است؟



۱) $\mathbb{R}$
۲) $(۱\ ,\ +\infty)$
۳) $(-\infty\ ,\ ۱)$
۴) $(۰\ ,\ +\infty)$

۱۰ نمودار تابع $y = ۶x - x^۶ - \frac{۱}{۲}$ در کدام فاصله اکیداً صعودی است؟

۱) $[۱\ ,\ +\infty)$
۲) $(-\infty\ ,\ ۱]$
۳) $[۲\ ,\ +\infty)$
۴) $(-\infty\ ,\ ۲]$

۱۱ اگر تابع $f(x) = ax^۳ + x^۲ + x + ۱۶$ فقط یک نقطهٔ بحرانی داشته باشد، a کدام می‌تواند باشد؟

۱) $-\frac{۱}{۳}$
۲) $\frac{۱}{۳}$
۳) ۱
۴) -۱

۱۲ فاصلهٔ دو نقطهٔ بحرانی متوالی تابع $f(x) = |\sin \pi x|$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۶}}{۲}$
۲) $\frac{\sqrt{۵}}{۲}$
۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$
۴) $\frac{\sqrt{۷}}{۲}$

۱۳ تابع $f(x) = \begin{cases} x^۲ + ۲x & ;\ x \le ۰ \\ \sqrt{۲x} & ;\ x > ۰ \end{cases}$ در کدام بازه اکیداً صعودی است؟

۱) $[-۱\ ,\ +\infty)$
۲) $(-\infty\ ,\ -۱]$
۳) $[-۱\ ,\ ۰)$
۴) $[-۲\ ,\ +\infty)$

۱۴ کدام جمله صحیح است؟

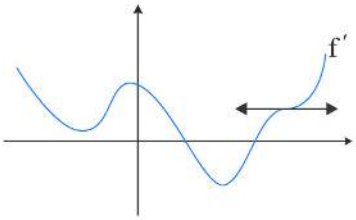
۱) در هر نقطه که $f'(x) = ۰$ شود، اکسترمم نسبی داریم.

۲) در هر اکسترمم نسبی مشتق صفر است.

۳) در نقاطی که تابع f همسایگی ندارد، اکسترمم نسبی نیز نخواهیم داشت.

۴) هر نقطه بحرانی اکسترمم نسبی است.

۱۵ نمودار مشتق تابع پیوسته f به‌صورت زیر است. تابع $f(x)$ چند نقطه بحرانی دارد؟



۱) ۴

۲) ۳

۳) ۲

۴) ۵

پاسخ Homework (2)

۱ گزینه ۱

اگر $x \geq ۱$ باشد:

$$y = x^۳ - ۳x + ۳ \Rightarrow y' = ۳x^۲ - ۳ \geq ۰$$
$$\Rightarrow x^۲ \geq ۱ \Rightarrow |x| \geq ۱ \xrightarrow{x \geq ۱} x \geq ۱$$

اگر $x < ۱$ باشد:

$$y = x^۳ + ۳(x - ۱) = x^۳ + ۳x - ۳$$
$$\Rightarrow y' = ۳x^۲ + ۳ > ۰ \Rightarrow x \in \mathbb{R} \xrightarrow{x < ۱} x < ۱$$

پس تابع روی کل $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی است.

۲ گزینه ۱

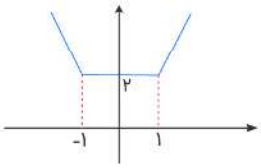
$$y' = ۳x^۲ + ۲x + \frac{۱}{k} \geq ۰ \Rightarrow \Delta \leq ۰ \Rightarrow ۴ - ۴(۳)(\frac{۱}{k}) \leq ۰$$
$$\Rightarrow ۱ - \frac{۳}{k} \leq ۰ \Rightarrow \frac{k - ۳}{k} \leq ۰ \Rightarrow ۰ < k \leq ۳$$

۳ گزینه ۲

$$f'(x) = ۴ax^۳ - ۴a = ۰ \Rightarrow x = ۱$$
$$f(۱) = ۱۰ \Rightarrow a - ۴a + a^۲ = ۱۰ \Rightarrow a^۲ - ۳a - ۱۰ = ۰$$
$$(a - ۵)(a + ۲) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} a = ۵ \\ a = -۲ \end{cases} \xrightarrow{a < ۰} a = -۲$$
$$\Rightarrow f(x) = -۲x^۴ + ۸x + ۴ \Rightarrow f(۲) = -۳۲ + ۱۶ + ۴ = -۱۲$$

۴ گزینه ۳

در تابع ثابت f' برابر صفر است. تابع f گلدانی شکل است.



ملاحظه می‌کنید که تابع در بازه $(-۱ , ۱)$ ثابت و مقدار مشتق برابر صفر است.

۵ گزینه ۳

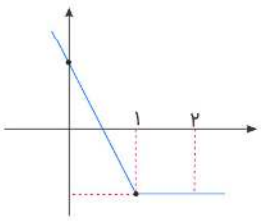
مشتق تابع را تعیین علامت می‌کنیم:

$$f'(x) = ۳(\sqrt[۳]{x} + \frac{x}{۳\sqrt[۳]{x^۲}}) - ۴ = ۴\sqrt[۳]{x} - ۴ \geq ۰ \Rightarrow x \geq ۱$$

در بازهٔ $[۱, +\infty)$ تابع f صعودی اکید است، پس در بازهٔ $(۱, +\infty)$ نیز صعودی اکید خواهد بود.

۶ گزینه ۴

تابع $f(x)$ فقط یک نقطهٔ بحرانی $x = ۳$ دارد. تابع $g(x)$ در $x = ۰$ بحرانی دارد. تابع $h(x)$ هم در $x = ۲$ بحرانی دارد، اما تابع $m(x)$ بی‌شمار نقطهٔ بحرانی دارد. برای فهم بهتر نمودار $m(x)$ را ببینید:



x	۰	۱	۲
y	۱	-۱	-۱

تمام نقاط بازهٔ $[۱ , +\infty)$ نقطهٔ بحرانی $m(x)$ است.

۷ گزینه ۴

در توابع چندجمله‌ای ریشه‌های مشتق، طول نقاط بحرانی است.

$$y' = ۳x^۲ - ۶x - ۹ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = -۱ \Rightarrow y = ۲۲ \\ x = ۳ \Rightarrow y = -۱۰ \end{cases}$$

پس نقاط بحرانی $A(-۱, ۲۲)$ و $B(۳, -۱۰)$ است.

$$|AB| = \sqrt{(۳+۱)^۲ + (-۱۰-۲۲)^۲} = \sqrt{۴^۲(۱+۸^۲)} = ۴\sqrt{۶۵}$$

۸ گزینه ۴

ریشهٔ زیر رادیکال طول نقطهٔ بحرانی است.

$$x - a = ۰ \xrightarrow{x=۳} ۳ - a = ۰ \Rightarrow a = ۳$$

نقطهٔ A یکی از نقاط تابع است.

$$-۱ = \sqrt[۳]{۳-۳} + ۳ + b \Rightarrow b = -۴ \Rightarrow a + b = -۱$$

۹ گزینه ۱

چون تابع $f'(x)$ همواره بالای محور xهاست، پس $f'(x) > ۰$ و درنتیجه تابع $f(x)$ روی $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی است.

۱۰ گزینه ۲

$$y' = ۶ - ۶x^۵ \geq ۰ \Rightarrow x^۵ \leq ۱ \Rightarrow x \leq ۱$$

۱۱ گزینه ۲

دو حالت رخ می‌دهد:

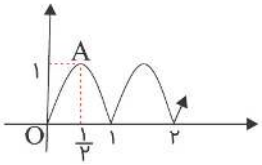
حالت اول: اگر $a = ۰$ شود، تابع f یک تابع درجه دوم است که همواره یک نقطهٔ بحرانی دارد.

حالت دوم: معادلهٔ $f'(x) = ۰$ فقط ریشهٔ مضاعف داشته باشد.

$$f'(x) = ۳ax^۲ + ۲x + ۱ = ۰ \Rightarrow \Delta = ۴ - ۱۲a = ۰ \Rightarrow a = \frac{۱}{۳}$$

۱۲ گزینه ۲

قسمتی از نمودار تابع f را ببینید:

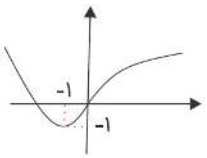


دو نقطهٔ بحرانی متوالی $A(\frac{۱}{۲}\ ,\ ۱)$ و $O(۰\ ,\ ۰)$ است.

$$|OA| = \sqrt{(\frac{۱}{۲})^{۲} + (۱)^{۲}} = \frac{\sqrt{۵}}{۲}$$

۱۳ گزینه ۳

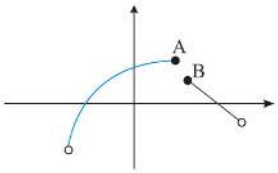
نمودار تابع را ببینید:



باتوجه‌به نمودار تابع f در فاصلهٔ $[-۱\ ,\ +\infty)$ صعودی اکید است.

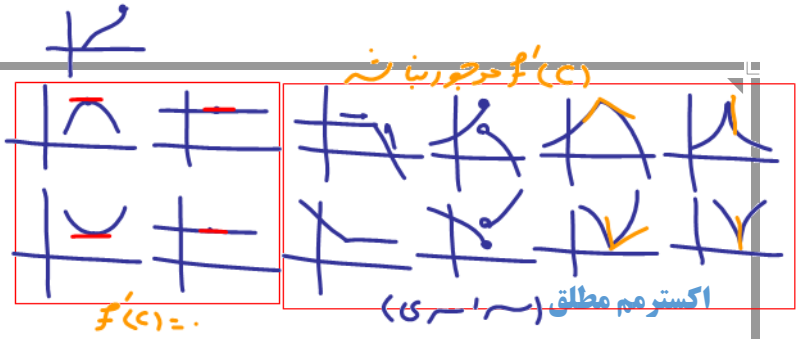
۱۴ گزینه ۳

در نقاطی که تابع در آن‌ها همسایگی ندارند، اکسترمم نسبی هم نداریم؛ مانند نقطه A و B در شکل زیر:



۱۵ گزینه ۳

نقاطی که f' محور xها را قطع می‌کند، نقطه بحرانی f می‌باشد.



قضیه: فرض کنیم تابع f در بازهٔ بستهٔ $[a,b]$ پیوسته باشد، در این صورت f در این بازه هم ماکزیمم مطلق و هم مینیمم مطلق دارد.

خُب بیان این قضیه در کتاب درسی به وجود اکسترمم مطلق (ماکزیمم مطلق یا مینیمم مطلق) در توابعی اشاره می‌کند که در بازهٔ $[a,b]$ پیوسته باشد، اما بهتر است قبل از تحلیل و بررسی صورت قضیه تعریفی از ماکزیمم و مینیمم مطلق داشته باشیم تا بهتر بدانیم که چرا پیوسته بودن تابع در بازهٔ بستهٔ $[a,b]$ شرط کافی وجود اکسترمم مطلق تابع است.

ماکزیمم مطلق

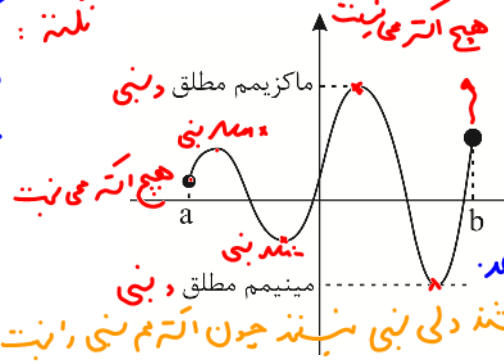
با فرض $c \in D_f$ نقطهٔ $(c,f(c))$ یک نقطهٔ ماکزیمم مطلق برای تابع f نامیده می‌شود، هرگاه به ازای هر x از D_f داشته باشیم $f(c) \geq f(x)$، در این حالت عدد $f(c)$ را مقدار ماکزیمم مطلق f روی D_f می‌نامیم.

مینیمم مطلق

با فرض $c \in D_f$ نقطهٔ $(c,f(c))$ یک نقطهٔ مینیمم برای تابع f نامیده می‌شود، هرگاه به ازای هر x از D_f داشته باشیم $f(c) \leq f(x)$، در این حالت عدد $f(c)$ را مقدار مینیمم مطلق f روی D_f می‌نامیم.

تعریف (کوچه بازاری): ماکزیمم مطلق بیشترین و مینیمم مطلق کم‌ترین مقدار تابع در D_f است.

بنابراین هنگامی که تابع در بازهٔ بستهٔ $[a,b]$ پیوسته باشد، باید بتوانیم بدون برداشتن دست از روی کاغذ از ابتدا تا انتهای تابع را در این بازه رسم کنیم و به ناچار در حداقل یک نقطه باید بیشترین و در حداقل یک نقطه باید کم‌ترین مقدار تابع را مشخص نماییم، زیرا دست ما تا بی‌نهایت نمی‌تواند در رسم تابع پیش رود.



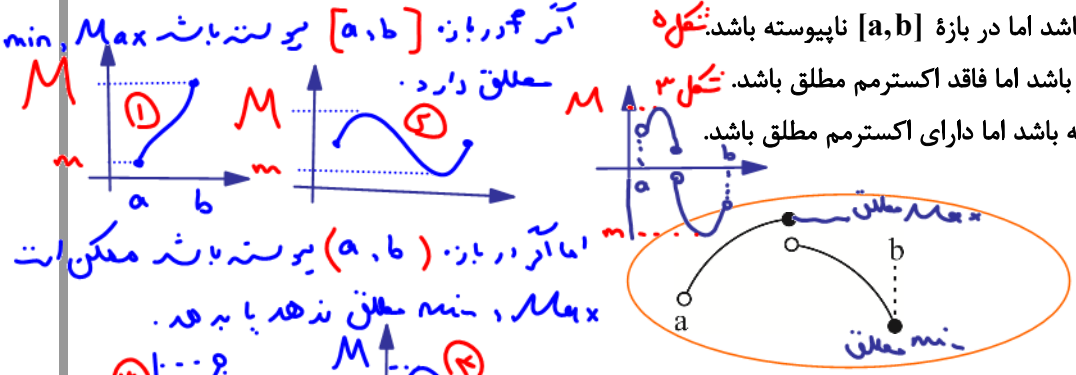
دقت کنید که پیوسته بودن تابع در بازهٔ بستهٔ $[a,b]$ شرط کافی وجود ماکزیمم و مینیمم مطلق است اما شرط لازم نیست، یعنی:

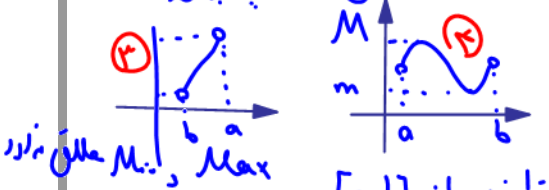
۱) می‌تواند تابع اکسترمم مطلق داشته باشد اما در بازهٔ $[a,b]$ ناپیوسته باشد.

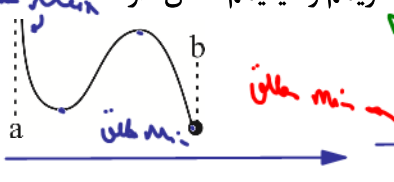
۲) می‌تواند تابع در بازهٔ (a,b) پیوسته باشد اما فاقد اکسترمم مطلق باشد.

۳) می‌تواند تابع در بازهٔ (a,b) ناپیوسته باشد اما دارای اکسترمم مطلق باشد.

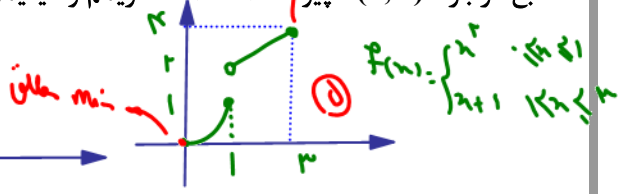
به شکل‌های زیر خوب دقت کنید:



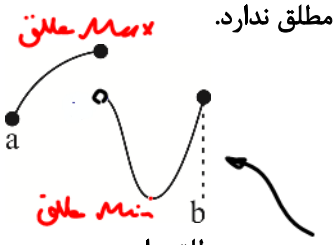




تابع در بازهٔ (a,b) ناپیوسته است اما ماکزیمم و مینیمم مطلق دارد.



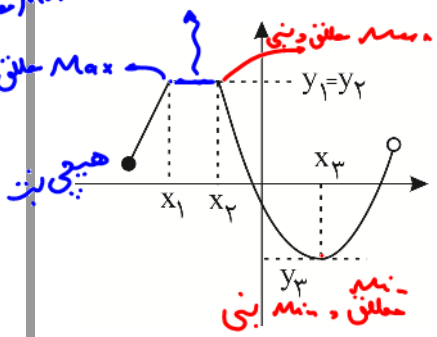
تابع در بازهٔ (a,b) پیوسته است اما ماکزیمم مطلق ندارد.



تابع در بازهٔ $[a,b]$ ناپیوسته است اما ماکزیمم و مینیمم مطلق دارد.

بنابراین می‌توان گفت پیوستگی شرط لازم وجود اکسترمم مطلق نیست و تابع چه پیوسته و چه ناپیوسته باشد می‌تواند اکسترمم مطلق داشته باشد، اما خوب اگر تابعی در بازهٔ $[a,b]$ پیوسته باشد خیال ما را از وجود اکسترمم مطلق راحت می‌کند.

خوب حالا به چند شکل زیر دقت کنید:



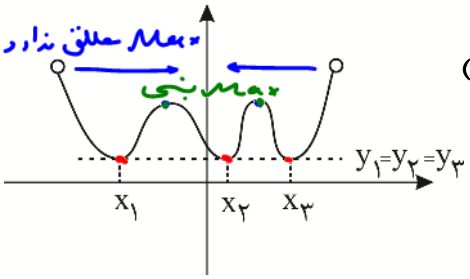
(۱)

x_3: طول مینیمم مطلق

$x \in [x_1, x_2]$: طول‌های نقاط ماکزیمم مطلق

y_1: ماکزیمم مطلق

y_3: مینیمم مطلق

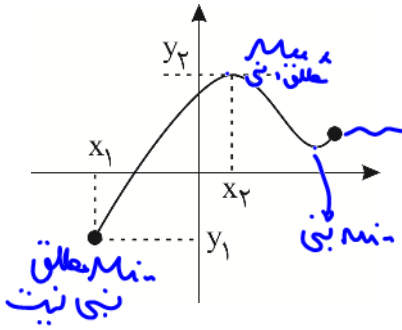


(۲)

x_1, x_2, x_3: طول مینیمم مطلق

$y_1 = y_2 = y_3$: مینیمم مطلق

تابع دارای ماکزیمم مطلق نیست.



(۳)

x_2: طول ماکزیمم مطلق

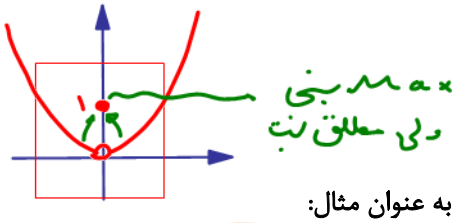
x_1: طول مینیمم مطلق

y_1: مینیمم مطلق

y_2: ماکزیمم مطلق

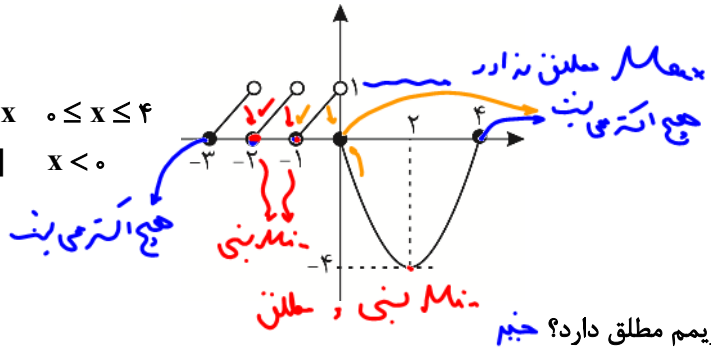
همان‌طور که از شکل‌های رسم‌شده نیز مشخص است، نقاطی که ماکزیمم و مینیمم مطلق را تولید می‌کنند منحصربه‌فرد نیستند. به عنوان مثال، در شکل (۱) در بی‌شمار نقطه ماکزیمم مطلق و در شکل (۲) در سه نقطه مینیمم مطلق داریم. اما مقدار ماکزیمم و مینیمم مطلق در صورت وجود منحصربه‌فرد است.

خُب با این مقدمه و تعریفی که از اکسترمم‌های مطلق ارائه دادیم، می‌توانیم در تعدادی از توابع با رسم تابع اکسترمم‌های مطلق تابع را تشخیص دهیم.



به عنوان مثال:

$$f(x)=\begin{cases}x^2-4x & 0\le x\le 4\\ x-[x] & x<0\end{cases}$$



مینیمم مطلق تابع $y=-4$ است. آیا تابع ماکزیمم مطلق دارد؟

محاسبه‌ی max و min مطلق تابع پیوسته‌ی f در $[a,b]$

برای یافتن اکسترمم مطلق تابع پیوستهٔ f در بازهٔ بستهٔ $[a,b]$ به شرح زیر عمل می‌کنیم:

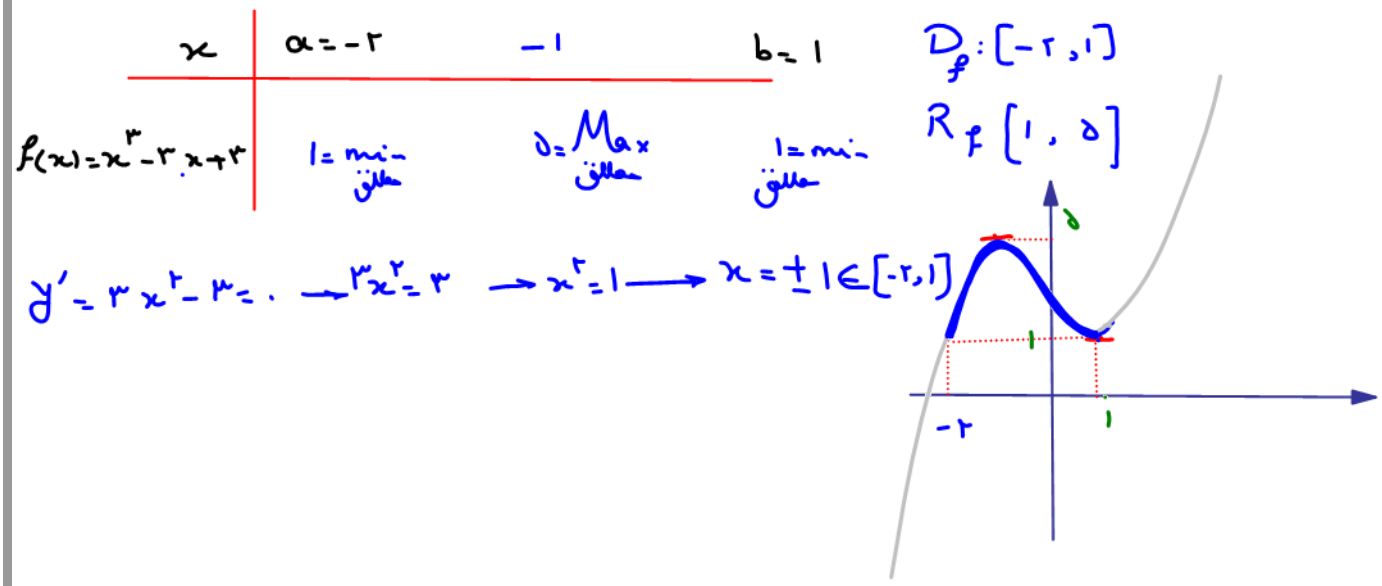
۱- مشتق تابع را به‌دست آورده و کلیهٔ نقاط بحرانی f را می‌یابیم.

۲- مقدار تابع را در هر یک از نقاط بحرانی درونی بازه و هم‌چنین در نقاط انتهایی بازه محاسبه می‌کنیم.

۳- بزرگ‌ترین عدد به‌دست‌آمده در مرحلهٔ ۲، مقدار ماکزیمم مطلق تابع و کوچک‌ترین آن‌ها مینیمم مطلق تابع در بازهٔ $[a,b]$ است.

تمرین: حاصل جمع بیشترین و کم‌ترین مقدار تابع $y=x^3-3x+3$ در بازهٔ $[-2,1]$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۴



تمرین: مقادیر مینیمم و ماکسیمم تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2-15x$ در بازه‌ی $[-4,3]$ کدام است؟ (سراسری ۹۵)

۱) ۱۸− و ۲۴ ۲) ۴۵− و ۲۷ ۳) ۳۶− و ۲۷ ۴) ۲۷− و ۳۶

$f'(x)=x^2-2x-15=(x+3)(x-5)=0 \longrightarrow x=-3 \quad x=5\notin[-4,3]$

x	-4		-3		3
$f(x)$	$44-\frac{32}{3}$		$27=Max$		$-45=min$

در تابع فوق اگر x در بازه‌ی $[-4,3]$ تغییر کند آن‌گاه y در بازه‌ی $[-45,27]$ تغییر می‌کند.

تمرین: هرگاه در تابع $y=x^3-3x+k$ مقدار ماکسیمم مطلق تابع در $[0,2]$ دو برابر مینیمم مطلق تابع باشد، مقدار k کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۲− ۳) ۶− ۴) ۶

$y'=3x^2-3=0 \longrightarrow x^2=1 \longrightarrow x=-1\notin[0,2] \quad , \quad x=1\in[0,2]$

x	0		1		2
$f(x)$	k		$k-2=min$		$k+2=Max$

$$k+2=2(k-2)$$
$$k+2=2k-4$$
$$6=k$$

تمرین: مجموع مقادیر مینیمم و ماکسیمم مطلق تابع $f(x)=x^2-\frac{1}{2}\sqrt{x}$ در بازه‌ی $[0,1]$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{16}$ ۲) $-\frac{3}{16}$ ۳) $\frac{5}{16}$ ۴) $-\frac{5}{16}$

$f'(x)=2x-\frac{1}{2}\frac{1}{2\sqrt{x}}=0 \longrightarrow 2x=\frac{1}{4\sqrt{x}} \longrightarrow 4x^2=\frac{1}{16x}$

$x^3=\frac{1}{64}=\frac{1}{2^6}$

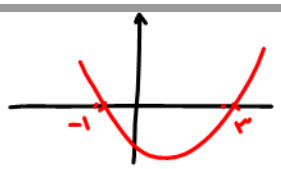
$x=0$ بازه‌ای $\quad$ $x=\frac{1}{4}$ بازه‌ای

x	$x=0$		$x=\frac{1}{4}$		$x=1$
$f(x)$	0		$\frac{1}{16}-\frac{1}{4}=\frac{1-4}{16}=-\frac{3}{16}$ min		$\frac{1}{2}=Max$

$Max+min=-\frac{3}{16}+\frac{1}{2}=\frac{-3+8}{16}=\frac{5}{16}$

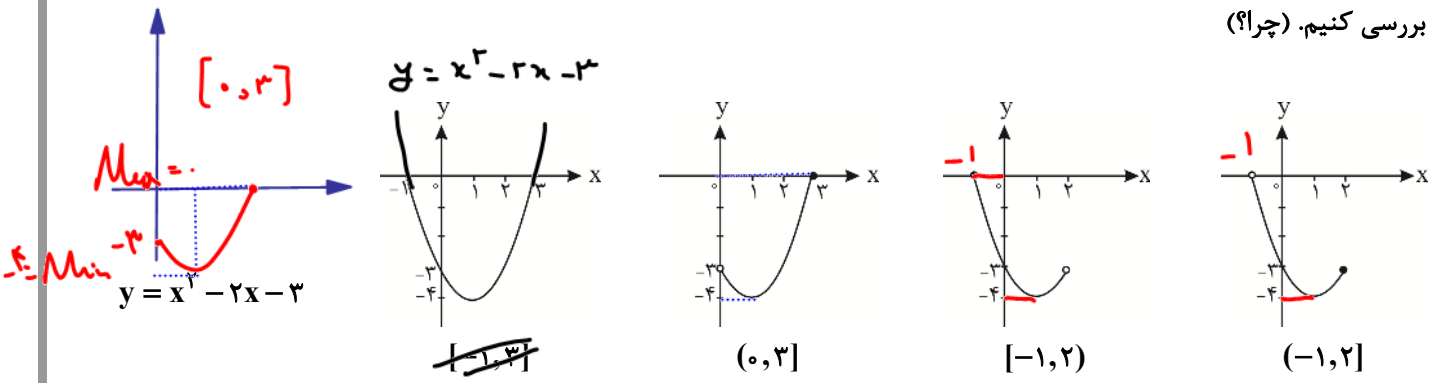
تمرین: تابع $f(x)=x^2-2x-3$ در کدام‌یک از بازه‌های زیر مینیمم و ماکسیمم مطلق ندارد؟

$f(x)=x^2-2x-3$



۱) $[0,3]$ ۲) $(0,3]$ ۳) $[-1,2)$ ۴) $(-1,2]$

پاسخ: گزینه‌ی «۴» ـ یک راه این است که تابع را در تک‌تک گزینه‌ها بررسی کنیم، یعنی عرض نقاط بحرانی و نقطه‌ی اول و آخر بازه را پیدا و با هم مقایسه کنیم. اما چون این کار وقت می‌گیرد بهتر است نمودار تابع را در بازه‌ی $[-1,3]$ یعنی طولانی‌ترین بازه‌ای که از اجتماع گزینه‌ها به دست می‌آید رسم و سپس نمودار هر گزینه را با استفاده از این نمودار اصلی بررسی کنیم. دقت کنید که لازم نیست گزینه‌ی (۱) را بررسی کنیم. (چرا؟)



حالا به نمودارها دقت کنید. تابع در بازه‌ی $(0,3]$ هم مینیمم مطلق دارد و هم ماکسیمم مطلق. مینیمم مطلقش برابر -4 و ماکسیمم مطلقش برابر صفر است. در بازه‌ی $[-1,2)$ نیز هم مینیمم مطلق برابر -4 دارد و هم ماکسیمم مطلق برابر صفر دارد، ولی در بازه‌ی $(-1,2]$ مینیمم مطلقی برابر -4 دارد، ولی ماکسیمم مطلق ندارد، چون مقدار تابع هرگز برابر صفر نمی‌شود (چون نقطه‌ی $x=-1$ توخالی است).

دیدید که برای پیداکردن مینیمم یا ماکسیمم مطلق در توابع ناپیوسته یا بازه‌هایی که ابتدا یا انتهایشان باز است، بهتر است از رسم نمودار استفاده کنیم.

تمرین: اختلاف ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع $y=2x\sqrt{1-x^2}$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۲) ۱ ۳) $\sqrt{2}$ ۴) ۲

$1-x^2\geq 0 \quad 1\geq x^2 \quad 1\geq|x|$

$D_f:[-1,1]$

$f'(x)=2\sqrt{1-x^2}+\left(\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\right)(2x)=0 \rightsquigarrow \sqrt{1-x^2}=\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} \rightsquigarrow 1-x^2=x^2$

$1=2x^2$

$x^2=\frac{1}{2}$

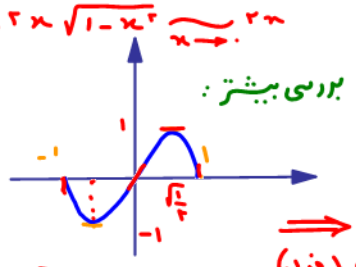
$1-x^2=0$

یعنی $x=\pm 1$

$x=\pm\sqrt{\frac{1}{2}}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

$y=2x\sqrt{1-x^2} \rightsquigarrow 2x$

بررسی بیشتر:



$R_f=[-1,1]$

اگر $x\rightarrow -x$ آنگاه $f(-x)=-f(x)$

f متقارن نسبت به مبدأ (فرد)

x	-1	$-\sqrt{\frac{1}{2}}$	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	1
$f(x)$	0	-1 Min	1 Max	0

$Max-Min=1-(-1)=2$ بنابراین

تمرین: ماکزیمم مقدار تابع $y=\sqrt[3]{x^3-3x^2}$ در بازهٔ $[-2,4]$ کدام است؟

۱) $3\sqrt[3]{2}$ ۲) $\sqrt[3]{2}$ ۳) $4\sqrt[3]{2}$ ۴) $2\sqrt[3]{2}$

$y = \sqrt[3]{x^3-3x^2} = \sqrt[3]{x^2(x-3)}$

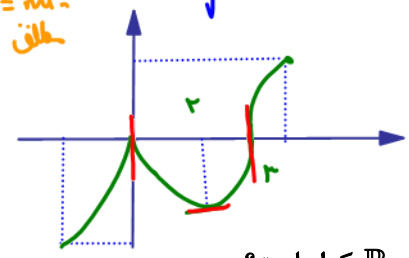
$y' = \frac{3x^2-6x}{3\sqrt[3]{(x^3-3x^2)^2}}$

$y'=0$ صورت $=0 \Rightarrow 3x^2-6x=3x(x-2)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=0 \end{cases}$

$y'=\infty$ یا نبودن $\Rightarrow$ مخرج صفر $\Rightarrow x^3-3x^2=0 \Rightarrow x^2(x-3)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=3 \end{cases}$

x	-2	0	2	3	4
$f(x)$	$-\sqrt[3]{20}$ = min مطلق	0	$-\sqrt[3]{8}$	0	$\sqrt[3]{16}$: Max مطلق $= \sqrt[3]{2^4-2^3(2)} = 2\sqrt[3]{2}$

گزینه ۴



بررسی بیشتر:

تمرین: مینیمم مطلق تابع با ضابطه‌ی $f(x) = x - \sqrt[3]{x^3 - 3x^2}$ روی $\mathbb{R}$ کدام است؟ (سراسری ریاضی)

۱) -1 ۲) $-\frac{1}{3}$ ۳) صفر ۴) $\frac{1}{3}$

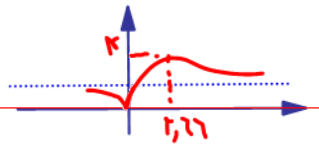
نکته: گاهی برای یافتن اکسترمم مطلق یک تابع می‌توان برد آن را یافت و از این طریق به یافتن برد تابع پرداخت را می‌یابیم.

بررسی بیشتر:

$y = x - \sqrt[3]{(x-1)^3 - 3x + 1}$

$\lim_{x \to \pm\infty} y = x - \sqrt[3]{(x-1)^3 - 3x + 1}$ در برابر $(x-1)^3$ صرف نظر

$y = x - \sqrt[3]{(x-1)^3} = x - x + 1 = 1$



همه‌ی داریم:

$x^2 \geq 0$ ضرب در -3

$-3x^2 \leq 0$ $+x^3$

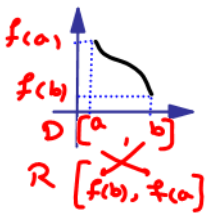
$x^3 - 3x^2 \leq x^3$

دریشه سوم

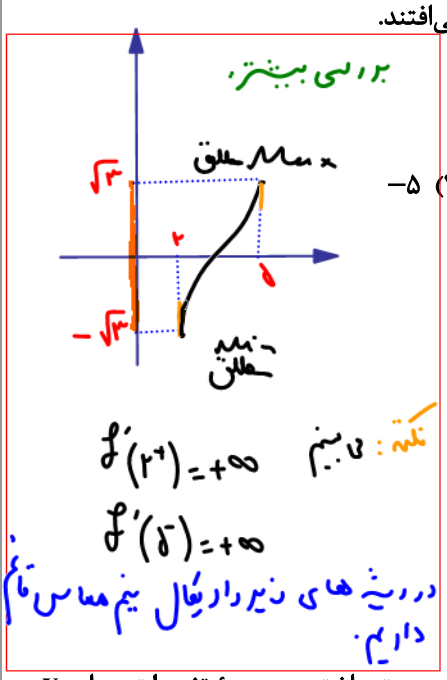
$\sqrt[3]{x^3-3x^2} \leq \sqrt[3]{x^3} = x$

$0 \leq x - \sqrt[3]{x^3-3x^2}$

$0 \leq f(x) \rightsquigarrow$ Min f: صفر



در توابع اکیداً یکنوای پیوسته، اکسترمم‌های مطلق تابع در ابتدا و انتهای بازهٔ تعریف اتفاق می‌افتند.



تمرین: حاصل‌ضرب بیشترین و کم‌ترین مقدار تابع $y=\sqrt{x-2}-\sqrt{5-x}$ کدام است؟

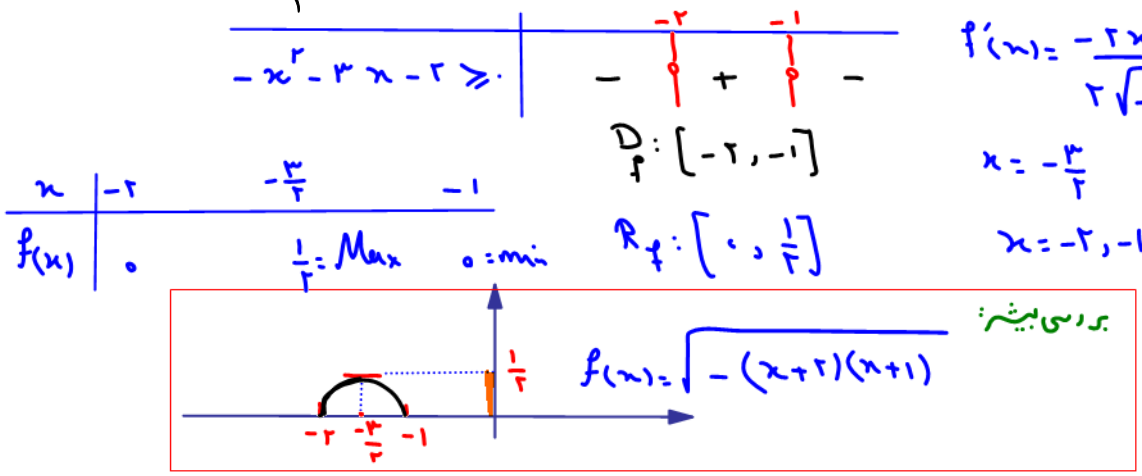
۱) -3 ۲) -2 ۳) $2\sqrt{3}$ ۴) -5

اگر برد تابع $y=f(x)$ را بتوانیم محاسبه کنیم، محدودهٔ تغییرات y را خواهیم داشت و در صورت داشتن محدودهٔ تغییرات برای y می‌توان بیشترین و کم‌ترین مقدار تابع را در صورت وجود یافت. برای چگونگی محاسبهٔ برد از درس‌نامهٔ فصل تابع و روش‌های محاسبهٔ برد کمک بگیرید.

نکته مهم: اگر تابع f در $[a,b]$ پیوسته باشد و مینیمم مطلق آن m و ماکزیمم مطلق آن M باشد، بُرد تابع f بازهٔ $[m,M]$ خواهد بود.

تمرین: برد تابع با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt{-x^2-3x-2}$ کدام است؟

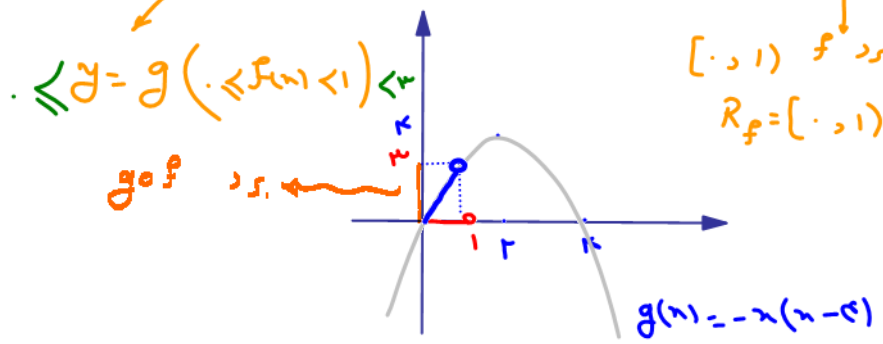
۱) $[0,\frac{1}{4}]$ ۲) $[0,+\infty)$ ۳) $[1,2]$ ۴) $[0,\frac{1}{2}]$



گاهی اوقات از ترکیب تابع‌ها برای پیداکردن برد استفاده می‌کنیم. در حالت کلی وقتی می‌خواهیم برد تابع $f(g(x))$ را در بازهٔ $[a,b]$ پیدا کنیم، اول برد تابع $g(x)$ را (یعنی تابع درونی) به دست می‌آوریم. اگر برد $g(x)$ بازهٔ $[c,d]$ باشد، آن‌گاه برد تابع $f(x)$ را در بازهٔ $[c,d]$ پیدا می‌کنیم. در حالتی که $f(x)$ پیوسته و یکنوا باشد (صعودی یا نزولی) وقتی برد g را پیدا کردیم، کافی است $f(c)$ و $f(d)$ را پیدا کنیم تا برد $f(g(x))$ به دست آید.

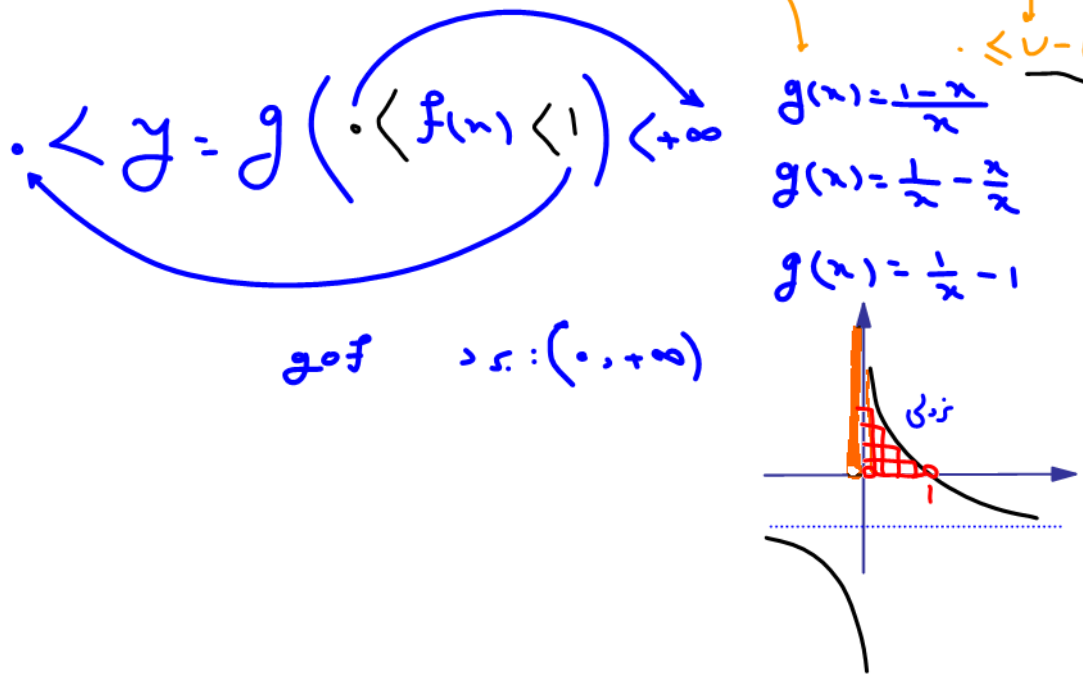
تمرین: اگر $f(x)=2x-[2x]$ و $g(x)=-x^2+4x$ باشند، برد تابع gof، کدام است؟ (سراسری تجربی ۹۹)

۱) $[0,2)$ ۲) $[0,3)$ ✓ ۳) $[0,4)$ ۴) $[1,4)$



تمرین: اگر $f(x)=x-[x]$ و $g(x)=\frac{1-x}{x}$، برد تابع gof کدام بازه است؟ (ریاضی خارج، تجربی خارج ۹۹)

۱) $(0,+\infty)$ ✓ ۲) $[0,+\infty)$ ۳) $(1,+\infty)$ ۴) $[1,+\infty)$



۱ ماکزیمم تابع با ضابطهٔ $f(x) = -|x| \cos x$، در بازهٔ $[-۱, ۱]$ کدام است؟

۱) صفر
۲) $\frac{۱}{۲}$
۳) $\cos ۱$
۴) ۱

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۶

۲ اگر c طول نقطهٔ اکسترمم مطلق تابع f روی دامنهٔ آن باشد و تابع در همسایگی آن نقطه تعریف شده باشد، الزاماً تابع f در نقطهٔ c، کدام وضعیت را دارد؟

۱) پیوسته
۲) مشتق‌پذیر
۳) خط مماس افقی
۴) اکسترمم نسبی

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۸

۳ برد تابع با ضابطهٔ $f(x) = (x + |x|)\sqrt{\frac{۲ - x}{x}}$ کدام است؟

۱) $(۰, ۱]$
۲) $[۰, ۲]$
۳) $[۱, ۲]$
۴) $(۱, ۳)$

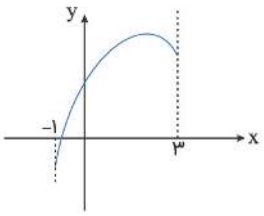
کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۲

۴ حاصل‌ضرب بیشترین و کمترین مقدار تابع $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{a - ۲x}$ برابر $\sqrt{۱۲}$ است. اگر $a > ۰$ باشد، مقدار $[a]$ کدام است؟

۱) ۲
۲) ۴
۳) ۶
۴) ۱۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۵ شکل زیر، نمودار تابع $y = x + \sqrt{-x^۲ + ax + b}$ است. مقدار ماکزیمم مطلق تابع کدام است؟



۱) $۱ + \sqrt{۳}$
۲) $۲\sqrt{۳}$
۳) $۱ + ۲\sqrt{۲}$
۴) ۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۷

۶ اگر $a > ۰$ و ثابت و x متغیر باشد، مینیمم مقدار $\frac{۳a + x}{\sqrt[۴]{a^۳ x}}$ کدام است؟

۱) $۴a$
۲) $۳a$
۳) ۳
۴) ۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۱

۷ مینیمم مطلق تابع $f(x) = x|۳ - x^۲|$ در بازهٔ $[-۱/۵, \sqrt{۳}]$، کدام است؟

۱) $-\frac{۹}{۴}$
۲) -۲
۳) $-\sqrt{۳}$
۴) $-\frac{۹}{۸}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

۸ به ازای کدام مقدار k، بیشترین مقدار و کمترین مقدار تابع با ضابطهٔ $f(x) = x^۳ - ۳x^۲ + k$ در بازهٔ $[۱, ۳]$ قرینهٔ یکدیگرند؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۴

۹ کدام بیان برای تابع با ضابطهٔ $f(x) = x|x^۲ - ۳|$ بر دامنهٔ $[-۱, ۱]$ نادرست است؟

۱) مینیمم مطلق دارد.
۲) ماکزیمم مطلق دارد.
۳) دو نقطهٔ اکسترمم نسبی دارد.
۴) فاقد اکسترمم نسبی

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۷

۱۰ با شرط $x \leq ۱ ; f(x) = x^۳ - ۳x$ در تابع با ضابطهٔ $g(x) = x^۳ + x$، بیشترین مقدار gof کدام است؟

۱) ۹
۲) ۱۰
۳) ۱۲
۴) ۳۰

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۶

۱۱ ماکزیمم مطلق تابع با ضابطهٔ $y = -x + \sqrt[۳]{x^۳ - x^۲}$ کدام است؟

۱) صفر
۲) $\frac{۱}{۳}$
۳) $\frac{۲}{۳}$
۴) فاقد ماکزیمم

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۸

۱۲ ماکزیمم مطلق تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{۱}{x^۴-۴x^۳+۴x^۲+۵}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۶}$
۲) $\frac{۱}{۵}$
۳) $\frac{۱}{۳}$
۴) $\frac{۱}{۲}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۵

۱۳ مقادیر مینیمم و ماکزیمم مطلق تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{۱}{۳}x^۳-x^۲-۱۵x$، در بازهٔ $[-۴\ ,\ ۳]$، کدام است؟

۱) -۱۸ و ۲۴
۲) -۴۵ و ۲۷
۳) -۳۶ و ۲۷
۴) -۲۷ و ۳۶

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

۱۴ مینیمم مطلق تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{x^۴}{۴}-\frac{x^۳}{۳}-x^۲$ روی بازهٔ $[-۱,۳]$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱۱}{۳}$
۲) $-\frac{۱۰}{۳}$
۳) $-\frac{۸}{۳}$
۴) $-\frac{۷}{۳}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۶

۱۵ کمترین مقدار تابع $y=\frac{۱}{۴}x^۴-x^۳-۲x^۲$، کدام است؟

۱) -۳۶
۲) -۳۲
۳) -۲۴
۴) -۱۸

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۲

۱۶ بیشترین مقدار تابع $y=x^۳-۳x^۲-۹x+۵$ در بازهٔ $[-۲,۲]$ کدام است؟

۱) ۹
۲) ۱۰
۳) ۱۲
۴) ۱۷

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۲

۱۷ برد تابع f با ضابطهٔ $f(x)=x^۳-۱۲x+۸$ بر بازهٔ $[-۳,۱]$ کدام است؟

۱) $[-۸,۱۷]$
۲) $[-۸,۲۴]$
۳) $[-۳,۱۷]$
۴) $[-۳,۲۴]$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۱

۱۸ کمترین مقدار تابع با ضابطهٔ $f(x) = x + \sqrt[۳]{x^۲ - x^۳}$، کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۹}$
۲) $-\frac{۱}{۶}$
۳) $-\frac{۱}{۳}$
۴) صفر

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۲

۱۹ مینیمم مطلق تابع با ضابطهٔ $f(x) = x - \sqrt[۳]{x^۳ - ۳x^۲}$، بر روی $\mathbb{R}$ کدام است؟

۱) -۱
۲) $\frac{-۱}{۳}$
۳) صفر
۴) $\frac{۱}{۳}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۸

۲۰ اگر $f(x) = x^۲ - ۲x + ۴$ و $g(x) = x^۳ + x$، کمترین مقدار تابع gof کدام است؟

۱) ۲۱
۲) ۲۴
۳) ۲۷
۴) ۳۰

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۳

۲۱ کمترین مقدار تابع با ضابطهٔ $f(x) = ۱ - \cos^۲ x - \sin x$ کدام است؟

۱) -۱
۲) $\frac{-۱}{۲}$
۳) $\frac{-۱}{۴}$
۴) صفر

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۷

پاسخ Homework

۱ گزینه ۱

می‌دانیم به ازای $-۱ \leq x \leq ۱$ همواره $\cos x > ۰$ است؛ ازطرفی به ازای هر x، $|x| \geq ۰$ است، بنابراین به ازای $x \in [-۱, ۱]$ نامساوی $-|x| \cos x \leq ۰$ برقرار است.

می‌دانیم بیشترین مقدار یک عبارت نامثبت برابر صفر است، بنابراین در بازهٔ $[-۱, ۱]$ به ازای $x = ۰$، ماکزیمم مقدار تابع $f(x)$ برابر صفر خواهد بود.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۶

۲ گزینه ۴

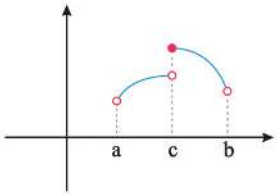
کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۸

گام اول

نقطه‌ای از دامنهٔ تعریف تابع f که به ازای آن تابع بیشترین (کمترین) مقدارش را می‌پذیرد، اکسترمم مطلق این تابع نامیده می‌شود.

گام دوم

باتوجه‌به نمودار زیر، نقطهٔ $x = c$ اکسترمم مطلق تابع f است و تابع در همسایگی این نقطه تعریف شده است. همان‌طور که ملاحظه می‌کنید تابع f در این نقطه ناپیوسته و مشتق‌ناپذیر است، همچنین مماس افقی ندارد.



بنابراین نقطهٔ $x = c$ تنها می‌تواند یک نقطهٔ اکسترمم نسبی تابع f باشد.

۳ گزینه ۲

گام اول:

برد تابع $f(x)$ همان محدودهٔ تغییر مقادیر $f(x)$ بر روی دامنهٔ تعریف آن است. مقادیر $f(x)$ میان ماکزیمم و مینیمم مطلق این تابع تغییر می‌کند.

گام دوم:

ابتدا دامنهٔ تعریف تابع $f(x)$ را به دست می‌آوریم:

$$f(x) = (x + |x|)\sqrt{\frac{۲ - x}{x}} \quad : \quad \frac{۲ - x}{x} \geq ۰ \Rightarrow ۰ < x \leq ۲ \Rightarrow D_f = (۰, ۲]$$

به ازای $۰ < x \leq ۲$، $|x| = x$ است، پس ضابطهٔ تابع $f(x)$ را می‌توان چنین ساده کرد:

$$f(x) = (x + |x|)\sqrt{\frac{۲ - x}{x}} = (x + x)\sqrt{\frac{۲ - x}{x}} = ۲x\sqrt{\frac{۲ - x}{x}}$$

$$= ۲\sqrt{\frac{x^۲(۲ - x)}{x}} = ۲\sqrt{۲x - x^۲}$$

تذکر: چون $x > ۰$ است، پس می‌توان توان دوم آن را زیر رادیکال برد.

تابع $f(x)$ بر روی دامنه‌اش پیوسته است. برای یافتن ماکزیمم و مینیمم مطلق $f(x)$، ابتدا نقاط بحرانی تابع را یافته و مقدار تابع را در این نقاط و همچنین در نقطهٔ $x = ۲$ محاسبه می‌کنیم. ضابطهٔ تابع $f'(x)$ و ریشه‌های معادلهٔ $f'(x) = ۰$ را به دست می‌آوریم.

$$f(x) = ۲\sqrt{۲x - x^۲} \Rightarrow f'(x) = \frac{۲ - ۲x}{\sqrt{۲x - x^۲}}$$

$$f'(x) = ۰ \Rightarrow ۲ - ۲x = ۰ \Rightarrow ۲x = ۲ \Rightarrow x = ۱$$

$$f(۱) = ۲\sqrt{۲ - ۱} = ۲$$

$$f(۲) = ۲\sqrt{۴ - ۴} = ۰$$

بنابراین برد تابع $f(x)$ بازهٔ $[۰, ۲]$ است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۲

۴ گزینه ۲

دامنهٔ تابع $D_f = [۰, \frac{a}{۲}]$ است.

$$f'(x) = \frac{۱}{۲\sqrt{x}} - \frac{۲}{۲\sqrt{a-۲x}} = ۰ \Rightarrow \frac{۱}{\sqrt{x}} = \frac{۲}{\sqrt{a-۲x}} \Rightarrow \frac{۱}{x} = \frac{۴}{a-۲x}$$

$$\Rightarrow ۴x = a - ۲x \Rightarrow x = \frac{a}{۶} \in [۰, \frac{a}{۲}]$$

پس مجموعه نقاط بحرانی $\{۰, \frac{a}{۶}, \frac{a}{۲}\}$ می‌باشد. اکنون مقادیر نقاط بحرانی را حساب می‌کنیم.

$$f(۰) = \sqrt{a}\ ,\ f(\frac{a}{۶}) = \sqrt{\frac{a}{۶}} + \sqrt{a - \frac{a}{۳}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{۶}} + \frac{۲\sqrt{a}}{\sqrt{۶}} = \frac{۳\sqrt{a}}{\sqrt{۶}}$$

$$f(\frac{a}{۲}) = \sqrt{\frac{a}{۲}} = \frac{\sqrt{۳}\sqrt{a}}{\sqrt{۶}}$$

بنابراین $\max f(x) = \frac{۳\sqrt{a}}{\sqrt{۶}}$ و $\min f(x) = \frac{\sqrt{۳}\sqrt{a}}{\sqrt{۶}}$ است. پس:

$$\frac{۳\sqrt{a}}{\sqrt{۶}} \times \frac{\sqrt{۳}\sqrt{a}}{\sqrt{۶}} = \sqrt{۱۲} \Rightarrow \frac{۳a\sqrt{۳}}{۶} = ۲\sqrt{۳} \Rightarrow a = ۴ \Rightarrow [a] = ۴$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۵ گزینه ۳

چون دامنهٔ تابع $[-۱, ۳]$ است، پس $x_۱ = ۳$ و $x_۲ = -۱$ ریشه‌های معادلهٔ $-x^۲ + ax + b = ۰$ هستند.

$$x_۱ + x_۲ = \frac{-a}{-۱} \Rightarrow -۱ + ۳ = a \Rightarrow a = ۲$$

$$x_۱x_۲ = \frac{b}{-۱} \Rightarrow -۱ \times ۳ = -b \Rightarrow b = ۳$$

طبق نمودار، مشاهده می‌کنید که مشتق تابع در ماکزیممش صفر است.

$$f'(x) = ۱ + \frac{-۲x + ۲}{۲\sqrt{-x^۲ + ۲x + ۳}} = ۰ \Rightarrow \frac{x - ۱}{\sqrt{-x^۲ + ۲x + ۳}} = ۱$$

$$\Rightarrow -x^۲ + ۲x + ۳ = (x-۱)^۲ \Rightarrow -x^۲ + ۲x + ۳ = x^۲ - ۲x + ۱$$

$$\Rightarrow ۲x^۲ - ۴x - ۲ = ۰ \Rightarrow x^۲ - ۲x - ۱ = ۰ \Rightarrow x = ۱ \pm \sqrt{۲}$$

$x = ۱ + \sqrt{۲}$ قابل‌قبول است.

$$f(۱+\sqrt{۲}) = ۱ + \sqrt{۲} + \sqrt{-(۱+\sqrt{۲})^۲ + ۲(۱+\sqrt{۲}) + ۳}$$

$$= ۱ + \sqrt{۲} + \sqrt{-۱ - ۲ - ۲\sqrt{۲} + ۲ + ۲\sqrt{۲} + ۳} = ۱ + ۲\sqrt{۲}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۷

۶ گزینه ۴

راه‌حل اول: برای یافتن مینیمم مقدار y، ابتدا معادلهٔ $y' = ۰$ را حل می‌کنیم:

$$y = \frac{۳a + x}{\sqrt[۴]{a^۳ x}} = \frac{۱}{\sqrt[۴]{a^۳}} \frac{۳a + x}{\sqrt[۴]{x}}$$

$$y' = \frac{۱}{\sqrt[۴]{a^۳}} \times \frac{\sqrt[۴]{x} - \frac{۱}{۴\sqrt[۴]{x^۳}}(۳a + x)}{\sqrt[۴]{x^۲}} = \frac{۴x - (۳a + x)}{۴\sqrt[۴]{x^۵}} = \frac{۳x - ۳a}{۴\sqrt[۴]{x^۵}}$$

$$\Rightarrow y' = ۰ \Rightarrow ۳x - ۳a = ۰ \Rightarrow x = a$$

چون a مقداری مثبت است، جدول تعیین علامت y' به‌صورت زیر می‌باشد:

		a	
y'	$-$	۰	$+$
	↘		↗

بنابراین y در نقطهٔ $x = a$ مینیمم است، درنتیجه داریم:

$$y(a) = \frac{۳a + a}{\sqrt[۴]{a^۳ a}} = \frac{۴a}{a} = ۴$$

راه‌حل دوم: a مقداری ثابت است پس به ازای تمام مقادیر x، a فقط یک مقدار می‌پذیرد. برای سادگی حل a را مقداری انتخاب می‌کنیم که به ازای آن، گزینه‌ها یکسان نشوند. با انتخاب $a = ۲$، چهار گزینه مقدار متفاوتی خواهند داشت و همچنین داریم:

$$y = \frac{۶ + x}{\sqrt[۴]{۸x}}$$

برای یافتن مینیمم مقدار y ابتدا معادلهٔ $y' = ۰$ را حل می‌کنیم:

$$y = \frac{۶ + x}{\sqrt[۴]{۸x}} = (۶ + x)(۸x)^{-\frac{۱}{۴}}$$

$$y' = (۸x)^{-\frac{۱}{۴}} - ۲(۶ + x)(۸x)^{-\frac{۵}{۴}} = (۸x)^{-\frac{۵}{۴}}(۸x - ۱۲ - ۲x) = \frac{۶x - ۱۲}{\sqrt[۴]{(۸x)^۵}}$$

$$y' = ۰ \xrightarrow{x \neq ۰} ۶x - ۱۲ = ۰ \Rightarrow x = ۲$$

مینیمم مقدار تابع برابر با $y(۲)$ است و داریم:

$$y(۲) = \frac{۶ + ۲}{\sqrt[۴]{۸(۲)}} = \frac{۸}{\sqrt[۴]{۱۶}} = \frac{۸}{\sqrt[۴]{۲^۴}} = \frac{۸}{۲} = ۴$$

راه‌حل سوم:

نکته: به ازای n عدد $x_۱, x_۲, \ldots, x_n > ۰$ داریم:

$$x_۱ + x_۲ + \ldots + x_n \geq n\sqrt[n]{x_۱ x_۲ \ldots x_n}$$

باتوجه‌به نکته داریم:

$$f(x)=\underbrace{\frac{a}{\sqrt[4]{a^3x}}}_{x_1}+\underbrace{\frac{a}{\sqrt[4]{a^3x}}}_{x_2}+\underbrace{\frac{a}{\sqrt[4]{a^3x}}}_{x_3}+\underbrace{\frac{x}{\sqrt[4]{a^3x}}}_{x_4}$$

$$x_1+x_2+x_3+x_4\geq 4\sqrt[4]{x_1x_2x_3x_4}=4$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۱

۷ گزینه ۲

نقاط بحرانی تابع $f(x)=x|3-x^2|$ را حساب می‌کنیم:

$$3-x^2=0\Rightarrow\begin{cases}x=\sqrt{3}\in D\\ x=-\sqrt{3}\notin D\end{cases}$$

$$(x(3-x^2))'=0\Rightarrow(3x-x^3)'=0\Rightarrow 3-3x^2=0\Rightarrow\begin{cases}x=1\in D\\ x=-1\in D\end{cases}$$

پس مجموعه نقاط بحرانی $\{-1,1,\sqrt{3},-1/5\}$ خواهد بود.

$$f(1)=2\ ,\ f(-1)=-2\ ,\ f(\sqrt{3})=0$$
$$f(-1/5)=f(-\frac{3}{2})=-\frac{3}{2}|3-\frac{9}{4}|=\frac{-3}{2}\times\frac{3}{4}=\frac{-9}{8}$$

کمترین مقدار تابع -2 خواهد بود.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

۸ گزینه ۲

برای یافتن بیشترین و کمترین مقدار تابع پیوستهٔ $f(x)$ روی بازهٔ $[1,3]$، ابتدا نقاط بحرانی تابع $f(x)$ را روی این بازه یافته و مقدار تابع را در این نقاط به دست می‌آوریم. می‌دانیم نقاط بحرانی تابع $f(x)$، نقاطی است که $f'(x)=0$ یا $f'(x)$ موجود نباشد. داریم:

$$f(x)=x^3-3x^2+k\Rightarrow f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)=0\Rightarrow x=0,x=2$$

چون $0\notin[1,3]$ پس تنها نقطهٔ $x=2$ قابل‌قبول است؛ همچنین نقاط ابتدا و انتهای بازه هم بحرانی‌اند. بنابراین داریم:

$$f(1)=1-3+k=k-2$$

$$f(2)=8-12+k=k-4$$

$$f(3)=27-27+k=k$$

بیشترین مقدار تابع $f(x)$ برابر k و کمترین مقدار آن برابر $k-4$ است. این دو مقدار قرینهٔ یکدیگرند؛ پس:

$$k=-(k-4)\Rightarrow k=-k+4\Rightarrow 2k=4\Rightarrow k=2$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۴

۹ گزینه ۳

عبارت $x^۲ - ۳$ روی بازهٔ $[-۱, ۱]$ همواره منفی است بنابراین داریم:

$$x \in [-۱, ۱] : |x^۲ - ۳| = -(x^۲ - ۳) = ۳ - x^۲$$

$$\Rightarrow f(x) = x|x^۲ - ۳| = x(۳ - x^۲) = ۳x - x^۳$$

حال معادلهٔ $f'(x) = ۰$ را حل می‌کنیم:

$$f'(x) = ۳ - ۳x^۲ \xrightarrow{f'(x)=۰} ۳ - ۳x^۲ = ۰ \Rightarrow ۳x^۲ = ۳ \Rightarrow x^۲ = ۱ \Rightarrow x = \pm ۱$$

x	$-\infty$	-۱		۱	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	۰	$+$	۰	$-$
$f(x)$	↘		↗		↘

تابع $f(x)$ در بازهٔ $[-۱, ۱]$ صعودی و پیوسته است؛ بنابراین $f(-۱) = -۲$ مینیمم مطلق تابع و $f(۱) = ۲$ ماکزیمم مطلق تابع روی این بازه است. نقاط $x = +۱$ و $x = -۱$ چون نقاط ابتدا و انتهای بازه هستند اکسترمم‌های نسبی تابع $f(x)$ محسوب نمی‌شوند پس گزینهٔ سوم نادرست است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۷

۱۰ گزینه ۲

ابتدا با مشتق‌گیری از تابع $g(x)$، وضعیت یکنوایی این تابع را تعیین می‌کنیم:

$$g(x) = x^۳ + x \Rightarrow g'(x) = ۳x^۲ + ۱ > ۰$$

تابع $g(x)$ همواره صعودی است بنابراین بیشترین مقدار تابع gof به ازای بیشترین مقدار تابع f به دست می‌آید. با تعیین علامت تابع $f(x)$، تغییرات آن را بررسی می‌کنیم. داریم:

$$f(x) = x^۳ - ۳x \; ; x \leq ۱ \Rightarrow f'(x) = ۳x^۲ - ۳$$

$$f'(x) = ۰ \Rightarrow ۳x^۲ = ۳ \Rightarrow x^۲ = ۱ \Rightarrow x = \pm ۱$$

x	$-\infty$	-۱		۱	$+\infty$
$f'(x)$	+	۰	−	۰	
$f(x)$	↗		↘		

بیشترین مقدار تابع $f(x)$ با شرط $x \leq ۱$، در نقطهٔ $x = -۱$ به دست می‌آید که برابر است با:

$$f(-۱) = (-۱)^۳ - ۳(-۱) = -۱ + ۳ = ۲$$

بنابراین با شرط $x \leq ۱$ داریم: $f(x) \leq ۲$

به این ترتیب بیشترین مقدار تابع gof برابر است با:

$$(gof)_{max} = g(۲) = ۲^۳ + ۲ = ۸ + ۲ = ۱۰$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۶

۱۱ گزینه ۱

به ازای هر $x \in \mathbb{R}$ داریم:

$$x^۲ \geq ۰ \Rightarrow -x^۲ \leq ۰ \Rightarrow x^۳ - x^۲ \leq x^۳ \xrightarrow{\text{ریشهٔ سوم}} \sqrt[۳]{x^۳ - x^۲} \leq \sqrt[۳]{x^۳}$$

$$\Rightarrow \sqrt[۳]{x^۳ - x^۲} \leq x \Rightarrow -x + \sqrt[۳]{x^۳ - x^۲} \leq ۰$$

بنابراین ماکزیمم مطلق تابع $y = -x + \sqrt[۳]{x^۳ - x^۲}$ روی $\mathbb{R}$ برابر صفر است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۸

۱۲ گزینه ۲

برای تعیین ماکزیمم مطلق یک تابع پیوسته، مقدار تابع را در نقاط بحرانی می‌یابیم. بیشترین مقدار ماکزیمم مطلق تابع خواهد بود. نقاط بحرانی، نقاطی از دامنهٔ تعریف تابع هستند که به‌ازای آن‌ها $f'(x) = ۰$ یا $f'(x)$ موجود نباشد.

$$f(x) = \frac{۱}{x^۴ - ۴x^۳ + ۴x^۲ + ۵} \Rightarrow f'(x) = \frac{۰ - (۴x^۳ - ۱۲x^۲ + ۸x)}{(x^۴ - ۴x^۳ + ۴x^۲ + ۵)^۲} = \frac{-۴x(x-۲)(x-۱)}{(x^۴ - ۴x^۳ + ۴x^۲ + ۵)^۲}$$

$$f'(x) = ۰ \Rightarrow -۴x(x-۲)(x-۱) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \\ x - ۲ = ۰ \Rightarrow x = ۲ \\ x - ۱ = ۰ \Rightarrow x = ۱ \end{cases}$$

هیچ‌یک از سه مقدار به‌دست‌آمده مخرج تابع $f'(x)$ را صفر نمی‌کنند، بنابراین هر سه طول نقطهٔ بحرانی تابع $f(x)$ هستند. همچنین ابتدا و انتهای بازه هم نقاط بحرانی محسوب می‌شوند، پس داریم:

$$f(۰) = \frac{۱}{۰ + ۵} = \frac{۱}{۵}$$

$$f(۱) = \frac{۱}{۱ - ۴ + ۴ + ۵} = \frac{۱}{۶}$$

$$f(۲) = \frac{۱}{۱۶ - ۳۲ + ۱۶ + ۵} = \frac{۱}{۵}$$

بنابراین ماکزیمم مطلق تابع $f(x)$ برابر $\frac{۱}{۵}$ است.

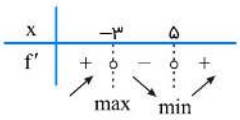
کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۵

۱۳ گزینه ۲

نقاط بحرانی تابع را در فاصلهٔ $[-۴, ۳]$ به دست می‌آوریم.

$$f(x) = \frac{۱}{۳}x^۳ - x^۲ - ۱۵x \Rightarrow f'(x) = x^۲ - ۲x - ۱۵$$

$$\xrightarrow{f'(x)=۰} x^۲ - ۲x - ۱۵ = (x-۵)(x+۳) = ۰$$



نقاط بحرانی تابع در بازهٔ $[-۴, ۳]$ $= -۳, -۴, ۳$

$$\left.\begin{aligned} f(-۴) &= -\frac{۶۴}{۳} - ۱۶ + ۶۰ = \frac{۶۸}{۳} \\ f(-۳) &= \frac{(-۳)^۳}{۳^۳} - ۹ + ۴۵ = ۲۷ \\ f(۳) &= \frac{۳^۳}{۳} - ۹ - ۴۵ = -۴۵ \end{aligned}\right\} \xrightarrow{x\in[-۴,۳]} \begin{cases} y_{min} = -۴۵ \\ y_{max} = ۲۷ \end{cases}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

۱۴ گزینه ۳

برای یافتن مینیمم مطلق یک تابع پیوسته، مقدار تابع را در نقاط بحرانی آن یافته و کمترین آن‌ها را مشخص می‌کنیم. نقطهٔ بحرانی تابع، نقاطی از دامنهٔ تعریف آن است که به‌ازای آن‌ها $f'(x)=۰$ یا $f'(x)$ موجود نباشد.
چون دامنهٔ تابع چندجمله‌ای $f(x)$ برابر $\mathbb{R}$ است، کافی است ریشه‌های معادلهٔ $f'(x)=۰$ را به دست آوریم:

$$f(x)=\frac{x^۴}{۴}-\frac{x^۳}{۳}-x^۲ \Rightarrow f'(x)=x^۳-x^۲-۲x=x(x-۲)(x+۱)$$

$$f'(x)=۰ \Rightarrow x(x-۲)(x+۱)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۰ \\ x-۲=۰ \Rightarrow x=۲ \\ x+۱=۰ \Rightarrow x=-۱ \end{cases}$$

هر سه مقدار فوق عضو بازهٔ $[-۱,۳]$ هستند. کمترین مقدار تابع را به‌ازای چهار مقدار $x=۰,۲,-۱,۳$ به دست می‌آوریم:

$$f(-۱)=\frac{(-۱)^۴}{۴}-\frac{(-۱)^۳}{۳}-(-۱)^۲=-\frac{۵}{۱۲}$$

$$f(۰)=۰$$

$$f(۲)=\frac{۲^۴}{۴}-\frac{۲^۳}{۳}-۲^۲=-\frac{۸}{۳}$$

$$f(۳)=\frac{۳^۴}{۴}-\frac{۳^۳}{۳}-۳^۲=\frac{۹}{۴}$$

کمترین مقدار تابع روی بازهٔ $[-۱,۳]$ برابر $y=-\frac{۸}{۳}$ است.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۶

۱۵ گزینه ۲

کمترین مقدار تابع، همان مینیمم مطلق تابع است. برای یافتن مینیمم مطلق یک تابع پیوسته، مقدار تابع را در نقاط بحرانی آن، می‌یابیم. نقطهٔ بحرانی تابع، نقاطی از دامنهٔ تعریف آن است که به‌ازای آن‌ها $f'(x)=۰$ یا $f'(x)$ موجود نباشد.
ضابطهٔ $f(x)$ یک عبارت چندجمله‌ای و $D_f \in \mathbb{R}$ است. کافی است ریشه‌های معادلهٔ $f'(x)=۰$ را یافته و مینیمم مقدار تابع را به‌ازای آن‌ها مشخص کنیم.

$$y=\frac{۱}{۴}x^۴-x^۳-۲x^۲ \Rightarrow y'=x^۳-۳x^۲-۴x=x(x-۴)(x+۱)$$

$$y'=۰ \Rightarrow x(x-۴)(x+۱)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۰ \\ x-۴=۰ \Rightarrow x=۴ \\ x+۱=۰ \Rightarrow x=-۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y(۰)=۰ \\ y(۴)=-۳۲ \\ y(-۱)=-\frac{۳}{۴} \end{cases}$$

باتوجه‌به مقادیر به‌دست‌آمده، $y=-۳۲$ کمترین مقدار تابع است.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۲

۱۶ گزینه ۲

برای یافتن ماکزیمم و مینیمم مطلق یک تابع پیوسته، مقدار تابع را در نقاط بحرانی آن می‌یابیم. نقطهٔ بحرانی تابع، نقاطی از دامنهٔ تعریف آن است که به‌ازای آن‌ها $f'(x)=۰$ یا $f'(x)$ موجود نباشد.

$$y=x^۳-۳x^۲-۹x+۵ \Rightarrow y'=۳x^۲-۶x-۹$$

$$y'=۰ \Rightarrow ۳(x^۲-۲x-۳)=۳(x-۳)(x+۱)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x-۳=۰ \Rightarrow x=۳ \\ x+۱=۰ \Rightarrow x=-۱ \end{cases}$$

چون $۳ \notin [-۲,۲]$، پس مقدار تابع را به‌ازای $x=-۱,-۲,۲$ محاسبه و باهم مقایسه می‌کنیم.

$$f(-۱)=-۱-۳+۹+۵=۱۰$$

$$f(۲)=۸-۱۲-۱۸+۵=-۱۷$$

$$f(-۲)=-۸-۱۲+۱۸+۵=۳$$

باتوجه‌به مقادیر به‌دست آمده، بیشترین مقدار تابع $y=۱۰$ است.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۲

۱۷ گزینه ۴

گام اول:
برد تابع $f(x)$ همان محدودهٔ تغییرات مقادیر $f(x)$ بر روی بازهٔ مشخص‌شده است. مقادیر $f(x)$ بر روی یک بازه بین ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع تغییر می‌کند.
گام دوم:
برای یافتن ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع پیوستهٔ $f(x)$ روی بازهٔ $[-۳,۱]$، ابتدا نقاط بحرانی تابع $f(x)$ را بر روی این بازه یافته و مقدار تابع را در این نقاط و همچنین نقاط ابتدایی و انتهایی بازه می‌یابیم. می‌دانیم نقاط بحرانی تابع $f(x)$، نقاطی است که $f'(x)=۰$ باشد یا $f'(x)$ موجود نباشد؛ بنابراین داریم:

$$f(x)=x^۳-۱۲x+۸ \Rightarrow f'(x)=۳x^۲-۱۲=۳(x^۲-۴)=۰$$

$$\Rightarrow x=۲,\ x=-۲ \xrightarrow{x\in[-۳,۱]} x=-۲$$

$$f(-۳)=(-۳)^۳-۱۲(-۳)+۸=-۲۷+۳۶+۸=۱۷$$

$$f(-۲)=(-۲)^۳-۱۲(-۲)+۸=-۸+۲۴+۸=۲۴ \Rightarrow \text{مطلق } \max$$

$$f(۱)=۱^۳-۱۲(۱)+۸=۱-۱۲+۸=-۳ \Rightarrow \text{مطلق } \min$$

بنابراین برد تابع $f(x)$ به‌صورت $[-۳,۲۴]$ است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۱

۱۸ گزینه ۴

به ازای هر $x \in \mathbb{R}$ داریم:

$$x^۲ \geq ۰ \Rightarrow x^۲ - x^۳ \geq -x^۳ \xrightarrow{\text{ریشهٔ سوم}} \sqrt[۳]{x^۲ - x^۳} \geq \sqrt[۳]{-x^۳}$$

$$\Rightarrow \sqrt[۳]{x^۲ - x^۳} \geq -x \Rightarrow x + \sqrt[۳]{x^۲ - x^۳} \geq ۰$$

بنابراین کمترین مقدار تابع $f(x)$ بر روی $\mathbb{R}$ برابر صفر است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۲

۱۹ گزینه ۳

به ازای هر $x \in \mathbb{R}$ داریم:

$$x^۲ \geq ۰ \Rightarrow -۳x^۲ \leq ۰ \Rightarrow x^۳ - ۳x^۲ \leq x^۳ \xrightarrow{\text{ریشهٔ سوم}} \sqrt[۳]{x^۳ - ۳x^۲} \leq \sqrt[۳]{x^۳}$$

$$\Rightarrow \sqrt[۳]{x^۳ - ۳x^۲} \leq x \Rightarrow x - \sqrt[۳]{x^۳ - ۳x^۲} \geq ۰$$

بنابراین مینیمم مطلق تابع $f(x)$ بر روی $\mathbb{R}$ برابر صفر است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۸

۲۰ گزینه ۴

ابتدا وضعیت یکنوایی دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ را روی دامنهٔ تعریف آن‌ها بررسی می‌کنیم. داریم:

$$f(x) = x^۲ - ۲x + ۴ \quad , \quad D_f = \mathbb{R}$$

$$f'(x) = ۲x - ۲ \ , \ f'(x) = ۰ \Rightarrow ۲x = ۲ \Rightarrow x = ۱$$

$$f(۱) = ۱^۲ - ۲(۱) + ۴ = ۱ - ۲ + ۴ = ۳ \Rightarrow f(x) \geq ۳$$

x	$-\infty$	۱	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	۰	$+$
$f(x)$	↘		↗

$$g(x) = x^۳ + x \quad , \quad D_g = \mathbb{R}$$

$$g'(x) = ۳x^۲ + ۱ > ۰$$

تابع $g(x)$ همواره صعودی است بنابراین کمترین مقدار تابع gof به ازای کمترین مقدار تابع $f(x)$ به دست می‌آید، پس می‌توان نوشت:

$$f(x) \geq ۳ \Rightarrow g(f(x)) \geq g(۳)$$

$$\Rightarrow (gof)_{min} = g(۳) = ۳^۳ + ۳ = ۲۷ + ۳ = ۳۰$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۳

۲۱ گزینه ۳

ازآنجایی‌که $\sin^۲x = ۱ - \cos^۲x$ است، پس:

$$f(x) = \sin^۲x - \sin x$$

با فرض $\sin x = t$، داریم $-۱ \leq t \leq ۱$ و درنتیجه:

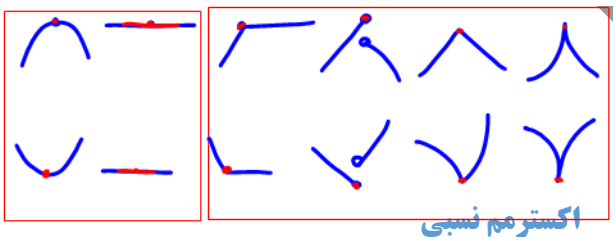
$$y = t^۲ - t \quad , \quad -۱ \leq t \leq ۱$$

$$y' = ۲t - ۱ = ۰ \Rightarrow t = \frac{۱}{۲}$$

$$y(۱) = ۰ \ , \ y(-۱) = ۲ \ , \ y(\frac{۱}{۲}) = \frac{-۱}{۴}$$

بنابراین کمترین مقدار تابع $\frac{-۱}{۴}$ است.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۷



اکسترمم نسبی

تعریف ۱: گوییم تابع f در نقطه‌ای به طول c ماکزیمم نسبی دارد، هرگاه یک همسایگی از c مانند $I \subseteq D_f$ باشد که برای هر $x \in I$ داشته باشیم $f(c) \geq f(x)$. در این حالت $f(c)$ مقدار ماکزیمم نسبی تابع f نامیده می‌شود.

تعریف ۲: گوییم تابع f در نقطه‌ای به طول c مینیمم نسبی دارد، هرگاه یک همسایگی از c مانند $I \subseteq D_f$ باشد که برای هر $x \in I$ داشته باشیم $f(c) \leq f(x)$ در این حالت $f(c)$ مقدار مینیمم نسبی تابع f نامیده می‌شود.

خوب حالا بریم سراغ این دو تعریف که در کتاب درسی برای ماکزیمم و مینیمم نسبی ارائه شده است. به زبان ساده ماکزیمم و مینیمم نسبی را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

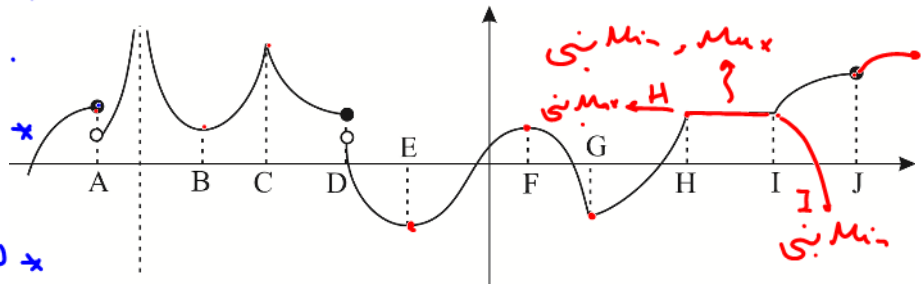
تعریف ۱: نقطه به طول $x = a$ را ماکزیمم نسبی تابع $y = f(x)$ گوییم، هرگاه مقدار تابع در این نقطه از تمام مقادیر تابع در یکی از همسایگی‌های آن بیشتر یا مساوی باشد.

تعریف ۲: نقطه به طول $x = a$ را مینیمم نسبی تابع $y = f(x)$ گوییم، هرگاه مقدار تابع در این نقطه از تمام مقادیر تابع در یکی از همسایگی‌های آن کم‌تر یا مساوی باشد.

تذکر: به مجموعهٔ نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی یک تابع، اکسترمم‌های تابع می‌گوییم.

تذکر: بنا بر تعاریف ارائه‌شده اگر نقطه‌ای به طول $x = c$ بخواهد اکسترمم نسبی تابع باشد، باید تابع در یک همسایگی آن تعریف شود. بنابراین نقاطی که برای آن‌ها نتوان یک همسایگی متعلق به دامنهٔ تابع مشخص کرد نمی‌توانند اکسترمم نسبی تابع باشند. مانند ابتدا و انتهای بازهٔ تعریف.

به شکل زیر خوب دقت کنید تا مطالب و تعاریف مطرح‌شده را با هم مرور کنیم.



نقاط B و E و G و تمام نقاط متعلق به بازهٔ $(H, I]$ مینیمم نسبی تابع هستند.

نقاط A، C و F و تمام نقاط متعلق به بازهٔ $[H, I)$ ماکزیمم نسبی تابع هستند.

نقاط مربوط به بازهٔ (H, I) چون با تمام نقاط همسایگی‌ای خود عرض برابر دارند، هم در تعریف ماکزیمم نسبی و هم در تعریف مینیمم نسبی گنجانده می‌شوند و می‌توان گفت هم ماکزیمم نسبی‌اند و هم مینیمم نسبی.

از آن‌جایی که J نقطهٔ انتهایی بازهٔ تعریف است و نمی‌توان همسایگی‌ای اطراف آن متعلق به دامنهٔ تابع مشخص کرد نمی‌تواند یک اکسترمم نسبی باشد.

نقطهٔ H با آن که با نقاط همسایگی راست خود هم‌عرض است اما چون مقدار تابع در این نقطه از مقادیر همسایگی چپش بیشتر است، این نقطه، یک نقطهٔ ماکزیمم نسبی است.

نقطهٔ I با آن که با نقاط همسایگی چپ خود هم‌عرض است اما چون مقدار تابع در این نقطه از مقادیر همسایگی راستش کم‌تر است، این نقطه، یک نقطهٔ مینیمم نسبی است.

در نقطهٔ D چون مقدار تابع در این نقطه از نقاط همسایگی چپش کم‌تر و از نقاط همسایگی راستش بیشتر است نه ماکزیمم نسبی و نه مینیمم نسبی است.

نقاط مشتق‌ناپذیر و ناپیوسته نیز می‌توانند اکسترمم نسبی تابع باشند، مانند A, C, G, H, I.

در اطراف نقاط اکسترمم نسبی پیوسته (توابع غیرثابت) یکنوایی تابع تغییر می‌کند، به نقاط B, C, E, F, G دقت کنید. در اطراف این نقاط تابع از صعودی به نزولی یا بالعکس تغییر یکنوایی داشته است، حتی در نقطه‌ای مانند H نیز می‌توان گفت قبل از این نقطه، تابع صعودی و بعد از آن تابع نزولی است. (دقت کنید توابع ثابت هم صعودی و هم نزولی هستند.)

در سمت چپ نقاط ماکزیمم نسبی پیوسته، تابع صعودی و در سمت راست آن نزولی است و در نقاط مینیمم نسبی بالعکس می‌باشد.

الزامی نیست یکنوایی تابع در اطراف نقاط اکسترمم نسبی ناپیوسته تغییر کند، مانند نقطهٔ ماکزیمم نسبی A که قبل و بعد از آن تابع صعودی است.

می‌توان گفت در یک تابع پیوسته هرکجا تابع از صعودی به نزولی تغییر کند آن نقطه یک ماکزیمم نسبی و هرکجا از نزولی به صعودی تغییر داشته باشد یک نقطهٔ مینیمم نسبی است.

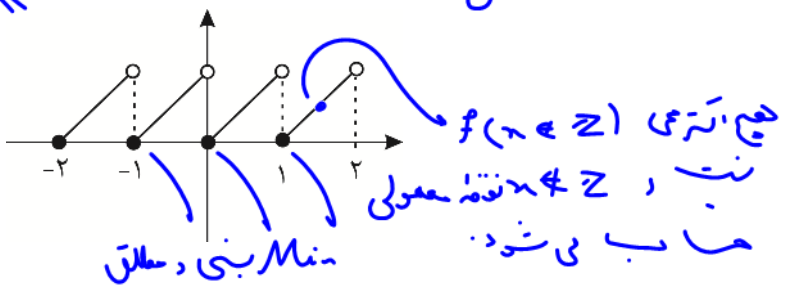
اگر در نقاط اکسترمم نسبی، تابع مشتق‌پذیر باشد، مشتق تابع در آن نقاط الزاماً صفر است، مانند نقاط E، F و B و تمام نقاط عضو بازهٔ (H, I).

هر نقطهٔ اکسترمم نسبی یک تابع، یک نقطهٔ بحرانی است، زیرا یا آن نقطه یک نقطهٔ مشتق‌ناپذیر است و یا در صورت مشتق‌پذیر بودن مشتقی برابر صفر دارد. (به نقاط اکسترمم نسبی در شکل خوب دقت کنید.)

حالا که یک تحلیل و بررسی جامع و کامل بر روی نقاط اکسترمم نسبی تابع داشتیم و درک هندسی درستی از این نقاط پیدا کردیم، قدم اول با توابعی روبه‌رو هستیم که در تشخیص نقاط اکسترمم نسبی آن می‌توانیم از نمودارهای آن‌ها کمک بگیریم. دقت کنید که در توابع ناپیوسته بهترین راه برای تشخیص اکسترمم‌های نسبی کمک گرفتن از نمودار تابع است.

تمرین: در هر کدام از توابع زیر، نقاط اکسترمم نسبی تابع را مشخص کنید.

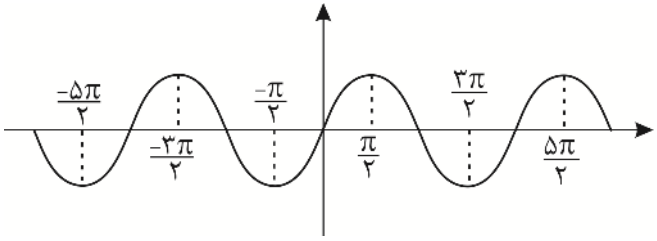
۱) $y = x - [x]$



$x \in \mathbb{Z} \leftarrow$ مینیمم نسبی

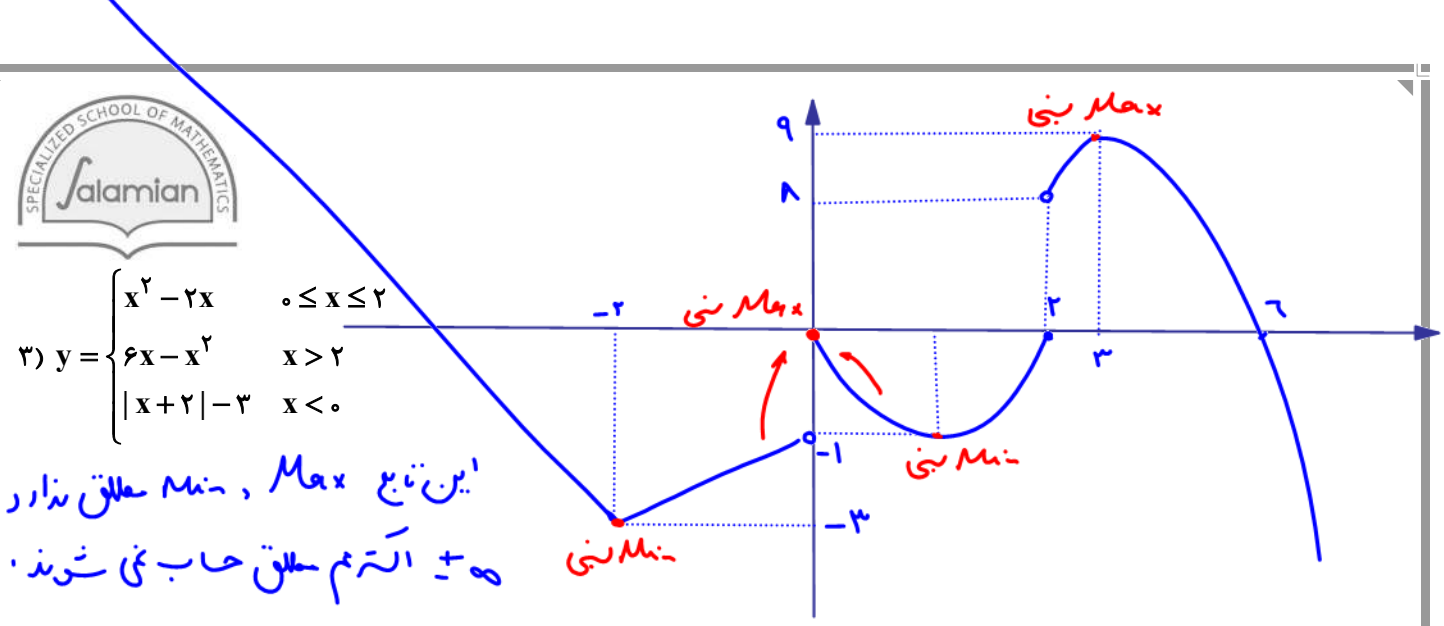
تابع فاقد ماکزیمم نسبی است.

۲) $y = \sin x$



$x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \leftarrow$ ماکزیمم نسبی

$x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \leftarrow$ مینیمم نسبی

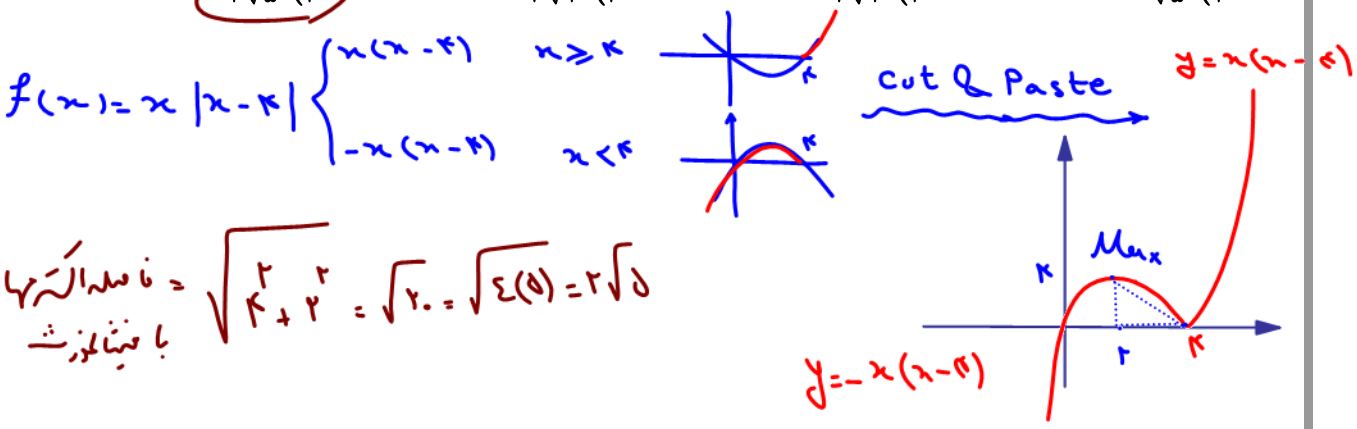


$$۳)\ y=\begin{cases} x^{۲}-۲x & ۰\le x\le ۲ \\ ۶x-x^{۲} & x>۲ \\ |x+۲|-۳ & x<۰ \end{cases}$$

این تابع Max ، Min مطلق ندارد.
$\pm\infty$ اکسترمم مطلق حساب نمی شوند.

تمرین: در تابع با ضابطهٔ $f(x)=x|x-۴|$، فاصلهٔ دو نقطهٔ ماکزیمم نسبی و مینیمم نسبی آن، کدام است؟ (تجربی ۹۸)

۱) $\sqrt{۵}$ ۲) $۲\sqrt{۲}$ ۳) $۳\sqrt{۲}$ ۴) $۲\sqrt{۵}$



خوب حالا که با کمک گرفتن از نمودار تابع توانستیم اکسترمم‌های نسبی را تشخیص دهیم، می‌خواهیم به سراغ بررسی ضابطهٔ توابع و تشخیص اکسترمم‌های نسبی آن از روی ضابطه برویم. دقت کنید در این‌جا بررسی ضابطه‌های پیوسته مدنظر است و هم‌چنان در ضابطه‌های ناپیوسته توصیه به رسم است.

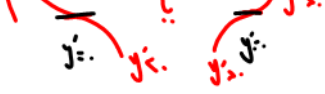
آزمون مشتق اول: برای تعیین صعودی نزولی بودن تابع و یافتن اکسترمها

فرض کنید c طول نقطهٔ بحرانی تابع f باشد که f در c پیوسته است و هم‌چنین f در یک همسایگی محذوف c مشتق‌پذیر باشد.

الف) اگر علامت f' در $x=c$ از مثبت به منفی تغییر کند، آن‌گاه $x=c$ طول نقطهٔ ماکزیمم تابع f است.

ب) اگر علامت f' در $x=c$ از منفی به مثبت تغییر کند، آن‌گاه $x=c$ طول نقطهٔ مینیمم نسبی تابع f است.

ج) اگر f' در $x=c$ تغییر علامت ندهد، به طوری که f' در یک همسایگی محذوف c همواره مثبت یا همواره منفی باشد، آن‌گاه f در $x=c$ ماکزیمم یا مینیمم نسبی ندارد. (حالات: عطف افقی)



برای یافتن اکسترمم‌های یک تابع باید مراحل زیر را انجام دهیم:

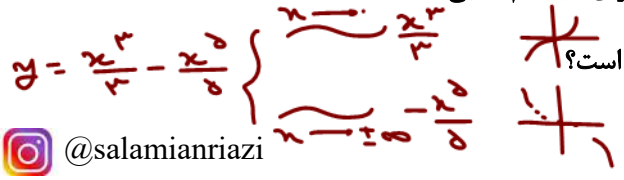
۱) محاسبه‌ی مشتق تابع

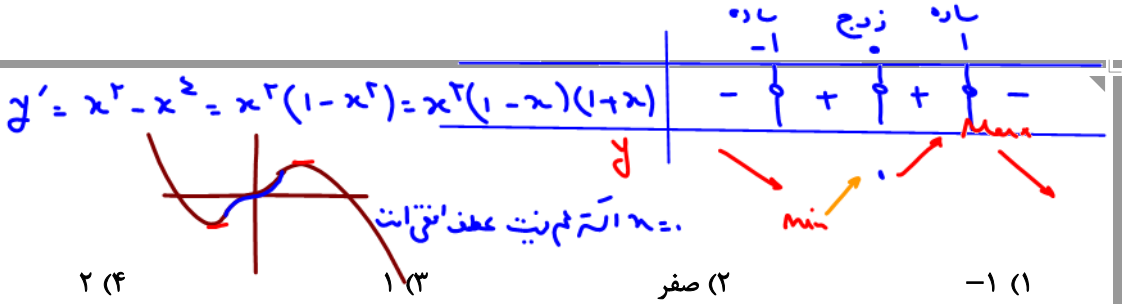
۲) محاسبه‌ی طول نقاط بحرانی

۳) تعیین علامت مشتق در نقاط بحرانی

۴) اگر $x_۰$ طول نقطه‌ی بحرانی و تغییر علامت مشتق در $x_۰$ از مثبت به منفی باشد، آن‌گاه تابع در $x_۰$ دارای ماکسیمم نسبی است و اگر تغییر علامت مشتق در $x_۰$ از منفی به مثبت باشد، آن‌گاه تابع در $x_۰$ دارای مینیمم نسبی است.

تمرین: تابع $y=\frac{x^{۳}}{۳}-\frac{x^{۵}}{۵}$ در کدام‌یک از نقاط زیر دارای ماکسیمم نسبی است؟





۴) ۲ ۳) ۱ ۲) صفر ۱) ۱−

پاسخ: گزینه‌ی «۳» ـ طبق آزمون مشتق اول داریم:

$$y' = x^2 - x^4 = 0 \Rightarrow x^2(1-x^2) = 0 \Rightarrow x = 0, \pm 1$$

مشتق در $x = 0$ ریشه‌ی مضاعف دارد و تغییر علامت نمی‌دهد، لذا $x = 0$ اکسترمم نمی‌باشد.

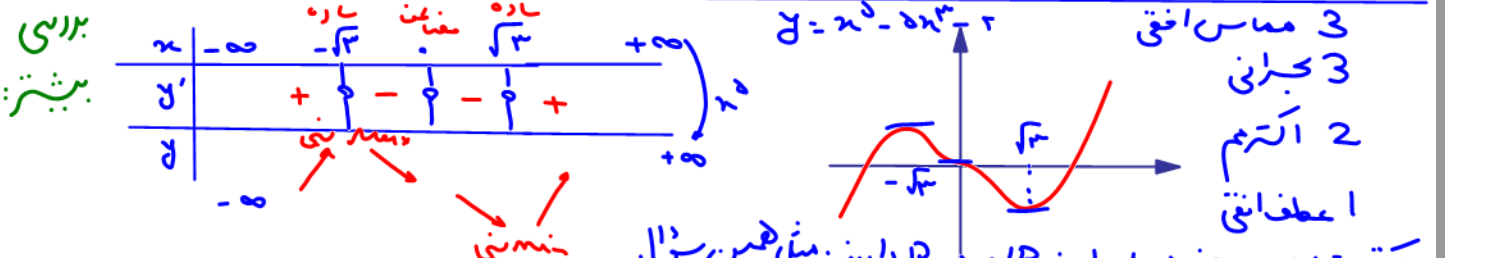
x		-1		0		1	
y'	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$
y	↘		↗		↗		↘
		min				max	

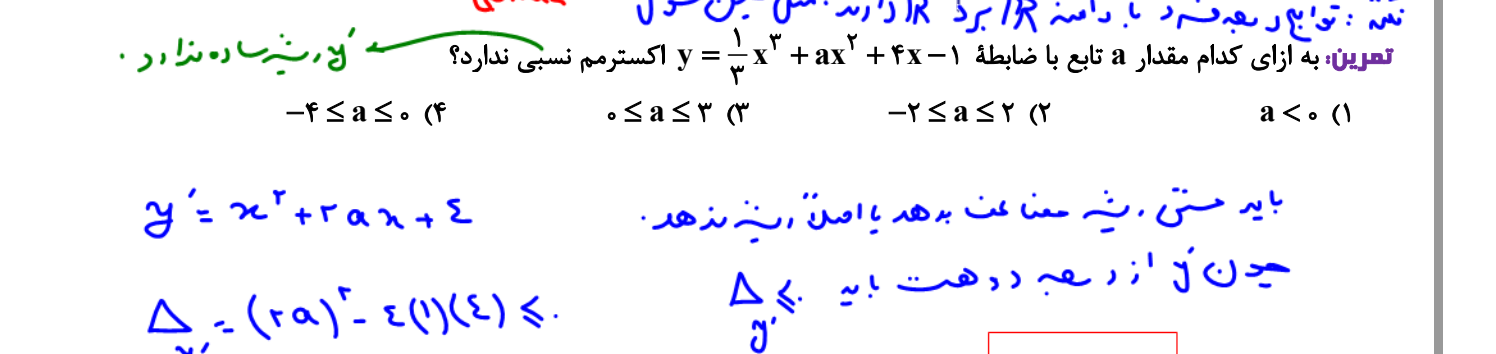
تذکر: هر ریشهٔ غیرمضاعف مشتق اول یک اکسترمم نسبی است.

تذکر: در توابع مشتق‌پذیر اکسترمم‌های نسبی لزوماً ریشهٔ غیرمضاعف مشتق اول هستند.

تمرین: تعداد اکسترمم‌های نسبی تابع $y = x^5 - 5x^3 - 2$ کدام است؟

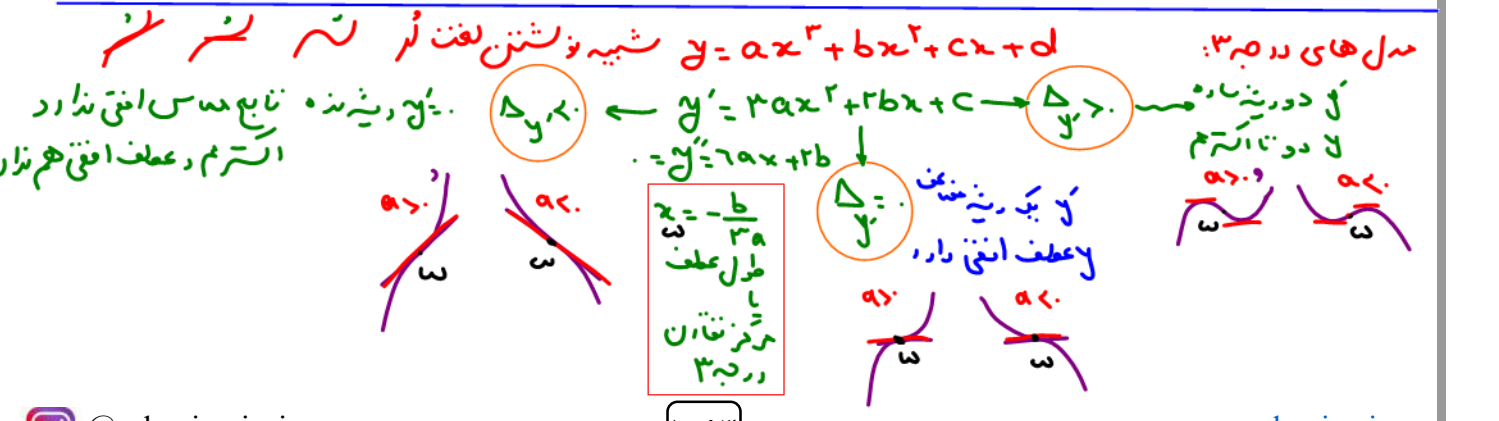
۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۱





تمرین: به ازای کدام مقدار a تابع با ضابطهٔ $y = \frac{1}{3}x^3 + ax^2 + 4x - 1$ اکسترمم نسبی ندارد؟

۱) $a < 0$ ۲) $-2 \le a \le 2$ ۳) $0 \le a \le 3$ ۴) $-4 \le a \le 0$



تمرین: در تابع $f(x)=\frac{x^2+1}{x-a}$ اگر بین طول‌های نقاط اکسترمم تابع رابطهٔ $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=4$ برقرار باشد، مقدار a کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) ۲ ۴) -۲

$y'=\frac{2x(x-a)-1(x^2+1)}{(x-a)^2}=\frac{x^2-2ax-1}{(x-a)^2}=0 \rightarrow x^2-2ax-1=0 \begin{cases} x_1 \\ x_2 \end{cases}$

$\begin{cases} S=x_1+x_2=-\frac{b}{a}=2a \\ P=x_1x_2=\frac{c}{a}=-1 \end{cases}$

$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_2+x_1}{x_1x_2}=\frac{S}{P}=4 \quad \frac{2a}{-1}=4$

$a=-2$

$y=\frac{ax}{x^2+1}$ تکنه پیچ نیوتن $\begin{cases} a>0 \\ a<0 \end{cases}$ $y\in[-\frac{a}{2},\frac{a}{2}]$

تمرین: تابع $y=\frac{|x|}{x^2+1}$ چه تعداد اکسترمم نسبی دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

$y=\begin{cases} \frac{x}{x^2+1} \\ \frac{-x}{x^2+1} \end{cases}$

$x\geq 0$ $x<0$

$y=\frac{|x|}{x^2+1}$ بررسی پیوستگی $x\to$ کم توان $|x|$ $\frac{|x|}{x^2}$ $x\to\pm\infty$ پرتوان

$\begin{cases} x>0 & y=\frac{x}{x^2}=\frac{1}{x} \\ x<0 & y=\frac{-x}{x^2}=-\frac{1}{x} \end{cases}$

تمرین: تابع $y=\sqrt[3]{x^3-3x^2}$ چه تعداد اکسترمم نسبی دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۳

$y=\sqrt[3]{u}$ $D_f:\mathbb{R}$ $y'=\frac{u'}{3\sqrt[3]{u^2}}$

$y'=\frac{3x^2-6x}{3\sqrt[3]{(x^3-3x^2)^2}}$ $x^2(x-3)$

$y'=0 \rightarrow 3x^2-6x=0 \quad 3x(x-2)=0$ ریشه ساده $x=2$ ریشه $x=0$ مرتبه ۵

y' وجود ندارد $\rightarrow (x^2(x-3))^2=0$ $x^4(x-3)^2=0$ $x=3$ مخرج

$y=\sqrt[3]{x^2(x-3)}$ $x=0$ مشتق‌پذیر $x=3$ مشتق‌پذیر $x=2$ عطف نقطه بازتاب

x	$-\infty$		۰		۲		۳		$+\infty$
y'		+	۰	−	۰	+	∄	+	
y		ت ن		م		ت ن			
			Max نسبی		min نسبی				

$y=\sqrt[3]{x^3-3x^2}$ کم‌توان $\sqrt[3]{-3x^2}=-\sqrt[3]{x^2}$

$x=3$ جایی هست اکسترمم نسبت

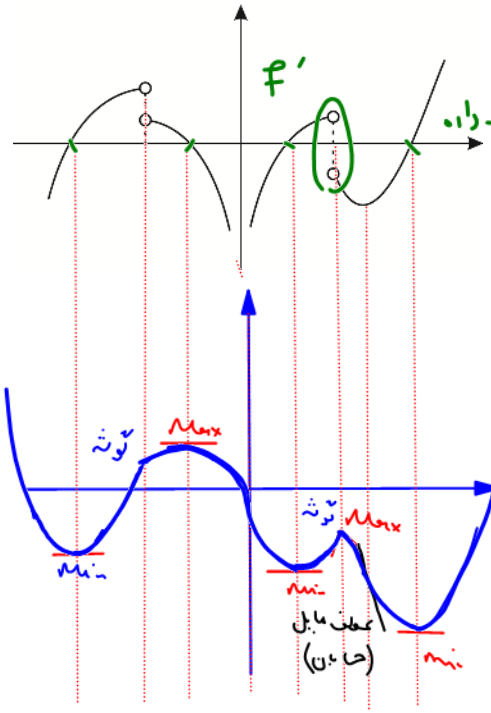
Max نسبی min نسبی

تابع ۳ جزئی

تمرین: تابع $y=f(x)$ تابعی پیوسته در $\mathbb{R}$ است. اگر نمودار $f'(x)$ به صورت زیر باشد، تابع $y=f(x)$ چند اکسترمم نسبی دارد؟

ریشه‌های ساده و فرد و جاهایی که تغییر علامت میده، اکسترمم نسبی هست.

۱) ۳
۲) ۴
✓ ۳) ۵
۴) ۶



اگر (a,b) نقطه‌ی اکسترمم نسبی تابع مشتق‌پذیر f باشد، آن‌گاه:

۱) مختصات اکسترمم در تابع f صدق می‌کند: $f(a)=b$

۲) طول اکسترمم، مشتق تابع را صفر می‌کند: $f'(a)=0$

تمرین: نقاط $A(0,0)$ و $B(1,1)$ نقاط اکسترمم نسبی تابع $y=ax^3+bx^2+cx+d$ هستند. حاصل ab کدام است؟ (ریاضی خارج ۱۴۰۱)

۱) ۳- ۲) ۶- ۳) ۳ ۴) ۶

$(0,0)\in f \rightarrow 0=0+0+0+d \rightarrow d=0$

$(1,1)\in f \rightarrow 1=a+b+c+0 \rightarrow a+b=1 \rightarrow b=1-a$

$y'=3ax^2+2bx+c$

$f'(0)=0 \rightarrow 0=0+0+c \rightarrow c=0$

$f'(1)=0 \rightarrow 0=3a+2b+0 \rightarrow 3a+2b=0$

$3a=-2b$

$3a=-2(1-a)$

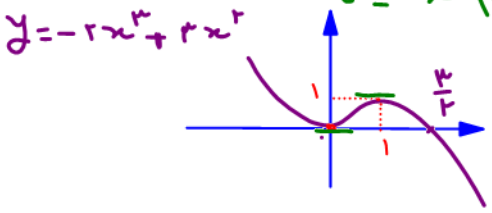
$3a=-2+2a$

$\begin{cases} a=-2 \\ b=3 \end{cases}$

$ab=-6$

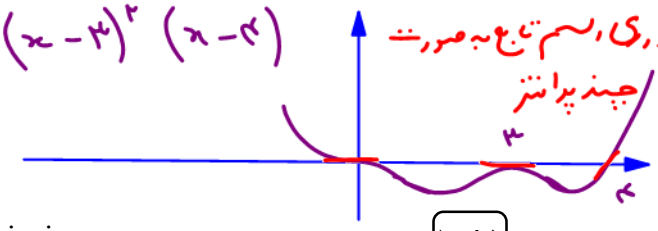
$y=-2x^3+3x^2$

$0=-x^2(2x-3) \begin{cases} x=0 \\ x=\frac{3}{2} \end{cases}$ تماس با محور xها / برخورد محور xها



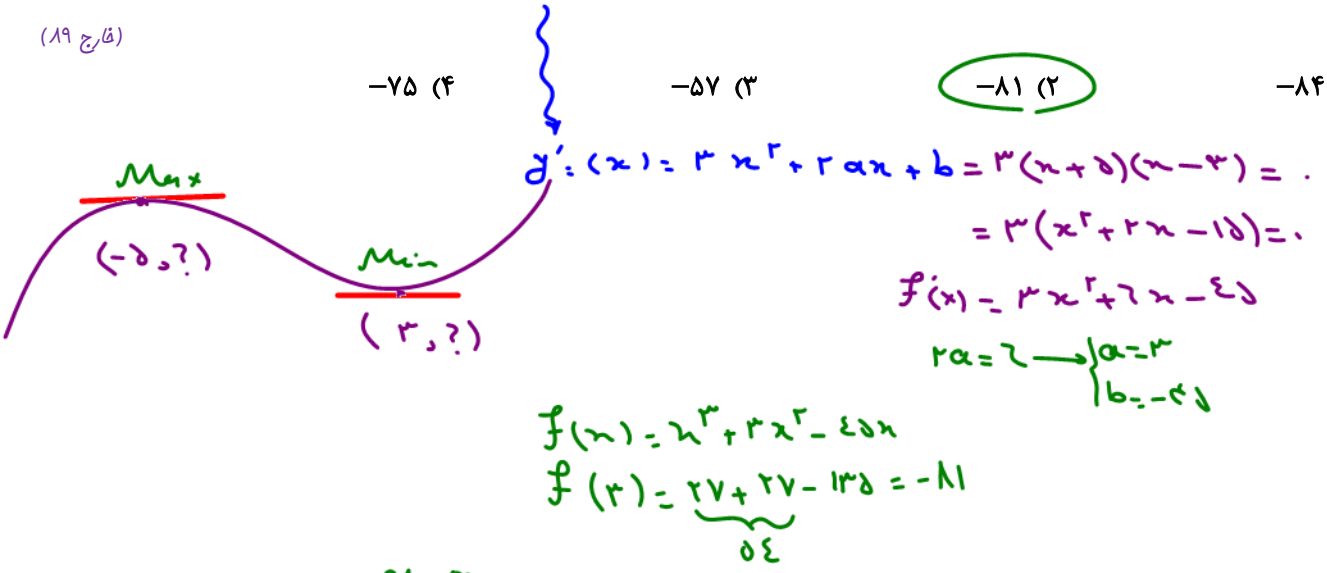
$y=x^3(x-3)^2(x-4)$

یادآوری: رسم تابع به صورت ضرب چند پرانتز



تمرین: دو نقطه به طول‌های ۳ و ۵− نقاط بحرانی تابع با ضابطه‌ی $f(x)=x^3+ax^2+bx$ هستند. مقدار مینیمم نسبی این تابع، کدام است؟ (خارج ۸۹)

۱) ۸۴− ۲) ۸۱− ۳) ۵۷− ۴) ۷۵−



تمرین: فاصلهٔ نقطهٔ ماکزیمم نسبی تابع با ضابطهٔ $f(x)=x+\sqrt{4x-x^2}$، از نیمساز ناحیهٔ اول کدام است؟ (سراسری تجربی ۹۹)

۱) ۱ ۲) $\sqrt{2}$ ۳) ۲ ۴) $2\sqrt{2}$

پاسخ: گزینهٔ «۱»

$$f'(x)=1+\frac{4-2x}{2\sqrt{4x-x^2}}=0 \Rightarrow -\frac{2-x}{\sqrt{4x-x^2}}=1 \Rightarrow \sqrt{4x-x^2}=x-2 \quad (*)$$

با توجه به معادله باید $x-2\geq 0$ باشد، یعنی: $x\geq 2$

حال معادلهٔ (*) را حل می‌کنیم. ابتدا به توان ۲ می‌رسانیم:

$$4x-x^2=x^2-4x+4 \Rightarrow 2x^2-8x+4=0 \Rightarrow x^2-4x+2=0 \Rightarrow \Delta=16-8=8$$

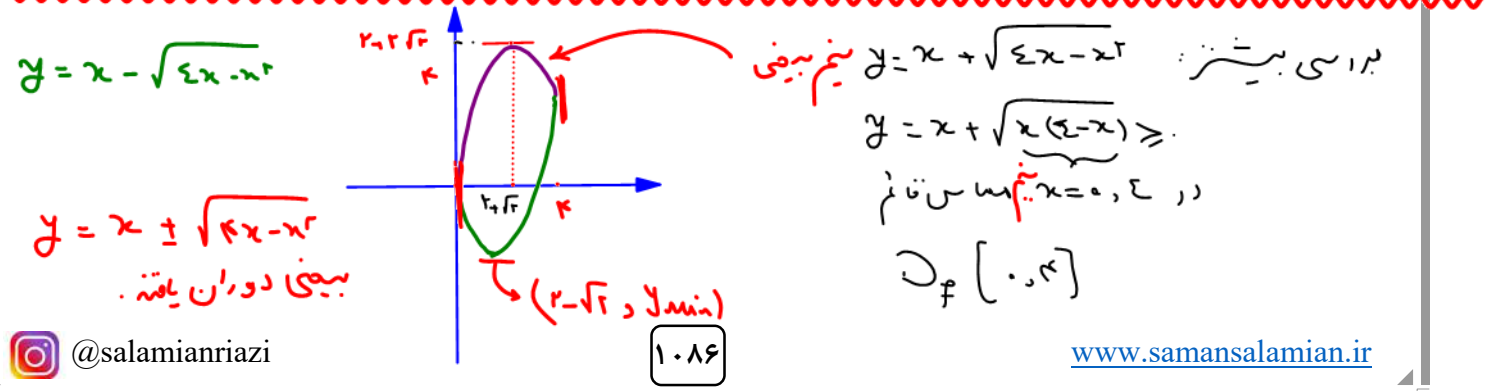
$$\Rightarrow \begin{cases} x=\frac{4+2\sqrt{2}}{2}=2+\sqrt{2} & \text{قابل قبول} \\ x=\frac{4-2\sqrt{2}}{2}=2-\sqrt{2} & (x\geq 2 \text{ غیرقابل قبول زیرا}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(2+\sqrt{2})=2+\sqrt{2}+\sqrt{4(2+\sqrt{2})-(2+\sqrt{2})^2}=2+\sqrt{2}+\sqrt{2}=2+2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow A(2+\sqrt{2},2+2\sqrt{2}) \text{ ماکزیمم نسبی}$$

حال فاصلهٔ نقطهٔ A را از نیمساز ناحیهٔ اول یعنی $y=x$ به دست می‌آوریم:

$$x-y=0 \Rightarrow d=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|2+\sqrt{2}-2-2\sqrt{2}|}{\sqrt{1+1}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=1$$



تمرین: مقدار ماکزیمم نسبی تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{x^۲+۲x-۳}{x^۲+۱}$، کدام است؟ (سراسری تجربی خارج از کشور ۹۹)

۱) $-۱+\sqrt{۵}$ ۲) $۱+\sqrt{۵}$ ۳) $-۱+\sqrt{۳}$ ۴) $۱+\sqrt{۳}$

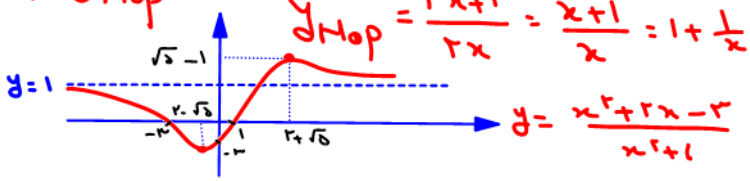
پاسخ: گزینهٔ «۱»

$$f'(x)=\frac{(۲x+۲)(x^۲+۱)-۲x(x^۲+۲x-۳)}{(x^۲+۱)^۲}=۰ \Rightarrow (۲x+۲)(x^۲+۱)-۲x(x^۲+۲x-۳)=۰$$

$$\Rightarrow \cancel{۲x^۳}+۲x+۲x^۲+۲-\cancel{۲x^۳}-۴x^۲+۶x=۰ \Rightarrow -۲x^۲+۸x+۲=۰ \Rightarrow x^۲-۴x-۱=۰ \Rightarrow \Delta=۲۰$$

$$\Rightarrow x=\frac{۴\pm۲\sqrt{۵}}{۲}=۲\pm\sqrt{۵}$$

x	$-\infty$	$۲-\sqrt{۵}$	$۲+\sqrt{۵}$	$+\infty$
f′	−	۰	+	۰	−
f	↘	min	↗	max	↘

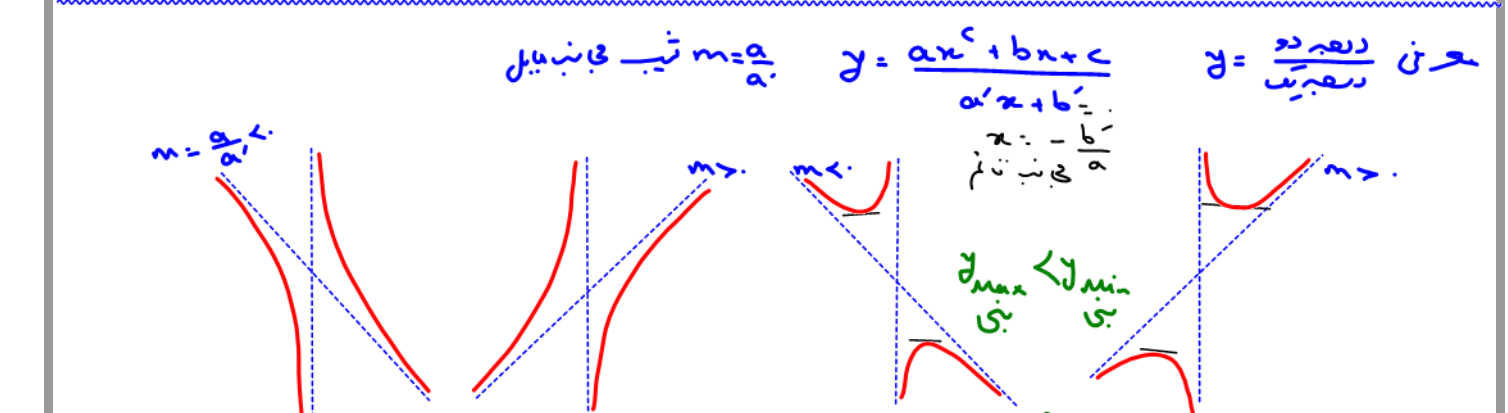


$$f(۲+\sqrt{۵})=\frac{(۲+\sqrt{۵})^۲+۴+۲\sqrt{۵}-۳}{(۲+\sqrt{۵})^۲+۱}=\frac{۹+۴\sqrt{۵}+۲\sqrt{۵}+۱}{۹+۴\sqrt{۵}+۱}=\frac{۱۰+۶\sqrt{۵}}{۱۰+۴\sqrt{۵}}=\frac{۵+۳\sqrt{۵}}{۵+۲\sqrt{۵}}\times\frac{۵-۲\sqrt{۵}}{۵-۲\sqrt{۵}}=-۱+\sqrt{۵}$$

در توابع کسری $y=\frac{f(x)}{g(x)}$ که بدانیم اکسترمم‌های نسبی تابع از نوع نقاط مشتق‌پذیر می‌باشد مختصات اکسترمم نسبی در ضابطه‌ی تابع و در ضابطه‌ی هوپیتال تابع صدق می‌کند. (به شرط آن که $g'(a)\neq ۰$)

تمرین: اگر نقطه‌ی $(۱,۲)$ اکسترمم نسبی تابع $y=\frac{x^۲+۲ax+b}{۲x-۱}$ باشد، حاصل $a-۳b$ کدام است؟

۱) -۲ ۲) ۲ ۳) -۴ ۴) ۴

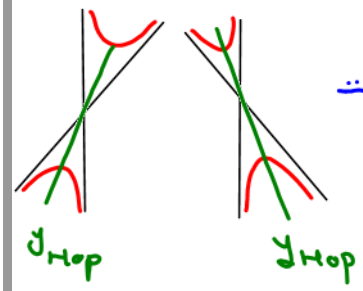


تمرین: خط $y-x=m$ اکسترمم‌های نسبی $y=\frac{x^2-4x+6}{2x-1}$ را به هم وصل می‌کند، m کدام است؟

۱) ۲ ۲) -2 ۳) ۱ ۴) -1

$y_{Hop}=\frac{2x-4}{2}=\frac{2(x-2)}{2}=x-2$ ، $y=x+m$

نکته: در $y=\frac{\text{درجه ۲}}{\text{درجه ۱}}$ خط واصل Max به Min همان هوبتال تابع است



در توابعی که در نقاط اکسترمم نسبی مشتق‌پذیرند (و مشتقشان حتماً برابر صفر است)، اگر عرض اکسترمم نسبی برابر k باشد و تابع را با خط $y=k$ قطع دهیم (ضابطه‌هایشان را برابر قرار دهیم) معادله‌ی حاصل از تقاطع آن دو باید ریشه‌ی مکرر (و در صورتی که از درجه‌ی ۲ باشد، مضاعف) داشته باشد.

تمرین: اگر تابع $y=\frac{x^2+ax+1}{x-1}$ اکسترممی برابر ۳ داشته باشد، مقدار a کدام است؟ منظور از اکسترمم عرض این نقاط هست.

۱) ۷ و -1 ۲) -7 و ۱ ۳) -7 و -1 ۴) ۷ و ۱

$y=3$

خط $y=3$ تابع را با ریشه مضاعف قطع می‌کند.

$\frac{x^2+ax+1}{x-1}=3$

$x^2+ax+1-3x+3=0 \rightarrow x^2+(a-3)x+4=0$ معادله تقاطع یا برخورد خط افقی با تابع که باید ریشه مضاعف بدهد:

$\Delta=(a-3)^2-4(4)=0 \rightarrow (a-3)^2=16 \rightarrow \begin{cases} a-3=4 \\ a-3=-4 \end{cases}$

$a=7$ یا -1

نکته: برای یافتن Max و Min و بردکسری‌ها، می‌توان تابع را با خط افقی $y=k$ قطع داد و از شرط $\Delta=0$ عرض اکسترمم را یافت.

از شرط $\Delta \geq 0$ برد پیدا می‌شود. دقت کنید علامت‌ها در این حالتی ابتدا با انتهای برد تناظر دارند.

برد، Min، Max تابع $y=\frac{3x^2}{2x^2+1}$ ؟

$\frac{3x^2}{2x^2+1}=k$

$3x^2-2kx^2-k=0$

$(3-2k)x^2-k=0$

$\Delta=b^2-4ac=0-4(3-2k)(-k)=0$

$\lim_{x\to\pm\infty} y=\frac{3}{2}$ دقت:

$k=0$: Min

$k=\frac{3}{2}$ ندارد Max

$R_f=[0,\frac{3}{2})$ $y=\frac{3}{2}$ نمی‌تواند سهمی برد باشد.

$\Delta \geq 0 : 0 \leq k < \frac{3}{2}$

$y=\frac{3}{2}$ نه برد نیست!

بررسی بیشتر:

$y=\frac{x^2+2x+1}{x-1}$

$y_{Hop}=2x+4$

A

$m=\frac{8}{8}=1$

Min(۴, ۱۵)

Min, Max ندارد (۱, ۹)

Max(-۲, ۳)

$\lim_{x\to 1^+} y=\frac{x^2+2x+1}{x-1}=+\infty$

$A(1^+,+\infty)$

$y'=\frac{(2x+2)(x-1)-(x^2+2x+1)}{(\ )^2}=0$

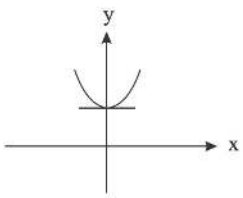
$x^2-2x-8=0 \begin{cases} x_1=+4 \\ x_2=-2 \end{cases}$ تابع

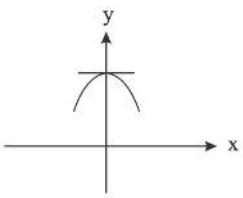
$y=15=min$

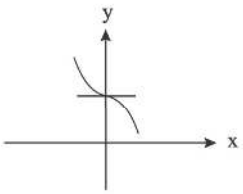
$y=3=Max$ تابع نیست

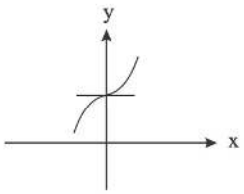
$y=\frac{\text{درجه ۲}}{\text{درجه ۱}}$: $y_{Min}=15 > y_{Max}=3$

۱ نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{x^۲+۱}{x^۳+۱}$ در نزدیکی نقطهٔ $x=۰$ چگونه است؟

۱)


۲)


۳)


۴)


کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۴

۲ تابع f در نقطهٔ c دارای مینیمم است و مشتق راست دارد. الزاماً این مشتق چگونه است؟

۱) مثبت
۲) منفی
۳) نامنفی
۴) نامثبت

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۰

۳ اگر $f(x)=[x]-x$ و $g(x)=۲^x$، آنگاه تابع gof از نظر اکسترمم نسبی کدام نوع را دارد؟

۱) دارای ماکزیمم - دارای مینیمم
۲) دارای ماکزیمم - فاقد مینیمم
۳) فاقد ماکزیمم - دارای مینیمم
۴) فاقد ماکزیمم - فاقد مینیمم

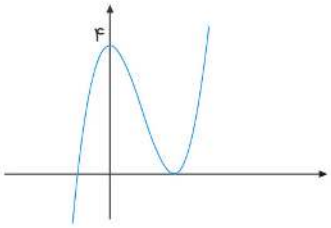
کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۱

۴ مقدار مینیمم نسبی تابع $y=x^۳-۱۲x+۲$ کدام است؟

۱) -۱۴
۲) -۱۱
۳) -۹
۴) -۷

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

۵ نمودار تابع $f(x) = x^۳ + ax^۲ + bx + c$ به‌صورت زیر است. طول نقطهٔ مینیمم نسبی تابع، کدام است؟



۱) $\frac{۱}{۲}$
۲) ۲
۳) $\frac{۳}{۲}$
۴) ۳

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

۶ اگر تابع با ضابطهٔ $f(x) = \frac{x^۲ - ۲x}{x + a}$ دارای اکسترمم نسبی باشد، مقادیر a کدام است؟

۱) $a < -۲$ یا $a > ۰$
۲) $a < ۰$ یا $a > ۲$
۳) $-۲ < a < ۰$
۴) $۰ < a < ۲$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۵

۷ طول نقطهٔ ماکزیمم نسبی تابع با ضابطهٔ $f(x) = x^۴ + \frac{۴}{۳}x^۳ - ۴x^۲$ کدام است؟

۱) -۲
۲) -۱
۳) صفر
۴) ۱

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۵

۸ نمودار تابع $y = x^۳ + ax^۲ - ۲bx - ۴$ در نقاطی به طول صفر و ۲- دارای اکسترمم نسبی است. فاصله بین نقاط اکسترمم نسبی این تابع، چقدر است؟

۱) $۲\sqrt{۵}$
۲) $۲\sqrt{۱۱}$
۳) $۲\sqrt{۱۵}$
۴) $۲\sqrt{۱۰۱}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

۹ تعداد نقاط اکسترمم نسبی تابع $f(x) = \frac{x^۲}{x^۲ - ۱}|x^۲ - ۴|$، کدام است؟

۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۵

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

۱۰ فاصلهٔ نقطهٔ ماکزیمم نسبی تابع با ضابطهٔ $f(x) = x + \sqrt{۴x - x^۲}$، از نیمساز ناحیهٔ اول کدام است؟

۱) ۱
۲) $\sqrt{۲}$
۳) ۲
۴) $۲\sqrt{۲}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

۱۱ نقاط $A(۰, ۰)$ و $B(۱, ۱)$ نقاط اکسترمم نسبی تابع $y = ax^۳ + bx^۲ + cx + d$ هستند، حاصل ab کدام است؟

۱) -۳ ۲) -۶

۳) ۳ ۴) ۶

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۱

۱۲ نقطهٔ $A(-۱, ۱)$ اکسترمم نسبی تابع $y = x^۲|x| + ۳ax^۲ + b$ است. مقدار $\frac{b}{a}$ کدام است؟

۱) -۳ ۲) $-\frac{۱}{۳}$

۳) ۳ ۴) $\frac{۱}{۳}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۱

۱۳ تابع با ضابطهٔ $f(x) = \frac{a}{x} + bx^۲$ در نقطهٔ $(۱, -۲)$ دارای اکسترمم نسبی است. عدد a و نوع اکسترمم نسبی کدام است؟

۱) $-\frac{۴}{۳}$، مینیمم ۲) $-\frac{۴}{۳}$، ماکزیمم

۳) $\frac{۴}{۳}$، مینیمم ۴) $\frac{۴}{۳}$، ماکزیمم

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۹

۱۴ به ازای کدام مجموعه مقادیر a، طول یکی از نقاط اکسترمم نسبی تابع با ضابطهٔ $f(x) = x^۳ + ax^۲ - ۸x$، در بازهٔ $(۱, ۴)$ قرار می‌گیرد؟

۱) $-۳ < a < ۱/۵$ ۲) $-۳ < a < ۲/۵$

۳) $-۵ < a < ۱/۵$ ۴) $-۵ < a < ۲/۵$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۲

۱۵ تابع f روی $[a, b]$ تعریف شده و $a < c < b$ است. کدام بیان نادرست است؟

۱) اگر c نقطهٔ اکسترمم نسبی و $f'(c)$ وجود داشته باشد، آنگاه خط مماس بر منحنی در c افقی است.

۲) اگر c نقطهٔ اکسترمم نسبی باشد، آنگاه c نقطهٔ بحرانی است.

۳) اگر c نقطهٔ بحرانی باشد، آنگاه c نقطهٔ اکسترمم نسبی است.

۴) اگر c نقطهٔ اکسترمم مطلق باشد، آنگاه c نقطهٔ بحرانی است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۰

۱۶ فرض کنید A و B نقاط اکسترمم تابع $f(x) = ۲x^۳ - ۳x^۲ - ۱۲x + ۱$ باشند. چند نقطه روی منحنی f وجود دارد که خطوط مماس بر آن‌ها، موازی پاره‌خط AB است؟

۱) صفر ۲) ۱

۳) ۲ ۴) ۳

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۰

۱۷ طول نقطهٔ ماکزیمم نسبی تابع با ضابطهٔ $y = (x-1)^{۲}\sqrt[۳]{x^{۲}}$، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$

۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۵

۱۸ تابع با ضابطهٔ $f(x) = x^{۴} - ۶x^{۲} + ۸x$ از نظر اکسترمم نسبی کدام وضع را دارد؟

۱) مینیمم نسبی دارد. ۲) ماکزیمم نسبی دارد.

۳) مینیمم نسبی و ماکزیمم نسبی دارد. ۴) فاقد اکسترمم نسبی است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۰

۱۹ مجموعهٔ طول نقاط ماکزیمم نسبی تابع با ضابطهٔ $f(x) = x\left|x^{۲} - ۳\right|$ کدام است؟

۱) $\{-\sqrt{۳}\}$ ۲) $\{\sqrt{۳}\}$

۳) $\{-\sqrt{۳}, ۱\}$ ۴) $\{\sqrt{۳}, ۱\}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۳

۲۰ مقدار ماکزیمم نسبی تابع با ضابطهٔ $f(x) = \frac{x^{۲} + ۲x - ۳}{x^{۲} + ۱}$، کدام است؟

۱) $-۱ + \sqrt{۵}$ ۲) $۱ + \sqrt{۵}$

۳) $-۱ + \sqrt{۳}$ ۴) $۱ + \sqrt{۳}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۲۱ در تابع با ضابطهٔ $f(x) = x\left|x - ۴\right|$، فاصلهٔ دو نقطهٔ ماکزیمم نسبی و مینیمم نسبی آن کدام است؟

۱) $\sqrt{۵}$ ۲) $۲\sqrt{۲}$

۳) $۳\sqrt{۲}$ ۴) $۲\sqrt{۵}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۲۲ در تابع با ضابطهٔ $f(x) = x\left|x\right| - ۲x$، فاصلهٔ دو نقطهٔ ماکزیمم نسبی و مینیمم نسبی آن کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۲}$ ۲) ۳

۳) $۳\sqrt{۲}$ ۴) ۴

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

۲۳ تابع f روی بازهٔ (a, b) تعریف شده است. در این مورد کدام بیان درست است؟

۱) هر نقطهٔ بحرانی، نقطهٔ اکسترمم نسبی است.

۲) هر نقطهٔ اکسترمم نسبی، نقطهٔ بحرانی است.

۳) در هر نقطهٔ بحرانی، مشتق تابع صفر است.

۴) در هر نقطهٔ اکسترمم نسبی، مشتق تابع صفر است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۳

پاسخ Homework

-

۱ گزینه ۱

برای تعیین وضعیت یکنوایی (صعودی یا نزولی بودن) تابع در اطراف نقطهٔ $x = ۰$، تابع y' را قبل و بعد از این نقطه تعیین علامت می‌کنیم.

$$f(x) = \frac{x^۲ + ۱}{x^۳ + ۱} \Rightarrow f'(x) = \frac{۲x(x^۳ + ۱) - ۳x^۲(x^۲ + ۱)}{(x^۳ + ۱)^۲} = \frac{-x^۴ - ۳x^۲ + ۲x}{(x^۳ + ۱)^۲}$$

باتوجه‌به اینکه $f'(۰) = ۰$ است پس تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x = ۰$ دارای مماس افقی است. داریم:

x		۰	
$f'(x)$	-	۰	+
$f(x)$	↘	min	↗

نقطهٔ $x = ۰$ مینیمم نسبی تابع $f(x)$ است، پس گزینهٔ ۱ صحیح می‌باشد.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۴

۲ گزینه ۳

باتوجه‌به اینکه تابع f در نقطهٔ $x = c$ مشتق راست دارد پس حتماً در همسایگی راست این نقطه تعریف شده است. نقطهٔ $x = c$ مینیمم نسبی تابع f است؛ بنابراین به ازای هر x عضو همسایگی راست این نقطه داریم:

$$\begin{cases} x > c \\ f(x) \geq f(c) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - c > ۰ \\ f(x) - f(c) \geq ۰ \end{cases} \quad (*)$$

طبق تعریف مشتق راست در نقطهٔ $x = c$ داریم:

$$f'_+(c) = \lim_{x \to c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \xrightarrow{(*)} f'_+(c) \geq ۰$$

بنابراین مشتق راست تابع f در نقطهٔ $x = c$ الزاماً نامنفی است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۰

۳ گزینه ۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۱

گام اول

الف) باتوجه‌به خواص تابع جزء صحیح می‌دانیم: $۰ \le x - [x] < ۱$

ب) هرگاه f تابعی اکیداً صعودی باشد، به ازای هر $x < y$ داریم: $f(x) < f(y)$

گام دوم

باتوجه‌به قسمت "الف" از گام اول می‌توان نوشت:

$$۰ \le x - [x] < ۱ \xrightarrow{\times(-۱)} -۱ < [x] - x \le ۰ \Rightarrow -۱ < f(x) \le ۰$$

$$(gof)(x) = g(f(x)) = ۲^{[x]-x}$$

چون g تابعی اکیداً صعودی است، پس داریم:

$$-۱ < f(x) \le ۰ \xrightarrow{g \text{ اکیداً صعودی}} g(-۱) < g(f(x)) \le g(۰)$$

$$\Rightarrow ۲^{-۱} < ۲^{[x]-x} \le ۲^{۰} \Rightarrow \frac{۱}{۲} < ۲^{[x]-x} \le ۱ \quad \Rightarrow \frac{۱}{۲} < gof \le ۱$$

بنابراین تابع gof دارای ماکزیمم و فاقد مینیمم است.

۴ گزینه ۱

$$y = x^{۳} - ۱۲x + ۲ \Rightarrow y' = ۳x^{۲} - ۱۲ = ۰ \Rightarrow x = \pm ۲$$

x	$-\infty$		-۲		۲		$+\infty$
y'		$+$	۰	$-$	۰	$+$	
y		↗	۱۸	↘	-۱۴	↗	

بنابراین مقدار مینیمم نسبی برابر -۱۴ است.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

۵ گزینه ۲

$$f(۰) = ۴ \Rightarrow c = ۴$$

$$f'(x) = ۳x^۲ + ۲ax + b$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f'(۰) = ۰ \Rightarrow b = ۰ \\ f'(x) = ۰ \Rightarrow ۳x^۲ + ۲ax = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \\ x = -\frac{۲a}{۳} \end{cases} \end{cases}$$

$$f(-\frac{۲a}{۳}) = ۰ \Rightarrow (-\frac{۲a}{۳})^۳ + a(-\frac{۲a}{۳})^۲ + ۴ = ۰$$

$$-\frac{۸a^۳}{۲۷} + \frac{۴a^۳}{۹} + ۴ = ۰ \Rightarrow \frac{۴a^۳}{۲۷} = -۴ \Rightarrow a^۳ = -۲۷$$

$$\Rightarrow a = -۳ \Rightarrow x_{min} = -\frac{۲a}{۳} = ۲$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

۶ گزینه ۱

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۵

گام اول

الف) فرض کنیم c نقطهٔ بحرانی تابع f باشد؛ همچنین فرض کنیم f بر بازهٔ I شامل c پیوسته و بر این بازه به‌جز احتمالاً در c مشتق‌پذیر باشد. در اینصورت c طول نقطهٔ اکسترمم نسبی تابع f است، هرگاه $f'(x)$ قبل و بعد از c تغییر علامت داده باشد.

ب) نقطهٔ $c \in D_f$، نقطهٔ بحرانی تابع f است؛ هرگاه $f'(c) = ۰$ یا $f'(c)$ موجود نباشد.

گام دوم

$$f(x) = \frac{x^۲ - ۲x}{x + a} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{-a\}$$

$$f'(x) = \frac{(۲x - ۲)(x + a) - (x^۲ - ۲x)}{(x + a)^۲} = \frac{x^۲ + ۲ax - ۲a}{(x + a)^۲}$$

بررسی می‌کنیم به‌ازای چه مقادیری از a، معادلهٔ $f'(x) = ۰$ دارای ریشهٔ ساده است.

$$f'(x) = ۰ \Rightarrow \frac{x^۲ + ۲ax - ۲a}{(x + a)^۲} = ۰ \Rightarrow x^۲ + ۲ax - ۲a = ۰$$

این معادلهٔ درجه‌دو ریشهٔ ساده خواهد داشت هرگاه $\Delta > ۰$ باشد، پس داریم:

$$(۲a)^۲ - ۴(۱)(-۲a) > ۰ \Rightarrow ۴a^۲ + ۸a = ۴a(a + ۲) > ۰$$

a		-۲		۰	
$۴a(a+۲)$	$+$	۰	$-$	۰	$+$

بنابراین به‌ازای $a < -۲$ یا $a > ۰$، تابع f دارای اکسترمم نسبی است.

۷ گزینه ۳

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۵

گام اول

الف) فرض کنیم c نقطهٔ بحرانی تابع f باشد. همچنین فرض کنیم f بر بازهٔ I شامل c پیوسته و بر این بازه به جز احتمالاً در c مشتق‌پذیر باشد. در اینصورت c طول نقطهٔ ماکزیمم نسبی تابع f است هرگاه $f'(x)$ قبل از c مثبت و بعد از c منفی باشد.

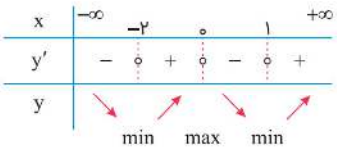
ب) نقطهٔ $c \in D_f$ را نقطهٔ بحرانی تابع f گوییم هرگاه $f'(c) = ۰$ یا $f'(c)$ موجود نباشد.

گام دوم

$$y = x^۴ + \frac{۴}{۳}x^۳ - ۴x^۲ \Rightarrow D = \mathbb{R}$$

ابتدا با حل معادلهٔ $y' = ۰$ طول نقاط بحرانی تابع را تعیین می‌کنیم.

$$y' = ۴x^۳ + ۴x^۲ - ۸x \xrightarrow{y'=۰} ۴x(x+۲)(x-۱) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \\ x = -۲ \\ x = ۱ \end{cases}$$



بنابراین طول نقطهٔ ماکزیمم نسبی تابع برابر صفر است.

۸ گزینه ۱

ریشه‌های مشتق تابع باید ۲- و صفر باشد.

$$y' = ۳x^۲ + ۲ax - ۲b$$

پس:

$$\xrightarrow{(۰,۰)} b = ۰$$

$$\xrightarrow{(-۲,۰)} ۳(-۲)^۲ + ۲a(-۲) = ۰ \Rightarrow ۱۲ - ۴a = ۰ \Rightarrow a = ۳$$

حال ریشه‌های مشتق را در تابع اصلی جایگذاری می‌کنیم:

$$y = x^۳ + ۳x^۲ - ۴$$

$$\begin{cases} \xrightarrow{x=۰} (۰, -۴) \\ \xrightarrow{x=-۲} (-۲, ۰) \end{cases} \xrightarrow{\text{فاصله}} \sqrt{(-۲-۰)^۲ + (۰+۴)^۲} = \sqrt{۴+۱۶} = \sqrt{۲۰} = ۲\sqrt{۵}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

۹ گزینه ۲

$$g(x)=\frac{x^{۲}(x^{۲}-۴)}{x^{۲}-۱}=\frac{x^{۴}-۴x^{۲}}{x^{۲}-۱}$$
$$g'(x)=\frac{(۴x^{۳}-۸x)(x^{۲}-۱)-۲x(x^{۴}-۴x^{۲})}{(x^{۲}-۱)^{۲}}$$
$$=\frac{۲x[(۲x^{۲}-۴)(x^{۲}-۱)-x^{۴}+۴x^{۲}]}{(x^{۲}-۱)^{۲}}=\frac{۲x(x^{۴}-۲x^{۲}+۴)}{(x^{۲}-۱)^{۲}}$$
$$f(x)=\begin{cases}g(x) & ;|x|\geq ۲\\ -g(x) & ;|x|<۲\end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}g'(x) & ;|x|>۲\\ -g'(x) & ;|x|<۲\end{cases}$$

تابع f' در سه نقطهٔ $x=۲$، $x=-۲$ و $x=۰$ تغییر علامت می‌دهد.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

۱۰ گزینه ۱

$$f'(x)=۱+\frac{۴-۲x}{۲\sqrt{۴x-x^{۲}}}=۰$$
$$\Rightarrow -\frac{۲-x}{\sqrt{۴x-x^{۲}}}=۱\Rightarrow \sqrt{۴x-x^{۲}}=x-۲\ \ (*)$$

باتوجه‌به معادله باید $x-۲\geq ۰$ باشد، یعنی: $x\geq ۲$

حال معادلهٔ (*) را حل می‌کنیم. ابتدا به توان ۲ می‌رسانیم:

$$۴x-x^{۲}=x^{۲}-۴x+۴\Rightarrow ۲x^{۲}-۸x+۴=۰$$
$$\Rightarrow x^{۲}-۴x+۲=۰\Rightarrow \Delta=۱۶-۸=۸$$
$$\Rightarrow \begin{cases}x=\frac{۴+۲\sqrt{۲}}{۲}=۲+\sqrt{۲} & \text{قابل‌قبول}\\ x=\frac{۴-۲\sqrt{۲}}{۲}=۲-\sqrt{۲} & (x\geq ۲ \text{ غیرقابل‌قبول زیرا})\end{cases}$$
$$\Rightarrow f(۲+\sqrt{۲})=۲+\sqrt{۲}+\sqrt{۴(۲+\sqrt{۲})-(۲+\sqrt{۲})^{۲}}$$
$$=۲+\sqrt{۲}+\sqrt{۲}=۲+۲\sqrt{۲}$$
$$\Rightarrow A(۲+\sqrt{۲},۲+۲\sqrt{۲}) \text{ ماکزیمم نسبی}$$

حال فاصلهٔ نقطهٔ A را از نیمساز ناحیهٔ اول یعنی $y=x$ به دست می‌آوریم:

$$x-y=۰$$
$$\Rightarrow d=\frac{|ax_{۰}+by_{۰}+c|}{\sqrt{a^{۲}+b^{۲}}}=\frac{|۲+\sqrt{۲}-۲-۲\sqrt{۲}|}{\sqrt{۱+۱}}=\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}}=۱$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

۱۱ گزینه ۲

$$y' = ۰ \Rightarrow ۳ax^۲ + ۲bx + c = ۰$$

ریشه‌های این معادله ۰ و ۱ هستند، پس $c = ۰$ است. داریم:

$$۳ax^۲ + ۲bx = ۰ \xrightarrow{x=۱} ۳a + ۲b = ۰$$

ازطرفی چون $(۰ , ۰)$ در تابع صدق می‌کند، پس $d = ۰$ است.

$$y = ax^۳ + bx^۲ \xrightarrow{(۱,۱)} ۱ = a + b$$
$$\begin{cases} a + b = ۱ \\ ۳a + ۲b = ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -۲ \\ b = ۳ \end{cases} \Rightarrow ab = -۶$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۱

۱۲ گزینه ۱

$$A(-۱, ۱) : ۱ = (-۱)^۲|-۱| + ۳a(-۱)^۲ + b$$
$$\Rightarrow ۱ + ۳a + b = ۱ \Rightarrow ۳a + b = ۰ \quad (*)$$
$$\left.\begin{matrix} f'(-۱) = ۰ \\ x = -۱ < ۰ \end{matrix}\right\} \Rightarrow f(x) = -x^۳ + ۳ax^۲ + b$$
$$\Rightarrow f'(x) = -۳x^۲ + ۶ax \xrightarrow{x=-۱} f'(-۱) = -۳ - ۶a = ۰ \Rightarrow a = \frac{-۱}{۲}$$
$$\xrightarrow{*} ۳(\frac{-۱}{۲}) + b = ۰ \Rightarrow b = \frac{۳}{۲}$$
$$\Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{\frac{۳}{۲}}{\frac{-۱}{۲}} = -۳$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۱

۱۳ گزینه ۲

نقطهٔ $(۱, -۲)$ اکسترمم نسبی تابع $f(x)$ است پس مختصات این نقطه در ضابطهٔ تابع $f(x)$ صدق می‌کند:

$$f(x) = \frac{a}{x} + bx^۲ \xrightarrow{x=۱\ ,\ y=-۲} -۲ = a + b \quad (I)$$

می‌دانیم هر نقطهٔ اکسترمم نسبی، یک نقطهٔ بحرانی تابع است بنابراین $x = ۱$ در معادلهٔ $f'(x) = ۰$ صدق می‌کند یعنی $f'(۱) = ۰$ است:

$$f'(x) = -\frac{a}{x^۲} + ۲bx \xrightarrow{f'(۱)=۰} -a + ۲b = ۰ \Rightarrow a = ۲b \quad (II)$$

با جایگذاری رابطهٔ (II) در رابطهٔ (I) داریم:

$$a + b = -۲ \xrightarrow{a=۲b} ۲b + b = -۲ \Rightarrow ۳b = -۲ \Rightarrow b = \frac{-۲}{۳}$$

$$\xrightarrow{a=۲b} a = -\frac{۴}{۳}$$

$$\Rightarrow f(x) = -\frac{۴}{۳x} - \frac{۲}{۳}x^۲ \quad , \quad f'(x) = \frac{۴}{۳x^۲} - \frac{۴}{۳}x$$

اکنون با تعیین علامت تابع $f'(x)$، نوع اکسترمم نسبی تابع $f(x)$ را مشخص می‌کنیم:

x		۱	
$f'(x)$	+	۰	-
$f(x)$	↗	max	↘

بنابراین به ازای $a = -\frac{۴}{۳}$، نقطهٔ $(۱, -۲)$ ماکزیمم نسبی تابع $f(x)$ است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۹

۱۴ گزینه ۴

تابع چندجمله‌ای $f(x)$ روی $\mathbb{R}$ و ازجمله روی بازهٔ $(۱, ۴)$ پیوسته است. برای یافتن طول نقاط اکسترمم این تابع، کافی است معادلهٔ $f'(x) = ۰$ را حل کنیم.

همچنین می‌دانیم در معادلهٔ $f'(x) = ۳x^۲ + ۲ax - ۸ = ۰$ حاصل‌ضرب جواب‌ها برابر است با: $\frac{c}{a} = \frac{-۸}{۳} < ۰$، پس یک جواب مثبت و یک جواب منفی دارد. درنتیجه جواب مثبت در بازهٔ $(۱, ۴)$ قرار دارد. حال داریم:

$$f'(x) = ۳x^۲ + ۲ax - ۸ = ۰ \Rightarrow x = \frac{-a \pm \sqrt{a^۲ + ۲۴}}{۳}$$

$x = \frac{-a + \sqrt{a^۲ + ۲۴}}{۳}$ مثبت است، پس در بازهٔ $(۱, ۴)$ قرار دارد:

$$x = \frac{-a + \sqrt{a^۲ + ۲۴}}{۳} \Rightarrow ۱ < \frac{-a + \sqrt{a^۲ + ۲۴}}{۳} < ۴$$

$$۱) ۱ < \frac{-a + \sqrt{a^۲ + ۲۴}}{۳} \Rightarrow -a + \sqrt{a^۲ + ۲۴} > ۳ \Rightarrow \sqrt{a^۲ + ۲۴} > ۳ + a$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} a^۲ + ۲۴ > a^۲ + ۶a + ۹ \Rightarrow ۶a < ۱۵ \Rightarrow a < ۲/۵ \quad (I)$$

$$۲) \frac{-a + \sqrt{a^۲ + ۲۴}}{۳} < ۴ \Rightarrow -a + \sqrt{a^۲ + ۲۴} < ۱۲ \Rightarrow \sqrt{a^۲ + ۲۴} < ۱۲ + a$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} a^۲ + ۲۴ < a^۲ + ۲۴a + ۱۴۴ \Rightarrow ۲۴a > -۱۲۰ \Rightarrow a > -۵ \quad (II)$$

$$\xrightarrow{(I) \cap (II)} -۵ < a < ۲/۵$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۲

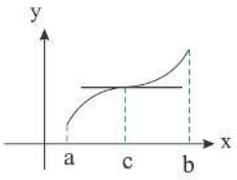
۱۵ گزینه ۳

با بررسی گزینه‌ها، جواب سؤال را مشخص می‌کنیم.

گزینهٔ اول: اگر c نقطهٔ اکسترمم نسبی f و $f'(c)$ موجود باشد آنگاه تابع f در این نقطه پیوسته و خط مماس موجود است بنابراین قطعاً خط مماس در این نقطه افقی است.

گزینهٔ دوم: می‌دانیم هر نقطهٔ اکسترمم نسبی، بحرانی می‌باشد، پس این گزینه درست است.

گزینهٔ سوم: فرض می‌کنیم c نقطهٔ بحرانی تابع f باشد، باتوجه‌به نمودار زیر درستی این گزینه را رد می‌کنیم:



گزینهٔ چهارم: باتوجه‌به اینکه c یک نقطه درون بازه است، پس اگر c نقطهٔ اکسترمم مطلق تابع f باشد، قطعاً اکسترمم نسبی تابع نیز می‌باشد؛ بنابراین بر اساس دلیل درستی گزینهٔ دوم، این نقطه یک نقطهٔ بحرانی تابع f است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۰

۱۶ گزینه ۳

$$f(x)=۲x^۳-۳x^۲-۱۲x+۱ \Rightarrow f'(x)=۶x^۲-۶x-۱۲=۶(x^۲-x-۲)=۶(x-۲)(x+۱)$$

$$f'(x)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=-۱ \\ x=۲ \end{cases}$$

اکسترمم‌های تابع در $x=-۱$ و $x=۲$ رخ می‌دهند.

$$f(-۱)=۸ \Rightarrow \max:(-۱,۸) \qquad f(۲)=-۱۹ \Rightarrow \min:(۲,-۱۹)$$

$$\text{شیب } AB: \frac{۸-(-۱۹)}{-۱-۲}=\frac{۲۷}{-۳}=-۹$$

مشتق را برابر -۹ قرار می‌دهیم:

$$f'(x)=۶x^۲-۶x-۱۲=-۹ \Rightarrow ۶x^۲-۶x-۳=۰ \Rightarrow \Delta>۰$$

۲ نقطه با این ویژگی وجود دارد.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۰

۱۷ گزینه ۱

$$y = (x-1)^{۲}\sqrt[۳]{x^{۲}} \Rightarrow y' = ۲(x-1)(x^{\frac{۲}{۳}}) + (x-1)^{۲}(\frac{۲}{۳\sqrt[۳]{x}}) \Rightarrow y' = \frac{۶(x-1)x + ۲(x-1)^{۲}}{۳\sqrt[۳]{x}}$$

$$\text{صورت} = ۰ \Rightarrow ۲(x-1)(۳x + (x-1)) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۱ \\ ۴x - ۱ = ۰ \Rightarrow x = \frac{۱}{۴} \end{cases}$$

$$\text{مخرج} = ۰ \Rightarrow ۳\sqrt[۳]{x} = ۰ \Rightarrow x = ۰$$

باتوجه‌به گزینه‌ها $x = \frac{۱}{۴}$ جواب مسئله است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۵

۱۸ گزینه ۱

برای تعیین اکسترمم‌های نسبی تابع $f(x)$ و نوع آن‌ها از آزمون مشتق اول استفاده می‌کنیم.
ابتدا از تابع $f(x)$ مشتق گرفته و با حل معادلهٔ $f'(x) = ۰$، نقاط بحرانی تابع را تعیین می‌کنیم.

$$f(x) = x^{۴} - ۶x^{۲} + ۸x \Rightarrow f'(x) = ۴x^{۳} - ۱۲x + ۸$$

$$f'(x) = ۰ \Rightarrow ۴(x^{۳} - ۳x + ۲) = ۰ \Rightarrow ۴(x-۱)(x^{۲} + x - ۲) = ۰$$

$$\Rightarrow ۴(x-۱)(x+۲)(x-۱) = ۰ \Rightarrow ۴(x-۱)^{۲}(x+۲) = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - ۱ = ۰ \Rightarrow x = ۱ \\ x + ۲ = ۰ \Rightarrow x = -۲ \end{cases}$$

اکنون با تعیین علامت $f'(x)$، اکسترمم‌های نسبی تابع $f(x)$ را مشخص می‌کنیم.

x	$-\infty$	-۲	۱	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	۰ $+$	۰ $+$	
$f(x)$	↘	↗ min	↗	

باتوجه‌به جدول فوق، تابع $f(x)$ فقط دارای یک نقطهٔ مینیمم نسبی در نقطهٔ $x = -۲$ می‌باشد زیرا علامت $f'(x)$ قبل و بعد از این نقطه عوض شده است. دقت کنید که $x = ۱$ ریشهٔ معادلهٔ $f'(x) = ۰$ است اما چون $f'(x)$ قبل و بعد از این نقطه تغییر علامت نداده پس این نقطه اکسترمم نسبی تابع محسوب نمی‌شود.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۰

۱۹ گزینه ۳

ابتدا عبارت درون قدر مطلق را تعیین علامت می‌کنیم:

$$x^۲ - ۳ = ۰ \Rightarrow x^۲ = ۳ \Rightarrow x = \pm\sqrt{۳}$$

x		$-\sqrt{۳}$		$\sqrt{۳}$	
$x^۲-۳$	+	۰	-	۰	+

$$\Rightarrow |x^۲ - ۳| = \begin{cases} x^۲ - ۳ & ; x \geq \sqrt{۳} \text{ یا } x \leq -\sqrt{۳} \\ -x^۲ + ۳ & ; -\sqrt{۳} < x < \sqrt{۳} \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} x^۳ - ۳x & ; x \geq \sqrt{۳} \text{ یا } x \leq -\sqrt{۳} \\ -x^۳ + ۳x & ; -\sqrt{۳} < x < \sqrt{۳} \end{cases}$$

برای یافتن نقاط اکسترمم نسبی تابع، نقاط بحرانی تابع را می‌یابیم؛ بنابراین مشتق تابع را محاسبه و معادلهٔ $f'(x) = ۰$ را حل می‌کنیم.

$$f'(x) = \begin{cases} ۳x^۲ - ۳ & ; x > \sqrt{۳} \text{ یا } x < -\sqrt{۳} \\ -۳x^۲ + ۳ & ; -\sqrt{۳} < x < \sqrt{۳} \end{cases}$$

$$f'(x) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x > \sqrt{۳} \text{ یا } x < -\sqrt{۳} : ۳x^۲ - ۳ = ۰ \Rightarrow ۳x^۲ = ۳ \Rightarrow x^۲ = ۱ \Rightarrow x = \pm ۱ \quad \text{غ.ق.ق} \\ -\sqrt{۳} < x < \sqrt{۳} : -۳x^۲ + ۳ = ۰ \Rightarrow ۳x^۲ = ۳ \Rightarrow x^۲ = ۱ \Rightarrow x = \pm ۱ \end{cases}$$

حال مشتق‌پذیری تابع را در دو نقطهٔ $x = \sqrt{۳}$ و $x = -\sqrt{۳}$ نیز بررسی می‌کنیم:

$$f'_+(\sqrt{۳}) = ۶ \quad , \quad f'_-(\sqrt{۳}) = -۶ \Rightarrow f'_+(\sqrt{۳}) \neq f'_-(\sqrt{۳})$$

$$f'_+(-\sqrt{۳}) = -۶ \quad , \quad f'_-(-\sqrt{۳}) = ۶ \Rightarrow f'_+(-\sqrt{۳}) \neq f'_-(-\sqrt{۳})$$

تابع $f(x)$ در دو نقطهٔ $x = \sqrt{۳}$ و $x = -\sqrt{۳}$ مشتق‌پذیر نیست. داریم:

x	$-\infty$		$-\sqrt{۳}$		-۱		۱		$\sqrt{۳}$		$+\infty$
$f'(x)$	+		-		+		-		+		
$f(x)$	↗		↘		↗		↘		↗		
			max		min		max		min		

بنابراین مجموعهٔ نقاط ماکزیمم نسبی تابع $f(x)$ به‌صورت $\{-\sqrt{۳}, ۱\}$ است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۳

۲۰ گزینه ۱

$$f'(x)=\frac{(۲x+۲)(x^۲+۱)-۲x(x^۲+۲x-۳)}{(x^۲+۱)^۲}=۰$$

$$\Rightarrow (۲x+۲)(x^۲+۱)-۲x(x^۲+۲x-۳)=۰$$

$$\Rightarrow \cancel{۲x^۳}+۲x+۲x^۲+۲-\cancel{۲x^۳}-۴x^۲+۶x=۰$$

$$\Rightarrow -۲x^۲+۸x+۲=۰ \Rightarrow x^۲-۴x-۱=۰$$

$$\Rightarrow \Delta=۲۰ \Rightarrow x=\frac{۴\pm ۲\sqrt{۵}}{۲}=۲\pm\sqrt{۵}$$

x	$-\infty$	$۲-\sqrt{۵}$	$۲+\sqrt{۵}$	$+\infty$
f′	−	+	−	
f	↘	min ↗	$-۱+\sqrt{۵}$ max	↘

$$f(۲+\sqrt{۵})=\frac{(۲+\sqrt{۵})^۲+۴+۲\sqrt{۵}-۳}{(۲+\sqrt{۵})^۲+۱}$$

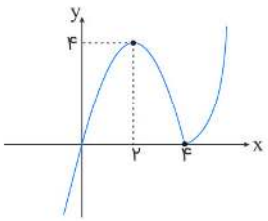
$$=\frac{۹+۴\sqrt{۵}+۲\sqrt{۵}+۱}{۹+۴\sqrt{۵}+۱}=\frac{۱۰+۶\sqrt{۵}}{۱۰+۴\sqrt{۵}}=\frac{۵+۳\sqrt{۵}}{۵+۲\sqrt{۵}}\times\frac{۵-۲\sqrt{۵}}{۵-۲\sqrt{۵}}=-۱+\sqrt{۵}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۲۱ گزینه ۴

$$f(x) = x|x-۴| = \begin{cases} x^۲ - ۴x & ; x \geq ۴ \\ ۴x - x^۲ & ; x < ۴ \end{cases}$$

نمودار این تابع به صورت زیر است:



این تابع در $(۴, ۰)$ مینیمم نسبی و در $(۲, ۴)$ ماکزیمم نسبی دارد. فاصلهٔ آن‌ها برابر است با:

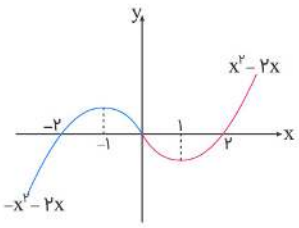
$$\sqrt{(۲-۴)^۲ + (۴-۰)^۲} = \sqrt{۴+۱۶} = \sqrt{۲۰} = ۲\sqrt{۵}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۲۲ گزینه ۱

$$f(x) = x|x| - ۲x = \begin{cases} x^۲ - ۲x & ; x \geq ۰ \\ -x^۲ - ۲x & ; x < ۰ \end{cases}$$

نمودار این تابع را رسم می‌کنیم:



$$\begin{cases} x \geq ۰ : f'(x) = ۲x - ۲ = ۰ \Rightarrow x = ۱ \\ x < ۰ : f'(x) = -۲x - ۲ = ۰ \Rightarrow x = -۱ \end{cases}$$

باتوجه‌به شکل، ماکزیمم و مینیمم نسبی تابع به ترتیب برابر $(-۱, ۱)$ و $(۱, -۱)$ است، پس فاصلهٔ آن‌ها از هم برابر است با:

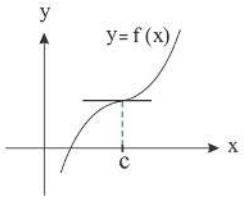
$$\text{فاصله} : \sqrt{(-۱-۱)^۲ + (۱+۱)^۲} = \sqrt{۲^۲ + ۲^۲} = ۲\sqrt{۲}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

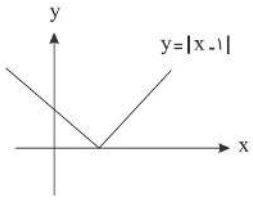
۲۳ گزینه ۲

با آوردن مثال نقض، گزینه‌های نادرست را رد می‌کنیم.

گزینهٔ اول: نقطهٔ $x = c$ در نمودار زیر، یک نقطهٔ بحرانی است اما اکسترمم نسبی نیست.



گزینهٔ سوم: نقطهٔ $x = ۱$ در تابع $y = |x - ۱|$ یک نقطهٔ بحرانی است اما مشتق تابع در این نقطه تعریف‌نشده است.

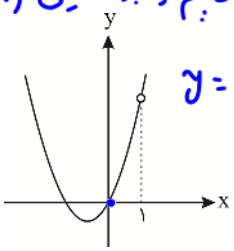


گزینهٔ چهارم: نقطهٔ $x = ۱$ اکسترمم نسبی تابع $y = |x - ۱|$ است اما مشتق تابع در این نقطه برابر با صفر نیست.

بنابراین هر نقطهٔ اکسترمم نسبی، قطعاً یک نقطهٔ بحرانی تابع است.

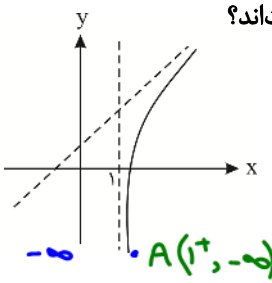
کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۳

تمرین: شکل مقابل نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{4x^3+ax+b}{x-1}$ است. دوتایی مرتب (a,b) کدام است؟



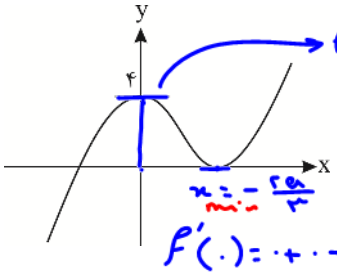
۱) $(0,-4)$
۲) $(-4,0)$
۳) $(-2,1)$
۴) $(4,0)$

تمرین: شکل مقابل قسمتی از نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{x^2+a}{x+b}$ است. مقادیر a و b به کدام صورت‌اند؟



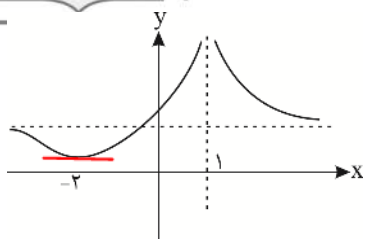
۱) $a>b=-1$
۲) $a<b=-1$
۳) $b>a=-1$
۴) $b<a=-1$

تمرین: نمودار $y=x^3+ax^2+bx+c$ به صورت زیر است. طول نقطه‌ی مینیمم نسبی تابع کدام است؟ (سراسری ۱۴۰۱)



۱) $\frac{1}{2}$
۲) ۲
۳) $\frac{3}{2}$
۴) ۳

تمرین: شکل زیر، نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{x^2+a}{x^2+bx+c}$ است، a کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۵)



$f(x)=\frac{x^2+a}{x^2+bx+c}$ $D_f: R-\{1\}$ می‌بینیم دامنه تابع

لذا مخرج دقیقاً مضاف $x=1$ داشته و $(x-1)^2$ بوده

$x^2-2x+1 \rightarrow \boxed{b=-2,\ c=1}$

۱) -2

۲) ۱

۳) ۲

۴) ۳

$f(x)=\frac{x^2+a}{(x-1)^2}$

می‌بینم در $x=-2$ مماس افقی است پس $f'(-2)=0$

$f'(x)=\frac{2x(x-1)^2-2(x-1)(x^2+a)}{(\ )^2}=0$

$f'(-2)=2(-2)(-3)^2-2(-3)(4+a)=0$

$-36+6(4+a)=0$

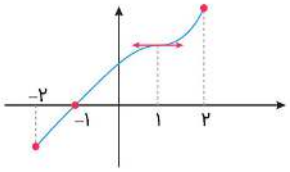
$6(4+a)=36$

$4+a=6$

$\boxed{a=2}$

Homework

۱ در تابع زیر، چند نقطه وجود دارد که بحرانی است اما اکسترمم نسبی نیست؟



۱) ۱

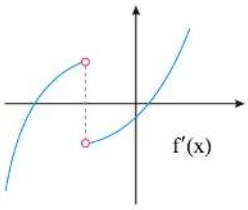
۲) ۲

۳) ۳

۴) ۴

علوی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۱۰ ۱۳۹۹

۲ نمودار مشتق تابع پیوسته $f(x)$ به‌صورت زیر است، در مورد اکسترمم‌های نسبی $f(x)$ کدام گزینه صحیح است؟



۱) دو مینیمم و یک ماکزیمم دارد.

۲) دو ماکزیمم دارد.

۳) دو ماکزیمم و یک مینیمم دارد.

۴) فاقد اکسترمم است.

علوی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۱۲ ۱۳۹۹

۳ اگر تابع $f(x) = -۳x^۳ + bx^۲ + cx + d$ اکیداً نزولی و $x = ۲$ طول تنها نقطهٔ بحرانی تابع باشد، مقدار c کدام است؟

۱) ۱۸

۲) -۱۸

۳) ۳۶

۴) -۳۶

علوی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۱۲ ۱۴۰۱

۴ اگر محل تقاطع مجانب‌های تابع $f(x) = \frac{ax + c + ۱}{x - c}$ نقطهٔ $(-۱, ۴)$ باشد، محل تقاطع این تابع با محور yها کدام است؟

۱) صفر

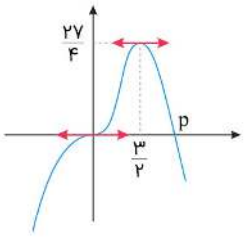
۲) -۱

۳) ۲

۴) ۱

علوی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۱۰ ۱۳۹۹

۵ اگر نمودار زیر مربوط به تابع $y = ax^۴ + bx^۳ + cx^۲$ باشد، حاصل $a + b + p$ کدام است؟



۱) صفر

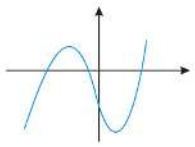
۲) ۴

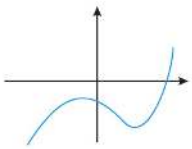
۳) ۷

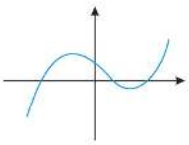
۴) ۶

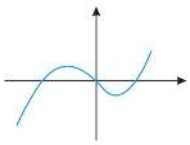
علوی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۱۰ ۱۳۹۹

۶ نمودار $y = x^۳ - ۳x - ۱$ شبیه کدام است؟

۱)


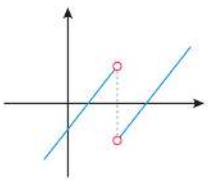
۲)


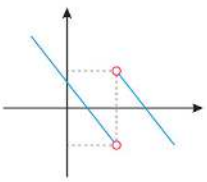
۳)


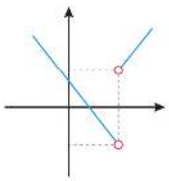
۴)


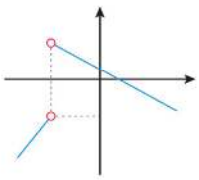
علوی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۱۰ ۱۳۹۹

۷ اگر $f(x) = x|x - ۲|$ باشد، نمودار تابع $f'(x)$ کدام است؟

۱)


۲)


۳)


۴)


علوی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۷ ۱۴۰۱

علوی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۷ ۱۴۰۱

۸ تقعر تابع $f(x) = |\frac{x}{x - ۱}|$ در کدام بازه روبه‌پایین است؟

۱) $(۰ , +\infty)$

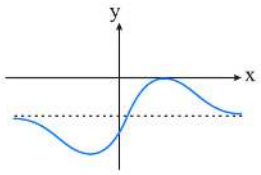
۲) $(-\infty , ۰)$

۳) $(۱ , +\infty)$

۴) $(-\infty , ۱)$

علوی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۱۰ ۱۳۹۹

۹ شکل زیر نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x) = \frac{ax^۲ + ۴x - ۴}{x^۲ + b}$ است. دوتایی (a, b) به کدام صورت زیر می‌تواند باشد؟



۱) $(-۲, ۵)$

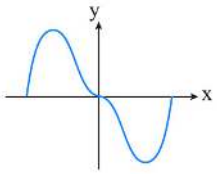
۲) $(-۱, ۳)$

۳) $(-۱, ۵)$

۴) $(۱, ۳)$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۱

۱۰ شکل زیر نمودار کدام تابع با ضابطهٔ زیر است؟



۱) $y = -x^۳\sqrt{۴ - x^۲}$

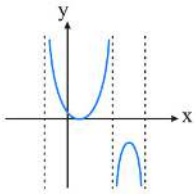
۲) $y = -x\sqrt{۴ - x^۲}$

۳) $y = x^۳\sqrt{x^۲ - ۴}$

۴) $y = (x^۲ - ۴)\sqrt[۳]{x}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۳

۱۱ شکل زیر نمودار تابع با ضابطهٔ $y = \frac{۱ + a\sin x}{۱ + b\sin x}$ در بازهٔ $[\frac{-\pi}{۶}, \frac{۱۱\pi}{۶}]$ می‌باشد. دوتایی (a, b) کدام است؟



۱) $(۱, ۲)$

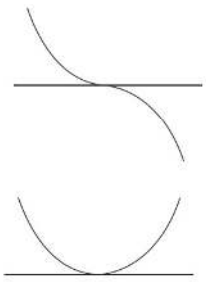
۲) $(-۱, ۲)$

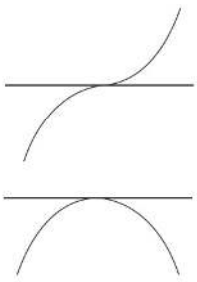
۳) $(۲, -۱)$

۴) $(-۲, ۱)$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۴

۱۲ نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{۱}{۶}x^۳-x+\sin x$ در همسایگی $x=۰$ چگونه است؟

۱) 

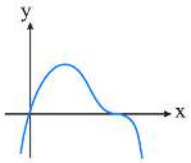
۲) 

۳)

۴)

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۶

۱۳ ضابطهٔ تابع نمودار زیر کدام است؟



۱) $y=x(۱-x)^۳$

۲) $y=x(x-۱)^۳$

۳) $y=x(۱-x^۳)$

۴) $y=x(x^۳-۱)$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۷

۱۴ تابع با ضابطهٔ $y=ax+b+\frac{x^۲}{۲x-۱}$ تابع هموگرافیکی است که محور yها را در نقطه‌ای به عرض ۱ قطع می‌کند. $a+b$ کدام است؟

۱) ۲

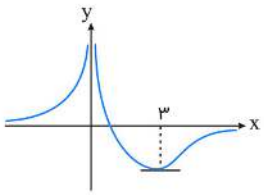
۲) -۲

۳) $\frac{۱}{۲}$

۴) $-\frac{۱}{۲}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۷

۱۵ شکل زیر نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{ax+۳}{x^۲+bx}$ می‌باشد، دوتایی (a,b) کدام است؟



۱) $(-۲,۲)$

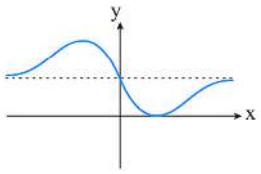
۲) $(-۲,۰)$

۳) $(۲,۰)$

۴) $(۲,۲)$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۰

۱۶ شکل زیر نمودار تابع $f(x)=\frac{ax^۲+bx+۲}{x^۲+۱}$ می‌باشد. دوتایی (a, b) کدام است؟



۱) $(۱, -۲)$

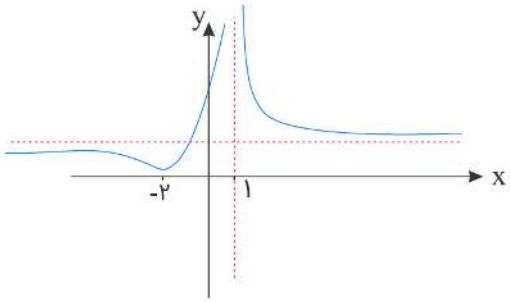
۲) $(۱, ۲)$

۳) $(۲, -۴)$

۴) $(۲, ۴)$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۱

۱۷ شکل زیر، نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{x^۲+a}{x^۲+bx+c}$ است. a کدام است؟



۱) -۲

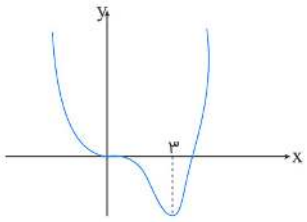
۲) ۱

۳) ۲

۴) ۳

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۵

۱۸ شکل زیر، نمودار تابع $f(x)=x^۴+ax^۳+bx^۲$ است. $f(-۲)$ کدام است؟



۱) ۳۲

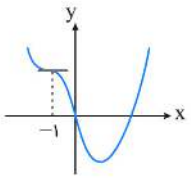
۲) ۳۶

۳) ۴۰

۴) ۴۸

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۸

۱۹ شکل زیر، نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x) = x^۴ - x^۳ + ax^۲ + bx$ می‌باشد. b کدام است؟



۱) -۱۱

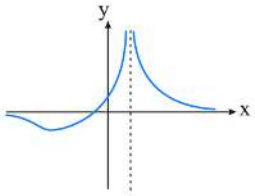
۲) -۱۰

۳) -۹

۴) -۸

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۴

۲۰ شکل زیر، نمودار تابع $y = \frac{x + a}{x^۲ + bx + ۴}$ می‌باشد. مقادیر a و b چگونه است؟



۱) $a < ۰$ و $b = ۴$

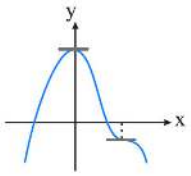
۲) $a < ۰$ و $b = -۴$

۳) $a > ۰$ و $b = ۴$

۴) $a > ۰$ و $b = -۴$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۳

۲۱ شکل زیر، نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x) = -x^۴ + ۸x^۳ + ax^۲ + b$ می‌باشد. a کدام است؟



۱) -۱۸

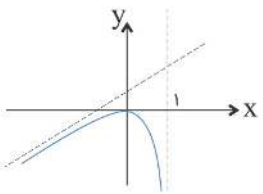
۲) -۱۵

۳) -۱۲

۴) -۹

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۴

۲۲ شکل زیر نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x) = \frac{x^۲ + a}{x + b}$، در بازهٔ $(-\infty, ۱)$ می‌باشد. دوتایی مرتب (a, b) کدام است؟



۱) $(۱, -۱)$

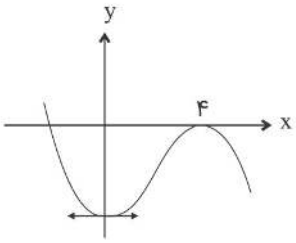
۲) $(۱, ۰)$

۳) $(۰, ۱)$

۴) $(۰, -۱)$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۷

۲۳ شکل زیر نمودار تابع به معادلهٔ $y = ax^۳ + bx^۲ - ۱۶$ می‌باشد. a کدام است؟



۱) -۱

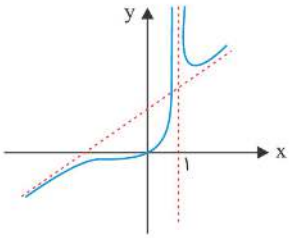
۲) $\frac{۱}{۲}$

۳) $\frac{-۱}{۲}$

۴) $\frac{-۲}{۳}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۴

۲۴ شکل زیر، نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x) = \frac{x^۳ + ax^۲}{x^۲ + bx + c}$ می‌باشد، عدد $(bc - a)$ کدام است؟



۱) -۲

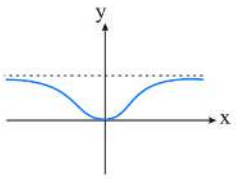
۲) -۱

۳) ۱

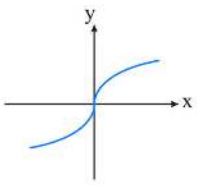
۴) ۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۲

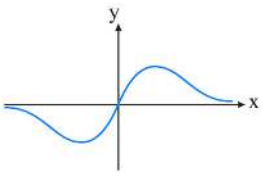
۲۵ شکل زیر، نمودار تابع $y = f(x)$ می‌باشد. نمودار $f'(x)$ به کدام صورت است؟



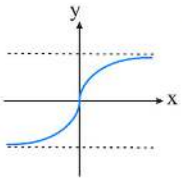
۱)



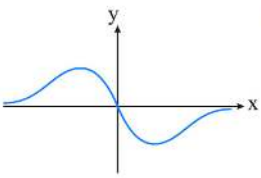
۲)



۳)

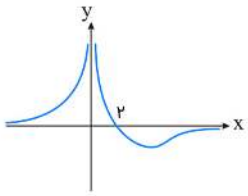


۴)



کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۳

۲۶ شکل زیر، نمودار تابع $f(x)=\frac{ax+۲}{x^۲+b}$ است. با تعیین a و b، مینیمم نسبی این تابع کدام است؟



۱) $-\frac{۱}{۸}$

۲) $-\frac{۱}{۴}$

۳) $-\frac{۳}{۸}$

۴) $-\frac{۱}{۲}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

پاسخ Homework

۱ گزینه ۳

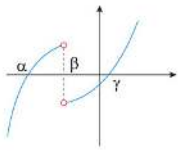
نقاط به طول‌های -۲ و ۲ بحرانی‌اند اما اکسترمم نسبی نیستند. زیرا f در همسایگی آن‌ها تعریف نمی‌شود و درنتیجه مشتق در آن نقاط وجود ندارد. $x = ۱$ نقطهٔ بحرانی است اما اکسترمم نسبی نیست، زیرا $f'(۱) = ۰$ می‌باشد ولی f در اطراف $x = ۱$ تغییر جهت نداده است. پس درمجموع در سه نقطه با طول‌های ۲، ۱ و ۲- اکسترمم نداریم اما بحرانی هستند.

علوی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۱۰ ۱۳۹۹

۲ گزینه ۱

تابع $f(x)$ پیوسته و f' در سه نقطه تغییر علامت داده است.

نقاط به طول‌های α و γ مینیمم نسبی و نقطه به طول β ماکزیمم نسبی است.

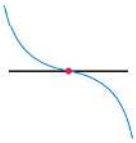


x	$-\infty$	α	β	γ	$+\infty$
f'	$-$	۰	$+$	$-$	۰	$+$

علوی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۱۲ ۱۳۹۹

۳ گزینه ۴

توضیحات سؤال نشان می‌دهد که نمودار تابع $f(x)$ به‌صورت زیر است:



پس تابع باید به فرم $-۳(x-۲)^۳ + \alpha$ باشد.

$$-۳(x^۳ - ۶x^۲ + ۱۲x - ۸) + \alpha = -۳x^۳ + ۱۸x^۲ - ۳۶x + ۲۴ + \alpha$$

پس $c = -۳۶$ است.

علوی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۱۲ ۱۴۰۱

۴ گزینه ۱

$$x - c = ۰ \xrightarrow{x=-۱} -۱ - c = ۰ \Rightarrow c = -۱$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = a = ۴ \Rightarrow f(x) = \frac{۴x}{x+۱} \Rightarrow f(۰) = ۰$$

علوی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۱۰ ۱۳۹۹

۵ گزینه ۴

طبق نمودار:

$$f''(۰) = ۰ \Rightarrow c = ۰ \Rightarrow y = ax^۴ + bx^۳$$

$$y' = ۴ax^۳ + ۳bx^۲ \,,\, y'(\frac{۳}{۲}) = ۰ \Rightarrow (\frac{۳}{۲})^۲ (۴a \times \frac{۳}{۲} + ۳b) = ۰ \Rightarrow b = -۲a$$

$$f(\frac{۳}{۲}) = \frac{۲۷}{۴} \Rightarrow (\frac{۳}{۲})^۳ (\frac{۳}{۲}a + b) = \frac{۲۷}{۴} \Rightarrow \frac{۳}{۲}a + b = ۲ \xrightarrow{b=-۲a} \frac{۳}{۲}a - ۲a = ۲$$

$$\xrightarrow{\times ۲} ۳a - ۴a = ۴ \Rightarrow a = -۴ \,,\, b = ۸$$

$$\Rightarrow f(x) = -۴x^۴ + ۸x^۳ = ۴x^۳(۲ - x) \Rightarrow p = ۲$$

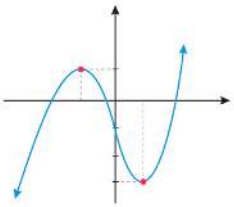
$$a + b + p = -۴ + ۸ + ۲ = ۶$$

علوی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۱۰ ۱۳۹۹

۶ گزینه ۱

جدول تغییرات تابع را تنظیم می‌کنیم:

$$y = x^۳ - ۳x - ۱ \Rightarrow y' = ۳x^۲ - ۳ = ۰ \Rightarrow x = \pm ۱$$



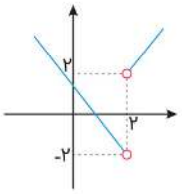
x	$-\infty$		-۱		۱		$+\infty$
y'		$+$	۰	$-$	۰	$+$	
y	$-\infty$	↗	۱	↘	-۳	↗	$+\infty$

دقت کنید که $f(۰) = -۱$ است.

علوی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۱۰ ۱۳۹۹

۷ گزینه ۳

تابع f در $x = ۲$ مشتق‌پذیر نیست.



$$f(x) = \begin{cases} x(x-۲) & ; x \geq ۲ \\ x(۲-x) & ; x < ۲ \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} ۲x-۲ & ; x > ۲ \\ ۲-۲x & ; x < ۲ \end{cases}$$

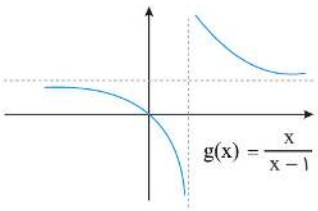
علوی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۷ ۱۴۰۱
علوی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۷ ۱۴۰۱

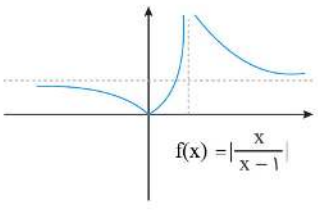
۸ گزینه ۲

ابتدا تابع $g(x) = \frac{x}{x-۱}$ را رسم می‌کنیم:

$$g'(x) = \frac{-۱}{(x-۱)^۲} < ۰$$

$$\text{مجانب} : \begin{cases} x = ۱ \\ y = ۱ \end{cases}$$





نمودار $f(x)$ را ببینید، تقعر تابع در فاصله $(-\infty\ ,\ ۰)$ روبه‌پایین است.

علوی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۱۰ ۱۳۹۹

۹ گزینه ۲

باتوجه‌به نمودار، منحنی در نقطه‌ای با طول مثبت بر محور xها، مماس شده است؛ پس معادلهٔ $f(x)=0$ دارای یک ریشهٔ مضاعف مثبت است.

$$f(x)=0 \Rightarrow \frac{ax^2+4x-4}{x^2+b}=0 \Rightarrow ax^2+4x-4=0$$

$$\xrightarrow{\text{ریشهٔ مضاعف}} \Delta=0 \Rightarrow 16-4(a)(-4)=0 \Rightarrow 16+16a=0 \Rightarrow 16a=-16 \Rightarrow a=-1$$

بنابراین:

$$f(x)=\frac{-x^2+4x-4}{x^2+b}$$

تابع یک مجانب افقی دارد. معادلهٔ این مجانب برابر است با:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-x^2+4x-4}{x^2+b}=-1 \Rightarrow y=-1 \quad \text{مجانب افقی}$$

همان‌طور که در شکل نیز واضح است محل برخورد منحنی تابع با محور عرض‌ها پایین‌تر از خط $y=-1$ است؛ پس داریم: $f(0)<-1$

$$f(0)=\frac{0+0-4}{0+b}=-\frac{4}{b} \xrightarrow{f(0)<-1} -\frac{4}{b}<-1 \Rightarrow \frac{4}{b}>1 \Rightarrow \frac{b}{4}<1 \Rightarrow b<4$$

ازطرفی چون تابع مجانب قائم ندارد؛ پس $b>0$ در نظر گرفته می‌شود، پس $0<b<4$ است. از میان گزینه‌ها تنها دوتایی $(-1,3)$ در دو شرط $0<b<4$ و $a=-1$ صدق می‌کند.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۱

۱۰ گزینه ۱

باتوجه‌به شکل، تابع دارای دامنهٔ متقارن و محدود است؛ همچنین خط مماس بر نمودار تابع در مبدأ مختصات افقی است؛ یعنی $y'(۰) = ۰$.

با بررسی گزینه‌ها، پاسخ صحیح را مشخص می‌کنیم.

گزینهٔ اول:

$$y = -x^{۳}\sqrt{۴ - x^{۲}}$$

$$۴ - x^{۲} \geq ۰ \Rightarrow x^{۲} \leq ۴ \Rightarrow |x| \leq ۲ \Rightarrow -۲ \leq x \leq ۲$$

دامنهٔ این تابع محدود و متقارن است.

$$y' = -۳x^{۲}\sqrt{۴ - x^{۲}} + \frac{۲x^{۴}}{۲\sqrt{۴ - x^{۲}}} \Rightarrow y'(۰) = ۰$$

خط مماس بر نمودار تابع در مبدأ مختصات افقی است.

پس این گزینه پاسخ سؤال خواهد بود.

گزینهٔ دوم:

$$y = -x\sqrt{۴ - x^{۲}}$$

$$۴ - x^{۲} \geq ۰ \Rightarrow x^{۲} \leq ۴ \Rightarrow |x| \leq ۲ \Rightarrow -۲ \leq x \leq ۲$$

دامنهٔ این تابع محدود و متقارن است.

$$y' = -\sqrt{۴ - x^{۲}} + \frac{۲x^{۲}}{۲\sqrt{۴ - x^{۲}}} \Rightarrow y'(۰) = -\sqrt{۴} = -۲ \neq ۰$$

تابع در $x = ۰$ مماس افقی ندارد.

گزینهٔ سوم:

$$y = x^{۳}\sqrt{x^{۲} - ۴}$$

$$x^{۲} - ۴ \geq ۰ \Rightarrow x^{۲} \geq ۴ \Rightarrow |x| \geq ۲ \Rightarrow x \geq ۲ \text{ یا } x \leq -۲$$

دامنهٔ این تابع محدود نیست.

گزینهٔ چهارم:

$$y = (x^{۲} - ۴)\sqrt[۳]{x}$$
$$D = \mathbb{R}$$

دامنهٔ این تابع نامحدود است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۳

۱۱ گزینه ۲

باتوجه‌به شکل $x=\frac{-\pi}{۶}$ و $x=\frac{۱۱\pi}{۶}$ مجانب‌های قائم تابع هستند؛ بنابراین به ازای این دو مقدار، مخرج تابع برابر صفر می‌شود. به ازای $x=\frac{-\pi}{۶}$ داریم:

$$۱+b\sin x=۰\xrightarrow{x=-\frac{\pi}{۶}}۱+b\sin(-\frac{\pi}{۶})=۰\Rightarrow ۱-b\sin\frac{\pi}{۶}=۰$$

$$\Rightarrow ۱-\frac{b}{۲}=۰\Rightarrow\frac{b}{۲}=۱\Rightarrow b=۲$$

اکنون با حل معادلهٔ $y'=۰$، طول نقاط اکسترمم تابع را به دست می‌آوریم:

$$y=\frac{۱+a\sin x}{۱+۲\sin x}\Rightarrow y'=\frac{a\cos x(۱+۲\sin x)-۲\cos x(۱+a\sin x)}{(۱+۲\sin x)^{۲}}=\frac{(a-۲)\cos x}{(۱+۲\sin x)^{۲}}$$

$$y'=۰\Rightarrow(a-۲)\cos x=۰\Rightarrow\begin{cases}a-۲=۰\Rightarrow a=۲ & \text{غ.ق.ق}\\ \cos x=۰\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{۲}\xrightarrow[k=۰]{x>۰}x=\frac{\pi}{۲}\end{cases}$$

به ازای $a=۲$، $y=۱$ یک تابع ثابت بوده و نمودار آن یک خط راست خواهد بود.

منحنی تابع y در نقطه‌ای به طول $x=\frac{\pi}{۲}$ بر محور xها مماس است؛ بنابراین داریم:

$$y(\frac{\pi}{۲})=۰$$

$$y=\frac{۱+a\sin x}{۱+۲\sin x}\xrightarrow{(\frac{\pi}{۲},۰)}۰=\frac{۱+a\sin\frac{\pi}{۲}}{۱+۲\sin\frac{\pi}{۲}}\Rightarrow\frac{۱+a}{۳}=۰\Rightarrow ۱+a=۰\Rightarrow a=-۱$$

بنابراین:

$$(a,b)=(-۱,۲)$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۴

۱۲ گزینه ۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۶

گام اول

الف) علامت $f'(x)$ در یک بازه، وضعیت یکنوایی تابع روی آن بازه را مشخص می‌کند.

ب) علامت $f''(x)$ در یک بازه، جهت تقعر تابع روی آن بازه را مشخص می‌کند.

گام دوم

ضابطهٔ $f'(x)$ و $f''(x)$ را به دست آورده و در اطراف نقطهٔ $x = ۰$ تعیین علامت می‌کنیم.

$$f(x) = \frac{۱}{۶}x^۳ - x + \sin x \Rightarrow f'(x) = \frac{۱}{۲}x^۲ - ۱ + \cos x$$

$$f'(۰) = ۰ - ۱ + ۱ = ۰$$

پس تابع در نقطهٔ $x = ۰$ دارای مماس افقی است.

$$f''(x) = x - \sin x \Rightarrow f''(۰) = ۰$$

پس جهت تقعر تابع در نقطهٔ $x = ۰$ عوض می‌شود. داریم:

x		۰	
$f''(x)$	$-$	۰	$+$
$f(x)$	$\cap$		$\cup$

باتوجه‌به آنچه گفته شد، گزینهٔ ۲ صحیح است.

۱۳ گزینه ۱

باتوجه‌به نمودار داریم:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \quad , \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$

همچنین در نقطه‌ای به طول مثبت، نمودار تابع محور xها را قطع می‌کند $(y(x) = ۰)$، مماس بر نمودار تابع در این نقطه افقی است $(y'(x) = ۰)$ و جهت تقعر تابع نیز در همین نقطه عوض می‌شود $(y''(x) = ۰)$.

اکنون گزینه‌ها را برای یافتن ضابطهٔ تابع بررسی می‌کنیم.

گزینهٔ ۱:

$$y = x(۱-x)^۳$$

$$\lim_{x\to-\infty} x(۱-x)^۳ = -\infty \quad , \quad \lim_{x\to+\infty} x(۱-x)^۳ = -\infty$$

$$y' = (۱-x)^۳ - ۳x(۱-x)^۲ = (۱-x)^۲(۱-۴x)$$

$$y'' = -۲(۱-x)(۱-۴x) - ۴(۱-x)^۲ = (۱-x)(۱۲x-۶)$$

$x = ۱$ ریشهٔ سه تابع y، y' و y'' است $(y(۱) = ۰ \, , \, y'(۱) = ۰ \, , \, y''(۱) = ۰)$؛ بنابراین همین گزینه ضابطهٔ تابع است.

گزینهٔ ۲:

$$y = x(x-۱)^۳$$

$$\lim_{x\to-\infty} x(x-۱)^۳ = +\infty \quad , \quad \lim_{x\to+\infty} x(x-۱)^۳ = +\infty$$

این گزینه نمی‌تواند جواب سؤال باشد.

گزینهٔ ۳:

$$y = x(۱-x^۳)$$

$$\lim_{x\to-\infty} x(۱-x^۳) = -\infty \quad , \quad \lim_{x\to+\infty} x(۱-x^۳) = -\infty$$

$$y' = (۱-x^۳) - ۳x^۳ = ۱ - ۴x^۳ \Rightarrow y'' = -۱۲x^۲$$

y'' هیچ ریشهٔ مثبتی ندارد (تنها ریشهٔ y''، $x = ۰$ است) پس این گزینه نمی‌تواند جواب سؤال باشد.

گزینهٔ ۴:

$$y = x(x^۳ - ۱)$$

$$\lim_{x\to-\infty} x(x^۳-۱) = +\infty \quad , \quad \lim_{x\to+\infty} x(x^۳-۱) = +\infty$$

این گزینه هم نمی‌تواند جواب سؤال باشد.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۷

۱۴ گزینه ۳

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۷

گام اول

هر تابع هموگرافیک دارای ضابطه‌ای به فرم $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ است؛ به‌طوری‌که $c \neq 0$ باشد.

گام دوم

مقادیر a و b را به‌گونه‌ای تعیین می‌کنیم که ضابطهٔ داده‌شده شرایط تابع هموگرافیک را داشته باشد. ابتدا با مخرج مشترک گیری ضابطهٔ تابع را ساده می‌کنیم:

$$y = ax + b + \frac{x^2}{2x-1} = \frac{(ax+b)(2x-1)+x^2}{2x-1}$$

$$= \frac{2ax^2+2bx-ax-b+x^2}{2x-1} = \frac{(2a+1)x^2+(2b-a)x-b}{2x-1}$$

در یک تابع هموگرافیک، جمله‌ای با درجهٔ بزرگ‌تر از یک نداریم؛ بنابراین ضریب این جملات را مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$2a+1=0 \Rightarrow 2a=-1 \Rightarrow a=-\frac{1}{2} \Rightarrow y=\frac{(2b+\frac{1}{2})x-b}{2x-1}$$

این تابع هموگرافیک محور yها را در نقطه‌ای به عرض ۱ قطع می‌کند؛ بنابراین مختصات نقطهٔ $(0,1)$ در ضابطهٔ تابع صدق می‌کند، پس داریم:

$$1=\frac{-b}{-1} \Rightarrow b=1 \Rightarrow a+b=-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}$$

۱۵ گزینه ۲

خط $x=0$ مجانب قائم تابع است و هر دو شاخهٔ منحنی به $+\infty$ میل می‌کند $(\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty \ , \ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=+\infty)$؛ بنابراین $x=0$ ریشهٔ مضاعف مخرج کسر است.

$$x^2+bx=0 \Rightarrow x(x+b)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-b \end{cases} \Rightarrow -b=0 \Rightarrow b=0$$

نقطه‌ای به طول $x=3$، مینیمم نسبی تابع است و تابع در این نقطه مماس افقی دارد؛ بنابراین: $f'(3)=0$

$$f(x)=\frac{ax+3}{x^2} \Rightarrow f'(x)=\frac{ax^2-2x(ax+3)}{x^4}=\frac{-ax^2-6x}{x^4}$$

$$f'(3)=0 \Rightarrow 0=\frac{-9a-18}{81} \Rightarrow -9a-18=0 \Rightarrow -9a=18 \Rightarrow a=-2$$

بنابراین:

$$(a,b)=(-2,0)$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۰

۱۶ گزینه ۳

تابع دارای یک مجانب افقی است. معادلهٔ این مجانب برابر است با:

$$y = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{ax^۲ + bx + ۲}{x^۲ + ۱} = a \Rightarrow y = a$$

مجانب افقی، منحنی تابع را در نقطه‌ای به طول صفر قطع می‌کند؛ بنابراین $f(۰) = a$ است.

$$f(۰) = \frac{۰ + ۰ + ۲}{۰ + ۱} = a \Rightarrow a = ۲ \Rightarrow f(x) = \frac{۲x^۲ + bx + ۲}{x^۲ + ۱}$$

باتوجه‌به نمودار، منحنی در نقطه‌ای با طول مثبت بر محور xها مماس است؛ بنابراین معادلهٔ $f(x) = ۰$ یک ریشهٔ مضاعف مثبت دارد.

$$f(x) = ۰ \Rightarrow ۲x^۲ + bx + ۲ = ۰ \xrightarrow{\text{ریشهٔ مضاعف}} \Delta = ۰ \Rightarrow b^۲ - ۴(۲)(۲) = ۰$$

$$\Rightarrow b^۲ - ۱۶ = ۰ \Rightarrow b^۲ = ۱۶ \Rightarrow b = \pm ۴$$

بررسی می‌کنیم به ازای کدام‌یک از مقادیر $b = ۴$ و $b = -۴$ معادلهٔ $f(x) = ۰$ ریشهٔ مضاعف دارد.

$$b = ۴ : ۲x^۲ + ۴x + ۲ = ۰ \xrightarrow{\div ۲} x^۲ + ۲x + ۱ = ۰ \Rightarrow (x+۱)^۲ = ۰$$

$$\Rightarrow (x+۱) = ۰ \Rightarrow x = -۱ \quad \text{غ.ق.ق}$$

$$b = -۴ : ۲x^۲ - ۴x + ۲ = ۰ \xrightarrow{\div ۲} x^۲ - ۲x + ۱ = ۰ \Rightarrow (x-۱)^۲ = ۰$$

$$\Rightarrow (x-۱) = ۰ \Rightarrow x = ۱ \quad ✓$$

بنابراین $b = -۴$ قابل‌قبول است و داریم: $(a, b) = (۲, -۴)$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۱

۱۷ گزینه ۳

$x = ۱$ مجانب قائم است درنتیجه ریشهٔ مخرج است. چون حد تابع در همسایگی چپ و راست $x = ۱$ هر دو $+\infty$ است، پس $x = ۱$ ریشهٔ مضاعف مخرج است.

$$(x-۱)^۲ = x^۲ - ۲x + ۱ \equiv x^۲ + bx + c \Rightarrow b = -۲, c = ۱$$

ازطرفی در $x = -۲$ تابع مینیمم دارد و مشتق برابر صفر است.

$$f(x) = \frac{x^۲ + a}{(x-۱)^۲} \Rightarrow f'(x) = \frac{۲x(x-۱)^۲ - ۲(x-۱)(x^۲ + a)}{(x-۱)^۴} = \frac{۲x(x-۱) - ۲(x^۲ + a)}{(x-۱)^۳}$$

$$f'(-۲) = ۰ \Rightarrow ۲(-۲)(-۲-۱) - ۲((-۲)^۲ + a) = ۰$$

$$\Rightarrow ۱۲ - ۲(۴ + a) = ۰ \Rightarrow ۴ + a = ۶ \Rightarrow a = ۲$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۵

۱۸ گزینه ۴

باتوجه‌به نمودار، تابع در مبدأ مختصات عطف دارد. باتوجه‌به شکل $f(۰) = f'(۰) = f''(۰) = ۰$ است.

$$f'(x) = ۴x^۳ + ۳ax^۲ + bx$$

$$f''(x) = ۱۲x^۲ + ۶ax + b \Rightarrow f''(۰) = b = ۰$$

پس $b = ۰$ می‌باشد. تابع در نقطه‌ای به طول ۳، مماس افقی دارد؛ پس:

$$f'(x) = ۴x^۳ + ۳ax^۲$$
$$f'(۳) = ۰ \Rightarrow ۴ \times ۳^۳ + ۳a \times ۳^۲ = ۰ \Rightarrow ۳^۳(۴ + a) = ۰ \Rightarrow a = -۴$$
$$\Rightarrow f(x) = x^۴ - ۴x^۳ \Rightarrow f(-۲) = (-۲)^۴ - ۴(-۲)^۳ = (-۲)^۳(-۲ - ۴) = ۴۸$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۸

۱۹ گزینه ۱

باتوجه‌به نمودار، تابع در نقطه‌ای با طول $x = -۱$، مماس افقی دارد؛ پس $f'(-۱) = ۰$ است. ازطرفی بسیار واضح است که جهت تقعر منحنی تابع در نقطهٔ $x = -۱$ عوض شده است؛ بنابراین داریم: $f''(-۱) = ۰$ با حل دو معادلهٔ $f'(-۱) = ۰$ و $f''(-۱) = ۰$، مقادیر a و b را تعیین می‌کنیم.

$$f(x) = x^۴ - x^۳ + ax^۲ + bx$$

$$f'(x) = ۴x^۳ - ۳x^۲ + ۲ax + b \Rightarrow f'(-۱) = -۴ - ۳ - ۲a + b = ۰ \Rightarrow b - ۲a = ۷ \quad (I)$$

$$f''(x) = ۱۲x^۲ - ۶x + ۲a \Rightarrow f''(-۱) = ۱۲ + ۶ + ۲a = ۰ \Rightarrow ۲a = -۱۸ \Rightarrow a = -۹$$

$$\xrightarrow{(I)} b - ۲(-۹) = ۷ \Rightarrow b + ۱۸ = ۷ \Rightarrow b = -۱۱$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۴

۲۰ گزینه ۴

باتوجه‌به شکل، تابع دارای یک مجانب قائم است. با صفر قرار دادن مخرج کسر می‌توان معادلهٔ آن را به دست آورد. مخرج کسر چندجمله‌ای درجه دوم است. برای اینکه مطمئن شویم یک ریشه (ریشهٔ مضاعف) دارد، فرض می‌کنیم $\Delta = ۰$ باشد.

$$x^۲ + bx + ۴ = ۰ \xrightarrow{\Delta=۰} \Delta = b^۲ - ۴(۱)(۴) = ۰ \Rightarrow b^۲ = ۱۶ \Rightarrow b = \pm ۴$$

به ازای $b = ۴$ داریم: $x^۲ + ۴x + ۴ = (x+۲)^۲$

در این صورت خط $x = -۲$ مجانب قائم تابع می‌شود که باتوجه‌به نمودار قابل‌قبول نیست اما به ازای $b = -۴$ داریم:

$$x^۲ - ۴x + ۴ = (x-۲)^۲$$

که در این صورت خط $x = ۲$ مجانب قائم تابع است، پس داریم: $y = \dfrac{x+a}{(x-۲)^۲}$

باتوجه‌به شکل واضح است که $y(۰) > ۰$ می‌باشد، پس:

$$y(۰) = \frac{۰+a}{(۰-۲)^۲} = \frac{a}{۴} > ۰ \Rightarrow a > ۰$$

بنابراین $a > ۰$ و $b = -۴$ است.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۳

۲۱ گزینه ۱

باتوجه‌به شکل، تابع در نقطه‌ای به طول $x = ۰$، ماکزیمم نسبی دارد و خط مماس بر نمودار در این نقطه افقی است؛ پس $x = ۰$ ریشهٔ سادهٔ معادلهٔ $f'(x) = ۰$ است. همچنین تابع در نقطه‌ای با طول مثبت، مماس افقی دارد و تقعر تابع نیز در این نقطه عوض می‌شود؛ پس این نقطه ریشهٔ مضاعف معادلهٔ $f'(x) = ۰$ است.

ضابطهٔ $f'(x)$ را تعیین و معادلهٔ $f'(x) = ۰$ را حل می‌کنیم.

$$f(x) = -x^۴ + ۸x^۳ + ax^۲ + b \Rightarrow f'(x) = -۴x^۳ + ۲۴x^۲ + ۲ax$$

$$\Rightarrow f'(x) = ۰ \Rightarrow -۴x^۳ + ۲۴x^۲ + ۲ax = -۲x(۲x^۲ - ۱۲x - a) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} -۲x = ۰ \Rightarrow x = ۰ \\ ۲x^۲ - ۱۲x - a = ۰ \end{cases}$$

باتوجه‌به توضیحات بالا، معادلهٔ درجهٔ دوم $۲x^۲ - ۱۲x - a = ۰$ باید ریشهٔ مضاعف مثبتی داشته باشد.

$$۲x^۲ - ۱۲x - a = ۰ \xrightarrow{\Delta=۰} \Delta = (-۱۲)^۲ - ۴(۲)(-a) = ۰ \Rightarrow ۱۴۴ + ۸a = ۰$$

$$\Rightarrow ۸a = -۱۴۴ \Rightarrow a = -۱۸$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۴

۲۲ گزینه ۴

باتوجه‌به شکل، خط $x = ۱$ مجانب قائم تابع است، پس به ازای $x = ۱$ مخرج کسر برابر با صفر می‌شود؛ پس:

$$x + b = ۰ \xrightarrow{x=۱} ۱ + b = ۰ \quad \Rightarrow \quad b = -۱$$

ازطرفی نمودار تابع از مبدأ مختصات عبور می‌کند؛ بنابراین مختصات نقطهٔ $(۰, ۰)$ در ضابطهٔ تابع صدق می‌کند:

$$f(x) = \frac{x^۲ + a}{x - ۱} \xrightarrow{f(۰)=۰} ۰ = \frac{۰ + a}{۰ - ۱} \quad \Rightarrow \quad a = ۰$$

بنابراین دوتایی مرتب (a, b) به‌صورت $(۰, -۱)$ خواهد بود.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۷

۲۳ گزینه ۳

نقطهٔ $(۴, ۰)$ روی منحنی تابع قرار دارد پس مختصات این نقطه در معادلهٔ تابع صدق می‌کند.

$$y = ax^۳ + bx^۲ - ۱۶ \quad \Rightarrow \quad ۰ = a(۴)^۳ + b(۴)^۲ - ۱۶ \quad \Rightarrow \quad ۰ = ۶۴a + ۱۶b - ۱۶$$

$$\Rightarrow \quad ۴a + b - ۱ = ۰ \quad \Rightarrow ۴a + b = ۱ \qquad (I)$$

تابع در نقاطی به طول $x = ۰$ و $x = ۴$ مماس افقی دارد، پس داریم:

$$y'(۴) = ۰ \, , \; y'(۰) = ۰$$

$$y' = ۳ax^۲ + ۲bx$$

$$y'(۰) = ۳a(۰)^۲ + ۲b(۰) = ۰ \quad \Rightarrow \quad ۰ = ۰ \quad ✓$$

$$y'(۴) = ۳a(۴)^۲ + ۲b(۴) = ۰ \quad \Rightarrow \quad ۴۸a + ۸b = ۰ \quad \Rightarrow \quad ۶a + b = ۰$$

$$\Rightarrow \quad b = -۶a \qquad (II)$$

با جایگذاری رابطهٔ II در رابطهٔ I مقدار a را به دست می‌آوریم:

$$۴a + b = ۱ \xrightarrow{b=-۶a} ۴a - ۶a = ۱ \quad \Rightarrow \quad -۲a = ۱ \quad \Rightarrow \quad a = -\frac{۱}{۲}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۴

۲۴ گزینه ۱

باتوجه‌به شکل، $x = ۰$ تنها ریشهٔ تابع $f(x)$ است؛ پس:

$$f(x) = \frac{x^۳ + ax^۲}{x^۲ + bx + c} \xrightarrow{f(x)=۰} x^۳ + ax^۲ = x^۲(x + a) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \\ x = -a \end{cases}$$

بنابراین:

$$-a = ۰ \Rightarrow a = ۰$$

ازطرفی خط $x = ۱$، مجانب قائم تابع $f(x)$ می‌باشد؛ پس $x = ۱$ ریشهٔ مخرج کسر است؛ اما باتوجه‌به نمودار داریم:

$$\lim_{x \to ۱^-} f(x) = +\infty \quad , \quad \lim_{x \to ۱^+} f(x) = +\infty$$

بنابراین $x = ۱$ ریشهٔ مضاعف مخرج کسر است؛ پس:

$$x^۲ + bx + c = (x - ۱)^۲ \Rightarrow x^۲ + bx + c = x^۲ - ۲x + ۱ \Rightarrow \begin{cases} b = -۲ \\ c = ۱ \end{cases}$$

بنابراین:

$$bc - a = -۲(۱) - ۰ = -۲$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۲

۲۵ گزینه ۲

باتوجه‌به نمودار، تابع در بازهٔ $(-\infty, ۰)$ نزولی است؛ پس نمودار f' در این بازه منفی است (زیر محور xها) و همچنین تابع f در بازهٔ $(۰, +\infty)$ صعودی است پس نمودار f' در این بازه مثبت است (بالای محور xها)، نمودار تابع f دارای یک مجانب افقی است که تابع در $+\infty$ و $-\infty$ به آن میل می‌کند؛ بنابراین مشتق تابع در $+\infty$ و $-\infty$ به صفر میل خواهد کرد پس خط $y = ۰$ مجانب افقی تابع f' است. باتوجه‌به گزینه‌ها، تنها گزینهٔ ۲ همهٔ شرایط را دارد.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۳

۲۶ گزینه ۱

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

گام اول

الف) خط $x = ۰$ مجانب قائم تابع است پس باید $x = ۰$ ریشهٔ مخرج کسر باشد.

ب) نمودار تابع از نقطهٔ $(۲, ۰)$ عبور می‌کند پس $f(۲) = ۰$ است.

ج) مشتق تابع در تمام نقاط اکسترمم نسبی، در صورت مشتق‌پذیری، برابر صفر است.

گام دوم

با توجه به قسمت (الف) از گام اول داریم:

$$x^۲ + b = ۰ \xrightarrow{x=۰} ۰^۲ + b = ۰ \Rightarrow b = ۰$$

و با توجه به قسمت (ب) از گام اول داریم:

$$f(۲) = ۰ \Rightarrow \frac{۲a + ۲}{۲^۲} = ۰ \Rightarrow \frac{۲a + ۲}{۴} = ۰ \Rightarrow ۲a + ۲ = ۰ \Rightarrow ۲a = -۲ \Rightarrow a = -۱$$

بنابراین:

$$f(x) = \frac{-x + ۲}{x^۲}$$

برای به دست آوردن مینیمم نسبی تابع، از تابع مشتق گرفته و آن را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$f'(x) = \frac{-(x^۲) - ۲x(-x + ۲)}{x^۴} = \frac{-x^۲ + ۲x^۲ - ۴x}{x^۴} = \frac{x^۲ - ۴x}{x^۴} = \frac{x(x - ۴)}{x^۴} = \frac{x - ۴}{x^۳}$$

$$\Rightarrow f'(x) = ۰ \Rightarrow \frac{x - ۴}{x^۳} = ۰ \Rightarrow x - ۴ = ۰ \Rightarrow x = ۴$$

مقدار مینیمم نسبی تابع برابر است با:

$$f(۴) = \frac{-۴ + ۲}{۴^۲} = \frac{-۲}{۱۶} = -\frac{۱}{۸}$$

بهینه‌سازی

در بخش قبل یاد گرفتیم که چگونه مقادیر مینیمم و ماکسیمم مطلق یک تابع را پیدا کنیم. وقتی از این روش در مسائل کاربردی استفاده می‌کنیم تا مینیمم یا ماکسیمم یک مقدار را پیدا کنیم، اسمش می‌شود بهینه‌سازی. در مسائل بهینه‌سازی معمولاً با یک کمیت مثل طول، فاصله، سطح، حجم و ... سروکار داریم که قرار است ماکسیمم یا مینیمم (یعنی بهینه) شود.

برای حل مسائل بهینه‌سازی این کارها را می‌کنیم:

۱) اول یک رابطه (یعنی ضابطه‌ی یک تابع) پیدا می‌کنیم که نشان‌دهنده‌ی کمیتی باشد که قرار است بهینه (ماکسیمم یا مینیمم) شود.

۲) با استفاده از داده‌های سؤال، اطلاعات قبلی ضابطه‌ی نوشته‌شده را به یک ضابطه‌ی یک‌متغیری تبدیل می‌کنیم. گاهی اوقات در این قسمت لازم است از روابط جبری و مثلثاتی یا شکل‌های هندسی هم استفاده کنیم.

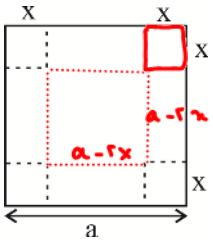
۳) از ضابطه‌ی تابعی که نوشته‌ایم، مشتق می‌گیریم و برابر صفر قرار می‌دهیم (یعنی نقاط بحرانی تابع را پیدا می‌کنیم).

۴) با استفاده از نقاط بحرانی مقدار ماکسیمم یا مینیمم را به دست می‌آوریم.

۵) گاهی اوقات لازم است بعد از نوشتن ضابطه‌ای تابع (یعنی مرحله‌ی اول) دامنه‌ی تابع را هم مشخص کنیم، ولی در اکثر وقت‌ها می‌توانیم این کار را با بررسی ریشه‌های مشتق انجام دهیم.

حالا بیایید با هم چند مثال حل کنیم:

تمرین: می‌خواهیم طبق شکل روبه‌رو، از کناره‌های یک صفحه‌ی مربع‌شکل به ضلع a مربع‌هایی به ضلع x ببریم و با خم‌کردن کناره‌های صفحه یک جعبه‌ی درباز به شکل مکعب‌مستطیل بسازیم. ماکسیمم حجم جعبه‌ای که می‌توانیم بسازیم، چه‌قدر است؟



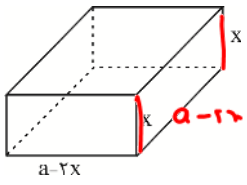
۱) $\frac{a^۳}{۲}$

۲) $\frac{a^۳}{۴}$

۳) $\frac{۲a^۳}{۲۷}$

۴) $\frac{۴a^۳}{۲۷}$

پاسخ: گزینه‌ی «۳» ـ طبق شکل روبه‌رو وقتی از کناره‌های صفحه مربع‌هایی به ضلع x می‌بریم، ابعاد مکعب‌مستطیل می‌شود $a-۲x$، $a-۲x$ و x. پس حجم مکعب مستطیل برابر است با:



$$V = \text{طول} \times \text{عرض} \times \text{ارتفاع} = x(a-۲x)^۲$$

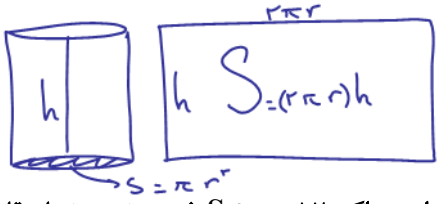
از V مشتق می‌گیریم و برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$V' = (a-۲x)^۲ - ۴(a-۲x)x = (a-۲x)(a-۲x-۴x)$$

$$V' = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{a}{۲} \\ x = \frac{a}{۶} \end{cases}$$

مقدار $x = \frac{a}{۲}$ قابل قبول نیست، چون اگر $x = \frac{a}{۲}$ باشد دیگر چیزی از صفحه باقی نمی‌ماند. پس $x = \frac{a}{۶}$ قابل قبول است و حجم ماکسیمم جعبه برابر است با:

$$\max(V) = \frac{a}{۶}(a-\frac{a}{۳})^۲ = \frac{a}{۶} \times \frac{۴a^۲}{۹} = \frac{۲a^۳}{۲۷}$$



تمرین: S سطح جانبی یک استوانه و s سطح قاعده‌ی آن است. اگر $S+s=12$ فرض شود، شعاع قاعده‌ی استوانه چه‌قدر باشد تا حجم آن ماکسیمم گردد؟

۱) $\frac{2}{\pi}$ ۲) $\frac{3}{\pi}$ ۳) $\frac{2}{\sqrt{\pi}}$ ۴) $\frac{3}{\sqrt{\pi}}$

پاسخ: گزینه‌ی «۳» ـ می‌دانیم در یک استوانه به شعاع r و ارتفاع h مساحت جانبی برابر $S=2\pi rh$ و مساحت قاعده برابر πr^2 است. پس داریم $2\pi rh+\pi r^2=12$. حجم استوانه باید ماکسیمم شود، بنابراین باید ضابطه‌ی $V=\pi r^2h$ با استفاده از رابطه‌ی بالا به یک ضابطه‌ی یک متغیری تبدیل شود:

$$2\pi rh+\pi r^2=12 \Rightarrow h=\frac{12-\pi r^2}{2\pi r}$$

$$V=\pi r^2h \Rightarrow V=\pi r^2\left(\frac{12-\pi r^2}{2\pi r}\right)=\frac{r}{2}(12-\pi r^2)$$

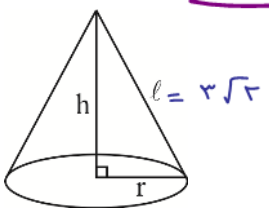
حالا که رابطه‌ی حجم به یک رابطه‌ی یک‌متغیری تبدیل شد، از آن مشتق می‌گیریم:

$$V'=0 \Rightarrow \frac{1}{2}(12r-\pi r^3)'=0 \Rightarrow 12-3\pi r^2=0 \Rightarrow r^2=\frac{4}{\pi} \Rightarrow r=\frac{2}{\sqrt{\pi}}$$

تمرین: بیشترین حجم از بین مخروط‌هایی که طول مولد آن‌ها $3\sqrt{3}$ سانتی‌متر است، کدام است؟ (سراسری ۱۴۰۱)

۱) 12π ۲) 15π ۳) 18π ۴) 27π

پاسخ: گزینه‌ی «۳» ـ شکل روبه‌رو یک مخروط به شعاع قاعده‌های r و ارتفاع h و مولد ℓ را نشان می‌دهد. حجم مخروط از رابطه‌ی $V=\frac{1}{3}\pi r^2h$ به دست می‌آید. برای آن که V را به یک ضابطه‌ی یک متغیری تبدیل کنیم، رابطه‌ی فیثاغورس را در مثلث قائم‌الزاویه می‌نویسیم:



$$r^2+h^2=\ell^2 \Rightarrow r^2+h^2=27 \Rightarrow r^2=27-h^2$$

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi(27-h^2)h=\frac{\pi}{3}(27h-h^3)$$

$$V'=0 \Rightarrow 27-3h^2=0 \Rightarrow h^2=9 \Rightarrow h=3 \Rightarrow$$

h		3	
V'	$+$	0	$-$
V	$\nearrow$	max	$\searrow$

$$\max(V)=\frac{\pi}{3}(27(3)-3^3)=18\pi$$

قضایای مینیمم و ماکسیمم

برای پیدا کردن مینیمم و ماکسیمم در مسائل بهینه‌سازی (یا در هر جای دیگر) گاهی اوقات از قضایای دیگری هم استفاده می‌کنیم. این قضایا معمولاً با استفاده از مشتق ثابت می‌شوند. استفاده از این قضایا باعث می‌شود در بعضی از سؤال‌ها بتوانیم سریع‌تر به جواب برسیم.

۱) اگر مجموع دو عامل مثبت مقدار ثابتی باشد، ماکسیمم حاصل‌ضرب آن دو وقتی به دست می‌آید که هر دو با هم برابر باشند.

۲) اگر حاصل‌ضرب دو عامل مثبت مقدار ثابتی باشد، مینیمم مجموع آن دو وقتی به دست می‌آید که هر دو با هم برابر باشند.

۳) اگر x و y اعداد حقیقی مثبت باشند که جمعشان ثابت است، حاصل $x^m y^n$ زمانی ماکسیمم می‌شود که: $\frac{x}{m}=\frac{y}{n}$

تمرین: مجموع شعاع قاعده و ارتفاع یک استوانه برابر ۱۰ است. ماکسیمم مساحت جانبی استوانه چه‌قدر است؟

۱) 10π ۲) 20π ۳) 25π ۴) 50π ✓

پاسخ: گزینه‌ی «۴» ـ راه‌حل تشریحی: $r+h=10$ است. برای تک‌متغیره کردن به جای h می‌گذاریم $h=10-r$ (*) و داریم:

$$S_{\text{جانبی}}=2\pi rh \overset{*}{=} 2\pi r(10-r)=2\pi(10r-r^2)$$

از تابع مشتق گرفته و مساوی صفر می‌گذاریم تا مقادیر اکسترمم مطلق پیدا شود:

$$S'=2\pi(10-2r)=0 \Rightarrow r=5$$

r		5	
S'	$+$	0	$-$
S	↗	max	↘

$$\max(S)=2\pi(10(5)-(5)^2)=50\pi$$

راه تستی: برای ماکسیمم‌شدنِ $2\pi rh$ باید rh یعنی ضرب ماکسیمم شود و وقتی جمع ثابت است $(r+h=10)$ طبق نکته‌ی (۱)، ضرب وقتی ماکسیمم می‌شود که $r=h$ باشد، یعنی:

$$r=h=5 \Rightarrow \max(S)=2\pi(5)(5)=50\pi$$

اگر در این سؤال بیشترین حجم استوانه را می‌خواست به صورت زیر عمل می‌کردیم:

راه تشریحی:

$$V=\pi r^2h \overset{*}{=} \pi r^2(10-r)=\pi(10r^2-r^3) \Rightarrow V'=\pi(20r-3r^2)=0 \Rightarrow r=0, r=\frac{20}{3}$$

r		$\frac{20}{3}$	
V'	$+$	0	$-$
V	↗	max	↘

$$\Rightarrow \max(V)=\pi r^2(10-r) \overset{r=\frac{20}{3}}{=\!=\!=} \pi\left(\frac{400}{9}\right)\left(10-\frac{20}{3}\right)=\frac{4000}{27}\pi$$

راه تستی: برای ماکسیمم‌شدن حجم که $V=\pi r^2h$ است لازم است تا r^2h ماکسیمم شود از طرفی چون $r+h=10$ مقدار ثابتی است طبق نکته‌ی (۳) داریم:

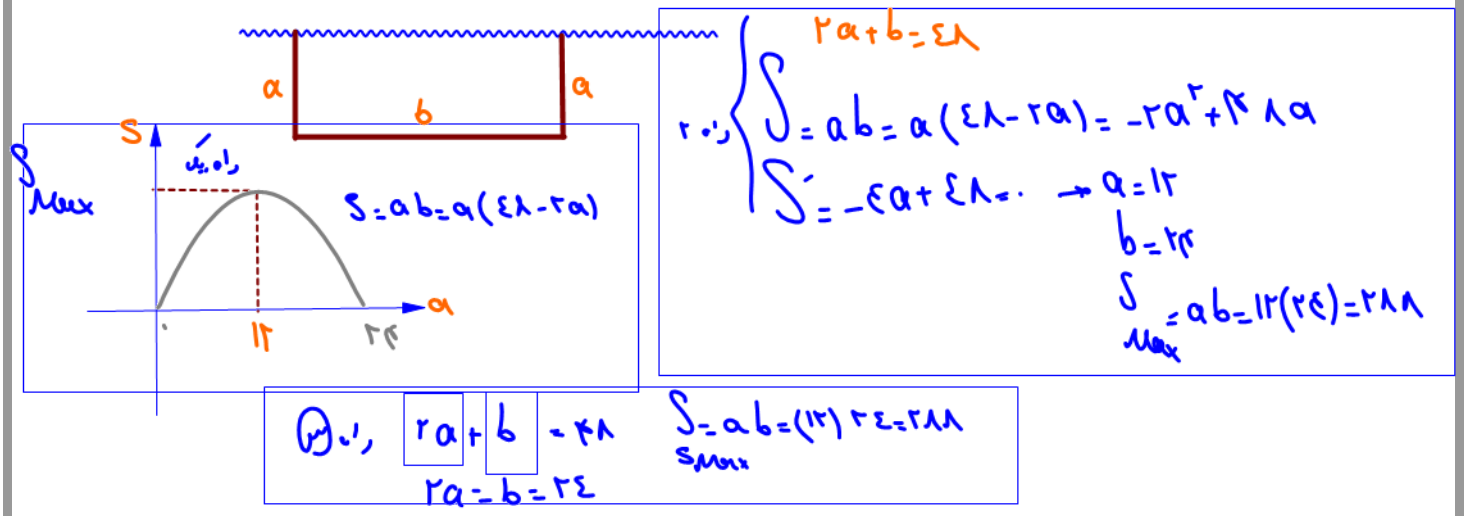
$$\frac{r}{2}=\frac{h}{1} \Rightarrow r=2h \Rightarrow 3h=10 \Rightarrow h=\frac{10}{3}, r=\frac{20}{3}$$

$$\Rightarrow V=\pi r^2h=\pi\left(\frac{400}{9}\right)\left(\frac{10}{3}\right)=\frac{4000}{27}\pi$$

تمرین: بیشترین مساحت مستطیلی که به وسیله‌ی یک طناب به طول ۴۸ متر در حاشیه‌ی یک رودخانه می‌توان محصور نمود، چند مترمربع

است؟ (به ضلع چهارم مستطیل دسترسی نیست.)

۱) ۲۴۴ ۲) ۲۸۸ ۳) ۲۹۶ ۴) ۳۱۶



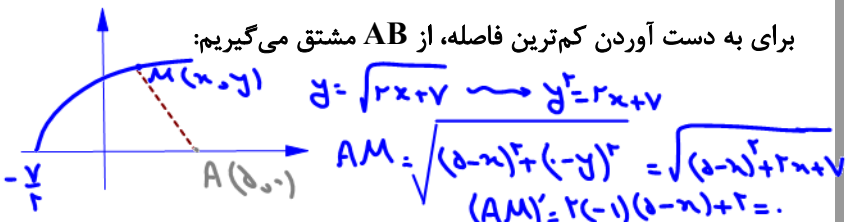
تمرین: کوتاه‌ترین فاصلهٔ نقطهٔ $A(۵,۰)$ از نقاط منحنی به معادلهٔ $y=\sqrt{۲x+۷}$، کدام است؟ (سراسری تجربی خارج از کشور ۹۹)

۱) ۴ ۲) ۴/۵ ۳) ۵ ۴) $۳\sqrt{۲}$

پاسخ: گزینهٔ «۱» ـ نقطهٔ $B(x,\sqrt{۲x+۷})$ را روی منحنی در نظر می‌گیریم. فاصلهٔ نقطهٔ $A(۵,۰)$ را از نقطهٔ B محاسبه می‌کنیم:

$$AB=\sqrt{(x-۵)^۲+(\sqrt{۲x+۷}-۰)^۲}=\sqrt{x^۲-۱۰x+۲۵+۲x+۷}=\sqrt{x^۲-۹x+۳۲}$$

برای به دست آوردن کم‌ترین فاصله، از AB مشتق می‌گیریم:



$$(AB)'=\frac{۲x-۸}{۲\sqrt{x^۲-۸x+۳۲}}=\frac{x-۴}{\sqrt{x^۲-۸x+۳۲}}$$

$$(AB)'=۰ \Rightarrow x=۴ \Rightarrow B(۴,\sqrt{۱۵})$$

کم‌ترین فاصلهٔ نقطهٔ A از منحنی، برابر است با فاصلهٔ دو نقطهٔ A و B. در نتیجه داریم:

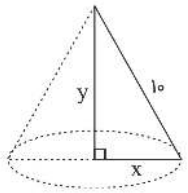
$$A(۵,۰), B(۴,\sqrt{۱۵}) \Rightarrow AB=\sqrt{(۵-۴)^۲+(۰-\sqrt{۱۵})^۲}=۴$$

$M_{in}(AB)\overset{x=4}{=}4$ ، $2=2(5-x)$، $1=5-x$، $x=4$

تمرین: از بین مثلث‌های قائم‌الزاویه با اندازهٔ وتر ۱۰ واحد، دو ضلع قائم با کدام نسبت انتخاب شود تا حجم حاصل از دوران این مثلث حول ضلع قائم، بیشترین باشد؟ (سراسری تجربی ۹۹)

۱) $\frac{۲}{۱}$ ۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۱}$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $\frac{\sqrt{۲}}{۱}$

پاسخ: گزینهٔ «۳» ـ در مثلث قائم‌الزاویه به طول اضلاع قائم x و y داریم:



$$x^۲+y^۲=۱۰۰ \Rightarrow x^۲=۱۰۰-y^۲ \quad (*)$$

از دوران مثلث حول ضلع قائمهٔ آن، مخروط تشکیل می‌شود، بنابراین داریم:

$$V=\frac{۱}{۳}\pi x^۲y \xrightarrow{(*)} V=\frac{۱}{۳}\pi(۱۰۰-y^۲)y=\frac{\pi}{۳}(۱۰۰y-y^۳)$$

حال برای به دست آوردن طول اضلاع قائم، از V مشتق می‌گیریم:

$$V' = \frac{\pi}{3}(100 - 3y^2) \Rightarrow \frac{\pi}{3}(100 - 3y^2) = 0 \Rightarrow 100 - 3y^2 = 0 \Rightarrow y^2 = \frac{100}{3}$$

$$\Rightarrow x^2 = 100 - y^2 \Rightarrow x^2 = 100 - \frac{100}{3} = \frac{300 - 100}{3} = \frac{200}{3} \Rightarrow \frac{x^2}{y^2} = \frac{\frac{200}{3}}{\frac{100}{3}} = 2 \Rightarrow \frac{x}{y} = \sqrt{2}$$

تمرین: اگر x و y دو ضلع قائم از مثلثی به طول وتر $5\sqrt{2}$ باشند، بیشترین مقدار $3x + 4y$ کدام است؟ (سراسری ریاضی ۹۰)

۱) $25\sqrt{2}$ ۲) ۳۶ ۳) $28\sqrt{2}$ ۴) ۴۰

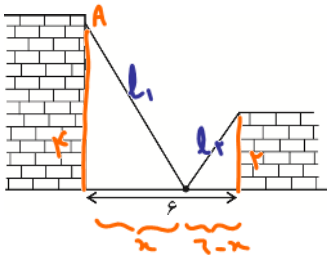
پاسخ: گزینه‌ی «۱» ـ x و y دو ضلع قائم مثلث قائم‌الزاویه با وتر $5\sqrt{2}$ هستند، پس $x^2 + y^2 = 50$ و می‌خواهیم $3x + 4y$ ماکسیمم شود. ضابطه‌ی $A = 3x + 4y$ را به یک ضابطه‌ی یک متغیری تبدیل می‌کنیم:

$$x^2 + y^2 = 50 \Rightarrow y^2 = 50 - x^2 \Rightarrow y = \sqrt{50 - x^2} \Rightarrow A = 3x + 4\sqrt{50 - x^2}$$

$$A' = 0 \Rightarrow 3 - \frac{4x}{\sqrt{50 - x^2}} = 0 \Rightarrow 3\sqrt{50 - x^2} = 4x \Rightarrow 9(50 - x^2) = 16x^2 \Rightarrow 50 - x^2 = \frac{16}{9}x^2$$

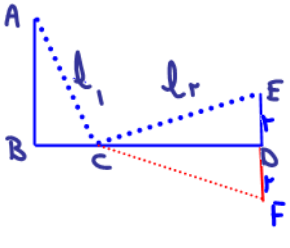
$$\Rightarrow \frac{25}{9}x^2 = 50 \Rightarrow x^2 = 18 \Rightarrow x = 3\sqrt{2} \Rightarrow \max(A) = 3(3\sqrt{2}) + 4\sqrt{50 - 18} = 3(3\sqrt{2}) + 4(4\sqrt{2}) = 25\sqrt{2}$$

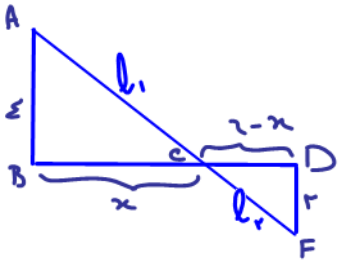
تمرین: در شکل روبه‌رو می‌خواهیم از نقطه‌ی بین دو دیوار ۲ و ۴ متری که به فاصله‌ی ۶ متری هم قرار دارند، دو پله تا بالای دیوارها بسازیم. کوتاه‌ترین مجموع طول پله‌ها برابر کدام است؟



۱) ۸ ۲) $8\sqrt{2}$

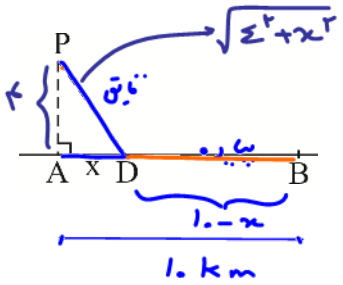
۳) $6\sqrt{2}$ ۴) ۱۲





تمرین: در شکل مقابل قایقی در نقطهٔ P قرار دارد که نزدیک‌ترین فاصلهٔ آن از ساحل ۴ کیلومتر است. اگر سرعت حرکت قایق $3\ km/h$ و سرعت پیاده‌روی در ساحل $5\ km/h$ باشد، برای این که فردی که درون قایق است در کم‌ترین زمان ممکن به نقطهٔ B به فاصلهٔ ۱۰ کیلومتری از نقطهٔ A برسد، باید در نقطه‌ای با چه فاصله (x) از نقطهٔ A پیاده شود؟ (کتاب درسی)

۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۵



$t_{کل} = t_{قایق} + t_{پیاده‌روی} = \frac{\sqrt{16+x^2}}{3} + \frac{10-x}{5}$

$سرعت = \frac{مسافت}{زمان} \rightarrow t_{زمان} = \frac{مسافت}{سرعت}$

$t' = \frac{1}{3}\left(\frac{2x}{2\sqrt{16+x^2}}\right) + \frac{1}{5}(0-1) = 0$

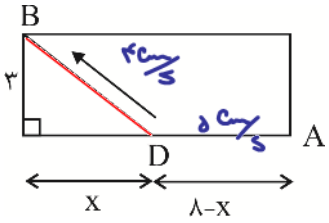
دو طرف به توان دو

$\frac{x}{3\sqrt{16+x^2}} = \frac{1}{5} \rightsquigarrow \frac{x^2}{9(16+x^2)} = \frac{1}{25}$

$25x^2 = 9(16) + 9x^2$
$16x^2 = 9(16)$
$x = 3$

تمرین: در شکل زیر مورچه‌ای در یکی از رأس‌های یک صفحهٔ روغنی لغزنده ایستاده است. او می‌خواهد از نقطهٔ A به نقطهٔ B برود. اگر سرعت حرکت مورچه روی صفحهٔ لغزنده $4\ cm/s$ و روی سطح کنار صفحه $5\ cm/s$ باشد، کم‌ترین زمانی که مورچه می‌تواند به نقطهٔ B برسد، کدام است؟ (کتاب درسی)

۱) ۲ ثانیه
۲) ۲/۰۵ ثانیه
۳) ۲/۲ ثانیه
۴) ۲/۱۵ ثانیه



$t = t_{کنار} + t_{سطح\ شیب‌دار} = \frac{8-x}{5} + \frac{\sqrt{3^2+x^2}}{4}$

$t' = \frac{1}{5}(0-1) + \frac{1}{4}\left(\frac{2x}{2\sqrt{9+x^2}}\right) = 0$

دو طرف به توان ۲

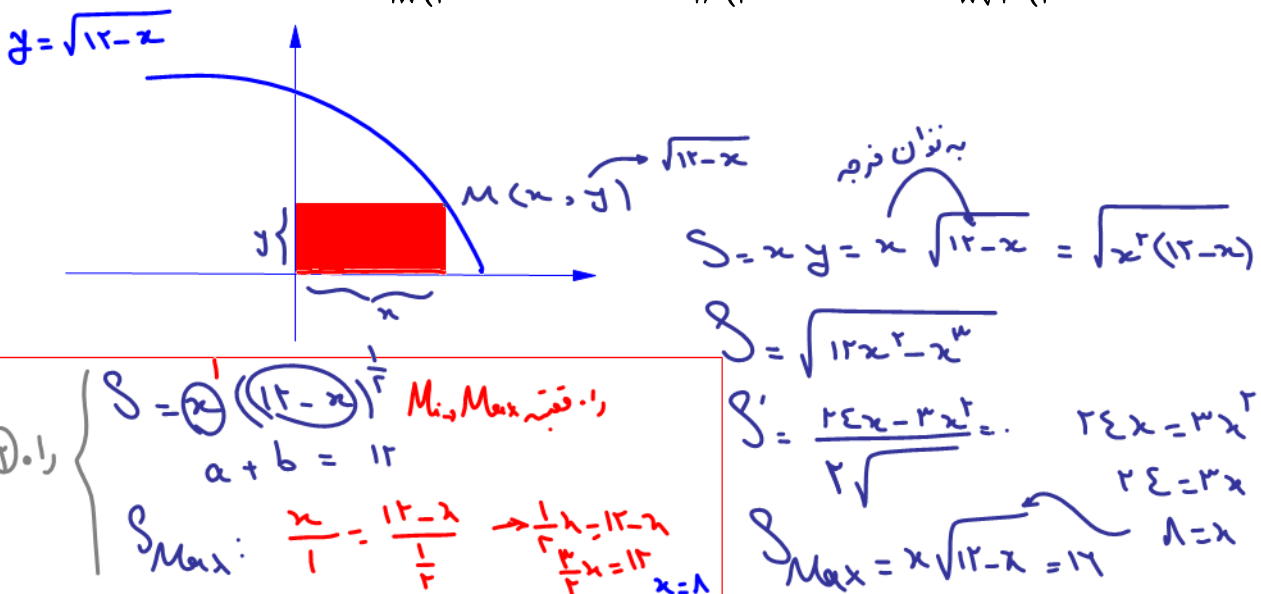
$\frac{x}{4\sqrt{9+x^2}} = \frac{1}{5}$

$\frac{x^2}{16(9+x^2)} = \frac{1}{25} \rightsquigarrow 25x^2 = 16(9+x^2)$
$25x^2 = 16(9) + 16x^2$
$9x^2 = 16(9)$
$x = 4$

$Min\left(t = \frac{8-x}{5} + \frac{\sqrt{9+x^2}}{4}\right)_{x=4} = \frac{4}{5} + \frac{5}{4} = 0.8 + 1.25 = 2.05$ ثانیه

تمرین: بیشترین مساحت مستطیلی که دو ضلع آن بر روی محورهای مختصات و رأس چهارم آن بر روی منحنی به معادلهٔ $y=\sqrt{12-x}$، در ناحیهٔ اول واقع شود، کدام است؟ (تجربی ۹۸)

۱) $8\sqrt{2}$ ۲) $8\sqrt{3}$ ۳) ۱۶ ۴) ۱۸



به توان فرجه

$S=xy=x\sqrt{12-x}=\sqrt{x^2(12-x)}$

$S=\sqrt{12x^2-x^4}$

$S'=\frac{24x-3x^2}{2\sqrt{\quad}}=0 \Rightarrow 24x=3x^2 \Rightarrow 24=3x \Rightarrow x=8$

$S_{Max}=x\sqrt{12-x}=16$

راه دوم) قضیه Min و Max

$S=x^{1}(12-x)^{\frac{1}{2}}$

$a+b=12$

$S_{Max}: \frac{x}{1}=\frac{12-x}{\frac{1}{2}} \rightarrow \frac{1}{2}x=12-x \rightarrow \frac{3}{2}x=12 \Rightarrow x=8$

تمرین: بیشترین مساحت مستطیلی که یک ضلع آن بر قطر نیم‌دایره به شعاع ۶ واحد و دو رأس دیگر آن روی این نیم‌دایره باشد، کدام است؟ (تجربی خارج ۹۸)

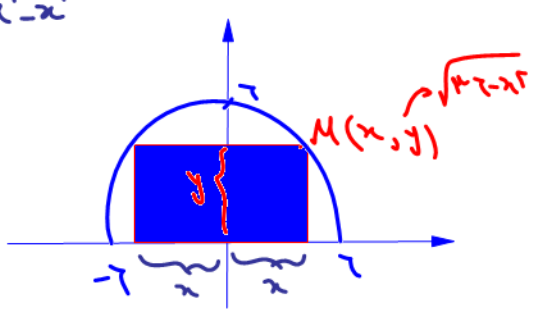
۱) ۱۸ ۲) ۲۴ ۳) ۲۷ ۴) ۳۶

نکته: معادله نیم دایره به شعاع a

$y=\sqrt{a^2-x^2}$

$y=-\sqrt{a^2-x^2}$

$y=\sqrt{6^2-x^2}$



$S=(2x)y=2x\sqrt{36-x^2}$

$S=2\sqrt{36x^2-x^4}$

$S'=2\frac{2(36)x-4x^3}{2\sqrt{\quad}}=0 \Rightarrow 72x=4x^3 \Rightarrow 18=x^2 \Rightarrow x=\sqrt{18}$

$S_{Max}=2x\sqrt{36-x^2}=2\sqrt{18}\sqrt{18}=2(18)=36$ جواب

$x=\sqrt{18}$

۱ بیشترین مساحت از زمینی که می‌توان توسط یک طناب به طول ۸۸ متر و به شکل مستطیلی که یک طرف آن رودخانه است محصور نمود، چند متر مربع است؟

۱) ۹۵۸ ۲) ۹۶۸

۳) ۹۷۸ ۴) ۹۸۸

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۱

۲ بزرگ‌ترین حجم مخروط، از بین مخروط‌هایی که مجموع شعاع قاعده و ارتفاع آن‌ها برابر واحد باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۴\pi}{۸۱}$ ۲) $\frac{\pi}{۱۲}$

۳) $\frac{۳\pi}{۳۲}$ ۴) $\frac{۴\pi}{۲۷}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۰

۳ دو برابر عددی از عدد دیگر ۶ واحد بیشتر است، اگر حاصل‌ضرب آن‌ها مینیمم باشد، مجموع آن دو عدد کدام است؟

۱) $-\frac{۳}{۲}$ ۲) $-\frac{۱}{۲}$

۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۱

۴ بیشترین مساحت از مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ای که مجموع یک ضلع زاویهٔ قائمه و وتر آن ۶ باشد، کدام است؟

۱) ۳ ۲) $۲\sqrt{۳}$

۳) ۴ ۴) $۳\sqrt{۲}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۲

۵ کوتاه‌ترین فاصلهٔ نقطهٔ $A(۸, ۰)$ از نقاط منحنی به معادلهٔ $y = x\sqrt{x}$ کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۱۱}$ ۲) $۳\sqrt{۵}$

۳) $۴\sqrt{۳}$ ۴) $۵\sqrt{۲}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۵

۶ دو ضلع از مستطیلی منطبق بر محورهای مختصات و رأس چهارم آن واقع بر منحنی به معادلهٔ $y = (x-۲)^۲$ روی بازهٔ $[۰, ۲]$ است. بیشترین مساحت این مستطیل کدام است؟

۱) $\frac{۲۸}{۲۷}$
۲) $\frac{۱۰}{۹}$
۳) $\frac{۳۲}{۲۷}$
۴) $\frac{۱۱}{۹}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۶

۷ کمترین فاصلهٔ نقطهٔ $A(۴, ۰)$ از نقاط منحنی به معادلهٔ $y = \sqrt{۲x+۹}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۵}$
۲) $۲\sqrt{۲}$
۳) ۳
۴) ۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۷

۸ کوتاه‌ترین فاصلهٔ مبدأ مختصات از نقاط منحنی به معادلهٔ $y = \frac{۲}{x^۲}$ کدام است؟

۱) ۱
۲) $\sqrt{۲}$
۳) $\sqrt{۳}$
۴) ۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۸

۹ دو نقطهٔ $A(۲, ۳)$ و $B(۴, ۷)$ و خط به معادلهٔ $y = x - ۱$ در صفحهٔ محورهای مختصات مفروض‌اند. نقطهٔ M بر روی خط مفروض با کدام طول انتخاب شود به‌طوری‌که تفاضل فواصل آن از دو نقطهٔ مفروض، بیشترین مقدار را داشته باشد؟

۱) -۱
۲) صفر
۳) ۱
۴) ۳

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۳

۱۰ نقطه‌ای با کدام طول بر روی محور xها انتخاب شود، به‌طوری‌که تفاضل فواصل آن از دو نقطهٔ $A(۱, ۵)$ و $B(۷, -۲)$ بیشترین مقدار را داشته باشد؟

۱) ۸
۲) ۹
۳) ۱۰
۴) ۱۱

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۳

۱۱ کمترین فاصلهٔ نقاط واقع بر منحنی $y = -\sqrt{-x - [x^۲]}$ از خط $x - y - ۱ = ۰$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$
۲) $\frac{۳\sqrt{۲}}{۵}$
۳) $\frac{۳\sqrt{۲}}{۱۰}$
۴) $\frac{۳\sqrt{۲}}{۸}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۲

۱۲ حداکثر مساحت جانبی استوانه‌ای که درون یک کره به شعاع $۴\sqrt{۲}$ محاط می‌شود، کدام است؟

۱) ۳۲π
۲) ۶۴π
۳) $\frac{۲۵۶\pi}{۳}$
۴) $\frac{۵۱۲\pi}{۳}$

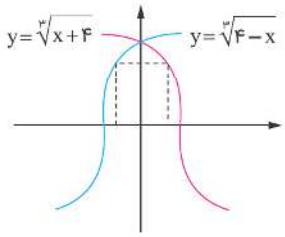
کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

۱۳ نمودار تابع $f(x)=(m^۲-۱)x^۲+(۲-m)x+۵\ ,\ m\in(-۱,۱)$ محور xها را در α و β قطع می‌کند. اگر مجموع α و β کمترین مقدار باشد، m کدام است؟ (با تغییر)

۱) $-۲+\sqrt{۵}$
۲) $-۲+\sqrt{۳}$
۳) $۲-\sqrt{۵}$
۴) $۲-\sqrt{۳}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۲

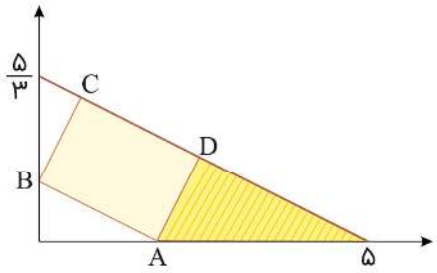
۱۴ مساحت بزرگ‌ترین مستطیل واقع در ناحیه‌های اول و دوم که دو رأس آن بر محور xها و دو رأس دیگر آن بر نمودارهای داده‌شده در شکل زیر قرار دارد، کدام است؟



۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۶

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

۱۵ در شکل زیر، مساحت مستطیل $ABCD$ ماکزیمم است. مساحت مثلث هاشورخورده چقدر است؟



۱) $\frac{۱۵}{۸}$
۲) $\frac{۱۵}{۱۶}$
۳) $\frac{۲۵}{۱۲}$
۴) $\frac{۲۵}{۲۴}$

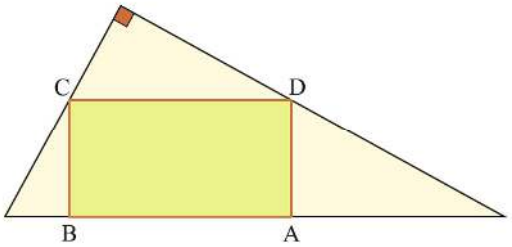
کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۱۶ در ساخت یک قیف به شکل مخروط قائم به حجم $\frac{\pi}{۳}$، با کدام ارتفاع، کمترین مقدار جنس مصرف می‌شود؟

۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$
۲) ۱
۳) $\sqrt[۳]{۲}$
۴) $\sqrt{۲}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۵

۱۷ در شکل زیر، یکی از اضلاع قائمه مثلث بزرگ نصف دیگری است. اگر مساحت مستطیل $ABCD$ ماکزیمم باشد، نسبت طول به عرض مستطیل کدام است؟



۱) ۱

۲) ۱/۵

۳) ۲

۴) ۲/۵

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

۱۸ کمترین فاصلهٔ نقاط واقع بر منحنی $y = \sqrt{x - [x^2]}$ از خط $2x - y + 2 = 0$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{5}}{5}$

۲) $\frac{3\sqrt{5}}{8}$

۳) $\frac{\sqrt{5}}{10}$

۴) $\frac{3\sqrt{5}}{10}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۲

۱۹ قرینهٔ نقطهٔ A واقع بر سهمی $f(x) = x^2$ را نسبت به نیمساز ناحیهٔ اول و سوم صفحهٔ مختصات تعیین کرده و آن را A' می‌نامیم. اگر طول نقطهٔ A بین دو طول متوالی از محل تقاطع تابع f با خط نیمساز موردنظر باشد، ماکزیمم طول پاره‌خط AA'، کدام است؟

۱) $\sqrt{2}$

۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

۳) $\frac{\sqrt{2}}{4}$

۴) $\frac{\sqrt{2}}{8}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

۲۰ کوتاه‌ترین فاصلهٔ نقطهٔ $A(5, 0)$ از نقاط منحنی به معادلهٔ $y = \sqrt{2x + 7}$، کدام است؟

۱) ۴

۲) ۴/۵

۳) ۵

۴) $3\sqrt{2}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۲۱ در ساخت قوطی‌های حلبی در باز به شکل مکعب‌مستطیل با قاعده مربع و حجم ۴ واحد مکعب، حداقل حلب استفاده‌شده در هر قوطی، چند واحد مربع است؟

۱) ۱۴

۲) ۱۲

۳) ۱۰

۴) ۸

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

۲۲ از بین مخروط‌های حاصل که از دوران کامل پاره‌خط AB با اندازهٔ $۳\sqrt{۳}$ حول خط L به دست می‌آیند، ارتفاع مخروطی با بیشترین حجم، کدام است؟ (فقط نقطهٔ A روی خط L واقع است)

۱) ۶ ۲) ۳

۳) $۲\sqrt{۳}$ ۴) $\sqrt{۳}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

۲۳ قرینهٔ نقطهٔ A واقع بر منحنی $f(x) = \sqrt[۳]{-x}$ را در دامنهٔ $[۰, ۱]$ نسبت به نیمساز ناحیهٔ دوم و چهارم صفحهٔ مختصات تعیین و آن را A' می‌نامیم. ماکزیمم طول پاره‌خط AA'، کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۳\sqrt{۶}}$ ۲) $\frac{۴}{۳\sqrt{۶}}$

۳) $\frac{۲}{۳\sqrt{۲}}$ ۴) $\frac{۴}{۳\sqrt{۲}}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

۲۴ اگر x و y دو ضلع قائم از مثلثی به طول وتر $۵\sqrt{۲}$ باشند، بیشترین مقدار $۳x + ۴y$ کدام است؟

۱) $۲۵\sqrt{۲}$ ۲) ۳۶

۳) $۲۸\sqrt{۲}$ ۴) ۴۰

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۰

۲۵ از بین مثلث‌های قائم‌الزاویه با اندازهٔ وتر ۱۰ واحد، دو ضلع قائم با کدام نسبت انتخاب شود تا حجم حاصل از دوران این مثلث حول ضلع قائم، بیشترین باشد؟

۱) $\frac{۲}{۱}$ ۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۱}$

۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $\frac{\sqrt{۲}}{۱}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

۲۶ بیشترین مساحت مستطیلی که دو ضلع آن بر روی محورهای مختصات و رأس چهارم آن بر روی منحنی به معادلهٔ $y = \sqrt{۱۲ - x}$ در ناحیهٔ اول واقع شود، کدام است؟

۱) $۸\sqrt{۲}$ ۲) $۸\sqrt{۳}$

۳) ۱۶ ۴) ۱۸

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۲۷ بیشترین مساحت مستطیلی که یک ضلع آن بر قطر نیم‌دایره به شعاع ۶ واحد و دو رأس دیگر آن روی این نیم‌دایره باشد، کدام است؟

۱) ۱۸ ۲) ۲۴

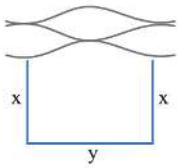
۳) ۲۷ ۴) ۳۶

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

پاسخ Homework

۱ گزینه ۲

اگر طول و عرض زمین را به ترتیب y و x بنامیم آنگاه داریم:



$$y + ۲x = ۸۸ \Rightarrow y = ۸۸ - ۲x$$

مساحت مستطیل برابر با حاصل‌ضرب طول در عرض آن است، پس تعریف می‌کنیم:

$$S = xy = x(۸۸ - ۲x) = ۸۸x - ۲x^۲$$

برای محاسبهٔ بیشترین مساحت، معادلهٔ $S'(x) = ۰$ را حل می‌کنیم:

$$S'(x) = ۸۸ - ۴x \Rightarrow S'(x) = ۰ \Rightarrow ۴x = ۸۸ \Rightarrow x = ۲۲ \ , \ y = ۸۸ - ۴۴ = ۴۴$$

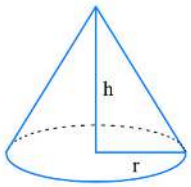
بنابراین:

$$S_{max} = xy = ۲۲ \times ۴۴ = ۹۶۸$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۱

۲ گزینه ۱

مخروطی به شعاع r و ارتفاع h در نظر می‌گیریم. داریم:



$$r + h = ۱ \Rightarrow r = ۱ - h$$

حجم این مخروط برابر است با:

$$V = \frac{۱}{۳}\pi r^۲ h \xrightarrow{r=۱-h} V = \frac{۱}{۳}\pi(۱-h)^۲ h = \frac{۱}{۳}\pi(h^۳ - ۲h^۲ + h)$$

برای ماکزیمم کردن حجم مخروط، ابتدا معادلهٔ $V'(h) = ۰$ را حل می‌کنیم:

$$V'(h) = \frac{۱}{۳}\pi(۳h^۲ - ۴h + ۱)$$

$$V'(h) = ۰ \Rightarrow ۳h^۲ - ۴h + ۱ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} h = ۱ & \text{غ.ق.ق } (r + h = ۱ \text{ زیرا}) \\ h = \frac{۱}{۳} \end{cases}$$

بنابراین به ازای $h = \frac{۱}{۳}$، بزرگ‌ترین حجم مخروط به دست می‌آید:

$$V_{max} = \frac{۱}{۳}\pi\left((\frac{۱}{۳})^۳ - ۲(\frac{۱}{۳})^۲ + \frac{۱}{۳}\right) = \frac{۴\pi}{۸۱}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۰

۳ گزینه ۱

یکی از اعداد را x و دیگری را y می‌نامیم. داریم: $y = ۲x - ۶$

می‌خواهیم $x.y$ مینیمم شود پس این حاصل‌ضرب را به‌صورت تابعی برحسب x نوشته و مشتق آن را برابر صفر قرار می‌دهیم.

$$f(x) = x.y = x(۲x - ۶) = ۲x^{۲} - ۶x$$

$$\Rightarrow f'(x) = ۴x - ۶ = ۰ \Rightarrow ۴x = ۶ \Rightarrow x = \frac{۳}{۲}$$

$$\xrightarrow{y=۲x-۶} y = ۲(\frac{۳}{۲}) - ۶ = ۳ - ۶ = -۳$$

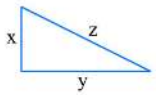
مجموع دو عدد برابر است با:

$$x + y = \frac{۳}{۲} - ۳ = -\frac{۳}{۲}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۱

۴ گزینه ۲

مثلث قائم‌الزاویه‌ای با طول اضلاع x، y و z به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم.



بر اساس اطلاعات صورت سؤال داریم:

$$x + z = ۶ \Rightarrow z = ۶ - x$$

ازطرفی طبق رابطهٔ فیثاغورس داریم:

$$x^۲ + y^۲ = z^۲ \xrightarrow{z=۶-x} x^۲ + y^۲ = (۶ - x)^۲ \Rightarrow x^۲ + y^۲ = x^۲ - ۱۲x + ۳۶$$

$$\Rightarrow y^۲ = ۳۶ - ۱۲x \Rightarrow y = \sqrt{۳۶ - ۱۲x} \Rightarrow y = ۲\sqrt{۹ - ۳x}$$

اکنون مساحت مثلث را به‌صورت تابعی برحسب x می‌نویسیم:

$$S = \frac{۱}{۲}xy = \frac{۱}{۲}x(۲\sqrt{۹ - ۳x}) = x\sqrt{۹ - ۳x}$$

برای بهینه کردن مساحت، معادلهٔ $S'(x) = ۰$ را حل می‌کنیم:

$$S'(x) = \sqrt{۹ - ۳x} - \frac{۳x}{۲\sqrt{۹ - ۳x}} = \frac{۲(۹ - ۳x) - ۳x}{۲\sqrt{۹ - ۳x}} = \frac{۱۸ - ۹x}{۲\sqrt{۹ - ۳x}}$$

$$S'(x) = ۰ \Rightarrow ۱۸ - ۹x = ۰ \Rightarrow x = ۲$$

$$\xrightarrow{y=۲\sqrt{۹-۳x}} y = ۲\sqrt{۹ - ۶} = ۲\sqrt{۳}$$

بنابراین بیشترین مساحت مثلث قائم‌الزاویه با مشخصات داده‌شده برابر است با:

$$S_{max} = \frac{۱}{۲}xy = \frac{۱}{۲} \times ۲ \times ۲\sqrt{۳} = ۲\sqrt{۳}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۲

۵ گزینه ۱

نقطهٔ $M(\alpha, \alpha\sqrt{\alpha})$ را بر روی منحنی $y = x\sqrt{x}$ در نظر می‌گیریم. فاصلهٔ میان دو نقطهٔ A و M برابر است با:

$$MA = \sqrt{(\alpha - ۸)^۲ + (\alpha\sqrt{\alpha} - ۰)^۲} = \sqrt{\alpha^۲ - ۱۶\alpha + ۶۴ + \alpha^۳} = \sqrt{\alpha^۳ + \alpha^۲ - ۱۶\alpha + ۶۴}$$

برای مینیمم کردن فاصلهٔ MA، ابتدا معادلهٔ $(MA)'(\alpha) = ۰$ را حل می‌کنیم. داریم:

$$(MA)'(\alpha) = \frac{۳\alpha^۲ + ۲\alpha - ۱۶}{۲\sqrt{\alpha^۳ + \alpha^۲ - ۱۶\alpha + ۶۴}}$$

$$(MA)'(\alpha) = ۰ \Rightarrow ۳\alpha^۲ + ۲\alpha - ۱۶ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} \alpha = ۲ \\ \alpha = -\frac{۱۶}{۶} \quad (*)\text{غ ق ق} \end{cases}$$

* دامنهٔ تابع $y = x\sqrt{x}$ به‌صورت بازهٔ $[۰, +\infty)$ است.

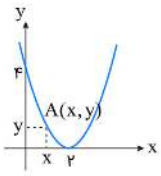
بنابراین کوتاه‌ترین فاصلهٔ نقطهٔ A از منحنی $y = x\sqrt{x}$ برابر است با:

$$(MA)_{min} = \sqrt{(۲ - ۸)^۲ + (۲\sqrt{۲})^۲} = \sqrt{۳۶ + ۸} = \sqrt{۴۴} = ۲\sqrt{۱۱}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۵

۶ گزینه ۳

نقطهٔ $A(x, y)$ روی منحنی $y = (x - ۲)^۲$ را رأس چهارم مستطیل در نظر می‌گیریم، پس این رأس دارای مختصات $A(x, (x - ۲)^۲)$ است. با رسم شکلی ساده، مستطیل ایجادشده را مشخص می‌کنیم.



مساحت این مستطیل برابر است با:

$$S = xy \xrightarrow{y_A = (x-۲)^۲} S = x(x - ۲)^۲ \quad ; \quad ۰ < x < ۲$$

$$S'(x) = (x - ۲)^۲ + ۲x(x - ۲) = (x - ۲)(x - ۲ + ۲x) = (x - ۲)(۳x - ۲)$$

$$S'(x) = ۰ \Rightarrow (x - ۲)(۳x - ۲) = ۰ \xrightarrow{x \neq ۲} ۳x - ۲ = ۰ \Rightarrow x = \frac{۲}{۳}$$

بنابراین بیشترین مساحت مستطیل به ازای $x = \frac{۲}{۳}$ به دست می‌آید:

$$S_{max} = x(x - ۲)^۲ = (\frac{۲}{۳})(\frac{۲}{۳} - ۲)^۲ = \frac{۲}{۳}(-\frac{۴}{۳})^۲ = \frac{۲}{۳} \times \frac{۱۶}{۹} = \frac{۳۲}{۲۷}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۶

۷ گزینه ۴

نقطهٔ $M(\alpha, \sqrt{۲\alpha+۹})$ را بر روی منحنی $y=\sqrt{۲x+۹}$ در نظر می‌گیریم. فاصلهٔ میان دو نقطهٔ A و M برابر است با:

$$MA=\sqrt{(\alpha-۴)^۲+(\sqrt{۲\alpha+۹}-۰)^۲}=\sqrt{\alpha^۲-۸\alpha+۱۶+۲\alpha+۹}=\sqrt{\alpha^۲-۶\alpha+۲۵}$$

برای یافتن کمترین فاصله، ابتدا معادلهٔ $(MA)'(\alpha)=۰$ را حل می‌کنیم:

$$(MA)'(\alpha)=\frac{۲\alpha-۶}{۲\sqrt{\alpha^۲-۶\alpha+۲۵}}$$

$$(MA)'(\alpha)=۰\Rightarrow ۲\alpha-۶=۰\Rightarrow \alpha=۳$$

بنابراین کمترین فاصلهٔ نقطهٔ A از منحنی $y=\sqrt{۲x+۹}$ برابر است با:

$$(MA)_{min}=\sqrt{۹-۶(۳)+۲۵}=\sqrt{۱۶}=۴$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۷

۸ گزینه ۳

نقطهٔ $A(\alpha, \frac{۲}{\alpha^۲})$ را بر روی منحنی $y=\frac{۲}{x^۲}$ در نظر می‌گیریم. فاصلهٔ مبدأ مختصات از نقطهٔ A برابر است با:

$$OA=\sqrt{(\alpha-۰)^۲+(\frac{۲}{\alpha^۲}-۰)^۲}=\sqrt{\alpha^۲+\frac{۴}{\alpha^۴}}$$

برای مینیمم کردن فاصلهٔ OA، ابتدا معادلهٔ $(OA)'(\alpha)=۰$ را حل می‌کنیم:

$$(OA)'(\alpha)=\frac{۲\alpha-\frac{۱۶\alpha^۳}{\alpha^۸}}{۲\sqrt{\alpha^۲+\frac{۴}{\alpha^۴}}}$$

$$(OA)'(\alpha)=۰\Rightarrow ۲\alpha-\frac{۱۶}{\alpha^۵}=۰\Rightarrow ۲\alpha=\frac{۱۶}{\alpha^۵}\Rightarrow \alpha^۶=۸\Rightarrow \alpha=\sqrt{۲}$$

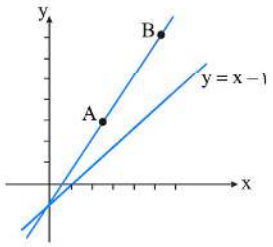
بنابراین کوتاه‌ترین فاصلهٔ مبدأ مختصات از منحنی $y=\frac{۲}{x^۲}$، به ازای $\alpha=\sqrt{۲}$ به دست می‌آید:

$$(OA)_{min}=\sqrt{(\sqrt{۲})^۲+\frac{۴}{(\sqrt{۲})^۴}}=\sqrt{۲+\frac{۴}{۴}}=\sqrt{۲+۱}=\sqrt{۳}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۸

۹ گزینه ۲

دو نقطهٔ A و B و خط داده‌شده را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم.



همان‌طور که مشاهده می‌کنید دو نقطهٔ A و B در یک طرف خط $y = x - ۱$ قرار دارند؛ بنابراین نقطه‌ای از این خط که تفاضل فاصله‌اش از A و B بیشترین مقدار را دارد، همان محل برخورد خط $y = x - ۱$ و خط گذرنده از نقاط A و B است. ابتدا معادلهٔ خط گذرنده از نقاط A و B را تعیین می‌کنیم:

$$y - y_A = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}(x - x_A)$$

$$y - ۳ = \frac{۷ - ۳}{۴ - ۲}(x - ۲) \Rightarrow y - ۳ = ۲(x - ۲) \Rightarrow y - ۳ = ۲x - ۴ \Rightarrow y = ۲x - ۱$$

با مساوی قرار دادن معادلهٔ دو خط، نقطهٔ برخورد آن‌ها را مشخص می‌کنیم:

$$۲x - ۱ = x - ۱ \Rightarrow x = ۰ \Rightarrow y = -۱ \Rightarrow M(۰, -۱)$$

بنابراین طول نقطهٔ M برابر با صفر است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۳

۱۰ گزینه ۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۳

گام اول

فاصلهٔ میان دو نقطهٔ $A(x_۱, y_۱)$ و $B(x_۲, y_۲)$ برابر است با:

$$|AB| = \sqrt{(x_۲ - x_۱)^۲ + (y_۲ - y_۱)^۲}$$

گام دوم

نقطهٔ موردنظر را $M(\alpha, ۰)$ در نظر می‌گیریم. باتوجه‌به گام اول، فواصل MA و MB را محاسبه می‌کنیم.

$$|MA| = \sqrt{(۱ - \alpha)^۲ + (۵ - ۰)^۲} = \sqrt{(۱ - \alpha)^۲ + ۲۵}$$

$$|MB| = \sqrt{(۷ - \alpha)^۲ + (-۲ - ۰)^۲} = \sqrt{(۷ - \alpha)^۲ + ۴}$$

تفاضل این دو فاصله، عبارتی برحسب α است که برای یافتن ماکزیمم مقدارش، کافی است ریشهٔ مشتق این عبارت را به دست آوریم.

$$d(\alpha) = |MA| - |MB| = \sqrt{(۱ - \alpha)^۲ + ۲۵} - \sqrt{(۷ - \alpha)^۲ + ۴}$$

$$d'(\alpha) = \frac{-۲(۱ - \alpha)}{۲\sqrt{(۱ - \alpha)^۲ + ۲۵}} - \frac{-۲(۷ - \alpha)}{۲\sqrt{(۷ - \alpha)^۲ + ۴}} = \frac{(۷ - \alpha)}{\sqrt{(۷ - \alpha)^۲ + ۴}} - \frac{(۱ - \alpha)}{\sqrt{(۱ - \alpha)^۲ + ۲۵}}$$

$$d'(\alpha) = ۰ \Rightarrow \frac{(۷ - \alpha)}{\sqrt{(۷ - \alpha)^۲ + ۴}} = \frac{(۱ - \alpha)}{\sqrt{(۱ - \alpha)^۲ + ۲۵}} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} \frac{(۷ - \alpha)^۲}{(۷ - \alpha)^۲ + ۴} = \frac{(۱ - \alpha)^۲}{(۱ - \alpha)^۲ + ۲۵}$$

$$\Rightarrow (۱ - \alpha)^۲((۷ - \alpha)^۲ + ۴) = (۷ - \alpha)^۲((۱ - \alpha)^۲ + ۲۵)$$

$$\Rightarrow (۱ - \alpha)^۲(۷ - \alpha)^۲ + ۴(۱ - \alpha)^۲ = (۷ - \alpha)^۲(۱ - \alpha)^۲ + ۲۵(۷ - \alpha)^۲$$

$$\Rightarrow ۴(۱ - \alpha)^۲ = ۲۵(۷ - \alpha)^۲ \xrightarrow{\text{جذر}} ۲(۱ - \alpha) = \pm ۵(۷ - \alpha)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۲ - ۲\alpha = ۳۵ - ۵\alpha \Rightarrow ۳\alpha = ۳۳ \Rightarrow \alpha = ۱۱ \\ ۲ - ۲\alpha = -۳۵ + ۵\alpha \Rightarrow ۷\alpha = ۳۷ \Rightarrow \alpha = \frac{۳۷}{۷} \end{cases}$$

باتوجه‌به گزینه‌ها، $\alpha = ۱۱$ قابل‌قبول است.

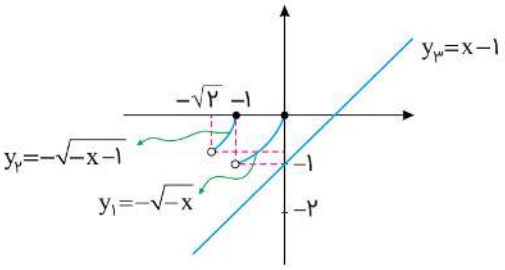
۱۱ گزینه ۴

$$y = -\sqrt{-x - [x^۲]}$$
$$-x - [x^۲] \geq ۰ \Rightarrow -x \geq [x^۲]$$

$$-۱ < x < ۰ \Rightarrow ۰ < x^۲ < ۱ \Rightarrow [x^۲] = ۰ \Rightarrow y = -\sqrt{-x}$$

$$-\sqrt{۲} < x < -۱ \Rightarrow ۱ < x^۲ < ۲ \Rightarrow [x^۲] = ۱ \Rightarrow y = -\sqrt{-x-۱}$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} -\sqrt{-x} & ; x \in (-۱, ۰) \\ -\sqrt{-x-۱} & ; x \in (-\sqrt{۲}, -۱) \\ ۰ & ; x = ۰, -۱ \end{cases}$$



کمترین فاصله را می‌خواهیم، بنابراین تنها فاصلهٔ $y_۱$ تا $y_۳$ را در نظر می‌گیریم.
نقطهٔ $A(x, -\sqrt{-x})$ را روی $y_۱$ در نظر می‌گیریم:

$$A(x, -\sqrt{-x}) \xrightarrow{x-y-۱=۰} AH = \frac{|x + \sqrt{-x} - ۱|}{\sqrt{۱+۱}} \quad (*)$$

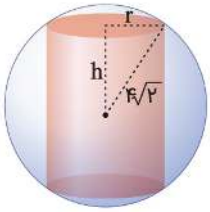
$$\Rightarrow AH' = \frac{|۱ + \frac{-۱}{۲\sqrt{-x}}|}{\sqrt{۲}} = ۰$$

$$\Rightarrow ۱ - \frac{۱}{۲\sqrt{-x}} = ۰ \Rightarrow \sqrt{-x} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow x = -\frac{۱}{۴}$$

$$\xrightarrow{(*)} AH = \frac{|-\frac{۱}{۴} + \sqrt{\frac{۱}{۴}} - ۱|}{\sqrt{۲}} = \frac{|-\frac{۱}{۴} - \frac{۱}{۲}|}{\sqrt{۲}} = \frac{۳}{۴\sqrt{۲}} = \frac{۳\sqrt{۲}}{۸}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۲

۱۲ گزینه ۲



$$h^۲ + r^۲ = ۳۲ \Rightarrow h = \sqrt{۳۲ - r^۲}$$

$$\text{مساحت جانبی} : f = ۲\pi r \times ۲h = ۴\pi r\sqrt{۳۲ - r^۲} = ۴\pi\sqrt{۳۲r^۲ - r^۴}$$

$$f' = ۴\pi \times \frac{۶۴r - ۴r^۳}{۲\sqrt{۳۲r^۲ - r^۴}} = ۰ \quad \begin{cases} r = ۰ & \text{نادرست} \\ r = ۴ & \text{درست} \end{cases}$$

اگر $r = ۴$ باشد $h = ۴$ است.

$$\max(S) = ۴\pi(۴)(۴) = ۶۴\pi$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

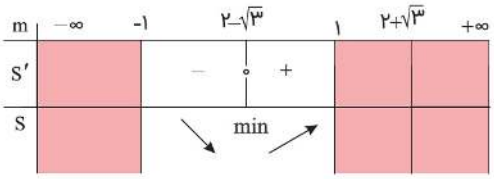
۱۳ گزینه ۴

$$\Delta_f = (۲ - m)^۲ - ۲۰(m^۲ - ۱) > ۰ \Rightarrow ۱۹m^۲ + ۴m - ۲۴ < ۰$$

$$\Rightarrow \frac{-۲ - ۲\sqrt{۱۱۵}}{۱۹} < m < \frac{-۲ + ۲\sqrt{۱۱۵}}{۱۹} \quad , m \in (-۱, ۱) \Rightarrow m \in (-۱, ۱)$$

$$S = \alpha + \beta = \frac{m - ۲}{m^۲ - ۱} \Rightarrow S' = \frac{m^۲ - ۱ - ۲m(m - ۲)}{(m^۲ - ۱)^۲} = ۰$$

$$\Rightarrow -m^۲ + ۴m - ۱ = ۰ \Rightarrow m^۲ - ۴m + ۱ = ۰ \Rightarrow m = \frac{۲ \pm \sqrt{۴ - ۱}}{۱} = ۲ \pm \sqrt{۳}$$

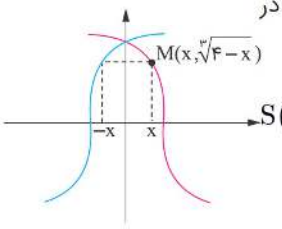


$$\Rightarrow m = ۲ - \sqrt{۳} \ , \ \Delta_f > ۰ \ \text{min}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۲

۱۴ گزینه ۴

نقطهٔ M را به‌صورت پارامتری روی تابع $y = \sqrt[۳]{۴ - x}$ انتخاب می‌کنیم. مساحت مستطیل را تابعی از x در نظر می‌گیریم.



$$S(x) = ۲x\sqrt[۳]{۴ - x} = ۲\sqrt[۳]{۴x^۳ - x^۴}$$

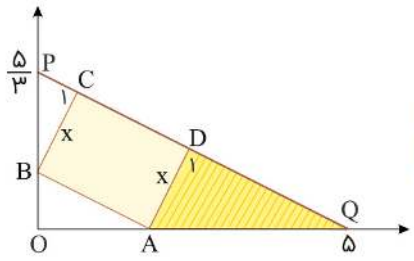
کافی است $۴x^۳ - x^۴$ را ماکزیمم کنیم.

$$g(x) = ۴x^۳ - x^۴ \Rightarrow g'(x) = ۱۲x^۲ - ۴x^۳ = ۰ \xrightarrow{x>۰} x = ۳$$

$$S_{max} = S(۳) = ۲ \times ۳\sqrt[۳]{۴ - ۳} = ۶$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

۱۵ گزینه ۲



$$\begin{cases} C_1 = O = 90^\circ \\ \hat{P} = \hat{P} \end{cases} \Rightarrow P\overset{\triangle}{B}C \sim O\overset{\triangle}{P}Q \Rightarrow \frac{PC}{OP} = \frac{BC}{OQ}$$

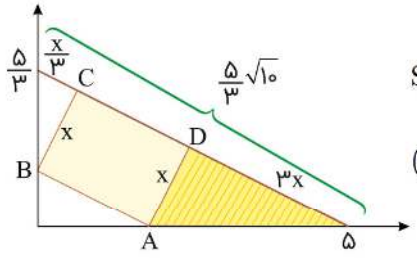
$$\Rightarrow PC = OP \times \frac{BC}{OQ} = \frac{5}{3} \times \frac{x}{5} = \frac{x}{3}$$

$$\begin{cases} D_1 = O = 90^\circ \\ \hat{Q} = \hat{Q} \end{cases} \Rightarrow A\overset{\triangle}{D}Q \sim O\overset{\triangle}{P}Q \Rightarrow \frac{DQ}{OQ} = \frac{AD}{OP}$$

$$\Rightarrow DQ = OQ \times \frac{AD}{OP} = 5 \times \frac{x}{\frac{5}{3}} = 3x$$

$$PQ = \sqrt{25 + \frac{25}{9}} = \sqrt{\frac{10 \times 25}{9}} = \frac{5}{3}\sqrt{10}$$

$$CD = \frac{5}{3}\sqrt{10} - \frac{x}{3} - 3x$$



$$S_{ABCD} = x \times CD = x\left(\frac{5}{3}\sqrt{10} - \frac{x}{3} - 3x\right) = -\frac{10}{3}x^2 + \frac{5}{3}\sqrt{10}x$$

$$(S_{ABCD})' = -\frac{20}{3}x + \frac{5}{3}\sqrt{10} \Rightarrow -\frac{20}{3}x + \frac{5}{3}\sqrt{10} = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{-\frac{5}{3}\sqrt{10}}{-\frac{20}{3}} = \frac{\sqrt{10}}{4}$$

حداکثر S در $x = \frac{\sqrt{10}}{4}$ رخ می‌دهد، پس مساحت هاشورخورده برابر است با:

$$\frac{1}{2}x \times 3x = \frac{3}{2}x^2 = \frac{3}{2} \times \frac{10}{16} = \frac{15}{16}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۱۶ گزینه ۳

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۵

گام اول

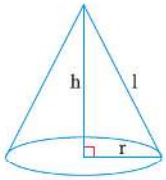
الف) حجم مخروطی به شعاع قاعدهٔ r و ارتفاع h برابر است با:

$$V_{\text{مخروط}} = \frac{۱}{۳}\pi r^۲ h$$

ب) مقدار جنس مصرفی برای ساخت یک مخروط معادل مساحت جانبی آن است.

ج) مساحت جانبی مخروطی به شکل زیر برابر است با:

$$S = \pi r l$$



گام دوم

برای اینکه در ساخت یک قیف مخروطی شکل با حجم ثابت کمترین مقدار جنس مصرف شود باید مساحت جانبی آن را مینیمم کنیم.

باتوجه‌به اینکه حجم مخروط برابر $\frac{\pi}{۳}$ است، رابطه‌ای بین شعاع قاعدهٔ مخروط و ارتفاع مخروط به دست می‌آوریم:

$$V = \frac{۱}{۳}\pi r^۲ h = \frac{\pi}{۳} \Rightarrow r^۲ h = ۱ \Rightarrow r^۲ = \frac{۱}{h} \Rightarrow r = \frac{۱}{\sqrt{h}} \quad (I)$$

برای محاسبهٔ مساحت جانبی مخروط ابتدا لازم است اندازهٔ l را به دست آوریم. با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس داریم:

$$l^۲ = r^۲ + h^۲ \Rightarrow l = \sqrt{r^۲ + h^۲} \quad (II)$$

اکنون با استفاده از رابطهٔ مساحت جانبی و با جایگذاری دو رابطهٔ (I) و (II) در آن داریم:

$$S = \pi r l \xrightarrow{(II)} S = \pi r\sqrt{r^۲ + h^۲} \xrightarrow{(I)} S = \pi \times \frac{۱}{\sqrt{h}} \times \sqrt{\frac{۱}{h} + h^۲} = \frac{\pi\sqrt{h^۳ + ۱}}{h}$$

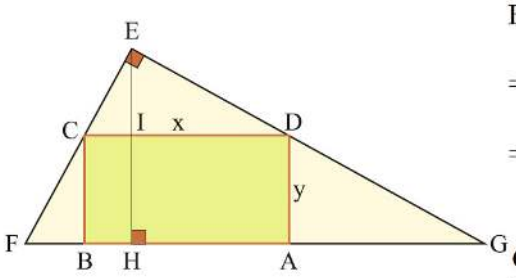
برای مینیمم کردن مساحت جانبی، از S نسبت به h مشتق گرفته و برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$S' = \pi \times \frac{\frac{۳h^۲}{۲\sqrt{h^۳ + ۱}} \times h - \sqrt{h^۳ + ۱}}{h^۲} = \frac{\pi}{h^۲}\left(\frac{۳h^۳ - ۲h^۳ - ۲}{۲\sqrt{h^۳ + ۱}}\right) = \frac{\pi}{h^۲}\left(\frac{h^۳ - ۲}{۲\sqrt{h^۳ + ۱}}\right) = ۰$$

$$\Rightarrow h^۳ - ۲ = ۰ \Rightarrow h^۳ = ۲ \Rightarrow h = \sqrt[۳]{۲}$$

بنابراین به ازای ارتفاع $h = \sqrt[۳]{۲}$ در ساخت یک قیف مخروطی شکل با حجم ثابت $\frac{\pi}{۳}$، کمترین مقدار جنس مصرف می‌شود.

۱۷ گزینه ۴



$$EF = a\,,\ EG = ۲a$$

$$\Rightarrow FG = \sqrt{a^۲ + ۴a^۲} = \sqrt{۵}a$$

$$\Rightarrow EF \times EG = EH \times FG \Rightarrow EH = \frac{۲a \times a}{\sqrt{۵}a} = \frac{۲a}{\sqrt{۵}}$$

$$\frac{CD}{FG} = \frac{EI}{EH} \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{۵}a} = \frac{\frac{۲a}{\sqrt{۵}} - y}{\frac{۲a}{\sqrt{۵}}} \Rightarrow \frac{۲x}{۵} = \frac{۲a}{\sqrt{۵}} - y \Rightarrow y = \frac{۲a}{\sqrt{۵}} - \frac{۲x}{۵}$$

$$S = xy = x\left(\frac{۲a}{\sqrt{۵}} - \frac{۲x}{۵}\right) = \frac{۲ax}{\sqrt{۵}} - \frac{۲x^۲}{۵}$$

$$S' = ۰ \Rightarrow \frac{۲a}{\sqrt{۵}} - \frac{۴x}{۵} = ۰ \Rightarrow x = \frac{\sqrt{۵}}{۲}a \Rightarrow y = \frac{۲a}{\sqrt{۵}} - \frac{۲(\frac{\sqrt{۵}}{۲}a)}{۵} = \frac{a}{\sqrt{۵}}$$

$$\frac{x}{y} = \frac{\frac{\sqrt{۵}}{۲}a}{\frac{a}{\sqrt{۵}}} = \frac{۵}{۲} = ۲/۵$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

۱۸ گزینه ۲

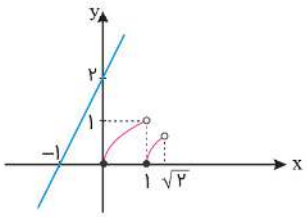
دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{x-[x^{۲}]}$ به‌صورت $D_f=[۰,\sqrt{۲})$ است. داریم:

$$\begin{cases} ۰\le x<۱ \Rightarrow f(x)=\sqrt{x} \\ ۱\le x<\sqrt{۲} \Rightarrow f(x)=\sqrt{x-۱} \end{cases}$$

حال نمودار خط و منحنی را رسم می‌کنیم:

$$y=۲x+۲$$

x	۰	−۱
y	۲	۰



بنابراین به نظر می‌رسد کوتاه‌ترین فاصله مربوط به $۰\le x<۱$ است که منحنی به‌صورت $y=\sqrt{x}$ می‌باشد. نقطهٔ دلخواه روی منحنی به‌صورت $A(x,\sqrt{x})$ است، پس:

$$AH=\frac{|ax_۰+by_۰+c|}{\sqrt{a^{۲}+b^{۲}}}=\frac{|۲x-\sqrt{x}+۲|}{\sqrt{۵}}$$

قدر مطلق در $y'=۰$ اثری ندارد، پس:

$$AH'=\frac{۱}{\sqrt{۵}}(۲-\frac{۱}{۲\sqrt{x}})=۰\Rightarrow\sqrt{x}=\frac{۱}{۴}\Rightarrow x=\frac{۱}{۱۶}$$

پس:

$$AH_{min}=\frac{|\frac{۱}{۸}-\frac{۱}{۴}+۲|}{\sqrt{۵}}=\frac{\frac{۱۵}{۸}}{\sqrt{۵}}\times\frac{۱۵\sqrt{۵}}{۸\times۵}=\frac{۳\sqrt{۵}}{۸}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۲

۱۹ گزینه ۳

$$A \text{ نقطه} : (a, a^۲)$$
$$A' \text{ نقطه} : (a^۲, a)$$
$$y = x \text{ با } f \text{ تقاطع} \Rightarrow x^۲ = x \Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \\ x = ۱ \end{cases} \Rightarrow a \in (۰, ۱)$$
$$AA' = \sqrt{(a^۲ - a)^۲ + (a - a^۲)^۲} = \sqrt{۲}\,|a^۲ - a|$$
$$\xrightarrow{a \in (۰,۱)} \sqrt{۲}\,(a - a^۲) = -\sqrt{۲}a^۲ + \sqrt{۲}a$$
$$\xrightarrow{\max} \frac{-\Delta}{۴a} = -\frac{\sqrt{۲}^۲ - ۰}{۴(-\sqrt{۲})} = \frac{۲}{-۴\sqrt{۲}} = -\frac{۱}{۲\sqrt{۲}} = -\frac{\sqrt{۲}}{۴}$$

چون طول پاره‌خط مدنظر است، پس مثبت درنظر می‌گیریم.
تذکر: با استفاده از مشتق AA' نیز می‌توان به جواب رسید.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

۲۰ گزینه ۱

نقطهٔ $B(x, \sqrt{۲x + ۷})$ را روی منحنی در نظر می‌گیریم. فاصلهٔ نقطهٔ $A(۵, ۰)$ را از نقطهٔ B محاسبه می‌کنیم:

$$AB = \sqrt{(x - ۵)^۲ + (\sqrt{۲x + ۷} - ۰)^۲}$$
$$= \sqrt{x^۲ - ۱۰x + ۲۵ + ۲x + ۷} = \sqrt{x^۲ - ۸x + ۳۲}$$

برای به دست آوردن کمترین فاصله، از AB مشتق می‌گیریم:

$$(AB)' = \frac{۲x - ۸}{۲\sqrt{x^۲ - ۸x + ۳۲}} = \frac{x - ۴}{\sqrt{x^۲ - ۸x + ۳۲}}$$
$$(AB)' = ۰ \Rightarrow x = ۴ \Rightarrow B(۴, \sqrt{۱۵})$$

کمترین فاصلهٔ نقطهٔ A از منحنی، برابر است با فاصلهٔ دو نقطهٔ A و B. درنتیجه داریم:

$$A(۵, ۰), B(۴, \sqrt{۱۵}) \Rightarrow AB = \sqrt{(۵ - ۴)^۲ + (۰ - \sqrt{۱۵})^۲} = ۴$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۲۱ گزینه ۲

طول ضلع قاعده را a و ارتفاع را h می‌نامیم، داریم:

$$V = a^۲h = ۴ \Rightarrow h = \frac{۴}{a^۲}$$

مقدار حلب برابر $۴ah + a^۲$ است:

$$S = ۴ah + a^۲ = \frac{۱۶}{a} + a^۲$$

مشتق می‌گیریم و برابر صفر می‌گذاریم:

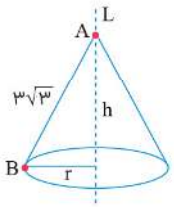
$$S = \frac{۱۶}{a} + a^۲ \Rightarrow S' = \frac{-۱۶}{a^۲} + ۲a = ۰ \Rightarrow a = ۲ \Rightarrow h = ۱$$

$$S = ۸ + ۴ = ۱۲$$

پس مقدار حلب برابر ۱۲ است.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

۲۲ گزینه ۲



$$r^۲ + h^۲ = (۳\sqrt{۳})^۲ = ۲۷ \Rightarrow r^۲ = ۲۷ - h^۲$$

$$V = \frac{۱}{۳}\pi r^۲h = \frac{\pi}{۳}(۲۷ - h^۲)h = \frac{\pi}{۳}(۲۷h - h^۳)$$

$$V' = ۰ \Rightarrow ۲۷ - ۳h^۲ = ۰ \Rightarrow h^۲ = ۹ \Rightarrow h = ۳$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

۲۳ گزینه ۲

نقطهٔ A را $A(x, \sqrt[3]{-x})$ با فرض $x \in [0,1]$ در نظر می‌گیریم، دراین‌صورت $A'(\sqrt[3]{x}, -x)$ خواهد بود.

$$AA' = \sqrt{(x - \sqrt[3]{x})^2 \times 2} = \sqrt{2}|\underbrace{x - \sqrt[3]{x}}_{g(x)}|$$

$$g(x) = x - \sqrt[3]{x}\ ,\ x \in [0,1]$$

حال بیشترین مقدار $g(x)$ را حساب می‌کنیم:

$$g'(x) = 1 - \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} = 0 \Rightarrow 3\sqrt[3]{x^2} = 1 \Rightarrow \sqrt[3]{x^2} = \frac{1}{3} \Rightarrow x^2 = \frac{1}{27} \Rightarrow x = \frac{1}{3\sqrt{3}}$$

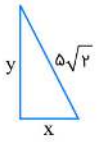
$$g(0) = g(1) = 0\ ,\ g(\frac{1}{3\sqrt{3}}) = \frac{1}{3\sqrt{3}} - \sqrt[3]{\frac{1}{3\sqrt{3}}} = \frac{1}{3\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{-2}{3\sqrt{3}}$$

$$\max(AA') = \sqrt{2}|\frac{-2}{3\sqrt{3}}| = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{4}{3\sqrt{6}}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

۲۴ گزینه ۱

مثلث قائم‌الزاویه‌ای با طول اضلاع قائم x و y، به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم. طبق رابطهٔ فیثاغورس داریم:



$$x^2 + y^2 = (5\sqrt{2})^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 50$$

$$\Rightarrow y^2 = 50 - x^2 \Rightarrow y = \sqrt{50 - x^2}$$

$$\Rightarrow f = 3x + 4y = 3x + 4\sqrt{50 - x^2}$$

برای یافتن ماکزیمم مقدار تابع $f(x) = 3x + 4\sqrt{50 - x^2}$، مشتق آن را مساوی صفر قرار می‌دهیم.

$$f'(x) = 3 + 4(\frac{-2x}{2\sqrt{50 - x^2}}) = 3 - \frac{4x}{\sqrt{50 - x^2}}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3 = \frac{4x}{\sqrt{50 - x^2}} \Rightarrow 3\sqrt{50 - x^2} = 4x \xrightarrow[\text{به توان ۲}]{x>0} 9(50 - x^2) = 16x^2$$

$$\Rightarrow 450 - 9x^2 = 16x^2 \Rightarrow 25x^2 = 450 \Rightarrow x^2 = 18 \Rightarrow x = \sqrt{18}$$

$$y = \sqrt{50 - x^2} = \sqrt{50 - 18} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

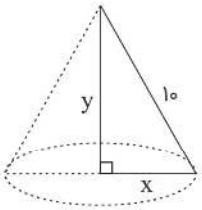
بنابراین:

$$f_{max} = 3x + 4y = 3(3\sqrt{2}) + 4(4\sqrt{2}) = 9\sqrt{2} + 16\sqrt{2} = 25\sqrt{2}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۰

۲۵ گزینه ۴

در مثلث قائم‌الزاویه به طول اضلاع قائم x و y داریم:



$$x^۲ + y^۲ = ۱۰۰ \Rightarrow x^۲ = ۱۰۰ - y^۲ \quad (*)$$

از دوران مثلث حول ضلع قائمهٔ آن، مخروط تشکیل می‌شود، بنابراین داریم:

$$V = \frac{۱}{۳}\pi x^۲ y \xrightarrow{(*)} V = \frac{۱}{۳}\pi(۱۰۰ - y^۲)y = \frac{\pi}{۳}(۱۰۰y - y^۳)$$

حال برای به دست آوردن طول اضلاع قائم، از V مشتق می‌گیریم:

$$V' = \frac{\pi}{۳}(۱۰۰ - ۳y^۲) \Rightarrow \frac{\pi}{۳}(۱۰۰ - ۳y^۲) = ۰$$

$$\Rightarrow ۱۰۰ - ۳y^۲ = ۰ \Rightarrow y^۲ = \frac{۱۰۰}{۳}$$

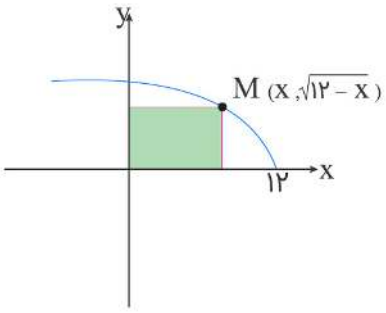
$$\Rightarrow x^۲ = ۱۰۰ - y^۲ \Rightarrow x^۲ = ۱۰۰ - \frac{۱۰۰}{۳} = \frac{۳۰۰ - ۱۰۰}{۳} = \frac{۲۰۰}{۳}$$

$$\Rightarrow \frac{x^۲}{y^۲} = \frac{\frac{۲۰۰}{۳}}{\frac{۱۰۰}{۳}} = ۲ \Rightarrow \frac{x}{y} = \sqrt{۲}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

۲۶ گزینه ۳

نمودار این تابع را رسم می‌کنیم:



مساحت مستطیل ساخته‌شده برابر $S(x) = x\sqrt{۱۲ - x}$ است.

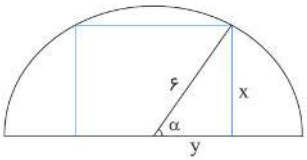
$$S' = \sqrt{۱۲ - x} - \frac{x}{۲\sqrt{۱۲ - x}} = ۰ \Rightarrow \frac{۲(۱۲ - x) - x}{۲\sqrt{۱۲ - x}} = ۰$$

$$۲۴ - ۲x - x = ۰ \Rightarrow x = ۸ \Rightarrow S_{max} = ۸\sqrt{۱۲ - ۸} = ۱۶$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۲۷ گزینه ۴

راه‌حل اول:

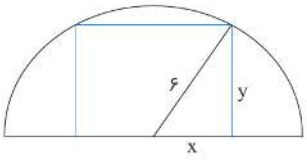


$$\sin\alpha = \frac{x}{۶} \Rightarrow x = ۶\sin\alpha$$
$$\cos\alpha = \frac{y}{۶} \Rightarrow y = ۶\cos\alpha$$

مساحت مستطیل : $S = x(۲y) = ۲(۳۶)\sin\alpha\cos\alpha = ۳۶\sin۲\alpha$

مساحت وقتی ماکزیمم است که $\sin۲\alpha = ۱$ باشد. بنابراین: $S_{max} = ۳۶$

راه‌حل دوم:



$$x^۲ + y^۲ = ۳۶ \Rightarrow y = \sqrt{۳۶ - x^۲}$$
$$S = ۲xy = ۲x\sqrt{۳۶ - x^۲}$$
$$S' = ۲\sqrt{۳۶ - x^۲} + \frac{-۴x^۲}{۲\sqrt{۳۶ - x^۲}} = ۰$$
$$\Rightarrow x^۲ = ۳۶ - x^۲ \Rightarrow x^۲ = ۱۸ \Rightarrow x = ۳\sqrt{۲}$$
$$\Rightarrow y = \sqrt{۱۸} = ۳\sqrt{۲}$$
$$S_{max} = ۲ \times ۳\sqrt{۲} \times ۳\sqrt{۲} = ۳۶$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

سوالات بهینه سازی دشوارتر هردو رشته و ابتدای این قسمت کمی سادت که تست های اول آن حل شد. در ادامه چند تست دیگری میبینید.

تعرین: کوتاه‌ترین فاصلهٔ نقطهٔ $A(۵,۰)$ از نقاط منحنی به معادلهٔ $y=\sqrt{۲x+۷}$، کدام است؟ (سراسری تجربی خارج از کشور ۹۹)

۱) ۴ ۲) ۴/۵ ۳) ۵ ۴) $۳\sqrt{۲}$

پاسخ: گزینهٔ «۱» ـ نقطهٔ $B(x,\sqrt{۲x+۷})$ را روی منحنی در نظر می‌گیریم. فاصلهٔ نقطهٔ $A(۵,۰)$ را از نقطهٔ B محاسبه می‌کنیم:

$$AB=\sqrt{(x-۵)^۲+(\sqrt{۲x+۷}-۰)^۲}=\sqrt{x^۲-۱۰x+۲۵+۲x+۷}=\sqrt{x^۲-۹x+۳۲}$$

برای به دست آوردن کم‌ترین فاصله، از AB مشتق می‌گیریم:

$$(AB)'=\frac{۲x-۸}{۲\sqrt{x^۲-۸x+۳۲}}=\frac{x-۴}{\sqrt{x^۲-۸x+۳۲}}$$

$$(AB)'=۰ \Rightarrow x=۴ \Rightarrow B(۴,\sqrt{۱۵})$$

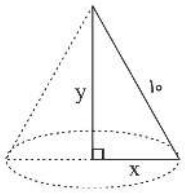
کم‌ترین فاصلهٔ نقطهٔ A از منحنی، برابر است با فاصلهٔ دو نقطهٔ A و B. در نتیجه داریم:

$$A(۵,۰), B(۴,\sqrt{۱۵}) \Rightarrow AB=\sqrt{(۵-۴)^۲+(۰-\sqrt{۱۵})^۲}=۴$$

تعـرین: از بین مثلث‌های قائم‌الزاویه با اندازهٔ وتر ۱۰ واحد، دو ضلع قائم با کدام نسبت انتخاب شود تا حجم حاصل از دوران این مثلث حول ضلع قائم، بیشترین باشد؟ (سراسری تجربی ۹۹)

۱) $\frac{۲}{۱}$ ۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۱}$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $\frac{\sqrt{۲}}{۱}$

پاسخ: گزینهٔ «۳» ـ در مثلث قائم‌الزاویه به طول اضلاع قائم x و y داریم:



$$x^۲+y^۲=۱۰۰ \Rightarrow x^۲=۱۰۰-y^۲ \quad (*)$$

از دوران مثلث حول ضلع قائمهٔ آن، مخروط تشکیل می‌شود، بنابراین داریم:

$$V=\frac{۱}{۳}\pi x^۲y \xrightarrow{(*)} V=\frac{۱}{۳}\pi(۱۰۰-y^۲)y=\frac{\pi}{۳}(۱۰۰y-y^۳)$$

حال برای به دست آوردن طول اضلاع قائم، از V مشتق می‌گیریم:

$$V'=\frac{\pi}{۳}(۱۰۰-۳y^۲) \Rightarrow \frac{\pi}{۳}(۱۰۰-۳y^۲)=۰ \Rightarrow ۱۰۰-۳y^۲=۰ \Rightarrow y^۲=\frac{۱۰۰}{۳}$$

$$\Rightarrow x^۲=۱۰۰-y^۲ \Rightarrow x^۲=۱۰۰-\frac{۱۰۰}{۳}=\frac{۳۰۰-۱۰۰}{۳}=\frac{۲۰۰}{۳} \Rightarrow \frac{x^۲}{y^۲}=\frac{\frac{۲۰۰}{۳}}{\frac{۱۰۰}{۳}}=۲ \Rightarrow \frac{x}{y}=\sqrt{۲}$$

تمرین: اگر x و y دو ضلع قائم از مثلثی به طول وتر $5\sqrt{2}$ باشند، بیشترین مقدار $3x+4y$ کدام است؟ *(سراسری ریاضی ۹۰)*

۱) $25\sqrt{2}$ ۲) ۳۶ ۳) $28\sqrt{2}$ ۴) ۴۰

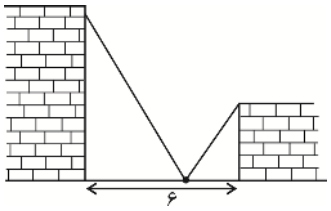
پاسخ: گزینه‌ی «۱» ـ x و y دو ضلع قائم مثلث قائم‌الزاویه با وتر $5\sqrt{2}$ هستند، پس $x^2+y^2=50$ و می‌خواهیم $3x+4y$ ماکسیمم شود. ضابطه‌ی $A=3x+4y$ را به یک ضابطه‌ی یک متغیری تبدیل می‌کنیم:

$$x^2+y^2=50 \Rightarrow y^2=50-x^2 \Rightarrow y=\sqrt{50-x^2} \Rightarrow A=3x+4\sqrt{50-x^2}$$

$$A'=0 \Rightarrow 3-\frac{4x}{\sqrt{50-x^2}}=0 \Rightarrow 3\sqrt{50-x^2}=4x \Rightarrow 9(50-x^2)=16x^2 \Rightarrow 50-x^2=\frac{16}{9}x^2$$

$$\Rightarrow \frac{25}{9}x^2=50 \Rightarrow x^2=18 \Rightarrow x=3\sqrt{2} \Rightarrow \max(A)=3(3\sqrt{2})+4\sqrt{50-18}=3(3\sqrt{2})+4(4\sqrt{2})=25\sqrt{2}$$

تمرین: در شکل روبه‌رو می‌خواهیم از نقطه‌ی بین دو دیوار ۲ و ۴ متری که به فاصله‌ی ۶ متری هم قرار دارند، دو پله تا بالای دیوارها بسازیم. کوتاه‌ترین مجموع طول پله‌ها برابر کدام است؟



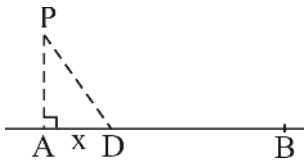
۱) ۸

۲) $8\sqrt{2}$

۳) $6\sqrt{2}$

۴) ۱۲

تمرین: در شکل مقابل قایقی در نقطهٔ P قرار دارد که نزدیک‌ترین فاصلهٔ آن از ساحل ۴ کیلومتر است. اگر سرعت حرکت قایق $3\ km/h$ و سرعت پیاده‌روی در ساحل $5\ km/h$ باشد، برای این که فردی که درون قایق است در کم‌ترین زمان ممکن به نقطهٔ B به فاصلهٔ ۱۰ کیلومتری از نقطهٔ A برسد، باید در نقطه‌ای با چه فاصله (x) از نقطهٔ A پیاده شود؟ (کتاب درسی)



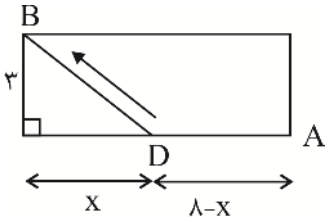
۱) ۲

۲) ۳

۳) ۴

۴) ۵

تمرین: در شکل زیر مورچه‌ای در یکی از رأس‌های یک صفحهٔ روغنی لغزنده ایستاده است. او می‌خواهد از نقطهٔ A به نقطهٔ B برود. اگر سرعت حرکت مورچه روی صفحهٔ لغزنده $4\ cm/s$ و روی سطح کنار صفحه $5\ cm/s$ باشد، کم‌ترین زمانی که مورچه می‌تواند به نقطهٔ B برسد، کدام است؟ (کتاب درسی)



۱) ۲ ثانیه

۲) ۲/۰۵ ثانیه

۳) ۲/۲ ثانیه

۴) ۲/۱۵ ثانیه

تمرین: بیشترین مساحت مستطیلی که دو ضلع آن بر روی محورهای مختصات و رأس چهارم آن بر روی منحنی به معادلهٔ $y = \sqrt{12 - x}$،

در ناحیهٔ اول واقع شود، کدام است؟ (تجربی ۹۸)

۱) $8\sqrt{2}$ ۲) $8\sqrt{3}$ ۳) ۱۶ ۴) ۱۸

تمرین: بیشترین مساحت مستطیلی که یک ضلع آن بر قطر نیم‌دایره به شعاع ۶ واحد و دو رأس دیگر آن روی این نیم‌دایره باشد، کدام است؟ (تجربی خارج ۹۸)

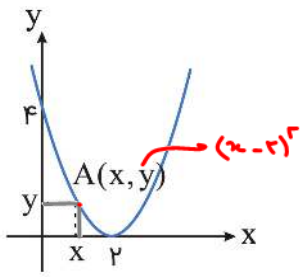
۱) ۱۸ ۲) ۲۴ ۳) ۲۷ ۴) ۳۶

مثل حل شده در بهینه‌سازی

تمرین: دو ضلع از مستطیلی منطبق بر محورهای مختصات و رأس چهارم آن واقع بر منحنی به معادلهٔ $y=(x-2)^2$ روی بازهٔ $[0,2]$ است، بیشترین مساحت این مستطیل کدام است؟ (سراسری ریاضی)

۱) $\frac{28}{27}$ ۲) $\frac{10}{9}$ ۳) $\frac{32}{27}$ ۴) $\frac{11}{9}$

تمرین: گزینهٔ «۳» ـ نقطهٔ $A(x,y)$ روی منحنی $y=(x-2)^2$ را رأس چهارم مستطیل در نظر می‌گیریم، پس این رأس دارای مختصات $A(x,(x-2)^2)$ است. با رسم شکلی ساده، مستطیل ایجادشده را مشخص می‌کنیم.



$S=xy=x(x-2)^2=x(x^2-4x+4)=x^3-4x^2+4x$

$S'=3x^2-8x+4=0$

$x=\frac{2}{3}$

$S_{Max}=x(x-2)^2=\frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}-2\right)^2$

$=\frac{2}{3}\left(-\frac{4}{3}\right)^2=\frac{32}{27}$

مساحت این مستطیل برابر است با:

$$S = xy \xrightarrow{y_A=(x-2)^2} S = x(x-2)^2 \;;\; 0 < x < 2$$

$$S'_x = (x-2)^2 + 2x(x-2) = (x-2)(x-2+2x) = (x-2)(3x-2)$$

$$S'_x = 0 \Rightarrow (x-2)(3x-2) = 0 \xrightarrow{x\neq 2} 3x-2 = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$$

بنابراین بیشترین مساحت مستطیل به ازای $x = \frac{2}{3}$ به دست می‌آید:

$$S_{max} = x(x-2)^2 = (\frac{2}{3})(\frac{2}{3}-2)^2 = \frac{2}{3}(-\frac{4}{3})^2 = \frac{2}{3}\times\frac{16}{9} = \frac{32}{27}$$

تمرین: در ساخت یک قیف به شکل مخروط قائم به حجم $\frac{\pi}{3}$، با کدام ارتفاع، کم‌ترین مقدار جنس مصرف می‌شود؟ (سراسری ریاضی ۹۵)

۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۲) ۱ ۳) $\sqrt[3]{2}$ ۴) $\sqrt{2}$

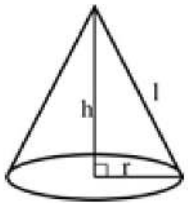
پاسخ: گزینهٔ «۳»

نکته اول:

الف) حجم مخروطی به شعاع قاعدهٔ r و ارتفاع h برابر است با: $V_{\text{مخروط}} = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

ب) مقدار جنس مصرفی برای ساخت یک مخروط معادل مساحت جانبی آن است.

ج) مساحت جانبی مخروطی به شکل زیر برابر است با: $S = \pi r l$



نکته دوم: برای این که در ساخت یک قیف مخروطی شکل با حجم ثابت کم‌ترین مقدار جنس مصرف شود، باید مساحت جانبی آن را مینیمم کنیم. با توجه به این که حجم مخروط برابر $\frac{\pi}{3}$ است، رابطه‌ای بین شعاع قاعدهٔ مخروط و ارتفاع مخروط به دست می‌آوریم:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \boxed{r^2 h = 1} \Rightarrow \boxed{r^2 = \frac{1}{h}} \Rightarrow \boxed{r = \frac{1}{\sqrt{h}}} \quad (I)$$

برای محاسبهٔ مساحت جانبی مخروط ابتدا لازم است اندازهٔ l را به دست آوریم. با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس داریم:

$$l^2 = r^2 + h^2 \Rightarrow l = \sqrt{r^2 + h^2} \quad (II)$$

اکنون با استفاده از رابطهٔ مساحت جانبی و با جایگذاری دو رابطهٔ (I) و (II) در آن داریم:

سطح جانبی مخروط

$$\boxed{S = \pi r l} \xrightarrow{(II)} S = \pi r\sqrt{r^2 + h^2} \xrightarrow{(I)} S = \pi \times \frac{1}{\sqrt{h}} \times \sqrt{\frac{1}{h} + h^2} = \frac{\pi\sqrt{h^3+1}}{h}$$

برای مینیمم کردن مساحت جانبی، از S نسبت به h مشتق گرفته و برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$S' = \pi \times \frac{\frac{3h^2}{2\sqrt{h^3+1}} \times h - \sqrt{h^3+1}}{h^2} = \frac{\pi}{h^2}\frac{3h^3 - 2h^3 - 2}{(2\sqrt{h^3+1})} = \frac{\pi}{h^2}\frac{h^3-2}{(2\sqrt{h^3+1})} = 0 \Rightarrow h^3 - 2 = 0 \Rightarrow h^3 = 2$$

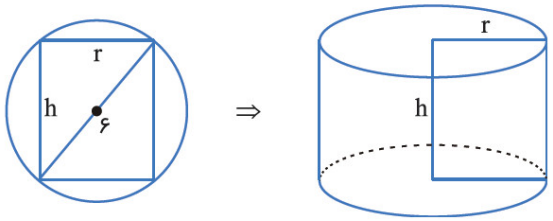
$$\Rightarrow h = \sqrt[3]{2}$$

بنابراین به ازای ارتفاع $h = \sqrt[3]{2}$ در ساخت یک قیف مخروطی شکل با حجم ثابت $\frac{\pi}{3}$، کم‌ترین مقدار جنس مصرف می‌شود.

تمرین: مستطیل‌های محاط در یک دایره به قطر ۶ واحد را حول یک ضلع خود دوران می‌دهیم تا استوانه‌های قائم ایجاد شود. وقتی حجم این استوانه‌ها بیشترین مقدار را دارد، ارتفاع آن کدام است؟ *(سراسری ریاضی)*

۱) ۴ ۲) $2\sqrt{3}$ ۳) $2\sqrt{6}$ ۴) $3\sqrt{2}$

پاسخ: گزینهٔ «۲»



می‌دانیم قطر مستطیل محاط درون دایره، برابر با قطر دایره است پس طبق قضیهٔ فیثاغورس داریم:

$$h^2 + r^2 = 6^2 \Rightarrow h^2 + r^2 = 36 \Rightarrow r = \sqrt{36 - h^2}$$

حجم استوانهٔ حاصل از دوران مستطیل برابر است با:

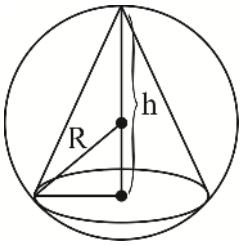
$$V = \pi r^2 h = \pi(36 - h^2)h = 36\pi h - \pi h^3$$

می‌خواهیم حجم استوانه بیشترین مقدار باشد، پس ابتدا معادلهٔ $V'_h = 0$ را حل می‌کنیم:

$$V'_h = 36\pi - 3\pi h^2$$

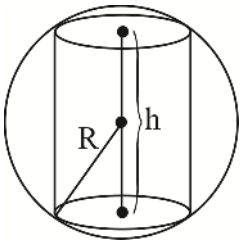
$$V'_h = 0 \Rightarrow 36\pi - 3\pi h^2 = 0 \Rightarrow 3\pi h^2 = 36\pi \Rightarrow h^2 = 12 \Rightarrow h = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

ارتفاع بزرگ‌ترین مخروط دواری که می‌تواند درون کره به شعاع R محاط شود، $\frac{4}{3}R$ است.



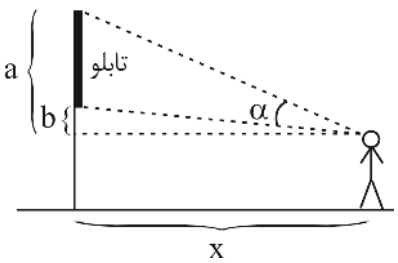
$$h = \frac{4}{3}R$$

ارتفاع بزرگ‌ترین استوانه‌ای که می‌تواند درون کره به شعاع R محاط شود $\frac{2}{\sqrt{3}}R$ است.



$$h = \frac{2}{\sqrt{3}}R$$

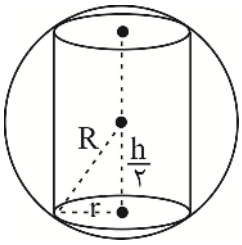
فرض کنید ناظری می‌خواهد تابلویی را که فاصلهٔ بالاترین و پایین‌ترین قسمت آن از سطح دید خود، به ترتیب a و b متر است، نگاه کند. بهترین زاویهٔ دید وقتی ایجاد می‌شود که فاصلهٔ ناظر تا تابلو برابر واسطهٔ هندسی a و b یعنی $\sqrt{ab}$ باشد، $x = \sqrt{ab}$.



تمرین: حجم بزرگ‌ترین استوانه‌ای که درون کره به شعاع R محاط شود، کدام است؟

۱) $\frac{۴\pi R^۲}{۳}$ ۲) $\frac{۴\pi R^۳}{\sqrt{۳}}$ ۳) $\frac{۴\pi R^۳}{۳\sqrt{۳}}$ ۴) $\frac{۳\pi R^۳}{۴\sqrt{۳}}$

پاسخ: گزینهٔ «۳» ـ بزرگ‌ترین استوانه‌ای که درون کره به شعاع R محاط شود، ارتفاعی برابر با $\frac{۲}{\sqrt{۳}}R$ دارد، پس:

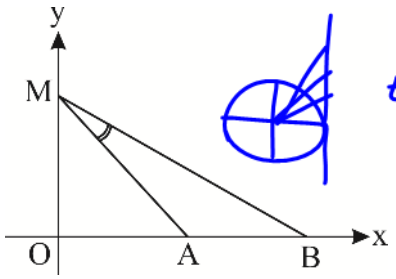


$$R^۲=(\frac{h}{۲})^۲+r^۲ \xrightarrow{h=\frac{۲}{\sqrt{۳}}R} R^۲=(\frac{R}{\sqrt{۳}})^۲+r^۲ \Rightarrow r^۲=\frac{۲}{۳}R^۲ \Rightarrow r=\sqrt{\frac{۲}{۳}}R$$

بنابراین: $$\text{حجم استوانه}=\pi r^۲h=\pi(\sqrt{\frac{۲}{۳}}R)^۲(\frac{۲}{\sqrt{۳}}R)=\frac{۴\pi R^۳}{۳\sqrt{۳}}$$

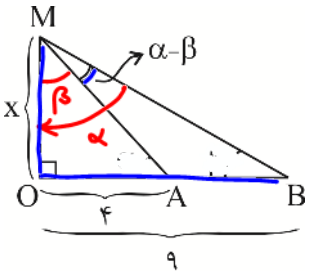
تمرین: در شکل مقابل، دو نقطهٔ A و B به ترتیب به طول‌های ۴ و ۹ بر روی محور افقی قرار دارند. نقطهٔ M با کدام ارتفاع روی محور قائم انتخاب شود تا زاویهٔ AMB بیشترین مقدار خود را داشته باشد؟ *(سراسری ریاضی)*

۱) ۵/۴
۲) ۶
۳) ۶/۵
۴) ۷/۲



$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{۱+\tan\alpha\tan\beta}$

پاسخ:

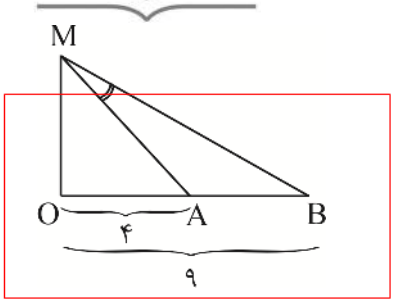


راه اول: $$\Rightarrow \tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{۱+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{\frac{۹}{x}-\frac{x}{۴}}{۱+\frac{۹}{۳۶}}=\frac{۵x}{۳۶+x^۲}$$

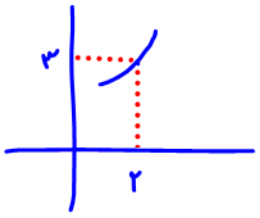
برای این که $\tan$ زاویهٔ $\alpha-\beta$ و در نتیجه خود آن، ماکسیمم شود، مشتق را برابر با صفر قرار می‌دهیم:

$$(\frac{۵x}{۳۶+x^۲})'=۰ \Rightarrow \frac{۵(۳۶+x^۲)-۲x(۵x)}{(۳۶+x^۲)^۲}=۰ \Rightarrow ۱۸۰-۵x^۲=۰ \Rightarrow x^۲=۳۶ \xrightarrow{x>۰} x=۶$$

راه دوم: طبق نکتهٔ درس‌نامه می‌توان گفت فردی از نقطهٔ M در حال تماشای تابلوی AB است پس برای این‌که زاویهٔ AMB ماکسیمم شود، باید OM واسطهٔ هندسی OA و OB باشد، پس: $OM=\sqrt{۴\times۹}=۶$

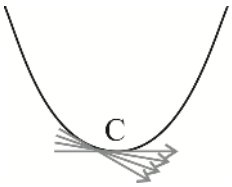


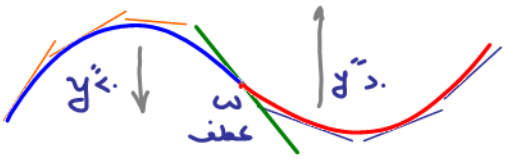
عرض تو $y = f(x)$
شیب تو $y' = f'(x)$
کوزی تو $y'' = f''(x)$

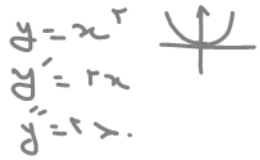


تقعّر و تحدّب

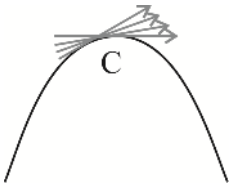
تعریف: گوییم تابع f در نقطهٔ C از بازهٔ I به بالا مقعر است، هرگاه تمام خطوط مماس بر منحنی در همسایگی C در پایین منحنی قرار گیرند.

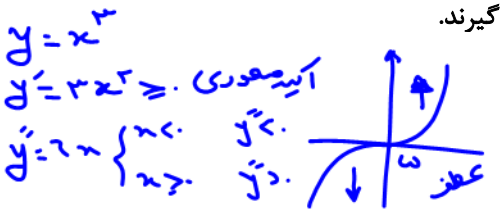




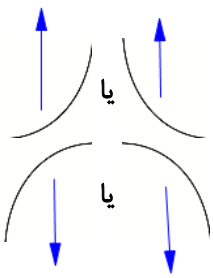


تعریف: گوییم تابع f در نقطهٔ C از بازهٔ I به پایین مقعر است، هرگاه تمام خطوط مماس بر منحنی در همسایگی C در بالای منحنی قرار گیرند.





قضیه: تابع f در هر فاصله که $f'' > 0$ باشد، به بالا مقعر است و در هر فاصله که $f'' < 0$ باشد، به پایین مقعر است.



تقعر رو به بالا: اگر به ازای هر x از I، $f'' > 0$، آن‌گاه تقعر نمودار f رو به بالاست.

تقعر رو به پایین: اگر به ازای هر x از I، $f'' < 0$، آن‌گاه تقعر نمودار f رو به پایین است.

برای بررسی سوی تقعر منحنی تابع مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

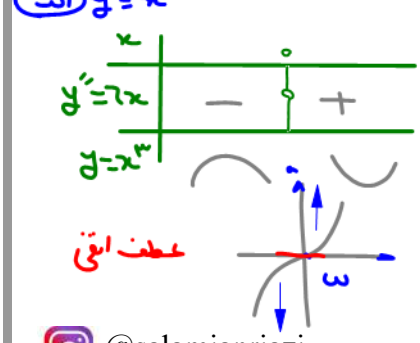
۱) محاسبهٔ مشتق دوم تابع $(f''(x))$

۲) تعیین علامت $f''(x)$

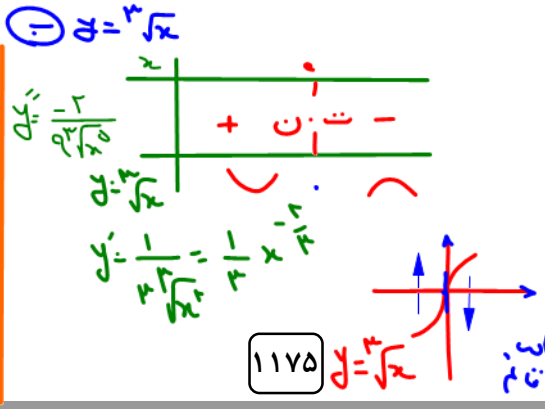
۳) در هر فاصله که $f'' > 0$، تقعر به سمت بالا و در هر فاصله که $f'' < 0$، تقعر به سمت پایین است.

برای توابع زیر جدول جهت تقعر را رسم کنید و مشخص کنید در چه بازه‌ای سوی تقعر به کدام سمت است؟

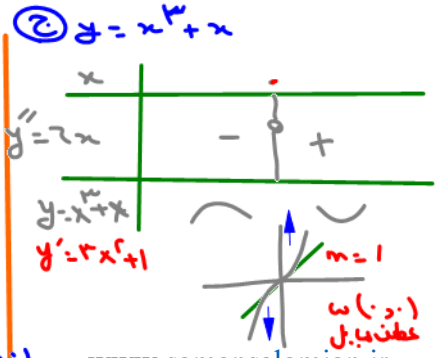
الف) $y = x^3$



ب) $y = \sqrt[3]{x}$



ج) $y = x^3 + x$



تمرین: بزرگ‌ترین بازه‌ای که تقعر تابع $f(x)=x^۴-۲x^۳-۱۲x^۲-۱$ در آن رو به پایین است را بیابید.

پاسخ: چون گفته تقعر رو به پایین است، باید از تابع مشتق دوم بگیریم و آن را کوچک‌تر از صفر قرار دهیم:

$$f(x)=x^۴-۲x^۳-۱۲x^۲-۱ \Rightarrow f'(x)=۴x^۳-۶x^۲-۲۴x \Rightarrow f''(x)=۱۲x^۲-۱۲x-۲۴<۰$$
$$\Rightarrow ۱۲(x+۱)(x-۲)<۰ \Rightarrow -۱<x<۲$$

تمرین: منحنی نمایش تابع $y=\frac{۱}{۳}x^۳-x^۲-۳x$، در کدام بازه نزولی و تقعر آن رو به بالا است؟ *(تجربی خارج از کشور ۹۱)*

۱) $(-۱,۱)$ ۲) $(-۱,۳)$ ۳) $(۱,۳)$ ۴) $(۱,\infty)$

پاسخ: گزینهٔ «۳»

نکته اول:

الف) تابع $f(x)$ روی یک بازه نزولی است هرگاه به ازای تمام مقادیر این بازه، $f'(x)$ موجود و $f'(x)<۰$ باشد.

ب) تقعر منحنی تابع $f(x)$ روی یک بازه، رو به بالا است هرگاه به ازای همهٔ xهای عضو این بازه، $f''(x)$ موجود و $f''(x)>۰$ باشد.

نکته دوم:

$$y=\frac{۱}{۳}x^۳-x^۲-۳x \Rightarrow D=\mathbb{R}$$
$$y'=x^۲-۲x-۳=(x-۳)(x+۱)$$
$$y'<۰ \Rightarrow -۱<x<۳ \quad (I)$$

x		-۱		۳	
y	$+$	۰	$-$	۰	$+$

تابع روی بازهٔ $(-۱,۳)$ نزولی است.

$$y''=۲x-۲$$
$$y''>۰ \Rightarrow x>۱ \quad (II)$$

x		۱	
y''	$-$	۰	$+$

تقعر منحنی تابع روی بازهٔ $(۱,+\infty)$ رو به بالا است.

$$(I)\cap(II)=(-۱,۳)\cap(۱,+\infty)=(۱,۳)$$

بنابراین تابع داده‌شده روی بازهٔ $(۱,۳)$ نزولی و دارای تقعر رو به بالا است.

تمرین: به ازای کدام مجموعه مقادیر a، تقعر منحنی به معادلهٔ $y=x^۴+ax^۳+\frac{۳}{۲}x^۲$، همواره رو به بالا است؟ *(ریاضی ۹۲)*

۱) $-۱<a<۱$ ۲) $-۱<a<۲$ ۳) $-۲<a<۱$ ۴) $-۲<a<۲$

پاسخ: گزینهٔ «۴»

نکته اول: جهت تقعر منحنی یک تابع را مشتق دوم آن تابع مشخص می‌کند. تقعر منحنی روی یک بازه رو به بالا است هرگاه روی آن بازه $y''>۰$ باشد و رو به پایین است هرگاه $y''<۰$ باشد.

نکته دوم: ابتدا مشتق دوم تابع داده‌شده را محاسبه می‌کنیم:

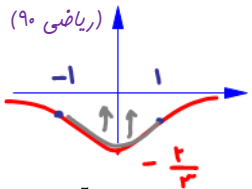
$$y=x^۴+ax^۳+\frac{۳}{۲}x^۲ \Rightarrow y'=۴x^۳+۳ax^۲+۳x \Rightarrow y''=۱۲x^۲+۶ax+۳$$

می‌خواهیم تقعر منحنی همواره رو به بالا باشد پس طبق نکته اول باید نامعادلهٔ $y''>۰$ همواره برقرار باشد. می‌دانیم یک چندجمله‌ای

درجه‌دو در صورتی همواره مثبت است که اولاً $\Delta < 0$ و ثانیاً ضریب x^2 مثبت باشد. با بررسی این دو شرط محدودهٔ a را تعیین می‌کنیم.
چون $12 > 0$ است پس فقط برقراری شرط اول را بررسی می‌کنیم:

$$\Delta = (6a)^2 - 4(12)(3) < 0 \Rightarrow 36a^2 - 144 < 0 \Rightarrow 36a^2 < 144 \Rightarrow a^2 < 4 \Rightarrow |a| < 2 \Rightarrow -2 < a < 2$$

تمرین: مجموعهٔ طول نقاطی که تقعر منحنی به معادلهٔ $y = \frac{-2}{x^2+3}$ رو به بالا باشد، به کدام صورت است؟ (ریاضی ۹۰)



۱) $|x| < 1$ ۲) $|x| < 2$ ۳) $|x| > \sqrt{2}$ ۴) $|x| > \sqrt{3}$

پاسخ: گزینهٔ «۱»

نکته اول: جهت تقعر منحنی یک تابع را مشتق دوم آن تابع مشخص می‌کند. تقعر منحنی روی یک بازه رو به بالا است هرگاه روی آن بازه $y'' > 0$ باشد و رو به پایین است هرگاه $y'' < 0$ باشد.

نکته دوم: ابتدا مشتق دوم تابع را محاسبه می‌کنیم:

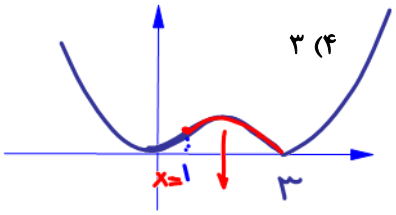
$$y = \frac{-2}{x^2+3} \Rightarrow y' = \frac{0 - 2x(-2)}{(x^2+3)^2} = \frac{4x}{(x^2+3)^2}$$

$$\Rightarrow y'' = \frac{4(x^2+3)^2 - 2(2x)(x^2+3)(4x)}{(x^2+3)^4} = \frac{-12x^2+12}{(x^2+3)^3}$$

طبق نکته اول، تقعر منحنی در جایی رو به بالا است که نامساوی $y'' > 0$ برقرار باشد.

$$y'' > 0 \xrightarrow{(x^2+3)^3 > 0} -12x^2 + 12 > 0 \Rightarrow x^2 < 1 \Rightarrow |x| < 1$$

تمرین: تقعر تابع با ضابطهٔ $y = x^2|x-3|$ در بازهٔ (a,b) به طرف yهای منفی است، بیشترین مقدار $b-a$ کدام است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور)



۱) $\frac{4}{3}$ ۲) $\frac{5}{3}$ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ: گزینهٔ «۳»

نکته اول: الف) می‌دانیم: $|u| = \begin{cases} u & u \geq 0 \\ -u & u < 0 \end{cases}$

ب) جهت تقعر منحنی یک تابع را می‌توان با تعیین علامت مشتق دوم تابع، مشخص کرد. تقعر منحنی تابع روی یک بازه، رو به بالا (به طرف yهای مثبت) است هرگاه $y'' > 0$ باشد و رو به پایین (به طرف yهای منفی) است هرگاه $y'' < 0$ باشد.

نکته دوم: ابتدا تابع $f(x)$ را با تعیین علامت عبارت درون قدرمطلق به صورت یک تابع دوضابطه‌ای می‌نویسیم:

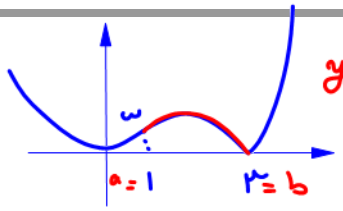
$$|x-3| = \begin{cases} x-3 & x \geq 3 \\ -(x-3) & x < 3 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2(x-3) & x \geq 3 \\ -x^2(x-3) & x < 3 \end{cases} = \begin{cases} x^3 - 3x^2 & x \geq 3 \\ -x^3 + 3x^2 & x < 3 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 6x & x > 3 \\ -3x^2 + 6x & x < 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f''(x) = \begin{cases} 6x - 6 & x > 3 \\ -6x + 6 & x < 3 \end{cases}$$

اکنون مجموعه جواب نامعادلهٔ $f''(x) < 0$ را تعیین می‌کنیم:

$$x > 3 : f''(x) = 6x - 6 < 0 \Rightarrow 6x < 6 \Rightarrow x < 1 \text{ غ.ق.ق}$$



$x<۳: f''(x)=-۶x+۶<۰ \Rightarrow -۶x<-۶ \Rightarrow x>۱ \xrightarrow{x<۳} ۱<x<۳$

بنابراین تقعر تابع $f(x)$ روی بازهٔ $(۱,۳)$ رو به پایین است، پس داریم: $a=۱\ ,\ b=۳ \Rightarrow b-a=۳-۱=۲$

تمرین: نمودار تابع $y=\sqrt[۳]{x^۴}-۴\sqrt[۳]{x}$ در کدام بازه نزولی و تقعر آن رو به پایین است؟ (تجربی ۹۷)

۱) $(-۲,۱)$ ۲) $(۰,۱)$ ۳) $(-۲,۰)$ ۴) $(-\infty,-۲)$

پاسخ: گزینهٔ «۳»

نکته: برای این که تابع نزولی باشد باید شرط $y'\le ۰$ و برای این که تابع دارای تقعر رو به پایین باشد، بایستی شرط $y''<۰$ برقرار باشد.

$$y'=\frac{۴}{۳}x^{\frac{۱}{۳}}-\frac{۴}{۳}x^{-\frac{۲}{۳}}=\frac{۴}{۳}x^{-\frac{۲}{۳}}(x-۱)=\frac{۴(x-۱)}{۳\sqrt[۳]{x^۲}}\le ۰ \Rightarrow x\le ۱ \quad (۱)$$

$$y''=\frac{۴}{۹}x^{-\frac{۲}{۳}}+\frac{۸}{۹}x^{-\frac{۵}{۳}}=\frac{۴}{۹}x^{-\frac{۵}{۳}}(x+۲)=\frac{۴(x+۲)}{۹\sqrt[۳]{x^۵}}<۰ \Rightarrow -۲<x<۰ \quad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۱)\cap(۲)} -۲<x<۰$$

تمرین: تقعر تابع به معادلهٔ $y=x^۲+\sqrt{x}$ در کدام بازه رو به پایین است؟ (سراسری تجربی خارج از کشور)

۱) $(۰,\frac{۱}{۴})$ ۲) $(۰,\frac{۱}{۲})$ ۳) $(۰,۱)$ ۴) $(\frac{۱}{۴},\frac{۱}{۲})$

پاسخ: گزینهٔ «۱»

نکته اول: تقعر منحنی تابع $f(x)$ روی یک بازه، رو به پایین است هرگاه به ازای همهٔ xهای عضو این بازه $f''(x)$ موجود و $f''(x)<۰$ باشد.

نکته دوم:

$$y=x^۲+\sqrt{x} \Rightarrow D=[۰,+\infty)$$

$$y'=۲x+\frac{۱}{۲\sqrt{x}} \Rightarrow y''=۲-\frac{۱}{۴x\sqrt{x}}=\frac{۸x\sqrt{x}-۱}{۴x\sqrt{x}}$$

اکنون مجموعه جواب نامعادلهٔ $y''<۰$ را می‌یابیم:

$$y''<۰ \Rightarrow \frac{۸x\sqrt{x}-۱}{۴x\sqrt{x}}<۰ \xrightarrow[۴x\sqrt{x}>۰]{x>۰} ۸x\sqrt{x}-۱<۰ \Rightarrow ۸x\sqrt{x}<۱ \Rightarrow x\sqrt{x}<\frac{۱}{۸} \Rightarrow (\sqrt{x})^۳<(\frac{۱}{۲})^۳$$

$$\Rightarrow \sqrt{x}<\frac{۱}{۲} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} x<\frac{۱}{۴} \xrightarrow{x>۰} ۰<x<\frac{۱}{۴}$$

بنابراین تقعر تابع در بازهٔ $(۰,\frac{۱}{۴})$ رو به پایین است.

تمرین: نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=\cos^۲ x-۲\cos x$، $x\in[۰,۲\pi]$ در کدام بازه، نزولی و تقعر آن رو به پایین است؟ (ریاضی ۹۶)

۱) $(\frac{\pi}{۲},\frac{۲\pi}{۳})$ ۲) $(\pi,\frac{۴\pi}{۳})$ ۳) $(\frac{۲\pi}{۳},\pi)$ ۴) $(\frac{۴\pi}{۳},\frac{۳\pi}{۲})$

پاسخ: گزینهٔ «۲»

نکته اول: تابع در بازه‌ای نزولی و تقعر آن رو به پایین است که $f'(x)$ و $f''(x)$ هر دو منفی باشند.

نکته دوم:

$$f(x)=\cos^۲ x-۲\cos x \Rightarrow f'(x)=-۲\sin x\cos x+۲\sin x=۲\sin x(-\cos x+۱)<۰ \xrightarrow{۱-\cos x>۰} ۲\sin x<۰$$

$$\sin x=۰ \Rightarrow x=۰,\pi,۲\pi \Rightarrow x\in(\pi,۲\pi)$$

$$f'(x)=-\sin ۲x+۲\sin x \Rightarrow f''(x)=-۲\cos ۲x+۲\cos x=-۲(۲\cos^۲ x-۱)+۲\cos x=-۴\cos^۲ x+۲\cos x+۲<۰$$

$$-۴\cos^۲ x+۲\cos x+۲=۰ \Rightarrow -۴(\cos x-۱)(\cos x+\frac{۱}{۲})=۰ \Rightarrow \begin{cases}\cos x=۱ \Rightarrow x=۰ \text{ یا } x=۲\pi\\ \cos x=-\frac{۱}{۲} \Rightarrow x=\frac{۲\pi}{۳} \text{ یا } x=\frac{۴\pi}{۳}\end{cases}$$

x	۰	$\frac{۲\pi}{۳}$	$\frac{۴\pi}{۳}$	۲π
$f''(x)$	+	۰	-	۰	+

$$\Rightarrow x\in(\frac{۲\pi}{۳},\frac{۴\pi}{۳})$$

اشتراک دو بازهٔ $(\pi,۲\pi)$ و $(\frac{۲\pi}{۳},\frac{۴\pi}{۳})$ به صورت $(\pi,\frac{۴\pi}{۳})$ درمی‌آید.

نقطهٔ عطف

نقطهٔ $x=a$ را نقطهٔ عطف تابع f می‌نامیم هرگاه هر ۳ شرط زیر هم‌زمان برقرار باشند:

۱) تابع f در $x=a$ پیوسته باشد.

۲) تابع f در $x=a$ دارای خط مماس واحد باشد.

۳) f'' در a تغییر علامت دهد، یعنی تقعر تابع f در a عوض شود.

نکته مهم: در نقطهٔ عطف f'' یا صفر است (مانند تابع $y=x^۳$) یا وجود ندارد (مانند تابع $y=\sqrt[۳]{x}$) ولی حتماً تغییر علامت می‌دهد، پس:

برای یافتن نقطهٔ عطف، نقاطی که f'' صفر شده یا وجود ندارد را می‌یابیم، سپس بررسی می‌کنیم که f'' تغییر علامت می‌دهد یا نه و بعد از آن وجود خط مماس را چک می‌کنیم.

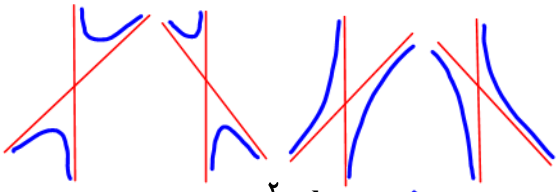
حالات خاص نقطهٔ عطف

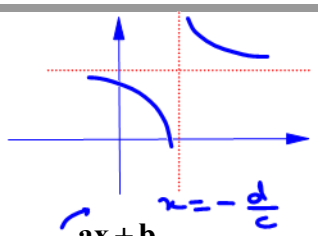
۱) در توابع درجه سه به صورت $y=ax^۳+bx^۲+cx+d$ نقطهٔ عطف مرکز تقارن تابع است و در صورت وجود اکسترمم، عطف وسط اکسترمم‌ها قرار دارد. در این توابع طول نقطهٔ عطف $x=-\frac{b}{۳a}$ است.

$$\text{عطف}=\frac{\max+\min}{۲}$$

۲) اگر m و n هر دو فرد باشند $(m>n)$، در تابع $y=\sqrt[m]{(x-a)^n}$ نقطهٔ $x=a$ عطف قائم می‌باشد.

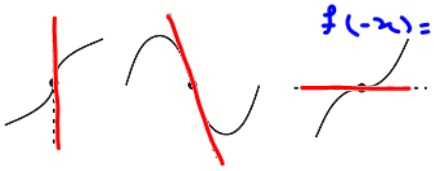
۳) توابع $y=\sin x$، $y=\cos x$، $y=\tan x$ و $y=\cot x$ در محل برخورد با محور xها، عطف دارند.





۴) توابع کسری به صورت $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ (هموگرافیک) و همچنین $y=\frac{ax^2+bx+c}{dx+e}$ (درجه ۲ به درجه ۱) نقطهٔ عطف ندارند.

۵) توابع فرد (با تبدیل x به $-x$ در ضابطهٔ آن‌ها y قرینه شود) در مبدأ مختصات عطف دارند، مانند توابع $y=x|x|$، $y=x|x^2-1|$، $y=\frac{x}{1+|x|}$، $y=\frac{x}{1+x^2}$ و ... البته اسم تابع فرد در کتاب درسی وجود ندارد.

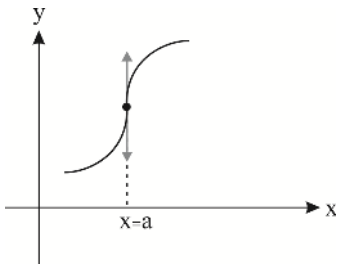


نتیجه مهم: در نقطهٔ عطف، خط مماس بر نمودار، از میان نمودار عبور می‌کند.

تمرین: کدام شرط زیر در مورد نقطه عطف، نیاز نیست؟

۱) پیوسته بودن ۲) مشتق‌پذیربودن ۳) وجود خط مماس ۴) تغییر جهت تقعر

پاسخ: تابع می‌تواند در نقطهٔ عطف مشتق‌پذیر نباشد، مانند عطف قائم.



$f'_+(a)=f'_-(a)=+\infty \Rightarrow$ مشتق‌ناپذیر

تمرین: اگر تابع‌هایی به صورت $f(x)=x^3-(m+2)x^2+3x$ همواره صعودی باشند، آن‌گاه مجموعهٔ طول نقاط عطف این توابع، در کدام بازه است؟ (تجربی ۹۴)

۱) $[-2,0]$ ۲) $[-2,2]$ ۳) $[-1,1]$ ۴) $[0,1]$

$y'=3x^2-2(m+2)x+3>0$

$\Delta'=(-2(m+2))^2-4(3)(3)\leq 0$

$4(m+2)^2\leq 4(9)$

$|m+2|\leq 3$

$-3\leq m+2\leq 3$

طول عطف درجه سوم $x_w=-\frac{b}{3a}=\frac{m+2}{3}$

$-1\leq \frac{m+2}{3}\leq 1$

$-1\leq x_w\leq 1$

$(a-b)^2=(b-a)^2$

تمرین: طول نقطهٔ عطف نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{(2-x)^2}{x}$ کدام است؟ (تجربی خارج از کشور ۹۰)

۱) ۱-　　۲) صفر　　۳) ۱　　۴) فاقد نقطهٔ عطف

$y=\frac{(x-2)^2}{x}=\frac{x^2-4x+4}{x}=x-4+\frac{4}{x}$

$y'=1-0-\frac{4}{x^2}$

$y'=1-\frac{4}{x^2}$

$y''=\frac{(-2x)(-4)}{x^4}$

$y''=\frac{8}{x^3}$

$\lim_{x\to 0^+}y=\frac{(x-2)^2}{x}=\frac{4}{0^+}=+\infty$

$y=x+\frac{4}{x}-4$

$y=x-4$

x		0	
$y''=\frac{8}{x^3}$	−	ت ن	+
y	∩		∪

$x=0\notin D_f$ عطف ندارد　　عطف نیست

تمرین: طول نقطهٔ عطف نمودار تابع $y=(5-x)\sqrt[3]{x^2}$، کدام است؟ (ریاضی ۹۵)

۱) ۱-　　۲) صفر　　۳) ۱　　۴) ۲

$y=(5-x)x^{\frac{2}{3}}=5x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{5}{3}}$

$y'=\frac{10}{3}x^{-\frac{1}{3}}-\frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}$

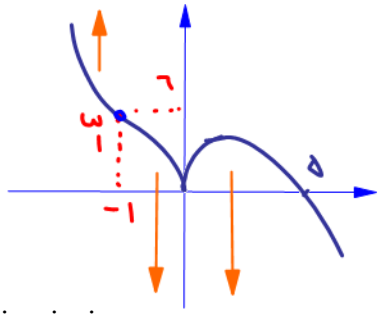
$y''=-\frac{10}{9}x^{-\frac{4}{3}}-\frac{10}{9}x^{-\frac{1}{3}}=-\frac{10}{9\sqrt[3]{x^4}}-\frac{10}{9\sqrt[3]{x}}=\frac{-10}{9\sqrt[3]{x}}\left(\frac{1}{x}+1\right)$

$9x\sqrt[3]{x}$

x		-1		0	
$y''=\frac{-10}{9\sqrt[3]{x}}\left(\frac{x+1}{x}\right)$	+	ت ن	−	ن ندارد	−
$y=(5-x)\sqrt[3]{x^2}$	∪	ω_1	∩		∩

y'': تغییر علامت داشته و در ریشه‌ها پیوسته (فرد) ⟹ عطف دارد

تغییر علامت نداشته و در ریشه‌ها ناپیوسته (زوج) ⟹ عطف ندارد



تمرین: مجموعهٔ طول نقاط عطف منحنی به معادلهٔ $y = x\,|\,x^2 - 4x\,|$، کدام است؟ (ریاضی ۹۲)

۱) $\{\frac{4}{3}\}$ ۲) $\{0, \frac{4}{3}, 4\}$ ۳) $\{\frac{4}{3}, 4\}$ ۴) $\{0, \frac{4}{3}\}$

تمرین: طول نقطهٔ عطف تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{3 - x^2}{2} & x < 1 \\ \frac{1}{x} & x \geq 1 \end{cases}$، در صورت وجود کدام است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور)

۱) ۱- ۲) صفر ۳) ۱ ۴) فاقد نقطهٔ عطف

تمرین: مجموعهٔ طول نقاط عطف نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x^2 & x \geq -1 \\ -13 - \frac{9}{x} & x < -1 \end{cases}$ کدام است؟ (سراسری ریاضی)

۱) $\{-1\}$ ۲) $\{1\}$ ۳) $\{-1, 1\}$ ۴) $\varnothing$

رابطهٔ بین نمودار توابع f و f'

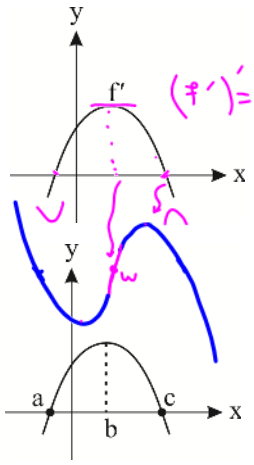
فرض کنید می‌خواهیم از روی نمودار تابع پیوستهٔ f، نمودار تابع f' را رسم کنیم. داریم:

وضعیت در f'	وضعیت در f
صعودی اکید	تقعر رو به بالا
نزولی اکید	تقعر رو به پایین
مثبت (بالای محور x)	صعودی اکید
منفی (پایین محور x)	نزولی اکید
اکسترمم روی x ها نیست / اکسترمم روی x ها هست	عطف افقی یا مایل

* توجه کنید در کتاب درسی اسمی از عطف مایل آورده نشده است.

تمرین: نمودار f'، مشتق تابع f به صورت شکل زیر است. تابع f از نظر نقاط ماکسیمم و مینیمم نسبی و نقطهٔ عطف چگونه است؟

(سراسری ریاضی)



۱) فقط یک ماکسیمم در سمت راست محور yها

۲) یک ماکسیمم و یک مینیمم و یک نقطهٔ عطف در سمت راست محور yها

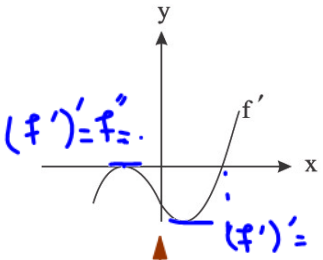
✓۳) یک مینیمم در سمت چپ محور yها، یک ماکسیمم و یک نقطهٔ عطف در سمت راست محور yها

۴) یک ماکسیمم در سمت چپ محور yها، یک مینیمم و یک نقطهٔ عطف در سمت راست محور yها

پاسخ: به نمودار f' دقت کنید:

وضعیت در f	وضعیت در f'	نقطه
min در سمت چپ	تقاطع صعودی در سمت چپ	$x = a$
عطف در سمت راست	اکسترمم در سمت راست	$x = b$
max در سمت راست	تقاطع نزولی در سمت راست	$x = c$

تمرین: شکل زیر نمودار تابع مشتق f است، نمودار تابع f کدام وضعیت را دارد؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور)



۱) یک مینیمم نسبی ـ دو نقطهٔ عطف

۲) یک ماکسیمم نسبی ـ دو نقطهٔ عطف

۳) ماکسیمم و مینیمم نسبی ـ دو نقطهٔ عطف

۴) ماکسیمم و مینیمم نسبی ـ یک نقطهٔ عطف

پاسخ: گزینهٔ «۱»

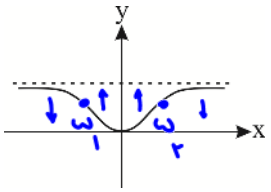
نکته اول: الف) نقاط تقاطع نمودار تابع $f'(x)$ با محور xها (جایی که f' تغییر علامت می‌دهد)، نقاط اکسترمم تابع $f(x)$ است.

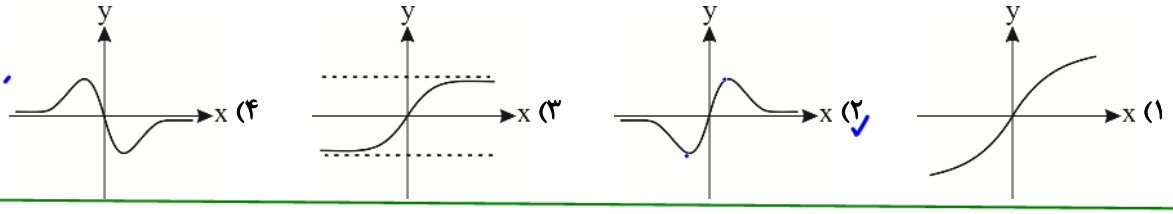
ب) نقاط اکسترمم تابع $f'(x)$، نقاط عطف تابع $f(x)$ است.

نکته دوم: با توجه به شکل، نمودار $f'(x)$ تنها در یک نقطه محور xها را قطع کرده است. قبل از این نقطه $f'(x) < 0$ و بعد از آن $f'(x) > 0$ است، بنابراین تابع $f(x)$ دارای یک مینیمم نسبی است. دقت کنید نقاطی که $f'(x)$ بر محور xها مماس شده است، نقاط اکسترمم تابع نیست.

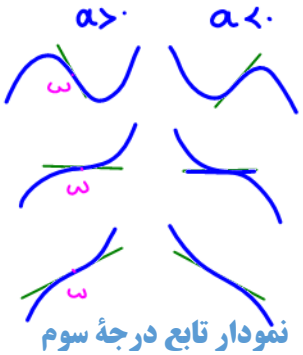
تابع f' دو نقطهٔ اکسترمم دارد (یک ماکسیمم نسبی و یک مینیمم نسبی)، بنابراین مقدار f'' در این نقاط برابر صفر است و مقدارش قبل و بعد از این نقاط تغییر علامت داده است، پس تابع f دو نقطهٔ عطف نیز دارد.

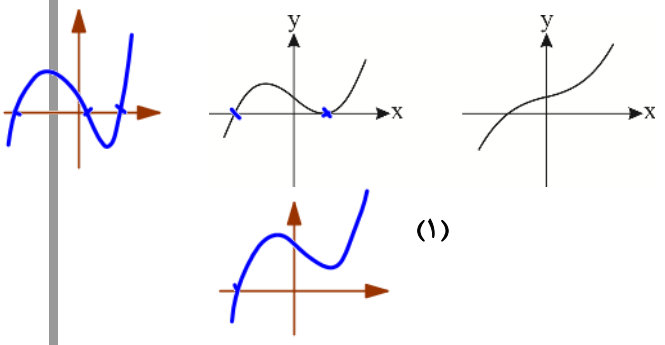
تمرین: شکل روبه‌رو نمودار تابع $y = f(x)$ است. نمودار $f'(x)$ به کدام صورت است؟ (ریاضی خارج از کشور ۹۳)





نمودار تابع درجهٔ سوم





تابع درجهٔ سوم $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ دارای ویژگی‌های زیر است:

۱) اگر $a > 0$ باشد، از ناحیهٔ سوم شروع و به ناحیهٔ اول ختم می‌شود. به شکل‌های (۱) توجه کنید.

۲) اگر $a < 0$ باشد، نمودار از ناحیهٔ دوم شروع به ناحیهٔ چهارم ختم می‌شود. به شکل‌های (۲) توجه کنید.

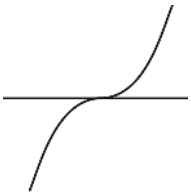
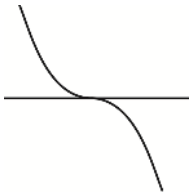
۳) مشتق تابع درجهٔ سوم، یک تابع درجهٔ دوم است. از آن‌جا که ریشه‌های سادهٔ y' نقاط اکسترمم نسبی تابع y هستند، بنابراین در تابع درجهٔ سوم سه حالت زیر وجود خواهند داشت:

A) دلتای مشتق $(\Delta_{y'})$ مثبت باشد: در این حالت y' دو ریشهٔ ساده و در نتیجه تابع y دو اکسترمم دارد.

B) دلتای مشتق صفر باشد؛ در این حالت y' یک ریشهٔ مضاعف دارد و در نتیجه تابع y نقطهٔ اکسترمم ندارد. ولی دقت کنید که مشتق در یک نقطه صفر می‌شود پس در این نقطه خط مماس، افقی است.

دلتای مشتق منفی باشد: در این حالت y' ریشه ندارد. در نتیجه تابع y نقطهٔ اکسترمم ندارد.

برای رسم نمودار تابع درجهٔ سوم می‌توانیم از جدول زیر کمک بگیریم.

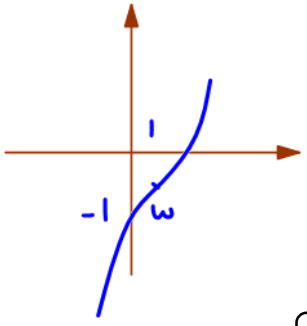
	$a > 0$	$a < 0$
$\Delta_{y'} > 0$ مشتق دو ریشه دارد.	ویژگی: ابتدا ماکسیمم رخ می‌دهد و سپس مینیمم.	ویژگی: ابتدا مینیمم رخ می‌دهد سس ماکسیمم.
$\Delta_{y'} = 0$ مشتق یک ریشهٔ مضاعف دارد.	ویژگی: شیب خط مماس در نقطهٔ عطف، صفر است و اکیداً صعودی است. 	ویژگی: شیب خط مماس در نقطهٔ عطف، صفر است و اکیداً نزولی است. 
$\Delta_{y'} < 0$ مشتق ریشه ندار.	ویژگی: شیب خط مماس در نقطهٔ عطف، مثبت است و اکیداً صعودی باشد.	ویژگی: شیب خط مماس در نقطهٔ عطف، منفی است و اکیداً نزولی است.

تمرین: نمودار تابع $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 3x - 1$ به کدام صورت است؟

$x_{\text{س}} = -\frac{b}{3a} = \frac{1}{1} = 1$

پاسخ: ضریب x^3 (یعنی $\frac{1}{3}$) مثبت است، پس نمودار از ناحیهٔ سوم شروع و به ناحیهٔ اول ختم می‌شود. از طرفی: $y' = x^2 - 2x + 3$

چون $\Delta_{y'} = (-2)^2 - 4(3)(1) < 0$ است، بنابراین نمودار تابع، فاقد اکسترمم است پس نمودار آن به صورت مقابل است:



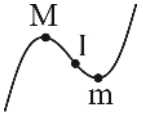
نکته: توابع درجهٔ سوم همواره یک نقطهٔ عطف دارند که نمودار تابع نسبت به این نقطه، متقارن است. پس نقطهٔ عطف تابع درجهٔ سوم $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ همان مرکز تقارن تابع است که مختصات آن برابر $I(-\frac{b}{3a}, f(-\frac{b}{3a}))$ است.

دقت کنید اگر از تابع دو بار مشتق بگیریم، به رابطهٔ $y'' = 6ax + 2b$ می‌رسیم که ریشهٔ آن یعنی $x = -\frac{b}{3a}$ طول نقطهٔ عطف تابع است.)

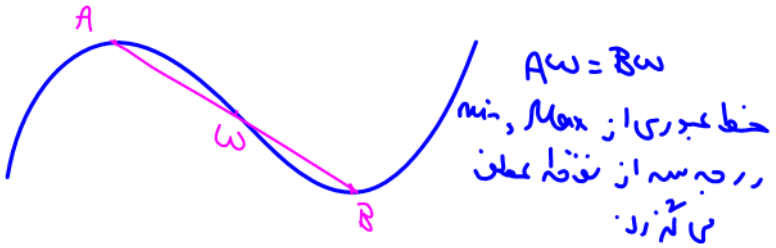
تمرین: مختصات مرکز تقارن تابع $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ را بیابید.

پاسخ: با توجه به نکته، طول نقطهٔ عطف $x = -\frac{-3}{3(1)} = 1$ است، بنابراین: مختصات عطف: $I = (1, f(1)) = (1, 0)$

نکته: در حالتی که تابع درجهٔ سوم دو تا اکسترمم دارد، رابطهٔ بین مینیمم موضعی (m)، ماکزیمم موضعی (M) و عطف (I) به صورت مقابل است:



$$x_I = \frac{x_M + x_m}{2}$$
$$y_I = \frac{y_M + y_m}{2}$$



تمرین: مختصات نقاط اکسترمم تابع درجهٔ سوم f به صورت $(-2, 1)$ و $(3, -4)$ است. نقطهٔ عطف تابع در کدام ناحیهٔ مختصاتی قرار دارد؟

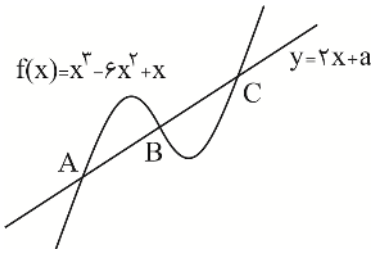
پاسخ: چون مختصات نقاط اکسترمم تابع $A(-2, 1)$ و $B(3, -4)$ است، مختصات نقطهٔ عطف برابر است با:

$$\begin{cases} x_I = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{-2+3}{2} = \frac{1}{2} \\ y_I = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{1-4}{2} = -\frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow I(\frac{1}{2}, \frac{-3}{2})$$

نقطهٔ عطف در ناحیهٔ چهارم واقع است.

نکته: اگر خط $y = ax + b$ بر روی نمودار تابع درجهٔ سوم، دو پاره‌خط با طول‌های مساوی پدید آورد، آن‌گاه خط حتماً از نقطهٔ عطف می‌گذرد. اگر خط $y = m$ بر روی منحنی درجهٔ ۳ دو پاره‌خط با طول‌های مساوی پدید آورد، آن‌گاه m عرض نقطهٔ عطف تابع است.

تمرین: با توجه به شکل مقابل، اگر $AB = BC$ باشد، a را بیابید.



$x_B = \frac{-b}{3a} = \frac{6}{3} = 2$ عطف B

$f(2) = 2^3 - 6(2)^2 + 2 = 10 - 24 = -14$ نقطه $(2, -14)$ B

روی خط $y = 2x + a$ هست:

$-14 = 2(2) + a$

$-18 = a$

پاسخ: چون خط $y = 2x + a$ دو پاره‌خط با طول‌های مساوی روی منحنی پدید آورده پس حتماً از نقطهٔ عطف تابع می‌گذرد (B نقطهٔ عطف تابع است). در نتیجه مختصات عطف را می‌یابیم و در خط قرار می‌دهیم:

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + x \Rightarrow I \begin{cases} -\frac{b}{3a} = 2 \\ f(2) = -14 \end{cases}$$

مختصات این نقطه در خط هم صدق می‌کند:

$$y = 2x + a : -14 - 2(2) + a \Rightarrow a = -18$$

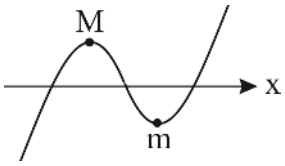
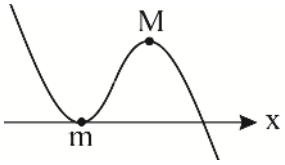
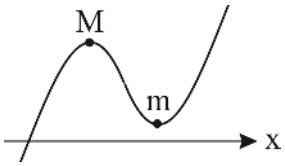
محاسبهٔ تعداد و نوع ریشه‌های تابع درجهٔ سوم

بهترین روش برای تعیین تعداد و نوع ریشه‌های تابع درجهٔ سوم، رسم دقیق نمودار آن است. اما در حالت کلی می‌توانید از نکتهٔ زیر هم استفاده کنید.

نکته: در مورد ریشه‌های یک تابع درجهٔ ۳، نکات زیر برقرار است:

۱) اگر $\Delta_{y'} \leq 0$ باشد، تابع یک ریشه دارد.

۲) اگر $\Delta_{y'} > 0$ باشد (تابع دو تا اکسترمم دارد) جدول زیر را خواهیم داشت:

تعداد ریشه‌ها	نمودار	ویژگی
سه ریشه ساده		$y_M \cdot y_m < 0$
دو ریشه : یه ساده یه مضاعف		$y_M \cdot y_m = 0$
یک ریشه ساده		$y_M \cdot y_m > 0$

تمرین: ریشه‌های تابع $y = x^3 - 3x + 2$ چگونه‌اند؟

پاسخ: مشتق تابع $y' = 3x^2 - 3$ است، ریشه‌های مشتق را می‌یابیم:

$$3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

در نتیجه تابع دو اکسترمم دارد. حالا عرض نقاط اکسترمم را می‌یابیم:

$$\begin{cases} x = 1 & : y = 0 \\ x = -1 & : y = 4 \end{cases} \Rightarrow y_{max} \cdot y_{min} = 0$$

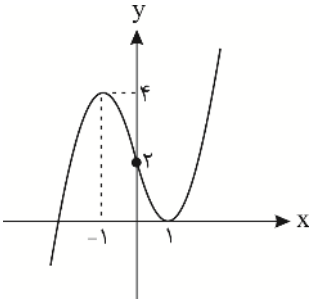
پس مطابق جدول بالا حالت دوم رخ داده است. بنابراین تابع ۲ ریشه دارد که چون در یک نقطه محور xها مماس است، پس یک ریشهٔ مضاعف و یک ریشهٔ ساده دارد.

می‌توانستید از رسم نمودار تابع هم استفاده کنید. برای رسم باید مشتق را تعیین علامت کنید. همچنین به مقدار $f(0)$ (نقطهٔ برخورد تابع با محور yها) هم نیاز داریم:

$f(0) = 2$

x		-1		1	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	4	↘	0	↗

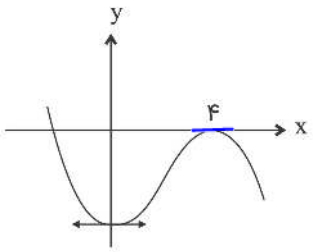
$\Rightarrow$



$\Rightarrow$ تابع یک ریشهٔ مضاعف و یک ریشهٔ ساده دارد.

تست‌های نمودارشناسی

تمرین: شکل زیر نمودار تابع به معادلهٔ $y = ax^۳ + bx^۲ - ۱۶$ می‌باشد. a کدام است؟ *(سراسری تجربی خارج از کشور)*



۱) -۱

۲) $\frac{۱}{۲}$

۳) $\frac{-۱}{۲}$

۴) $\frac{-۲}{۳}$

پاسخ: گزینهٔ «۳» ـ نقطهٔ $(۴,۰)$ روی منحنی تابع قرار دارد، پس مختصات این نقطه در معادلهٔ تابع صدق می‌کند.

$$y = ax^۳ + bx^۲ - ۱۶ \Rightarrow ۰ = a(۴)^۳ + b(۴)^۲ - ۱۶ \Rightarrow ۰ = ۶۴a + ۱۶b - ۱۶ \Rightarrow ۴a + b - ۱ = ۰ \Rightarrow ۴a + b = ۱ \quad (I)$$

تابع در نقاطی به طول $x = ۰$ و $x = ۴$ مماس افقی دارد، پس داریم: $y'(۴) = ۰ \ , \ y'(۰) = ۰$ یعنی $f'(۴) = f'(۰) = ۰$

$$y' = ۳ax^۲ + ۲bx$$

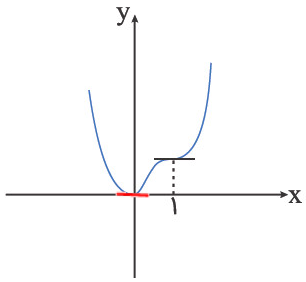
$$y'(۰) = ۳a(۰)^۲ + ۲b(۰) = ۰ \Rightarrow ۰ = ۰ \ ✓$$

$$y'(۴) = ۳a(۴)^۲ + ۲b(۴) = ۰ \Rightarrow ۴۸a + ۸b = ۰ \Rightarrow ۶a + b = ۰ \Rightarrow b = -۶a \quad (II)$$

با جایگذاری رابطهٔ II در رابطهٔ I مقدار a را به دست می‌آوریم:

$$۴a + b = ۱ \xrightarrow{b=-۶a} ۴a - ۶a = ۱ \Rightarrow -۲a = ۱ \Rightarrow a = -\frac{۱}{۲}$$

تمرین: شکل زیر، نمودار تابع $f(x) = ۳x^۴ + ax^۳ + bx^۲ + cx$ است، a کدام است؟ *(ریاضی ۹۸)*



۱) -۸

۲) -۷

۳) -۵

۴) -۴

پاسخ: گزینهٔ «۱» ـ در $x = ۰$ نقطهٔ min نسبی داریم، یعنی $f'(۰) = ۰$. این نتیجه می‌دهد:

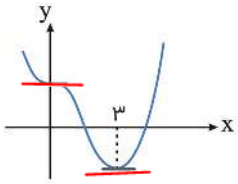
$$f'(x) = ۱۲x^۳ + ۳ax^۲ + ۲bx + c \Rightarrow f'(۰) = c = ۰$$

نقطهٔ $x = ۱$ هم عطف است و هم مماس افقی: $f'(۱) = f''(۱) = ۰$. یعنی:

$$f''(x) = ۳۶x^۲ + ۶ax + ۲b \Rightarrow \begin{cases} f'(۱) = ۰ \\ f''(۱) = ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۱۲ + ۳a + ۲b = ۰ \\ ۳۶ + ۶a + ۲b = ۰ \end{cases}$$

از حل این دستگاه داریم: $a = -۸ \ , \ b = ۶$

تمرین: شکل زیر، نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{1}{4}x^4+ax^3+bx^2+2$ می‌باشد. $a+b$ کدام است؟ *(تجربی ۹۰)*



۱) ۱-

۲) صفر

۳) ۱

۴) ۲

پاسخ: گزینهٔ «۱» ـ تابع در نقطه‌ای به طول $x=3$ مینیمم نسبی دارد و خط مماس بر منحنی تابع در این نقطه افقی است، پس داریم:

$$f'(3)=0$$

$$f(x)=\frac{1}{4}x^4+ax^3+bx^2+2$$

$$f'(x)=x^3+3ax^2+2bx$$

$$f'(3)=0 \Rightarrow (3)^3+3a(3)^2+2b(3)=0 \Rightarrow 27+27a+6b=0 \Rightarrow 9+9a+2b=0 \quad (I)$$

همچنین یکی از نقاط عطف تابع، نقطه‌ای به طول $x=0$ است و چون تابع یک چندجمله‌ای است، پس $x=0$ ریشهٔ معادلهٔ $f''(x)=0$ خواهد بود، پس $f''(0)=0$ است.

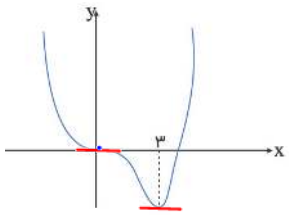
$$f''(x)=3x^2+6ax+2b$$

$$f''(0)=0 \Rightarrow 0+2b=0 \Rightarrow 2b=0 \Rightarrow b=0$$

با جایگذاری $b=0$ در معادلهٔ I داریم:

$$9+9a+2b=0 \xrightarrow{b=0} 9+9a=0 \Rightarrow 9a=-9 \Rightarrow a=-1$$

تمرین: شکل زیر، نمودار تابع $f(x)=x^4+ax^3+bx^2$ است. $f(-2)$ کدام است؟ *(ریاضی خارج از کشور ۹۸)*



$y'=4x^3+3ax^2+2bx$

$y'(0)=0+0+0=0$

$y''=12x^2+6ax+2b$

$y''(0)=0+0+2b=0 \rightarrow b=0$

۱) ۳۲

۲) ۳۶

۳) ۴۰

۴) ۴۸

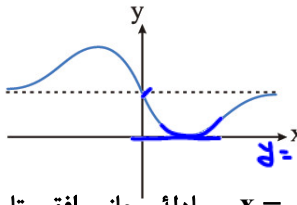
پاسخ: گزینهٔ «۴» ـ با توجه به نمودار، تابع در مبدأ مختصات عطف دارد. با توجه به شکل $f(0)=f'(0)=f''(0)=0$ است، پس $b=0$ می‌باشد. تابع در نقطه‌ای به طول ۳، مماس افقی دارد؛ پس:

$$f'(x)=4x^3+3ax^2$$

$$f'(3)=0 \Rightarrow 4\times 3^3+3a\times 3^2=0 \Rightarrow 3^3(4+a)=0 \Rightarrow a=-4$$

$$\Rightarrow f(x)=x^4-4x^3 \Rightarrow f(-2)=(-2)^4-4(-2)^3=(-2)^3(-2-4)=48$$

تمرین: شکل زیر، نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{ax^۲+bx+۸}{x^۲+۴}$ است. $a+b$ کدام است؟ (تجربی ۹۴)



A(۰,۲) ∈ f

A(۰,۲) ∈ y = a ⟶ a = ۲

۱) ۷-

۲) ۶-

۳) ۹

۴) ۱۰

پاسخ: گزینهٔ «۲» ـ نمودار و مجانب افقی تابع در نقطه‌ای به طول $x=۰$ برخورد کرده‌اند، بنابراین به ازای $x=۰$، معادلهٔ مجانب افقی تابع به دست می‌آید.

$$f(x)=\frac{ax^۲+bx+۸}{x^۲+۴} \xrightarrow{x=۰} f(۰)=\frac{۰+۰+۸}{۰+۴}=\frac{۸}{۴}=۲ \Rightarrow y=۲ \text{ مجانب افقی}$$

از طرفی برای به دست آوردن مجانب افقی، حد تابع را وقتی $x\to\pm\infty$، محاسبه می‌کنیم، پس داریم:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{ax^۲+bx+۸}{x^۲+۴}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{ax^۲}{x^۲}=a \Rightarrow y=a \text{ مجانب افقی}$$

بنابراین $a=۲$ است.

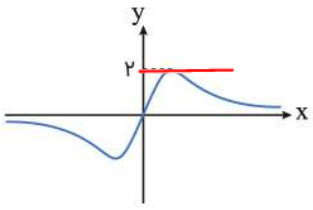
با توجه به نمودار، مینیمم نسبی تابع بر خط $y=۰$ مماس است، پس معادلهٔ تلاقی خط $y=۰$ و ضابطهٔ تابع ریشهٔ مضاعف دارد:

$$\left.\begin{array}{l} y=۰ \\ f(x)=\frac{۲x^۲+bx+۸}{x^۲+۴} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{۲x^۲+bx+۸}{x^۲+۴}=۰ \Rightarrow ۲x^۲+bx+۸=۰ \xrightarrow[\Delta=۰]{\text{ریشهٔ مضاعف}} b^۲-۴(۲)(۸)=۰$$

$$\Rightarrow b^۲-۶۴=۰ \Rightarrow b^۲=۶۴ \Rightarrow b=\pm۸$$

با توجه به نمودار، نقطهٔ مینیمم نسبی تابع دارای طولی مثبت است؛ بنابراین ریشهٔ مضاعف معادله باید مثبت باشد، پس $b=-۸$ قابل‌قبول است. داریم: $a+b=۲-۸=-۶$

تمرین: شکل زیر نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{ax+b}{x^۲+۱}$ می‌باشد. a کدام است؟ (سراسری تجربی)



f(۰) = b/۱ = ۰ ⟶ b = ۰

y = ax/(x²+۱)

ax/(x²+۱) = ۲ ⟶ ۲x²+۲ = ax

۲x² − ax + ۲ = ۰

Δ = (−a)² − ۴(۲)(۲) = ۰

y = −۲

۱) ۱

۲) ۲

۳) ۳

۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ «۴» ـ نمودار تابع از مبدأ مختصات عبور می‌کند؛ بنابراین مختصات نقطهٔ $(۰,۰)$ در ضابطهٔ تابع صدق می‌کند:

$$f(x)=\frac{ax+b}{x^۲+۱} \xrightarrow{f(۰)=۰} ۰=\frac{۰+b}{۰+۱} \Rightarrow b=۰ \Rightarrow f(x)=\frac{ax}{x^۲+۱}$$

y = −۴x/(x²+۱) ← a = −۴ → y = ۲x/(x²+۱) ✓

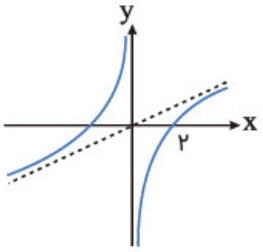
تابع در نقطه‌ای به عرض ۲ دارای ماکسیمم نسبی است، پس خط $y=۲$ بر منحنی تابع مماس است؛ بنابراین معادلهٔ تلاقی خط $y=۲$ و ضابطهٔ تابع، ریشهٔ مضاعف دارد.

$$\left.\begin{array}{l} y=۲ \\ f(x)=\frac{ax}{x^۲+۱} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{ax}{x^۲+۱}=۲ \Rightarrow ax=۲x^۲+۲ \Rightarrow ۲x^۲-ax+۲=۰$$

$\xrightarrow{\Delta=0}$ $(-a)^2-4(2)(2)=0 \Rightarrow a^2-16=0 \Rightarrow a^2=16 \Rightarrow a=\pm 4$

اما با توجه به نمودار، وقتی $x>0$، $f(x)>0$ است و چون مخرج تابع همواره مثبت است، پس به ازای $x>0$ باید $ax>0$ باشد؛ بنابراین $a=4$ قابل‌قبول است.

تمرین: شکل زیر منحنی نمایش تغییرات تابع $y=\frac{ax^2-1}{x+b}$ است. $a+b$ کدام است؟ (تجربی ۹۶)



۱) صفر

۲) $\frac{1}{4}$

۳) $\frac{1}{2}$

۴) ۲

پاسخ: گزینهٔ «۲»

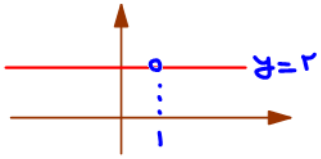
نکته اول: محور yها یا همان خط $x=0$ مجانب قائم تابع است؛ بنابراین $x=0$ ریشهٔ مخرج است. هم‌چنین نمودار تابع محور xها را در نقطه‌ای به طول ۲ قطع می‌کند؛ بنابراین $f(2)=0$ است.

نکته دوم:

$x=0$ ریشهٔ مخرج : $0+b=0 \Rightarrow b=0 \Rightarrow f(x)=\frac{ax^2-1}{x}$

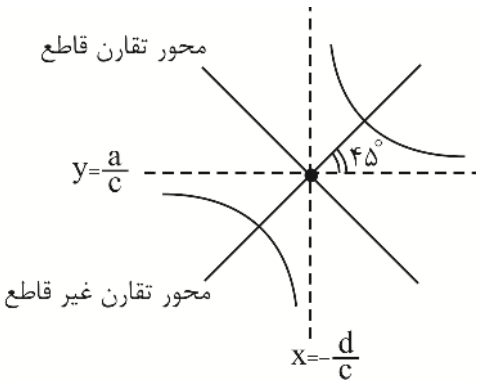
$f(2)=0 \Rightarrow \frac{4a-1}{2}=0 \Rightarrow 4a-1=0 \Rightarrow 4a=1 \Rightarrow a=\frac{1}{4}$

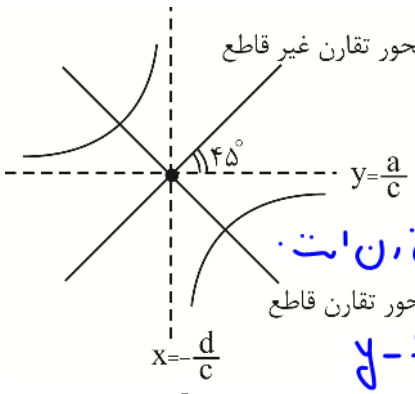
$a+b=\frac{1}{4}+0=\frac{1}{4}$



رسم نمودار تابع هموگرافیک

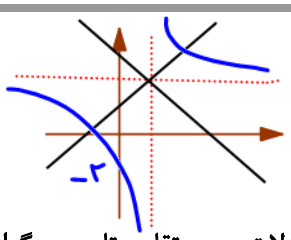
تابع $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ با شرط $\frac{a}{c}\neq\frac{b}{d}$ تابع هموگرافیک نام دارد. این تابع روی کل دامنه‌اش، نه صعودی است و نه نزولی (چون مجانب قائم دارد)





۱) محل برخورد مجانب‌ها یعنی نقطهٔ $(-\frac{d}{c},\frac{a}{c})$، مرکز تقارن تابع است.

۲) تابع هموگرافیک دو محور تقارن با شیب‌های ± 1 دارد که از مرکز تقارن تابع می‌گذرند که یکی از آن‌ها نمودار تابع را قطع می‌کند.



معادلات محور تقارن تابع هموگرافیک، از جمع و کم کردن معادلات مجانب‌ها به دست می‌آید. به عنوان مثال در تابع $y=\frac{3x+2}{x-1}$:

$$\text{مجانب افقی}: y=3,\ \text{مجانب قائم}: x=1 \Rightarrow \begin{cases} \xrightarrow{+} & y+x=3+1 \Rightarrow y+x=4 \ \text{غیرقاطع} \\ \xrightarrow{-} & y-x=3-1 \Rightarrow y-x=2 \ \text{قاطع} \end{cases}$$

نکته: چون دترمینان ضرایب، یعنی $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=-5$ منفی است، پس محور تقارنی که علامت وسط x و y آن منفی است، نمودار تابع را قطع می‌کند.

تمرین: تابع با ضابطهٔ $y=ax+b+\frac{x^2}{2x-1}$ تابع هموگرافیکی است که محورyها را در نقطه‌ای به عرض ۱ قطع می‌کند. $a+b$ کدام است؟ (سراسری ریاضی)

۱) ۲ ۲) -2 ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $-\frac{1}{2}$

پاسخ: اولاً: $f(0)=1$ است، بنابراین:

$$1=0+b+0 \Rightarrow b=1$$

ثانیاً: تابع هموگرافیک است و بعد از مخرج مشترک‌گیری، صورت کسر باید از درجهٔ یک یا صفر باشد، بنابراین:

$$y=ax+1+\frac{x^2}{2x-1}=\frac{(2a+1)x^2+\cdots}{2x-1} \Rightarrow 2a+1=0 \Rightarrow a=-\frac{1}{2}$$

در نتیجه $a+b=(\frac{-1}{2})+1=\frac{1}{2}$.

تمرین: خط به معادلهٔ $y=x+4$ محور تقارن منحنی تابع $y=\frac{(2a-1)x+3}{2x+a}$ است. عرض از مبدأ محور تقارن دیگر آن کدام است؟ (سراسری ریاضی)

۱) -2 ۲) -1 ۳) ۱ ۴) ۲

پاسخ: محور تقارن از مرکز تقارن می‌گذرد، پس:

$$(-\frac{a}{2},\frac{2a-1}{2}) \xrightarrow{y=x+4} \frac{2a-1}{2}=-\frac{a}{2}+4 \Rightarrow a=3$$

پس معادلهٔ تابع به صورت $y=\frac{5x+3}{2x+3}$ است و معادلهٔ محور تقارن‌های آن بدین صورت است:

$$\text{مجانب قائم}: x=\frac{-3}{2},\ \text{مجانب افقی}: y=\frac{5}{2} \Rightarrow \begin{cases} \xrightarrow{-} & y-x=4 \\ \xrightarrow{+} & y+x=1 \Rightarrow \text{عرض از مبدأ}=1 \end{cases}$$

تمرین: منحنی به معادلهٔ $y=\frac{x+1}{1-2x}$، محورهای مختصات را در نقاط A و B قطع می‌کند. فاصلهٔ مرکز تقارن این منحنی از وتر AB کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۲) $\sqrt{2}$ ۳) $\sqrt{5}$ ۴) $2\sqrt{2}$

پاسخ: ابتدا محل تلاقی نمودار تابع $y=\frac{x+1}{1-2x}$ را با محورهای مختصات به دست می‌آوریم:

$$A(-1,0),\ B(0,1)$$

اکنون معادلهٔ خط گذرنده از نقاط A و B را پیدا می‌کنیم. داریم:

$$y-0=\frac{0-1}{-1-0}(x-(-1)) \Rightarrow y=x+1$$

مرکز تقارن منحنی به معادلهٔ $y=\frac{x+1}{-2x+1}$، نقطهٔ $(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$ است.

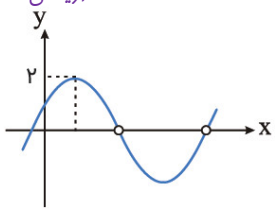
از آن‌جایی که فاصلهٔ نقطهٔ (x_0, y_0) از خط $ax+by+c=0$ برابر است با $D=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$، پس:

فاصلهٔ نقطهٔ $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ از خط $x-y+1=0$ برابر است با:

$$D=\frac{|\frac{1}{2}\times 1-1\times(-\frac{1}{2})+1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

نمودارشناسی مثلثاتی

تمرین: شکل زیر نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{a\sin 2x+b}{\sin x+\cos x}$، در یک دورهٔ تناوب می‌باشد. a کدام است؟ (ریاضی ۹۳)



۱) -1

۲) 1

۳) $\sqrt{2}$

۴) 2

پاسخ: گزینهٔ «۳» ـ تابع $f(x)$، یک تابع کسری مثلثاتی است. با توجه به نمودار تابع فاقد مجانب قائم است؛ بنابراین ریشه‌های مخرج کسر، قطعاً ریشه‌های صورت کسر نیز هست، پس داریم:

$$f(x)=\frac{a\sin 2x+b}{\sin x+\cos x}$$

$$\sin x+\cos x=0 \Rightarrow \sin x=-\cos x \xrightarrow{\div\cos x} \tan x=-1 \Rightarrow x=k\pi-\frac{\pi}{4} \xrightarrow{k=1} x=\frac{3\pi}{4}$$

$$a\sin 2x+b=0 \xrightarrow{x=\frac{3\pi}{4}} a\sin 2(\frac{3\pi}{4})+b=0 \Rightarrow a\sin\frac{3\pi}{2}+b=0 \Rightarrow -a+b=0 \Rightarrow a=b$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{a\sin 2x+a}{\sin x+\cos x}=\frac{a(\sin 2x+1)}{\sin x+\cos x}$$

می‌دانیم:

$$\sin 2x=2\sin x\cos x \Rightarrow 1+\sin 2x=\sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x\cos x=(\sin x+\cos x)^2$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{a(\sin x+\cos x)^2}{\sin x+\cos x}=a(\sin x+\cos x)$$

از طرفی:

$$\sin x+\cos x=\sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x)=\sqrt{2}(\sin x\cos\frac{\pi}{4}+\cos x\sin\frac{\pi}{4})=\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})$$

$$\Rightarrow f(x)=a\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})$$

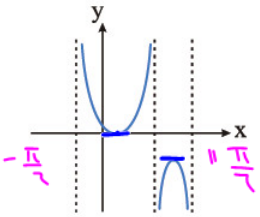
می‌دانیم $|\sin(x+\frac{\pi}{4})|\le 1$ است، پس:

$$\sin(x+\frac{\pi}{4})\le 1 \Rightarrow a\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})\le a\sqrt{2} \Rightarrow f(x)\le a\sqrt{2}$$

با توجه به نمودار، بیشترین مقدار تابع $f(x)$ برابر با ۲ است، پس:

$$a\sqrt{2}=2 \Rightarrow a=\sqrt{2}$$

تمرین: شکل زیر نمودار تابع با ضابطهٔ $y=\frac{1+a\sin x}{1+b\sin x}$ در بازهٔ $[\frac{-\pi}{6},\frac{11\pi}{6}]$ می‌باشد. دوتایی مرتب (a,b) کدام است؟ (سراسری ریاضی)



۱) $(1,2)$
۲) $(-1,2)$
۳) $(2,-1)$
۴) $(-2,1)$

پاسخ: گزینهٔ «۲» ـ با توجه به شکل $x=\frac{-\pi}{6}$ و $x=\frac{11\pi}{6}$ مجانب‌های قائم تابع هستند؛ بنابراین به ازای این دو مقدار، مخرج تابع برابر صفر می‌شود. به ازای $x=\frac{-\pi}{6}$ داریم:

$$1+b\sin x=0 \xrightarrow{x=-\frac{\pi}{6}} 1+b\sin(-\frac{\pi}{6})=0 \Rightarrow 1-b\sin\frac{\pi}{6}=0 \Rightarrow 1-\frac{b}{2}=0 \Rightarrow \frac{b}{2}=1 \Rightarrow b=2$$

اکنون با حل معادلهٔ $y'=0$، طول نقاط اکسترمم تابع را به دست می‌آوریم:

$$y=\frac{1+a\sin x}{1+2\sin x} \Rightarrow y'=\frac{a\cos x(1+2\sin x)-2\cos x(1+a\sin x)}{(1+2\sin x)^2}=\frac{(a-2)\cos x}{(1+2\sin x)^2}$$

$$y'=0 \Rightarrow (a-2)\cos x=0 \Rightarrow \begin{cases} a-2=0 \Rightarrow a=2 \text{ غ.ق.ق} \\ \cos x=0 \Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{2} \xrightarrow[k=0]{x>0} x=\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

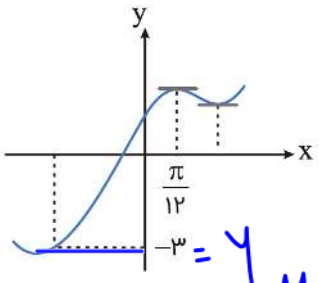
به ازای $a=2$، $y=a$ یک تابع ثابت بوده و نمودار آن یک خط راست خواهد بود.

منحنی تابع y در نقطه‌ای به طول $x=\frac{\pi}{2}$ بر محور xها مماس است؛ بنابراین داریم: $y(\frac{\pi}{2})=0$

$$y=\frac{1+a\sin x}{1+2\sin x} \xrightarrow{(\frac{\pi}{2},0)} 0=\frac{1+a\sin\frac{\pi}{2}}{1+2\sin\frac{\pi}{2}} \Rightarrow \frac{1+a}{3}=0 \Rightarrow 1+a=0 \Rightarrow a=-1$$

بنابراین: $(a,b)=(-1,2)$

تمرین: شکل زیر قسمتی از نمودار تابع $f(x)=a\cos 4x+b\sin 2x$ می‌باشد. b کدام است؟ (ریاضی خارج از کشور ۹۱)



۱) ۲
۲) -2
۳) $\sqrt{3}$
۴) $-\sqrt{3}$

پاسخ: گزینهٔ «۱» ـ با توجه به شکل، تابع در نقطه‌ای با طول $x=\frac{\pi}{12}$ دارای مماس افقی است؛ پس داریم: $f'(\frac{\pi}{12})=0$

$$f(x)=a\cos 4x+b\sin 2x \;;\; D_f=\mathbb{R}$$

$$f'(x)=-4a\sin 4x+2b\cos 2x \xrightarrow{f'(\frac{\pi}{12})=0} f'(\frac{\pi}{12})=-4a\sin 4(\frac{\pi}{12})+2b\cos 2(\frac{\pi}{12})=-4a\sin\frac{\pi}{3}+2b\cos\frac{\pi}{6}$$

$$= -۴(\frac{\sqrt{۳}}{۲}) + ۲b(\frac{\sqrt{۳}}{۲}) = \sqrt{۳}(-۲a + b) = ۰ \Rightarrow b = ۲a \quad (I)$$

با توجه به نمودار، مقدار به ازای اولین مینیمم نسبی تابع با طول منفی برابر ۳- است. با حل معادلهٔ $f'(x) = ۰$ طول نقاط اکسترمم تابع را به دست می‌آوریم:

$$f'(x) = ۰ \Rightarrow -۴a\sin ۴x + ۲b\cos ۲x = ۰ \Rightarrow ۲b\cos ۲x = ۴a\sin ۴x \xrightarrow{b=۲a} \cos ۲x = \sin ۴x$$

$$\xrightarrow{\sin ۲\alpha = ۲\sin\alpha\cos\alpha} \cos ۲x = ۲\sin ۲x\cos ۲x \Rightarrow ۲\sin ۲x\cos ۲x - \cos ۲x = ۰ \Rightarrow \cos ۲x(۲\sin ۲x - ۱) = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos ۲x = ۰ \Rightarrow ۲x = k\pi + \frac{\pi}{۲} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{۲} + \frac{\pi}{۴} \\ \sin ۲x = ۰ \Rightarrow \begin{cases} ۲x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۶} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{۱۲} \\ ۲x = ۲k\pi + \frac{۵\pi}{۶} \Rightarrow x = k\pi + \frac{۵\pi}{۱۲} \end{cases} \end{cases}$$

به ازای $k = -۱$ داریم:

$$x = \frac{k\pi}{۲} + \frac{\pi}{۴} \xrightarrow{k=-۱} x = \frac{-\pi}{۲} + \frac{\pi}{۴} = -\frac{\pi}{۴}$$

$$x = k\pi + \frac{\pi}{۱۲} \xrightarrow{k=-۱} x = -\pi + \frac{\pi}{۱۲} = -\frac{۱۱\pi}{۱۲}$$

$$x = k\pi + \frac{۵\pi}{۱۲} \xrightarrow{k=-۱} x = -\pi + \frac{۵\pi}{۱۲} = -\frac{۷\pi}{۱۲}$$

بزرگ‌ترین طول اکسترمم، $x = \frac{-\pi}{۴}$ است؛ بنابراین داریم: $f(-\frac{\pi}{۴}) = -۳$

$$\Rightarrow a\cos ۴(-\frac{\pi}{۴}) + b\sin ۲(-\frac{\pi}{۴}) = -۳ \Rightarrow -a - b = -۳ \Rightarrow a + b = ۳$$

$$\xrightarrow{b=۲a} a + ۲a = ۳ \Rightarrow ۳a = ۳ \Rightarrow a = ۱ \Rightarrow b = ۲(۱) = ۲$$

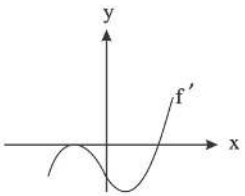
۱ شیب خط مماس در نقطهٔ عطف نمودار تابع با ضابطهٔ $y = \tan\frac{x}{۲}$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) $\frac{۱}{۴}$

۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) ۱

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۲

۲ شکل زیر نمودار تابع مشتق f است، نمودار تابع f کدام وضعیت را دارد؟



۱) یک مینیمم نسبی - دو نقطهٔ عطف

۲) یک ماکزیمم نسبی - دو نقطهٔ عطف

۳) ماکزیمم و مینیمم نسبی - دو نقطهٔ عطف

۴) ماکزیمم و مینیمم نسبی - یک نقطهٔ عطف

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۲

۳ نقطهٔ عطف نمودار تابع با ضابطهٔ $y = x - ۳\sqrt[۳]{x}$ در $x = a$ است، مجموعهٔ مقادیر a کدام است؟

۱) $\{-۱, ۱\}$ ۲) $\{۰, ۳\}$

۳) $\{۰\}$ ۴) $\varnothing$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۳

۴ اگر T دورهٔ تناوب اصلی تابع با ضابطهٔ $y = \frac{\sin x}{۱ + \cos x}$ باشد این منحنی روی بازهٔ $(\pi, \pi + T)$ چند نقطهٔ عطف دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۳ ۴) فاقد عطف

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۳

۵ مجموعهٔ طول نقاط عطف نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x) = \begin{cases} x^۳ - ۳x^۲ & ; x \geq -۱ \\ -۱۳ - \frac{۹}{x} & ; x < -۱ \end{cases}$ کدام است؟

۱) $\{-۱\}$ ۲) $\{۱\}$

۳) $\{-۱, ۱\}$ ۴) $\varnothing$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۹

۶ طول نقطهٔ عطف تابع $f(x)=\begin{cases}\frac{۳-x^۲}{۲} & ; x<۱\\ \frac{۱}{x} & ; x\geq ۱\end{cases}$، در صورت وجود کدام است؟

۱) -۱
۲) صفر
۳) ۱
۴) فاقد نقطهٔ عطف

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۹

۷ مجموعهٔ طول نقاط عطف منحنی به معادلهٔ $y=x|x^۲-۴x|$، کدام است؟

۱) $\{\frac{۴}{۳}\}$
۲) $\{۰,\frac{۴}{۳},۴\}$
۳) $\{\frac{۴}{۳},۴\}$
۴) $\{۰,\frac{۴}{۳}\}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۲

۸ فرض کنید A و B نقاط مینیمم نسبی و C و D نقاط عطف تابع $f(x)=x^۴-۶x^۲+۵$ باشند. زاویهٔ بین پاره‌خط‌های AB و CD، کدام است؟

۱) صفر
۲) ۳۰
۳) ۴۵
۴) ۶۰

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۰

۹ به ازای چند مقدار صحیح k، نقطهٔ عطف منحنی $y=\frac{k}{۲}x^۳-(k+۲)x^۲$ در ناحیه سوم محورهای مختصات قرار دارد؟

۱) بیش از ۲
۲) ۲
۳) ۱
۴) صفر

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۲

۱۰ خط مماس بر منحنی $y=x^۳+ax^۲+bx-۱$ در نقطهٔ $(-۱,-۴)$ از منحنی عبور می‌کند. حاصل $\frac{a}{b}$ کدام است؟

۱) ۰/۳
۲) ۰/۴
۳) ۰/۶
۴) ۰/۸

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۳

۱۱ تقعر نمودار تابع با ضابطهٔ $y=\sin x+\frac{x^۲}{\pi}$ وقتی $۰\leq x\leq \frac{\pi}{۲}$، به کدام صورت است؟

۱) روبه‌پایین
۲) روبه‌بالا
۳) ابتدا روبه‌پایین و سپس روبه‌بالا
۴) ابتدا روبه‌بالا و سپس روبه‌پایین

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۱

۱۲ مجموعهٔ طول نقاطی که تقعر منحنی به معادلهٔ $y = \frac{-۲}{x^۲ + ۳}$، روبه‌بالا باشد، به کدام صورت است؟

۱) $|x| < ۱$
۲) $|x| < ۲$
۳) $|x| > \sqrt{۲}$
۴) $|x| > \sqrt{۳}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۰

۱۳ به ازای کدام مجموعه مقادیر a، تقعر منحنی به معادلهٔ $y = x^۴ + ax^۳ + \frac{۳}{۲}x^۲$، همواره روبه‌بالا است؟

۱) $-۱ < a < ۱$
۲) $-۱ < a < ۲$
۳) $-۲ < a < ۱$
۴) $-۲ < a < ۲$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۲

۱۴ نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x) = \sin^۲x - ۲\sin x\,;\ x \in [۰, ۲\pi]$، در کدام بازه صعودی و تقعر آن روبه‌پایین است؟

۱) $(\frac{۷\pi}{۶}, \frac{۳\pi}{۲})$
۲) $(\frac{۳\pi}{۲}, \frac{۱۱\pi}{۶})$
۳) $(\frac{\pi}{۲}, \frac{۵\pi}{۶})$
۴) $(\frac{\pi}{۲}, \frac{۷\pi}{۶})$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۶

۱۵ به ازای چند مقدار صحیح و منفی k، نقطهٔ عطف منحنی $y = kx^۳ + (k+۱)x^۲$ در ناحیهٔ دوم محورهای مختصات قرار دارد؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) بیش از ۲
۴) صفر

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۲

۱۶ طول نقطهٔ عطف نمودار تابع $y = (۵ - x)\sqrt[۳]{x^۲}$، کدام است؟

۱) -۱
۲) صفر
۳) ۱
۴) ۲

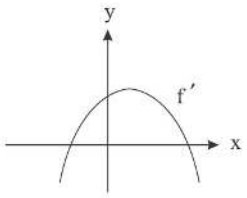
کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۵

۱۷ طول نقطهٔ عطف منحنی به معادلهٔ $y = \frac{x}{۱ + |x|}$، کدام است؟

۱) -۱
۲) صفر
۳) ۱
۴) فاقد نقطهٔ عطف

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

۱۸ نمودار f' مشتق تابع f به‌صورت شکل زیر است. تابع f از نظر نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی و نقطهٔ عطف چگونه است؟



۱) فقط یک ماکزیمم در سمت راست محور yها

۲) یک ماکزیمم و یک مینیمم و یک نقطهٔ عطف در سمت راست محور yها

۳) یک مینیمم در سمت چپ محور yها، یک ماکزیمم و یک نقطهٔ عطف در سمت راست محور yها

۴) یک ماکزیمم در سمت چپ محور yها، یک مینیمم و یک نقطهٔ عطف در سمت راست محور yها

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۴

۱۹ تقعر نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x) = x^۲|x - ۱|$ در بازهٔ (a, b) روبه‌پایین است. بیشترین مقدار $(b - a)$ کدام است؟

۱) ∞ ۲) $\frac{۱}{۳}$

۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۴}{۳}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۴

۲۰ تقعر تابع با ضابطهٔ $y = x^۲|x - ۳|$ در بازهٔ (a, b) به‌طرف yهای منفی است، بیشترین مقدار $b - a$ کدام است؟

۱) $\frac{۴}{۳}$ ۲) $\frac{۵}{۳}$

۳) ۲ ۴) ۳

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۶

۲۱ تقعر نمودار تابع با ضابطهٔ $y = x^{\frac{۴}{۳}} - ۴x^{\frac{۱}{۳}}$ در بازهٔ (a, b) روبه‌پایین است، بیشترین مقدار $(b - a)$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳

۳) ۴ ۴) ∞

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۷

۲۲ مجموعه نقاطی که تقعر نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x) = x^۲ + ۲\sqrt{۲}\cos x\,;\ ۰ \le x \le ۲\pi$ روبه‌بالا باشد، در کدام بازه است؟

۱) $(۰, \frac{۳\pi}{۴})$ ۲) $(\frac{\pi}{۴}, \frac{۳\pi}{۴})$

۳) $(\frac{\pi}{۴}, \frac{۷\pi}{۴})$ ۴) $(\frac{۳\pi}{۴}, \frac{۵\pi}{۴})$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۰

۲۳ فاصلهٔ نقطهٔ ماکزیمم نسبی و یک نقطهٔ عطف منحنی به معادلهٔ $y = x^۴ - ۶x^۲ + ۵$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۱۰}$ ۲) $\sqrt{۱۳}$

۳) $\sqrt{۱۷}$ ۴) $\sqrt{۲۶}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۴

۲۴ در کدام بازه تقعر تابع با ضابطهٔ $f(x) = x^{\frac{6}{5}} - 12x^{\frac{1}{5}}$ روبه‌پایین است؟

۱) $(-\infty, -8)$ ۲) $(-8, 0)$

۳) $(-4, 2)$ ۴) $(0, 2)$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۶

۲۵ طول نقطهٔ عطف نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x) = x^{\frac{5}{3}} - 10x^{\frac{2}{3}}$، کدام است؟

۱) -2 ۲) -2 و 0

۳) 2 ۴) 2 و 0

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۷

۲۶ طول نقطهٔ عطف نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x) = \frac{(2-x)^2}{x}$ کدام است؟

۱) -1 ۲) صفر

۳) 1 ۴) فاقد نقطهٔ عطف

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۰

۲۷ تقعر تابع به معادلهٔ $y = x^2 + \sqrt{x}$ در کدام بازه روبه‌پایین است؟

۱) $(0, \frac{1}{4})$ ۲) $(0, \frac{1}{2})$

۳) $(0, 1)$ ۴) $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۷

۲۸ تقعر نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x) = 6x^5 - 5x^4 + 2x + 7$ در بازهٔ $(a, +\infty)$ روبه‌بالا است. کمترین مقدار a کدام است؟

۱) -1 ۲) صفر

۳) $\frac{1}{2}$ ۴) 1

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۸

۲۹ منحنی نمایش تابع $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x$، در کدام بازه نزولی و تقعر آن روبه‌بالا است؟

۱) $(-1, 1)$ ۲) $(-1, 3)$

۳) $(1, 3)$ ۴) $(1, \infty)$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۱

۳۰ منحنی نمایش تابع $y = -x^۴ + ۴x^۳ - ۳$، در کدام بازه صعودی و تقعر آن روبه‌پایین است؟

۱) $(۲, ۳)$ ۲) $(۰, ۲)$

۳) $(۰, ۳)$ ۴) $(۲, +\infty)$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۱

۳۱ تقعر نمودار تابع $y = (x + ۳)\sqrt{x}$، در بازهٔ (a, b) روبه‌پایین است. بیشترین مقدار $b - a$، کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۳ ۴) $+\infty$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۲

۳۲ در کدام بازه، تابع با ضابطهٔ $f(x) = \frac{۱}{۴}x^۴ + \frac{۱}{۲}x^۳ - ۳x^۲$، صعودی و تقعر نمودار آن، روبه‌پایین است؟

۱) $(-۲, ۰)$ ۲) $(-۲, ۱)$

۳) $(-۱, ۲)$ ۴) $(۰, ۱)$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۳

۳۳ در کدام بازه، تابع با ضابطهٔ $f(x) = -x^۴ + ۸x^۳ - ۱۸x^۲$، نزولی و تقعر نمودار آن، روبه‌بالا است؟

۱) $(۱, ۳)$ ۲) $(۱, ۴)$

۳) $(۰, ۱)$ ۴) $(۰, ۳)$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۳

۳۴ نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x) = \cos^۲ x - ۲\cos x$، در کدام بازه، نزولی و تقعر آن روبه‌پایین است؟ $x \in [۰, ۲\pi]$

۱) $(\frac{\pi}{۲}, \frac{۲\pi}{۳})$ ۲) $(\pi, \frac{۴\pi}{۳})$

۳) $(\frac{۲\pi}{۳}, \pi)$ ۴) $(\frac{۴\pi}{۳}, \frac{۳\pi}{۲})$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۶

۳۵ اگر $A(۱, -۳)$ نقطهٔ عطف منحنی به معادلهٔ $y = ax^۳ - x^۲ - ۳x + b$ باشد، مقدار تابع در نقطهٔ ماکزیمم نسبی آن کدام است؟

۱) $\frac{۴}{۳}$ ۲) $\frac{۵}{۳}$

۳) $\frac{۷}{۳}$ ۴) $\frac{۸}{۳}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۶

۳۶ تقعر نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{x^۲+۹}{x^۲+۱۲}$ در بازهٔ (a,b) روبه‌بالا است، بیشترین مقدار $b-a$ کدام است؟

۱) ۲
۲) ۴
۳) ۶
۴) ۸

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۸

۳۷ خط مماس بر منحنی به معادلهٔ $y=x^۳-۳x^۲+۴$ در نقطهٔ عطف آن، محور xها را با کدام طول قطع می‌کند؟

۱) $\frac{۴}{۳}$
۲) $\frac{۵}{۳}$
۳) ۲
۴) ۳

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۶

۳۸ به ازای کدام مقدار a، نقطهٔ عطف تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{۲}{۳}x^۳-۳x^۲+ax$ روی نیمساز ناحیهٔ چهارم قرار دارد؟

۱) -۲
۲) -۱
۳) ۱
۴) ۲

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۸

۳۹ تقعر نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{۱}{x^۲+۱۲}$ در بازهٔ $(-a,a)$ روبه‌پایین است. بیشترین مقدار a کدام است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۳

۴۰ در کدام ناحیهٔ دستگاه محورهای مختصات، تقعر نمودار تابع با ضابطهٔ $y=x+\frac{۱}{x}$ به سمت بالا است؟

۱) اول
۲) دوم
۳) سوم
۴) چهارم

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۴

۴۱ نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=x+\frac{۱}{x}$، در کدام بازه، صعودی و تقعر آن روبه‌پایین است؟

۱) $(-\infty,-۱)$
۲) $(-۱,۰)$
۳) $(۰,۱)$
۴) $(۱,+\infty)$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۸

۴۲ تقعر منحنی به معادلهٔ $y = x\sqrt{x^۲ + ۲}$ در بازهٔ $(a, +\infty)$ روبه‌بالا است. کمترین مقدار a، کدام است؟

۱) صفر
۲) -۱
۳) ۱
۴) $-\infty$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۹۲

۴۳ خط راستی بر نمودار تابع $y = x^۳ - ۲x^۲ + ۳x$ مماس شده و از آن عبور می‌کند. شیب این خط کدام است؟

۱) $-\frac{۲}{۳}$
۲) $\frac{۲}{۳}$
۳) $\frac{۴}{۳}$
۴) $\frac{۵}{۳}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۷

۴۴ نمودار تابع $y = \sqrt[۳]{x^۴} - ۴\sqrt[۳]{x}$ در کدام بازه نزولی و تقعر آن روبه‌پایین است؟

۱) $(-۲, ۱)$
۲) $(۰, ۱)$
۳) $(-۲, ۰)$
۴) $(-\infty, -۲)$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۷

۴۵ تقعر منحنی با ضابطهٔ $f(x) = x^۴ - ۶x^۲$ در کدام بازه روبه‌پایین است؟

۱) $(-۱, ۱)$
۲) $(۱, ۲)$
۳) $(۱, +\infty)$
۴) $(-\infty, -۱)$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۱

۴۶ اگر $A(۱, -۲)$ نقطهٔ عطف منحنی به معادلهٔ $y = ax^۳ + bx^۲ - ۳x - ۱$ باشد، مقدار تابع در نقطهٔ ماکزیمم نسبی آن، کدام است؟

۱) ۴
۲) ۵
۳) ۶
۴) فاقد ماکزیمم نسبی

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۶

۴۷ اگر تابع‌هایی به‌صورت $f(x) = x^۳ - (m+۲)x^۲ + ۳x$ همواره صعودی باشند، آنگاه مجموعهٔ طول نقاط عطف این توابع، در کدام بازه است؟

۱) $[-۲, ۰]$
۲) $[-۲, ۲]$
۳) $[-۱, ۱]$
۴) $[۰, ۱]$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۴

۴۸ اگر $A(۱, -۱۱)$ نقطهٔ عطف نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x) = x^۳ + ax^۲ + bx$ باشد، آنگاه مقدار $f(-۱)$ کدام است؟

۱) ۳
۲) ۴
۳) ۵
۴) ۶

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

پاسخ Homework

۱ گزینه ۳

گام اول:

الف) شیب خط مماس بر منحنی تابع در یک نقطه واقع بر آن، برابر مقدار مشتق تابع در آن نقطه است.

ب) نقطهٔ $x = a$ نقطهٔ عطف تابع است هرگاه تابع در این نقطه پیوسته باشد، مماس واحد داشته و جهت تقعرش نیز عوض شود.

گام دوم:

ابتدا با محاسبهٔ مشتق اول و دوم تابع $y = \tan\frac{x}{۲}$، طول نقطهٔ عطف را به دست می‌آوریم.

$$y = \tan\frac{x}{۲} \Rightarrow y' = \frac{۱}{۲}(۱ + \tan^۲\frac{x}{۲})$$

$$y'' = \frac{۱}{۲}(۲ \times \frac{۱}{۲}\tan\frac{x}{۲})(۱ + \tan^۲\frac{x}{۲}) = \frac{۱}{۲}(\tan\frac{x}{۲})(۱ + \tan^۲\frac{x}{۲})$$

$$y'' = ۰ \xrightarrow{۱+\tan^۲\frac{x}{۲}\neq ۰} \tan\frac{x}{۲} = ۰ \Rightarrow \frac{x}{۲} = k\pi \Rightarrow x = ۲k\pi$$

به ازای $k \in \mathbb{Z}$، نقاط به فرم $x = ۲k\pi$، نقطهٔ عطف تابع $y = \tan\frac{x}{۲}$ هستند. مقدار مشتق تابع را در این نقاط به دست می‌آوریم.

$$y' = \frac{۱}{۲}(۱ + \tan^۲\frac{x}{۲}) \xrightarrow{x=۲k\pi} y' = \frac{۱}{۲}(۱ + \tan^۲\frac{۲k\pi}{۲}) = \frac{۱}{۲}(۱ + \tan^۲k\pi)$$

$$= \frac{۱}{۲}(۱ + ۰) = \frac{۱}{۲}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۲

۲ گزینه ۱

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۲

گام اول

الف) نقاط تقاطع نمودار تابع $f'(x)$ با محور xها (جایی که f' تغییر علامت می‌دهد)، نقاط اکسترمم تابع $f(x)$ است.

ب) نقاط اکسترمم تابع $f'(x)$، نقاط عطف تابع $f(x)$ است.

گام دوم

باتوجه‌به شکل، نمودار $f'(x)$ تنها در یک نقطه محور xها را قطع کرده است. قبل از این نقطه $f'(x) < ۰$ و بعد از آن $f'(x) > ۰$ است بنابراین تابع $f(x)$ دارای یک مینیمم نسبی است. دقت کنید نقاطی که $f'(x)$ بر محور xها مماس شده است، نقاط اکسترمم تابع نیست.

تابع f' دو نقطهٔ اکسترمم دارد (یک ماکزیمم نسبی و یک مینیمم نسبی)، بنابراین مقدار f'' در این نقاط برابر صفر است و مقدارش قبل و بعد از این نقاط تغییر علامت داده است، پس تابع f دو نقطهٔ عطف نیز دارد.

۳ گزینه ۳

گام اول:

نقطهٔ $x = a$، نقطهٔ عطف تابع f است هرگاه:

الف) تابع f در نقطهٔ $x = a$ پیوسته باشد.

ب) خط مماس تابع f در نقطهٔ $x = a$ موجود باشد.

ج) جهت تقعر تابع f در نقطهٔ $x = c$ عوض شود.

گام دوم:

مشتق اول و دوم تابع داده‌شده را محاسبه کرده و با تعیین علامت مشتق دوم آن، نقطه‌ای که در شرایط گام اول صدق کند را می‌یابیم.

$$y = x - ۳\sqrt[۳]{x} = x - ۳x^{\frac{۱}{۳}} \Rightarrow y' = ۱ - x^{-\frac{۲}{۳}} \Rightarrow y'' = \frac{۲}{۳}x^{-\frac{۵}{۳}} = \frac{۲}{۳\sqrt[۳]{x^۵}}$$

تابع $y = x - ۳\sqrt[۳]{x}$ در نقطهٔ $x = ۰$ پیوسته است و خط مماس واحد دارد زیرا:

$$y'_+(۰) = y'_-(۰) = -\infty$$

x	$-\infty$	۰	$+\infty$
y''	$-$	∄	$+$

همچنین باتوجه‌به جدول فوق علامت y'' قبل و بعد از نقطهٔ $x = ۰$ مخالف یکدیگر است؛ بنابراین مجموعه نقاط عطف تابع $y = x - ۳\sqrt[۳]{x}$ به‌صورت $\{۰\}$ است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۳

۴ گزینه ۱

باتوجه‌به فرمول‌های کمان ۲α، تابع y را ساده می‌کنیم. می‌دانیم:

$$\sin ۲\alpha = ۲\sin\alpha\cos\alpha \quad , \quad \cos ۲\alpha = ۲\cos^۲\alpha - ۱$$

$$y = \frac{\sin x}{۱+\cos x} = \frac{۲\sin\frac{x}{۲}\cos\frac{x}{۲}}{۱+۲\cos^۲\frac{x}{۲}-۱} = \frac{۲\sin\frac{x}{۲}\cos\frac{x}{۲}}{۲\cos^۲\frac{x}{۲}} = \tan\frac{x}{۲}$$

دورهٔ تناوب تابع مثلثاتی $y = \tan ax$ از رابطهٔ $T = \frac{\pi}{|a|}$ به دست می‌آید، بنابراین:

$$y = \tan\frac{x}{۲} \Rightarrow T = \frac{\pi}{|\frac{۱}{۲}|} = \frac{\pi}{\frac{۱}{۲}} = ۲\pi$$

اکنون طول نقاط عطف تابع y را بر روی بازهٔ $(\pi, ۳\pi)$ به دست می‌آوریم، پس مشتق اول و دوم تابع را محاسبه و ریشه‌های y'' را تعیین می‌کنیم.

$$y = \tan\frac{x}{۲} \Rightarrow y' = \frac{۱}{۲}(۱+\tan^۲\frac{x}{۲})$$

$$y'' = \frac{۱}{۲}(\tan\frac{x}{۲})(۱+\tan^۲\frac{x}{۲}) \Rightarrow y'' = ۰$$

$$\xrightarrow{۱+\tan^۲\frac{x}{۲}\neq ۰} \tan\frac{x}{۲} = ۰ \Rightarrow \frac{x}{۲} = k\pi \Rightarrow x = ۲k\pi \xrightarrow{x\in(\pi,۳\pi)} x = ۲\pi$$

بنابراین تابع $y = \frac{\sin x}{۱+\cos x}$ تنها یک نقطهٔ عطف بر روی بازهٔ $(\pi, ۳\pi)$ دارد.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۳

۵ گزینه ۳

گام اول:

$x = a$ طول نقطهٔ عطف تابع f است هرگاه:

الف) تابع f در نقطهٔ $x = a$ پیوسته باشد.

ب) خط مماس تابع f در نقطهٔ $x = a$ موجود و واحد باشد.

ج) جهت تقعر تابع f در نقطهٔ $x = a$ عوض شود.

گام دوم:

مشتق اول و دوم تابع f را به دست آورده و شرایط گام اول را بررسی می‌کنیم.

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x^2 & ; x \geq -1 \\ -13 - \frac{9}{x} & ; x < -1 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^+} f(x) = -4$$

تابع f در $x = -1$ پیوسته است.

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 6x & ; x > -1 \\ \frac{9}{x^2} & ; x < -1 \end{cases} \Rightarrow f'_+(-1) = f'_-(-1) = 9$$

تابع f در نقطهٔ $x = -1$ دارای مماس واحد است.

$$f''(x) = \begin{cases} 6x - 6 & ; x > -1 \\ -\frac{18}{x^3} & ; x < -1 \end{cases}$$

$$f''_+(-1) = -12 \ , \ f''_-(-1) = 18$$

اکنون با تعیین علامت تابع $f''(x)$ داریم:

$$6x - 6 = 0 \Rightarrow x = 1$$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$6x-6$				$-$	0	$+$	
$-\frac{18}{x^3}$	0	$+$					
y''	0	$+$		$-$	0	$+$	

تابع $f(x)$ در دو نقطهٔ $x = 1$ و $x = -1$ پیوسته و دارای مماس واحد است همچنین قبل و بعد از این دو نقطه تغییر علامت می‌دهد؛ بنابراین طول نقاط عطف تابع f به‌صورت مجموعهٔ $\{-1, 1\}$ است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۹

۶ گزینه ۳

نکته:

$x = a$ طول نقطهٔ عطف تابع f است هرگاه:

الف) تابع f در نقطهٔ $x = a$ پیوسته باشد.

ب) خط مماس تابع f در نقطهٔ $x = a$ موجود باشد.

ج) جهت تقعر تابع f در نقطهٔ $x = a$ عوض شود.

ضابطهٔ مشتق اول و دوم تابع f را به دست آورده و شرایط بیان شده در نکته را بررسی می‌کنیم.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{۳ - x^۲}{۲} & ; x < ۱ \\ \frac{۱}{x} & ; x \geq ۱ \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \to ۱^+} f(x) = \lim_{x \to ۱^-} f(x) = f(۱) = ۱$$

تابع f در تمام نقاط $\mathbb{R}$ ازجمله در نقطهٔ $x = ۱$ پیوسته است.

$$f'(x) = \begin{cases} -x & ; x < ۱ \\ -\frac{۱}{x^۲} & ; x > ۱ \end{cases} \Rightarrow f'_+(۱) = f'_-(۱) = -۱$$

تابع f در تمام نقاط $\mathbb{R}$ و ازجمله در نقطهٔ $x = ۱$ مشتق‌پذیر و دارای مماس واحد است.

$$f''(x) = \begin{cases} -۱ & ; x < ۱ \\ \frac{۲}{x^۳} & ; x > ۱ \end{cases}$$

$$f''_+(۱) = ۲ \quad , \quad f''_-(۱) = -۱$$

تابع f'' قبل و بعد از نقطهٔ $x = ۱$ تغییر علامت داده است؛ چون سایر شرایط (پیوستگی و داشتن خط مماس واحد) نیز برقرار بود پس این نقطه، نقطهٔ عطف تابع $f(x)$ خواهد بود.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۹

۷ گزینه ۴

گام اول:

$x = a$ طول نقطهٔ عطف تابع f است هرگاه:

الف) تابع f در نقطهٔ $x = a$ پیوسته باشد.

ب) خط مماس تابع f در نقطهٔ $x = a$ موجود باشد.

ج) جهت تقعر تابع f در نقطهٔ $x = a$ عوض شود.

گام دوم:

ابتدا با تعیین علامت عبارت درون قدر مطلق، تابع داده‌شده را ساده می‌کنیم، سپس بررسی می‌کنیم چه نقاطی شرایط ذکرشده در گام را دارند.

$$x^۲ - ۴x = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \\ x = ۴ \end{cases}$$

x		۰		۴	
$x^۲-۴x$	$+$	۰	$-$	۰	$+$

$$\Rightarrow y = x|x^۲ - ۴x| = \begin{cases} x(x^۲ - ۴x) & ; x > ۴ \\ x(-x^۲ + ۴x) & ; ۰ \le x \le ۴ \\ x(x^۲ - ۴x) & ; x < ۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow y = \begin{cases} x^۳ - ۴x^۲ & ; x > ۴ \\ -x^۳ + ۴x^۲ & ; ۰ \le x \le ۴ \\ x^۳ - ۴x^۲ & ; x < ۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow y' = \begin{cases} ۳x^۲ - ۸x & ; x > ۴ \\ -۳x^۲ + ۸x & ; ۰ < x < ۴ \\ ۳x^۲ - ۸x & ; x < ۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow y'' = \begin{cases} ۶x - ۸ & ; x > ۴ \\ -۶x + ۸ & ; ۰ < x < ۴ \\ ۶x - ۸ & ; x < ۰ \end{cases}$$

با تعیین علامت تابع y'' داریم:

$$۶x - ۸ = ۰ \Rightarrow x = \frac{۴}{۳}$$

$$-۶x + ۸ = ۰ \Rightarrow x = \frac{۴}{۳}$$

x	$+\infty$	0		$\frac{4}{3}$		4	$+\infty$
$6x-8$	$-$			0		$+$	
$-6x+8$			$+$	0	$-$		
y''	$-$		$+$	0	$-$	$+$	

تابع y'' در سه نقطهٔ $0, \frac{4}{3}, 4$ تغییر علامت داده است. بررسی می‌کنیم در کدام‌یک از این نقاط شرط پیوستگی و داشتن مماس واحد نیز برقرار است.

تابع y در تمام نقاط $\mathbb{R}$ و ازجمله در سه نقطهٔ $0, \frac{4}{3}, 4$ پیوسته است. داریم:

$$y'_-(0) = y'_+(0) = 0 \quad , \quad y'_-(\frac{4}{3}) = y'_+(\frac{4}{3}) = \frac{16}{3}$$

اما در نقطهٔ $x = 4$ داریم:

$$y'_-(4) = -16 \ , \ y'_+(4) = 16$$

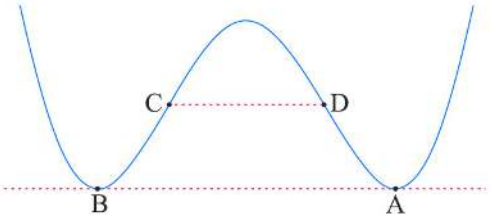
درنتیجه تابع y در نقطهٔ $x = 4$ مماس واحد ندارد.

بنابراین مجموعهٔ نقاط عطف تابع y عبارت است از: $\{0, \frac{4}{3}\}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۲

۸ گزینه ۱

راه‌حل اول: در تابع درجه چهارم $y = ax^۴ + bx^۲ + c$ اگر $b < ۰$ و $a > ۰$ باشد نمودار به‌صورت زیر است:



به دلیل تقارن شکل، پاره‌خط‌های AB و CD با هم موازی‌اند و درنتیجه زاویهٔ بین آن‌ها صفر درجه است.

راه‌حل دوم:

$$f'(x) = ۴x^۳ - ۱۲x = ۴x(x^۲ - ۳) = ۰ \Rightarrow x = ۰ , \pm\sqrt{۳}$$

$A(\sqrt{۳}, -۴)$ و $B(-\sqrt{۳}, -۴)$ نقاط مینیمم نسبی تابع هستند، پس شیب خط AB برابر صفر است. حال نقاط عطف تابع را می‌یابیم:

$$f''(x) = ۱۲x^۲ - ۱۲ = ۰ \Rightarrow x = \pm ۱$$

$C(۱, ۰)$ و $D(-۱, ۰)$ نقاط عطف تابع هستند، پس شیب خط CD نیز برابر صفر است؛ درنتیجه دو خط AB و CD موازی هستند.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۰

۹ گزینه ۳

نقطهٔ عطف تابع را به دست می‌آوریم:

$$y = \frac{k}{۲}x^۳ - (k+۲)x^۲$$
$$\Rightarrow y' = \frac{۳}{۲}kx^۲ - ۲(k+۲)x$$
$$\Rightarrow y'' = ۳kx - ۲(k+۲) = ۰ \Rightarrow x = \frac{۲(k+۲)}{۳k}$$

عرض نقطهٔ عطف را به دست می‌آوریم:

$$y(\frac{۲(k+۲)}{۳k}) = \frac{k}{۲}(\frac{۲(k+۲)}{۳k})^۳ - (k+۲)(\frac{۲(k+۲)}{۳k})^۲$$
$$= (\frac{۲(k+۲)}{۳k})^۲(\frac{k}{۲}(\frac{۲(k+۲)}{۳k}) - (k+۲)) = (\frac{۲(k+۲)}{۳k})^۲(-\frac{۲}{۳}(k+۲))$$

چون نقطهٔ عطف در ناحیهٔ سوم محورهای مختصات قرار دارد پس طول و عرض آن منفی است، بنابراین:

$$x = \frac{۲(k+۲)}{۳k} < ۰ \Rightarrow k \in (-۲, ۰) \quad (۱)$$
$$y < ۰ \Rightarrow \underbrace{(\frac{۲(k+۲)}{۳k})^۲}_{+}(-\frac{۲}{۳}(k+۲)) < ۰$$
$$\Rightarrow -\frac{۲}{۳}(k+۲) < ۰ \Rightarrow x \in (-۲, +\infty) \quad (۲)$$
$$\xrightarrow{(۱)\cap(۲)} (-۲, ۰)$$

تنها عدد صحیح در این بازه عدد -۱ است، بنابراین تنها به ازای یک عدد صحیح -۱ نقطهٔ عطف منحنی در ناحیهٔ سوم محورهای مختصات قرار دارد.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۲

۱۰ گزینه ۳

اگر خط مماس از منحنی عبور کند، نقطهٔ داده‌شده نقطهٔ عطف است. پس:

$$y' = ۳x^۲ + ۲ax + b \Rightarrow y'' = ۶x + ۲a = ۰$$
$$\Rightarrow -۶ + ۲a = ۰ \Rightarrow a = ۳$$

اگر نقطه را در منحنی صدق دهیم:

$$-۴ = -۱ + ۳(۱) + b(-۱) - ۱ \Rightarrow b = ۵$$

بنابراین:

$$\frac{a}{b} = \frac{۳}{۵} = ۰/۶$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۳

۱۱ گزینه ۴

گام اول:

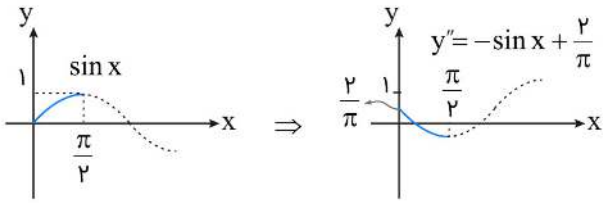
جهت تقعر منحنی یک تابع را می‌توان با تعیین علامت مشتق دوم این تابع مشخص کرد. تقعر منحنی تابع روی یک بازه روبه‌بالا است هرگاه نامساوی $y'' > ۰$ روی آن بازه برقرار باشد و تقعر منحنی تابع روی یک بازه روبه‌پایین است هرگاه نامساوی $y'' < ۰$ روی آن بازه برقرار باشد.

گام دوم:

مشتق دوم تابع داده‌شده را محاسبه و سپس تعیین علامت می‌کنیم.

$$y = \sin x + \frac{x^۲}{\pi} \Rightarrow y' = \cos x + \frac{۲x}{\pi} \Rightarrow y'' = -\sin x + \frac{۲}{\pi}$$

باتوجه‌به اینکه می‌دانیم $\frac{۱}{۲} < \frac{۲}{\pi} < ۱$ $(\pi \simeq ۳/۱۴)$ است تغییرات علامت y'' را روی بازهٔ $[۰, \frac{\pi}{۲}]$ بررسی می‌کنیم.



باتوجه‌به نمودار فوق، مقدار تابع y'' در بازهٔ $[۰, \frac{\pi}{۲}]$، ابتدا مثبت و سپس منفی است. بنابراین تقعر تابع y روی این بازه ابتدا روبه‌بالا و سپس روبه‌پایین است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۱

۱۲ گزینه ۱

گام اول:

جهت تقعر منحنی یک تابع را مشتق دوم آن تابع مشخص می‌کند. تقعر منحنی روی یک بازه روبه‌بالا است هرگاه روی آن بازه $y'' > ۰$ باشد و روبه‌پایین است هرگاه $y'' < ۰$ باشد.

گام دوم:

ابتدا مشتق دوم تابع را محاسبه می‌کنیم:

$$y = \frac{-۲}{x^۲+۳} \Rightarrow y' = \frac{۰ - ۲x(-۲)}{(x^۲+۳)^۲} = \frac{۴x}{(x^۲+۳)^۲}$$

$$\Rightarrow y'' = \frac{۴(x^۲+۳)^۲ - ۲(۲x)(x^۲+۳)(۴x)}{(x^۲+۳)^۴} = \frac{-۱۲x^۲+۱۲}{(x^۲+۳)^۳}$$

طبق گام اول، تقعر منحنی در جایی روبه‌بالا است که نامساوی $y'' > ۰$ برقرار باشد.

$$y'' > ۰ \xrightarrow{(x^۲+۳)^۳ > ۰} -۱۲x^۲ + ۱۲ > ۰ \Rightarrow x^۲ < ۱ \Rightarrow |x| < ۱$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۰

۱۳ گزینه ۴

گام اول:

جهت تقعر منحنی یک تابع را مشتق دوم آن تابع مشخص می‌کند. تقعر منحنی روی یک بازه روبه‌بالا است هرگاه روی آن بازه $y'' > ۰$ باشد و روبه‌پایین است هرگاه $y'' < ۰$ باشد.

گام دوم:

ابتدا مشتق دوم تابع داده‌شده را محاسبه می‌کنیم:

$$y = x^۴ + ax^۳ + \frac{۳}{۲}x^۲ \Rightarrow y' = ۴x^۳ + ۳ax^۲ + ۳x \Rightarrow y'' = ۱۲x^۲ + ۶ax + ۳$$

می‌خواهیم تقعر منحنی همواره روبه‌بالا باشد پس طبق گام اول باید نامعادلهٔ $y'' > ۰$ همواره برقرار باشد. می‌دانیم یک چندجمله‌ای درجه‌دو درصورتی همواره مثبت است که اولاً $\Delta < ۰$ و ثانیاً ضریب $x^۲$ مثبت باشد. با بررسی این دو شرط محدودهٔ a را تعیین می‌کنیم. چون $۱۲ > ۰$ است پس فقط برقراری شرط اول را بررسی می‌کنیم:

$$\Delta = (۶a)^۲ - ۴(۱۲)(۳) < ۰ \Rightarrow ۳۶a^۲ - ۱۴۴ < ۰$$

$$\Rightarrow ۳۶a^۲ < ۱۴۴ \Rightarrow a^۲ < ۴ \Rightarrow |a| < ۲ \Rightarrow -۲ < a < ۲$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۲

۱۴ گزینه ۱

$$f'(x) = ۲\sin x\cos x - ۲\cos x = ۲\cos x(\sin x - ۱)$$

$$\text{صعودی} \Rightarrow f'(x) > ۰ \Rightarrow ۲\cos x\underbrace{(\sin x - ۱)}_{\text{نامثبت}} > ۰ \Rightarrow \cos x < ۰$$

$$\Rightarrow \quad x \in (\frac{\pi}{۲}, \frac{۳\pi}{۲}) \quad (*)$$

$$f''(x) = -۲\sin x(\sin x - ۱) + ۲\cos^۲ x = -۲\sin^۲ x + ۲\sin x + ۲\cos^۲ x$$

$$= -۲\sin^۲ x + ۲\sin x + ۲(۱ - \sin^۲ x) = -۴\sin^۲ x + ۲\sin x + ۲ \xrightarrow{\sin x = t} -۴t^۲ + ۲t + ۲$$

$$\text{تقعر روبه‌پایین} \Rightarrow f''(x) < ۰ \Rightarrow -۴t^۲ + ۲t + ۲ < ۰ \Rightarrow t < \frac{-۱}{۲} \text{ یا } t > ۱$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x > ۱ \Rightarrow \text{غ.ق.ق} \\ \sin x < \frac{-۱}{۲} \xrightarrow{-۱ \le \sin x \le ۱} -۱ \le \sin x < \frac{-۱}{۲} \Rightarrow x \in (\frac{۷\pi}{۶}, \frac{۱۱\pi}{۶}) \quad (**) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(*)\cap(**)} x \in (\frac{۷\pi}{۶}, \frac{۳\pi}{۲})$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۶

۱۵ گزینه ۴

نقطهٔ عطف تابع فوق از $y'' = ۰$ به دست می‌آید، یعنی:

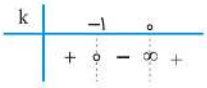
$$y' = ۳kx^۲ + ۲(k+۱)x \Rightarrow y'' = ۶kx + ۲(k+۱) = ۰ \Rightarrow x = -\frac{k+۱}{۳k}$$

$$\Rightarrow y = k \times \frac{-(k+۱)^۳}{۲۷k^۳} + \frac{(k+۱)(k+۱)^۲}{۹k^۲}$$

$$\Rightarrow y = \frac{-(k+۱)^۳ + ۳(k+۱)^۳}{۲۷k^۲} \Rightarrow y = \frac{۲(k+۱)^۳}{۲۷k^۲}$$

اگر این نقطه در ناحیهٔ دوم باشد:

$$x < ۰ \Rightarrow -\frac{k+۱}{۳k} < ۰ \Rightarrow \frac{k+۱}{۳k} > ۰$$



$$\Rightarrow k \in (-\infty, -۱] \cup (۰, +\infty)$$

$$y > ۰ \Rightarrow \frac{۲(k+۱)^۳}{۲۷k^۲} > ۰ \Rightarrow (k+۱) > ۰ \Rightarrow k > -۱$$

پس لازم است $k > ۰$ باشد، یعنی هیچ مقدار صحیح و منفی k وجود ندارد.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۲

۱۶ گزینه ۱

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۵

گام اول

نقطهٔ $x = a$، نقطهٔ عطف تابع محسوب می‌شود هرگاه تابع در آن نقطه پیوسته و دارای مماس واحد باشد و همچنین مشتق دوم تابع در آن نقطه تغییر علامت دهد.

گام دوم

ابتدا ضابطهٔ مشتق دوم تابع را به دست می‌آوریم:

$$y = (۵ - x)\sqrt[۳]{x^۲} = (۵ - x)\,x^{\frac{۲}{۳}}$$

$$\Rightarrow y' = -x^{\frac{۵}{۳}} + \frac{۲}{۳}(۵ - x)\,x^{-\frac{۱}{۳}}$$

$$y'' = -\frac{۲}{۳}x^{-\frac{۱}{۳}} - \frac{۲}{۳}x^{-\frac{۱}{۳}} - \frac{۲}{۹}(۵ - x)\,x^{-\frac{۴}{۳}}$$

$$= -\frac{۲}{۳\sqrt[۳]{x}} - \frac{۲}{۳\sqrt[۳]{x}} - \frac{۲(۵ - x)}{۹x\sqrt[۳]{x}} = \frac{-۱۲x - ۱۰ + ۲x}{۹x\sqrt[۳]{x}}$$

برای یافتن نقطهٔ عطف تابع، معادله $y'' = ۰$ را حل می‌کنیم:

$$y'' = ۰ \Rightarrow -۱۰x - ۱۰ = ۰ \Rightarrow ۱۰x = -۱۰ \Rightarrow x = -۱$$

در $x = -۱$ تابع دارای مماس واحد است و قبل و بعدازآن علامت y'' عوض می‌شود؛ بنابراین $x = -۱$ نقطهٔ عطف تابع است.

۱۷ گزینه ۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

گام اول

نقطهٔ $x = c$، نقطهٔ عطف تابع f است، هرگاه:

الف) f در c پیوسته باشد.

ب) نمودار f در c، خط مماس واحد داشته باشد.

ج) جهت تقعر تابع f در c عوض شود (علامت f'' در دو طرف c عوض شود).

گام دوم

$$y = \frac{x}{1+|x|} = \begin{cases} \frac{x}{1+x} & ; x \geq 0 \\ \frac{x}{1-x} & ; x < 0 \end{cases}$$

$$y' = \begin{cases} \frac{1}{(1+x)^2} & ; x > 0 \\ \frac{1}{(1-x)^2} & ; x < 0 \end{cases}$$

$$y'' = \begin{cases} \frac{-2}{(1+x)^3} & ; x > 0 \\ \frac{2}{(1-x)^3} & ; x < 0 \end{cases}$$

معادلهٔ $y'' = 0$ جواب ندارد اما توجه داشته باشید که تابع در نقطهٔ $x = 0$ پیوسته است و مماس واحد دارد $(y'_-(0) = y'_+(0) = 1)$ و همچنین جهت تقعر تابع قبل و بعد از این نقطه عوض می‌شود $(y''_+(0) = -2 , y''_-(0) = 2)$؛ بنابراین نقطهٔ $x = 0$ نقطهٔ عطف تابع است.

۱۸ گزینه ۳

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۴

گام اول

الف) نقاط تقاطع تابع $f'(x)$ با محور xها (جایی که f' تغییر علامت می‌دهد)، نقاط اکسترمم نسبی تابع $f(x)$ است.

ب) نقاط اکسترمم تابع $f'(x)$، نقاط عطف تابع $f(x)$ است.

گام دوم

تابع $f'(x)$ در دو نقطه محور xها را قطع کرده است. سمت چپ محور yها، ابتدا f' منفی و بعد از قطع محور xها، f' مثبت می‌شود؛ بنابراین تابع f در این نقطه دارای یک مینیمم نسبی است. سمت راست محور yها، قبل از نقطهٔ تقاطع f' مثبت و بعد از نقطهٔ تقاطع f' منفی است؛ بنابراین تابع f در این نقطه دارای یک ماکزیمم نسبی است.

تابع $f'(x)$ دارای یک نقطهٔ ماکزیمم نسبی است، بنابراین مقدار f'' در این نقطه برابر صفر شده و یک نقطهٔ عطف برای تابع $f(x)$ محسوب می‌شود.

۱۹ گزینه ۳

گام اول:

الف) می‌دانیم: $|u| = \begin{cases} u & ; u \geq ۰ \\ -u & ; u < ۰ \end{cases}$

ب) جهت تقعر منحنی یک تابع را می‌توان با تعیین علامت مشتق دوم آن تابع، مشخص کرد. تقعر منحنی روی یک بازه روبه‌بالا است هرگاه روی آن بازه $y'' > ۰$ باشد و روبه‌پایین است هرگاه $y'' < ۰$ باشد.

گام دوم:

ابتدا با تعیین علامت عبارت درون قدر مطلق، $f(x)$ را به‌صورت یک تابع دوضابطه‌ای می‌نویسیم، سپس مشتق دوم آن را به دست می‌آوریم:

$$f(x) = x^۲|x-۱| = \begin{cases} x^۲(x-۱) & ; x \geq ۱ \\ x^۲(-(x-۱)) & ; x < ۱ \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} x^۳ - x^۲ & ; x \geq ۱ \\ -x^۳ + x^۲ & ; x < ۱ \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} ۳x^۲ - ۲x & ; x > ۱ \\ -۳x^۲ + ۲x & ; x < ۱ \end{cases}$$

$$\Rightarrow f''(x) = \begin{cases} ۶x - ۲ & ; x > ۱ \\ -۶x + ۲ & ; x < ۱ \end{cases}$$

اکنون مجموعه جواب نامعادلهٔ $f''(x) < ۰$ را روی هرکدام از دو بازهٔ $x > ۱$ و $x < ۱$ به دست می‌آوریم:

$$x > ۱ : \ ۶x - ۲ < ۰ \Rightarrow ۶x < ۲ \Rightarrow x < \frac{۱}{۳} \quad \text{غ.ق.ق}$$

$$x < ۱ : \ -۶x + ۲ < ۰ \Rightarrow -۶x < -۲ \Rightarrow x > \frac{۱}{۳} \xrightarrow{x<۱} \frac{۱}{۳} < x < ۱$$

بنابراین تقعر تابع $f(x)$ روی بازهٔ $(\frac{۱}{۳}, ۱)$ روبه‌پایین است پس:

$$a = \frac{۱}{۳} \ , \ b = ۱ \Rightarrow b - a = ۱ - \frac{۱}{۳} = \frac{۲}{۳}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۴

۲۰ گزینه ۳

گام اول:

الف) می‌دانیم: $|u| = \begin{cases} u & ; u > ۰ \\ -u & ; u < ۰ \end{cases}$

ب) جهت تقعر منحنی یک تابع را می‌توان با تعیین علامت مشتق دوم تابع، مشخص کرد. تقعر منحنی تابع روی یک بازه، روبه‌بالا (به‌طرف yهای مثبت) است هرگاه $y'' > ۰$ باشد و روبه‌پایین (به‌طرف yهای منفی) است هرگاه $y'' < ۰$ باشد.

گام دوم:

ابتدا تابع $f(x)$ را با تعیین علامت عبارت درون قدر مطلق به‌صورت یک تابع دوضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$|x-۳| = \begin{cases} x-۳ & ; \ x \geq ۳ \\ -(x-۳) & ; \ x < ۳ \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^۲(x-۳) & ; x \geq ۳ \\ -x^۲(x-۳) & ; x < ۳ \end{cases} = \begin{cases} x^۳ - ۳x^۲ & ; x \geq ۳ \\ -x^۳ + ۳x^۲ & ; x < ۳ \end{cases}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \begin{cases} ۳x^۲ - ۶x & ; x > ۳ \\ -۳x^۲ + ۶x & ; x < ۳ \end{cases} \Rightarrow f''(x) = \begin{cases} ۶x - ۶ & ; x > ۳ \\ -۶x + ۶ & ; x < ۳ \end{cases}$$

اکنون مجموعه جواب نامعادلهٔ $f''(x) < ۰$ را تعیین می‌کنیم:

$$x > ۳ \ : f''(x) = ۶x - ۶ < ۰ \Rightarrow ۶x < ۶ \Rightarrow x < ۱ \ \text{غ.ق.ق}$$

$$x < ۳ \ : f''(x) = -۶x + ۶ < ۰ \Rightarrow -۶x < -۶ \Rightarrow x > ۱ \xrightarrow{x<۳} ۱ < x < ۳$$

بنابراین تقعر تابع $f(x)$ روی بازهٔ $(۱, ۳)$ روبه‌پایین است، پس داریم:

$$a = ۱ \ , \ b = ۳ \Rightarrow b - a = ۳ - ۱ = ۲$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۶

۲۱ گزینه ۱

نکته: جهت تقعر منحنی یک تابع را می‌توان به وسیلهٔ مشتق دوم آن تابع تعیین کرد. تقعر منحنی روی یک بازه روبه‌بالا است هرگاه روی آن بازه $y'' > ۰$ باشد و روبه‌پایین است هرگاه $y'' < ۰$ باشد.

باتوجه‌به نکته، ابتدا مشتق دوم تابع را محاسبه، سپس آن را تعیین علامت می‌کنیم. داریم:

$$y = x^{\frac{۴}{۳}} - ۴x^{\frac{۱}{۳}} \Rightarrow y' = \frac{۴}{۳}x^{\frac{۱}{۳}} - \frac{۴}{۳}x^{-\frac{۲}{۳}}$$

$$\Rightarrow y'' = \frac{۴}{۹}x^{-\frac{۲}{۳}} + \frac{۸}{۹}x^{-\frac{۵}{۳}} = \frac{۴}{۹\sqrt[۳]{x^۲}} + \frac{۸}{۹\sqrt[۳]{x^۵}} = \frac{۴x+۸}{۹\sqrt[۳]{x^۵}}$$

x	$-\infty$	-۲		۰	$+\infty$
$۴x+۸$	$-$	۰	$+$		$+$
$۹\sqrt[۳]{x^۵}$	$-$		$-$	۰	$+$
y''	$+$	۰	$-$	∄	$+$

بر روی بازهٔ $(-۲, ۰)$ نامساوی $y'' < ۰$ برقرار و درنتیجه تقعر نمودار تابع y روی این بازه روبه‌پایین است؛ بنابراین داریم:

$$a = -۲ \ , \ b = ۰ \Rightarrow b - a = ۰ - (-۲) = ۲$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۷

۲۲ گزینه ۳

گام اول:

جهت تقعر منحنی یک تابع را می‌توان با تعیین علامت مشتق دوم این تابع مشخص کرد. تقعر منحنی تابع روی یک بازه روبه‌بالا است هرگاه $f''(x) > ۰$ باشد و روبه‌پایین است هرگاه $f''(x) < ۰$ باشد.

گام دوم:

ابتدا مشتق دوم تابع $f(x)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$f(x) = x^۲ + ۲\sqrt{۲}\cos x \Rightarrow f'(x) = ۲x - ۲\sqrt{۲}\sin x \Rightarrow f''(x) = ۲ - ۲\sqrt{۲}\cos x$$

اکنون باتوجه‌به گام اول، مجموعه جواب نامعادلهٔ $f''(x) > ۰$ را روی بازهٔ $[۰, ۲\pi]$ تعیین می‌کنیم:

$$f''(x) > ۰ \Rightarrow ۲ - ۲\sqrt{۲}\cos x > ۰ \Rightarrow ۲\sqrt{۲}\cos x < ۲ \Rightarrow \cos x < \frac{\sqrt{۲}}{۲} \quad (I)$$

می‌دانیم به ازای هر $x \in \mathbb{R}$، $-۱ \le \cos x \le ۱$ است پس باتوجه‌به رابطهٔ (I) داریم:

$$-۱ \le \cos x \le \frac{\sqrt{۲}}{۲} \quad (II)$$

مجموعه مقادیری از x که در رابطهٔ (II) صدق می‌کنند، دو ناحیهٔ دوم و سوم مثلثاتی و دو بازهٔ $\frac{\pi}{۴} \le x \le \frac{\pi}{۲}$ و $\frac{۳\pi}{۲} \le x \le \frac{۷\pi}{۴}$ به ترتیب در ناحیهٔ اول و چهارم مثلثاتی هستند؛ بنابراین تقعر منحنی $f(x)$ در بازهٔ $(\frac{\pi}{۴}, \frac{۷\pi}{۴})$ روبه‌بالا است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۰

۲۳ گزینه ۴

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۴

گام اول

الف) نقطهٔ c، ماکزیمم نسبی تابع f است هرگاه c نقطهٔ بحرانی تابع f باشد و علامت $f''(x)$ قبل از c مثبت و بعد از c منفی باشد.

ب) نقطهٔ $c \in D_f$، نقطهٔ بحرانی تابع f است هرگاه $f'(c) = ۰$ یا $f'(c)$ موجود نباشد.

ج) نقطهٔ c، نقطهٔ عطف تابع f است هرگاه f در $x = c$ پیوسته باشد، نمودار f در c دارای خط مماس باشد و همچنین جهت تقعر تابع f در c عوض شود (علامت f'' قبل و بعد از c عوض شود).

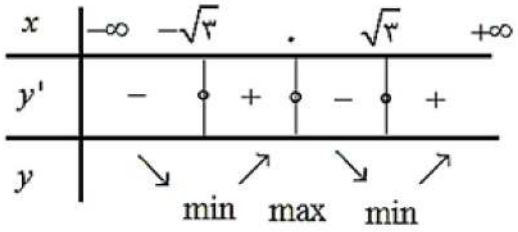
گام دوم

$$y = x^۴ - ۶x^۲ + ۵ \Rightarrow D = \mathbb{R}$$

برای تعیین ماکزیمم نسبی تابع، معادلهٔ $y' = ۰$ را حل می‌کنیم:

$$y' = ۴x^۳ - ۱۲x = ۴x(x^۲ - ۳)$$

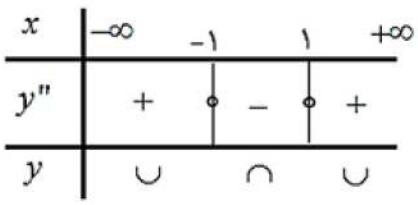
$$y' = ۰ \Rightarrow ۴x(x^۲ - ۳) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} ۴x = ۰ \Rightarrow x = ۰ \\ x^۲ - ۳ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{۳} \\ x = -\sqrt{۳} \end{cases} \end{cases}$$



بنابراین نقطهٔ $(۰, ۵)$ ماکزیمم نسبی تابع است. اکنون با حل معادلهٔ $y'' = ۰$، نقطهٔ عطف تابع را تعیین می‌کنیم.

$$y'' = ۱۲x^۲ - ۱۲ = ۱۲(x^۲ - ۱)$$

$$y'' = ۰ \Rightarrow x^۲ - ۱ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۱ \Rightarrow (۱, ۰) \\ x = -۱ \Rightarrow (-۱, ۰) \end{cases}$$



فاصلهٔ بین ماکزیمم نسبی و نقطهٔ عطف منحنی برابر است با:

$$\begin{cases} A(۰,۵) \\ B(۱,۰) \end{cases} \Rightarrow AB = \sqrt{(۱-۰)^۲ + (۰-۵)^۲} = \sqrt{۱+۲۵} = \sqrt{۲۶}$$

۲۴ گزینه ۲

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۶

گام اول

تقعر منحنی تابع $f(x)$ روی یک بازه روبه‌پایین است هرگاه به‌ازای همهٔ xهای عضو این بازه، $f''(x)$ موجود و $f''(x) < ۰$ باشد.

گام دوم

$$f(x) = x^{\frac{۶}{۵}} - ۱۲x^{\frac{۱}{۵}} \Rightarrow D_f = \mathbb{R}$$

$$f''(x) = \frac{۶}{۵}x^{\frac{۱}{۵}} - \frac{۱۲}{۵}x^{-\frac{۴}{۵}} \Rightarrow f''(x) = \frac{۶}{۲۵}x^{-\frac{۴}{۵}} + \frac{۴۸}{۲۵}x^{-\frac{۹}{۵}} = \frac{۶}{۲۵}x^{-\frac{۹}{۵}}(x+۸)$$

$$\Rightarrow f''(x) = \frac{۶(x+۸)}{۲۵\sqrt[۵]{x^۹}}$$

اکنون مجموعه‌جواب نامعادلهٔ $f''(x) < ۰$ را مشخص می‌کنیم. $x = ۰$ ریشهٔ مخرج $f''(x)$ است پس $f''(x)$ در این نقطه تعریف‌نشده است؛ همچنین داریم: $f''(-۸) = ۰$

جدول تعیین علامت تابع $f''(x)$ به‌صورت زیر است:

x	$-\infty$	-۸		۰	$+\infty$
$f''(x)$	$+$	۰	$-$	ت.ن	$+$

بنابراین تقعر تابع $f(x)$ روی بازهٔ $(-۸, ۰)$ روبه‌پایین است.

۲۵ گزینه ۱

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۷

گام اول

نقطهٔ $x = c$، نقطهٔ عطف تابع f است، هرگاه:

الف) f در c پیوسته باشد.

ب) نمودار f در c دارای خط مماس واحد باشد.

ج) جهت تقعر تابع f قبل و بعد از نقطهٔ $x = c$ عوض شود (f'' قبل و بعد از c تغییر علامت بدهد).

گام دوم

$$f(x) = x^{\frac{5}{3}} - 10x^{\frac{2}{3}} \Rightarrow D_f = \mathbb{R}$$

$$f'(x) = \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}} - \frac{20}{3}x^{-\frac{1}{3}}$$

$$f''(x) = \frac{10}{9}x^{-\frac{1}{3}} + \frac{20}{9}x^{-\frac{4}{3}} = \frac{10}{9\sqrt[3]{x}} + \frac{20}{9\sqrt[3]{x^4}} = \frac{10x + 20}{9\sqrt[3]{x^4}} = \frac{10(x+2)}{9x\sqrt[3]{x}}$$

$$\Rightarrow f''(x) = 0 \Rightarrow 10(x+2) = 0 \Rightarrow x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$$

x	$-\infty$	-2		0	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	ت.ن	$+$

علامت f'' قبل و بعد از نقطهٔ $x = -2$ عوض می‌شود و چون تابع f در این نقطه تعریف‌شده و پیوسته است و همچنین مماس واحد دارد، پس نقطهٔ عطف تابع محسوب می‌شود.

۲۶ گزینه ۴

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۰

گام اول

نقطهٔ $x = c$، نقطهٔ عطف تابع f است هرگاه:

الف) f در c پیوسته باشد.

ب) نمودار f در c، دارای خط مماس واحد باشد.

ج) جهت تقعر تابع f در c عوض شود (علامت f'' قبل و بعد از c عوض شود).

گام دوم

$$f(x) = \frac{(۲-x)^۲}{x} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{۰\}$$

$$f'(x) = \frac{۲(-۱)(۲-x)x - (۲-x)^۲}{x^۲} = \frac{-۴x + ۲x^۲ - ۴ + ۴x - x^۲}{x^۲} = \frac{x^۲ - ۴}{x^۲} = ۱ - \frac{۴}{x^۲}$$

$$f''(x) = -\frac{-۸x}{x^۴} = \frac{۸}{x^۳}$$

x	$-\infty$	۰	$+\infty$
f''	$-$	‖	$+$
f	$\cap$	‖	$\cup$

معادلهٔ $f''(x) = ۰$ جواب ندارد. علامت $f''(x)$ قبل و بعد از $x = ۰$ عوض می‌شود اما باتوجه‌به اینکه تابع f در نقطهٔ $x = ۰$ تعریف‌نشده است، پس این نقطه نمی‌تواند نقطهٔ عطف تابع باشد، بنابراین تابع f فاقد نقطهٔ عطف است.

۲۷ گزینه ۱

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۷

گام اول

تقعر منحنی تابع $f(x)$ روی یک بازه، روبه‌پایین است هرگاه به‌ازای همهٔ xهای عضو این بازه $f''(x)$ موجود و $f''(x) < 0$ باشد.

گام دوم

$$y = x^2 + \sqrt{x} \Rightarrow D = [0, +\infty)$$

$$y' = 2x + \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow y'' = 2 - \frac{1}{4x\sqrt{x}} = \frac{8x\sqrt{x} - 1}{4x\sqrt{x}}$$

اکنون مجموعه‌جواب نامعادلهٔ $y'' < 0$ را می‌یابیم:

$$y'' < 0 \Rightarrow \frac{8x\sqrt{x} - 1}{4x\sqrt{x}} < 0 \xrightarrow[4x\sqrt{x} > 0]{x > 0} 8x\sqrt{x} - 1 < 0 \Rightarrow 8x\sqrt{x} < 1$$

$$\Rightarrow x\sqrt{x} < \frac{1}{8} \Rightarrow (\sqrt{x})^3 < (\frac{1}{2})^3 \Rightarrow \sqrt{x} < \frac{1}{2} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} x < \frac{1}{4}$$

$$\xrightarrow{x > 0} 0 < x < \frac{1}{4}$$

بنابراین تقعر تابع در بازهٔ $(0, \frac{1}{4})$ روبه‌پایین است.

۲۸ گزینه ۳

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۸

گام اول

تقعر منحنی تابع $f(x)$ روی یک بازه روبه‌بالا است هرگاه به‌ازای همهٔ xهای این بازه $f''(x)$ موجود و $f''(x) > 0$ باشد.

گام دوم

$$f(x) = 6x^5 - 5x^4 + 2x + 7 \Rightarrow D_f = \mathbb{R}$$

$$f'(x) = 30x^4 - 20x^3 + 2 \Rightarrow f''(x) = 120x^3 - 60x^2 = 60x^2(2x - 1)$$

باتوجه‌به گام اول، مجموعه جواب نامعادلهٔ $f''(x) > 0$ را به‌دست می‌آوریم:

$$f''(x) > 0 \Rightarrow 60x^2(2x - 1) > 0 \xrightarrow{60x^2 > 0} 2x - 1 > 0 \Rightarrow 2x > 1 \Rightarrow x > \frac{1}{2}$$

تقعر منحنی تابع روی بازهٔ $(\frac{1}{2}, +\infty)$ روبه‌بالا است پس کمترین مقدار a برابر با $\frac{1}{2}$ است.

۲۹ گزینه ۳

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۱

گام اول

الف) تابع $f(x)$ روی یک بازه نزولی است هرگاه به‌ازای تمام مقادیر این بازه، $f'(x)$ موجود و $f'(x) < ۰$ باشد.

ب) تقعر منحنی تابع $f(x)$ روی یک بازه، روبه‌بالا است هرگاه به‌ازای همهٔ xهای عضو این بازه، $f''(x)$ موجود و $f''(x) > ۰$ باشد.

گام دوم

$$y = \frac{۱}{۳}x^۳ - x^۲ - ۳x \Rightarrow D = \mathbb{R}$$

$$y' = x^۲ - ۲x - ۳ = (x-۳)(x+۱)$$

$$y' < ۰ \Rightarrow -۱ < x < ۳ \quad (I)$$

x		-۱		۳	
y'	$+$	۰	$-$	۰	$+$

تابع روی بازهٔ $(-۱, ۳)$ نزولی است.

$$y'' = ۲x - ۲$$

$$y'' > ۰ \Rightarrow x > ۱ \quad (II)$$

x		۱	
y''	$-$	۰	$+$

تقعر منحنی تابع روی بازهٔ $(۱, +\infty)$ روبه‌بالا است.

$$(I) \cap (II) = (-۱, ۳) \cap (۱, +\infty) = (۱, ۳)$$

بنابراین تابع داده‌شده روی بازهٔ $(۱, ۳)$ نزولی و دارای تقعر روبه‌بالا است.

۳۰ گزینه ۱

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۱

گام اول

الف) تابع $f(x)$ روی یک بازه صعودی است هرگاه به‌ازای تمام xهای عضو این بازه، $f'(x)$ موجود و $f'(x) > ۰$ باشد.

ب) تقعر منحنی تابع $f(x)$ روی یک بازه روبه‌پایین است، هرگاه به‌ازای تمام xهای عضو این بازه، $f''(x)$ موجود و $f''(x) < ۰$ باشد.

گام دوم

$$y = -x^۴ + ۴x^۳ - ۳ \Rightarrow D = \mathbb{R}$$

$$y' = -۴x^۳ + ۱۲x^۲ = ۴x^۲(-x + ۳)$$

$$y' > ۰ \Rightarrow ۴x^۲(-x + ۳) > ۰ \xrightarrow{۴x^۲ > ۰} -x + ۳ > ۰ \Rightarrow x < ۳ \quad (I)$$

تابع روی بازهٔ $(-\infty, ۳)$ صعودی است.

$$y'' = -۱۲x^۲ + ۲۴x = ۱۲x(-x + ۲)$$

$$y'' < ۰ \Rightarrow x < ۰ \text{ یا } x > ۲ \quad (II)$$

x		۰		۲	
y''	$-$	○	$+$	○	$-$

تقعر منحنی تابع روی بازهٔ $(-\infty, ۰) \cup (۲, +\infty)$ روبه‌پایین است.

$$(I) \cap (II) = (-\infty, ۳) \cap [(-\infty, ۰) \cup (۲, +\infty)] = (-\infty, ۰) \cup (۲, ۳)$$

از میان بازه‌های داده‌شده، تابع روی بازهٔ $(۲, ۳)$ قطعاً صعودی با تقعر روبه‌پایین است.

۳۱ گزینه ۱

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۹۲

گام اول

تقعر منحنی تابع $f(x)$ روی یک بازه روبه‌پایین است هرگاه به‌ازای همهٔ xهای عضو این بازه $f''(x)$ موجود و $f''(x) < ۰$ باشد.

گام دوم

$$y = (x+۳)\sqrt{x} \Rightarrow D = [۰, +\infty)$$

$$\Rightarrow y' = \sqrt{x} + \frac{(x+۳)}{۲\sqrt{x}} = \frac{۲x+x+۳}{۲\sqrt{x}} = \frac{۳x+۳}{۲\sqrt{x}}$$

$$y'' = \frac{۳(۲\sqrt{x}) - \frac{۲}{۲\sqrt{x}}(۳x+۳)}{(۲\sqrt{x})^{۲}} = \frac{\frac{۶x-۳x-۳}{\sqrt{x}}}{۴x} = \frac{۳x-۳}{۴x\sqrt{x}}$$

اکنون مجموعه جواب نامعادلهٔ $y'' < ۰$ را مشخص می‌کنیم:

$$y'' < ۰ \Rightarrow \frac{۳x-۳}{۴x\sqrt{x}} < ۰ \xrightarrow[۴x\sqrt{x}>۰]{x>۰} ۳x-۳ < ۰ \Rightarrow ۳x < ۳ \Rightarrow x < ۱ \xrightarrow{x>۰} ۰ < x < ۱$$

بنابراین نمودار تابع y روی بازهٔ $(۰, ۱)$ دارای تقعر روبه‌پایین است پس داریم:

$$(a, b) = (۰, ۱) \Rightarrow a = ۰\,,\ b = ۱ \Rightarrow b - a = ۱ - ۰ = ۱$$

۳۲ گزینه ۱

$$f(x)=\frac{۱}{۴}x^۴+\frac{۱}{۲}x^۳-۳x^۲\Rightarrow f'(x)=x^۳+\frac{۳}{۲}x^۲-۶x$$
$$\Rightarrow f''(x)=۳x^۲+۳x-۶=۳(x^۲+x-۲)=۳(x+۲)(x-۱)$$

x		-۲		۱	
f''	$+$	۰	$-$	۰	$+$

اکنون وضعیت صعودی یا نزولی بودن تابع $f(x)$ را در بازهٔ $(-۲,۱)$ بررسی می‌کنیم:

$$f'(x)=x(x^۲+\frac{۳}{۲}x-۶)$$
$$x^۲+\frac{۳}{۲}x-۶=۰\Rightarrow \Delta=\frac{۹}{۴}-۴(-۶)=\frac{۱۰۵}{۴}$$
$$x_۱=\frac{-۳+۱۰/۲۵}{۴}\simeq ۱/۸۱$$
$$x_۲=\frac{-۳-۱۰/۲۵}{۴}\simeq -۳/۳۱$$
$$\Rightarrow (-۲,۱)\subseteq(-۳/۳۱,۱/۸۱)$$

x		-۲		۰		۱
x		$-$		$+$		
$x^۲+\frac{۳}{۲}x-۶$		$-$		$-$		
		$+$		$-$		

بنابراین تابع $f(x)=\frac{۱}{۴}x^۴+\frac{۱}{۲}x^۳-۳x^۲$ در بازهٔ $(-۲,۰)$ صعودی و تقعر آن روبه‌پایین است.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۳

۳۳ گزینه ۱

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۳

گام اول

الف) تابع $f(x)$ در بازه‌ای نزولی است که مشتق اول تابع در آن بازه نامثبت باشد.

ب) تقعر نمودار تابع $f(x)$ در بازه‌ای روبه‌بالا است که مشتق دوم تابع در آن بازه مثبت باشد.

گام دوم

ضابطهٔ مشتق اول و دوم تابع را نوشته و باتوجه‌به گام اول، دو نامعادلهٔ $f'(x) \leq 0$ و $f''(x) > 0$ را تعیین علامت می‌کنیم.

$$f(x) = -x^4 + 8x^3 - 18x^2 \quad \Rightarrow \quad D_f = \mathbb{R}$$

$$f'(x) = -4x^3 + 24x^2 - 36x$$

$$f'(x) \leq 0 \quad \Rightarrow \quad -4x(x^2 - 6x + 9) = -4x(x-3)^2 \leq 0 \xrightarrow{(x-3)^2 \geq 0} -4x \leq 0 \Rightarrow x \geq 0 \quad (I)$$

$$f''(x) = -12x^2 + 48x - 36$$

$$f''(x) > 0 \quad \Rightarrow \quad -12(x^2 - 4x + 3) = -12(x-3)(x-1) > 0 \quad \Rightarrow \quad (x-3)(x-1) < 0$$

x		1		3	
$(x-3)(x-1)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$$\Rightarrow \quad 1 < x < 3 \quad (II)$$

$$I \cap II = (0, +\infty) \cap (1, 3) = (1, 3)$$

۳۴ گزینه ۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۶

گام اول

تابع در بازه‌ای نزولی و تقعر آن روبه‌پایین است که $f'(x)$ و $f''(x)$ هر دو منفی باشند.

گام دوم

$$f(x) = \cos^۲x - ۲\cos x \Rightarrow f'(x) = -۲\sin x\cos x + ۲\sin x$$

$$= ۲\sin x(-\cos x + ۱) < ۰ \xrightarrow{۱-\cos x>۰} ۲\sin x < ۰$$

$$\sin x = ۰ \Rightarrow x = ۰, \pi, ۲\pi \Rightarrow x \in (\pi, ۲\pi)$$

$$f'(x) = -\sin ۲x + ۲\sin x \Rightarrow f''(x) = -۲\cos ۲x + ۲\cos x$$

$$= -۲(۲\cos^۲x - ۱) + ۲\cos x = -۴\cos^۲x + ۲\cos x + ۲ < ۰$$

$$-۴\cos^۲x + ۲\cos x + ۲ = ۰ \Rightarrow -۴(\cos x - ۱)(\cos x + \frac{۱}{۲}) = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x = ۱ \Rightarrow x = ۰ \text{ یا } x = ۲\pi \\ \cos x = -\frac{۱}{۲} \Rightarrow x = \frac{۲\pi}{۳} \text{ یا } x = \frac{۴\pi}{۳} \end{cases}$$

x	۰		$\frac{۲\pi}{۳}$		$\frac{۴\pi}{۳}$		۲π
$f''(x)$		$+$	۰	$-$	۰	$+$	

$$\Rightarrow x \in (\frac{۲\pi}{۳}, \frac{۴\pi}{۳})$$

اشتراک دو بازهٔ $(\pi, ۲\pi)$ و $(\frac{۲\pi}{۳}, \frac{۴\pi}{۳})$ به‌صورت $(\pi, \frac{۴\pi}{۳})$ درمی‌آید.

۳۵ گزینه ۳

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۶

گام اول

نقطهٔ $A(۱, -۳)$ نقطهٔ عطف منحنی است؛ بنابراین دو رابطهٔ $f(۱) = -۳$ و $f''(۱) = ۰$ برقرار است.

گام دوم

$$f(۱) = -۳ \Rightarrow a - ۱ - ۳ + b = -۳ \Rightarrow a + b = ۱ \quad (۱)$$

$$f'(x) = ۳ax^۲ - ۲x - ۳ \Rightarrow f''(x) = ۶ax - ۲ \Rightarrow f''(۱) = ۶a - ۲ = ۰$$

$$\Rightarrow ۶a = ۲ \Rightarrow a = \frac{۲}{۶} = \frac{۱}{۳} \xrightarrow{(۱)} \frac{۱}{۳} + b = ۱ \Rightarrow b = \frac{۲}{۳}$$

$$f(x) = \frac{۱}{۳}x^۳ - x^۲ - ۳x + \frac{۲}{۳}$$

برای تعیین مقدار تابع در نقطهٔ ماکزیمم نسبی آن، جدول تغییرات تابع را رسم می‌کنیم:

$$f'(x) = x^۲ - ۲x - ۳ = ۰ \Rightarrow (x - ۳)(x + ۱) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = -۱ \\ x = ۳ \end{cases}$$

x	$-\infty$	-۱		۳	$+\infty$
y'	$+$	۰	$-$	۰	$+$
y	$\nearrow$	max $\frac{۷}{۳}$	$\searrow$	min $-\frac{۲۵}{۳}$	$\nearrow$

بنابراین مقدار تابع در نقطهٔ ماکزیمم نسبی تابع برابر $\frac{۷}{۳}$ است.

۳۶ گزینه ۲

گام اول:

جهت تقعر منحنی یک تابع، به وسیلهٔ مشتق دوم آن تابع تعیین می‌شود. تقعر منحنی روی یک بازه روبه‌بالا است هرگاه $y'' > ۰$ باشد و روبه‌پایین است هرگاه $y'' < ۰$ باشد.

گام دوم:

ابتدا مشتق دوم تابع را محاسبه می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{x^۲ + ۹}{x^۲ + ۱۲} \Rightarrow f'(x) = \frac{۲x(x^۲ + ۱۲) - ۲x(x^۲ + ۹)}{(x^۲ + ۱۲)^۲} = \frac{۶x}{(x^۲ + ۱۲)^۲}$$

$$\Rightarrow f''(x) = \frac{۶(x^۲ + ۱۲)^۲ - ۲(۲x)(x^۲ + ۱۲)(۶x)}{(x^۲ + ۱۲)^۴} = \frac{۶(۱۲ - ۳x^۲)(x^۲ + ۱۲)}{(x^۲ + ۱۲)^۴}$$

طبق گام اول بازهٔ (a, b) را به‌گونه‌ای تعیین می‌کنیم که نامساوی $y'' > ۰$ روی آن برقرار باشد.

$$y'' > ۰ \xrightarrow{(x^۲+۱۲)>۰} ۱۲ - ۳x^۲ > ۰ \Rightarrow ۳x^۲ < ۱۲ \Rightarrow x^۲ < ۴ \Rightarrow |x| < ۲ \Rightarrow x \in (-۲, ۲)$$

بنابراین $a = -۲$ و $b = ۲$ است و داریم:

$$b - a = ۲ - (-۲) = ۲ + ۲ = ۴$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۸

۳۷ گزینه ۲

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۶

گام اول

الف) شیب خط مماس بر منحنی تابع در یک نقطه، برابر مقدار مشتق تابع در آن نقطه است.

ب) نقطهٔ $x = c$، نقطهٔ عطف تابع f است هرگاه سه شرط زیر برقرار باشد:

۱) f در c پیوسته باشد.

۲) نمودار f در c دارای مماس واحد باشد.

۳) جهت تقعر تابع f در c عوض شود.

گام دوم

با حل معادلهٔ $y'' = ۰$، طول نقطهٔ عطف تابع را به دست می‌آوریم:

$$y = x^۳ - ۳x^۲ + ۴ \quad \Rightarrow D = \mathbb{R}$$

$$y' = ۳x^۲ - ۶x \quad \Rightarrow y'' = ۶x - ۶$$

$$y'' = ۰ \quad \Rightarrow ۶x - ۶ = ۰ \Rightarrow ۶x = ۶ \Rightarrow x = ۱$$

$$\xrightarrow{x=۱} y = ۱ - ۳ + ۴ = ۲$$

بنابراین نقطهٔ عطف تابع دارای مختصات $(۱, ۲)$ است. شیب خط مماس بر منحنی تابع در این نقطه برابر است با:

$$y'(۱) = ۳(۱)^۲ - ۶(۱) = ۳ - ۶ = -۳$$

اکنون با داشتن شیب خط مماس، معادلهٔ این خط را می‌نویسیم:

$$y - y(۱) = y'(۱)(x - ۱) \quad \Rightarrow \quad y - ۲ = (-۳)(x - ۱) \quad \Rightarrow \quad y = -۳x + ۵$$

برای یافتن محل تقاطع خط مماس با محور xها، کافی است در معادلهٔ این خط $y = ۰$ قرار داده شود:

$$y = -۳x + ۵ \xrightarrow{y=۰} -۳x + ۵ = ۰ \quad \Rightarrow \quad ۳x = ۵ \quad \Rightarrow \quad x = \frac{۵}{۳}$$

۳۸ گزینه ۴

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۸

گام اول

الف) نقطهٔ $x = c$، نقطهٔ عطف تابع f است هرگاه سه شرط زیر برقرار باشد:

۱) f در c پیوسته باشد.

۲) نمودار f در c دارای مماس واحد باشد.

۳) جهت تقعر تابع f در c عوض شود.

ب) نیمساز ناحیهٔ چهارم، خط $y = -x$ است که به ازای $x \geq ۰$ به دست می‌آید.

گام دوم

ابتدا ضابطهٔ $f'(x)$ و $f''(x)$ را به دست می‌آوریم سپس با حل معادلهٔ $f''(x) = ۰$، نقطهٔ عطف تابع را تعیین می‌کنیم.

$$f(x) = \frac{۲}{۳}x^۳ - ۳x^۲ + ax \quad \Rightarrow \quad D_f = \mathbb{R}$$

$$f'(x) = ۲x^۲ - ۶x + a$$

$$f''(x) = ۴x - ۶$$

$$f''(x) = ۰ \Rightarrow ۴x - ۶ = ۰ \Rightarrow x = \frac{۶}{۴} = \frac{۳}{۲}$$

$$\xrightarrow{x=\frac{۳}{۲}} f(\frac{۳}{۲}) = \frac{۲}{۳}(\frac{۳}{۲})^۳ - ۳(\frac{۳}{۲})^۲ + a(\frac{۳}{۲}) = \frac{۹}{۴} - \frac{۲۷}{۴} + \frac{۳a}{۲} = \frac{۳a - ۹}{۲}$$

باتوجه‌به اینکه نقطهٔ عطف تابع روی نیمساز ناحیهٔ چهارم (خط $y = -x$) قرار دارد، پس داریم:

$$f(\frac{۳}{۲}) = -\frac{۳}{۲}$$

$$\Rightarrow \frac{۳a - ۹}{۲} = -\frac{۳}{۲} \Rightarrow ۳a - ۹ = -۳ \Rightarrow ۳a = ۶ \Rightarrow a = ۲$$

۳۹ گزینه ۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۳

گام اول

تقعر منحنی تابع $f(x)$ روی یک بازه روبه‌پایین است هرگاه به‌ازای همهٔ xهای عضو این بازه $f''(x)$ موجود و $f''(x) < 0$ باشد.

گام دوم

$$f(x) = \frac{1}{x^2+12} \Rightarrow D_f = \mathbb{R}$$

$$f'(x) = \frac{-2x}{(x^2+12)^2} \Rightarrow f''(x) = \frac{-2(x^2+12)^2 - 2(2x)(x^2+12)(-2x)}{(x^2+12)^4} = \frac{6x^2-24}{(x^2+12)^3}$$

اکنون مجموعه جواب نامعادلهٔ $f''(x) < 0$ را می‌یابیم:

$$f''(x) < 0 \Rightarrow \frac{6x^2-24}{(x^2+12)^3} < 0 \xrightarrow{(x^2+12)^3 > 0} 6x^2 - 24 < 0 \Rightarrow 6x^2 < 24$$

$$x^2 < 4 \Rightarrow |x| < 2 \Rightarrow x \in (-2, 2)$$

بنابراین تقعر منحنی تابع $f(x)$ روی بازهٔ $(-2, 2)$ روبه‌پایین و $a = 2$ است.

۴۰ گزینه ۱

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۴

گام اول

الف) تقعر منحنی تابع $f(x)$ روی یک بازه، روبه‌بالا است، هرگاه به‌ازای همهٔ مقادیر x در آن بازه $f''(x)$ موجود و $f''(x) > 0$ باشد.

ب) در چهار ناحیهٔ دستگاه مختصات داریم:

ناحیهٔ اول: $x > 0$ و $y > 0$

ناحیهٔ دوم: $x < 0$ و $y > 0$

ناحیهٔ سوم: $x < 0$ و $y < 0$

ناحیهٔ چهارم: $x > 0$ و $y < 0$

گام دوم

$$y = x + \frac{1}{x} \Rightarrow y' = 1 - \frac{1}{x^2} \Rightarrow y'' = \frac{2x}{x^4} = \frac{2}{x^3}$$

باتوجه‌به گام اول، مجموعه‌جواب نامعادلهٔ $y'' > 0$ را مشخص می‌کنیم.

$$y'' > 0 \Rightarrow \frac{2}{x^3} > 0 \Rightarrow x^3 > 0 \Rightarrow x > 0 \quad (I)$$

$$x > 0 \Rightarrow \frac{1}{x} > 0 \Rightarrow x + \frac{1}{x} > 0 \Rightarrow y > 0 \quad (II)$$

از (I) و (II) می‌توان نتیجه گرفت که تقعر نمودار تابع در ناحیهٔ اول از دستگاه محورهای مختصات روبه‌بالا است.

۴۱ گزینه ۱

گام اول:

الف) تابع $f(x)$ روی یک بازه صعودی است هرگاه روی آن بازه داشته باشیم: $f'(x) > ۰$

ب) تقعر تابع $f(x)$ روی یک بازه روبه‌پایین است هرگاه روی آن بازه $f''(x) < ۰$ باشد.

گام دوم:

$$f(x) = x + \frac{۱}{x} \Rightarrow f'(x) = ۱ - \frac{۱}{x^۲} \Rightarrow f''(x) = -\frac{-۲x}{x^۴} = \frac{۲}{x^۳}$$

$$\text{تابع صعودی} \ : \ f'(x) > ۰ \Rightarrow ۱ - \frac{۱}{x^۲} > ۰ \Rightarrow \frac{۱}{x^۲} < ۱ \Rightarrow x^۲ > ۱ \Rightarrow |x| > ۱$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x > ۱ \\ x < -۱ \end{cases} \quad (I)$$

$$\text{تقعر پایین} : f''(x) < ۰ \Rightarrow \frac{۲}{x^۳} < ۰ \Rightarrow x^۳ < ۰ \Rightarrow x < ۰ \quad (II)$$

تابع $f(x)$ روی اشتراک دو مجموعهٔ (I) و (II)، صعودی با تقعر روبه‌پایین است و داریم:

$$(I) \cap (II) \ : \ x < -۱ \Rightarrow x \in (-\infty, -۱)$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۸

۴۲ گزینه ۱

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۲

گام اول

نکته: تقعر منحنی تابع $f(x)$ روی یک بازه روبه‌بالا است هرگاه به ازای همهٔ xهای عضو این بازه، $f''(x)$ موجود و $f''(x) > ۰$ باشد.

گام دوم

به‌ازای همهٔ مقادیر $x \in \mathbb{R}$، نامعادلهٔ $x^۲ + ۲ \geq ۰$ برقرار است پس دامنهٔ تابع داده‌شده، برابر $\mathbb{R}$ است.

$$y = x\sqrt{x^۲ + ۲} \Rightarrow y' = \sqrt{x^۲ + ۲} + x\left(\frac{۲x}{۲\sqrt{x^۲ + ۲}}\right) = \frac{x^۲ + ۲ + x^۲}{\sqrt{x^۲ + ۲}} = \frac{۲(x^۲ + ۱)}{\sqrt{x^۲ + ۲}}$$

$$\Rightarrow y'' = \frac{۲(۲x)\sqrt{x^۲ + ۲} - \left(\frac{۲x}{۲\sqrt{x^۲ + ۲}}\right)(۲(x^۲ + ۱))}{x^۲ + ۲} = \frac{۲x^۳ + ۶x}{(x^۲ + ۲)\sqrt{x^۲ + ۲}}$$

اکنون مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ $y'' > ۰$ را مشخص می‌کنیم:

$$y'' > ۰ \Rightarrow \frac{۲x^۳ + ۶x}{(x^۲ + ۲)\sqrt{x^۲ + ۲}} > ۰ \xrightarrow{(x^۲+۲)\sqrt{x^۲+۲} > ۰} ۲x^۳ + ۶x > ۰ \Rightarrow ۲x(x^۲ + ۳) > ۰$$

$$\xrightarrow{x^۲ + ۳ > ۰} ۲x > ۰ \Rightarrow x > ۰$$

بنابراین تقعر منحنی تابع روی بازهٔ $(۰, +\infty)$ روبه‌بالا است پس $a = ۰$ می‌شود.

۴۳ گزینه ۴

توضیحات سؤال نشان می‌دهد که خط موردنظر از نقطهٔ عطف عبور می‌کند.

$$x_I = -\frac{b}{3a} = \frac{2}{3}$$

حال شیب این خط را در نقطهٔ $\frac{2}{3}$ محاسبه می‌کنیم.

$$y' = 3x^2 - 4x + 3 \Rightarrow y'(\frac{2}{3}) = 3 \times \frac{4}{9} - 4 \times \frac{2}{3} + 3 = \frac{4}{3} - \frac{8}{3} + 3 = -\frac{4}{3} + \frac{9}{3} = \frac{5}{3}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۷

۴۴ گزینه ۳

نکته: برای اینکه تابع نزولی باشد باید شرط $y' \leq 0$ و برای اینکه تابع دارای تقعر روبه‌پایین باشد بایستی شرط $y'' < 0$ برقرار باشد.

$$y' = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}} - \frac{4}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{4}{3}x^{-\frac{2}{3}}(x-1) = \frac{4(x-1)}{3\sqrt[3]{x^2}} \leq 0 \Rightarrow x \leq 1 \quad (1)$$

$$y'' = \frac{4}{9}x^{-\frac{2}{3}} + \frac{8}{9}x^{-\frac{5}{3}} = \frac{4}{9}x^{-\frac{5}{3}}(x+2) = \frac{4(x+2)}{9\sqrt[3]{x^5}} < 0 \Rightarrow -2 < x < 0 \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1)\cap(2)} -2 < x < 0$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۷

۴۵ گزینه ۱

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۱

گام اول

تقعر منحنی تابع $f(x)$ روی یک بازه روبه‌پایین است، هرگاه $f''(x)$ به‌ازای همهٔ xهای این بازه موجود و $f''(x) < 0$ باشد.

گام دوم

$$f(x) = x^4 - 6x^2 \Rightarrow D_f = \mathbb{R}$$

$$f'(x) = 4x^3 - 12x \Rightarrow f''(x) = 12x^2 - 12 = 12(x^2 - 1)$$

$$f''(x) < 0 \Rightarrow x^2 - 1 < 0 \Rightarrow x^2 < 1 \Rightarrow |x| < 1 \Rightarrow -1 < x < 1$$

بنابراین تقعر تابع در بازهٔ $(-1, 1)$ روبه‌پایین است.

۴۶ گزینه ۴

نکته: مختصات نقطهٔ عطف در معادلهٔ تابع صدق می‌کند.

نکته: اگر مشتق دوم در نقطهٔ عطف موجود باشد، مقدار آن برابر با صفر خواهد بود.

$$y = ax^۳ + bx^۲ - ۳x - ۱ \xrightarrow{(۱,-۲)} -۲ = a(۱)^۳ + b(۱)^۲ - ۳(۱) - ۱$$
$$\Rightarrow -۲ = a + b - ۴ \Rightarrow a + b = ۲ \quad (I)$$

$$y' = ۳ax^۲ + ۲bx - ۳$$
$$y'' = ۶ax + ۲b \xrightarrow{f''(۱)=۰} ۶a + ۲b = ۰ \Rightarrow ۶a = -۲b \Rightarrow ۳a = -b$$

$$\xrightarrow{(I)} a - ۳a = ۲ \Rightarrow -۲a = ۲ \Rightarrow a = -۱ \ , \ b = ۳$$
$$y = -x^۳ + ۳x^۲ - ۳x - ۱ \Rightarrow y' = -۳x^۲ + ۶x - ۳ \Rightarrow y' = -۳(x^۲ - ۲x + ۱)$$

$$\Rightarrow y' = -۳(x - ۱)^۲$$

x		۱	
y'	−	۰	−
	↘		↘

مشتق تغییر علامت نمی‌دهد، درنتیجه فاقد max نسبی است.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۶

۴۷ گزینه ۳

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۴

گام اول

الف) تابع $f(x)$ همواره صعودی است اگر مشتق اول تابع روی دامنهٔ تعریف تابع نامنفی باشد $(f'(x) \geq ۰)$.

ب) نقطهٔ $x = c$ طول نقطهٔ عطف تابع f است، هرگاه سه شرط زیر برقرار باشد:

۱) f در c پیوسته باشد.

۲) نمودار f در c دارای مماس واحد باشد.

۳) جهت تقعر منحنی نمودار تابع در c عوض شود.

گام دوم

$$f(x) = x^۳ - (m+۲)x^۲ + ۳x \quad \Rightarrow \quad D_f = \mathbb{R}$$

باتوجه‌به گام اول، شرط صعودی بودن تابع را بررسی می‌کنیم:

$$f'(x) = ۳x^۲ - ۲(m+۲)x + ۳$$

$$f'(x) \geq ۰ \quad \Rightarrow \quad ۳x^۲ - ۲(m+۲)x + ۳ \geq ۰$$

نامساوی فوق همواره برقرار است اگر:

۱) ضریب $x^۲$ مثبت باشد که چون $۳ > ۰$، پس برقرار است.

۲) $\Delta \leq ۰$ که بررسی می‌کنیم:

$$\Delta = ۴(m+۲)^۲ - ۴(۳)(۳) \leq ۰ \xrightarrow{\div ۴} (m+۲)^۲ - ۹ \leq ۰ \quad \Rightarrow \quad (m+۲)^۲ \leq ۹$$

$$\Rightarrow |m+۲| \leq ۳ \quad \Rightarrow \quad -۳ \leq m+۲ \leq ۳ \quad \Rightarrow \quad -۵ \leq m \leq ۱$$

اکنون محدوده‌ای برای نقاط عطف تابع می‌یابیم. تابع f و f' روی $\mathbb{R}$ پیوسته است، پس برای یافتن نقاط عطف کافی است معادلهٔ $f''(x) = ۰$ را حل کنیم.

$$f''(x) = ۶x - ۲(m+۲)$$

$$f''(x) = ۰ \quad \Rightarrow \quad ۶x - ۲(m+۲) = ۰ \quad \Rightarrow \quad ۶x = ۲(m+۲) \quad \Rightarrow \quad x = \frac{m+۲}{۳}$$

$$-۵ \leq m \leq ۱ \quad \Rightarrow \quad -۳ \leq m+۲ \leq ۳ \quad \Rightarrow \quad -۱ \leq \frac{m+۲}{۳} \leq ۱$$

بنابراین مجموعهٔ نقاط عطف تابع در بازهٔ $[-۱, ۱]$ قرار دارد.

۴۸ گزینه ۳

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

گام اول

$A(۱, -۱۱)$ نقطهٔ عطف تابع $f(x)$ است؛ بنابراین:

الف) مختصات نقطهٔ A در معادلهٔ تابع صدق می‌کند.

ب) تابع در نقطهٔ $x = ۱$ پیوسته است.

ج) مشتق تابع در نقطهٔ $x = ۱$ موجود و یکتا است.

د) $f''(۱) = ۰$ است.

گام دوم

$$f(x) = x^۳ + ax^۲ + bx \Rightarrow f'(x) = ۳x^۲ + ۲ax + b \Rightarrow f''(x) = ۶x + ۲a$$

با توجه به قسمت (الف) از گام اول داریم:

$$f(۱) = -۱۱ \Rightarrow ۱^۳ + a(۱)^۲ + b(۱) = -۱۱ \Rightarrow a + b + ۱ = -۱۱ \Rightarrow a + b = -۱۲ \quad (I)$$

و با توجه به قسمت (د) از گام اول داریم:

$$f''(۱) = ۰ \Rightarrow ۶ + ۲a = ۰ \Rightarrow ۲a = -۶ \Rightarrow a = -۳ \xrightarrow{(I)} -۳ + b = -۱۲ \Rightarrow b = -۹$$

بنابراین:

$$f(x) = x^۳ - ۳x^۲ - ۹x$$

و $f(-۱)$ برابر است با:

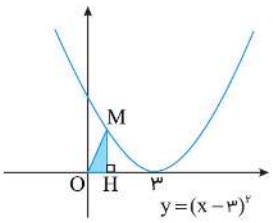
$$f(-۱) = (-۱)^۳ - ۳(-۱)^۲ - ۹(-۱) = -۱ - ۳ + ۹ = ۵$$

Homework نهایی کاربرد مشتق

۱ نقاط بحرانی تابع $f(x) = x[x]$ کدام است؟

۱) $\mathbb{R}$
۲) $\mathbb{Z} \cup (0,1)$
۳) $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$
۴) $\mathbb{Z} - \{0\}$

۲ نقطهٔ M روی تابع $y = (x-3)^2$ مانند شکل زیر قرار دارد و در هر مکان یک مثلث مانند MHO می‌سازد. بیشترین مساحت مثلث چقدر است؟



۱) ۲
۲) ۳
۳) ۱
۴) ۴

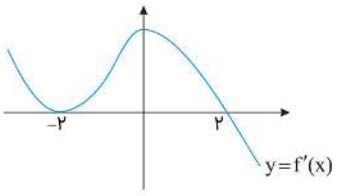
۳ نقطه‌هایی به طول‌های ۲ و ۱ به‌ترتیب چه نوع نقاطی برای تابع $f(x) = (-1)^{[x]}$ می‌باشند؟

۱) ماکزیمم نسبی - مینیمم نسبی
۲) ماکزیمم نسبی - ماکزیمم نسبی
۳) مینیمم نسبی - مینیمم نسبی
۴) مینیمم نسبی - ماکزیمم نسبی

۴ اگر نقطه‌ای به طول ۲ مینیمم نسبی تابع $f(x) = x^3 + ax^2$ باشد، شیب خط مماس بر تابع $f'(x)$ در نقطه‌ای به طول ۳ چقدر است؟

۱) صفر
۲) ۱۲
۳) -12
۴) ۸

۵ نمودار تابع $f'(x)$ به‌صورت زیر است. اگر $f(x)$ در فاصلهٔ $(-\infty\ ,\ a)$ صعودی اکید باشد، بیشترین مقدار a کدام است؟



۱) ۲
۲) -۲
۳) صفر
۴) ۱

۶ جدول تغییرات تابع $f(x) = x^۳ - ۳x + ۴$ را رسم کنید و نقاط اکسترمم نسبی آن را در صورت وجود مشخص کنید.

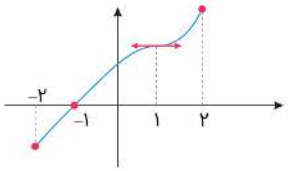
۷ یک مستطیل در یک نیم‌دایره محاط شده است. اگر شعاع دایره، ۴ سانتی‌متر باشد، طول و عرض مستطیل را طوری به دست آورید که مساحت بیشترین مقدار ممکن باشد.

۸ نقاط اکسترمم مطلق تابع $f(x) = x^۳ - ۳x$ را در بازهٔ $[-۱ , ۲]$ به دست آورید.

۹ کدام نقطه از تابع $f(x) = x^۴ - x^۳$ نقطهٔ بحرانی است، اما اکسترمم نسبی نیست؟

۱) صفر
۲) ۱
۳) $\frac{۳}{۴}$
۴) $\frac{۴}{۳}$

۱۰ در تابع زیر، چند نقطه وجود دارد که بحرانی است اما اکسترمم نسبی نیست؟



۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

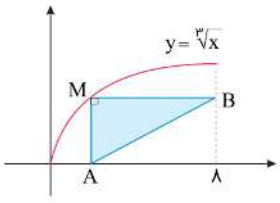
۱۱ بیشترین مقدار تابع $f(x) = \begin{cases} ۴\sin x & ; ۰ \le x \le \pi \\ \sqrt{x - \pi} & ; \pi < x < ۱۶ + \pi \end{cases}$ چقدر است؟

۱) ۴
۲) ۱۶
۳) ۱۲
۴) ۱۰

۱۲ کدام تابع زیر نقطهٔ بحرانی ندارد؟

۱) $f(x) = \sqrt{۱ - x}$
۲) $g(x) = x^۴ + ۲۷x$
۳) $h(x) = x^۵ + x$
۴) $m(x) = \sqrt[۳]{x}$

۱۳ نمودار تابع $f(x) = \sqrt[۳]{x}$ در فاصلهٔ $[۰ , ۸]$ را در نظر بگیرید. نقطهٔ M روی این تابع قرار دارد. اگر از M بر محور xها و خط $x = ۸$ عمود کنیم، طبق شکل مثلث قائم‌الزاویه‌ای ساخته می‌شود. بیشترین مساحت مثلث چقدر است؟



۱) $\sqrt[۳]{۱۴}$
۲) $\sqrt[۳]{۱۰}$
۳) $\sqrt[۳]{۵۴}$
۴) $\sqrt[۳]{۱۲}$

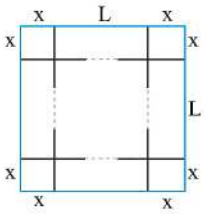
۱۴ می‌خواهیم مخزنی به شکل مکعب‌مستطیل درباز بسازیم که حجم آن $۹m^۳$ بوده و طول کف مخزن دو برابر عرض آن باشد. قیمت مصالح موردنیاز جهت کف این مخزن برای هر متر مربع ۲۰۰ هزار تومان و این قیمت برای دیواره‌ها در هر متر مربع ۱۰۰ هزار تومان است. عرض کف مخزن چقدر باشد تا هزینهٔ مصالح مصرف‌شده کمترین مقدار ممکن باشد؟

۱) ۳
۲) ۲
۳) ۲/۵
۴) ۱/۵

۱۵ در تابع $f(x)=\begin{cases}[\frac{x}{۲}]+۱ & ;۰\le x\le ۳\ ,\ x\neq ۱\\ ۲ & ;x=۱\end{cases}$ نقاط به طول‌های ۱ و ۲ به ترتیب چه نوع نقاطی برای $f(x)$ هستند؟

۱) $\min-\max$
۲) $\max-\max$
۳) $\min-\min$
۴) $\max-\min$

۱۶ ورق فلزی مربعی شکلی به طول ضلع $۳۰\ cm$ را در نظر بگیرید. مطابق شکل می‌خواهیم از چهار گوشهٔ آن مربع‌های کوچکی به ضلع x برش بزنیم و آن‌ها را کنار بگذاریم. سپس با تا کردن ورق در امتداد خط‌چین‌های مشخص‌شده در شکل، یک جعبهٔ درباز بسازیم. مقدار x کدام باشد تا حجم جعبه حداکثر مقدار ممکن گردد؟



۱) ۲۰
۲) ۱۵
۳) ۵
۴) ۷۵

۱۷ تعداد نقاط بحرانی کدام‌یک از توابع زیر از دیگر توابع بیشتر است؟

۱) $f(x)=||x|-۱|$
۲) $f(x)=x+|x|$
۳) $f(x)=x|x|$
۴) $f(x)=۲x+|x|$

۱۸ چند مورد از گزاره‌های زیر صحیح هستند؟

الف) هر نقطهٔ اکسترمم نسبی تابع، یک نقطهٔ بحرانی آن است.

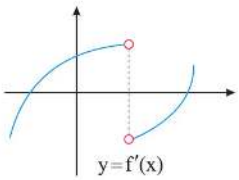
ب) در تابع $y=x^۳$ مشتق در نقطهٔ $x=۰$ برابر عدد صفر است؛ بنابراین اکسترمم نسبی می‌باشد.

ج) اگر تابع f در بازهٔ $[a\ ,\ b]$ پیوسته باشد، آنگاه در این بازه هم ماکزیمم مطلق و هم مینیمم مطلق دارد.

د) هر نقطهٔ بحرانی، اکسترمم نسبی نیز است.

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۱۹ اگر $f(x)$ روی $\mathbb{R}$ پیوسته و $f'(x)$ به‌صورت شکل زیر باشد، آنگاه در مورد f و f' کدام گزینه صحیح است؟



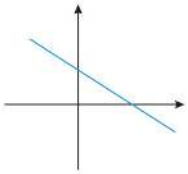
۱) در دو نقطه مماس افقی و در یک نقطه مشتق وجود ندارد و درنتیجه سه نقطهٔ بحرانی دارد.

۲) در سه نقطه مماس افقی دارد و درنتیجه سه نقطهٔ بحرانی دارد.

۳) فقط در دو نقطه مشتق صفر است و درنتیجه فقط دو نقطهٔ بحرانی دارد.

۴) در نقطه‌ای که f' تعریف نمی‌شود، f بحرانی دارد و تابع فاقد نقطهٔ بحرانی دیگر است.

۲۰ اگر نمودار تابع $f'(x)$ به‌صورت زیر باشد، آنگاه ضابطهٔ تابع $f(x)$ کدام می‌تواند باشد؟



۱) $x^۲ + ۲x$

۲) $x^۲ - ۲x - ۱$

۳) $-۲x^۲ + ۴x$

۴) $-۲x^۲ - ۶x + ۱$

۲۱ بیشترین مقدار تابع $f(x) = x^۳ - ۶x^۲ + m$ در فاصلهٔ $[-۱, ۲]$ برابر ۸ است. کمترین مقدار تابع چقدر است؟

۱) ۷

۲) -۷

۳) -۸

۴) -۵

۲۲ جدول تغییرات تابع $f(x) = x(۳ - x^۲) - ۱$ کدام است؟

۱)

x	$-\infty$		-۱		۱		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	۰	$-$	۰	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-۳	↘	۱	↗	$+\infty$

۲)

x	$-\infty$		-۱		۱		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	۰	$+$	۰	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-۳	↗	۱	↘	$-\infty$

۳)

x	$-\infty$		۰		۱		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	۰	$+$	۰	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-۱	↗	۱	↘	$-\infty$

۴)

x	$-\infty$		-۱		۰		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	۰	$+$	۰	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-۳	↗	-۱	↘	$-\infty$

۲۳ اگر x و y دو عدد مثبت و $x + ۲y = ۸$ باشد، بیشترین مقدار xy کدام است؟

۱) ۲

۲) ۴

۳) ۸

۴) ۱۶

۲۴ اگر $x > ۰$ باشد، کمترین مقدار تابع $f(x) = ۴x^۲ + \frac{۱}{x}$ چقدر است؟

۱) ۳

۲) ۲

۳) ۱

۴) $\frac{۳}{۲}$

۲۵ کمترین مقدار تابع $f(x)=\begin{cases} x^۲-۴x & ;\ ۰\le x\le ۵ \\ \sqrt{۵x} & ;\ x>۵ \end{cases}$ کدام است؟

۱) صفر
۲) -۲
۳) ۲
۴) -۴

۲۶ نمودار تابع $f(x)=x^۳+ax+b$ در نقطهٔ $A(-۱,\ ۲)$ اکسترمم نسبی دارد. مقدار b و همچنین اکسترمم دیگر تابع کدام است؟

۱) صفر و $(۱,\ ۲)$
۲) ۱ و $(-۱,\ -۱)$
۳) صفر و $(۱,\ -۲)$
۴) -۳ و $(۱,\ -۲)$

۲۷ فاصلهٔ max نسبی از min نسبی تابع $f(x)=x^۳+۳x^۲+۲$ چقدر است؟

۱) $۵\sqrt{۲}$
۲) $۵\sqrt{۳}$
۳) $۳\sqrt{۵}$
۴) $۲\sqrt{۵}$

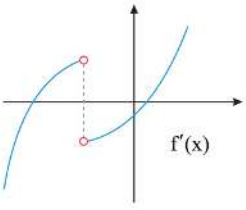
۲۸ کدام تابع زیر در دامنهٔ تعریف خود صعودی اکید است؟

۱) $y=x^۳+x^۲$
۲) $y=x^۴-۴x$
۳) $y=x^۳+x$
۴) $y=\frac{۱}{۵}x^۵+۴x^۲$

۲۹ تابع $f(x)=|۲x-|x-۱||\ ,\ -۱\le x\le ۲$ چند نقطه بحرانی دارد؟

۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۱

۳۰ نمودار مشتق تابع پیوسته $f(x)$ به‌صورت زیر است، در مورد اکسترمم‌های نسبی $f(x)$ کدام گزینه صحیح است؟



۱) دو مینیمم و یک ماکزیمم دارد.
۲) دو ماکزیمم دارد.
۳) دو ماکزیمم و یک مینیمم دارد.
۴) فاقد اکسترمم است.

۳۱ شعاع قاعده و ارتفاع استوانه‌ای به‌ترتیب r و h است. اگر $r^۲+h=۴$ باشد حجم ماکزیمم استوانه چقدر است؟

۱) ۱۶π
۲) ۸π
۳) ۴π
۴) ۱۲π

۳۲ تابع $f(x) = |x^۲ - ۴x - ۵|$ سه نقطه بحرانی دارد، مجموع طول‌های نقاط بحرانی این تابع چقدر است؟

۱) ۶
۲) ۲
۳) -۶
۴) ۸

۳۳ در کدام تابع زیر هر نقطهٔ دلخواهی از دامنه یک نقطهٔ بحرانی است؟

۱) $y = x(x-۱)^۲$
۲) $y = x(\sin x + \cos x)^۲$
۳) $y = x^۲(\sin x + \cos x)^۲ - x^۲ \sin ۲x$
۴) $y = ۱ + \sqrt[۳]{x} + \sqrt[۳]{-x}$

۳۴ کدام تابع زیر روی $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی است اما مشتق آن در برخی نقاط مثبت نیست؟

۱) $y = \frac{۱}{۵}x^۵ - \frac{x^۴}{۲} + \frac{۱}{۳}x^۳$
۲) $y = -x - x^۳$
۳) $y = x^۳ + x + ۱$
۴) $y = x^۳ - x$

۳۵ مجموع طول‌های نقاط بحرانی تابع $f(x) = \begin{cases} ۴x^۲ - ۴x & ; ۰ \le x < ۱ \\ |x^۲ - ۴x| & ; ۱ \le x \le ۵ \end{cases}$ روی دامنه خود کدام است؟

۱) ۱۲/۵
۲) ۴/۵
۳) ۷/۵
۴) ۹/۵

۳۶ اگر تابع $f(x) = x^۳ + ax^۲ + bx + ۲۰$ محور xها را در نقطه‌ای به طول ۱ قطع کند و اکسترممی به طول ۵ داشته باشد، طول اکسترمم دیگر تابع چقدر است؟

۱) ۲
۲) -۱
۳) ۱
۴) -۲

پاسخ Homework نهایی کاربرد مشتق

۱ گزینه ۲

تابع f در تمام نقاط صحیح به غیر از $x=0$ ناپیوسته است و درنتیجه بحرانی است. این تابع در $x=0$ پیوسته ولی مشتق‌ناپذیر می‌باشد، درنتیجه این نقطه نیز بحرانی است. همچنین تابع $f(x)$ در بازهٔ $(0,1)$ برابر با صفر است، بنابراین مشتق آن صفر می‌باشد، درنتیجه در این بازه بحرانی است. پس مجموعهٔ $\mathbb{Z}\cup(0,1)$ برای f بحرانی می‌باشد.

۲ گزینه ۱

اگر $M(x\ ,\ (x-3)^2)$ فرض شود، آنگاه مساحت مثلث OMH برابر است با:

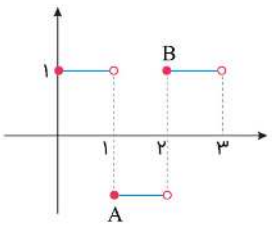
$$S=\frac{1}{2}\times x(x-3)^2 \Rightarrow S'=\frac{1}{2}((x-3)^2+2x(x-3))=0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(x-3)(x-3+2x)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \Rightarrow S=2 \\ x=3 \Rightarrow S=0 \end{cases}$$

پس بیشترین مساحت $S=2$ است.

۳ گزینه ۱

نمودار تابع $f(x)=(-1)^{[x]}$ را در بازه $[0\ ,\ 3)$ رسم می‌کنیم:



$$0\le x<1 \Rightarrow [x]=0 \Rightarrow f(x)=(-1)^0=1$$

$$1\le x<2 \Rightarrow [x]=1 \Rightarrow f(x)=(-1)^1=-1$$

$$2\le x<3 \Rightarrow [x]=2 \Rightarrow f(x)=(-1)^2=1$$

ملاحظه می‌کنید که نقطه $A(1\ ,\ -1)$ مینیمم نسبی و نقطه $B(2\ ,\ 1)$ ماکزیمم نسبی تابع f است.

۴ گزینه ۲

$$f(x) = x^{۳} + ax^{۲} \Rightarrow f'(x) = ۳x^{۲} + ۲ax$$

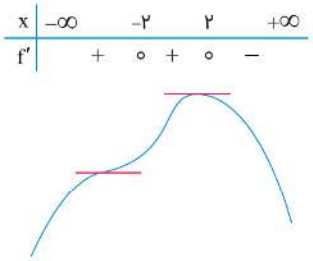
$$f'(۲) = ۰ \Rightarrow ۳ \times ۴ + ۲a \times ۲ = ۰ \Rightarrow a = -۳$$

$$f'(x) = ۳x^{۲} - ۶x \Rightarrow f''(x) = ۶x - ۶ \Rightarrow f''(۳) = ۱۲$$

۵ گزینه ۱

تابع $f(x)$ در فاصلهٔ $(-\infty\ ,\ ۲)$ صعودی اکید است زیرا نمودار f' در این بازه بالای محور xها است. دقت کنید که f' در ۲- صفر می‌شود و مشکلی در صعودی اکید بودن f ایجاد نمی‌کند.

یک نمودار تقریبی از $f(x)$ به‌صورت زیر خواهد بود:



۶

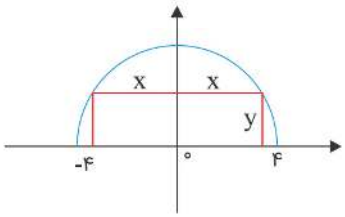
$$f(x) = x^{۳} - ۳x + ۴ \Rightarrow f'(x) = ۳x^{۲} - ۳ = ۰$$
$$\Rightarrow x^{۲} = ۱ \Rightarrow x = \pm ۱$$

	−∞	-۱	۱	+∞
f'(x)	+	-	+	
f(x)	↗	↘ ۶	↗ ۲	

نقطهٔ $(۲\ ,\ ۱)$ مینیمم نسبی و نقطهٔ $(۶\ ,\ -۱)$ ماکزیمم نسبی است.

۷

$$x^۲ + y^۲ = ۱۶ \Rightarrow y = \sqrt{۱۶ - x^۲}$$
$$S = ۲xy \Rightarrow S = ۲x\sqrt{۱۶ - x^۲}$$



$$S' = ۲(\sqrt{۱۶ - x^۲} + \frac{-۲x}{۲\sqrt{۱۶ - x^۲}}(x))$$

$$S' = ۰ \Rightarrow ۱۶ - x^۲ - x^۲ = ۰ \Rightarrow x^۲ = ۸ \Rightarrow x = ۲\sqrt{۲}$$

طول $= ۲x = ۴\sqrt{۲}$ ، عرض $= ۲\sqrt{۲}$

۸

$$f(x) = x^۳ - ۳x \Rightarrow f'(x) = ۳x^۲ - ۳$$

$$f'(x) = ۰ \Rightarrow ۳x^۲ - ۳ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۱ \in [-۱, ۲] \\ x = -۱ \in [-۱, ۲] \end{cases}$$

$$\text{بحرانی : } \begin{matrix} x = ۱ : y = -۲ \\ x = -۱ : y = ۲ \\ x = ۲ : y = ۲ \end{matrix} \Rightarrow \text{مطلق } y_{min} = -۲ \text{ ، مطلق } y_{max} = ۲$$

۹

گزینه ۱

$$f'(x) = ۴x^۳ - ۳x^۲ = ۰$$
$$\Rightarrow x^۲(۴x - ۳) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \\ x = \frac{۳}{۴} \end{cases}$$

x	$-\infty$	۰		$\frac{۳}{۴}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	۰	$-$	۰	$+$

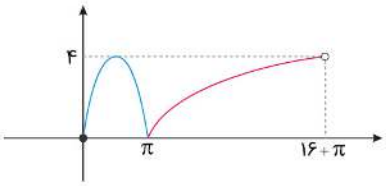
تابع f در $x = ۰$ مشتقی برابر صفر دارد، اما در اطراف آن تغییر علامت نداده است، پس $x = ۰$ نقطهٔ بحرانی است ولی اکسترمم نیست.

۱۰ گزینه ۳

نقاط به طول‌های -۲ و ۲ بحرانی‌اند اما اکسترمم نسبی نیستند. زیرا f در همسایگی آن‌ها تعریف نمی‌شود و درنتیجه مشتق در آن نقاط وجود ندارد. $x = ۱$ نقطهٔ بحرانی است اما اکسترمم نسبی نیست، زیرا $f'(۱) = ۰$ می‌باشد ولی f در اطراف $x = ۱$ تغییر جهت نداده است. پس درمجموع در سه نقطه با طول‌های ۲، ۱ و ۲- اکسترمم نداریم اما بحرانی هستند.

۱۱ گزینه ۱

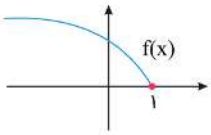
نمودار تابع داده‌شده را رسم می‌کنیم:



ملاحظه می‌کنید که $\max f(x) = ۴$ است.

۱۲ گزینه ۳

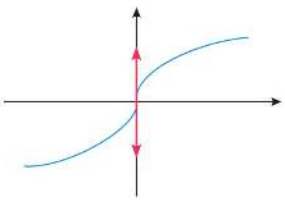
تابع $f(x) = \sqrt{۱ - x}$ یک نقطهٔ بحرانی $x = ۱$ دارد.



تابع $g(x)$ هم یک نقطهٔ بحرانی دارد.

$$g'(x) = ۴x^۳ + ۲۷ = ۰ \Rightarrow x = -\frac{۳}{\sqrt[۳]{۴}} \quad \text{(نقطهٔ بحرانی)}$$

تابع $m(x)$ هم در $x = ۰$ یک نقطهٔ بحرانی دارد.



اما تابع $h(x)$ نقطهٔ بحرانی ندارد. زیرا معادلهٔ $h'(x) = ۰$ ریشهٔ حقیقی ندارد.

$$h'(x) = ۵x^۴ + ۱ > ۰$$

۱۳ گزینه ۳

مختصات نقطهٔ M را به‌صورت $M(x\ ,\ \sqrt[3]{x})$ در نظر می‌گیریم. مساحت مثلث را به‌صورت تابعی از x می‌نویسیم:

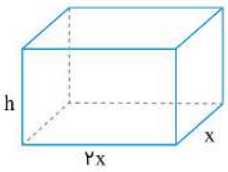
$$S(x)=\frac{1}{2}|MA|\times|MB|=\frac{1}{2}\sqrt[3]{x}(8-x)$$

$$S'(x)=\frac{1}{2}(-\sqrt[3]{x}+\frac{8-x}{3\sqrt[3]{x^2}})=\frac{8-4x}{6\sqrt[3]{x^2}}=0\Rightarrow x=2$$

$$\Rightarrow S_{Max}=S(2)=\frac{1}{2}(8-2)\sqrt[3]{2}=3\sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{54}$$

۱۴ گزینه ۴

حجم را برابر ۹ قرار می‌دهیم.



$$2x^2h=9\Rightarrow h=\frac{9}{2x^2}$$

حال برای محاسبهٔ هزینه، تابعی می‌سازیم:

$$C(x)=x(2x)\times 200+(2xh+4xh)\times 100$$

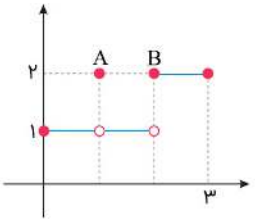
$$\Rightarrow C(x)=400x^2+600xh=400x^2+\frac{2700}{x}$$

$C(x)$ را مینیمم می‌کنیم:

$$C'(x)=800x-\frac{2700}{x^2}=0\Rightarrow x=\frac{3}{2}=1/5$$

۱۵ گزینه ۲

نمودار تابع را در فاصلهٔ $[۰\ ,\ ۳]$ رسم می‌کنیم:



$$(۰ \le x < ۲\ ,\ x \neq ۱) \Rightarrow [\frac{x}{۲}] = ۰ \Rightarrow y = ۱$$

$$۲ \le x \le ۳ \Rightarrow [\frac{x}{۲}] = ۱ \Rightarrow y = ۲$$

باتوجه‌به نمودار هر دو نقطهٔ A و B ماکزیمم نسبی $f(x)$ هستند.

۱۶ گزینه ۳

آن‌چه قرار است ماکزیمم شود، مقدار حجم مکعب‌مستطیل است. پس ارتفاع مکعب را با x و طول و عرض آن را با L نشان می‌دهیم.

$$\text{حجم}: V = xL^۲\ ,\ ۲x + L = ۳۰ \Rightarrow L = ۳۰ - ۲x$$

$$V = x(۳۰ - ۲x)^۲ = ۴x^۳ - ۱۲۰x^۲ + ۹۰۰x\ ,\ x \in (۰\ ,\ ۱۵)$$

$$V'(x) = ۱۲x^۲ - ۲۴۰x + ۹۰۰ \Rightarrow x^۲ - ۲۰x + ۷۵ = ۰$$
$$\Rightarrow (x - ۵)(x - ۱۵) = ۰$$

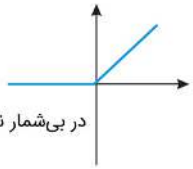
x	۰		۵		۱۵
V′		+	۰	−	۰
V		↗	۲۰۰۰	↘	

$$\begin{cases} x = ۵ \\ x = ۱۵ \notin (۰\ ,\ ۱۵) \end{cases}$$

به ازای $x = ۵$ ماکزیمم دارد.

۱۷ گزینه ۲

$$y = x + |x| = \begin{cases} ۲x & ; x \geq ۰ \\ ۰ & ; x < ۰ \end{cases}$$



در بی‌شمار نقطه مشتق برابر صفر است.

۱۸ گزینه ۲

الف) قضیهٔ کتاب درسی است. (صحیح)

ب) برای اکسترمم نسبی داشتن باید تابع مشتق در اطراف آن نقطه تغییر علامت دهد که در اینجا اکسترمم نسبی نیست. (نادرست)

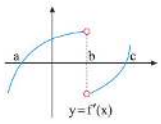
ج) قضیهٔ کتاب درسی است. (صحیح)

د) عکس قضیهٔ قسمت "الف" است که درست نیست، مانند $y = (x-۱)^۳$ در نقطهٔ $x = ۱$. (نادرست)

۱۹ گزینه ۱

جدول تعیین علامتی برای f' تنظیم می‌کنیم:

ملاحظه می‌کنید که $f'(a) = f'(c) = ۰$ است و همچنین $f'(b)$ وجود ندارد، پس تابع $f(x)$ در سه نقطه به طول‌های a، b و c بحرانی است.



۲۰ گزینه ۳

چون $f'(x)$ تابع خطی با شیب منفی است پس $f(x)$ تابعی درجه دوم با ضریب درجه دوم منفی است و همچنین $f'(x)$ در نقطه‌ای با طول مثبت، صفر است پس طول رأس سهمی مثبت است. باتوجه‌به توضیحات فوق تابع $-۲x^۲ + ۴x$ می‌تواند $f(x)$ باشد.

۲۱ گزینه ۳

مشتق تابع و سپس نقاط بحرانی تابع را به دست می‌آوریم:

$$f'(x) = ۳x^۲ - ۱۲x = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \in [-۱, ۲] \\ x = ۴ \notin [-۱, ۲] \end{cases}$$

پس مجموعهٔ نقاط بحرانی $\{۲, -۱, ۰\}$ است. حال مقادیر تابع را در نقاط بحرانی حساب می‌کنیم.

x	۰	-۱	۲
y	m	m-۷	m-۱۶

ماکزیمم تابع برابر m و مینیمم آن برابر $m - ۱۶$ خواهد بود.

$$m = ۸ \Rightarrow m - ۱۶ = -۸$$

۲۲ گزینه ۲

تابع را مرتب می‌کنیم، مشتق می‌گیریم؛ سپس آن را تعیین علامت می‌کنیم:

$$f(x) = -x^۳ + ۳x - ۱$$
$$\Rightarrow f'(x) = -۳x^۲ + ۳ = ۰ \Rightarrow x = \pm ۱$$

x	$-\infty$		-۱		۱		$+\infty$
f'(x)		-	۰	+	۰	-	
f(x)	$+\infty$	↘	-۳	↗	۱	↘	$-\infty$

۲۳ گزینه ۳

$$\begin{cases} x + ۲y = ۸ \Rightarrow x = ۸ - ۲y \\ xy = y(۸ - ۲y) = ۸y - ۲y^۲ = f(y) \end{cases} \Rightarrow f'(y) = ۸ - ۴y = ۰$$

$$\Rightarrow y = ۲ , \; x = ۴ \Rightarrow \max(xy) = ۲ \times ۴ = ۸$$

۲۴ گزینه ۱

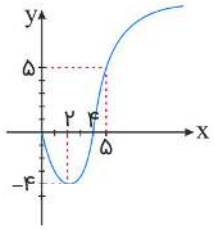
$$f'(x) = ۸x - \frac{۱}{x^۲} = \frac{۸x^۳ - ۱}{x^۲} = ۰ \Rightarrow x = \frac{۱}{۲}$$

x	۰		$\frac{۱}{۲}$		$+\infty$
f'(x)	ت.ن	-	۰	+	
f(x)	ت.ن	↘	۳	↗	۰

$$\min f(x) = ۳$$

۲۵ گزینه ۴

نمودار تابع را رسم می‌کنیم:



تابع در نقطهٔ $(-۴\ ,\ ۲)$ مینیمم مطلق دارد، پس کمترین مقدار تابع برابر ۴- است.

۲۶ گزینه ۳

چون $f(x)$ چندجمله‌ای است، پس:

$$f(-۱) = ۲ \Rightarrow -۱ - a + b = ۲ \Rightarrow b - a = ۳ \quad (۱)$$

$$f'(x) = ۳x^۲ + a\ ,\ f'(-۱) = ۰$$
$$\Rightarrow ۳ + a = ۰ \Rightarrow a = -۳$$

$$\xrightarrow{(۱)} b = ۰ \Rightarrow f(x) = x^۳ - ۳x$$
$$\Rightarrow f'(x) = ۳x^۲ - ۳$$

x	$-\infty$		-۱		۱		$+\infty$
y'		$+$	۰	$-$	۰	$+$	
y	$-\infty$	↗	۲	↘	-۲	↗	$+\infty$

ملاحظه می‌کنید که اکسترمم دیگر تابع $(-۲\ ,\ ۱)$ است.

۲۷ گزینه ۴

$$f'(x) = ۳x^۲ + ۶x = ۰$$
$$\Rightarrow ۳x(x+۲) = ۰ \Rightarrow x = ۰\ ,\ -۲$$

x	$-\infty$		-۲		۰		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	۰	$-$	۰	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	۶	↘	۲	↗	$+\infty$

پس $A(-۲\ ,\ ۶)$ ماکزیمم نسبی و $B(۰\ ,\ ۲)$ مینیمم نسبی تابع $f(x)$ است.

$$|AB| = \sqrt{(۰+۲)^۲ + (۶-۲)^۲} = \sqrt{۴+۱۶} = ۲\sqrt{۵}$$

۲۸ گزینه ۳

گزینه‌ای صحیح است که مشتق آن همواره مثبت باشد. مشتق تک‌تک گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

$$۱)\ y = x^۳ + x^۲ \Rightarrow y' = ۳x^۲ + ۲x = x(۳x + ۲) = ۰$$
$$\Rightarrow x = ۰\ ,\ -\frac{۲}{۳}$$

x		$-\frac{۲}{۳}$		۰	
y'	$+$	۰	$-$	۰	$+$

$$۲)\ y = x^۴ - ۴x \Rightarrow y' = ۴x^۳ - ۴ = ۰ \Rightarrow x = ۱$$

x		۱	
y'	$-$	۰	$+$

$$۳)\ y = x^۳ + x \Rightarrow y' = ۳x^۲ + ۱$$

x	به‌ازای هر x
y'	$+$

$$۴)\ y = \frac{۱}{۵}x^۵ + ۴x^۲ \Rightarrow y' = x^۴ + ۸x = x(x^۳ + ۸) = ۰ \Rightarrow x = ۰\ ,\ -۲$$

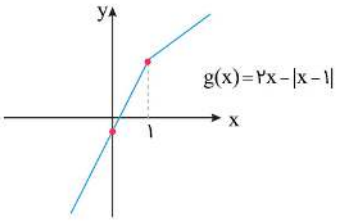
x		-۲		۰	
y'	$+$	۰	$-$	۰	$+$

ملاحظه می‌کنید که مشتق تابع $x^۳ + x$ همواره مثبت است.

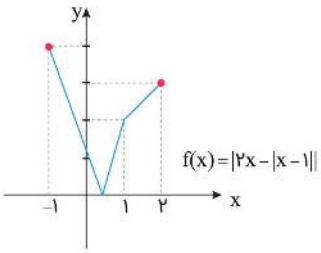
۲۹ گزینه ۳

نمودار تابع $g(x) = ۲x - |x - ۱|$ را رسم می‌کنیم.

x	۰	۱	۲
y	-۱	۲	۳



حال $f(x) = |g(x)|$ را در فاصله $[-۱ , ۲]$ رسم می‌کنیم.

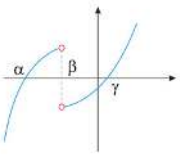


ملاحظه می‌کنید که تابع ۴ نقطه بحرانی دارد.

۳۰ گزینه ۱

تابع $f(x)$ پیوسته و f' در سه نقطه تغییر علامت داده است.

نقاط به طول‌های α و γ مینیمم نسبی و نقطه به طول β ماکزیمم نسبی است.



x	$-\infty$	α	β	γ	$+\infty$
f'	−	۰	+	۰ −	۰ +

۳۱ گزینه ۳

$$V = \pi r^۲ h \xrightarrow{r^۲ = ۴ - h} V = \pi h(۴ - h) = \pi(۴h - h^۲)$$

$$V' = \pi(۴ - ۲h) = ۰ \Rightarrow h = ۲ , r^۲ = ۲ \Rightarrow V_{max} = \pi \times ۲ \times ۲ = ۴\pi$$

۳۲ گزینه ۱

اگر $g(x)$ یک تابع مشتق‌پذیر باشد، آنگاه نقاط بحرانی تابع $|g(x)|$ از حل معادله‌های $g(x)=0$ و $g'(x)=0$ به دست می‌آید.

$$g(x)=x^2-4x-5=0 \Rightarrow x=-1,\ 5$$

$$g'(x)=2x-4=0 \Rightarrow x=2$$

مجموع طول‌های نقاط بحرانی برابر ۶ است.

۳۳ گزینه ۴

$$y=1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{-x}=1+\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x}=1 \Rightarrow y'=0$$

چون در این تابع $y'=0$ شده است، پس تمام نقاط دامنهٔ آن بحرانی است.

۳۴ گزینه ۱

مفهوم سؤال این است که مشتق کدام تابع نامنفی است یعنی مثبت و صفر است. دقت کنید که باید تعداد نقاطی که مشتق در آن صفر باشد قابل شمارش باشد.

$$1)\ y=\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{2}x^4+\frac{1}{3}x^3 \Rightarrow y'=x^4-2x^3+x^2=x^2(x^2-2x+1)$$

$$\Rightarrow y'=x^2(x-1)^2$$

x	$-\infty$	0		1	$+\infty$
y'	$+$	0	$+$	0	$+$

$$2)\ y=-x-x^3 \Rightarrow y'=-1-3x^2<0$$

$$3)\ y=x^3+x+1 \Rightarrow y'=3x^2+1>0$$

$$4)\ y=x^3-x \Rightarrow y'=3x^2-1=0 \Rightarrow x=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$		$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$

باتوجه‌به محاسبات بالا تابع مربوط به گزینه "۱" جواب است چون در دو نقطه مشتقش صفر و در سایر نقاط مشتق آن مثبت است. سایر توابع چنین شرایطی ندارند.

۳۵ گزینه ۱

تابع در همسایگی $x = ۰$ و $x = ۵$ تعریف نمی‌شود پس مشتق ندارد. در $x = ۴$ (نقطه شکستگی قدرمطلق) مشتق ندارد، تابع در $x = ۱$ ناپیوسته و در نتیجه بحرانی است. ضمناً $f'(x)$ در نقاط به طول‌های $\frac{۱}{۲}$ و ۲ صفر است، پس مجموعه نقاط بحرانی این تابع $\{۵ , ۴ , ۲ , ۱ , \frac{۱}{۲} , ۰\}$ است که مجموع آن‌ها $۱۲/۵$ است.

۳۶ گزینه ۲

چون تابع چندجمله‌ای است و اکسترممی به طول ۵ دارد، پس $f'(۵) = ۰$ است.

$$f'(x) = ۳x^۲ + ۲ax + b \Rightarrow f'(۵) = ۳ \times ۲۵ + ۱۰a + b = ۰$$

$$\Rightarrow ۱۰a + b = -۷۵ \quad (۱)$$

یکی از صفرهای تابع $f(x)$ عدد ۱ است، پس:

$$f(۱) = ۰ \Rightarrow ۱ + a + b + ۲۰ = ۰ \Rightarrow a + b = -۲۱ \quad (۲)$$

رابطه‌های (۱) و (۲) را در یک دستگاه حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} ۱۰a + b = -۷۵ \\ a + b = -۲۱ \end{cases} \xrightarrow{(-)} ۹a = -۵۴ \Rightarrow a = -۶$$

$$a = -۶ \xrightarrow{(۲)} b = -۲۱ + ۶ = -۱۵$$

$$f'(x) = ۳x^۲ - ۱۲x - ۱۵ = ۰ \Rightarrow x = -۱ , ۵$$

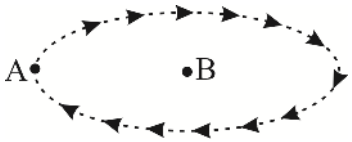
پس طول اکسترمم دیگر تابع -۱ است.

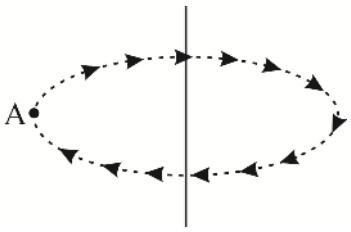
تفکر تجسمی و آشنایی با مقاطع مخروطی

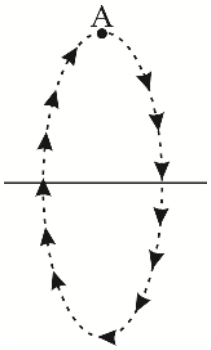
تفکر تجسمی یعنی فکرکردن با شکل‌ها و تصاویر. ما به طور معمول با کلمات فکر می‌کنیم اما اگر به جای کلمه‌ها از شکل‌ها استفاده کنیم، می‌گوییم به جای تفکر کلامی از تفکر تجسمی استفاده کرده‌ایم. در تفکر تجسمی سعی می‌کنیم تصاویر را در ذهنمان تجسم کنیم و یا اگر لازم باشد آن‌ها را روی کاغذ رسم کنیم. برای آن‌که ببینیم تفکر تجسمی و این حرف‌هایی که زدیم در عمل یعنی چه، بیایید با هم در مورد دوران و برش اجسام حرف بزنیم.

دوران:

منظور از دوران، چرخیدن یک شیء به دور یک شیء، یا یک خط یا یک نقطه است. مسیر دوران یک حلقه دایره‌ای‌شکل است. در زیر، شکل و مسیر دوران نقطهٔ A را حول (دور) یک نقطه و خط‌های عمودی و افقی رسم کرده‌ایم.

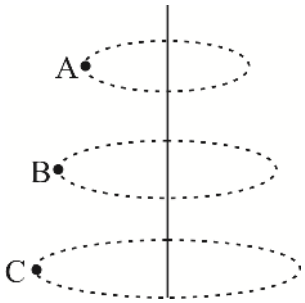






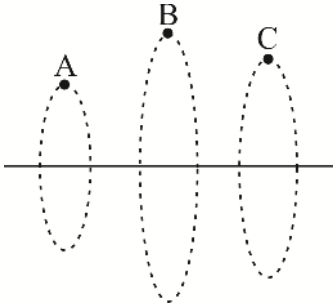
در این‌جا بحث ما بیشتر در مورد دوران حول (دور) یک خط خواهد بود.

دوران حول یک خط:



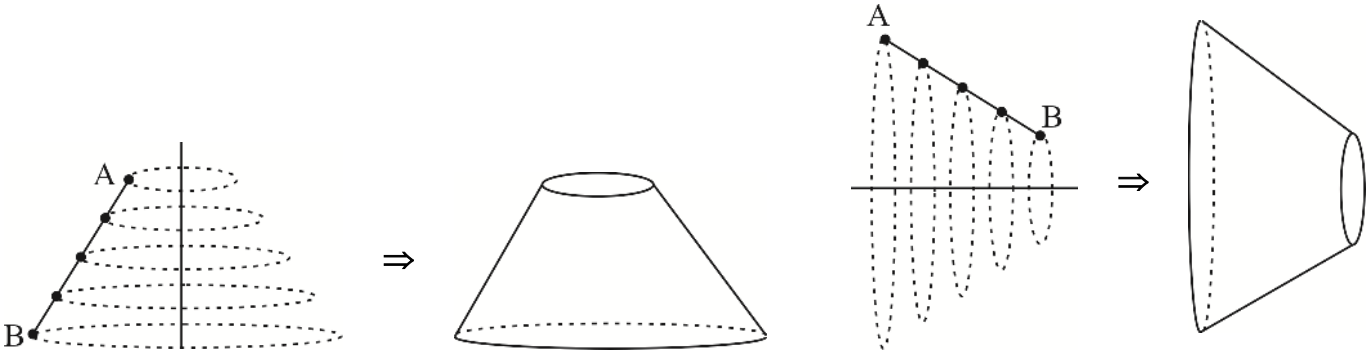
همان‌طور که در شکل‌های قبل نشان دادیم، دوران (چرخیدن) به دور یک خط (حول یک خط)، یعنی نقطه یک مسیر دایره‌ای را طی می‌کند و دوباره به سر جای خودش بازمی‌گردد. شعاع این دایره، با فاصلهٔ نقطه از خط برابر است. در شکل زیر، سه نقطهٔ A، B و C را حول خط‌های عمودی و افقی دوران داده‌ایم.

دوران یک پاره‌خط حول یک خط:



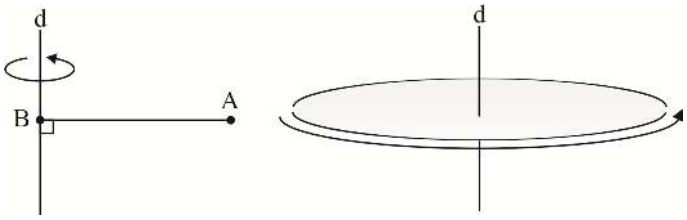
وقتی یک پاره‌خط حول یک خط دوران پیدا می‌کند، در واقع کلّ نقاط روی آن، حول آن خط دوران پیدا می‌کنند. در شکل زیر، نحوهٔ دوران پاره‌خط AB را حول دو خط عمودی و افقی نمایش داده‌ایم.

حال اگر این چرخش با سرعت زیاد انجام شود، دیگر چشم ما قادر به دنبال‌کردن مسیر حرکت نیست، بلکه یک حجم سه‌بعدی می‌بینید.

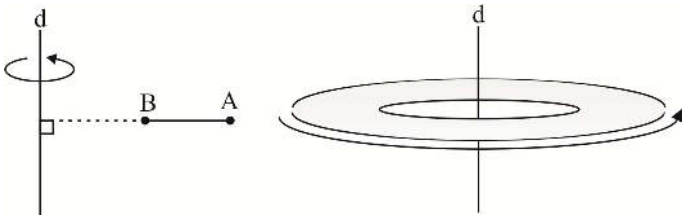


مسیر حرکت (مسیر دوران) | آن‌چه در سرعت زیاد می‌بینیم | مسیر دوران | آن‌چه که در دوران با سرعت زیاد می‌بینیم

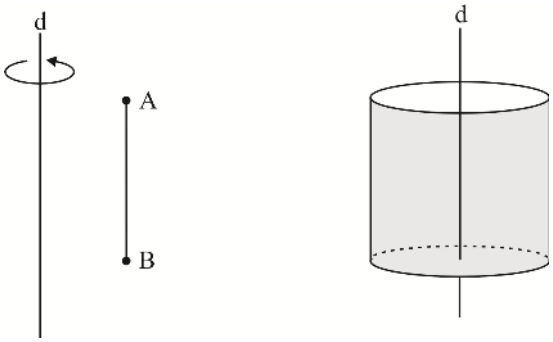
۱) از دوران یک پاره‌خط حول محور عمود و متقاطع با آن سطح یک دایره ایجاد می‌شود.



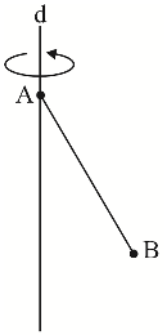
توجه: اگر پاره‌خط، با محور تقارن متقاطع نباشد، پس از دوران سحط محدود به دو دایرهٔ هم‌مرکز ایجاد می‌شود.

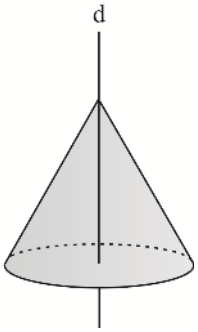


۲) از دوران یک پاره‌خط حول محوری که با آن موازی است، یک استوانهٔ توخالی ایجاد می‌شود.

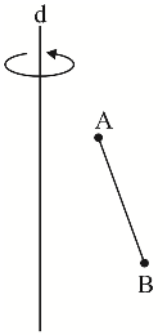


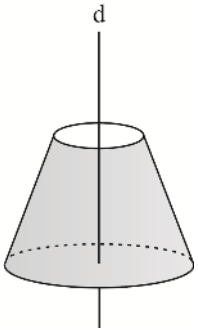
۳) از دوران پاره‌خط حول محور غیرعمود و متقاطع با آن، یک سطح مخروطی (مخروط توخالی) ایجاد می‌شود.



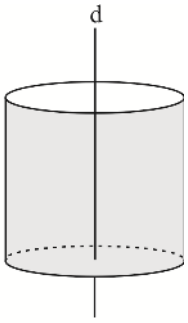


توجه: اگر پاره‌خط، با محور تقارن متقاطع باشد، پس از دوران یک سحط مخروطی ناقص ایجاد می‌شود.

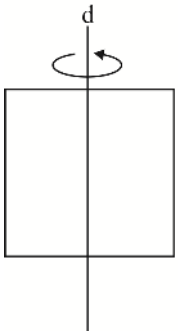


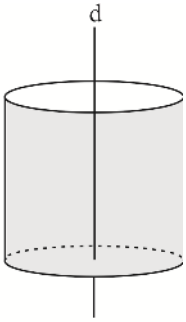


۴) از دوران مربع یا مستطیل حول یک ضلعشان یک استوانهٔ توپر ایجاد می‌شود.

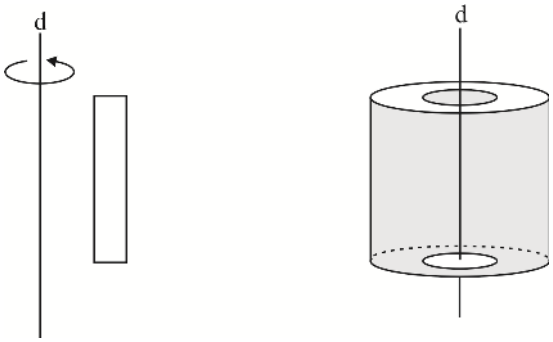


توجه: از دوران مربع یا مستطیل حول خطی که از وسط دو ضلع مقابل آن‌ها می‌گذرد یک استوانهٔ توپر ایجاد می‌شود.

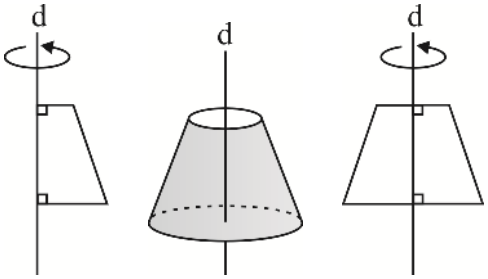




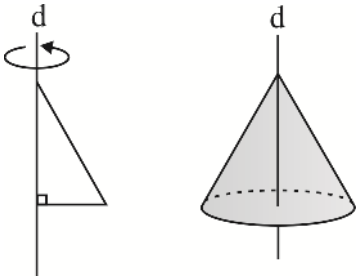
توجه: از دوران مربع یا مستطیل حول خطی که موازی یک ضلع آن‌ها است دو استوانه با محور یکسان تشکیل می‌شود که فضای بین آن‌ها توپر است.



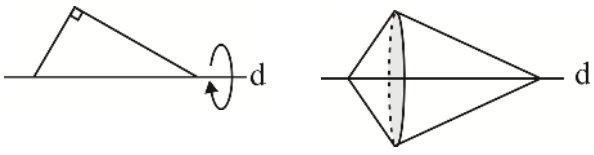
۵) از دوران یک ذوزنقهٔ قائم‌الزاویه حول ساق قائم آن با یک ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین حول خطی که وسط‌های دو قاعده را به هم وصل می‌کند، یک مخروط ناقص ایجاد می‌شود.



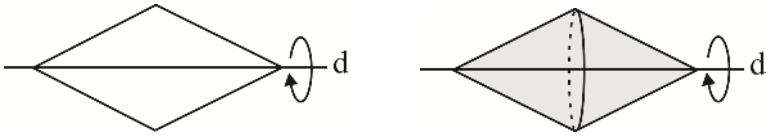
۶) از دوران یک مثلث قائم‌الزاویه حول ضلع قائم‌اش یک مخروط ایجاد می‌شود.



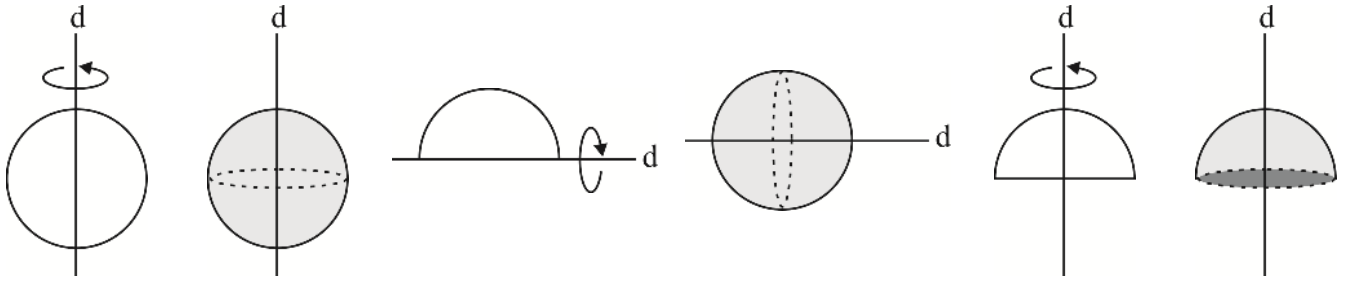
۷) از دوران یک مثلث قائم‌الزاویه حول وترش دو مخروط که در قاعده به هم چسبیده‌اند ایجاد می‌شود.



توجه: از دوران مربع یا مستطیل حول یکی از قطرهایشان نیز دو مخروط که در قاعده به هم چسبیده‌اند ایجاد می‌شود.



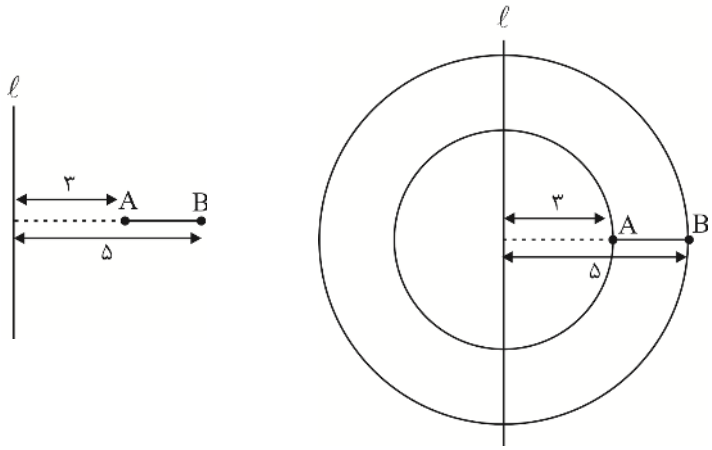
۸) از دوران دایره حول یکی از قطرهایش کره ایجاد می‌شود. هم‌چنین از دوران نیم‌دایره حول قطرش یک کره و حول شعاع عمود بر قطرش یک نیم‌کره ایجاد می‌شود.



تمرین: امتداد پاره‌خط **AB** بر خط ℓ عمود است. اگر دو نقطهٔ **A** و **B** از ℓ به فاصلهٔ ۳ و ۵ باشند، از دوران **AB** حول ℓ چه مساحتی ایجاد می‌شود؟

۱) 16π ۲) 4π ۳) 12π ۴) 8π

پاسخ: گزینهٔ «۱» ـ شکل را ببینید.

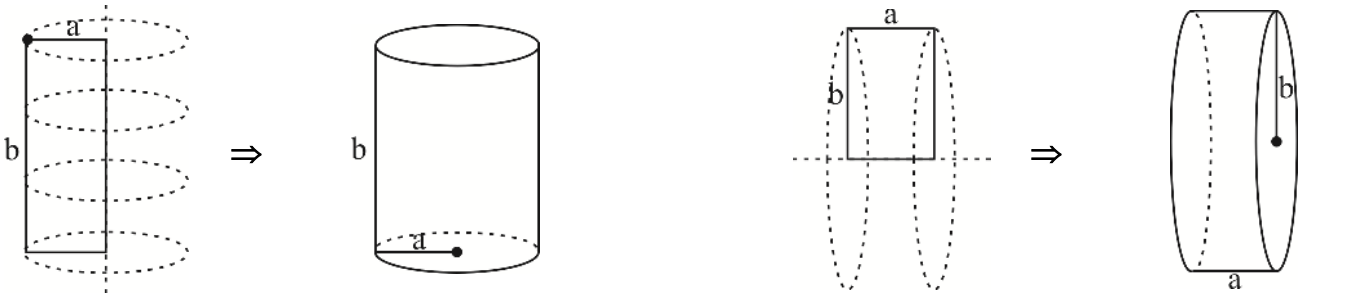


سطح موردنظر بین دو دایره به شعاع‌های ۵ و ۳ قرار دارد.

$$S = \pi(r_1^2 - r_2^2) = \pi(5^2 - 3^2) = 16\pi$$

تحلیل دوران مستطیل:

در پایهٔ هفتم دیدیم که از دوران یک مستطیل حول یک ضلع خودش (یا حول یک خط موازی ضلع‌هایش) یک استوانه ایجاد می‌شود.



حجمی که می‌بینیم (استوانه‌ای به شعاع **b** و ارتفاع **a**) — مسیر دوران حول ضلع **a**

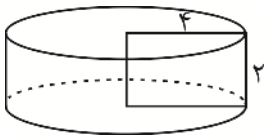
حجمی که می‌بینیم (استوانه‌ای به شعاع **a** و ارتفاع **b**) — مسیر دوران حول ضلع **b**

مشاهده می‌کنید که وقتی یک مستطیل را حول یکی از ضلع‌های آن دوران می‌دهیم، آن ضلع ارتفاع استوانه خواهد بود و ضلع دیگر، شعاع قاعدهٔ استوانه است.

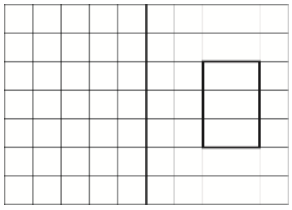
تمرین: اگر مستطیلی به طول ۴ و عرض ۲ را حول عرضش دوران دهیم، حجم جسم حاصل چه‌قدر است؟

۱) 16π ۲) 20π ۳) 32π ۴) 8π

پاسخ: طبق شکل روبه‌رو استوانه‌ای ایجاد می‌شود که شعاع قاعده‌اش برابر ۴ و ارتفاعش برابر ۲ است و چون حجم استوانه از رابطهٔ $V = \pi r^2$ به دست می‌آید، پس: $V = \pi(4)^2(2) = 32\pi$



تمرین: در شکل مقابل اگر مستطیل حول خط دوران کند، حجم جسم ایجادشده کدام است؟



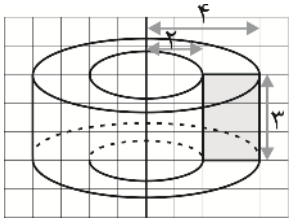
۱) 48π

۲) 36π

۳) 12π

۴) 24π

پاسخ: طبق شکل روبه‌رو اگر مستطیل حول خط دوران کند، جسمی که پدید می‌آید استوانه‌ای است به شعاع قاعدهٔ ۴ و ارتفاع ۳ که یک استوانه به شعاع قاعدهٔ ۲ و ارتفاع ۳ از آن خارج شده است. پس حجم جسم ایجادشده برابر تفاضل حجم این دو استوانه است، یعنی:

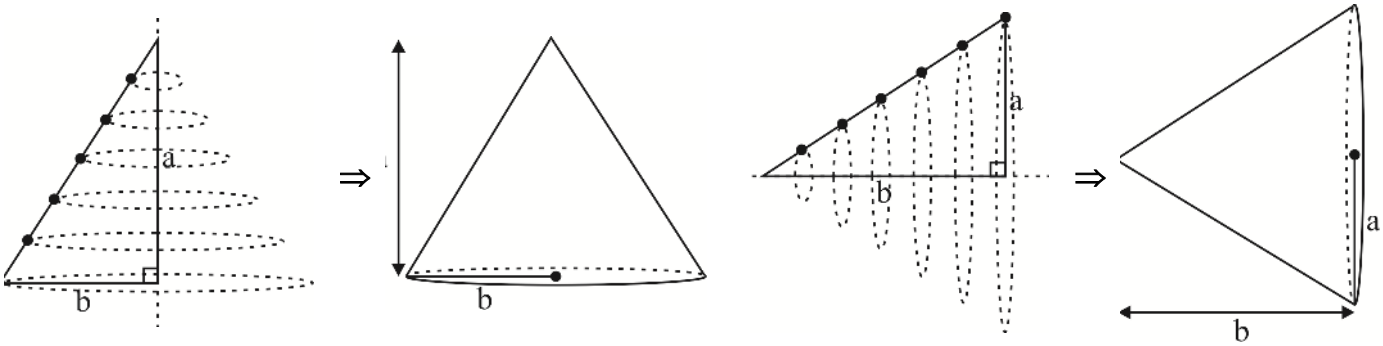


$$V = \pi r_1^2 h - \pi r_2^2 h \Rightarrow V = \pi(4)^2(3) - \pi(2)^2(3) = 48\pi - 12\pi = 36\pi$$

تحلیل دوران مثلث قائم‌الزاویه:

در شکل‌های زیر، مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ای را حول ضلع‌های قائمهٔ آن‌ها دوران داده‌ایم. مشاهده می‌کنید که وقتی یک مثلث قائم‌الزاویه را حول یک ضلع قائمهٔ آن دوران می‌دهیم، یک مخروط ایجاد می‌شود.

ضلعی که حول آن دوران داده‌ایم، ارتفاع مخروط و ضلع دیگر شعاع قاعدهٔ مخروط خواهد بود.

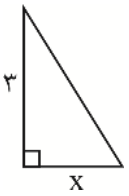


آن‌چه می‌بینیم (مخروطی به شعاع قاعدهٔ b و ارتفاع a)

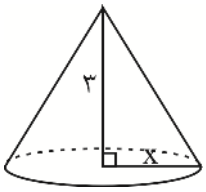
آن‌چه می‌بینیم (مخروطی به شعاع قاعدهٔ a و ارتفاع b)

تمرین: مثلث قائم‌الزاویه‌ای را حول یکی از اضلاع قائمه‌اش به طول ۳ دوران می‌دهیم. حجم شکل حاصل از دوران ۲۴π است. مساحت مثلث قائم‌الزاویه کدام است؟

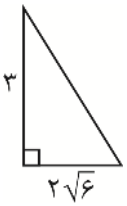
۱) $۲\sqrt{۶}$ ۲) $۳\sqrt{۶}$ ۳) $۲\sqrt{۲}$ ۴) $۳\sqrt{۲}$

پاسخ: گزینهٔ «۲» ـ مثلث قائم‌الزاویه به شکل 

را حول ضلع به طول ۳ دوران می‌دهیم، شکل حاصل، مخروطی به شعاع قاعدهٔ x و ارتفاع ۳ است. پس طبق فرض مسئله که حجم شکل به وجود آمده ۲۴π است، می‌توان نوشت:

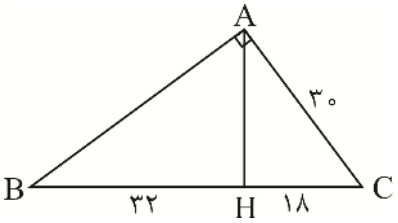


$$۲۴\pi = \frac{۱}{۳}\pi(x^۲)\times ۳ \Rightarrow \pi x^۲ = ۲۴\pi \Rightarrow x^۲ = ۲۴ \Rightarrow x = \sqrt{۲۴} = ۲\sqrt{۶}$$

حالا باید مساحت مثلث قائم‌الزاویه 

را پیدا کنیم که برابر $S = \frac{۱}{۲}\times ۳\times ۲\sqrt{۶} = ۳\sqrt{x}$ است.

تمرین: مثلث قائم‌الزاویهٔ زیر را حول ضلع BC دوران می‌دهیم. حجم حاصل چند برابر $\pi(۲۴)^۲$ است؟



۱) $\frac{۲۵}{۳}$ ۲) ۲۵

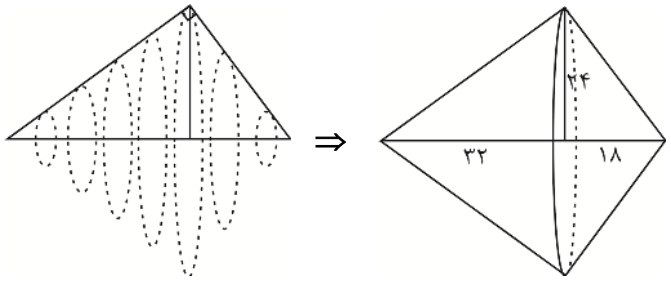
۳) $\frac{۵۰}{۳}$ ۴) ۵۰

پاسخ: ابتدا از رابطهٔ فیثاغورس، طول AH را به دست می‌آوریم:

$$AH^۲ + ۱۸^۲ = ۳۰^۲ \Rightarrow AH^۲ + ۳۲۴ = ۹۰۰ \Rightarrow AH^۲ = ۵۷۶ \Rightarrow AH = ۲۴$$

یا $(AH^۲) = BH\times CH = ۳۲\times ۱۸ \Rightarrow AH = ۲۴$

حالا شکل دوران را کامل می‌کنیم. مشاهده می‌کنید که دو مخروط ایجاد می‌شود، یکی به شعاع ۲۴ و ارتفاع ۱۸ (مخروط سمت راست) و دیگری به شعاع ۲۴ و ارتفاع ۳۲ (مخروط سمت چپ). پس قاعدهٔ هر دو مخروط یکسان است:



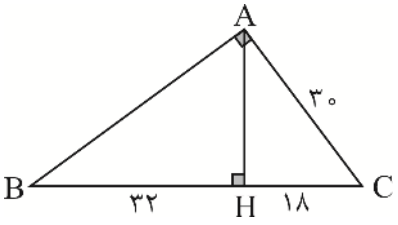
$$\text{مساحت قاعده} = \pi(۲۴)^۲ \Rightarrow \text{حجم مخروط سمت راست} = \frac{\pi(۲۴)^۲\times ۱۸}{۳} = ۶\pi(۲۴)^۲$$

$$\text{حجم مخروط سمت چپ} = \frac{\pi(۲۴)^۲\times ۳۲}{۳} \Rightarrow \text{حجم کل} = \pi(۲۴)^۲(۶ + \frac{۳۲}{۳}) = \frac{۵۰}{۳}\pi(۲۴)^۲$$

نکته: حجم حاصل از دوران مثلث قائم‌الزاویه با اضلاع قائم b و c و وتر a می‌شود:

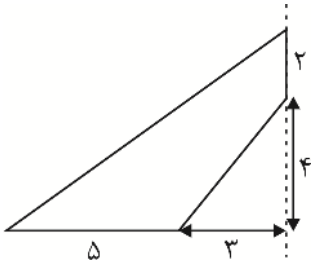
$$V=\frac{1}{3}\pi\frac{b^2c^2}{a}$$

مثلاً در سؤالی که دیدید:



$$a=۳۲+۱۸=۵۰$$
$$b=۳۰$$
$$c^2=۳۲\times۵۰$$
$$V=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{(۳۰)^2\times۳۲\times۵۰}{۵۰}\right)=\frac{1}{3}\pi(۹۰۰)(۳۲)=۹۶۰۰\pi$$

تمرین: حجم حاصل از دوران شکل زیر حول خط‌چین، چند برابر π است؟



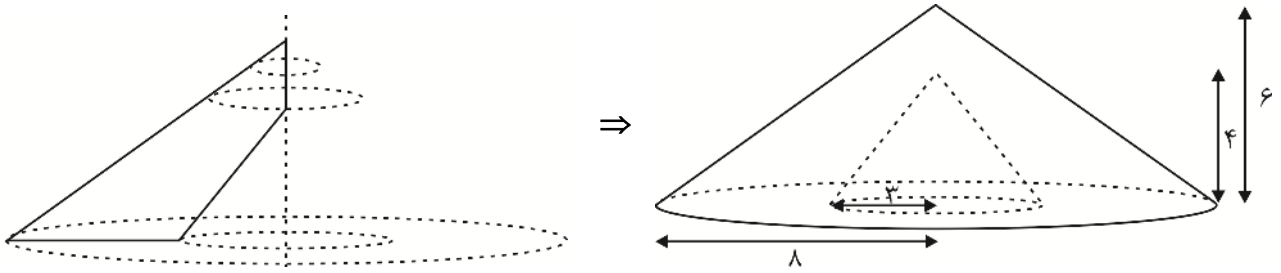
۱) ۱۲۸

۲) ۶۴

۳) ۱۲

۴) ۱۱۶

پاسخ: حجم حاصل مخروطی به شعاع و ارتفاع ۶ است که مخروطی به شعاع ۳ و ارتفاع ۴ از آن خارج شده است:

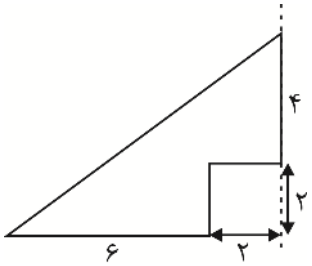


$$\text{حجم مخروط بزرگ}=\frac{\pi(۶۴)\times۶}{۳}=۱۲۸\pi \Rightarrow \text{مساحت قاعدهٔ مخروط بزرگ}=\pi(۸)^2$$

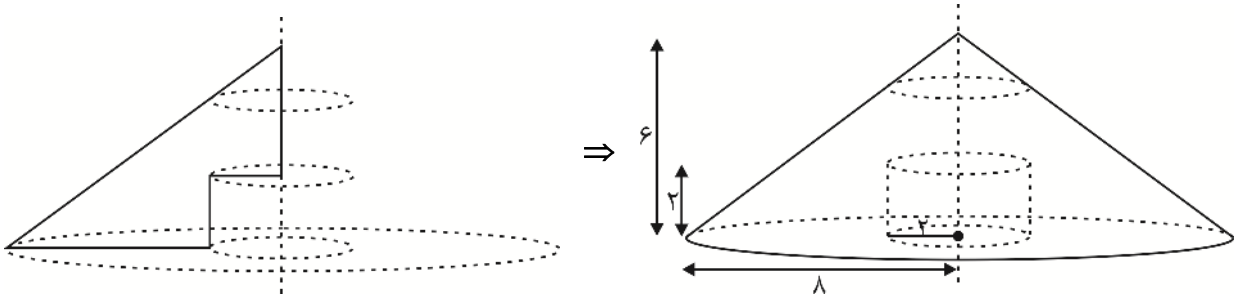
$$\text{مساحت قاعدهٔ مخروط خالی‌شده}=\pi(۳)^2$$

$$\text{حجم باقی‌مانده}=۱۲۸\pi-۱۲\pi=۱۱۶\pi \Leftarrow \text{حجم مخروط خالی‌شده}=\frac{۹\pi\times۴}{۳}=۱۲\pi$$

تمرین: حجم حاصل از دوران شکل زیر حول خط‌چین را به دست آورید.



پاسخ: حجم حاصل مخروطی به شعاع ۸ و ارتفاع ۶ است که یک استوانه به شعاع ۲ و ارتفاع ۲ از آن خالی شده است:



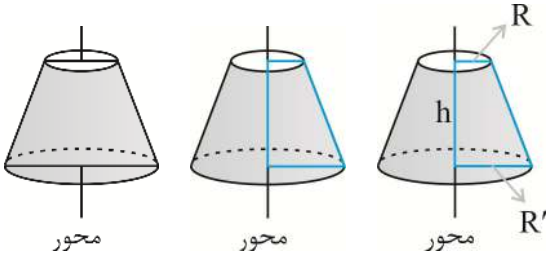
$$\text{مساحت قاعدهٔ مخروط} = \pi(۸)^۲ \Rightarrow \text{حجم مخروط} = \frac{۶۴\pi \times ۶}{۳} = ۱۲۸\pi$$

$$\text{مساحت قاعدهٔ استوانهٔ خالی‌شده} = \pi(۲)^۲ = ۴\pi \Rightarrow \text{حجم استوانهٔ خالی‌شده} = ۴\pi \times ۲ = ۸\pi$$

$$\Rightarrow \text{حجم باقی‌مانده} = ۱۲۸\pi - ۸\pi = ۱۲۰\pi$$

تحلیل دروان ذوزنقه قائم‌الزاویه:

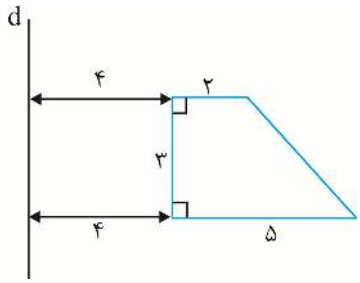
از دوران ذوزنقهٔ قائم‌الزاویه حول ساق قائم یا دوران ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین حول محور تقارن آن، مخروط ناقص ساخته می‌شود.



حجم مخروط ناقص دوار را بلد باشید:

$$V = \frac{۱}{۳}\pi(R^۲ + R'^۲ + RR')h$$

تمرین: از دوران شکل مقابل حول محور d چه حجمی ایجاد می‌شود؟



۱) ۱۱۳π

۲) ۱۱۷π

۳) ۱۲۱π

۴) ۱۲۳π

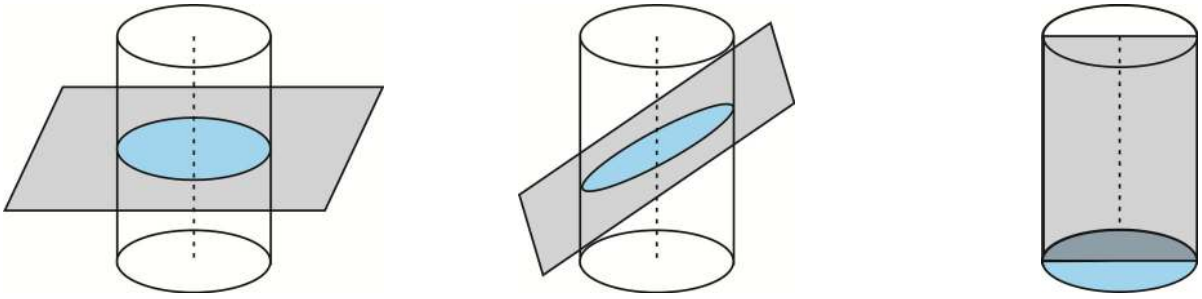
پاسخ: گزینهٔ «۴» ـ یک مخروط ناقص $(V_۱)$ با شعاع‌های ۶ و ۹ و ارتفاع ۳ داریم که یک سوراخ استوانه‌ای $(V_۲)$ به شعاع قاعده ۴ و ارتفاع ۳ دارد:

$$V = V_۱ - V_۲ = \frac{\pi}{۳}(۶^۲ + ۹^۲ + ۶ \times ۹) \times ۳ - \pi(۴^۲) \times ۳ = ۱۷۱\pi - ۴۸\pi = ۱۲۳\pi$$

برش و سطح مقطع

اگر صفحه‌ای یک جسم سه‌بعدی را قطع کند، شکلی ایجاد می‌شود که به آن می‌گوییم «سطح مقطع». مثلاً اگر یک استوانه را با یک صفحه برش بزنیم، حالت‌های زیر ایجاد می‌شود:

اگر صفحه بر ارتفاع استوانه عمود باشد، مقطع یک دایره است (شکل الف). اگر صفحه نسبت به ارتفاع استوانه مایل باشد، مقطع یک بیضی است (شکل ب). اگر صفحه عمود بر قاعده و شامل ارتفاع استوانه باشد، سطح مقطع یک مستطیل است (شکل پ).



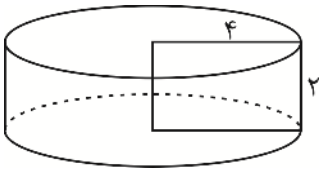
(الف) (ب) (پ)

تمرین: مستطیلی با ابعاد ۴ و ۲ را حول عرضش دوران می‌دهیم. مساحت سطح مقطع حاصل از برخورد هر کدام از صفحات زیر را با جسم حاصل پیدا کنید.

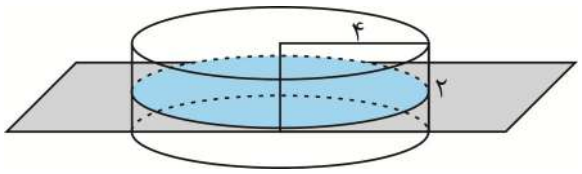
الف) یک صفحهٔ افقی که بر عرض مستطیل عمود است.

ب) یک صفحهٔ قائم که شامل عرض مستطیل است و بیشترین مساحت سطح مقطع را ایجاد می‌کند.

پاسخ: همان‌طور که در شکل روبه‌رو می‌بینیم، از دوران یک مستطیل حول عرضش یک استوانه با شعاع قاعدهٔ ۴ و ارتفاع ۲ ایجاد می‌شود. حالا اگر صفحه‌ای این استوانه را قطع کند:

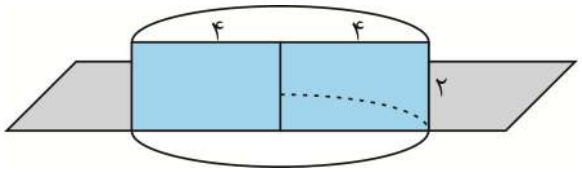


الف) اگر صفحه به عرض مستطیل که همان ارتفاع استوانه است عمود باشد، سطح مقطع دایره‌ای به شعاع ۴ است؛ پس مساحت سطح مقطع برابر است با:



$$S = \pi r^2 \Rightarrow S = \pi(4^2) = 16\pi$$

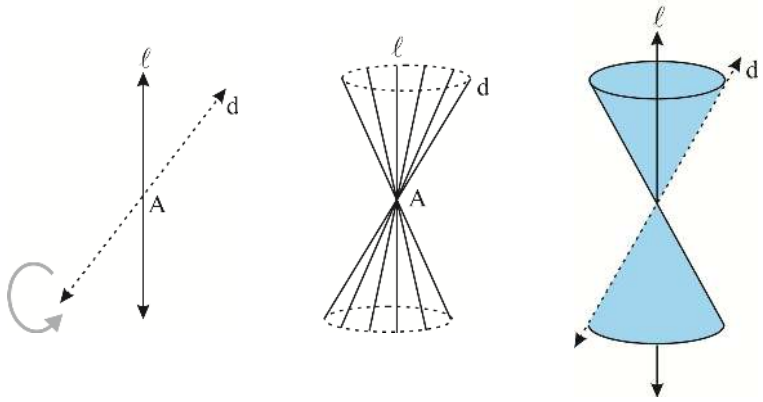
ب) اگر صفحه شامل عرض مستطیل یا همان ارتفاع استوانه باشد، بیشترین مساحتی که ایجاد می‌کند مستطیلی است با طول ۸ و عرض ۲؛ در نتیجه مساحتش برابر است با $۲ \times ۸ = ۱۶$.



آشنایی با مقاطع مخروطی

سطح مخروطی

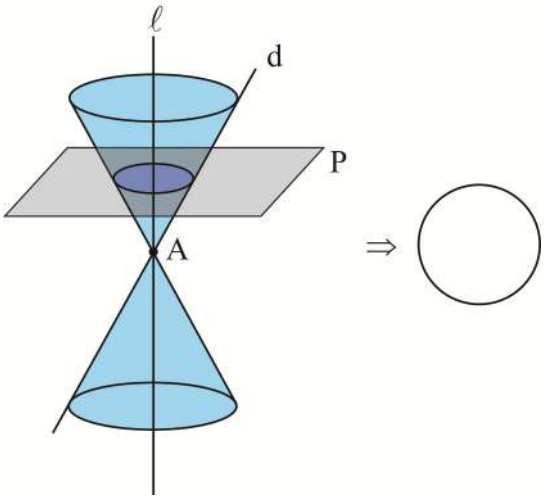
اگر دو خط متقاطع d و ℓ را داشته باشیم و خط d را حول خط ℓ دوران دهیم، به سطحی که ایجاد می‌شود می‌گوییم سطح مخروطی (در شکل بالا به ℓ می‌گوییم محور سطح مخروطی (همان محور تقارن) و به هر کدام از وضعیت‌های خط d می‌گوییم مولد. حالا اگر این سطح را با یک صفحه قطع دهیم، شکلی به وجود می‌آید که به آن می‌گوییم مقاطع مخروطی. تعداد مقاطع مخروطی چهارتا است. دایره، بیضی، هذلولی و سهمی.



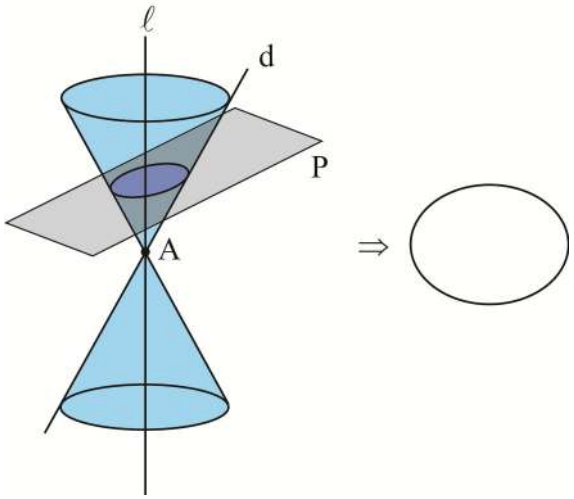
حالا بیایید ببینیم هر کدام از این مقطع‌ها چگونه ایجاد می‌شوند:

مقاطع مخروطی

۱) اگر صفحه بر محور سطح مخروطی عمود باشد و از رأس آن عبور نکند، مقطع دایره است.

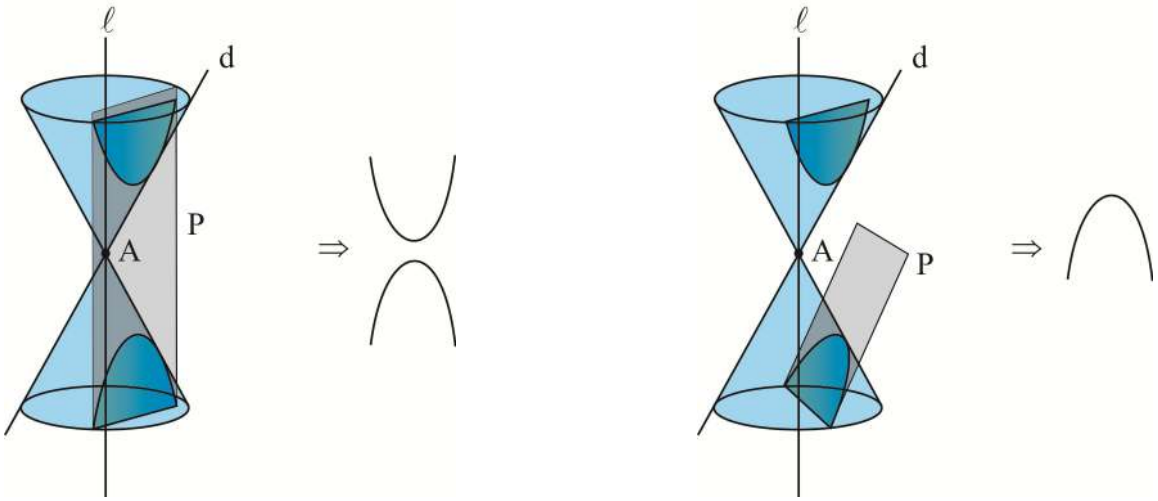


۲) اگر صفحه بر محور سطح مخروطی عمود یا با مولد سطح مخروطی موازی نباشد، مقطع بیضی است.



۳) اگر صفحه با مولد سطح مخروطی موازی باشد و از رأس آن عبور نکند، مقطع سهمی است.

۴) اگر صفحهٔ P موازی محور سطح مخروطی باشد و سطح مخروطی را در بالا و پایین آن قطع کند و از رأس سطح مخروطی عبور نکند، مقطع هذلولی است.



تمرین: شکل حاصل از برخورد یک صفحه با سطح مخروطی را در حالت‌های زیر مشخص کنید.

الف) صفحه، عمود بر محور سطح مخروطی باشد و از رأس آن عبور کند.

ب) صفحه، موازی مولد سطح مخروطی باشد و از رأس آ« عبور کند.

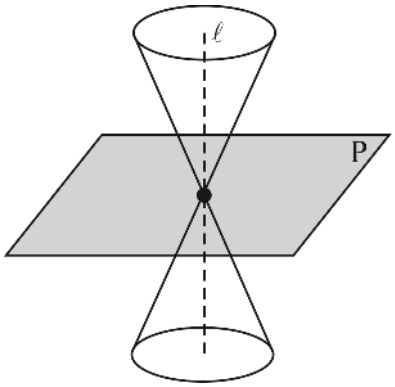
پ) صفحه، موازی محور سطح مخروطی باشد و از رأس آن عبور کند.

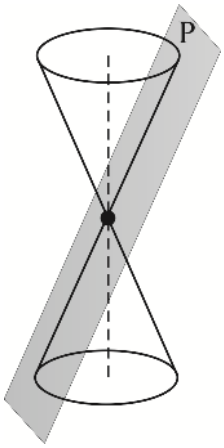
پاسخ:

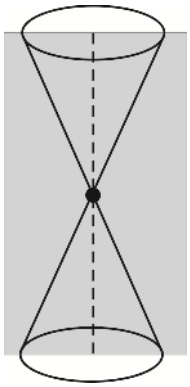
الف) طبق شکل زیر وقتی صفحهٔ P بر محور ℓ عمود است و از رأس می‌گذرد، مقطع، یک نقطه (همان رأس) است.

ب) وقتی صفحهٔ P با مولد سطح مخروطی موازی است و از رأس آن می‌گذرد، مقطع یک خط (یکی از مولدهای سطح مخروطی) است.

پ) وقتی صفحهٔ P موازی محور سطح مخروطی است و از رأس آن می‌گذرد، مقطع دو خط متقاطع است.







Homework

۱ در یک مکعب به طول یال a، صفحهٔ قطری، آن را به دو قسمت مساوی تقسیم می‌کند. این دو قسمت را در وجه مربع به هم می‌چسبانیم. سطح کل منشور حاصل، چند برابر a^2 است؟

۱) $5+\sqrt{2}$
۲) $4+2\sqrt{2}$
۳) $5+2\sqrt{2}$
۴) $3+4\sqrt{2}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۰

۲ در هرم با قاعدهٔ مربع، یکی از یال‌ها عمود بر صفحهٔ قاعده و بلندترین یال‌ها به طول ۶ واحد با تصویر خودش بر قاعده، زاویهٔ ۶۰ درجه می‌سازد. حجم این هرم کدام است؟

۱) $4\sqrt{3}$
۲) $4/5\sqrt{3}$
۳) $4\sqrt{6}$
۴) $7/5\sqrt{2}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۵

۳ ظرفی است به شکل نیم‌کره، به ضخامت یکنواخت ۳ واحد و قطر خارجی دهانهٔ آن ۱۶ واحد است. سطح کل این ظرف چند برابر π است؟

۱) ۲۰۸
۲) ۲۱۲
۳) ۲۱۵
۴) ۲۱۷

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

۴ مساحت مقطع یک مکعب با صفحهٔ قطری آن برابر $9\sqrt{2}$ است، اندازهٔ قطر مکعب کدام است؟

۱) $2\sqrt{3}$
۲) $3\sqrt{2}$
۳) $2\sqrt{6}$
۴) $3\sqrt{3}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

۵ در یک مکعب صفحهٔ گذرا بر یک یال و وسط یال دیگر، آن را به دو قطعهٔ نابرابر تقسیم می‌کند. نسبت حجم‌های این دو قطعه کدام است؟

۱) $\frac{1}{4}$
۲) $\frac{1}{3}$
۳) $\frac{1}{\sqrt{5}}$
۴) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۸

۶ یک ذوزنقهٔ قائم‌الزاویه به قاعده‌های ۲ و ۵ و ساق قائم ۳ واحد را حول ساق قائم دوران می‌دهیم. حجم جسم حاصل، کدام است؟

۱) ۳۶π
۲) ۳۸π
۳) ۳۹π
۴) ۴۰π

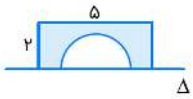
کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۵

۷ یک مثلث قائم‌الزاویه با زاویهٔ ۳۰ درجه و طول وتر ۸ واحد، حول وتر خود دوران می‌کند، حجم جسم حاصل چندبرابر π است؟

۱) ۲۴
۲) ۳۲
۳) ۳۶
۴) ۴۰

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۶

۸ سطح محدود به مستطیل ۵×۲ و نیم‌دایره به قطر ۳ واحد، حول خط Δ دوران می‌کند. حجم جسم حاصل چندبرابر π است؟



۱) ۱۵
۲) ۱۵/۵
۳) ۱۶/۵
۴) ۱۷

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۶

۹ حجم جسم حاصل از دوران مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC با ضلع‌های قائم AB و AC، به ترتیب با اندازه‌های ۵ و $۲\sqrt{۶}$ واحد، حول خط گذرا از رأس C و موازی ضلع AB، کدام است؟

۱) ۶۰π
۲) ۷۰π
۳) ۷۵π
۴) ۸۰π

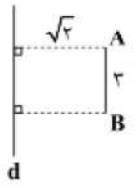
کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۹

۱۰ از داخل یک استوانهٔ قائم توپُر، به شعاع قاعدهٔ ۴ و ارتفاع ۵ واحد، بزرگ‌ترین مخروط قائم ممکن را حذف می‌کنیم. جسم حاصل را با صفحه‌ای موازی قاعدهٔ مخروط به فاصلهٔ ۳ واحد از آن قطع می‌دهیم. مساحت مقطع حاصل، کدام است؟

۱) $۱۰/۳۶\pi$
۲) $۱۱/۲۸\pi$
۳) $۱۲/۵۶\pi$
۴) $۱۳/۴۴\pi$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۶

۱۱ در شکل زیر، پاره‌خط AB موازی خط d است. از دوران AB حول d شکلی با کدام حجم به دست می‌آید؟



۱) ۴π

۲) ۲π

۳) ۸π

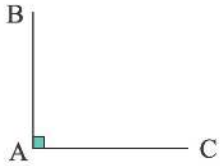
۴) ۶π

علوی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۴ ۱۴۰۰

۱۲ یک ذوزنقه قائم‌الزاویه به قاعده‌های ۳ و ۷ و ساق بزرگ ۵ را حول ساق کوچکش دوران می‌دهیم. شکل فضایی حاصل را بیان و حجم آن را بیابید.

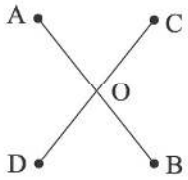
علوی ریاضی و فیزیک دهم آزمون شماره ۶ ۱۴۰۱

۱۳ دو پاره‌خط عمود بر هم به‌صورت زیر مفروض‌اند. از دوران AB حول AC چه شکلی پدید می‌آید؟ (با رسم شکل)



علوی ریاضی و فیزیک دهم آزمون شماره ۷ ۱۳۹۹

۱۴ دو پاره‌خط متقاطع به‌صورت زیر مفروض‌اند. از دوران AB حول CD چه جسم هندسی پدید می‌آید؟ (با رسم شکل)



علوی ریاضی و فیزیک دهم آزمون شماره ۷ ۱۳۹۹

۱۵ از داخل یک استوانهٔ قائم توپر، به شعاع قاعده ۴ و ارتفاع ۵ واحد، بزرگ‌ترین مخروط قائم ممکن را حذف می‌کنیم. حجم حاصل را با صفحه‌ای موازی قاعدهٔ مخروط به فاصلهٔ ۳ واحد از آن قطع می‌دهیم. مساحت مقطع حاصل کدام است؟

۱) $۱۰/۳۶\pi$

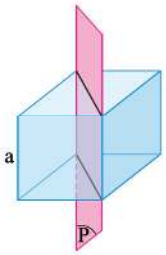
۲) $۱۱/۲۸\pi$

۳) $۱۲/۵۶\pi$

۴) $۱۳/۴۴\pi$

علوی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۴ ۱۴۰۱

۱۶ مساحت مقطع برش‌خورده توسط صفحهٔ P از مکعب به ضلع واحد چقدر است؟



۱) ۲

۲) $\sqrt{۲}$

۳) $۲\sqrt{۲}$

۴) ۱

علوی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۱۰ ۱۴۰۰

۱۷ قاعدهٔ هرمی قائم، مستطیل $ABCD$ است. رأس هرم را نیز O نامیده‌ایم. سطح مقطع حاصل از برخورد صفحهٔ P را با این هرم در هر حالت مشخص کنید.

علوی ریاضی و فیزیک دهم آزمون شماره ۷ ۱۳۹۹

الف صفحهٔ P از O نگذرد و بر ارتفاع هرم عمود باشد.

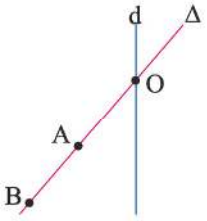
ب صفحهٔ P از O بگذرد و بر قاعدهٔ هرم عمود باشد.

پ صفحهٔ P از O نگذرد ولی بر قاعدهٔ هرم عمود باشد.

۱۸ صفحهٔ P کره‌ای به مرکز O و شعاع ۵ سانتی‌متر را قطع کرده است. اگر فاصلهٔ نقطهٔ O از صفحه ۳ سانتی‌متر باشد، مساحت این سطح مقطع چقدر است؟

علوی ریاضی و فیزیک دهم آزمون شماره ۷ ۱۳۹۹

۱۹ کدام گزینه نادرست است؟



۱) از دوران خط Δ حول d دو مخروط به دست می‌آید.

۲) از دوران یک مثلث قائم‌الزاویه حول یک ضلع زاویه قائمه آن یک مخروط به دست می‌آید.

۳) از دوران یک مربع حول یک ضلع آن استوانه به دست می‌آید.

۴) از دوران پاره‌خط AB حول خط d یک مخروط پدید می‌آید.

علوی ریاضی و فیزیک دهم آزمون شماره ۹ ۱۳۹۹

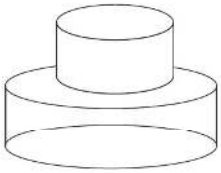
۲۰ دو کره با شعاع‌های r و r' یکدیگر را قطع کرده‌اند. به سؤالات زیر پاسخ دهید.

علوی ریاضی و فیزیک دهم آزمون شماره ۷ ۱۳۹۹

الف نقاط مشترک واقع بر روی هر کره روی چه شکلی قرار دارد؟

ب اگر همهٔ این نقاط را به مرکز یکی از دو کره وصل کنیم چه شکلی به دست می‌آید؟

۲۱ دو استوانه روی یکدیگر قرار داده‌ایم. اگر صفحه‌ای از بالا به‌طور عمودی هر دو استوانه را برش دهد، سطح مقطع حاصل چه شکلی خواهد بود؟ (همراه با رسم شکل)



علوی ریاضی و فیزیک دهم آزمون شماره ۷ ۱۳۹۹

۲۲ از دوران یک مثلث قائم‌الزاویه حول وتر آن چه جسمی پدید می‌آید؟ (با رسم شکل)

علوی ریاضی و فیزیک دهم آزمون شماره ۷ ۱۳۹۹

۲۳ شکل حاصل از دوران هریک را با رسم نام ببرید.

علوی ریاضی و فیزیک دهم آزمون شماره ۷ ۱۳۹۹

الف نیم‌دایره حول قطر آن

ب مستطیل حول طول یا عرض

پ مثلث قائم‌الزاویه حول یک ضلع زاویهٔ قائمه

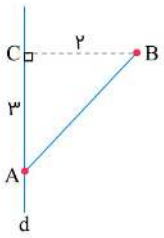
ت ذوزنقهٔ قائم‌الزاویه حول ساق قائم آن

۲۴ یک شش ضلعی منتظم به طول ضلع a را حول قطر بزرگ آن دوران می‌دهیم. اگر حجم شکل حاصل برابر 8π باشد، a کدام است؟

۱) $\sqrt{3}$
۲) $\sqrt{6}$
۳) ۲
۴) $2\sqrt{2}$

علوی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۱۲ ۱۴۰۰

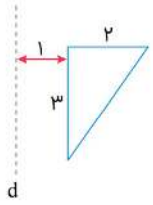
۲۵ مثلث ABC را حول خط d دوران می‌دهیم، سپس با صفحه‌ای عمود بر خط d به فاصله یک واحد از BC برش می‌دهیم. مساحت سطح مقطع چقدر است؟



۱) $\frac{7}{16}\pi$
۲) $\frac{9}{16}\pi$
۳) $\frac{16}{7}\pi$
۴) $\frac{16}{9}\pi$

علوی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۱۱ ۱۳۹۹

۲۶ اگر مثلث قائم‌الزاویهٔ زیر را که یک ضلع آن با d موازی است را حول خط d دوران دهیم، حجم شکل حاصل چقدر است؟



۱) ۸π

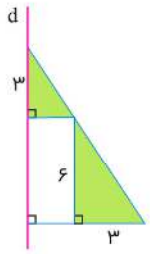
۲) ۱۰π

۳) ۱۲π

۴) ۱۴π

علوی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۱۰ ۱۳۹۹

۲۷ شکل زیر را حول خط d دوران می‌دهیم. حجم حاصل از دوران بخش سایه‌دار کدام است؟



۱) $\frac{۳۷۸}{۵}\pi$

۲) $\frac{۱۸۹\pi}{۴}$

۳) ۹۲π

۴) ۱۰۰π

علوی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۴ ۱۳۹۹

۲۸ یک کرهٔ توپر به شعاع ۵ را با یک صفحه برش زده‌ایم. اگر مساحت سطح مقطع ایجادشده دارای مساحت ۹π باشد، فاصلهٔ مرکز کره تا صفحهٔ موردنظر کدام است؟

۱) $\sqrt{۷}$

۲) ۴

۳) ۳

۴) $\sqrt{۶}$

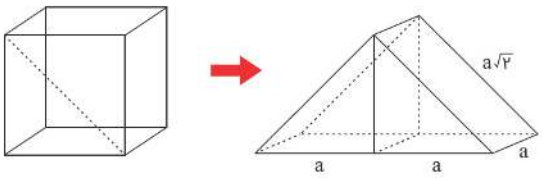
علوی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۴ ۱۳۹۹

پاسخ Homework

۱ گزینه ۲

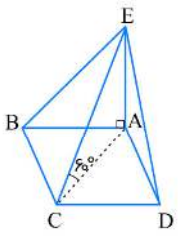
مساحت کل منشور حاصل برابر است با:

$$S = ۲(a \times a\sqrt{۲} + a \times a + ۲ \times \frac{a^۲}{۲}) = ۲(a^۲\sqrt{۲} + ۲a^۲) = a^۲(۴ + ۲\sqrt{۲})$$



کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۰

۲ گزینه ۲



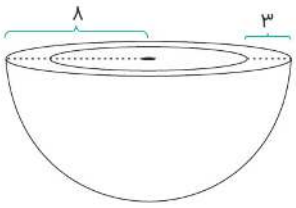
اگر بلندترین یال هرم را EC فرض کنیم، پس زاویهٔ $E\hat{C}A = ۶۰^\circ$ است.

$$\sin ۶۰^\circ = \frac{EA}{EC} \Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{EA}{۶} \Rightarrow EA = ۳\sqrt{۳}$$
$$\cos ۶۰^\circ = \frac{AC}{EC} \Rightarrow \frac{۱}{۲} = \frac{AC}{۶} \Rightarrow AC = ۳$$
$$AC = \sqrt{۲}AB \Rightarrow AB = \frac{۳}{\sqrt{۲}} \Rightarrow S_{ABCD} = (\frac{۳}{\sqrt{۲}})^۲ = \frac{۹}{۲}$$
$$V_{\text{هرم}} = \frac{۱}{۳}EA \times S_{ABCD} = \frac{۱}{۳} \times ۳\sqrt{۳} \times \frac{۹}{۲} = ۴/۵\sqrt{۳}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۵

۳ گزینه ۴

طبق توضیحات صورت سؤال، شکل زیر را رسم می‌کنیم:



برای محاسبهٔ سطح کل این ظرف کافی است مساحت نیم‌کرهٔ درونی، نیم‌کرهٔ بیرونی و مساحت سطح مقطع ظرف را به دست آوریم؛ دقت کنید که سطح مقطع ظرف به‌صورت دایره‌ای به شعاع ۸ است که دایرهٔ دیگری به شعاع ۵ از آن کسر شده است.

$$S_{\text{نیمکرهٔ بیرونی}} = \frac{۱}{۲}(۴\pi \times ۶۴) = ۲\pi \times ۶۴ = ۱۲۸\pi$$

$$S_{\text{نیمکرهٔ درونی}} = \frac{۱}{۲}(۴\pi \times ۲۵) = ۲\pi \times ۲۵ = ۵۰\pi$$

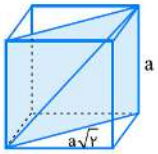
$$S_{\text{سطح مقطع}} = \pi(۶۴ - ۲۵) = ۳۹\pi$$

$$S_{\text{کل}} = S_{\text{نیمکرهٔ بیرونی}} + S_{\text{نیمکرهٔ درونی}} + S_{\text{سطح مقطع}} = ۱۲۸\pi + ۵۰\pi + ۳۹\pi = ۲۱۷\pi$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

۴ گزینه ۴

همان‌طوری که در شکل زیر نیز مشخص است، سطح مقطع یک مکعب به طول یال a و صفحهٔ قطری آن، مستطیلی به طول اضلاع a و $a\sqrt{۲}$ است. باتوجه‌به مساحت مستطیل، اندازهٔ a را محاسبه می‌کنیم.



بنابراین می‌توان نوشت:

$$a\left(a\sqrt{۲}\right)=۹\sqrt{۲}\Rightarrow a^{۲}\sqrt{۲}=۹\sqrt{۲}\Rightarrow a^{۲}=۹\Rightarrow a=۳$$

قطر مکعب به طول یال a برابر $a\sqrt{۳}$ است (با دو بار استفاده از قضیهٔ فیثاغورس ثابت می‌شود)، پس داریم:

$$a\sqrt{۳}=۳\sqrt{۳}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

۵ گزینه ۲

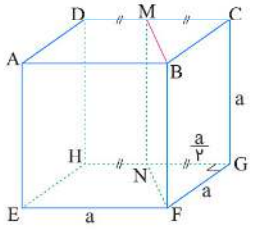
یال BF از مکعب زیر را در نظر می‌گیریم. نقطهٔ موردنظر نمی‌تواند وسط یال‌های EF، FG، AE، BC و CG باشد، زیرا در این صورت صفحهٔ گذرنده از BF و این نقطه، بر مکعب مماس می‌شود. ضمناً این نقطه نمی‌تواند وسط DH باشد، زیرا در این صورت، صفحهٔ گذرنده از AB و این نقطه، صفحهٔ قطری مکعب خواهد بود و حجم آن را نصف می‌کند که خلاف فرض است. پس فرض می‌کنیم نقطهٔ موردنظر، نقطهٔ M وسط یال CD است. (دقت کنید که برای یال‌های AD, EH, GH هم به همان نسبت یکسان، حجم‌ها تقسیم می‌شد). نقطهٔ M را به نقطهٔ N وسط HG وصل می‌کنیم. پس $MN||BF$ و درنتیجه صفحهٔ گذرنده از BF و M، از نقطهٔ N هم می‌گذرد و مکعب را به دو منشور تقسیم می‌کند. حال اگر حجم کوچک‌تر را $V_۱$، حجم بزرگ‌تر را $V_۲$ و حجم مکعب را V فرض کنیم، داریم:

$$V = a^۳$$

$$V_۱ = S_{\underset{GFN}{\Delta}} \times CG = \frac{۱}{۲}(a)(\frac{a}{۲})(a) = \frac{a^۳}{۴}$$

$$\Rightarrow V_۲ = V - V_۱ = \frac{۳a^۳}{۴}$$

$$\Rightarrow \frac{V_۱}{V_۲} = \frac{۱}{۳}$$



کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۸

۶ گزینه ۳

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۵

گام اول

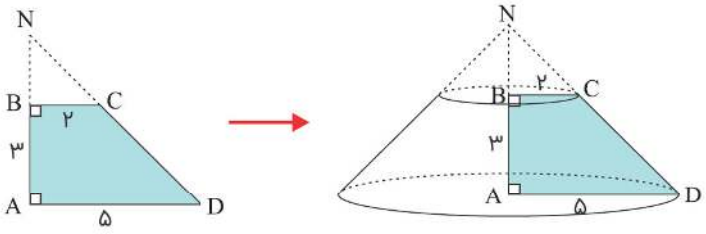
الف) در یک ذوزنقهٔ قائم‌الزاویه با امتداد دادن اضلاع غیرقاعده‌ای، یک مثلث قائم‌الزاویه به وجود می‌آید.

ب) از دوران مثلث قائم‌الزاویه حول یکی از اضلاع قائمه‌اش، یک مخروط ایجاد می‌شود.

ج) حجم مخروط از رابطهٔ $V = \frac{۱}{۳}\pi r^۲ h$ به دست می‌آید که r شعاع قاعده و h ارتفاع آن است.

گام دوم

ذوزنقهٔ $ABCD$ را رسم می‌کنیم. نقطهٔ تقاطع امتداد دو ضلع AB و CD را N می‌نامیم. دو مثلث $\overset{\Delta}{NAD}$ و $\overset{\Delta}{NBC}$ قائم‌الزاویه هستند. برای محاسبهٔ حجم حاصل از دوران ذوزنقه حول ضلع قائم آن، کافی است حجم مخروط حاصل از دوران مثلث $\overset{\Delta}{NBC}$ حول ضلع NB را از حجم مخروط حاصل از دوران مثلث $\overset{\Delta}{NAD}$ حول ضلع NA کم کنیم.



باتوجه‌به اینکه $BC||AD$ است، طبق قضیهٔ تالس داریم:

$$\frac{BN}{AN} = \frac{BC}{AD} \Rightarrow \frac{BN}{BN+۳} = \frac{۲}{۵} \Rightarrow ۵BN = ۲BN + ۶ \Rightarrow ۳BN = ۶ \Rightarrow BN = ۲$$

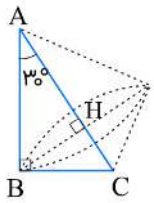
بنابراین:

$$V_{\text{دوران ذوزنقه}} = V_{\text{دوران مثلث } \overset{\Delta}{NAD}} - V_{\text{دوران مثلث } \overset{\Delta}{NBC}}$$

$$V_{\text{دوران ذوزنقه}} = \frac{۱}{۳}\pi(۵)^۲ \times ۵ - \frac{۱}{۳}\pi(۲)^۲ \times ۲ = \frac{۱}{۳}\pi\,(۱۲۵ - ۸) = \frac{۱۱۷}{۳}\pi = ۳۹\pi$$

۷ گزینه ۲

مطابق شکل از دوران مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC حول وتر AC، دو مخروط پدید می‌آید که ارتفاع وارد بر وتر (BH)، شعاع قاعدهٔ این دو مخروط است.



طول ضلع روبه‌رو به زاویهٔ ۳۰° در مثلث قائم‌الزاویه، نصف طول وتر است. پس طبق روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه داریم:

$$AC = ۸ \Rightarrow BC = \frac{۱}{۲} \times ۸ = ۴$$
$$BC^۲ = AC.CH \Rightarrow ۱۶ = ۸ \times CH$$
$$\Rightarrow CH = ۲ \Rightarrow AH = ۸ - ۲ = ۶$$
$$BH^۲ = AH.CH = ۲ \times ۶ = ۱۲$$

مجموع حجم دو مخروط برابر است با:

$$V = \frac{۱}{۳}\pi(BH)^۲ \times AH + \frac{۱}{۳}\pi(BH)^۲ \times CH$$
$$= \frac{\pi}{۳} \times ۱۲ \times ۶ + \frac{\pi}{۳} \times ۱۲ \times ۲$$
$$= ۲۴\pi + ۸\pi = ۳۲\pi$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۶

۸ گزینه ۲

باتوجه‌به شکل، قطر نیم‌دایره بر طول مستطیل منطبق شده است. حال داریم:

نکتهٔ ۱: از دوران یک مستطیل حول طول خود یک استوانه به ارتفاعی برابر با طول مستطیل و شعاع قاعده‌ای برابر با عرض آن پدید می‌آید.

نکتهٔ ۲: از دوران یک نیم‌دایره حول قطر آن، یک کره با همان شعاع پدید می‌آید.

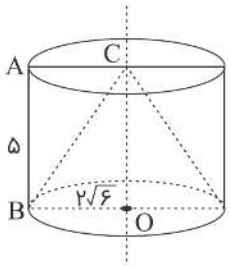
بنابراین باتوجه‌به این دو نکته، شکل ما یک استوانه می‌شود که از درون آن یک کره به شعاع $\frac{۳}{۲}$ خالی شده است، حجم جسم حاصل به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$V_{\text{رنگی}} = V_{\text{استوانه}} - V_{\text{کره}} = \pi(۲)^۲ \times ۵ - \frac{۴}{۳}\pi(\frac{۳}{۲})^۳ = ۲۰\pi - \frac{۹}{۲}\pi = ۱۵/۵\pi$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۶

۹ گزینه ۴

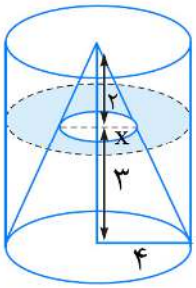
مطابق شکل، باید حجم بین استوانه و مخروط را بیابیم که برابر است با:



$$V_{\text{استوانه}} - V_{\text{مخروط}} = \pi(۲\sqrt{۶})^۲(۵) - \frac{۱}{۳}\pi(۲\sqrt{۶})^۲(۵) = \frac{۲}{۳}\pi(۲\sqrt{۶})^۲(۵)$$
$$= \frac{۲}{۳}\pi(۲۴)(۵) = ۸۰\pi$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۹

۱۰ گزینه ۴



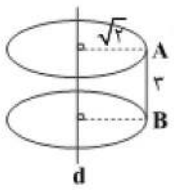
نسبت تشابه : $\frac{x}{۴} = \frac{۲}{۵} \Rightarrow x = \frac{۸}{۵}$

$$S = \pi(۴)^۲ - \pi(\frac{۸}{۵})^۲ = ۱۶\pi - \frac{۶۴}{۲۵}\pi = \frac{۳۳۶}{۲۵}\pi = ۱۳/۴۴\pi$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۶

۱۱ گزینه ۴

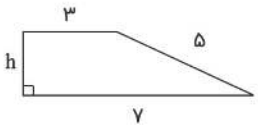
از دوران این پاره‌خط حول خط d یک استوانه قائم با شعاع قاعدهٔ $\sqrt{۲}$ و ارتفاع ۳ به دست می‌آید و حجم آن به‌صورت زیر به دست می‌آید:

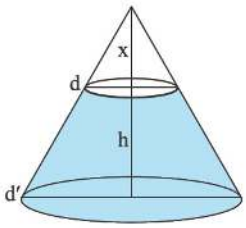


$$\pi \times (\sqrt{۲})^{۲} \times ۳ = ۶\pi$$

علوی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۴ ۱۴۰۰

۱۲ از دوران ذوزنقه قائم‌الزاویه حول ساق کوچکش، یک مخروط ناقص ایجاد می‌شود.



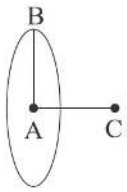


$$\frac{x}{x+h} = \frac{۳}{۷}$$
$$\frac{x}{۳} = \frac{۳}{۴}$$
$$x = \frac{۹}{۴}$$

$$\text{حجم مخروط ناقص} = \text{حجم مخروط بزرگ} - \text{حجم مخروط کوچک}$$
$$\text{حجم مخروط ناقص} = \frac{۱}{۳}\pi r^{۲}h - \frac{۱}{۳}\pi(۳)^{۲}x$$
$$V = \frac{۱}{۳}\pi(۷)^{۲}(h+x) - \frac{۱}{۳}\pi ۹x$$
$$V = \frac{۱}{۳}\pi(۴۹h + ۴۰x)$$
$$V = \frac{۱}{۳}\pi(۴۹ \times ۳ + ۴۰(\frac{۹}{۴}))$$
$$V = \frac{۱}{۳}\pi(۲۳۷)$$
$$V = ۷۹\pi$$

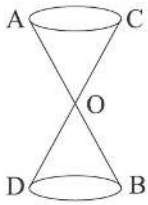
علوی ریاضی و فیزیک دهم آزمون شماره ۶ ۱۴۰۱

۱۳ دایره



علوی ریاضی و فیزیک دهم آزمون شماره ۷ ۱۳۹۹

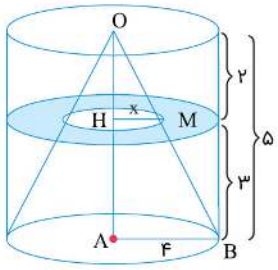
۱۴ دو مخروط که رأس مشترک دارند. (O)



علوی ریاضی و فیزیک دهم آزمون شماره ۷ ۱۳۹۹

۱۵ گزینه ۴

سطح مقطع حاصل، قسمت رنگی در شکل زیر است. در مثلث OAB بنا بر تالس:



$$\frac{HM}{AB}=\frac{OH}{OA}\Rightarrow\frac{x}{۴}=\frac{۲}{۵}\Rightarrow x=\frac{۸}{۵}$$

اکنون به سادگی سطح مقطع رنگی را به دست می‌آوریم:

$$S_{\text{رنگی}}=\pi\times(۴)^{۲}-\pi(x)^{۲}=۱۶\pi-\frac{۶۴}{۲۵}\pi=\frac{۳۳۶\pi}{۲۵}=۱۳/۴۴\pi$$

علوی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۴ ۱۴۰۱

۱۶ گزینه ۲

صفحهٔ موردنظر مستطیلی به عرض یال مکعب و به طول قطر وجه می‌باشد.

$$S = a \times a\sqrt{۲} = a^{۲}\sqrt{۲} = (۱)^{۲}\sqrt{۲} = \sqrt{۲}$$

علوی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۱۰ ۱۴۰۰

۱۷

علوی ریاضی و فیزیک دهم آزمون شماره ۷ ۱۳۹۹

الف مستطیل

ب مثلث

پ ذوزنقه

۱۸ سطح مقطع یک صفحه با کره، دایره می‌باشد. از A به O و O' وصل می‌کنیم، خواهیم داشت:

$$\Delta OO'A : \hat{O'} = ۹۰^{\circ} \xrightarrow{\text{فیثاغورس}} OA^{۲} = OO'^{۲} + O'A^{۲} \Rightarrow ۵^{۲} = ۳^{۲} + r^{۲}$$

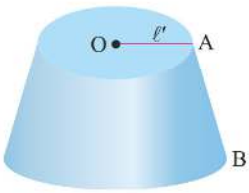
$$r^{۲} = ۲۵ - ۹ = ۱۶ \Rightarrow r = ۴ \quad \text{شعاع دایرهٔ سطح مقطع}$$

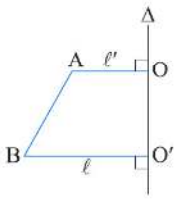
$$\text{دایره } S = \pi r^{۲} \Rightarrow S = \pi(۴^{۲}) = ۱۶\pi\,cm^{۲}$$

علوی ریاضی و فیزیک دهم آزمون شماره ۷ ۱۳۹۹

۱۹ گزینه ۴

از دوران پاره‌خط AB حول d مخروطی پدید می‌آید که قسمت بالای آن حذف شده است، که به آن مخروط ناقص می‌گوییم.





علوی ریاضی و فیزیک دهم آزمون شماره ۹ ۱۳۹۹

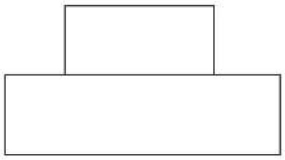
۲۰

علوی ریاضی و فیزیک دهم آزمون شماره ۷ ۱۳۹۹

الف دایره

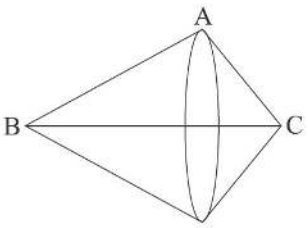
ب مخروط

۲۱ دو مستطیل به‌هم‌چسبیده و روی هم مانند شکل.



علوی ریاضی و فیزیک دهم آزمون شماره ۷ ۱۳۹۹

۲۲ دو مخروط که قاعدهٔ آن‌ها به‌هم‌چسبیده و مشترک هستند.

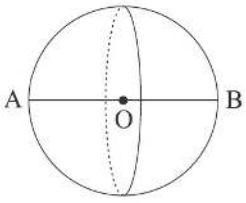


علوی ریاضی و فیزیک دهم آزمون شماره ۷ ۱۳۹۹

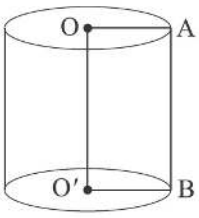
علوی ریاضی و فیزیک دهم آزمون شماره ۷ ۱۳۹۹

۲۳

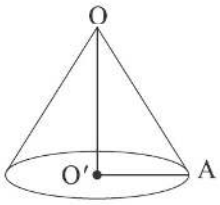
الف کره



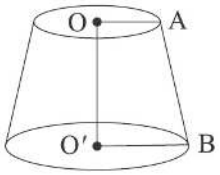
ب استوانه



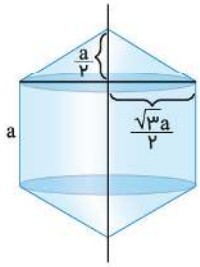
پ مخروط



ت مخروط ناقص



۲۴ گزینه ۳



شکل حاصل از دو مخروط برابر و یک استوانه تشکیل شده است. شعاع قاعده مخروط‌ها و استوانه نصف طول قطر کوچک شش ضلعی است و قطر کوچک شش ضلعی به ضلع a برابر $a\sqrt{۳}$ است. ارتفاع هریک از مخروط‌ها برابر $\frac{a}{۲}$ و ارتفاع استوانه برابر a است. اکنون حجم شکل حاصل را به دست می‌آوریم:

$$\underbrace{۲\times\frac{۱}{۳}\times\pi\times\left(\frac{\sqrt{۳}a}{۲}\right)^{۲}\times\frac{a}{۲}}_{\text{حجم مخروط}}+\underbrace{\pi\left(\frac{\sqrt{۳}a}{۲}\right)^{۲}\times a}_{\text{حجم استوانه}}=\frac{\pi a^{۳}}{۴}+\frac{۳\pi a^{۳}}{۴}=\pi a^{۳}$$

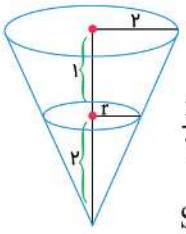
درنتیجه:

$$\pi a^{۳}=۸\pi\Rightarrow a=۲$$

علوی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۱۲ ۱۴۰۰

۲۵ گزینه ۴

اگر مثلث را حول d دوران دهیم، مخروطی ایجاد می‌شود، برش مورد نظر دایره‌ای به شعاع r می‌دهد که r را می‌توان با قضیه تالس محاسبه کرد.



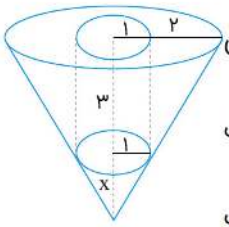
$$\frac{r}{۲}=\frac{۲}{۳}\Rightarrow r=\frac{۴}{۳}$$

$$S_{\text{مقطع}}=\pi r^{۲}=\pi\left(\frac{۴}{۳}\right)^{۲}=\frac{۱۶}{۹}\pi$$

علوی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۱۱ ۱۳۹۹

۲۶ گزینه ۲

شکل حاصل به‌صورت زیر خواهد بود.



تالس : $\frac{x}{x+۳}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow ۳x=x+۳\Rightarrow x=\frac{۳}{۲}$

مخروط بزرگ $V=\frac{\pi}{۳}(۳)^۲(۳+\frac{۳}{۲})=۳\pi\times\frac{۹}{۲}=\frac{۲۷}{۲}\pi$

مخروط کوچک $V=\frac{\pi}{۳}(۱)^۲\times\frac{۳}{۲}=\frac{\pi}{۲}$

حجم استوانه $V=\pi(۱)^۲(۳)=۳\pi$

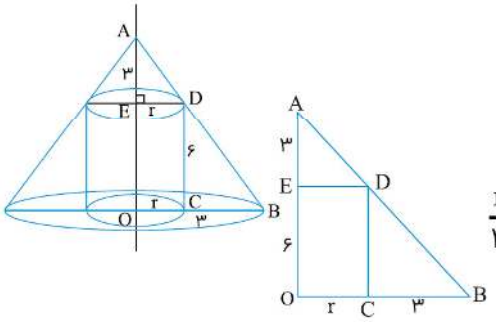
حجم اصلی $V=\frac{۲۷\pi}{۲}-\frac{\pi}{۲}-۳\pi=۱۰\pi$

علوی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۱۰ ۱۳۹۹

۲۷ گزینه ۲

از نمادگذاری شکل زیر استفاده می‌کنیم. شکل فضایی حاصل، یک مخروط است که یک استوانه به شعاع قاعدهٔ r و ارتفاع ۶ از آن برداشته شده است.

از تشابه دو مثلث AED و DCB به دست می‌آید:



$$\frac{r}{۳}=\frac{۳}{۶}\Rightarrow r=\frac{۳}{۲}$$

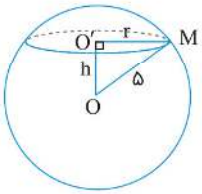
حجم شکل فضایی حاصل:

$$\frac{۱}{۳}\pi(۳+\frac{۳}{۲})^۲\times(۳+۶)-\pi\times(\frac{۳}{۲})^۲\times۶=\frac{۱۸۹}{۴}\pi$$

علوی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۴ ۱۳۹۹

۲۸ گزینه ۲

از نمادگذاری شکل زیر استفاده می‌کنیم.



چون مساحت سطح مقطع برابر ۹π است، پس:

$$\pi r^۲ = ۹\pi \Rightarrow r = ۳$$

اکنون در مثلث قائم‌الزاویهٔ OMO' بنا بر قضیهٔ فیثاغورس:

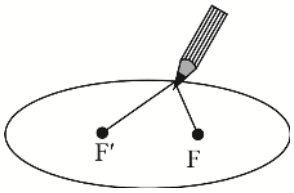
$$h = \sqrt{۵^۲ - ۳^۲} = ۴$$

علوی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۴ ۱۳۹۹

بیضی

همان‌طور که دیدیم بیضی یکی از مقاطع مخروطی است. در ادامه با ویژگی‌های بیضی آشنا می‌شویم:

۱) رسم بیضی: اگر در دو نقطه از کاغذ دو سوزن فرو کنیم و نخی را که طولش بیشتر از فاصلهٔ این دو نقطه است به آن دو سوزن وصل کنیم و طبق شکل مداد را در حالتی که نخ کاملاً کشیده است روی صفحه حرکت دهیم، یک بیضی رسم می‌شود.

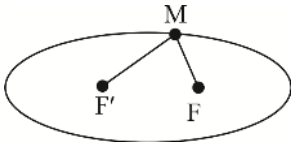


۲) طبق شیوهٔ رسم بالا می‌توانیم بگوییم:

بیضی مجموعهٔ نقاطی از صفحه است که مجموع فواصل آن‌ها از دو نقطهٔ ثابت، مقداری ثابت است.

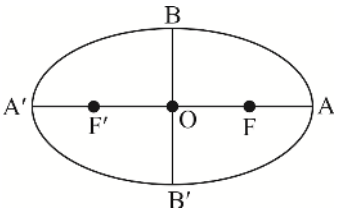
به آن دو نقطهٔ ثابت (همان نقاطی که در بالا در آن‌ها سوزن فرو کرده بودیم) می‌گوییم کانون‌های بیضی و معمولاً آن‌ها را با F و F' نشان می‌دهیم. مقدار ثابت را در تعریف بیضی با $2a$ نشان می‌دهیم.

۳) طبق مطالبی که گفتیم داریم:



بیضی مجموعهٔ نقاطی از صفحه است که مجموع فاصله‌هایشان از دو نقطهٔ ثابت به نام کانون برابر مقدار ثابت $2a$ باشد. یعنی اگر نقطه‌ای مانند M روی بیضی با کانون‌های F و F' باشد، داریم:

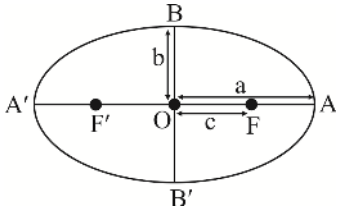
$$MF + MF' = 2a.$$



۴) بیضی دو محور تقارن دارد که بزرگ‌ترین قطر (AA') و کوچک‌ترین قطر (BB') بیضی‌اند.

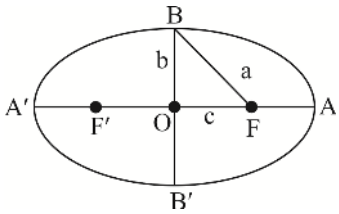
$AA' = 2a$ است و $BB' = 2b$، نقطهٔ وسط A و A' یا B و B' یا F و F' مرکز تقارن یا مرکز بیضی است.

۵) در هر بیضی نصف قطر بزرگ برابر a و نصف قطر کوچک برابر b و نصف فاصلهٔ کانونی (یعنی $\frac{FF'}{2}$) برابر c است.

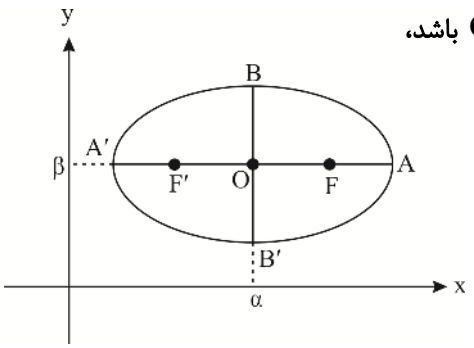


$$OA = OA' = a$$
$$OB = OB' = b$$
$$OF = OF' = c$$

۶) بین a و b و c رابطهٔ $c^2 = a^2 - b^2$ برقرار است.



۷) در یک بیضی افقی (یعنی قطر بزرگ بیضی موازی محور xها است) اگر مرکز بیضی $O\begin{vmatrix}\alpha\\ \beta\end{vmatrix}$ باشد،



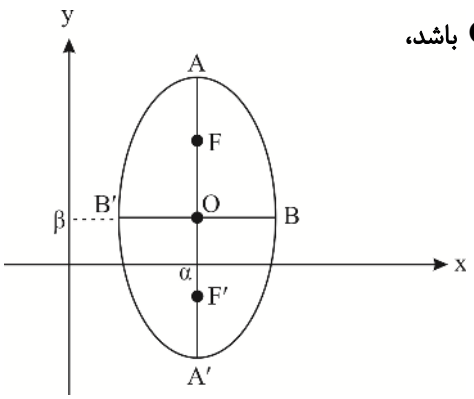
داریم:

$$A\begin{vmatrix}\alpha+a\\ \beta\end{vmatrix} \qquad A'\begin{vmatrix}\alpha-a\\ \beta\end{vmatrix}$$

$$B\begin{vmatrix}\alpha\\ \beta+b\end{vmatrix} \qquad B'\begin{vmatrix}\alpha\\ \beta-b\end{vmatrix}$$

$$F\begin{vmatrix}\alpha+c\\ \beta\end{vmatrix} \qquad F'\begin{vmatrix}\alpha-c\\ \beta\end{vmatrix}$$

۸) در یک بیضی قائم (یعنی قطر بزرگ بیضی موازی محور yها است) اگر مرکز بیضی $O\begin{vmatrix}\alpha\\ \beta\end{vmatrix}$ باشد،



داریم:

$$A\begin{vmatrix}\alpha\\ \beta+a\end{vmatrix} \qquad A'\begin{vmatrix}\alpha\\ \beta-a\end{vmatrix}$$

$$B\begin{vmatrix}\alpha+b\\ \beta\end{vmatrix} \qquad B'\begin{vmatrix}\alpha-b\\ \beta\end{vmatrix}$$

$$F\begin{vmatrix}\alpha\\ \beta+c\end{vmatrix} \qquad F'\begin{vmatrix}\alpha\\ \beta-c\end{vmatrix}$$

۹) برای این که مختصات رأس‌ها و کانون‌های بیضی را راحت‌تر بنویسیم یا همیشه یک شکل فرضی رسم می‌کنیم یا می‌گوییم:

در B و B' عرض مرکز با b جمع و تفریق می‌شود ـ در A و A' (یا F و F') طول مرکز با a (یا c) جمع و تفریق می‌شود $\Rightarrow$ بیضی افقی

در B و B' طول مرکز با b جمع و تفریق می‌شود ـ در A و A' (یا F و F') عرض مرکز با a (یا c) جمع و تفریق می‌شود $\Rightarrow$ بیضی قائم

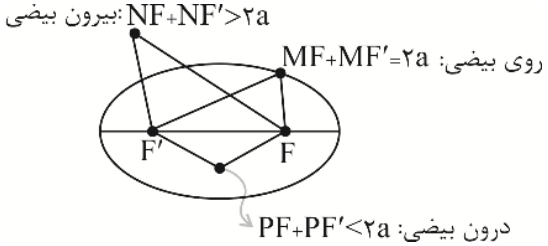
دو سر قطر بزرگ $\Leftarrow \pm a$ دو سر قطر کوچک $\Leftarrow \pm b$ کانون‌ها $\Leftarrow \pm c$

تمرین: نقطه‌های N و M روی یک بیضی است که برای رسم آن باید نخ را در نقاط F و F' ببندیم. اگر $MF = ۶$، $MF' = ۴$ و فاصلهٔ نقطهٔ N از F' برابر ۳ باشد، NF چه‌قدر است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

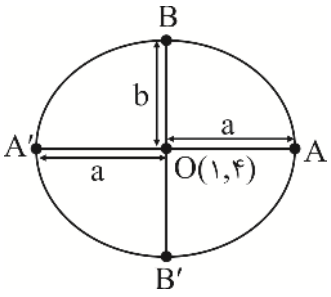
پاسخ: گزینهٔ «۴» ـ قرار شد $MF + MF'$ و $NF + NF'$ و ... همگی ثابت و با هم برابر باشند. پس $NF + ۳ = ۴ + ۶$ و در نتیجه $NF = ۷$.

توجه: در بیضی سؤال قبل اگر جمع فاصله‌های نقطه‌ای از F و F' بیشتر از ۱۰ باشد، این نقطه بیرون بیضی است و اگر کم‌تر از ۱۰ باشد، درون بیضی است.



تمرین: در بیضی افقی با مرکز $(۱, ۴)$ و طول قطرهای ۸ و ۱۰، بیشترین مقدار طول و کم‌ترین مقدار عرض نقاط، چه‌قدر اختلاف دارند؟

۱) ۸ ۲) ۶ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲



پاسخ: گزینهٔ «۲» ـ سؤال گفته $2a=10$ و $2b=8$، پس $a=5$ و $b=4$ و داریم:

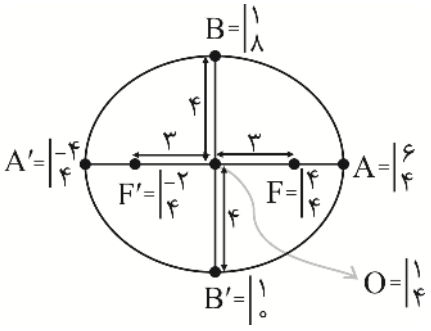
$$y_{max}=y_B=y_O+b=4+4=8$$
$$y_{min}=y_{B'}=y_O-b=4-4=0$$

نکته: موافقید که این بیضی بر محور xها مماس است (چون $y_{B'}=0$)

$$x_{min}=x_{A'}=x_O-a=1-5=-4 \qquad x_{max}=x_A=x_O+a=1+5=6$$

پس $y_{max}-y_{min}=6$.

حالا مختصات نقاط این بیضی را ببینید:



راستی با توجه به فیثاغورس، c می‌شود ۳.

با این گزاره‌ها موافقید؟

الف) $-4 \le x \le 6$

ب) $0 \le y \le 8$

پ) $BF=a=5$

ت) یک کانون (F) روی نیمساز ربع اول است.

ث) یک رأس کانونی روی نیمساز ربع دوم (A') است.

ج) خطوط $x=6$، $x=-4$، $y=8$ و $y=0$ بر بیضی مماس‌اند.

چ) معادلهٔ محور تقارن افقی، $y=4$ و معادلهٔ محور تقارن عمودی، $x=1$ است.

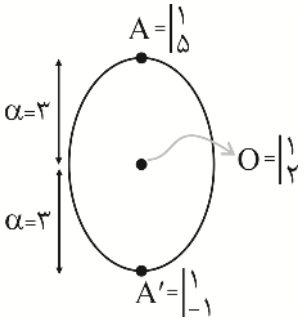
تمرین: در یک بیضی کانون‌ها $F(1,2+\sqrt{5})$ و $F'(1,2-\sqrt{5})$ هستند. اگر قطر کوچک به طول ۴ باشد، مجموع طول و عرض رأس کانونی بیضی کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

پاسخ: گزینهٔ «۲» ـ F و F' طول مساوی و عرض متفاوت دارند پس بیضی قائم است. مرکز بیضی در وسط F و F' یعنی $O(1,2)$ است و فاصلهٔ OF برابر $c=\sqrt{5}$ است. سؤال گفته قطر کوچک $2b=4$ است. پس $b=2$:

$$a^2=b^2+c^2=2^2+\sqrt{5}^2=4+5=9 \Rightarrow a=3$$

حالا مختصات رأس‌های کانونی:



و مجموع طول و عرض آن ۶ یا صفر است.

تمرین: دو سر قطر بزرگ یک بیضی $(1,6)$ و $(-2,1)$ و خروج از مرکز آن $\frac{\sqrt{7}}{4}$ است. طول قطر کوچک این بیضی کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۷ ۴) ۱۰

پاسخ: گزینهٔ «۱» ـ این بیضی قائم است (yها متفاوت‌اند) و داریم:

$$AA' = ۲a = ۶ - (-۲) = ۸ \Rightarrow a = ۴$$

حالا e را داریم:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{۷}}{۴} \xrightarrow{a=۴} c = \sqrt{۷}$$

پس:

$$b^۲ = a^۲ - c^۲ = ۴^۲ - \sqrt{۷}^۲ = ۱۶ - ۷ = ۹ \Rightarrow b = ۳$$

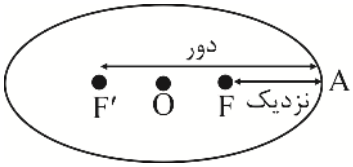
و طول قطر کوچک می‌شود:

$$BB' = ۲b = ۶$$

تمرین: در یک بیضی فاصلهٔ رأس A از کانون دورتر ۳ برابر فاصلهٔ آن از کانون نزدیک‌تر است. خروج از مرکز کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۶}$

پاسخ: گزینهٔ «۳» ـ فاصله‌ها را ببینید:



$$AF = a - c$$
$$AF' = a + c$$

سؤال گفته:

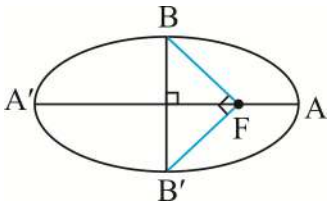
$$a + c = ۳(a - c)$$

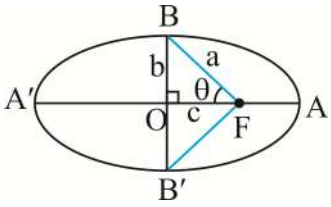
پس $۴c = ۲a$ و در نتیجه: $e = \frac{c}{a} = \frac{۱}{۲}$.

تمرین: در یک بیضی زاویهٔ BFB' قائمه است. خروج از مرکز کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

پاسخ: گزینهٔ «۲» ـ شکل را ببینید:





$$B\hat{F}B' = ۹۰^\circ \Rightarrow B\hat{F}O = ۴۵^\circ$$
$$e = \cos\theta = \frac{OF}{BF} = \frac{c}{a} = \cos ۴۵^\circ = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

تمرین: اگر نقاط $(۱,۳)$ و $(۱,-۵)$ کانون‌های یک بیضی باشند، معادلهٔ قطر بزرگ و کوچک بیضی به ترتیب کدام است؟

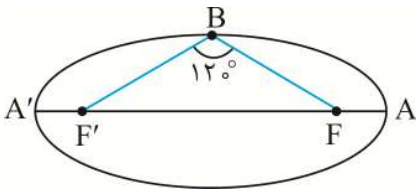
۱) $y=-۱$ و $x=۱$ ۲) $y=۱$ و $x=-۱$ ۳) $y=۱$ و $x=۱$ ۴) $y=-۱$ و $x=-۱$

تمرین: مرکز یک بیضی افقی نقطهٔ $O(-۴,-۱)$ و خروج از مرکزش $\frac{۴}{۵}$ و طول قطر کوچکش ۶ واحد است. مختصات کانون‌های بیضی کدام است؟

۱) $(-۷,-۱),(-۱,-۱)$ ۲) $(-۸,-۱),(۰,-۱)$

۳) $(-۴,-۵),(-۴,۳)$ ۴) $(-۴,-۴),(-۴,۲)$

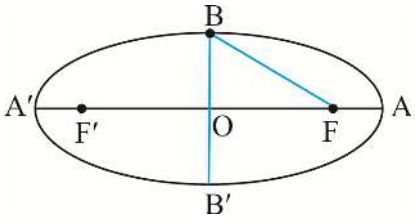
تمرین: در شکل مقابل A و A' دو رأس قطر بزرگ و B یک رأس قطر کوچک بیضی است. خروج از مرکز بیضی کدام است؟



۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$

۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۴}$

تمرین: در بیضی زیر، $AA'=۱۰$ و $BB'=۶$ است. نسبت $\frac{AF}{BF}$ برابر کدام است؟



۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$

۳) $\frac{۱}{۵}$ ۴) $\frac{۱}{۶}$

Homework

۱ کانون‌های یک بیضی نقاطی با طول $x = ۳$ و $x = -۳$ روی محور xها هستند. اگر خروج از مرکز بیضی $\frac{۱}{۳}$ باشد، طول قطر کوچک این بیضی کدام است؟

۱) $۱۵\sqrt{۲}$
۲) $۱۲\sqrt{۲}$
۳) $۸\sqrt{۲}$
۴) $۶\sqrt{۲}$

۲ نقطهٔ $(-۱۲, ۰)$ یکی از کانون‌های یک بیضی است که طول قطر کوچک آن برابر ۱۸ است. اگر مبدأ مختصات مرکز بیضی باشد، خروج از مرکز بیضی، چقدر است؟

۱) ۰/۶
۲) ۰/۸
۳) ۱/۴
۴) ۱/۸

۳ در یک بیضی با خروج از مرکز $\sqrt{\frac{۲}{۳}}$، دو سر قطر بزرگ از انتهای قطر کوچک، با کدام زاویه رؤیت می‌شود؟

۱) ۶۰°
۲) ۹۰°
۳) ۱۲۰°
۴) ۱۵۰°

۴ یک بیضی به قطرهای $AA' = ۱۴$ و $BB' = ۴\sqrt{۶}$ و کانون F نزدیک به نقطهٔ A، مفروض است. خط عمود بر قطر AA' از نقطهٔ F، دایره به قطر AA' را در نقطهٔ M، قطع می‌کند. اندازهٔ پاره‌خط AM، کدام است؟

۱) ۷
۲) $۲\sqrt{۷}$
۳) $۲\sqrt{۶}$
۴) $۲\sqrt{۳}$

۵ در یک بیضی به کانون‌های $(۱-, ۲)$ و $(۲, ۷)$، اندازهٔ قطر کوچک ۶ واحد است. خروج از مرکز این بیضی کدام است؟

۱) ۰/۶
۲) ۰/۶۴
۳) ۰/۷۵
۴) ۰/۸

۶ در یک بیضی به اقطار $۲\sqrt{۵}$ و ۲ واحد، دایره‌ای هم‌مرکز با بیضی و شعاع ۲ واحد، بیضی را در نقطهٔ M قطع می‌کند. مجموع مربعات فواصل M از دو کانون بیضی کدام است؟

۱) ۱۲
۲) ۱۶
۳) ۱۸
۴) ۲۰

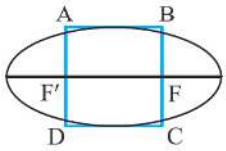
۷ بیضی با خروج از مرکز $e = \frac{۲}{۳}$ و کانون $F(۲,۱)$ و رأس کانونی نظیر آن $A(۲,۴)$ مفروض است. بیشترین مساحت از بین مثلث‌هایی که یک رأس آن روی بیضی و دو رأس آن کانون‌های این بیضی باشند، کدام است؟

۱) $۱۸\sqrt{۵}$
۲) $۱۹\sqrt{۵}$
۳) $۵\sqrt{۱۸}$
۴) $۳۶\sqrt{۵}$

۸ در یک بیضی خروج از مرکز $\frac{۱}{۲}$ و فاصله کانون از رأس دورتر برابر ۳ است. اندازه قطر کوچک بیضی چقدر است؟

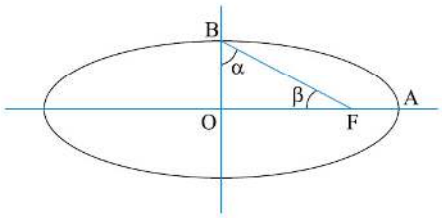
۱) $۲\sqrt{۳}$
۲) $۳\sqrt{۲}$
۳) $۲\sqrt{۲}$
۴) $\sqrt{۳}$

۹ در بیضی شکل زیر، قطرهای چهارضلعی ABCD عمودمنصف یکدیگرند. خروج از مرکز بیضی چقدر است؟ (F' ,F کانون ها هستند.)



۱) $\frac{۱}{۲}$
۲) $\frac{۱}{۳}$
۳) $\frac{۱}{\sqrt{۲}}$
۴) $\frac{۱}{\sqrt{۳}}$

۱۰ در شکل زیر، $۲\alpha + ۳\beta = ۲۴۰^\circ$. خروج از مرکز بیضی چقدر است؟

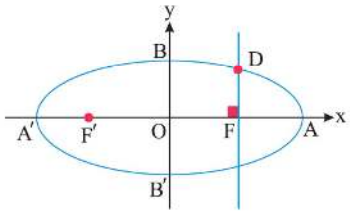


۱) $\frac{۱}{۲}$
۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$
۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$
۴) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

۱۱ یک بیضی با طول اقطار ۱۰ و ۸ مفروض است. از کانون F خطی عمود بر محور کانونی رسم می‌کنیم تا دایره‌ای به قطر AA' (A و A' دو سر قطر بزرگ هستند) را در M قطع کند. طول پاره‌خط MA' کدام است؟

۱) $۴\sqrt{۵}$
۲) ۸
۳) ۲۰
۴) $۵\sqrt{۳}$

۱۲ مرکز بیضی شکل زیر بر مبدأ مختصات و قطرهای آن مانند شکل بر محورهای x و y منطبق هستند و فاصلهٔ F از هر دو نقطهٔ O و A برابر ۴ است. خطی گذرا از F بر AA' عمود کرده‌ایم. این خط بیضی را در نقطهٔ D قطع کرده است. مجموع مختصات D کدام است؟



۱) ۱۰

۲) ۹

۳) ۸

۴) $\frac{۱۷}{۲}$

۱۳ در بیضی به مرکز O و کانون‌های F و F'، نقاط A و A' رئوس کانونی و B و B' رئوس غیرکانونی هستند. اگر مساحت مثلث OAB سه برابر مساحت مثلث FBF' باشد، خروج از مرکز بیضی کدام است؟

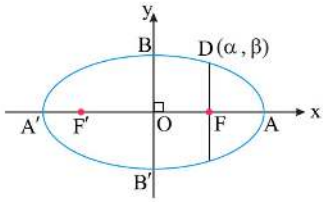
۱) $\frac{۱}{۲}$

۲) $\frac{۱}{۳}$

۳) $\frac{۱}{۶}$

۴) $\frac{۱}{۸}$

۱۴ مرکز بیضی زیر بر مبدأ مختصات و قطرهای آن مانند شکل بر محورهای x و y منطبق هستند و فاصله F از هر دو نقطه O و A برابر ۴ است. خطی گذرا از F بر AA' عمود کرده‌ایم. این خط بیضی را در نقطه D قطع کرده است. مختصات D کدام است؟



۱) $(۴ , ۶)$

۲) $(۴ , ۵)$

۳) $(۴ , ۴)$

۴) $(۴ , \frac{۹}{۲})$

۱۵ در یک بیضی طول قطرها برابر ۱۰ و ۸ است. تفاضل فواصل نقطهٔ مفروض M از دو کانون بیضی برابر ۶ است. نقطهٔ M کدام است؟

۱) رأس کانونی

۲) رأس ناکانونی

۳) هر نقطهٔ دلخواه روی بیضی

۴) چنین نقطه‌ای روی بیضی وجود ندارد.

۱۶ اگر $F(۶ , ۱)$ کانون بیضی، $B(۳ , ۳)$ رأس ناکانونی آن باشد، آن‌گاه مجموع فواصل هر نقطه روی بیضی از دو کانون کدام است؟ (محورهای بیضی موازی محور مختصات هستند)

۱) ۴

۲) $۲\sqrt{۵}$

۳) $۲\sqrt{۱۳}$

۴) $۲\sqrt{۱۵}$

۱۷ نقطهٔ $(۲,۱)$ مرکز یک بیضی قائم است و نقاط $(۲,۱۴)$ و $(۷,۱)$ روی این بیضی قرار دارند. کدام نقطه یکی از کانون‌های این بیضی است؟

۱) $(۲,۱۲)$ ۲) $(۲,۷)$

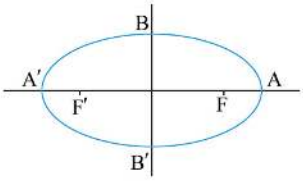
۳) $(۲,-۶)$ ۴) $(۲,-۱۱)$

۱۸ در بیضی به طول قطر بزرگ ۳۴ و فاصله کانونی ۳۰، از رأس کانونی A مماسی بر دایره به قطر FF' رسم کرده‌ایم. طول این مماس کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۱۵

۳) ۱۷ ۴) ۱۰

۱۹ در یک بیضی طول قطر بزرگ دو برابر طول قطر کوچک است. اندازه زاویه $F\hat{B}F'$ چند درجه است؟



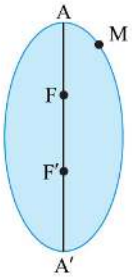
۱) ۶۰°

۲) ۳۰°

۳) ۱۲۰°

۴) ۴۵°

۲۰ در بیضی شکل زیر F و F' کانون‌های بیضی‌اند. اگر از نقطهٔ دلخواه M (روی بیضی) به کانون F وصل کنیم و آن را امتداد دهیم، در این صورت بیضی را در نقطهٔ N قطع می‌کند. محیط مثلث MNF' چقدر است؟ (قطر بزرگ را ۱۰ در نظر بگیرید)



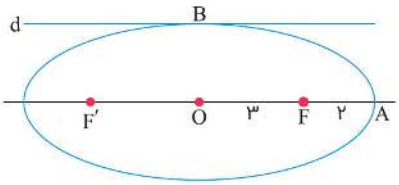
۱) ۱۰

۲) ۲۰

۳) ۸

۴) ۱۶

۲۱ در بیضی شکل زیر خط d در نقطهٔ B بر این بیضی مماس است. حاصل‌ضرب فاصله‌های دو نقطهٔ F و F' (کانون‌ها) از خط d کدام است؟



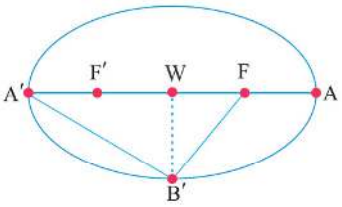
۱) ۹

۲) ۱۶

۳) ۲۵

۴) ۱۲

۲۲ اگر در بیضی شکل زیر مساحت مثلث $A'FB'$ برابر $\frac{۹}{۴}$ قطر کوچک بیضی باشد، خروج از مرکز بیضی چقدر است؟ (F و F' کانون، A' رئوس کانونی و W مرکز بیضی است و طول قطر کوچک بیضی ۲ است.)



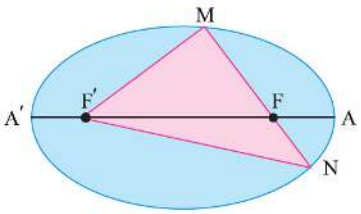
۱) $\frac{۳۹}{۴۱}$

۲) $\frac{۴۰}{۴۱}$

۳) $\frac{۳۹}{۴۰}$

۴) $\frac{۳۷}{۴۰}$

۲۳ در بیضی زیر طول قطر کوچک ۱۶ و فاصلهٔ کانونی ۳۰ است. محیط مثلث MNF' کدام است؟



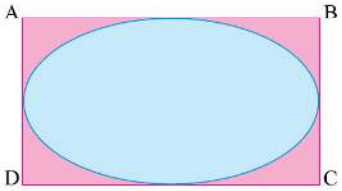
۱) ۳۰

۲) ۳۴

۳) ۴۲

۴) ۶۸

۲۴ در شکل زیر، یک بیضی به خروج از مرکز $\frac{\sqrt{۸}}{۳}$ درون یک مستطیل محاط شده است. طول قطر این مستطیل، چندبرابر عرض مستطیل است؟



۱) $\sqrt{۳}$

۲) $\sqrt{۱۰}$

۳) $\sqrt{۷}$

۴) $\sqrt{۲}$

۲۵ در یک بیضی زاویهٔ $F\hat{B}F' = ۱۲۰^\circ$. مقدار خروج از مرکز این بیضی کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$

۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۴}$

۴) $\frac{۱}{\sqrt{۲}}$

۲۶ بیضی با کانون‌های $F(۱, ۲)$ و $F'(-۱, p)$ که یکی از رأس‌های کانونی آن $A(۲, ۳)$ مفروض است. خروج از مرکز بیضی کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$

۲) $\frac{۱}{۳}$

۳) $\frac{۱}{۴}$

۴) $\frac{۱}{۶}$

پاسخ Homework

۱ گزینه ۲

طبق فرض، کانون‌های این بیضی، نقاط $F(۳,۰)$ و $F'(-۳,۰)$ می‌باشند. بنابراین:

$$FF' = ۳-(-۳) = ۶ \Rightarrow ۲c = ۶ \Rightarrow c = ۳ \quad (۱)$$

$$e = \frac{۱}{۳} \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{۱}{۳} \xrightarrow{(۱)} \frac{۳}{a} = \frac{۱}{۳} \Rightarrow a = ۹ \quad (۲)$$

$$a^۲ = b^۲ + c^۲ \xrightarrow{(۱),(۲)} ۸۱ = b^۲ + ۹ \Rightarrow b^۲ = ۷۲ \Rightarrow b = ۶\sqrt{۲}$$

$$\text{طول قطر کوچک} = ۲b = ۲(۶\sqrt{۲}) = ۱۲\sqrt{۲}$$

۲ گزینه ۲

$$\begin{cases} c = ۱۲ \\ ۲b = ۱۸ \Rightarrow b = ۹ \end{cases} \Rightarrow a^۲ = b^۲ + c^۲ = ۸۱ + ۱۴۴ = ۲۲۵$$

$$\Rightarrow a = ۱۵ \Rightarrow e = \frac{c}{a} = \frac{۱۲}{۱۵} = \frac{۴}{۵} = ۰/۸$$

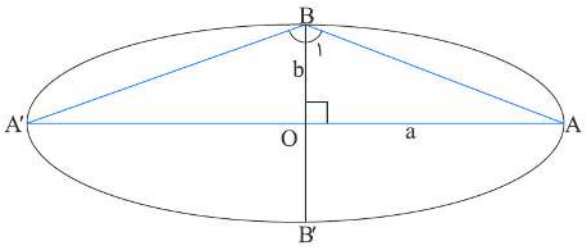
۳ گزینه ۳

$$e = \sqrt{\frac{۲}{۳}} \Rightarrow \frac{c}{a} = \sqrt{\frac{۲}{۳}} \Rightarrow \frac{c^۲}{a^۲} = \frac{۲}{۳} \Rightarrow \frac{a^۲ - b^۲}{a^۲} = \frac{۲}{۳}$$

$$\Rightarrow ۱ - (\frac{b}{a})^۲ = \frac{۲}{۳} \Rightarrow (\frac{b}{a})^۲ = \frac{۱}{۳}$$

$$\Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{۱}{\sqrt{۳}} \Rightarrow \frac{a}{b} = \sqrt{۳} \quad (*)$$

حال باتوجه‌به شکل زیر، داریم:



$$\overset{\Delta}{OAB} : \tan \hat{B}_۱ = \frac{a}{b} \xrightarrow{(*)} \tan \hat{B}_۱ = \sqrt{۳}$$

$$\Rightarrow \hat{B}_۱ = ۶۰^\circ \Rightarrow \hat{B} = ۲\hat{B}_۱ = ۱۲۰^\circ$$

۴ گزینه ۲

طبق فرض، داریم:

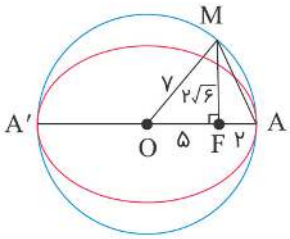
$$\left.\begin{array}{l} AA' = ۲a = ۱۴ \Rightarrow a = ۷ \\ BB' = ۲b = ۴\sqrt{۶} \Rightarrow b = ۲\sqrt{۶} \end{array}\right\} \xrightarrow{a^۲ = b^۲ + c^۲} ۴۹ = ۲۴ + c^۲$$

$$\Rightarrow c^۲ = ۲۵ \Rightarrow c = ۵ \Rightarrow OF = ۵ \xrightarrow{OA = a = ۷} AF = ۷ - ۵ = ۲$$

OM شعاع دایره است $\Rightarrow OM = OA = a = ۷$

$\overset{\Delta}{OFM}$: فیثاغورس $\Rightarrow FM^۲ = OM^۲ - OF^۲ = ۴۹ - ۲۵ = ۲۴ \Rightarrow FM = ۲\sqrt{۶}$

$\overset{\Delta}{AFM}$: فیثاغورس $\Rightarrow AM = \sqrt{FM^۲ + FA^۲} = \sqrt{۲۴ + ۴} = \sqrt{۲۸} = ۲\sqrt{۷}$



۵ گزینه ۴

فاصلهٔ کانون‌های $F'(۲, -۱)$ و $F(۲, ۷)$ برابر $۲c$ است.

$$۲c = |FF'| = |۷ - (-۱)| = ۸ \Rightarrow c = ۴$$

قطر کوچک برابر ۶ است، پس:

$$۲b = ۶ \Rightarrow b = ۳$$

در بیضی رابطهٔ $a^۲ = b^۲ + c^۲$ برقرار است.

$$a^۲ = ۹ + ۱۶ = ۲۵ \Rightarrow a = ۵$$

$$\text{خروج از مرکز} = \frac{c}{a} = \frac{۴}{۵} = ۰/۸$$

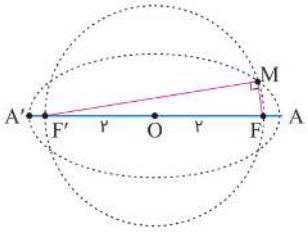
۶ گزینه ۲

باتوجه‌به معلومات سؤال، داریم:

$$\left.\begin{array}{l}\text{طول قطر بزرگ} = ۲a = ۲\sqrt{۵} \Rightarrow a = \sqrt{۵} \\ \text{طول قطر کوچک} = ۲b = ۲ \Rightarrow b = ۱\end{array}\right\} \xrightarrow{a^۲=b^۲+c^۲} c = ۲$$

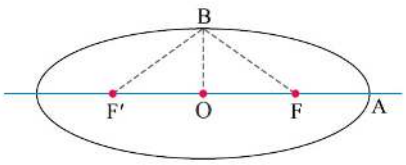
پس $OF = OF' = ۲$ و چون طول شعاع دایره هم ۲ واحد است، نقاط F و F' روی دایره‌اند. پس FF' قطر دایره است و چون زاویهٔ FMF' محاطی و روبه‌رو به قطر می‌باشد، قائمه است و داریم:

$$\overset{\Delta}{MFF'} : \text{فیثاغورس} \Rightarrow MF^۲ + MF'^۲ = FF'^۲ = ۴^۲ = ۱۶$$



۷ گزینه ۱

بیشترین مساحت را مثلث BFF' دارد:



و مقدار مساحت برابر است با:

$$S = \frac{۱}{۲} \times ۲c \times b = b \times c \quad (۱)$$

اکنون به‌دست می‌آید:

$$\left.\begin{array}{l}e = \frac{c}{a} = \frac{۲}{۳} \Rightarrow ۲a = ۳c \\ AF = a - c = ۳ \Rightarrow ۲a - ۲c = ۶\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases}a = ۹ \\ c = ۶\end{cases}$$

$$\xrightarrow{a^۲=b^۲+c^۲} b = \sqrt{۸۱ - ۳۶} = \sqrt{۴۵} = ۳\sqrt{۵}$$

بنابراین طبق رابطه (۱)، $S = ۱۸\sqrt{۵}$

۸ گزینه ۱

$$a+c=۳ \xrightarrow{\frac{c}{a}=\frac{۱}{۲}} ۲c+c=۳ \Rightarrow c=۱,\ a=۲$$

$$a^۲=b^۲+c^۲ \Rightarrow ۴=b^۲+۱ \Rightarrow b=\sqrt{۳} \Rightarrow ۲b=۲\sqrt{۳}$$

۹ گزینه ۳

مفهوم این سؤال این است که چهارضلعی ABCD مربع است.

$$FF'=۲b \Rightarrow ۲c=۲b \Rightarrow b=c$$

$$a^۲=b^۲+c^۲ \Rightarrow a^۲=c^۲+c^۲$$

$$\Rightarrow a^۲=۲c^۲ \Rightarrow a=c\sqrt{۲} \Rightarrow \frac{c}{a}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}$$

۱۰ گزینه ۱

چون مثلث OBF قائم‌الزاویه است، پس $\alpha+\beta=۹۰^\circ$. اکنون به‌دست می‌آید:

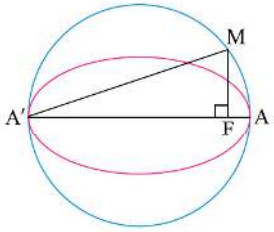
$$\begin{cases} ۲\alpha+۳\beta=۲۴۰^\circ \\ \alpha+\beta=۹۰^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha=۳۰^\circ \\ \beta=۶۰^\circ \end{cases}$$

می‌توان نوشت:

$$\sin\alpha=\frac{OF}{BF}=\frac{c}{a}=e \Rightarrow e=\frac{۱}{۲}$$

۱۱ گزینه ۱

از نمادگذاری شکل زیر استفاده می‌کنیم. می‌دانیم $MF = b$ و $A'F = a + c$. در مثلث قائم‌الزاویهٔ $A'FM$، بنا بر قضیهٔ فیثاغورس:



$$MA' = \sqrt{MF^2 + FA'^2} = \sqrt{4^2 + (a+c)^2} \quad (1)$$

بنا بر فرض مسئله $2a = 10$ و $2b = 8$، یعنی $a = 5$ و $b = 4$، درنتیجه:

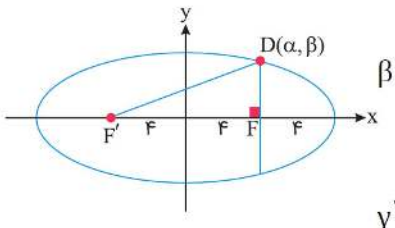
$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{25 - 16} = 3$$

اکنون از رابطهٔ (۱) به دست می‌آید:

$$MA' = \sqrt{16 + 64} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$$

۱۲ گزینه ۱

اگر $DF = \beta$ و $DF' = \gamma$، طبق تعریف بیضی:



$$\beta + \gamma = 2a = 16 \quad (1)$$

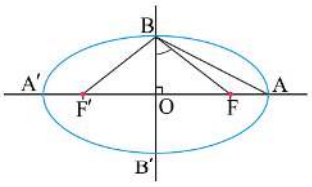
در مثلث $FF'D$ بنابر قضیهٔ فیثاغورس:

$$\gamma^2 - \beta^2 = 64 \Rightarrow (\gamma+\beta)(\gamma-\beta) = 64 \xrightarrow{\gamma+\beta=16} \gamma - \beta = 4 \quad (2)$$

از برابری (۱) و (۲) به دست می‌آید $\beta = 6$، درنتیجه $D = (4, 6)$ و مجموع مختصات آن برابر ۱۰ است.

۱۳ گزینه ۳

از نمادگذاری شکل زیر استفاده می‌کنیم. بنا بر فرض مسئله: $\frac{S_{OAB}}{S_{FBF'}} = ۳$



دو مثلث OAB و FBF' در ارتفاع OB مشترک هستند، پس نسبت مساحت آن‌ها برابر نسبت قاعده‌های نظیر این ارتفاع است:

$$\frac{S_{OAB}}{S_{FBF'}} = \frac{a}{۲c} = ۳ \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{۱}{۶}$$

یعنی $e = \frac{۱}{۶}$.

۱۴ گزینه ۱

بنابر فرض $OF = AF = ۴$ یعنی $c = a - c = ۴$، پس: $a = ۸ \ , \ c = ۴$

به دست می‌آید: $b^۲ = a^۲ - c^۲ = ۴۸$

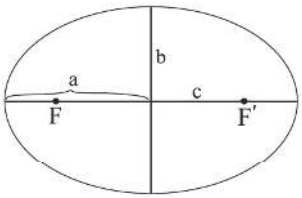
می‌دانیم DF نصف طول وتر کانونی بیضی است، پس:

$$DF = \frac{b^۲}{a} = \frac{۴۸}{۸} = ۶$$

اکنون به دست می‌آید: $D = (۴ \ , \ ۶)$

۱۵ گزینه ۱

چون طول قطرها برابر ۱۰ و ۸ است، پس $a = ۵$ و $b = ۴$، به دست می‌آید: $c = \sqrt{a^۲ - b^۲} = ۳$



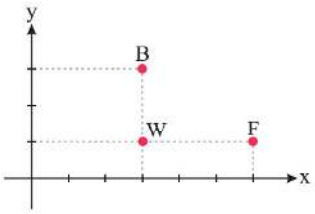
بنابر فرض $MF - MF' = ۶$ همچنین می‌دانیم $MF + MF' = ۱۰$. می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} MF + MF' = ۱۰ \\ MF - MF' = ۶ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} MF = ۸ \\ MF' = ۲ \end{cases}$$

مشاهده می‌شود $MF = a + c$ و $MF' = a - c$، بنابراین M یک رأس کانونی است.

۱۶ گزینه ۳

نقطه‌ها را در دستگاه مختصات رسم می‌کنیم. باتوجه‌به شکل:



$$\begin{cases} c = WF = ۳ \\ b = WB = ۲ \end{cases}$$

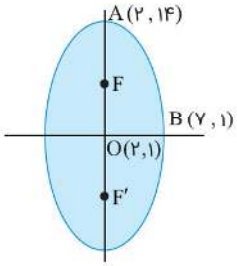
می‌توان نوشت:

$$a = \sqrt{b^۲ + c^۲} = \sqrt{۱۳}$$

بنابراین مجموع فواصل هر نقطه روی بیضی از دو کانون برابر $۲a = ۲\sqrt{۱۳}$ است.

۱۷ گزینه ۴

باتوجه‌به فرض نتیجه می‌گیریم نقطهٔ $A(۲, ۱۴)$ یک سر قطر بزرگ و نقطهٔ $B(۷, ۱)$ یک سر قطر کوچک بیضی است، بنابراین:



$$a = OA = ۱۳, b = OB = ۵$$

درنتیجه:

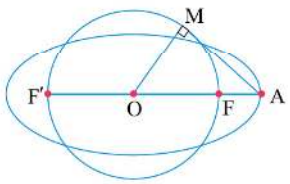
$$c = \sqrt{a^۲ - b^۲} = \sqrt{۱۳^۲ - ۵^۲} = ۱۲$$

بنابراین کانون‌های بیضی به صورت زیر هستند:

$$F = \begin{vmatrix} ۲ \\ ۱ + ۱۲ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ۲ \\ ۱۳ \end{vmatrix}, F' = \begin{vmatrix} ۲ \\ ۱ - ۱۲ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ۲ \\ -۱۱ \end{vmatrix}$$

۱۸ گزینه ۱

از نمادگذاری شکل زیر استفاده می‌کنیم. مثلث OAM قائم‌الزاویه است:



$$AM = \sqrt{OA^۲ - OM^۲} = \sqrt{a^۲ - c^۲} = b$$

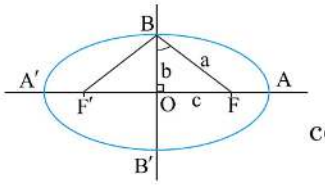
باتوجه‌به اطلاعات مسأله، $a = ۱۷$ و $c = ۱۵$ بنابراین:

$$b = \sqrt{a^۲ - c^۲} = \sqrt{۱۷^۲ - ۱۵^۲} = ۸$$

یعنی طول مماس AM برابر ۸ است.

۱۹ گزینه ۳

از نمادگذاری شکل زیر استفاده می‌کنیم. بنابر فرض مسأله $a = ۲b$:



در مثلث قائم‌الزاویه OBF، بنابر نسبت‌های مثلثاتی:

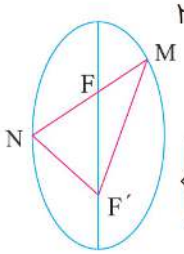
$$\cos(O\hat{B}F) = \frac{b}{a} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow O\hat{B}F = ۶۰^\circ$$

درنتیجه:

$$F\hat{B}F' = ۲(F\hat{B}O) = ۲ \times ۶۰^\circ = ۱۲۰^\circ$$

۲۰ گزینه ۲

$$۲a = ۱۰ \Rightarrow a = ۵$$



باتوجه‌به تعریف بیضی:

$$\begin{cases} MF + MF' = ۲a \\ NF + NF' = ۲a \end{cases}$$

محیط مثلث MNF' را P فرض می‌کنیم:

$$P = MF + MF' + NF + NF' = ۲a + ۲a = ۴a = ۲۰$$

۲۱ گزینه ۲

باتوجه‌به اطلاعات روی شکل:

$$\left.\begin{matrix} a = OA = ۵ \\ c = OF = ۳ \end{matrix}\right\} \Rightarrow b = \sqrt{a^۲ - c^۲} = \sqrt{۵^۲ - ۳^۲} = ۴$$

به سادگی معلوم است که حاصل‌ضرب فواصل F و F' تا خط d برابر $b^۲$ است؛ یعنی:

$$FH \times F'H' = b^۲ = ۱۶$$

۲۲ گزینه ۲

$$S_{A'FB'} = \frac{۹}{۲}|WB'| \Rightarrow \frac{۱}{۲}|FA'| \times |WB'| = \frac{۹}{۲}|WB'| \Rightarrow |FA'| = ۹ \Rightarrow a + c = ۹$$

$$a^۲ = b^۲ + c^۲ \Rightarrow a^۲ - c^۲ = ۱ \Rightarrow (a-c)(a+c) = ۱ \xrightarrow{a+c=۹} a - c = \frac{۱}{۹}$$

$$\begin{cases} a + c = ۹ \\ a - c = \frac{۱}{۹} \end{cases} \xrightarrow{+} ۲a = \frac{۸۲}{۹} \Rightarrow a = \frac{۴۱}{۹},\ c = ۹ - \frac{۴۱}{۹} = \frac{۴۰}{۹}$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{۴۰}{۴۱}$$

۲۳ گزینه ۴

چون $۲b = ۱۶$ و $۲c = ۳۰$، پس $b = ۸$ و $c = ۱۵$ و درنتیجه:

$$a = \sqrt{b^۲ + c^۲} = \sqrt{۸^۲ + ۱۵^۲} = ۱۷$$

چون M و N روی بیضی است، پس:

$$MF + MF' = ۲a = ۳۴$$
$$NF + NF' = ۲a = ۳۴$$

درنتیجه:

$$\text{محیط مثلث } MNF' = MF + MF' + NF + NF' = ۳۴ + ۳۴ = ۶۸$$

۲۴ گزینه ۲

طول مستطیل برابر $۲a$ و عرض آن برابر $۲b$ خواهد بود.

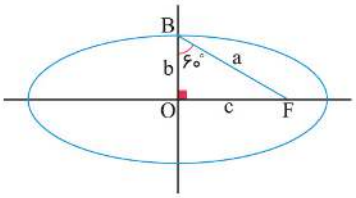
$$\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{۸}}{۳} \Rightarrow \frac{c^۲}{a^۲} = \frac{۸}{۹} \Rightarrow \frac{a^۲ - b^۲}{a^۲} = \frac{۸}{۹}$$
$$\Rightarrow ۱ - \frac{b^۲}{a^۲} = \frac{۸}{۹} \Rightarrow \frac{b^۲}{a^۲} = \frac{۱}{۹} \Rightarrow a = ۳b$$

اگر دو قطر مستطیل را d فرض کنیم، داریم:

$$d = \sqrt{(۲a)^۲ + (۲b)^۲} = ۲\sqrt{۹b^۲ + b^۲} = ۲b\sqrt{۱۰} \Rightarrow \frac{d}{۲b} = \sqrt{۱۰}$$

۲۵ گزینه ۲

از نمادگذاری شکل زیر استفاده می‌کنیم. در مثلث OBF می‌توان نوشت:



$$\sin ۶۰^\circ = \frac{c}{a} \Rightarrow e = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

۲۶ گزینه ۱

A، F و F' در یک راستا قرار دارند.

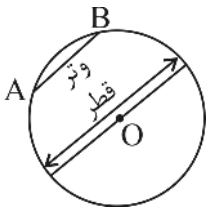
$$m_{FA} = m_{FF'} \Rightarrow \frac{۳-۲}{۲-۱} = \frac{p-۲}{-۱-۱} \Rightarrow p = ۰ \Rightarrow F'(-۱, ۰)$$

$$۲c = |FF'| = \sqrt{(-۱-۱)^۲ + (۰-۲)^۲} = \sqrt{۸} = ۲\sqrt{۲} \Rightarrow c = \sqrt{۲}$$

$$a - c = |AF| = \sqrt{۱+۱} = \sqrt{۲} \Rightarrow a - \sqrt{۲} = \sqrt{۲} \Rightarrow a = ۲\sqrt{۲}$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{۲}}{۲\sqrt{۲}} = \frac{۱}{۲}$$

دایره، مفاهیم ابتدایی



☑ دایره، مکان هندسی نقاطی از صفحه است که همگی از نقطه‌ی ثابتِ O ، به فاصله‌ی معلومِ r، قرار گرفته‌اند. به O مرکز دایره و به r شعاع آن می‌گوییم.

☑ خطی که دو نقطه‌ی روی دایره را به هم وصل می‌کند، وتر نام دارد و وتری که از O بگذرد، قطر دایره است.

یه جور دیگه: همه‌ی قطرها در یک نقطه مشترک‌اند: همان مرکزِ دایره!

شگرد دسته خطوط قطر برای دایره

اگه دسته خطوط بهت داد: که در اصل یه معادله‌ی خط هستش که پارامتر هم داره و گفت این معادله‌ی همه‌ی قطرهای دایره است، تو این کار رو بکن: دو تا m دلخواه بهش بده تا دو تا معادله‌ی خطِ بدون پارامتر دربیاد، با حل اون دو تا توی یک دستگاه، مرکز درمیاد. اصلاً بهتره اون دو تا m رو طوری بدی که یه بار ضریب x و یه بار هم ضریب y رو صفر کنه، این‌جوری یه راست مرکز درمیاد...

تمرین: دسته‌ی خطوط به معادلات $(m+2)y+(m+1)x+1=0$ قطرهای یک دایره‌اند. اگر این دایره از نقطـه‌ی $M=(5,2)$ بگـذرد، شعاع آن چه‌قدر است؟ *(سراسری ریاضی)*

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) $2\sqrt{3}$ ۴) $3\sqrt{2}$

پاسخ: گزینه‌ی «۲»

$$(m+2)y+(m+1)x+1=0\begin{cases}\xrightarrow{m=-2} -x+1=0 \Rightarrow x=1\\ \xrightarrow{m=-1} y+1=0 \Rightarrow y=-1\end{cases} \xrightarrow{\text{مرکز}} O(1,-1) \xrightarrow{M=(5,2)} r=OM$$

$$=\sqrt{(5-1)^2+(2+1)^2}=\sqrt{16+9}=5$$

نوشتن معادله‌ی دایره در حالتِ استاندارد

☑ فرم کلی معادله‌ی دایره: $(x-O)^2+(y-O)^2=O^2$

☑ برای نوشتن معادله‌ی دایره، پس از نوشتن معادله‌ی خامِ بالا (!)، پرانتزها رو با مختصات مرکز پُر کن و سمت راست رو با شعاعِ دایره. ببین:

$$(x-O)^2+(y-O)^2=O^2 \xrightarrow[\text{شعاع}=r]{\text{مرکز}=O(\alpha,\beta)} (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$$

تمرین: معادله‌ی دایره‌ای که مرکزش $O=(-1,1)$ بوده و از نقطه‌ی $A=(2,0)$ می‌گذرد، برابر است با:

۱) $x^2+y^2-4x=4$ ۲) $x^2+y^2+2y=8$

۳) $x^2+y^2+2x-2y=8$ ۴) $x^2+y^2-2x+2y=0$

پاسخ: گزینه‌ی «۳»

$$O=(-1,1) \xrightarrow{A=(2,0)} OA=r=\sqrt{(-1-2)^2+(1-0)^2}=\sqrt{9+1}=\sqrt{10}$$

$$\xrightarrow{\text{معادله‌ی دایره}} (x-(-1))^2+(y-1)^2=(\sqrt{10})^2 \xrightarrow{\text{باز کردن اتحادها}} x^2+2x+1+y^2-2y+1=10$$

$$\xrightarrow{\text{ساده}} x^2+y^2+2x-2y=8$$

دریافت اطلاعات از معادله‌ی استانداردِ دایره

۱) توجه کن معادله‌ی داده‌شده، استاندارد باشد. یعنی ضریب x و yِ درون پرانتز و هم‌چنین ضریبِ خودِ پرانتزها، یک باشه. اگر در معادله‌ی استاندارد، اتحادها باز نشده باشد ولی x و y یا پرانتزها، ضریبی غیر از ۱ داشته باشند؛ مثل $4(x-2)^2+(2y-3)^2=8$ باید اول ضریب x و y رو فاکتور بگیری تا بیان بیرون پرانتز! بعدش دو طرف رو تقسیم کنی تا استاندارد بشه...

خب حالا می‌تونی بگی:

۲) مرکز دایره: هر کدوم از پرانتزها رو صفر کن و ریشه‌ی حاصل رو اعلام کن...

۳) شعاع دایره: از عددِ سمت راست، جذر بگیر!

تمرین: مساحت دایره‌ی $(2x+1)^2+(1-2y)^2=2$ چه‌قدر است؟

۱) 4π ۲) $\frac{\pi}{2}$ ۳) 2π ۴) π

پاسخ: گزینه‌ی «۲»

$$(2x+1)^2+(1-2y)^2=2 \xrightarrow{\text{فاکتور از توی پرانتزها بگیر}} (2(x+\frac{1}{2}))^2+(-2(y-\frac{1}{2}))^2=2$$

$$\xrightarrow{\text{توان رو بده به هر کدام!}} 4(x+\frac{1}{2})^2+4(y-\frac{1}{2})^2=2 \xrightarrow{\div 4} (x+\frac{1}{2})^2+(y-\frac{1}{2})^2=\frac{1}{2} \xrightarrow{\text{مرکز}} O=(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$$

$$\xrightarrow{\text{شعاع}} r=\sqrt{\frac{1}{2}} \xrightarrow{\text{مساحت}} \pi r^2=\pi\times\frac{1}{2}=\frac{\pi}{2}$$

معادله‌ی گسترده‌ی دایره

شگرد دایره‌ی گسترده:

☑ گاهی در معادله‌ی گسترده، پرانتز اتحادها رو به توان دو رسانده و تمام جملات را به یک طرف منتقل کرده و ساده می‌کنند! به این فرمِ دایره، معادله‌ی گسترده می‌گوییم.

اگر معادله‌ی گسترده، به صورتِ $x^2+y^2+ax+by+c=0$ داده شده بود، ضریبِ x و y را به -2 تقسیم کنید. این‌جوری مرکز به‌دست میاد: $O(\frac{a}{-2},\frac{b}{-2})$. برای به دست آوردن شعاع، این کار رو انجام بده: مرکز رو که درآوردی، اسمش رو به ترتیب بذار (α,β)، بعدش هم اینا رو بذار تو فرمول $r=\sqrt{\alpha^2+\beta^2-c}$ و تمام! راستی c، عدد ثابتِ آخرِ معادله‌ی دایره است که بعدش دیگه معادله‌ی دایره، مساویِ صفر می‌شه!

حواستون باشه ضریبِ x^2 و y^2 حتماً ۱ باشه تا از این فرمول‌ها استفاده کنی! اگه نبود با تقسیم دو طرف، درستش کن! تازه عدد c هم باید سمت چپ تساوی باشه! یعنی معادله‌ی دایره‌ی گسترده، سمتِ راستش صفر باشه؛ اگه نبود همه رو بیار یه طرف! ببین:

$$۲x^۲+۲y^۲-۴x+۶y-۶=۰ \xrightarrow{\div ۲} x^۲+y^۲-۲x+۳y-۳=۰ \xrightarrow{\text{مرکز}} O(\frac{-۲}{-۲},\frac{۳}{-۲})=(۱,-\frac{۳}{۲})$$

$$\xrightarrow{\text{شعاع}} r=\sqrt{۱^۲+(-\frac{۳}{۲})^۲-(-۳)}=\frac{۵}{۲}$$

تمرین: اگر $O(۱,۲)$ مرکز دایره‌ی $x^۲+y^۲-ax+۲by=۰$ باشد، $a+b$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) -۲ ۳) ۴ ۴) صفر

پاسخ: گزینه‌ی «۴»

$$x^۲+y^۲-ax+۲by=۰ \xrightarrow{\text{مرکز}} O=(\frac{-a}{-۲},\frac{۲b}{-۲})=(\frac{a}{۲},-b)=\underbrace{\boxed{(۱,۲)}}_{\text{فرض}} \Rightarrow \frac{a}{۲}=۱ \ , \ -b=۲$$

$$\Rightarrow a=۲, b=-۲ \Rightarrow a+b=۰$$

شرط دایره بودنِ یه رابطه

☑ اگر معادله‌ی $Ax^۲+By^۲+Cx+Dy+E=۰$ دایره باشد، آن‌گاه $A=B$ خواهد بود. البته عکسِ این جمله درست نیست. چرا که شعاعِ دایره هم باید عددی مثبت باشد.

یه جور دیگه: شرط لازم و کافی برای دایره بودن معادله‌ی $x^۲+y^۲+ax+by+c=۰$، که ضریبِ $x^۲$ و $y^۲$ اون رو ۱ کردی(!) اینه که $a^۲+b^۲>۴c$.

تمرین: شعاع دایره‌ی $ax^۲+y^۲-۲x-۶y=k$ برابر ۳ است. $a+k$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) -۱ ۴) ۲

پاسخ: گزینه‌ی «۱»

$$ax^۲+y^۲-۲x-۶y=k \xrightarrow{\text{ضریب } y^۲=\text{ضریب } x^۲} a=۱ \xrightarrow{\text{همه یک طرف}} x^۲+y^۲-۲x-۶y-k=۰$$

$$\xrightarrow{\text{مرکز}} O=(\frac{-۲}{-۲},\frac{-۶}{-۲})=\underbrace{(۱,۳)}_{\text{شعاع}} \xrightarrow{\text{شعاع}} r=\sqrt{۱^۲+۳^۲-(-k)}=\underbrace{\boxed{۳}}_{\text{فرض}} \longrightarrow k=-۱ \Rightarrow a+k=(۱)+(-۱)=۰$$

تمرین: به ازای چند مقدار a، نمودار $۲x^۲+(a^۲-۷)y^۲+۴y+a=۰$ دایره می‌باشد؟ *(تجربی خارج)*

۱) دو مقدار ۲) حداقل دو مقدار ۳) یک مقدار ۴) هیچ مقدار

پاسخ: گزینه‌ی «۳»

$$۲x^۲+(a^۲-۷)y^۲+۴y+a=۰ \xrightarrow{\text{ضریب } y^۲=\text{ضریب } x^۲} ۲=a^۲-۷ \xrightarrow{\text{حل}} a^۲=۹ \Rightarrow a=\pm ۳$$

جایگذاری کن
$$\begin{cases} \xrightarrow{a=۳} ۲x^۲+۲y^۲+۴y+۳=۰ \\ \xrightarrow{a=-۳} ۲x^۲+۲y^۲+۴y-۳=۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \xrightarrow{\div ۲} x^۲+y^۲+۲y+\frac{۳}{۲}=۰ \xrightarrow{\text{بررسی } a^۲+b^۲>۴c} ۰^۲+۲^۲>?\ ۴(\frac{۳}{۲}) \boxtimes \\ \xrightarrow{\div ۲} x^۲+y^۲+۲y-\frac{۳}{۲}=۰ \xrightarrow{\text{بررسی } a^۲+b^۲>۴c} ۰^۲+۲^۲>?\ ۴(-\frac{۳}{۲}) \boxdot \end{cases}$$

نوشتن معادله‌ی دایره با اطلاعاتی به جز مرکز و شعاع، یه شش‌تاییِ کنکوری

۱) مرکز دایره و نقطه‌ای از دایره داده شده‌اند: خُب، فاصله‌ی مرکز تا هر نقطه‌ی روی دایره، مساوی شعاع است...

تمرین: نقطه‌ی $O=(a,2a)$ مرکز دایره‌ای است که از نقاط $A=(2,1)$ و $B=(-1,4)$ می‌گذرد. شعاع دایره کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) $2\sqrt{2}$ ۴) $3\sqrt{2}$

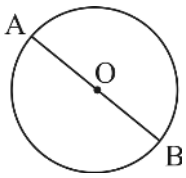
پاسخ: گزینه‌ی «۱»

$$OA=OB=r \xrightarrow[O=(a,2a)]{A(2,1),B(-1,4)} \sqrt{(a-2)^2+(2a-1)^2}=\sqrt{(a+1)^2+(2a-4)^2}$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲ و اتحاد}} a^2-4a+4+4a^2-4a+1=a^2+2a+1+4a^2-16a+16 \xrightarrow{\text{ساده}} 6a=12 \Rightarrow a=2$$

$$\xrightarrow{OA=r} r=\sqrt{(2-2)^2+(4-1)^2}=3$$

۲) مختصات دو سرِ یک قطر از دایره داده شده‌اند: وسط این دو نقطه، می‌شه مرکز دایره. فاصله‌ی این دو نقطه رو هم حساب کن و بعد نصف کن تا بشه شعاع!



$$r=\frac{|AB|}{2},\ O=\frac{A+B}{2}$$

تمرین: دایره‌ای که مختصات دو سر قطر آن $A=(4,1)$ و $B=(-2,3)$ باشند، از کدام نقطه‌ی زیر نمی‌گذرند؟

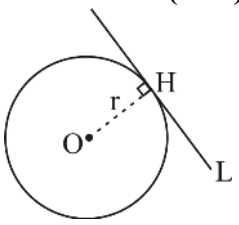
۱) $(2,5)$ ۲) $(4,1)$ ۳) $(0,1)$ ۴) $(0,-1)$

پاسخ: گزینه‌ی «۳»

$$A=(4,1),\ B=(-2,3)\begin{cases}\xrightarrow{\frac{|AB|}{2}} r=\frac{1}{2}\sqrt{(-2-4)^2+(3-1)^2}=\sqrt{10}\\ \xrightarrow{\frac{A+B}{2}} O=\frac{(2,4)}{2}=(1,2)\end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{معادله‌ی دایره}} (x-1)^2+(y-2)^2=10 \xrightarrow[\text{گزینه‌ی ۳}]{\text{امتحان گزینه‌ها}} (0-1)^2+(1-2)^2=10 \ \boxtimes$$

۳) مرکز دایره داده‌شده و معادله‌ی خطی که دایره بر آن مماس است، هم معلومه: فاصله‌ی مرکز رو از اون خطِ مماس حساب کن، می‌شه شعاع دایره...



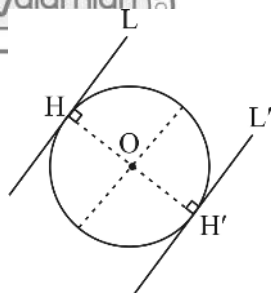
تمرین: دایره‌ای به مرکز $(-1,2)$ و مماس بر خط به معادله‌ی $x-y=1$، محور xها را در نقطه‌ای با کدام طول قطع می‌کند؟ (تجربی ۹۵)

۱) ۳ و ۱ ۲) ۴ و ۱ ۳) ۳ و ۲ ۴) ۴ و ۱/۵

پاسخ: گزینه‌ی «۱»

$$x-y=1 \xrightarrow{\text{همه رو ببار سمت چپ}} x-y-1=0 \xrightarrow{O=(2,-1)} r=OH=\frac{|2-(-1)-1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

$$\xrightarrow{\text{معادله‌ی دایره}} (x-2)^2+(y+1)^2=2 \xrightarrow[y=0]{\text{تلاقی با محور x‌ها}} (x-2)^2+1=2 \Rightarrow x-2=\pm1 \Rightarrow x=3,1$$



۴) دایره‌ای که بر دو خط موازی، مماس باشد: فاصله‌ی این دو خط موازی رو حساب کن، نصفش می‌شه شعاع دایره، هر نقطه‌ای که وسطِ این دو تا خط باشه هم، می‌تونه مرکز دایره باشه. (ببین تست اطلاعات بیشتری داده یا نه؟) بد نیست یادآوری کنیم اگر $L: ax+by=c$ و $L': ax+by=c'$ باشند، آن‌وقت خطِ وسطی می‌شه $ax+by=\frac{c+c'}{۲}$.

تمرین: معادله‌ی دایره‌ای که مرکزش به طول ۱- و بر دو خط به معادلات $y=x$ و $y=x+۴$ مماس باشد، کدام است؟ (سراسری ریاضی)

۱) $x^۲+y^۲+۲x-۲y=۰$
۲) $x^۲+y^۲+۲x-۲y=۱$
۳) $x^۲+y^۲-۲x+y=۱$
۴) $x^۲+y^۲+۲x-y=۲$

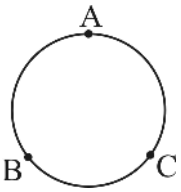
پاسخ: گزینه‌ی «۱»

$$\begin{matrix}y=x \Rightarrow x-y=۰\\ y=x+۴ \Rightarrow x-y+۴=۰\end{matrix} \xrightarrow{\text{فاصله‌ی دو خط موازی}} \frac{|۰-۴|}{\sqrt{۱^۲+(-۱)^۲}}=\frac{۴}{\sqrt{۲}}=۲\sqrt{۲} \xrightarrow{\div ۲} r=\sqrt{۲}$$

$$\xrightarrow{\text{وسط دو خط}} x-y+\frac{۰+۴}{۲}=۰ \xrightarrow{\text{ساده}} x-y+۲=۰ \xrightarrow[x=-۱]{\text{طول مرکز ۱- است}} -۱-y+۲=۰ \Rightarrow y=۱ \Rightarrow O(-۱,۱)$$

$$\xrightarrow{\text{معادله‌ی دایره}} (x+۱)^۲+(y-۱)^۲=۲ \xrightarrow{\text{اتحاد ساده}} x^۲+y^۲+۲x-۲y=۰$$

اگه تست بهتون گفت که دایره‌ای از نقطه‌ی (a,b) می‌گذره، معادله‌ی دایره رو تا هر جا که می‌تونی بنویس و آخرش نقطه‌ی (a,b) رو بذار توی معادله‌ی دایره: در واقع به جای xاش بذار a و به جای y هم بذار b ...



۵) معادله‌ی دایره‌ای که از سه نقطه‌ی غیرهم‌خط می‌گذرد: معادله‌ی دایره را به صورت $x^۲+y^۲+ax+by+c=۰$ در نظر بگیرید، بعدش اون سه تا نقطه رو تو این معادله قرار بدید، حالا سه معادله داری و سه مجهول...!

یه روش دیگه هم هست: عمودمنصف AB و AC رو بنویسی و قطع بدی، اون وقت مرکز به دست میاد. شعاع هم که دیگه کاری نداره!

تمرین: شعاع دایره‌ی گذرا بر سه نقطه‌ی $(۰,۰)$، $(۲,۱)$ و $(۱,-۲)$ برابر کدام است؟ (تجربی ۹۳)

۱) $\frac{\sqrt{۱۰}}{۲}$
۲) $\sqrt{۳}$
۳) $\sqrt{۵}$
۴) $\frac{\sqrt{۱۳}}{۲}$

پاسخ: گزینه‌ی «۱»

$$x^۲+y^۲+ax+by+c=۰ \xrightarrow{\text{صدق دادن نقطه‌ها}} \begin{cases}(۰,۰) \Rightarrow c=۰\\ (۲,۱) \Rightarrow ۴+۱+۲a+b+c=۰ \xrightarrow{c=۰} ۲a+b=-۵\\ (۱,-۲) \Rightarrow ۱+۴+a-۲b+c=۰ \xrightarrow{c=۰} a-۲b=-۵\end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{حل دستگاه}} a=-۳, b=۱ \xrightarrow[\text{جایگزین کن!}]{\text{معادله‌ی دایره}} x^۲+y^۲-۳x+y=۰ \xrightarrow{\text{مرکز}} O=(\frac{۳}{۲},-\frac{۱}{۲}) \xrightarrow{\text{شعاع}} r=\sqrt{\frac{۹}{۴}+\frac{۱}{۴}-۰}=\frac{\sqrt{۱۰}}{۲}$$

۶) تست بهت می‌گه که مرکز دایره روی فلان خط هستش! خب شما مرکز رو $O(\alpha,\beta)$ می‌گیری و به جای x و y اون خط به ترتیب α و β رو جایگذاری می‌کنی، بعدش α رو برحسب β به دست میاری (اگرم خواستی می‌تونی β رو برحسب α به‌دست بیاری!!) حالا مرکز فقط برحسب یه مجهول خواهد بود...

تمرین: دایره‌ای از دو نقطهٔ $(۰,۱)$ و $(۳,۰)$ گذشته و معادلهٔ یک قطر آن به صورت $x-y=۲$ است. شعع این دایره کدام است؟

(تجربی خارج ۹۰)

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) ۲ ۳) $\sqrt{۵}$ ۴) ۳

معادله‌ی دایره در قالب مکان هندسی!

☑ مکان هندسی نقاطی که فاصله‌شان از نقطه‌ی معلوم A، k برابرِ فاصله‌اش از نقطه‌ی معلومِ B باشد $(k \neq ۰,۱)$ دایره است. در این حالت $M=(x,y)$ را در نظر بگیرید، حالا شرطِ $|MA|=k|MB|$ رو اجرا کنید... معادله‌اش درمیاد!

تمرین: مکان هندسی نقاطی از صفحه که فاصله‌ی آن‌ها از نقطه‌ی $A=(۳,۵)$، $\sqrt{۲}$ برابرِ فاصله‌ی آن‌ها از نقطه‌ی $B=(۲,۳)$ باشد، کدام است؟

(مشابه تجربی ۹۷)

۱) $x^۲+y^۲=۸$ ۲) $(x-۱)^۲+(y-۱)^۲=۶$

۳) $(x-۱)^۲+(y-۱)^۲=۱۰$ ۴) $(x-۱)^۲+(y+۱)^۲=۱۰$

پاسخ: گزینه‌ی «۳»

$$\sqrt{(x-۳)^۲+(y-۵)^۲}=\sqrt{۲}\times\sqrt{(x-۲)^۲+(y-۳)^۲}$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲ و اتحاد}} x^۲-۶x+۹+y^۲-۱۰y+۲۵=۲(x^۲-۴x+۴+y^۲-۶y+۹)\xrightarrow{\text{ساده}} x^۲+y^۲-۲x-۲y-۸=۰$$

$$\xrightarrow{\text{مرکز}} O=(۱,۱)\xrightarrow{\text{شعاع}} r=\sqrt{۱+۱+۸}=\sqrt{۱۰}\xrightarrow{\text{معادله‌ی استاندارد}}(x-۱)^۲+(y-۱)^۲=۱۰$$

۱ شعاع دایرهٔ گذرا بر سه نقطهٔ $(۰,۰)$، $(۲,۱)$ و $(-۲,۱)$، برابر کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۱۰}}{۲}$ ۲) $\sqrt{۳}$

۳) $\sqrt{۵}$ ۴) $\frac{\sqrt{۱۳}}{۲}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۳

۲ دایره‌ای، محور xها را در دو نقطه به طول‌های ۱ و ۳ قطع کرده و مرکز آن، بر روی نیمساز ربع اول است. شعاع این دایره کدام است؟

۱) $\sqrt{۳}$ ۲) ۲

۳) $\sqrt{۵}$ ۴) ۳

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

۳ طول شعاع دایره‌ای که از سه نقطهٔ $A(-۱,۰)$، $B(۳,۰)$ و $C(۰,-۳)$ می‌گذرد، کدام است؟

۱) $\sqrt{۳}$ ۲) ۲

۳) $\sqrt{۵}$ ۴) ۳

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۲

۴ به ازای کدام مجموعه مقادیر a، منحنی به معادلهٔ $۲x^۲ + (a^۲ - ۷)y^۲ + ۴y + a = ۰$ یک دایره است؟

۱) $\{-۳\}$ ۲) $\{۳\}$

۳) $\{-۳,۳\}$ ۴) $\varnothing$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۵

۵ دایره‌ای به مرکز $(-۱,۲)$ و مماس بر خط به معادلهٔ $x - y = ۱$، محور xها را با کدام طول، قطع می‌کند؟

۱) ۳ و ۱ ۲) ۴ و ۱

۳) ۳ و ۲ ۴) ۴ و ۱/۵

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

۶ فاصلهٔ نقطهٔ $M(x,y)$ از نقطهٔ $A(۳,۶)$، دو برابر فاصلهٔ آن از مبدأ مختصات است. بزرگ‌ترین وتر از مکان نقاط M کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۳}$
۲) $۲\sqrt{۵}$
۳) $۴\sqrt{۳}$
۴) $۴\sqrt{۵}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۷

۷ دایره‌ای بر محور xها و خط به معادلهٔ $۳x + ۴y = ۰$ مماس است. اگر مرکز این دایره در ناحیهٔ اول و شعاع آن ۳ واحد باشد، نقطهٔ مشترک آن با محور xها با کدام طول است؟

۱) ۱
۲) ۱/۵
۳) ۲
۴) ۲/۵

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۴

۸ شعاع دایره‌ای که از دو نقطهٔ $(۰,۰)$ و $(۳,۱)$ گذشته و مرکز آن روی خط به معادلهٔ $y = ۲x$ باشد، کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۲}$
۲) $\sqrt{۵}$
۳) $\sqrt{۱۰}$
۴) $\sqrt{۱۳}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۶

۹ دایره‌ای از دو نقطهٔ $(۲,۰)$ و $(-۲,۰)$ گذشته و بر خط به معادلهٔ $y = ۱$ مماس است. شعاع این دایره کدام می‌باشد؟

۱) $\frac{۳}{۲}$
۲) $\sqrt{۵}$
۳) $\frac{۵}{۲}$
۴) ۳

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۸

۱۰ هر خط قائم بر یک دایره، از نقطهٔ $(-۲,۱)$ می‌گذرد. این دایره بر خط به معادلهٔ $y = x - ۱$ مماس است. شعاع دایره کدام می‌باشد؟

۱) ۲
۲) $۲\sqrt{۲}$
۳) ۳
۴) $۳\sqrt{۲}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۸

۱۱ دایره‌ای از نقطهٔ $(-۱,۲)$ گذشته و بر هر دو محور مختصات مماس است. قطر دایرهٔ بزرگ‌تر کدام می‌باشد؟

۱) ۸
۲) ۱۰
۳) ۱۲
۴) ۱۵

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

۱۲ شعاع دایره‌ای که از سه نقطه با مختصات $(۲,۱)$ و $(-۲,۴)$ و $(۰,۰)$ می‌گذرد، کدام است؟

۱) ۲
۲) ۲/۵
۳) ۳
۴) ۳/۵

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۱

پاسخ Homework

۱ گزینه ۱

$$x^۲ + y^۲ + ax + by + c = ۰$$

$$\xrightarrow{(۰,۰) \text{ را صدق می‌دهیم}} c = ۰$$

$$\xrightarrow{(۲,۱) \text{ را صدق می‌دهیم}} ۴ + ۱ + ۲a + b = ۰$$

$$\xrightarrow{(۱,-۲) \text{ را صدق می‌دهیم}} ۱ + ۴ + a - ۲b = ۰$$

اکنون با معلوم بودن مقادیر a، b و c شعاع دایره برابر است با:

$$\xrightarrow{\times ۲} \begin{matrix} ۴a + ۲b = -۱۰ \\ a - ۲b = -۵ \end{matrix} \Rightarrow ۵a = -۱۵ \Rightarrow a = -۳, b = ۱$$

$$R = \frac{۱}{۲}\sqrt{a^۲ + b^۲ - ۴c} = \frac{۱}{۲}\sqrt{(-۳)^۲ + (۱)^۲ - ۴(۰)} = \frac{۱}{۲}\sqrt{۱۰}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۳

۲ گزینه ۳

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

گام اول

الف) دایره محور xها را در دو نقطه به طول $x = ۱$ و $x = ۳$ قطع می‌کند؛ بنابراین نقاط $A\,(۱, ۰)$ و $B\,(۳, ۰)$ روی دایرهٔ موردنظر قرار دارند.

ب) مرکز دایره روی نیمساز ربع اول (خط $y = x$) است؛ بنابراین مرکز دایره را به‌صورت $O\,(\alpha, \alpha)$ در نظر می‌گیریم.

گام دوم

چون نقاط A و B روی دایره قرار دارند پس فاصلهٔ آن‌ها تا مرکز دایره باهم برابر و برابر شعاع دایره است.

$$OA = OB = R \Rightarrow \sqrt{(\alpha - ۱)^۲ + \alpha^۲} = \sqrt{(\alpha - ۳)^۲ + \alpha^۲}$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} (\alpha - ۱)^۲ + \alpha^۲ = (\alpha - ۳)^۲ + \alpha^۲$$

$$\Rightarrow \alpha^۲ - ۲\alpha + ۱ = \alpha^۲ - ۶\alpha + ۹ \Rightarrow ۴\alpha = ۸ \Rightarrow \alpha = ۲$$

بنابراین مرکز دایره نقطهٔ $O\,(۲, ۲)$ می‌شود و شعاع دایره برابر است با:

$$R = OA = \sqrt{(۲ - ۱)^۲ + ۲^۲} = \sqrt{۱ + ۴} = \sqrt{۵}$$

۳ گزینه ۳

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۲

گام اول

معادلهٔ گستردهٔ یک دایره به‌صورت $x^۲ + y^۲ + ax + by + c = ۰$ است. در این صورت شعاع دایره برابر است با:

$$R = \sqrt{(\frac{a}{۲})^۲ + (\frac{b}{۲})^۲ - c}$$

گام دوم

سه نقطهٔ A، B و C روی دایره قرار دارد، پس مختصات این نقاط در معادلهٔ دایره صدق می‌کند.

$$x^۲ + y^۲ + ax + by + c = ۰$$

$$\xrightarrow{A(-۱,۰)} (-۱)^۲ + ۰^۲ + a(-۱) + b(۰) + c = ۰ \Rightarrow ۱ - a + c = ۰ \Rightarrow a - c = ۱ \qquad (I)$$

$$\xrightarrow{B(۳,۰)} ۳^۲ + ۰^۲ + a(۳) + b(۰) + c = ۰ \Rightarrow ۹ + ۳a + c = ۰ \Rightarrow ۳a + c = -۹ \qquad (II)$$

$$\xrightarrow{C(۰,-۳)} ۰^۲ + (-۳)^۲ + a(۰) + b(-۳) + c = ۰ \Rightarrow ۹ - ۳b + c = ۰ \Rightarrow c - ۳b = -۹ \qquad (III)$$

بنابراین سه معادله و سه مجهول داریم. با کمی دقت متوجه می‌شویم که دو معادلهٔ I و II فقط شامل دو مجهول a و c است، پس با حل یک دستگاه دو معادله و دو مجهول مقدار a و c را حساب می‌کنیم.

$$\begin{cases} a - c = ۱ \\ ۳a + c = -۹ \end{cases} \xrightarrow{+} ۴a = -۸ \Rightarrow a = -۲$$

$$a - c = ۱ \xrightarrow{a=-۲} c = -۲ - ۱ = -۳$$

با جایگذاری $c = -۳$ در معادلهٔ (III) مقدار b را هم حساب می‌کنیم.

$$c - ۳b = -۹ \xrightarrow{c=-۳} -۳ - ۳b = -۹ \Rightarrow ۳b = ۶ \Rightarrow b = ۲$$

اکنون باتوجه‌به گام اول، شعاع دایره را به دست می‌آوریم.

$$R = \sqrt{(\frac{-۲}{۲})^۲ + (\frac{۲}{۲})^۲ + ۳} = \sqrt{۱ + ۱ + ۳} = \sqrt{۵}$$

۴ گزینه ۱

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۵

گام اول

الف) معادلهٔ استاندارد یک دایره به مرکز (α, β) و شعاع R به‌صورت $(x-\alpha)^۲ + (y-\beta)^۲ = R^۲$ است.

ب) معادلهٔ گستردهٔ یک دایره به‌صورت $x^۲ + y^۲ + ax + by + c = ۰$ است.

گام دوم

باتوجه‌به معادلهٔ گستردهٔ نوشته‌شده در گام اول، ضریب $x^۲$ و $y^۲$ باید باهم برابر و برابر با یک باشد، بنابراین مقادیر a را به‌گونه‌ای می‌یابیم که ضریب $x^۲$ و $y^۲$ باهم برابر شوند؛ درنتیجه:

$$a^۲ - ۷ = ۲ \Rightarrow a^۲ = ۹ \Rightarrow a = \pm ۳$$

ازطرفی معادلهٔ این دایره را باید بتوان به‌صورت استاندارد نوشت، بنابراین دو مقدار $a = +۳$ و $a = -۳$ را در معادلهٔ دایره جایگذاری می‌کنیم تا مقدار صحیح را تشخیص دهیم.

$$a = ۳ : \ ۲x^۲ + (۹-۷)y^۲ + ۴y + ۳ = ۰ \Rightarrow ۲x^۲ + ۲y^۲ + ۴y + ۳ = ۰$$
$$\Rightarrow ۲(x-۰)^۲ + ۲(y^۲ + ۲y + ۱) + ۱ = ۰ \Rightarrow ۲(x-۰)^۲ + ۲(y+۱)^۲ + ۱ = ۰$$
$$\xrightarrow{\div ۲} (x-۰)^۲ + (y+۱)^۲ + \frac{۱}{۲} = ۰ \Rightarrow (x-۰)^۲ + (y+۱)^۲ = -\frac{۱}{۲} \quad \text{غ‌ق‌ق}$$

رابطهٔ به‌دست‌آمده همواره نادرست است؛ زیرا عبارت سمت چپ تساوی همواره نامنفی می‌باشد ولی مساوی با یک عدد منفی شده است.

$$a = -۳ : \ ۲x^۲ + (۹-۷)y^۲ + ۴y - ۳ = ۰ \Rightarrow ۲x^۲ + ۲y^۲ + ۴y - ۳ = ۰$$
$$\Rightarrow ۲(x-۰)^۲ + ۲(y^۲ + ۲y + ۱) - ۵ = ۰ \Rightarrow ۲(x-۰)^۲ + ۲(y+۱)^۲ - ۵ = ۰$$
$$\xrightarrow{\div ۲} (x-۰)^۲ + (y+۱)^۲ - \frac{۵}{۲} = ۰ \Rightarrow (x-۰)^۲ + (y+۱)^۲ = \frac{۵}{۲}$$

به ازای $a = -۳$، معادلهٔ دایره‌ای به مرکز $(۰, -۱)$ و شعاع $R = \sqrt{\frac{۵}{۲}}$ داریم.

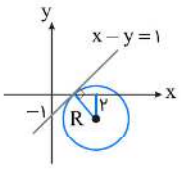
۵ گزینه ۱

فاصلهٔ مرکز دایره از خط مماس بر دایره برابر با شعاع دایره است. فاصلهٔ یک نقطه با مختصات $(x_۰, y_۰)$ از خط به معادلهٔ $ax + by + c = ۰$ برابر است با:

$$d = \frac{|ax_۰ + by_۰ + c|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}}$$

بنابراین شعاع دایره برابر است با:

$$R = \frac{|۲ + ۱ - ۱|}{\sqrt{۱^۲ + (-۱)^۲}} = \sqrt{۲}$$



معادلهٔ دایره : $(x-۲)^۲ + (y+۱)^۲ = ۲ \xrightarrow{y=۰} (x-۲)^۲ = ۱ \Rightarrow \begin{cases} x - ۲ = ۱ \Rightarrow x = ۳ \\ x - ۲ = -۱ \Rightarrow x = ۱ \end{cases}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

۶ گزینه ۴

$$\sqrt{(x-۳)^۲ + (y-۶)^۲} = ۲\sqrt{x^۲ + y^۲}$$
$$\Rightarrow x^۲ - ۶x + ۹ + y^۲ - ۱۲y + ۳۶ = ۴x^۲ + ۴y^۲$$
$$\Rightarrow ۳x^۲ + ۳y^۲ + ۶x + ۱۲y - ۴۵ = ۰$$
$$\xrightarrow{\div ۳} x^۲ + y^۲ + ۲x + ۴y - ۱۵ = ۰$$
$$\Rightarrow (x+۱)^۲ + (y+۲)^۲ = ۲۰ \Rightarrow O(-۱, -۲)$$

معادلهٔ فوق، معادلهٔ یک دایره است که بزرگ‌ترین وتر همان قطر است:

$$r = \sqrt{۲۰} = ۲\sqrt{۵} \Rightarrow ۲r = ۴\sqrt{۵}$$

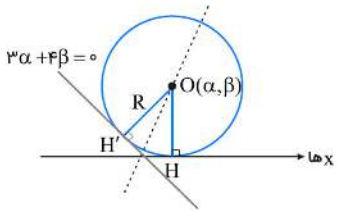
کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۷

۷ گزینه ۱

مرکز دایره را نقطهٔ $O(\alpha, \beta)$ درنظر می‌گیریم. باید فاصلهٔ O از محور xها با فاصلهٔ آن از خط $۳x + ۴y = ۰$، برابر باشد:

$$OH = OH' \Rightarrow |\beta| = \frac{|۳\alpha + ۴\beta|}{\sqrt{۹+۱۶}} = \frac{|۳a + ۴\beta|}{۵} \Rightarrow \begin{cases} ۳\alpha + ۴\beta = ۵\beta \\ ۳\alpha + ۴\beta = -۵\beta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۳\alpha = \beta \\ ۳\alpha = -۹\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{مرکز} : O(\alpha, ۳\alpha) \\ \text{مرکز} : O(\alpha, -\frac{۱}{۳}\alpha) \end{cases}$$



مرکز دایره در ناحیهٔ اول است، پس فقط $O(\alpha, ۳\alpha)$ قابل‌قبول است؛بنابراین مطابق شکل، داریم:

$$R = OH = ۳ \Rightarrow \beta = ۳\alpha = ۳ \Rightarrow \alpha = ۱$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۴

۸ گزینه ۲

مرکز دایره روی خطی به معادلهٔ $y = ۲x$ قرار دارد. فرض می‌کنیم مختصات مرکز دایره $(\alpha , ۲\alpha)$ باشد. طبق تعریف دایره، می‌دانیم فاصلهٔ هر نقطه روی دایره از مرکز دایره برابر با شعاع است. شعاع دایره را R می‌نامیم. با محاسبهٔ فاصلهٔ مرکز دایره از هریک از نقاط $(۰ , ۰)$ و $(۱ , ۳)$ ابتدا مقدار α و سپس مقدار R را به دست می‌آوریم.

$$\left.\begin{aligned} R &= \sqrt{(\alpha - ۰)^۲ + (۲\alpha - ۰)^۲} \\ R &= \sqrt{(\alpha - ۳)^۲ + (۲\alpha - ۱)^۲} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \sqrt{\alpha^۲ + ۴\alpha^۲} = \sqrt{(\alpha - ۳)^۲ + (۲\alpha - ۱)^۲}$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} ۵\alpha^۲ = (\alpha - ۳)^۲ + (۲\alpha - ۱)^۲ \Rightarrow ۵\alpha^۲ = \alpha^۲ - ۶\alpha + ۹ + ۴\alpha^۲ - ۴\alpha + ۱$$

$$\Rightarrow ۵\alpha^۲ = ۵\alpha^۲ - ۱۰\alpha + ۱۰ \Rightarrow ۱۰\alpha = ۱۰ \Rightarrow \alpha = ۱$$

$$\Rightarrow R = \sqrt{(۱ - ۰)^۲ + (۲ - ۰)^۲} = \sqrt{۱ + ۴} = \sqrt{۵}$$

بنابراین دایره‌ای به مرکز $(۱ , ۲)$ و شعاع $\sqrt{۵}$ داریم.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۶

۹ گزینه ۳

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۸

گام اول

الف) هرگاه خطی بر دایره مماس باشد، فاصلهٔ مرکز دایره از این خط برابر با شعاع دایره خواهد بود.

ب) عمودمنصف هر وتر از دایره، از مرکز دایره عبور می‌کند.

گام دوم

دو نقطهٔ $A(۲,۰)$ و $B(-۲,۰)$ روی دایره قرار دارد بنابراین پاره‌خط AB وتری از دایره است که طبق گام اول، عمودمنصف آن از مرکز دایره عبور می‌کند. خط $x=۰$ عمودمنصف پاره‌خط AB است؛ پس فرض می‌کنیم نقطهٔ $O(۰,\alpha)$، مرکز دایره است. فاصلهٔ مرکز دایره از نقاط A و B و خط $y=۱$ برابر با شعاع دایره است، پس داریم:

$$R=OA=\sqrt{(۲-۰)^۲+(۰-\alpha)^۲}=\sqrt{۴+\alpha^۲}$$

$$y=۱\Rightarrow y-۱=۰\Rightarrow R=\frac{|\alpha-۱|}{\sqrt{۱^۲}}=|\alpha-۱|$$

$$\Rightarrow \sqrt{۴+\alpha^۲}=|\alpha-۱| \xrightarrow{\text{به توان ۲}} ۴+\alpha^۲=(\alpha-۱)^۲$$

$$\Rightarrow ۴+\alpha^۲=\alpha^۲-۲\alpha+۱\Rightarrow -۲\alpha=۳\Rightarrow \alpha=-\frac{۳}{۲}$$

بنابراین شعاع دایره برابر است با:

$$R=|\alpha-۱|=\left|-\frac{۳}{۲}-۱\right|=\left|-\frac{۵}{۲}\right|=\frac{۵}{۲}$$

۱۰ گزینه ۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۸

گام اول

الف) هر خط قائم بر دایره، از مرکز دایره عبور می‌کند.

ب) هرگاه خطی بر دایره مماس باشد، فاصلهٔ مرکز دایره از این خط برابر با شعاع دایره است.

گام دوم

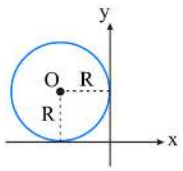
باتوجه‌به اینکه هر خط قائم بر دایره از نقطهٔ $(۱,-۲)$ عبور می‌کند و باتوجه‌به قسمت (الف) از گام اول، نقطهٔ $(۱,-۲)$ همان مرکز دایره است. طبق قسمت (ب) از گام اول، فاصلهٔ نقطهٔ $(۱,-۲)$ از خط $y=x-۱$ برابر با شعاع دایره است؛ پس داریم:

$$y=x-۱\Rightarrow x-y-۱=۰$$

$$R=\frac{|-۲-۱-۱|}{\sqrt{۱^۲+(-۱)^۲}}=\frac{|-۴|}{\sqrt{۲}}=\frac{۴}{\sqrt{۲}}=۲\sqrt{۲}$$

۱۱ گزینه ۲

باتوجه‌به اینکه دایره بر هر دو محور مختصات مماس است پس باید به‌طور کامل در یکی از چهار ناحیهٔ مختصاتی قرار بگیرد. چون دایره از نقطهٔ $(-۱, ۲)$ نیز عبور می‌کند و این نقطه در ناحیهٔ دوم قرار دارد، پس دایرهٔ موردنظر به‌صورت زیر خواهد بود:



بنابراین دایره‌ای به شعاع R و به مرکز $(-R, R)$ داریم. معادلهٔ این دایره برابر است با:

$$(x+R)^۲+(y-R)^۲=R^۲$$

چون دایره از نقطهٔ $(-۱, ۲)$ عبور می‌کند پس مختصات این نقطه در معادلهٔ دایره صدق می‌کند:

$$\xrightarrow{x=-۱, y=۲} (-۱+R)^۲+(۲-R)^۲=R^۲ \Rightarrow ۱-۲R+R^۲+۴-۴R+R^۲=R^۲$$

$$\Rightarrow R^۲-۶R+۵=۰ \Rightarrow (R-۵)(R-۱)=۰ \Rightarrow \begin{cases} R-۵=۰ \Rightarrow R=۵ \\ R-۱=۰ \Rightarrow R=۱ \end{cases}$$

قطر بزرگ‌تر به ازای شعاع بزرگ‌تر به دست می‌آید که برابر است با:

$$۲R=۲(۵)=۱۰$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

۱۲ گزینه ۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۱

گام اول

معادلهٔ گستردهٔ یک دایره به‌صورت $x^۲ + y^۲ + ax + by + c = ۰$ است. در این صورت شعاع دایره برابر است با:

$$R = \sqrt{(\frac{a}{۲})^۲ + (\frac{b}{۲})^۲ - c}$$

گام دوم

سه نقطهٔ $(۱ , ۲)$، $(۴ , -۲)$ و $(۰ , ۰)$ روی دایره قرار دارد، پس مختصات این نقطه در معادلهٔ دایره صدق می‌کند.

$$x^۲ + y^۲ + ax + by + c = ۰$$

$$\xrightarrow{(۲,۱)} ۲^۲ + ۱^۲ + a(۲) + b(۱) + c = ۰ \Rightarrow ۴ + ۱ + ۲a + b + c = ۰ \Rightarrow ۲a + b + c = -۵ \quad (I)$$

$$\xrightarrow{(-۲,۴)} (-۲)^۲ + ۴^۲ + a(-۲) + b(۴) + c = ۰ \Rightarrow ۴ + ۱۶ - ۲a + ۴b + c = ۰ \Rightarrow -۲a + ۴b + c = -۲۰ \quad (II)$$

$$\xrightarrow{(۰,۰)} ۰^۲ + ۰^۲ + a(۰) + b(۰) + c = ۰ \Rightarrow c = ۰ \quad (III)$$

با جایگذاری $c = ۰$ در دو معادلهٔ I و II، به یک دستگاه دومعادله و دومجهول می‌رسیم و آن را حل می‌کنیم.

$$\begin{cases} ۲a + b = -۵ \\ -۲a + ۴b = -۲۰ \end{cases} \xrightarrow{+} ۵b = -۲۵ \Rightarrow b = -۵$$

$$۲a + b = -۵ \xrightarrow{b=-۵} ۲a - ۵ = -۵ \Rightarrow ۲a = ۰ \Rightarrow a = ۰$$

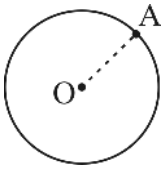
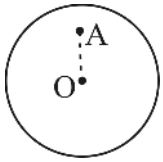
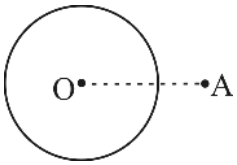
اکنون باتوجه‌به گام اول، شعاع دایره را به دست می‌آوریم.

$$R = \sqrt{(\frac{۰}{۲})^۲ + (\frac{-۵}{۲})^۲ - ۰} = \sqrt{\frac{۲۵}{۴}} = \frac{۵}{۲} = ۲/۵$$

وضعیت یک نقطه و دایره نسبت به هم

شگرد نقطه و دایره در یک جدول

☑ اگه $A=(x_0,y_0)$ یه نقطه و $f(x,y)=x^2+y^2+ax+by+c=0$، معادله‌ی دایره باشند، اون‌وقت اگه نقطه رو تو معادله‌ی دایره جایگذاری کنی، یعنی $f(A)=x_0^2+y_0^2+ax_0+by_0+c$، می‌شه باهاش وضع نقطه و دایره رو فهمید:

	مفهوم هندسی	شرط مختصاتی	تعداد مماس‌های قابل رسم از A بر دایره	شکل
A روی دایره	$OA=r$	$f(A)=0$	۱ مماس	
A داخل دایره	$OA<r$	$f(A)<0$	هیچ مماس	
A خارج دایره	$OA>r$	$f(A)>0$	۲ مماسِ مساوی	

تمرین: از نقطه‌ی $A=(۱,۲)$ چند مماس بر دایره‌ی $x^۲+y^۲-۲x-۶y=۲۶$ می‌توان رسم کرد؟

۱) هیچ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

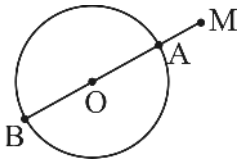
پاسخ: گزینه‌ی «۱»

$$x^۲+y^۲-۲x-۶y-۲۶=۰ \xrightarrow[x=۱\,,\,y=۲]{\text{جایگذاری کن } (۱,۲) \text{ را!}} (۱)^۲+(۲)^۲-۲(۱)-۶(۲)-۲۶=-۳۵<۰$$

$$\Rightarrow \text{نقطه داخل دایره است} \xrightarrow{\text{تعداد مماس}} \text{هیچ}$$

دورترین و نزدیک‌ترین نقطه‌های دایره تا یک نقطه‌ی داده‌شده

☑ کم‌ترین و بیشترین فاصله‌ی نقطه‌ی M تا دایره، زمانی اتفاق می‌افتد که از M به مرکز دایره وصل کنید تا دایره را در دو نقطه‌ی A و B قطع کند. اون‌وقت:



۱) بیشترین فاصله‌ی نقطه‌ی M تا (نقاطِ) دایره $= MB = \boxed{OM+r}$

۲) کم‌ترین فاصله‌ی نقطه‌ی M تا (نقاطِ) دایره $= MA = \boxed{|OM-r|}$

این فرمول‌ها، هیچ ربطی به جای M ندارن! یعنی M می‌تونه بیرون یا درون، یا حتی روی دایره باشد.

تمرین: بیشترین و کم‌ترین فاصله‌ی نقاط دایره‌ی $x^۲+y^۲-۶x+۵=۰$ از نقطه‌ی $(۶,۴)$ کدام است؟

۱) ۶ و ۲ ۲) ۷ و ۳ ۳) ۵ و ۱ ۴) ۸ و ۴

پاسخ: گزینه‌ی «۲»

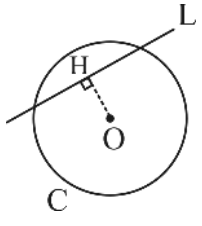
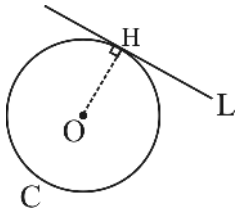
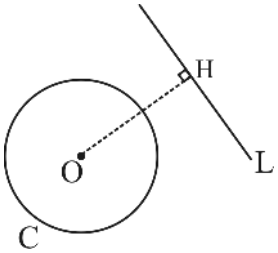
$$x^۲+y^۲-۶x+۵=۰ \xrightarrow{\text{مرکز}} O=(۳,۰)\begin{cases}\xrightarrow{\text{شعاع}} r=\sqrt{۹+۰-۵}=۲\\ \xrightarrow[M=(۶,۴)]{\text{فاصله‌ی مرکز تا نقطه}} OM=\sqrt{(۳-۶)^۲+(۰-۴)^۲}=۵\end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{بیشترین و کم‌ترین فاصله}} |OM\pm r|=|۵\pm۲|=۷\,,۳$$

خط و دایره در یک جدول

۱) فاصله‌ی مرکز دایره تا اون خط رو پیدا کن، اسمش رو می‌ذاریم OH.

۲) خب حالا برو سراغ جدول:

خط و دایره متقاطع‌اند.	خط بر دایره مماس است.	خط، دایره را قطع نمی‌کند.
 $OH<r$	 $OH=r$	 $OH>r$

تمرین: به ازای کدام مقادیر m خط به معادله‌ی $y=mx+2$ بر دایره به معادله‌ی $x^2+y^2-2x=3$ مماس است؟ (تجربی خارج ۹۱)

۱) $-\frac{4}{3}$ و صفر ۲) $\frac{4}{3}$ و صفر ۳) $-\frac{2}{3}$ و ۱ ۴) $\frac{2}{3}$ و ۱

پاسخ: گزینه‌ی «۲»

$$y=mx+2 \xrightarrow{\text{همه، یک طرف باشن!}} mx-y+2=0 \xrightarrow[r=\sqrt{1+0+3}=2]{O(1,0)} OH=\frac{|m-0+2|}{\sqrt{m^2+1}}=\boxed{2}$$

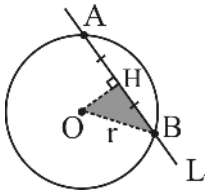
شعاع = فاصله‌ی مرکز تا مماس

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} \frac{m^2+4m+4}{m^2+1}=4 \xrightarrow{\text{ساده}} 3m^2-4m=0 \Rightarrow m=0 \text{ یا } \frac{4}{3}$$

طول وتر

☑ اگر خطی مثل L، دایره‌ای را قطع کند، روی دایره وتری جدا می‌کند، به نام AB. برای پیدا کردنِ طول AB، فاصله‌ی مرکز را تا خط حساب کن (یعنی OH). شعاع دایره هم که که معلوم شد، حالا طبق فیثاغورس خواهی داشت:

$$AB=2\sqrt{r^2-OH^2}$$



تمرین: طول پاره‌خطی که دایره‌ی $x^2+y^2-2x-8y=8$، از خطِ $5x+12y=14$ جدا می‌کند، کدام است؟ (مشابه خارج تجربی ۹۸)

۱) ۱۰ ۲) ۹ ۳) ۸ ۴) ۷

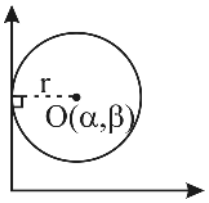
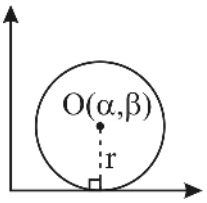
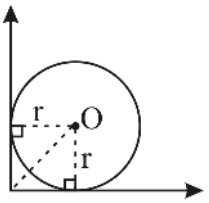
پاسخ: گزینه‌ی «۳»

$$x^2+y^2-2x-8y-8=0 \xrightarrow{\text{مرکز}} O=(1,4) \xrightarrow{\text{شعاع}} r=\sqrt{1+16+8}=5$$

$$\xrightarrow[\text{فاصله‌ی مرکز تا خط}]{5x+12y-14=0} OH=\frac{|5(1)+12(4)-14|}{\sqrt{25+144}}=\frac{39}{13}=3 \xrightarrow{\text{فرمول وتر}} 2\sqrt{r^2-OH^2}=2\sqrt{5^2-3^2}=2\times 4=8$$

دایره‌ی مماس بر محورهای مختصات

☑ اگر $O(\alpha,\beta)$ مرکز دایره و r شعاع آن باشد، در این صورت داریم:

مماس بر محور yها	مماس بر محور xها	مماس بر هر دو محور xها و yها
$\lvert\alpha\rvert=r$ 	$\lvert\beta\rvert=r$ 	$\lvert\alpha\rvert=\lvert\beta\rvert=r$ 

شگرد برداشتن قدرمطلق

اگر دایره‌ای بر محورها مماس بود، از روی مختصات نقطه‌ای که دایره از آن می‌گذرد، علامت α و β رو بفهمید. اصلاً علامت x و y اون نقطه، هر طور که بود به ترتیب علامت α و β خواهد بود. مثلاً وقتی نقطه‌ی تست $(-2,4)$ است، می‌فهمی $\alpha<0$ و $\beta>0$ بوده پس قدرمطلق‌ها رو به طور مناسب این‌جوری برمی‌داری: $-\alpha=\beta=r$.

تمرین: دو دایره‌ی گذرا بر نقطه‌ی $(-۹,۲)$ بر هر دو محورهای مختصات مماس است. شعاع دایره‌ی بزرگ‌تر کدام است؟

(ریاضی ۹۵ و مشابه خارج تجربی ۹۷)

۱) ۱۴ ۲) ۱۵ ۳) ۱۷ ۴) ۱۹

پاسخ: گزینه‌ی «۳»

$$|\alpha|=|\beta|=r \Rightarrow \text{دایره بر هر دو محور مماس است} \xrightarrow[\text{در ناحیه‌ی چهارم } x \text{ مثبت و } y \text{ منفی است}]{\text{از نقطه‌ی } (-۹,۲) \text{ در ناحیه‌ی چهارم می‌گذرد}} \alpha=-\beta=r$$

$$\xrightarrow{\text{معادله‌ی دایره}} (x-\alpha)^۲+(y-\beta)^۲=r^۲ \xrightarrow{\alpha=r\,,\,\beta=-r} (x-r)^۲+(y+r)^۲=r^۲$$

$$\xrightarrow{\text{صدق دادن } (۲,-۹)} (۲-r)^۲+(-۹+r)^۲=r^۲ \xrightarrow{\text{اتحاد و ساده}} r^۲-۲۲r+۸۵=۰ \Rightarrow (r-۱۷)(r-۵)=۰$$

$$\Rightarrow r=۵ \text{ یا } ۱۷ \xrightarrow{\text{شعاع بزرگ‌تره}} ۱۷$$

تمرین: دایره‌ای از نقطه‌ی $(-۱,۲)$ گذشته و بر هر دو محور مختصات مماس است. قطر دایره‌ی بزرگ‌تر کدام است؟ *(تجربی ۹۰)*

۱) ۸ ۲) ۱۰ ۳) ۱۲ ۴) ۱۵

پاسخ: گزینه‌ی «۲»

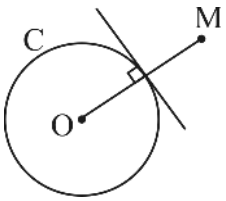
$$|\alpha|=|\beta|=r \Rightarrow \text{دایره بر دو محور مماس است.} \xrightarrow[\alpha<۰\,,\,\beta>۰]{\text{نقطه‌ی } (-۱,۲) \text{ در ناحیه‌ی دوم است.}} -\alpha=\beta=r \Rightarrow \begin{cases}\alpha=-r\\ \beta=r\end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{معادله‌ی کلی دایره}} (x-\alpha)^۲+(y-\beta)^۲=r^۲ \xrightarrow{\alpha=-r\,,\,\beta=r} (x+r)^۲+(y-r)^۲=r^۲$$

$$\xrightarrow{\text{صدق دادن } (-۱,۲)} (-۱+r)^۲+(۲-r)^۲=r^۲ \xrightarrow{\text{ساده و حل}} r=۱,۵ \xrightarrow{\text{قطر بزرگ‌تره}} ۲\times ۵=۱۰$$

خط قائم بر دایره

☑ اگر نقطه‌ی M و دایره‌ی $C(O,R)$ مفروض باشند، مطابق شکل مشخص است که هر خط گذرنده از M و مرکز دایره بر خط مماس بر دایره در نقطه‌ی تقاطع با دایره عمود است، پس:



۱) برای نوشتن معادله‌ی خط قائم بر دایره از نقطه‌ی M، کافیست معادله‌ی خط OM را بنویسید.

۲) یک خط بر یک دایره قائم است اگر و تنها اگر از مرکز دایره عبور کند.

۳) تمام خطوط قائم بر یک دایره در مرکز دایره همرسند.

یه جور دیگه: اگر از نقطه‌ای، بشه بی‌شمار قائم بر دایره کشید، حتماً اون نقطه مرکز دایره است.

تمرین: از نقطه‌ی $A=(a-۱,b+۲)$، بی‌شمار قائم بر دایره‌ی $x^۲+y^۲-۶x-۴y=۰$ رسم شده است. $a+b$ کدام است؟

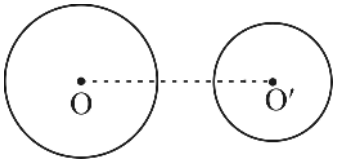
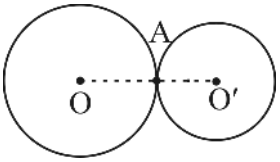
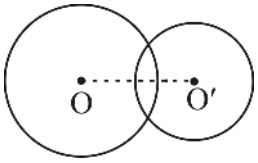
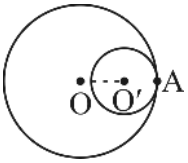
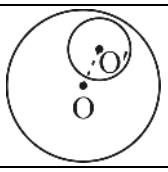
۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

پاسخ: گزینه‌ی «۱»

$$x^۲+y^۲-۶x-۴y=۰ \xrightarrow{\text{مرکز}} O=(۳,۲) \xrightarrow[A(a-۱,b+۲)]{A \text{ مرکز است.}} \begin{cases}a-۱=۳\\ b+۲=۲\end{cases} \Rightarrow a=۴\,,\,b=۰ \xrightarrow{+} ۴$$

وضعیت دو دایره، نسبت به همدیگر

☑ دو تا دایره، نسبت به هم دارای ۵ وضعیتِ مختلف هستند. باری تشخیص وضعیت اونا، باید سریع مرکز و شعاعِ دو دایره را به دست بیاری: O، O'، r و r'. بعد اینا رو تبدیل کنی به ۳ عدد کلیدی: ۱) $r+r'$ ۲) $|r-r'|$ ۳) d، که فاصله‌ی دو تا مرکزها از همدیگه هستش.
همون خطالمرکزین! خب حالا ببین:

	شکل	شرط	تعداد مماس مشترک‌های داخلی	تعداد مماس مشترک‌های خارجی
متخارج		$d > r+r'$	۲	۲
مماس خارج		$d = r+r'$	۱	۲
متقاطع		$\|r-r'\| < d < r+r'$	صفر	۲
مماس داخل		$d = \|r-r'\|$	صفر	۱
متداخل		$d < \|r-r'\|$	صفر	صفر

تمرین: دو دایره به معادلات $x^2+y^2-4x+4y=1$ و $x^2+y^2-4x+8y+19=0$ نسبت به یکدیگر چگونه‌اند؟

۱) مماس خارج
۲) مماس داخل
۳) متقاطع در دو نقطه
۴) یکی خارج دیگری

پاسخ: گزینه‌ی «۲»

$$\left.\begin{array}{l} x^2+y^2-4x+4y-1=0 \xrightarrow{\text{مرکز}} O=(2,-2) \xrightarrow{\text{شعاع}} r=\sqrt{4+4+1}=3 \\ x^2+y^2-4x+8y+19=0 \xrightarrow{\text{مرکز}} O'=(2,-4) \xrightarrow{\text{شعاع}} r'=\sqrt{4+16-19}=1 \end{array}\right.$$

$$\begin{cases} d=OO'=\sqrt{0+4}=2 \\ r+r'=4\,,\,|r-r'|=2 \end{cases}$$

پس $d=|r-r'|$ درست است و این هم یعنی دایره‌ها مماس داخلی‌اند.

تمرین: به ازای کدام مقدار b، دو دایره به معادلات $x^2+y^2+2x-2y=0$ و $x^2+y^2-4y+b=0$ مماس داخل‌اند؟ *(سراسری ریاضی)*

۱) -5 ۲) -4 ۳) -3 ۴) -2

پاسخ: گزینه‌ی «۲»

$$\begin{cases} x^2+y^2+2x-2y=0 \xrightarrow{\text{مرکز}} O=(-1,1) \\ x^2+y^2-4y+b=0 \xrightarrow{\text{مرکز}} O'=(0,2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \xrightarrow{\text{شعاع}} r=\sqrt{1+1-0}=\sqrt{2} \\ \xrightarrow{\text{شعاع}} r'=\sqrt{0+4-b}=\sqrt{4-b} \\ \xrightarrow{OO'} d=\sqrt{1+1}=\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\xrightarrow[d=|r-r'|]{\text{مماس داخلی‌اند}} \sqrt{2}=|\sqrt{2}-\sqrt{4-b}| \Rightarrow \sqrt{2}=\sqrt{4-b}-\sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{4-b}=2\sqrt{2}$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} 4-b=8 \Rightarrow b=-4$$

تمرین: دایرهٔ C بر دایره به معادلهٔ $x^2+y^2-4x+2y=4$ مماس خارج است. هر خط قائم بر دایرهٔ C از نقطهٔ $(8,7)$ می‌گذرد، شعاع دایرهٔ C کدام است؟ *(تجربی خارج ۹۶)*

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

۱ خط $۳y + ۲x = ۹$ در نقطهٔ $(۰, ۳)$ بر دایرهٔ $x^۲ + y^۲ + ۳x + ay = c$ مماس است. مقدار a کدام است؟

۱) $۳/۵$ ۲) $-۳/۵$

۳) $۱/۵$ ۴) $-۱/۵$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

۲ خطی به معادله $y + ۲x = ۰$ عمودمنصف خط‌المرکزین دو دایره است که شعاع یکی نصف شعاع دیگری است. اگر معادلهٔ دایرهٔ بزرگ‌تر به صورت $x^۲ + y^۲ + ۶x - ۲y = a$ و خط مفروض بر دایرهٔ کوچک‌تر مماس باشد، مجموع طول نقاط برخورد دو دایره کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۱۵}}{۲}$ ۲) $-\frac{\sqrt{۱۵}}{۲}$

۳) ۱ ۴) -۱

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۲

۳ طول کوتاه‌ترین وتری که از $(-۱, ۲/۵)$ در دایره $۲x^۲ + ۲y^۲ - ۶x - ۱۰y + ۱ = ۰$ رسم می‌شود، کدام است؟

۱) $\sqrt{۵}$ ۲) $\sqrt{۷}$

۳) $\frac{\sqrt{۵}}{۲}$ ۴) $\frac{\sqrt{۷}}{۲}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۴ نقطه‌های M و N به ترتیب روی دو دایرهٔ متخارج $x^۲ + y^۲ - ۲x + ۲y = a$ و $x^۲ + y^۲ + ۴x - ۶y + ۶a = ۰$ قرار دارند. اگر بیشترین فاصلهٔ M و N برابر ۸ باشد، مقدار a کدام است؟

۱) $۲/۵$ ۲) ۲

۳) $۱/۵$ ۴) ۱

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

۵ خط d به معادلهٔ $y - x = ۰$، عمودمنصف خط‌المرکزین دو دایره است که شعاع یکی ۲ برابر دیگری است. اگر خط d بر دایرهٔ کوچک‌تر به معادلهٔ $x^۲ + y^۲ + ۶x - ۲y = r$ مماس باشد، حاصل‌ضرب طول نقاط برخورد دو دایره کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۲}$ ۲) $\frac{۵}{۴}$

۳) $\frac{۶۵}{۳۲}$ ۴) $\frac{۶۵}{۶۴}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۲

۶ دایرهٔ $x^۲ + y^۲ + ۲y = ۳$ مفروض است. معادلهٔ دایره‌ای که با دایرهٔ قبلی مماس داخل بوده و از نقطهٔ $(۰, -۳)$ گذشته و قطر آن با شعاع دایرهٔ اصلی برابر باشد، کدام است؟ (با تغییر)

۱) $x^۲ + y^۲ - ۴x = ۳$
۲) $x^۲ + y^۲ - ۴y + ۳ = ۰$
۳) $x^۲ + y^۲ - ۲x - ۲y = ۰$
۴) $x^۲ + y^۲ + ۴y + ۳ = ۰$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

۷ به ازای کدام مقدار a، دو دایره به معادلات $x^۲ + y^۲ + ۴x = ۰$ و $x^۲ + y^۲ - ۲x + ۸y + a = ۰$ مماس خارج یکدیگرند؟

۱) ۵
۲) ۶
۳) ۷
۴) ۸

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۰

۸ مربع $ABCD$ به ضلع ۴ واحد، مفروض است. شعاع دایرهٔ گذرا بر دو رأس A و B و مماس بر ضلع CD کدام است؟

۱) $۲/۲۵$
۲) $۲/۵$
۳) $۲\sqrt{۲}$
۴) ۳

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۵

۹ دایرهٔ C بر دایره به معادلهٔ $x^۲ + y^۲ - ۴x + ۲y = ۴$ مماس خارج است. هر خط قائم بر دایرهٔ C از نقطهٔ $(۸, ۷)$ می‌گذرند. شعاع دایرهٔ C کدام است؟

۱) ۶
۲) ۷
۳) ۸
۴) ۹

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۶

۱۰ دو دایره به معادله‌های $x^۲ + y^۲ - ۴x + ۴y = ۱$ و $x^۲ + y^۲ - ۴x + ۸y + ۱۹ = ۰$، نسبت به یکدیگر چگونه‌اند؟

۱) مماس خارجی
۲) مماس داخلی
۳) متقاطع در دو نقطه
۴) یکی خارج دیگری

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۰

۱۱ دو دایره به معادلات $x^۲ + y^۲ - ۲x + ۴y = ۱۳$ و $x^۲ + y^۲ + ۲x = ۱$ نسبت به هم کدام وضع را دارند؟

۱) مماس داخل
۲) مماس خارج
۳) متقاطع
۴) متداخل

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۳

۱۲ دو دایره $x^۲+y^۲+۲y-۴x=۰$ و $x^۲+y^۲-۲y=۲$، نسبت به هم کدام وضعیت را دارند؟

۱) مماس بیرون
۲) متقاطع
۳) متخارج
۴) متداخل

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

۱۳ شعاع دایرهٔ گذرا بر سه نقطهٔ $(۰,۰)$، $(۲,۱)$ و $(۱,-۲)$، برابر کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۱۰}}{۲}$
۲) $\sqrt{۳}$
۳) $\sqrt{۵}$
۴) $\frac{\sqrt{۱۳}}{۲}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۳

۱۴ دایره‌ای، محور xها را در دو نقطه به طول‌های ۱ و ۳ قطع کرده و مرکز آن، بر روی نیمساز ربع اول است. شعاع این دایره کدام است؟

۱) $\sqrt{۳}$
۲) ۲
۳) $\sqrt{۵}$
۴) ۳

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

۱۵ طول شعاع دایره‌ای که از سه نقطهٔ $A(-۱,۰)$، $B(۳,۰)$ و $C(۰,-۳)$ می‌گذرد، کدام است؟

۱) $\sqrt{۳}$
۲) ۲
۳) $\sqrt{۵}$
۴) ۳

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۲

۱۶ به ازای کدام مجموعه مقادیر a، منحنی به معادلهٔ $۲x^۲+(a^۲-۷)y^۲+۴y+a=۰$ یک دایره است؟

۱) $\{-۳\}$
۲) $\{۳\}$
۳) $\{-۳,۳\}$
۴) $\varnothing$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۵

۱۷ طول وتری از دایرهٔ $x^۲+y^۲-۴x+۲y=۱$ که روی خط $۲y+x=a$ قرار دارد، برابر ۳ است. اختلاف مقادیر a چقدر است؟

۱) $\sqrt{۳۵}$
۲) $\sqrt{۳۸}$
۳) $۳\sqrt{۶}$
۴) $۵\sqrt{۳}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۱۸ طول خط‌المرکزین دو دایرهٔ مماس درونی ۳/۵ سانتی‌متر و مساحت ناحیهٔ محدود بین آن‌ها 21π سانتی‌متر مربع است. شعاع دایرهٔ کوچک‌تر، چند سانتی‌متر است؟

۱) ۱/۲۵ ۲) ۱/۷۵

۳) ۲/۲۵ ۴) ۲/۷۵

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۱

۱۹ دایره‌ای به مرکز $(-1, 2)$ و مماس بر خط به معادلهٔ $x - y = 1$، محور xها را با کدام طول، قطع می‌کند؟

۱) ۳ و ۱ ۲) ۴ و ۱

۳) ۳ و ۲ ۴) ۴ و ۱/۵

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

۲۰ دو دایرهٔ C و C' در نقطهٔ $(1, 0)$ مماس برونی هم هستند. اگر قائم‌های بر دایرهٔ C همواره از نقطهٔ $(-3, 2)$ بگذرد، مرکز دایرهٔ C' با شعاع $\sqrt{5}$ کدام است؟

۱) $(-1, 3)$ ۲) $(-1, 2)$

۳) $(1, -2)$ ۴) $(1, -1)$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۴

۲۱ معادلهٔ دایره‌ای که بر دو دایرهٔ $x^2 - 8x + y^2 + 15 = 0$ و $x^2 - 2x + y^2 = 0$ مماس خارج است و مرکزش روی یکی از محورها قرار دارد، کدام است؟

۱) $x^2 + y^2 + 5x + 6 = 0$ ۲) $x^2 + y^2 - 5x + 6 = 0$

۳) $4x^2 + 4y^2 - 20x + 25 = 0$ ۴) $4x^2 + 4y^2 + 20x + 25 = 0$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۱

۲۲ به‌ازای هر m، معادلهٔ $(m-2)x + (m+1)y = 6$، معادلهٔ قطری از دایرهٔ C است. اگر نقطهٔ $A(-1, 1)$ روی دایرهٔ C باشد، محیط دایرهٔ C کدام است؟

۱) $2\sqrt{2}\pi$ ۲) 2π

۳) 3π ۴) $2\sqrt{3}\pi$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۱

۲۳ دایرهٔ گذرا بر مبدأ مختصات، بر دو خط به معادلات $y = 2x$ و $y = 2x + 10$، مماس است. مختصات مرکز این دایره کدام است؟

۱) $(-3, 2)$ ۲) $(-3, 1)$

۳) $(-2, 1)$ ۴) $(-1, 2)$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۵

۲۴ دو دایرهٔ گذرا بر نقطهٔ $(-۹, ۲)$ بر هر دو محورهای مختصات مماس است. شعاع دایرهٔ بزرگ‌تر، کدام است؟

۱) ۱۴ ۲) ۱۵

۳) ۱۷ ۴) ۱۹

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۵

۲۵ نقطهٔ $M(۲\sqrt{۵}, b)$ مرکز دایره‌ای است که بر دو خط به معادلات $y = ۲x$ و $x = ۲y$ مماس است. شعاع دایرهٔ کوچک‌تر کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۱/۵

۳) ۲ ۴) ۲/۵

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۲

۲۶ دایرهٔ گذرا بر نقطهٔ $(-۲, ۱)$، بر هر دو محور مختصات مماس است. شعاع آن کدام است؟

۱) ۱ و ۴ ۲) ۱ و ۵

۳) ۲ و ۴ ۴) ۲ و ۵

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۷

۲۷ فاصلهٔ نقطهٔ $M(x, y)$ از نقطهٔ $A(۳, ۶)$، دو برابر فاصلهٔ آن از مبدأ مختصات است. بزرگ‌ترین وتر از مکان نقاط M کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۳}$ ۲) $۲\sqrt{۵}$

۳) $۴\sqrt{۳}$ ۴) $۴\sqrt{۵}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۷

۲۸ فاصلهٔ نزدیک‌ترین نقاط دایره به معادلهٔ $x^۲ + y^۲ - ۲x + ۴y = ۴$ از خط به معادلهٔ $۳x + ۴y = ۱۵$، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۱

۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) ۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۰

۲۹ دایره‌های $x^۲ + y^۲ + ۲y = ۳$ و $x^۲ + y^۲ + ۲x = ۳$ متقاطع‌اند. معادلهٔ وتر مشترک این دو دایره کدام است؟

۱) $x = y$ ۲) $x = ۱ + y$

۳) $x = -y$ ۴) $x = ۱ - y$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

۳۰ فرض کنید خطوط $x+y=۱$ و $x-y=۳$ قطرهای یک دایره و خط $۴x+۳y+۵=۰$ مماس بر آن باشد. نزدیک‌ترین فاصلهٔ نقطهٔ $M(۴,-۲)$ از دایره، کدام است؟

۱) $\sqrt{۳}-۱$
۲) $\sqrt{۳}-\sqrt{۲}$
۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$
۴) $\sqrt{۵}-۲$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۰

۳۱ دایره‌ای بر محور xها و خط به معادلهٔ $۳x+۴y=۰$ مماس است. اگر مرکز این دایره در ناحیهٔ اول و شعاع آن ۳ واحد باشد، نقطهٔ مشترک آن با محور xها با کدام طول است؟

۱) ۱
۲) ۱/۵
۳) ۲
۴) ۲/۵

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۴

۳۲ به ازای کدام مقدار a، زاویهٔ بین خط مماس بر دایرهٔ $x^۲+y^۲-۲x+y=۱$ و خط به معادلهٔ $۳x+۲y=a$ که از مرکز دایره می‌گذرد، در نقطهٔ تلاقی آن‌ها ۹۰ درجه است؟ (با تغییر)

۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۵

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۶

۳۳ کوچک‌ترین دایرهٔ گذرا بر دو نقطهٔ $A(۲,۵)$ و $B(-۴,۱)$، محور xها را با کدام طول، قطع می‌کند؟

۱) $۱,-۳$
۲) $۰,-۳$
۳) $۲,-۱$
۴) $۳,-۲$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۹

۳۴ دایره‌ای به مرکز $(۱,۳)$ بر روی خط راست $۵x+۱۲y=۱۵$، وتری به طول $۲\sqrt{۲۱}$، جدا می‌کند. این دایره بر روی محور xها، وتری با کدام اندازه جدا می‌کند؟

۱) $۲\sqrt{۶}$
۲) ۶
۳) $۲\sqrt{۱۵}$
۴) ۸

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

۳۵ به ازای کدام مقدار a دایرهٔ به معادلهٔ $x^۲+y^۲-۲x+۴y+a=۰$ بر خط به معادلهٔ $x+۳y=۰$ مماس است؟

۱) $\frac{۳}{۲}$
۲) $\frac{۵}{۲}$
۳) ۳
۴) ۵

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۵

۳۶ دایرهٔ به مرکز $(۲,۰)$ و مماس بر نیمساز ربع اول، خط به معادلهٔ $y = ۱$ را با کدام طول‌ها قطع می‌کند؟

۱) ۱ و ۳
۲) ۰ و ۴
۳) $\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۵}{۲}$
۴) $۲ - \sqrt{۲}$ و $۲ + \sqrt{۲}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۶

۳۷ شعاع دایره‌ای که از دو نقطهٔ $(۰,۰)$ و $(۳,۱)$ گذشته و مرکز آن روی خط به معادلهٔ $y = ۲x$ باشد، کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۲}$
۲) $\sqrt{۵}$
۳) $\sqrt{۱۰}$
۴) $\sqrt{۱۳}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۶

۳۸ دو دایره به معادلات $x^۲ + y^۲ - ۲x + ۶y = ۸$ و $x^۲ + y^۲ + ۸x - ۴y + ۱۲ = ۰$ نسبت به هم کدام وضع را دارند؟

۱) مماس خارج
۲) مماس داخل
۳) متقاطع
۴) متخارج

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۷

۳۹ دایره‌ای از دو نقطهٔ $(۲,۰)$ و $(-۲,۰)$ گذشته و بر خط به معادلهٔ $y = ۱$ مماس است. شعاع این دایره کدام می‌باشد؟

۱) $\frac{۳}{۲}$
۲) $\sqrt{۵}$
۳) $\frac{۵}{۲}$
۴) ۳

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۸

۴۰ هر خط قائم بر یک دایره، از نقطهٔ $(-۲,۱)$ می‌گذرد. این دایره بر خط به معادلهٔ $y = x - ۱$ مماس است. شعاع دایره کدام می‌باشد؟

۱) ۲
۲) $۲\sqrt{۲}$
۳) ۳
۴) $۳\sqrt{۲}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۸

۴۱ دایره‌ای از نقطهٔ $(-۱,۲)$ گذشته و بر هر دو محور مختصات مماس است. قطر دایرهٔ بزرگ‌تر کدام می‌باشد؟

۱) ۸
۲) ۱۰
۳) ۱۲
۴) ۱۵

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

۴۲ به ازای کدام مقدار m، خط به معادلهٔ $y = mx + ۲$ بر دایرهٔ $x^۲ + y^۲ - ۲x = ۳$ مماس است؟

۱) $-\frac{۴}{۳}$ و ۰
۲) $\frac{۴}{۳}$ و ۰
۳) $-\frac{۴}{۳}$ و ۱
۴) $\frac{۲}{۳}$ و ۱

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۱

۴۳ شعاع دایره‌ای که از سه نقطه با مختصات $(۲, ۱)$ و $(-۲, ۴)$ و $(۰, ۰)$ می‌گذرد، کدام است؟

۱) ۲
۲) ۲/۵
۳) ۳
۴) ۳/۵

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۱

۴۴ شعاع دایره به مرکز $(-۲, ۲)$ و مماس خارج بر دایره $x^۲ + y^۲ - ۲x + ۴y + ۱ = ۰$، کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۲}$
۲) ۳
۳) $۲\sqrt{۳}$
۴) ۴

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۳

۴۵ نقطهٔ $A(-۱, ۴)$ مرکز یک دایره است که بر روی خط $۲x - ۳y + ۱ = ۰$ وتری به طول $۲\sqrt{۷}$ جدا می‌کند. این دایره خط $y = ۲$ را با کدام طول، قطع می‌کند؟

۱) -۵، ۳
۲) -۴، ۲
۳) $-۱ \pm \sqrt{۲}$
۴) $-۱ \pm \sqrt{۳}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

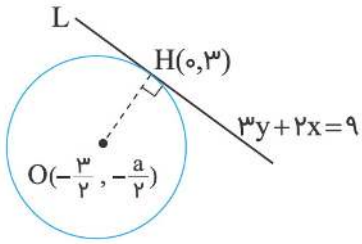
۴۶ مرکز دایره‌ای بر روی نیمساز ناحیهٔ اوّل است. اگر این دایره از نقطهٔ $A(۶, ۳)$ گذشته و بر خط به معادلهٔ $y = ۲x$ مماس شود، شعاع آن کدام است؟

۱) $\sqrt{۵}$
۲) $\sqrt{۶}$
۳) $۲\sqrt{۲}$
۴) $\sqrt{۱۰}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۲

پاسخ Homework

۱ گزینه ۴



OH بر خط L عمود است.

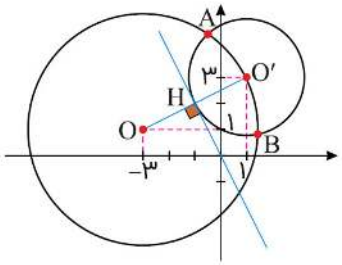
$$\frac{-\frac{a}{۲}-۳}{-\frac{۳}{۲}-۰}\times\frac{-۲}{۳}=-۱$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{a}{۲}+۳}{\frac{۳}{۲}}=\frac{۳}{۲}\Rightarrow \frac{a}{۲}+۳=\frac{۹}{۴}\xrightarrow{\times ۴}$$

$$۲a+۱۲=۹\Rightarrow a=-\frac{۳}{۲}=-۱/۵$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

۲ گزینه ۳



$$C(O,r) : O(-۳,۱)$$

$$OH = O'H = r' = \frac{|۱-۶|}{\sqrt{۱+۴}} = \frac{۵}{\sqrt{۵}} = \sqrt{۵} \Rightarrow r = ۲\sqrt{۵} \qquad (*)$$

$$x^۲ + y^۲ + ۶x - ۲y = a$$

$$r = \frac{\sqrt{۳۶+۴+۴a}}{۲} = \frac{\sqrt{۴۰+۴a}}{۲} = \frac{۲\sqrt{۱۰+a}}{۲} = \sqrt{۱۰+a} \qquad (**)$$

$$۲\sqrt{۵} = \sqrt{۱۰+a} \Rightarrow ۱۰+a = ۲۰ \Rightarrow a = ۱۰$$

$$O(-۳,۱) \xrightarrow[\text{محور تقارن}]{y=-۲x} O'(۱,۳) \ , \ r' = \sqrt{۵}$$

$$\Rightarrow C' : (x-۱)^۲ + (y-۳)^۲ = ۵$$

معادلهٔ دو دایرهٔ C و C' را برابر قرار می‌دهیم تا طول نقاط برخورد به دست آید:

$$x^۲ + y^۲ + ۶x - ۲y - ۱۰ = (x-۱)^۲ + (y-۳)^۲ - ۵$$

$$\Rightarrow ۸x + ۴y = ۱۵ \Rightarrow y = -۲x + \frac{۱۵}{۱۴}$$

این رابطه را در معادلهٔ دایرهٔ C' قرار می‌دهیم:

$$(x-۱)^۲ + (-۲x + \frac{۱۵}{۴} - ۳)^۲ - ۵ = ۰$$

$$\Rightarrow ۵x^۲ - ۵x - \frac{۵۵}{۱۶} = ۰ \Rightarrow x_A + x_B = -\frac{b}{a} = +\frac{۵}{۵} = ۱$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۲

۳ گزینه ۲

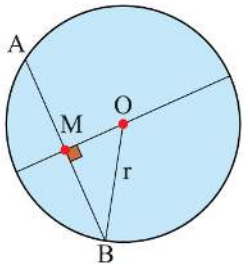
$$x^۲ + y^۲ - ۳x - ۵y + \frac{۱}{۲} = ۰$$

نقطه $(-۱, \frac{۵}{۲})$ را در معادله دایره جایگذاری می‌کنیم:

$$(-۱)^۲ + (\frac{۵}{۲})^۲ - ۳(-۱) - ۵(\frac{۵}{۲}) + \frac{۱}{۲} = ۱ + \frac{۲۵}{۴} + ۳ - \frac{۲۵}{۲} + \frac{۱}{۲} = \frac{-۷}{۴}$$

$$\text{طول کوتاه‌ترین وتر} = ۲\sqrt{\frac{۷}{۴}} = \sqrt{۷}$$

برای به دست آوردن طول کوتاه‌ترین وتر از روش دیگری نیز می‌توان استفاده کرد:



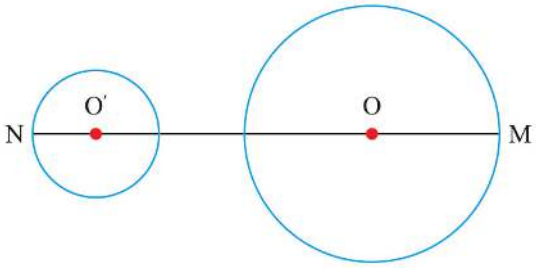
$$O(\frac{۳}{۲}, \frac{۵}{۲}), M(-۱, \frac{۵}{۲}) \Rightarrow OM = \frac{۵}{۲}$$

$$r = \frac{۱}{۲}\sqrt{۹ + ۲۵ - ۲} = \frac{۱}{۲}\sqrt{۳۲} \Rightarrow MB = \frac{\sqrt{۷}}{۲}$$

$$\Rightarrow AB = ۲ \times \frac{\sqrt{۷}}{۲} = \sqrt{۷}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۴ گزینه ۲



$$x^۲ + y^۲ - ۲x + ۲y - a = ۰ \Rightarrow O(۱, -۱)\ ,\ r = \frac{۱}{۲}\sqrt{۴ + ۴ + ۴a} = \sqrt{۲ + a}$$

$$x^۲ + y^۲ + ۴x - ۶y + ۶a = ۰$$

$$\Rightarrow O'(-۲, ۳)\ ,\ r' = \frac{۱}{۲}\sqrt{۱۶ + ۳۶ - ۲۴a} = \sqrt{۱۳ - ۶a}$$

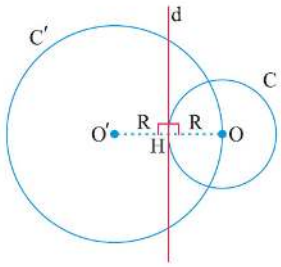
$$OO' = \sqrt{۴^۲ + ۳^۲} = ۵$$

$$MN = ۵ + \sqrt{۲ + a} + \sqrt{۱۳ - ۶a} = ۸ \Rightarrow a = ۲$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

۵ گزینه ۱

دایرهٔ کوچک را $C(O\,,\,R)$ و دایرهٔ بزرگ را $C'(O'\,,\,۲R)$ می‌نامیم. حال داریم:



$$C : x^۲ + y^۲ + ۶x - ۲y - r = ۰ \Rightarrow O = (-۳\,,\,۱)\,,\, R = \sqrt{۹ + ۱ + r} = \sqrt{۱۰ + r}$$

چون خط $d : x - y = ۰$ بر دایرهٔ C مماس است، فاصلهٔ مرکز دایره تا خط d، برابر شعاع دایره است و داریم:

$$R = |OH| = \frac{|-۳ - ۱|}{\sqrt{۱ + ۱}} = \frac{۴}{\sqrt{۲}} = ۲\sqrt{۲} \Rightarrow C : (x + ۳)^۲ + (y - ۱)^۲ = ۸$$

چون خط d (نیمساز ربع اول و سوم) عمودمنصف OO' است، O' بازتاب O نسبت به d (نیمساز ربع اول و سوم) می‌باشد، پس $O' = (۱\,,\,-۳)$ و معادلهٔ دایرهٔ C' به‌صورت $(x - ۱)^۲ + (y + ۳)^۲ = ۳۲$ است. حال معادله‌های دو دایره را از هم کم می‌کنیم تا معادلهٔ وتر مشترک آن‌ها به دست آید:

$$\left.\begin{array}{l} C : (x + ۳)^۲ + (y - ۱)^۲ = ۸ \\ C' : (x - ۱)^۲ + (y + ۳)^۲ = ۳۲ \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{کم می‌کنیم}} \text{وتر مشترک} : x - y = -۳$$

$$\Rightarrow \text{وتر مشترک} : y = x + ۳$$

در پایان، محل برخورد وتر مشترک و دایرهٔ C را می‌یابیم:

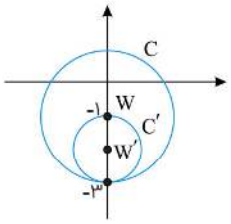
$$\begin{cases} y = x + ۳ \\ (x + ۳)^۲ + (y - ۱)^۲ = ۸ \end{cases} \Rightarrow (x + ۳)^۲ + (x + ۲)^۲ = ۸$$

$$\Rightarrow ۲x^۲ + ۱۰x + ۵ = ۰ \Rightarrow \text{حاصل‌ضرب ریشه‌ها} = \frac{۵}{۲}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۲

۶ گزینه ۴

$$C : x^۲ + y^۲ + ۲y - ۳ = ۰ \Rightarrow W(۰, -۱) \ , \ r = ۲$$



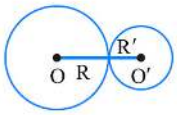
درواقع چون دایرهٔ C از $(۰, -۳)$ عبور می‌کند، اگر دایرهٔ جدید بخواهد با دایرهٔ قبلی مماس داخل باشد و از این نقطه نیز بگذرد تنها حالت آن است که نقطهٔ تماس همین نقطه باشد. درنتیجه $W'(۰, -۲)$ و $r' = ۱$ خواهد بود.

$$C' : (x - ۰)^۲ + (y + ۲)^۲ = ۱ \Rightarrow x^۲ + y^۲ + ۴y + ۳ = ۰$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

۷ گزینه ۴

دو دایره با مرکزهای O و O' و شعاع‌های R و R' مماس بیرون‌اند اگر و تنها اگر داشته باشیم $|OO'| = R + R'$. در آغاز با دسته‌بندی معادله‌ها، مرکز و شعاع هر دایره را می‌یابیم:



$$x^۲ + y^۲ + ۴x = ۰ \Rightarrow (x + ۲)^۲ - ۴ + y^۲ = ۰ \Rightarrow (x + ۲)^۲ + y^۲ = ۴ \Rightarrow \begin{cases} O = (-۲, ۰) \\ R = \sqrt{۴} = ۲ \end{cases}$$

$$x^۲ + y^۲ - ۲x + ۸y + a = ۰ \Rightarrow (x - ۱)^۲ - ۱ + (y + ۴)^۲ - ۱۶ + a = ۰$$

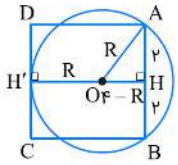
$$\Rightarrow (x - ۱)^۲ + (y + ۴)^۲ = ۱۷ - a \Rightarrow \begin{cases} O' = (۱, -۴) \\ R' = \sqrt{۱۷ - a} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |OO'| = \sqrt{(-۲ - ۱)^۲ + (۰ + ۴)^۲} = ۵ \\ R + R' = ۲ + \sqrt{۱۷ - a} \end{cases} \xrightarrow{|OO'| = R + R'} ۵ = ۲ + \sqrt{۱۷ - a}$$

$$\Rightarrow \sqrt{۱۷ - a} = ۳ \Rightarrow ۱۷ - a = ۹ \Rightarrow a = ۸$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۰

۸ گزینه ۲



باتوجه‌به شکل، $OH = ۴ - R$ است. داریم:

$$\overset{\Delta}{OAH} : OA^۲ = AH^۲ + OH^۲ \Rightarrow R^۲ = ۲^۲ + (۴ - R)^۲ \Rightarrow R^۲ = ۴ + ۱۶ - ۸R + R^۲$$
$$\Rightarrow ۸R = ۲۰ \Rightarrow R = ۲/۵$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۵

۹ گزینه ۲

شعاع و مرکز دایره به معادلهٔ $x^۲ + y^۲ - ۴x + ۲y - ۴ = ۰$ عبارت‌اند از:

$$x^۲ + y^۲ - ۴x + ۲y - ۴ = ۰ \Rightarrow (x - ۲)^۲ + (y + ۱)^۲ = ۹$$

مرکز : $O'(۲, -۱)$ ، شعاع : $R' = ۳$

نقطه‌ای که تمامی خطوط قائم بر دایرهٔ C از آن عبور می‌کنند، مرکز این دایره است، پس $O(۸, ۷)$ مرکز دایرهٔ C است.

$$d = OO' = \sqrt{(۲ - ۸)^۲ + (-۱ - ۷)^۲} = ۱۰$$

چون دو دایره مماس خارج هستند، پس داریم:

$$d = R + R' \Rightarrow ۱۰ = R + ۳ \Rightarrow R = ۷$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۶

۱۰ گزینه ۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۰

گام اول

در یک دایره به معادلهٔ $x^۲+y^۲+ax+by+c=۰$، مختصات مرکز دایره $(-\frac{a}{۲}, -\frac{b}{۲})$ می‌باشد و شعاع این دایره برابر است با:

$$R=\sqrt{(\frac{a}{۲})^۲+(\frac{b}{۲})^۲-c}$$

گام دوم

برای مشخص‌کردن وضعیت دو دایره نسبت به هم، فاصلهٔ میان مرکز دو دایره (طول خط‌المرکزین) را با دو مقدار $R_۱+R_۲$ و $|R_۱-R_۲|$ مقایسه می‌کنیم، بنابراین لازم است ابتدا مختصات مرکز دو دایره و شعاع آن‌ها را به دست آوریم.

$$x^۲+y^۲-۴x+۴y=۱ \Rightarrow x^۲+y^۲-۴x+۴y-۱=۰$$

مرکز دایره : $O_۱(-\frac{-۴}{۲}, -\frac{۴}{۲}) \Rightarrow O_۱(۲, -۲)$

شعاع دایره : $R_۱=\sqrt{(-\frac{۴}{۲})^۲+(\frac{۴}{۲})^۲-(-۱)}=\sqrt{۴+۴+۱}=۳$

$$x^۲+y^۲-۴x+۸y+۱۹=۰$$

مرکز دایره : $O_۲(-\frac{-۴}{۲}, -\frac{۸}{۲}) \Rightarrow O_۲(۲, -۴)$

شعاع دایره : $R_۲=\sqrt{(-\frac{۴}{۲})^۲+(\frac{۸}{۲})^۲-۱۹}=\sqrt{۴+۱۶-۱۹}=۱$

طول خط‌المرکزین دو دایره برابر است با:

$$O_۱O_۲=\sqrt{(۲-۲)^۲+(-۴+۲)^۲}=\sqrt{۰+(-۲)^۲}=\sqrt{۴}=۲$$

همچنین داریم:

$$|R_۱-R_۲|=|۳-۱|=۲$$

بنابراین $O_۱O_۲=|R_۱-R_۲|$ است، پس دو دایره مماس داخل هستند.

۱۱ گزینه ۱

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۳

گام اول

در یک دایره به معادلهٔ $x^۲ + y^۲ + ax + by + c = ۰$، نقطهٔ $(-\frac{a}{۲}, -\frac{b}{۲})$ مرکز دایره می‌باشد و شعاع این دایره برابر است با:

$$R = \sqrt{(\frac{a}{۲})^۲ + (\frac{b}{۲})^۲ - c}$$

گام دوم

برای مشخص‌کردن وضعیت دو دایره نسبت به هم، مختصات مرکز دو دایره و شعاع آن‌ها را به دست می‌آوریم، سپس فاصلهٔ میان مرکز دو دایره (طول خط‌المرکزین) را با دو مقدار $|R_۱ - R_۲|$ و $R_۱ + R_۲$ مقایسه می‌کنیم.

$$x^۲ + y^۲ - ۲x + ۴y = ۱۳ \Rightarrow x^۲ + y^۲ - ۲x + ۴y - ۱۳ = ۰$$

$$\text{مرکز دایره} : O_۱(-\frac{-۲}{۲}, -\frac{۴}{۲}) \Rightarrow O_۱(۱, -۲)$$

$$\text{شعاع دایره} : R_۱ = \sqrt{(-\frac{۲}{۲})^۲ + (\frac{۴}{۲})^۲ + ۱۳} = \sqrt{۱ + ۴ + ۱۳} = \sqrt{۱۸} = ۳\sqrt{۲}$$

$$x^۲ + y^۲ + ۲x = ۱ \Rightarrow x^۲ + y^۲ + ۲x - ۱ = ۰$$

$$\text{مرکز دایره} : O_۲(-\frac{۲}{۲}, -\frac{۰}{۲}) \Rightarrow O_۲(-۱, ۰)$$

$$\text{شعاع دایره} : R_۲ = \sqrt{(\frac{۲}{۲})^۲ + ۰ + ۱} = \sqrt{۱ + ۱} = \sqrt{۲}$$

بنابراین داریم:

$$O_۱O_۲ = \sqrt{(-۱ - ۱)^۲ + (۰ + ۲)^۲} = \sqrt{۴ + ۴} = \sqrt{۸} = ۲\sqrt{۲}$$
$$R_۱ + R_۲ = ۳\sqrt{۲} + \sqrt{۲} = ۴\sqrt{۲}$$
$$|R_۱ - R_۲| = \left|۳\sqrt{۲} - \sqrt{۲}\right| = ۲\sqrt{۲}$$

بنابراین $O_۱O_۲ = |R_۱ - R_۲|$ است و دو دایره نسبت به هم مماس داخل هستند.

۱۲ گزینه ۲

دایرهٔ اول:

$$x^۲ + y^۲ + ۲y - ۴x = ۰ \Rightarrow (x-۲)^۲ + (y+۱)^۲ = ۵$$

$$O_۱(۲,-۱) \quad , \quad r_۱ = \sqrt{۵}$$

دایرهٔ دوم:

$$x^۲ + y^۲ - ۲y = ۲ \Rightarrow x^۲ + (y-۱)^۲ = ۳$$

$$O_۲(۰,۱) \quad , \quad r_۲ = \sqrt{۳}$$

$$O_۱O_۲ = \sqrt{۲^۲ + ۲^۲} = ۲\sqrt{۲} \Rightarrow O_۱O_۲ \simeq ۲/۸$$

$$r_۱ + r_۲ \simeq ۳/۹$$

$$|r_۱ - r_۲| = ۰/۵$$

$$\Rightarrow ۰/۵ < O_۱O_۲ < ۳/۹$$

پس دو دایره متقاطع‌اند.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

۱۳ گزینه ۱

$$x^۲ + y^۲ + ax + by + c = ۰$$

$$\xrightarrow{(۰,۰) \text{ را صدق می‌دهیم}} c = ۰$$

$$\xrightarrow{(۲,۱) \text{ را صدق می‌دهیم}} ۴ + ۱ + ۲a + b = ۰$$

$$\xrightarrow{(۱,-۲) \text{ را صدق می‌دهیم}} ۱ + ۴ + a - ۲b = ۰$$

اکنون با معلوم بودن مقادیر a، b و c شعاع دایره برابر است با:

$$\xrightarrow{\times ۲} \begin{matrix} ۴a + ۲b = -۱۰ \\ a - ۲b = -۵ \end{matrix} \Rightarrow ۵a = -۱۵ \Rightarrow a = -۳, b = ۱$$

$$R = \frac{۱}{۲}\sqrt{a^۲ + b^۲ - ۴c} = \frac{۱}{۲}\sqrt{(-۳)^۲ + (۱)^۲ - ۴(۰)} = \frac{۱}{۲}\sqrt{۱۰}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۳

۱۴ گزینه ۳

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

گام اول

الف) دایره محور xها را در دو نقطه به طول $x = ۱$ و $x = ۳$ قطع می‌کند؛ بنابراین نقاط $A(۱, ۰)$ و $B(۳, ۰)$ روی دایرهٔ موردنظر قرار دارند.

ب) مرکز دایره روی نیمساز ربع اول (خط $y = x$) است؛ بنابراین مرکز دایره را به‌صورت $O(\alpha, \alpha)$ در نظر می‌گیریم.

گام دوم

چون نقاط A و B روی دایره قرار دارند پس فاصلهٔ آن‌ها تا مرکز دایره باهم برابر و برابر شعاع دایره است.

$$OA = OB = R \Rightarrow \sqrt{(\alpha - ۱)^۲ + \alpha^۲} = \sqrt{(\alpha - ۳)^۲ + \alpha^۲}$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} (\alpha - ۱)^۲ + \alpha^۲ = (\alpha - ۳)^۲ + \alpha^۲$$

$$\Rightarrow \alpha^۲ - ۲\alpha + ۱ = \alpha^۲ - ۶\alpha + ۹ \Rightarrow ۴\alpha = ۸ \Rightarrow \alpha = ۲$$

بنابراین مرکز دایره نقطهٔ $O(۲, ۲)$ می‌شود و شعاع دایره برابر است با:

$$R = OA = \sqrt{(۲ - ۱)^۲ + ۲^۲} = \sqrt{۱ + ۴} = \sqrt{۵}$$

۱۵ گزینه ۳

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۲

گام اول

معادلهٔ گستردهٔ یک دایره به‌صورت $x^۲ + y^۲ + ax + by + c = ۰$ است. در این صورت شعاع دایره برابر است با:

$$R = \sqrt{(\frac{a}{۲})^۲ + (\frac{b}{۲})^۲ - c}$$

گام دوم

سه نقطهٔ A، B و C روی دایره قرار دارد، پس مختصات این نقاط در معادلهٔ دایره صدق می‌کند.

$$x^۲ + y^۲ + ax + by + c = ۰$$

$$\xrightarrow{A(-۱,۰)} (-۱)^۲ + ۰^۲ + a(-۱) + b(۰) + c = ۰ \Rightarrow ۱ - a + c = ۰ \Rightarrow a - c = ۱ \quad (I)$$

$$\xrightarrow{B(۳,۰)} ۳^۲ + ۰^۲ + a(۳) + b(۰) + c = ۰ \Rightarrow ۹ + ۳a + c = ۰ \Rightarrow ۳a + c = -۹ \quad (II)$$

$$\xrightarrow{C(۰,-۳)} ۰^۲ + (-۳)^۲ + a(۰) + b(-۳) + c = ۰ \Rightarrow ۹ - ۳b + c = ۰ \Rightarrow c - ۳b = -۹ \quad (III)$$

بنابراین سه معادله و سه مجهول داریم. با کمی دقت متوجه می‌شویم که دو معادلهٔ I و II فقط شامل دو مجهول a و c است، پس با حل یک دستگاه دو معادله و دو مجهول مقدار a و c را حساب می‌کنیم.

$$\begin{cases} a - c = ۱ \\ ۳a + c = -۹ \end{cases} \xrightarrow{+} ۴a = -۸ \Rightarrow a = -۲$$

$$a - c = ۱ \xrightarrow{a=-۲} c = -۲ - ۱ = -۳$$

با جایگذاری $c = -۳$ در معادلهٔ (III) مقدار b را هم حساب می‌کنیم.

$$c - ۳b = -۹ \xrightarrow{c=-۳} -۳ - ۳b = -۹ \Rightarrow ۳b = ۶ \Rightarrow b = ۲$$

اکنون باتوجه‌به گام اول، شعاع دایره را به دست می‌آوریم.

$$R = \sqrt{(\frac{-۲}{۲})^۲ + (\frac{۲}{۲})^۲ + ۳} = \sqrt{۱ + ۱ + ۳} = \sqrt{۵}$$

۱۶ گزینه ۱

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۵

گام اول

الف) معادلهٔ استاندارد یک دایره به مرکز (α, β) و شعاع R به‌صورت $(x-\alpha)^۲ + (y-\beta)^۲ = R^۲$ است.

ب) معادلهٔ گستردهٔ یک دایره به‌صورت $x^۲ + y^۲ + ax + by + c = ۰$ است.

گام دوم

باتوجه‌به معادلهٔ گستردهٔ نوشته‌شده در گام اول، ضریب $x^۲$ و $y^۲$ باید باهم برابر و برابر با یک باشد، بنابراین مقادیر a را به‌گونه‌ای می‌یابیم که ضریب $x^۲$ و $y^۲$ باهم برابر شوند؛ درنتیجه:

$$a^۲ - ۷ = ۲ \Rightarrow a^۲ = ۹ \Rightarrow a = \pm ۳$$

ازطرفی معادلهٔ این دایره را باید بتوان به‌صورت استاندارد نوشت، بنابراین دو مقدار $a = +۳$ و $a = -۳$ را در معادلهٔ دایره جایگذاری می‌کنیم تا مقدار صحیح را تشخیص دهیم.

$$a = ۳ : \ ۲x^۲ + (۹-۷)y^۲ + ۴y + ۳ = ۰ \Rightarrow ۲x^۲ + ۲y^۲ + ۴y + ۳ = ۰$$
$$\Rightarrow ۲(x-۰)^۲ + ۲(y^۲ + ۲y + ۱) + ۱ = ۰ \Rightarrow ۲(x-۰)^۲ + ۲(y+۱)^۲ + ۱ = ۰$$
$$\xrightarrow{\div ۲} (x-۰)^۲ + (y+۱)^۲ + \frac{۱}{۲} = ۰ \Rightarrow (x-۰)^۲ + (y+۱)^۲ = -\frac{۱}{۲} \quad \text{غ‌ق‌ق}$$

رابطهٔ به‌دست‌آمده همواره نادرست است؛ زیرا عبارت سمت چپ تساوی همواره نامنفی می‌باشد ولی مساوی با یک عدد منفی شده است.

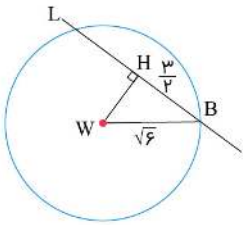
$$a = -۳ : \ ۲x^۲ + (۹-۷)y^۲ + ۴y - ۳ = ۰ \Rightarrow ۲x^۲ + ۲y^۲ + ۴y - ۳ = ۰$$
$$\Rightarrow ۲(x-۰)^۲ + ۲(y^۲ + ۲y + ۱) - ۵ = ۰ \Rightarrow ۲(x-۰)^۲ + ۲(y+۱)^۲ - ۵ = ۰$$
$$\xrightarrow{\div ۲} (x-۰)^۲ + (y+۱)^۲ - \frac{۵}{۲} = ۰ \Rightarrow (x-۰)^۲ + (y+۱)^۲ = \frac{۵}{۲}$$

به ازای $a = -۳$، معادلهٔ دایره‌ای به مرکز $(۰, -۱)$ و شعاع $R = \sqrt{\frac{۵}{۲}}$ داریم.

۱۷ گزینه ۴

مرکز و شعاع دایره را حساب می‌کنیم:

$$W(۲,-۱) \quad , \quad r = \sqrt{۴+۱+۱} = \sqrt{۶}$$

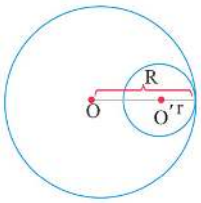


$$|WH| = \frac{|-۲+۲-a|}{\sqrt{۱+۴}} = \frac{|a|}{\sqrt{۵}}$$

$$\overset{\Delta}{WHB} : ۶ = \frac{۹}{۴} + \frac{a^۲}{۵} \Rightarrow \frac{a^۲}{۵} = \frac{۱۵}{۴} \Rightarrow a^۲ = \frac{۷۵}{۴} \Rightarrow \begin{cases} a_۱ = \frac{۵\sqrt{۳}}{۲} \\ a_۲ = -\frac{۵\sqrt{۳}}{۲} \end{cases} \Rightarrow |a_۱ - a_۲| = ۵\sqrt{۳}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۱۸ گزینه ۱



شعاع دایرهٔ بزرگ را R و شعاع دایرهٔ کوچک را r فرض می‌کنیم. چون دایره‌ها مماس داخل‌اند، داریم:

$$\text{طول خط‌المرکزین} = R - r \xrightarrow{\text{فرض سوال}} R - r = ۳/۵ = \frac{۷}{۲} \quad (*)$$

$$S_{\text{ناحیهٔ بین}} = ۲۱\pi \Rightarrow S_{\text{دایره بزرگ}} - S_{\text{دایرهٔ کوچک}} = ۲۱\pi$$

$$\Rightarrow \pi R^۲ - \pi r^۲ = ۲۱\pi \Rightarrow R^۲ - r^۲ = ۲۱ \Rightarrow (R-r)(R+r) = ۲۱$$

$$\xrightarrow{(*)} \frac{۷}{۲}(R+r) = ۲۱ \Rightarrow R + r = ۶ \xrightarrow{(*)} \begin{cases} R + r = ۶ \\ R - r = ۳/۵ \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{کم می‌کنیم}} ۲r = ۲/۵ \Rightarrow r = ۱/۲۵$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۱

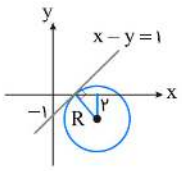
۱۹ گزینه ۱

فاصلهٔ مرکز دایره از خط مماس بر دایره برابر با شعاع دایره است. فاصلهٔ یک نقطه با مختصات $(x_۰, y_۰)$ از خط به معادلهٔ $ax + by + c = ۰$ برابر است با:

$$d = \frac{|ax_۰ + by_۰ + c|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}}$$

بنابراین شعاع دایره برابر است با:

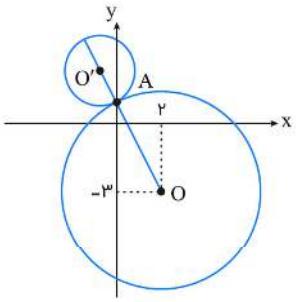
$$R = \frac{|۲ + ۱ - ۱|}{\sqrt{۱^۲ + (-۱)^۲}} = \sqrt{۲}$$



معادلهٔ دایره : $(x-۲)^۲ + (y+۱)^۲ = ۲ \xrightarrow{y=۰} (x-۲)^۲ = ۱ \Rightarrow \begin{cases} x - ۲ = ۱ \Rightarrow x = ۳ \\ x - ۲ = -۱ \Rightarrow x = ۱ \end{cases}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

۲۰ گزینه ۱



مطابق شکل، مراکز دو دایرهٔ مماس خارج و محل تماس دو دایره، روی یک خط راست قرار دارند و مرکز دایرهٔ C' در ناحیهٔ دوم دستگاه مختصات است. می‌دانیم قائم‌های رسم‌شده بر یک دایره از مرکز آن دایره عبور می‌کنند، پس با فرض $O = (۲, -۳)$ و $A = (۰, ۱)$، داریم:

$$m_{OA} = \frac{۱ - (-۳)}{۰ - ۲} = -۲$$

معادلهٔ خط OA : $y - ۱ = -۲(x - ۰) \Rightarrow y = -۲x + ۱$

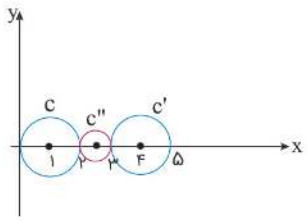
در بین گزینه‌ها، تنها نقطهٔ $(-۱, ۳)$ در ناحیهٔ دوم دستگاه مختصات است و در معادلهٔ خط OA صدق می‌کند. با فرض $O' = (-۱, ۳)$ داریم:

$$O'A = \sqrt{(۰ + ۱)^۲ + (۱ - ۳)^۲} = \sqrt{۵}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۴

۲۱ گزینه ۲

مرکز و شعاع دو دایره را یافته و آن‌ها را رسم می‌کنیم.



$$C : x^۲ + y^۲ - ۲x = ۰ \Rightarrow O = (۱, ۰)\,, R = \sqrt{\frac{۴ + ۰ + ۰}{۴}} = ۱$$

$$C' : x^۲ + y^۲ - ۸x + ۱۵ = ۰ \Rightarrow O' = (۴, ۰)\,,\ R' = \sqrt{\frac{۶۴ + ۰ - ۴(۱۵)}{۴}} = ۱$$

مطابق شکل، دایرهٔ موردنظر، دایرهٔ C'' به مرکز $O''(\frac{۵}{۲}, ۰)$ و شعاع $R'' = \frac{۱}{۲}$ است که معادلهٔ آن را می‌یابیم:

$$C'' : (x - \frac{۵}{۲})^۲ + (y - ۰)^۲ = (\frac{۱}{۲})^۲$$

$$\Rightarrow C'' : x^۲ - ۵x + \frac{۲۵}{۴} + y^۲ = \frac{۱}{۴} \Rightarrow C'' : x^۲ + y^۲ - ۵x + ۶ = ۰$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۱

۲۲ گزینه ۱

ابتدا با دادن دو مقدار دلخواه $m = ۲$ و $m = -۱$ به معادلهٔ قطرهای دایره، معادلهٔ دو تا از قطرها را یافته و سپس آن‌ها را قطع می‌دهیم تا مرکز دایره به دست آید:

$$\left.\begin{array}{l} m = ۲ \Rightarrow ۳y = ۶ \Rightarrow y = ۲ \\ m = -۱ \Rightarrow -۳x = ۶ \Rightarrow x = -۲ \end{array}\right\} \Rightarrow O(-۲\,,\ ۲)$$

حال چون نقطهٔ $A(-۱\,,\ ۱)$ روی دایره است، فاصلهٔ آن تا مرکز دایره، برابر با شعاع دایره است. بنابراین:

$$R = |OA| = \sqrt{(-۱ + ۲)^۲ + (۱ - ۲)^۲} = \sqrt{۲}$$

$$\text{محیط دایره} = ۲\pi R = ۲\pi(\sqrt{۲}) = ۲\sqrt{۲}\pi$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۱

۲۳ گزینه ۳

چون دایره بر دو خط موازی $y = ۲x$ و $y = ۲x + ۱۰$ مماس است؛ پس مرکز آن روی خط $y = ۲x + ۵$ (وسط این دو خط) قرار دارد و شعاع دایره برابر نصف فاصلهٔ این دو خط است.

$$\text{فاصله دو خط} = \frac{|۱۰ - ۰|}{\sqrt{۲^۲ + (-۱)^۲}} = \frac{۱۰}{\sqrt{۵}} = ۲\sqrt{۵} \Rightarrow R = \sqrt{۵}$$

چون دایره از مبدأ مختصات می‌گذرد، پس فاصلهٔ مبدأ از مرکز دایره برابر R است.

$$R = \sqrt{x^۲ + (۲x + ۵)^۲} \Rightarrow \sqrt{۵} = \sqrt{۵x^۲ + ۲۰x + ۲۵}$$
$$\Rightarrow ۵(x^۲ + ۴x + ۴) = ۰ \Rightarrow (x + ۲)^۲ = ۰ \Rightarrow x = -۲ \Rightarrow y = ۲(-۲) + ۵ = ۱$$
$$\text{مرکز دایره} = (-۲, ۱)$$

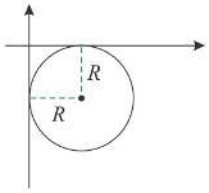
کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۵

۲۴ گزینه ۳

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۵

گام اول

الف) شکل دایره‌ای به شعاع R که بر هر دو محور مختصات مماس باشد و از نقطهٔ $(-۹, ۲)$ نیز عبور کند به‌صورت زیر است:



ب) معادلهٔ دایره‌ای به مرکز $(x_۰, y_۰)$ و به شعاع R برابر است با:

$$(x - x_۰)^۲ + (y - y_۰)^۲ = R^۲$$

گام دوم

با توجه به شکل رسم‌شده در قسمت (الف) از گام اول، مختصات مرکز این دایره برابر $(R, -R)$ است. طبق قسمت (ب) از گام اول، معادلهٔ این دایره برابر است با:

$$(x - R)^۲ + (y + R)^۲ = R^۲$$

چون هر دو دایره از نقطهٔ $(-۹, ۲)$ عبور می‌کنند، بنابراین مختصات این نقطه در معادلهٔ آن‌ها صدق می‌کند پس داریم:

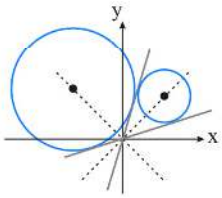
$$\xrightarrow{x=۲, y=-۹} (۲ - R)^۲ + (-۹ + R)^۲ = R^۲ \Rightarrow ۴ - ۴R + R^۲ + ۸۱ - ۱۸R + R^۲ = R^۲$$

$$\Rightarrow R^۲ - ۲۲R + ۸۵ = ۰ \Rightarrow (R - ۱۷)(R - ۵) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} R = ۱۷ \\ R = ۵ \end{cases}$$

بنابراین شعاع دایرهٔ بزرگ‌تر برابر ۱۷ است.

۲۵ گزینه ۳

مرکز دایره بر روی نیمساز زاویهٔ بین دو خط قرار دارد. باتوجه‌به شکل، مرکز دایرهٔ کوچک‌تر روی $y = x$ و مرکز دایره بزرگ‌تر روی $y = -x$ قرار دارد.



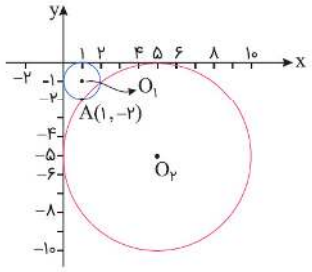
$$M(۲\sqrt{۵}, ۲\sqrt{۵})$$

شعاع دایره برابر با فاصلهٔ مرکز آن از خط $۲y - x = ۰$ است.

$$R = \frac{|۴\sqrt{۵} - ۲\sqrt{۵}|}{\sqrt{۲^۲ + ۱^۲}} = ۲$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۲

۲۶ گزینه ۲



شکل به زیبایی به ما نشان می‌دهد که ۲تا دایره داریم که بر محورهای مختصات مماس هستند و از نقطهٔ $A(۱,-۲)$ می‌گذرند. به‌علاوه مرکز دایره‌ها به‌صورت $O(r,-r)$ است؛ چراکه وقتی دایره‌ای بر هر دو محور مختصات مماس است، فاصله مرکز آن تا محورها برابر با شعاع می‌شود؛ پس فهمیدیم این دایره‌ها به مرکز $O(r,-r)$ و شعاع r هستند. معادلهٔ آن‌ها به این صورت است:

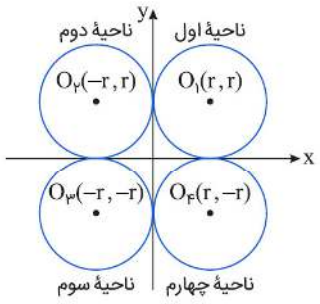
$$(x-r)^۲+(y+r)^۲=r^۲ \xrightarrow{(۱,-۲)} (۱-r)^۲+(-۲+r)^۲=r^۲$$

$$۱-۲r+r^۲+۴-۴r+r^۲-r^۲ \Rightarrow r^۲-۶r+۵-۰$$

$$\Rightarrow (r-۱)(r-۵)=۰ \Rightarrow \begin{cases} r=۱ \\ r=۵ \end{cases}$$

همان‌طوری که انتظار داشتیم، وقتی به روش جبری هم سؤال را حل کردیم، دو مقدار برای r به دست آوردیم.

نکته: اگر دایره‌ای بر هر دو محور مختصات در ناحیه‌های اول تا چهارم مماس باشد، مختصات مرکز آن به‌صورت زیر است:



کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۷

۲۷ گزینه ۴

$$\sqrt{(x-۳)^۲+(y-۶)^۲}=۲\sqrt{x^۲+y^۲}$$
$$\Rightarrow x^۲-۶x+۹+y^۲-۱۲y+۳۶=۴x^۲+۴y^۲$$
$$\Rightarrow ۳x^۲+۳y^۲+۶x+۱۲y-۴۵=۰$$
$$\xrightarrow{\div ۳} x^۲+y^۲+۲x+۴y-۱۵=۰$$
$$\Rightarrow (x+۱)^۲+(y+۲)^۲=۲۰\Rightarrow O(-۱,-۲)$$

معادلهٔ فوق، معادلهٔ یک دایره است که بزرگ‌ترین وتر همان قطر است:

$$r=\sqrt{۲۰}=۲\sqrt{۵}\Rightarrow ۲r=۴\sqrt{۵}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۷

۲۸ گزینه ۲

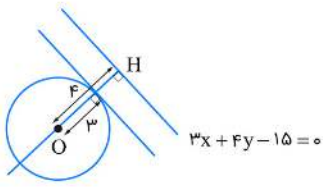
در آغاز معادلهٔ دایره را به‌صورت استاندارد می‌نویسیم، برای این منظور باید بنویسیم:

$$x^۲+y^۲-۲x+۴y=۴\Rightarrow (x^۲-۲x+۱-۱)+(y^۲+۴y+۴-۴)=۴$$
$$\xrightarrow{\text{دسته‌بندی جمله‌ها}} (x-۱)^۲+(y+۲)^۲=۱+۴+۴=۹$$
$$\Rightarrow R=\sqrt{۹}=۳,\quad O=(۱,-۲)$$

فاصلهٔ هر نقطه مانند $(x_۰,y_۰)$ از خط $ax+by+c=۰$ که $a^۲+b^۲\neq ۰$، برابر است با $d=\frac{|ax_۰+by_۰+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$، پس فاصلهٔ مرکز دایره $O=(۱,-۲)$ تا خط $۳x+۴y-۱۵=۰$ برابر است با:

$$d=\frac{|۳(۱)+۴(-۲)-۱۵|}{\sqrt{۳^۲+۴^۲}}=\frac{۲۰}{۵}=۴$$

فاصلهٔ یک نقطه تا یک خط برابر با اندازهٔ عمودی است که از آن نقطه بر آن خط رسم می‌شود و هر خط گذرنده از مرکز یک دایره، قطری از آن است، پس فاصلهٔ مرکز تا خط موردنظر، برابر با طول پاره‌خط عمودی از قطر است که بین مرکز و آن خط محصور است. ازآنجاکه هر قطر دایره، در نقطهٔ تماس بر آن عمود است، پس کوتاه‌ترین فاصلهٔ نقاط دایره تا خط موردنظر طبق شکل زیر، برابر می‌شود با $d_{min}=۴-۳=۱$.



کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۰

۲۹ گزینه ۱

معادلهٔ گستردهٔ دو دایره را از هم کم می‌کنیم تا معادلهٔ وتر مشترک به دست آید:

$$\text{وتر مشترک} : (x^۲+y^۲+۲x-۳)-(x^۲+y^۲+۲y-۳)=۰$$
$$\Rightarrow \text{وتر مشترک} : ۲x-۲y=۰ \Rightarrow \text{وتر مشترک} : x=y$$

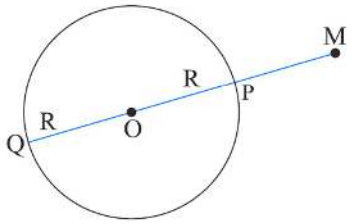
معادلهٔ درجه اولی که از کم کردن معادلهٔ دو دایره به دست می‌آید، حتما معادلهٔ وتر مشترک است، چون هم یک معادلهٔ درجه اول است و هم (x,y) این خط در هر دو دایره صدق می‌کند.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

۳۰ گزینه ۴

نکته: نقطهٔ M و دایرهٔ $C(O,R)$ مفروض‌اند. در این صورت:

$$\text{کمترین فاصلهٔ } M \text{ از دایره} = MP = |OM-R|$$
$$\text{بیشترین فاصلهٔ } M \text{ از دایره} = MQ = OM+R$$



ابتدا محل برخورد قطرها را می‌یابیم تا مرکز دایره و فاصلهٔ M از مرکز، مشخص شود:

$$\begin{cases} x+y=۱ \\ x-y=۳ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=۲ \\ y=-۱ \end{cases} \Rightarrow O=(۲,-۱) \xrightarrow{M=(۴,-۲)} |OM|=\sqrt{۴+۱}=\sqrt{۵}$$

حال فاصلهٔ مرکز دایره از خط $۴x+۳y+۵=۰$ را می‌یابیم تا شعاع دایره، مشخص شود:

$$R=|OH|=\frac{|۴(۲)+۳(-۱)+۵|}{\sqrt{۴^۲+۳^۲}}=\frac{۱۰}{۵}=۲$$

درنهایت طبق نکتهٔ فوق داریم:

$$\text{کمترین فاصلهٔ } M \text{ از دایره} = |OM-R|=\sqrt{۵}-۲$$

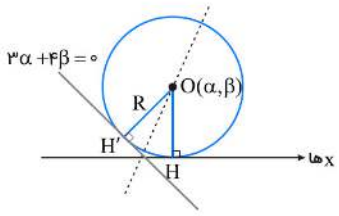
کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۰

۳۱ گزینه ۱

مرکز دایره را نقطهٔ $O(\alpha,\beta)$ درنظر می‌گیریم. باید فاصلهٔ O از محور xها با فاصلهٔ آن از خط $۳x+۴y=۰$، برابر باشد:

$$OH = OH' \Rightarrow |\beta| = \frac{|۳\alpha+۴\beta|}{\sqrt{۹+۱۶}} = \frac{|۳a+۴\beta|}{۵} \Rightarrow \begin{cases} ۳\alpha+۴\beta = ۵\beta \\ ۳\alpha+۴\beta = -۵\beta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۳\alpha = \beta \\ ۳\alpha = -۹\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{مرکز}: O(\alpha, ۳\alpha) \\ \text{مرکز}: O(\alpha, -\frac{۱}{۳}\alpha) \end{cases}$$



مرکز دایره در ناحیهٔ اول است، پس فقط $O(\alpha, ۳\alpha)$ قابل‌قبول است؛بنابراین مطابق شکل، داریم:

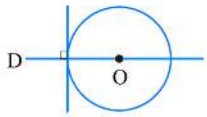
$$R = OH = ۳ \Rightarrow \beta = ۳\alpha = ۳ \Rightarrow \alpha = ۱$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۴

۳۲ گزینه ۱

خط به معادلهٔ $۳x+۲y=a$ از مرکز دایره می‌گذرد، پس قطر دایره است.

باتوجه‌به آنکه قطر $۳x+۲y=a$ بر خط مماس بر دایره عمود است، پس شکل زیر را داریم:



مختصات مرکز دایره در معادلهٔ خط صدق می‌کند:

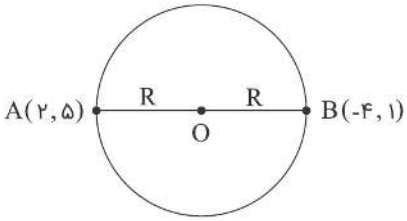
$$x^۲+y^۲-۲x+y=۱ \xrightarrow{\text{مرکز}} O(۱,-\frac{۱}{۲})$$

$$۳(۱)+۲(-\frac{۱}{۲}) = a \Rightarrow a = ۲$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۶

۳۳ گزینه ۱

کوچک‌ترین دایرهٔ گذرنده از A و B، دایره‌ای است که AB یک قطر آن باشد.



حال داریم:

$$O \Rightarrow O = \frac{A+B}{۲} = (-۱, ۳) \text{ وسط AB است.}$$

$$R = |OA| = \sqrt{(۲+۱)^۲ + (۵-۳)^۲} = \sqrt{۹+۴} = \sqrt{۱۳}$$

$$\Rightarrow \text{دایره} : (x+۱)^۲ + (y-۳)^۲ = ۱۳$$

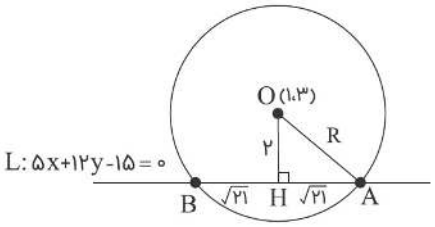
$$\xrightarrow{\text{برخورد با محور x ها}} (x+۱)^۲ + (۰-۳)^۲ = ۱۳$$

$$\Rightarrow (x+۱)^۲ = ۴ \Rightarrow x+۱ = \pm ۲ \Rightarrow x = ۱ ,\ x = -۳$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۹

۳۴ گزینه ۴

از مرکز دایره بر خط $L: 5x+12y-15=0$ عمود می‌کنیم، پس $AH=HB=\sqrt{21}$ و داریم:



$$|OH|=\frac{|5(1)+12(3)-15|}{\sqrt{5^2+12^2}}=\frac{26}{13}=2$$

$\overset{\Delta}{OHA}$: فیثاغورس $\Rightarrow R^2=2^2+(\sqrt{21})^2=25$

$\Rightarrow$ دایره : $(x-1)^2+(y-3)^2=25$

حال برای یافتن محل برخورد دایره و محور xها، مقدار y را در معادلهٔ دایره برابر با صفر قرار می‌دهیم:

$(x-1)^2+(0-3)^2=25\Rightarrow(x-1)^2+9=25\Rightarrow(x-1)^2=16$

$\Rightarrow x-1=\pm4\Rightarrow x=-3,\ x=5$

$\Rightarrow$ نقاط برخورد با محور xها : $(-3,0),(5,0)$

$\Rightarrow$ طول پاره‌خط حاصل $=5-(-3)=8$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

۳۵ گزینه ۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۵

گام اول

الف) هرگاه خطی بر یک دایره مماس باشد، فاصلهٔ مرکز دایره از این خط برابر با شعاع دایره خواهد بود.

ب) اگر معادلهٔ گستردهٔ دایره‌ای را به‌صورت $x^۲ + y^۲ + ax + by + c = ۰$ در نظر بگیریم آنگاه مختصات مرکز این دایره برابر با $(-\frac{a}{۲}, -\frac{b}{۲})$ و شعاع آن برابر با $R = \sqrt{(\frac{a}{۲})^۲ + (\frac{b}{۲})^۲ - c}$ است.

ج) هرگاه دو منحنی بر هم مماس باشند، معادلهٔ تلاقی آن‌ها ریشهٔ مضاعف خواهد داشت.

گام دوم

روش اول:

باتوجه‌به گام اول، مرکز این دایره نقطهٔ $(-۲, ۱)$ و شعاع آن برابر است با:

$$R = \sqrt{(\frac{-۲}{۲})^۲ + (\frac{۴}{۲})^۲ - a} = \sqrt{۱ + ۴ - a} = \sqrt{۵ - a}$$

ازطرفی فاصلهٔ نقطهٔ $(-۲, ۱)$ از خط $x + ۳y = ۰$ برابر است با:

$$R = \frac{|۱ + ۳(-۲)|}{\sqrt{۱^۲ + ۳^۲}} = \frac{|-۵|}{\sqrt{۱۰}} = \frac{۵}{\sqrt{۱۰}}$$

بنابراین داریم:

$$\sqrt{۵ - a} = \frac{۵}{\sqrt{۱۰}} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} ۵ - a = \frac{۲۵}{۱۰} \Rightarrow ۵۰ - ۱۰a = ۲۵$$
$$\Rightarrow ۱۰a = ۲۵ \Rightarrow a = \frac{۲۵}{۱۰} = \frac{۵}{۲}$$

روش دوم:

باتوجه‌به قسمت (ج) از گام اول، باید معادلهٔ تلاقی خط و دایره، ریشهٔ مضاعف داشته باشد. داریم:

$$x + ۳y = ۰ \Rightarrow x = -۳y \qquad (I)$$

با جایگذاری رابطهٔ I در معادلهٔ دایره، به یک معادلهٔ درجه دو برحسب y می‌رسیم که ریشهٔ مضاعف دارد.

$$x^۲ + y^۲ - ۲x + ۴y + a = ۰ \xrightarrow{I} (-۳y)^۲ + y^۲ - ۲(-۳y) + ۴y + a = ۰$$
$$\Rightarrow ۹y^۲ + y^۲ + ۶y + ۴y + a = ۰ \Rightarrow ۱۰y^۲ + ۱۰y + a = ۰$$
$$\Delta = ۰ \Rightarrow ۱۰۰ - ۴(۱۰)a = ۰ \Rightarrow ۱۰۰ - ۴۰a = ۰ \Rightarrow ۴۰a = ۱۰۰ \Rightarrow a = \frac{۵}{۲}$$

۳۶ گزینه ۱

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۶

گام اول

الف) هرگاه خطی بر دایره مماس باشد، فاصلهٔ مرکز دایره از این خط برابر با شعاع دایره خواهد بود.

ب) معادلهٔ دایره‌ای به مرکز $(\alpha\,,\,\beta)$ و شعاع R به‌صورت زیر است:

$$(x-\alpha)^۲+(y-\beta)^۲=R^۲$$

گام دوم

طبق قسمت (الف) از گام اول، شعاع دایره برابر است با فاصلهٔ نقطهٔ $(۲\,,\,۰)$ از خط $y=x$، پس داریم:

$$y=x\Rightarrow -x+y=۰$$
$$R=\frac{|-۲+۰|}{\sqrt{(-۱)^۲+۱^۲}}=\frac{۲}{\sqrt{۲}}=\sqrt{۲}$$

معادلهٔ این دایره به‌صورت زیر است:

$$(x-۲)^۲+(y-۰)^۲=(\sqrt{۲})^۲\Rightarrow (x-۲)^۲+y^۲=۲$$

اکنون نقطهٔ تلاقی دایره با خط $y=۱$ را به دست می‌آوریم:

$$(x-۲)^۲+y^۲=۲\xrightarrow{y=۱}(x-۲)^۲+۱=۲\Rightarrow (x-۲)^۲=۱$$
$$\Rightarrow\begin{cases}x-۲=۱\Rightarrow x=۳\\ x-۲=-۱\Rightarrow x=۱\end{cases}$$

پس این دایره، خط $y=۱$ را در نقاطی با طول‌های ۱ و ۳ قطع می‌کند.

۳۷ گزینه ۲

مرکز دایره روی خطی به معادلهٔ $y=۲x$ قرار دارد. فرض می‌کنیم مختصات مرکز دایره $(\alpha\,,\,۲\alpha)$ باشد. طبق تعریف دایره، می‌دانیم فاصلهٔ هر نقطه روی دایره از مرکز دایره برابر با شعاع است. شعاع دایره را R می‌نامیم. با محاسبهٔ فاصلهٔ مرکز دایره از هریک از نقاط $(۰\,,\,۰)$ و $(۳\,,\,۱)$ ابتدا مقدار α و سپس مقدار R را به دست می‌آوریم.

$$\left.\begin{aligned}R&=\sqrt{(\alpha-۰)^۲+(۲\alpha-۰)^۲}\\ R&=\sqrt{(\alpha-۳)^۲+(۲\alpha-۱)^۲}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\sqrt{\alpha^۲+۴\alpha^۲}=\sqrt{(\alpha-۳)^۲+(۲\alpha-۱)^۲}$$
$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}}۵\alpha^۲=(\alpha-۳)^۲+(۲\alpha-۱)^۲\Rightarrow ۵\alpha^۲=\alpha^۲-۶\alpha+۹+۴\alpha^۲-۴\alpha+۱$$
$$\Rightarrow ۵\alpha^۲=۵\alpha^۲-۱۰\alpha+۱۰\Rightarrow ۱۰\alpha=۱۰\Rightarrow\alpha=۱$$
$$\Rightarrow R=\sqrt{(۱-۰)^۲+(۲-۰)^۲}=\sqrt{۱+۴}=\sqrt{۵}$$

بنابراین دایره‌ای به مرکز $(۱\,,\,۲)$ و شعاع $\sqrt{۵}$ داریم.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۶

۳۸ گزینه ۱

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۷

گام اول

در یک دایره به معادلهٔ $x^۲ + y^۲ + ax + by + c = ۰$، نقطهٔ $(-\frac{a}{۲}, -\frac{b}{۲})$ مرکز دایره می‌باشد و شعاع این دایره برابر است با:

$$R = \sqrt{(\frac{a}{۲})^۲ + (\frac{b}{۲})^۲ - c}$$

گام دوم

برای مشخص‌کردن وضعیت دو دایره نسبت به هم، مختصات مرکز دو دایره و شعاع آن‌ها را به دست می‌آوریم، سپس فاصلهٔ میان مرکز دو دایره (طول خط‌المرکزین) را با دو مقدار $R_۱ + R_۲$ و $|R_۱ - R_۲|$ مقایسه می‌کنیم.

$$x^۲ + y^۲ - ۲x + ۶y = ۸ \Rightarrow x^۲ + y^۲ - ۲x + ۶y - ۸ = ۰$$

مرکز دایره : $O_۱(-\frac{-۲}{۲}, -\frac{۶}{۲}) \Rightarrow O_۱(۱, -۳)$

شعاع دایره : $R_۱ = \sqrt{(-\frac{۲}{۲})^۲ + (\frac{۶}{۲})^۲ + ۸} = \sqrt{۱ + ۹ + ۸} = \sqrt{۱۸} = ۳\sqrt{۲}$

$$x^۲ + y^۲ + ۸x - ۴y + ۱۲ = ۰$$

مرکز دایره : $O_۲(-\frac{۸}{۲}, -\frac{-۴}{۲}) \Rightarrow O_۲(-۴, ۲)$

شعاع دایره : $R_۲ = \sqrt{(\frac{۸}{۲})^۲ + (\frac{-۴}{۲})^۲ - ۱۲} = \sqrt{۱۶ + ۴ - ۱۲} = \sqrt{۸} = ۲\sqrt{۲}$

بنابراین داریم:

$$O_۱O_۲ = \sqrt{(-۴ - ۱)^۲ + (۲ + ۳)^۲} = \sqrt{۲۵ + ۲۵} = ۵\sqrt{۲}$$
$$R_۱ + R_۲ = ۳\sqrt{۲} + ۲\sqrt{۲} = ۵\sqrt{۲}$$

چون $O_۱O_۲ = R_۱ + R_۲$ است پس دو دایره مماس خارج هستند.

۳۹ گزینه ۳

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۸

گام اول

الف) هرگاه خطی بر دایره مماس باشد، فاصلهٔ مرکز دایره از این خط برابر با شعاع دایره خواهد بود.

ب) عمودمنصف هر وتر از دایره، از مرکز دایره عبور می‌کند.

گام دوم

دو نقطهٔ $A(۲,۰)$ و $B(-۲,۰)$ روی دایره قرار دارد بنابراین پاره‌خط AB وتری از دایره است که طبق گام اول، عمودمنصف آن از مرکز دایره عبور می‌کند. خط $x=۰$ عمودمنصف پاره‌خط AB است؛ پس فرض می‌کنیم نقطهٔ $O(۰,\alpha)$، مرکز دایره است. فاصلهٔ مرکز دایره از نقاط A و B و خط $y=۱$ برابر با شعاع دایره است، پس داریم:

$$R=OA=\sqrt{(۲-۰)^۲+(۰-\alpha)^۲}=\sqrt{۴+\alpha^۲}$$

$$y=۱\Rightarrow y-۱=۰\Rightarrow R=\frac{|\alpha-۱|}{\sqrt{۱^۲}}=|\alpha-۱|$$

$$\Rightarrow \sqrt{۴+\alpha^۲}=|\alpha-۱| \xrightarrow{\text{به توان ۲}} ۴+\alpha^۲=(\alpha-۱)^۲$$

$$\Rightarrow ۴+\alpha^۲=\alpha^۲-۲\alpha+۱\Rightarrow -۲\alpha=۳\Rightarrow \alpha=-\frac{۳}{۲}$$

بنابراین شعاع دایره برابر است با:

$$R=|\alpha-۱|=\left|-\frac{۳}{۲}-۱\right|=\left|-\frac{۵}{۲}\right|=\frac{۵}{۲}$$

۴۰ گزینه ۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۸

گام اول

الف) هر خط قائم بر دایره، از مرکز دایره عبور می‌کند.

ب) هرگاه خطی بر دایره مماس باشد، فاصلهٔ مرکز دایره از این خط برابر با شعاع دایره است.

گام دوم

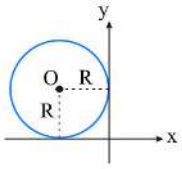
باتوجه‌به اینکه هر خط قائم بر دایره از نقطهٔ $(۱,-۲)$ عبور می‌کند و باتوجه‌به قسمت (الف) از گام اول، نقطهٔ $(۱,-۲)$ همان مرکز دایره است. طبق قسمت (ب) از گام اول، فاصلهٔ نقطهٔ $(۱,-۲)$ از خط $y=x-۱$ برابر با شعاع دایره است؛ پس داریم:

$$y=x-۱\Rightarrow x-y-۱=۰$$

$$R=\frac{|-۲-۱-۱|}{\sqrt{۱^۲+(-۱)^۲}}=\frac{|-۴|}{\sqrt{۲}}=\frac{۴}{\sqrt{۲}}=۲\sqrt{۲}$$

۴۱ گزینه ۲

باتوجه‌به اینکه دایره بر هر دو محور مختصات مماس است پس باید به‌طور کامل در یکی از چهار ناحیهٔ مختصاتی قرار بگیرد. چون دایره از نقطهٔ $(-۱, ۲)$ نیز عبور می‌کند و این نقطه در ناحیهٔ دوم قرار دارد، پس دایرهٔ موردنظر به‌صورت زیر خواهد بود:



بنابراین دایره‌ای به شعاع R و به مرکز $(-R, R)$ داریم. معادلهٔ این دایره برابر است با:

$$(x+R)^۲+(y-R)^۲=R^۲$$

چون دایره از نقطهٔ $(-۱, ۲)$ عبور می‌کند پس مختصات این نقطه در معادلهٔ دایره صدق می‌کند:

$$\xrightarrow{x=-۱, y=۲}(-۱+R)^۲+(۲-R)^۲=R^۲\Rightarrow ۱-۲R+R^۲+۴-۴R+R^۲=R^۲$$
$$\Rightarrow R^۲-۶R+۵=۰\Rightarrow (R-۵)(R-۱)=۰\Rightarrow \begin{cases} R-۵=۰\Rightarrow R=۵ \\ R-۱=۰\Rightarrow R=۱ \end{cases}$$

قطر بزرگ‌تر به ازای شعاع بزرگ‌تر به دست می‌آید که برابر است با:

$$۲R=۲(۵)=۱۰$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

۴۲ گزینه ۲

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۱

گام اول

دو منحنی در یک نقطه بر هم مماس هستند، هرگاه معادلهٔ تلاقی آن‌ها در آن نقطه ریشهٔ مضاعف داشته باشد.

گام دوم

داریم:

$$x^۲+y^۲-۲x=۳\xrightarrow{y=mx+۲}x^۲+(mx+۲)^۲-۲x=۳\Rightarrow x^۲+m^۲x^۲+۴mx+۴-۲x=۳$$
$$\Rightarrow (m^۲+۱)x^۲+(۴m-۲)x+۱=۰$$

این معادله باید ریشهٔ مضاعف داشته باشد پس:

$$\Delta=۰\Rightarrow (۴m-۲)^۲-۴(m^۲+۱)(۱)=۰\Rightarrow ۱۶m^۲-۱۶m+۴-۴m^۲-۴=۰$$
$$\Rightarrow ۱۲m^۲-۱۶m=۰\Rightarrow m(۱۲m-۱۶)=۰\Rightarrow \begin{cases} m=۰ \\ ۱۲m-۱۶=۰\Rightarrow m=\frac{۱۶}{۱۲}=\frac{۴}{۳} \end{cases}$$

۴۳ گزینه ۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۱

گام اول

معادلهٔ گستردهٔ یک دایره به‌صورت $x^۲ + y^۲ + ax + by + c = ۰$ است. در این صورت شعاع دایره برابر است با:

$$R = \sqrt{(\frac{a}{۲})^۲ + (\frac{b}{۲})^۲ - c}$$

گام دوم

سه نقطهٔ $(۱ , ۲)$، $(۴ , -۲)$ و $(۰ , ۰)$ روی دایره قرار دارد، پس مختصات این نقطه در معادلهٔ دایره صدق می‌کند.

$$x^۲ + y^۲ + ax + by + c = ۰$$
$$\xrightarrow{(۲,۱)} ۲^۲ + ۱^۲ + a(۲) + b(۱) + c = ۰ \Rightarrow ۴ + ۱ + ۲a + b + c = ۰ \Rightarrow ۲a + b + c = -۵ \quad (I)$$
$$\xrightarrow{(-۲,۴)} (-۲)^۲ + ۴^۲ + a(-۲) + b(۴) + c = ۰ \Rightarrow ۴ + ۱۶ - ۲a + ۴b + c = ۰ \Rightarrow -۲a + ۴b + c = -۲۰ \quad (II)$$
$$\xrightarrow{(۰,۰)} ۰^۲ + ۰^۲ + a(۰) + b(۰) + c = ۰ \Rightarrow c = ۰ \quad (III)$$

با جایگذاری $c = ۰$ در دو معادلهٔ I و II، به یک دستگاه دومعادله و دومجهول می‌رسیم و آن را حل می‌کنیم.

$$\begin{cases} ۲a + b = -۵ \\ -۲a + ۴b = -۲۰ \end{cases} \xrightarrow{+} ۵b = -۲۵ \Rightarrow b = -۵$$
$$۲a + b = -۵ \xrightarrow{b=-۵} ۲a - ۵ = -۵ \Rightarrow ۲a = ۰ \Rightarrow a = ۰$$

اکنون باتوجه‌به گام اول، شعاع دایره را به دست می‌آوریم.

$$R = \sqrt{(\frac{۰}{۲})^۲ + (\frac{-۵}{۲})^۲ - ۰} = \sqrt{\frac{۲۵}{۴}} = \frac{۵}{۲} = ۲/۵$$

۴۴ گزینه ۲

ابتدا معادلهٔ دایره را به‌صورت استاندارد می‌نویسیم.

$$x^۲ - ۲x + ۱ + y^۲ + ۴y + ۴ - ۱ - ۴ + ۱ = ۰$$
$$\Rightarrow (x-۱)^۲ + (y+۲)^۲ = ۴ \Rightarrow O_۱ : (۱, -۲),\ R_۱ = ۲$$

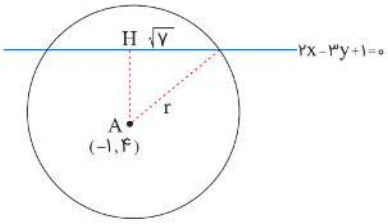
چون دو دایره مماس خارج هستند، بنابراین فاصلهٔ مراکز آن‌ها از یکدیگر برابر مجموع اندازه‌های شعاع‌های آن‌ها است.

$$O_۱O_۲ = R_۱ + R_۲ \Rightarrow \sqrt{(۱ - (-۲))^۲ + (-۲ - ۲)^۲} = ۲ + R_۲ \Rightarrow ۵ = ۲ + R_۲ \Rightarrow R_۲ = ۳$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۳

۴۵ گزینه ۱

فاصلهٔ مرکز دایره از خط برابر AH است. داریم:



$$AH = \frac{|۲(-۱) - ۳(۴) + ۱|}{\sqrt{۲^۲ + (-۳)^۲}} = \frac{۱۳}{\sqrt{۱۳}} = \sqrt{۱۳}$$

همچنین می‌دانیم شعاع عمود بر وتر در دایره، وتر را نصف می‌کند. پس:

$$r^۲ = AH^۲ + \sqrt{۷}^۲ \Rightarrow r^۲ = ۱۳ + ۷ = ۲۰$$

معادلهٔ دایره را می‌نویسیم:

$$(x+۱)^۲ + (y-۴)^۲ = ۲۰ \xrightarrow{y=۲} (x+۱)^۲ + ۴ = ۲۰ \Rightarrow (x+۱)^۲ = ۱۶$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x = ۳ \\ x = -۵ \end{cases}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

۴۶ گزینه ۱

مرکز دایره روی نیمساز ناحیهٔ اول است، پس مختصات آن به‌صورت (x, x) است. فاصلهٔ مرکز دایره از نقطهٔ $A(۶,۳)$ و خط $y = ۲x$ یکسان است، پس داریم:

$$\sqrt{(x-۶)^۲ + (x-۳)^۲} = \frac{|۲x - x|}{\sqrt{۴+۱}} \Rightarrow (x-۶)^۲ + (x-۳)^۲ = \frac{x^۲}{۵} \Rightarrow ۲x^۲ - ۱۸x + ۴۵ = \frac{x^۲}{۵}$$
$$\Rightarrow ۹x^۲ - ۹۰x + ۲۲۵ = ۰ \Rightarrow x^۲ - ۱۰x + ۲۵ = ۰ \Rightarrow (x-۵)^۲ = ۰ \Rightarrow x = ۵$$
$$\text{شعاع دایره} : R = \frac{|x|}{\sqrt{۵}} = \frac{۵}{\sqrt{۵}} = \sqrt{۵}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۲

Homework نهایی هندسه

۱ بیضی با خروج از مرکز $e = \frac{۲}{۳}$ و کانون $F(۲,۱)$ و رأس کانونی نظیر آن $A(۲,۴)$ مفروض است. بیشترین مساحت از بین مثلث‌هایی که یک رأس آن روی بیضی و دو رأس آن کانون‌های این بیضی باشند، کدام است؟

۱) $۱۸\sqrt{۵}$
۲) $۱۹\sqrt{۵}$
۳) $۵\sqrt{۱۸}$
۴) $۳۶\sqrt{۵}$

۲ در نقطه $A(۲,۳)$ روی دایره $x^۲ + y^۲ - ۲x - ۲y = ۳$ مماس بر آن رسم کرده‌ایم. این خط مماس محور yها را در چه نقطه‌ای قطع می‌کند؟

۱) $(۰,۲)$
۲) $(۰,۳)$
۳) $(۰,۴)$
۴) $(۰,-۲)$

۳ در یک بیضی خروج از مرکز $\frac{۱}{۲}$ و فاصله کانون از رأس دورتر برابر ۳ است. اندازه قطر کوچک بیضی چقدر است؟

۱) $۲\sqrt{۳}$
۲) $۳\sqrt{۲}$
۳) $۲\sqrt{۲}$
۴) $\sqrt{۳}$

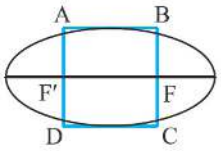
۴ به ازای چند مقدار صحیح m معادله $x^۲ + y^۲ + ۳x + ۴y + |m - ۱| = ۰$، معادله یک دایره است؟

۱) ۱۱
۲) ۱۲
۳) ۱۳
۴) ۱۴

۵ دایره گذرا بر نقطه $(۱\ ,\ ۱)$ بر دو خط $y = x - ۲$ و $y = x + ۲$ مماس است، مرکز دایره کدام می‌تواند باشد؟

۱) $(۰\ ,\ ۰)$
۲) $(۱\ ,\ ۲)$
۳) $(-۱\ ,\ -۱)$
۴) $(۰\ ,\ ۱)$

۶ در بیضی شکل زیر، قطرهای چهارضلعی ABCD عمودمنصف یکدیگرند. خروج از مرکز بیضی چقدر است؟ (F , F' کانون ها هستند.)



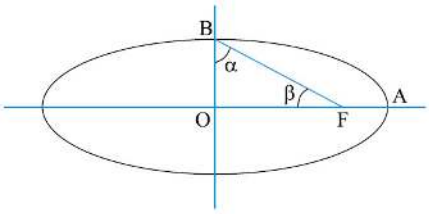
۱) $\frac{۱}{۲}$

۲) $\frac{۱}{۳}$

۳) $\frac{۱}{\sqrt{۲}}$

۴) $\frac{۱}{\sqrt{۳}}$

۷ در شکل زیر، $۲\alpha + ۳\beta = ۲۴۰^\circ$. خروج از مرکز بیضی چقدر است؟



۱) $\frac{۱}{۲}$

۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$

۴) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

۸ مرکز دایره‌ای روی نیمساز ناحیه اول است. اگر این دایره از نقطه $A(۶,۳)$ گذشته و بر خط به معادله $y = ۲x$ مماس شود، شعاع آن کدام است؟

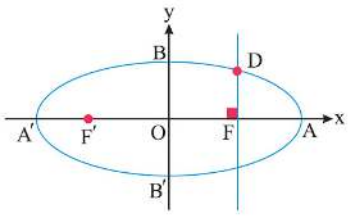
۱) $\sqrt{۵}$

۲) $\sqrt{۶}$

۳) $\sqrt{۷}$

۴) $\sqrt{۱۰}$

۹ مرکز بیضی شکل زیر بر مبدأ مختصات و قطرهای آن مانند شکل بر محورهای x و y منطبق هستند و فاصلهٔ F از هر دو نقطهٔ O و A برابر ۴ است. خطی گذرا از F بر AA' عمود کرده‌ایم. این خط بیضی را در نقطهٔ D قطع کرده است. مجموع مختصات D کدام است؟



۱) ۱۰

۲) ۹

۳) ۸

۴) $\frac{۱۷}{۲}$

۱۰ دو دایرهٔ $\begin{cases} x^۲ + y^۲ + mx - ۶y + ۱۲ = ۰ \\ x^۲ + y^۲ + ۴x + ny + ۴ = ۰ \end{cases}$ هم‌مرکزند. مساحت دایره‌ای که بر هر دو دایره مماس است، کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{۲}$

۲) $\frac{۳\pi}{۲}$

۳) π

۴) ۲π

۱۱ از داخل یک استوانهٔ قائم توپر، به شعاع قاعده ۴ و ارتفاع ۵ واحد، بزرگ‌ترین مخروط قائم ممکن را حذف می‌کنیم. حجم حاصل را با صفحه‌ای موازی قاعدهٔ مخروط به فاصلهٔ ۳ واحد از آن قطع می‌دهیم. مساحت مقطع حاصل کدام است؟

۱) $۱۰/۳۶\pi$
۲) $۱۱/۲۸\pi$
۳) $۱۲/۵۶\pi$
۴) $۱۳/۴۴\pi$

۱۲ شعاع دایره‌ای که مرکز آن $O(-۱ , ۱)$ و بر دایره به معادلهٔ $x^۲ + y^۲ - ۶x + ۴y + ۴ = ۰$ مماس داخل است کدام است؟

۱) ۲
۲) ۶
۳) ۸
۴) ۱۰

۱۳ اگر $F(۶ , ۱)$ کانون بیضی، $B(۳ , ۳)$ رأس ناکانونی آن باشد، آن‌گاه مجموع فواصل هر نقطه روی بیضی از دو کانون کدام است؟ (محورهای بیضی موازی محور مختصات هستند)

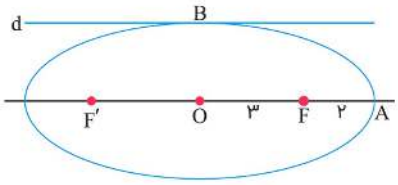
۱) ۴
۲) $۲\sqrt{۵}$
۳) $۲\sqrt{۱۳}$
۴) $۲\sqrt{۱۵}$

۱۴ معادلهٔ یکی از قطرهای دایره‌ای $y = x - ۱$ است. اگر نقاط $A(۳ , ۲)$ و $B(۰ , ۴)$ روی دایره باشند، کدام خط زیر می‌تواند قطر دیگر دایره باشد؟

۱) $x + y = ۱۰$
۲) $x + y = ۱۲$
۳) $x + y = -۸$
۴) $x + y = ۸$

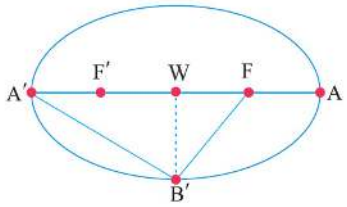
۱۵ معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن نقطه $O(-۲ , ۲)$ است و بر دایره‌ای به معادله $x^۲ + y^۲ - ۲x + ۴y - ۴ = ۰$ مماس خارج باشد.

۱۶ در بیضی شکل زیر خط d در نقطهٔ B بر این بیضی مماس است. حاصل‌ضرب فاصله‌های دو نقطهٔ F و F' (کانون‌ها) از خط d کدام است؟



۱) ۹
۲) ۱۶
۳) ۲۵
۴) ۱۲

۱۷ اگر در بیضی شکل زیر مساحت مثلث $A'FB'$ برابر $\frac{۹}{۴}$ قطر کوچک بیضی باشد، خروج از مرکز بیضی چقدر است؟ (F و F' کانون، A' رئوس کانونی و W مرکز بیضی است و طول قطر کوچک بیضی ۲ است.)



۱) $\frac{۳۹}{۴۱}$

۲) $\frac{۴۰}{۴۱}$

۳) $\frac{۳۹}{۴۰}$

۴) $\frac{۳۷}{۴۰}$

۱۸ وضعیت نقطه $A(۴\ ,\ ۱)$ و دایره $x^۲ + y^۲ - ۲x + ۴y + ۳ = ۰$ را تعیین کنید.

۱۹ حدود a را طوری به دست آورید که $x^۲ + y^۲ - ۳x + ۵y + a = ۰$ بتواند معادله یک دایره باشد.

۲۰ به ازای چند عدد طبیعی یک رقمی برای m می‌توان از نقطهٔ $(۱\ ,\ m)$ دو مماس بر دایرهٔ $x^۲ + y^۲ - ۲x - ۶y + ۶ = ۰$ رسم کرد؟

۱) ۳

۲) ۵

۳) ۴

۴) صفر

۲۱ طول پاره‌خطی که دایرهٔ $x^۲ + y^۲ - ۲x - ۸y = ۸$ از خط $۵x + ۱۲y = ۱۴$ جدا می‌کند، کدام است؟

۱) ۱۰

۲) ۹

۳) ۸

۴) ۷

۲۲ در یک بیضی زاویهٔ $F\hat{B}F' = ۱۲۰^\circ$. مقدار خروج از مرکز این بیضی کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$

۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۴}$

۴) $\frac{۱}{\sqrt{۲}}$

۲۳ وضعیت دو دایرهٔ $C : x^۲ + (y - ۱)^۲ = ۱$ و $C' : (x - ۱)^۲ + y^۲ = ۱$ نسبت به هم چگونه است؟

۱) مماس خارج

۲) مماس داخل

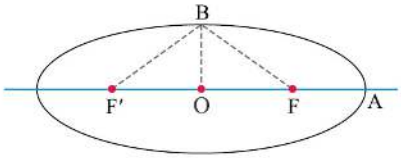
۳) متقاطع

۴) متخارج

پاسخ Homework نهایی هندسه

۱ گزینه ۱

بیشترین مساحت را مثلث BFF' دارد:



و مقدار مساحت برابر است با:

$$S = \frac{۱}{۲} \times ۲c \times b = b \times c \quad (۱)$$

اکنون به‌دست می‌آید:

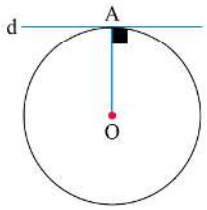
$$\left.\begin{array}{l} e = \frac{c}{a} = \frac{۲}{۳} \Rightarrow ۲a = ۳c \\ AF = a - c = ۳ \Rightarrow ۲a - ۲c = ۶ \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} a = ۹ \\ c = ۶ \end{cases}$$

$$\xrightarrow{a^۲ = b^۲ + c^۲} b = \sqrt{۸۱ - ۳۶} = \sqrt{۴۵} = ۳\sqrt{۵}$$

بنابراین طبق رابطه (۱)، $S = ۱۸\sqrt{۵}$

۲ گزینه ۳

از نمادگذاری شکل زیر استفاده می‌کنیم.



چون شعاع دایره در نقطه تماس بر خط مماس عمود است، پس:

$$m_d = -\frac{۱}{m_{OA}} = -\frac{۱}{\frac{۳-۱}{۲-۱}} = -\frac{۱}{۲} \quad (\text{مرکز دایره } O(۱,۱))$$

اکنون با معلوم بودن شیب و مختصات A می‌توان معادله خط مماس را نوشت:

$$d : y - ۳ = -\frac{۱}{۲}(x - ۲)$$

برای پیدا کردن محل برخورد خط مماس با محور yها باید $x = ۰$ را با خط قطع دهیم:

$$\xrightarrow{x=۰} y - ۳ = ۱ \Rightarrow y = ۴$$

۳ گزینه ۱

$$a + c = ۳ \xrightarrow{\frac{c}{a}=\frac{۱}{۲}} ۲c + c = ۳ \Rightarrow c = ۱,\ a = ۲$$

$$a^۲ = b^۲ + c^۲ \Rightarrow ۴ = b^۲ + ۱ \Rightarrow b = \sqrt{۳} \Rightarrow ۲b = ۲\sqrt{۳}$$

۴ گزینه ۳

$$a^۲ + b^۲ > ۴c \Rightarrow ۹ + ۱۶ > ۴|m - ۱| \Rightarrow |m - ۱| < \frac{۲۵}{۴}$$

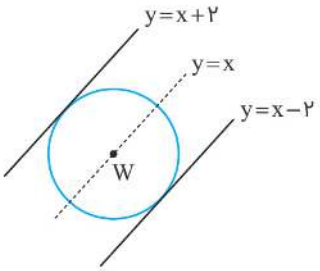
$$\Rightarrow -\frac{۲۵}{۴} < m - ۱ < \frac{۲۵}{۴} \Rightarrow -۵/۲۵ < m < ۷/۲۵$$

mهای صحیح عبارتند از $\{-۵, -۴, \cdots, ۷\}$ که تعداد آن‌ها ۱۳ تاست.

۵ گزینه ۱

مرکز دایره روی خط $y = x$ قرار دارد، پس می‌توانیم مرکز را $(\alpha\ ,\ \alpha)$ فرض کنیم:

$$۲r = \frac{|۲ + ۲|}{\sqrt{۱ + ۱}} = \frac{۴}{\sqrt{۲}} = ۲\sqrt{۲} \ \Rightarrow \ r = \sqrt{۲}$$



معادله دایره:

$$(x - \alpha)^۲ + (y - \alpha)^۲ = ۲ \xrightarrow{(۱\ ,\ ۱)} (۱ - \alpha)^۲ + (۱ - \alpha)^۲ = ۲$$
$$\Rightarrow (\alpha - ۱)^۲ = ۱ \Rightarrow \begin{cases} \alpha = ۰ \\ \alpha = ۲ \end{cases}$$

مرکز دایره $(۰\ ,\ ۰)$ یا $(۲\ ,\ ۲)$ است.

۶ گزینه ۳

مفهوم این سؤال این است که چهارضلعی ABCD مربع است.

$$FF' = ۲b \ \Rightarrow \ ۲c = ۲b \ \Rightarrow \ b = c$$
$$a^۲ = b^۲ + c^۲ \Rightarrow a^۲ = c^۲ + c^۲$$
$$\Rightarrow a^۲ = ۲c^۲ \Rightarrow a = c\sqrt{۲} \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{۱}{\sqrt{۲}}$$

۷ گزینه ۱

چون مثلث OBF قائم‌الزاویه است، پس $\alpha + \beta = ۹۰^\circ$. اکنون به‌دست می‌آید:

$$\begin{cases} ۲\alpha + ۳\beta = ۲۴۰^\circ \\ \alpha + \beta = ۹۰^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = ۳۰^\circ \\ \beta = ۶۰^\circ \end{cases}$$

می‌توان نوشت:

$$\sin\alpha = \frac{OF}{BF} = \frac{c}{a} = e \Rightarrow e = \frac{۱}{۲}$$

۸ گزینه ۱

معادله نیمساز ناحیه اول به فرم $y = x$ است. چون مرکز دایره روی این خط پس مختصات آن به فرم $O(\alpha, \alpha)$ است. فاصله O از A و خط $y = ۲x$ یکسان است. اکنون می‌توان نوشت:

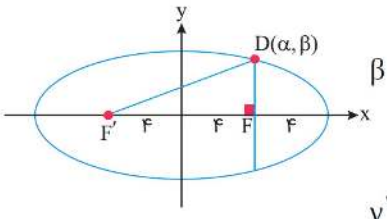
$$\sqrt{(\alpha - ۶)^۲ + (\alpha - ۳)^۲} = \frac{|۲\alpha - \alpha|}{\sqrt{۵}}$$

با حل معادله به‌دست می‌آید $\alpha = ۵$؛ یعنی مرکز دایره $O(۵, ۵)$ است و شعاع دایره به‌دست می‌آید:

$$R = OA = \sqrt{(۶ - ۵)^۲ + (۳ - ۵)^۲} = \sqrt{۵}$$

۹ گزینه ۱

اگر $DF = \beta$ و $DF' = \gamma$، طبق تعریف بیضی:



$$\beta + \gamma = ۲a = ۱۶ \qquad (۱)$$

در مثلث $FF'D$ بنابر قضیهٔ فیثاغورس:

$$\gamma^۲ - \beta^۲ = ۶۴ \Rightarrow (\gamma + \beta)(\gamma - \beta) = ۶۴ \xrightarrow{\gamma+\beta=۱۶} \gamma - \beta = ۴ \quad (۲)$$

از برابری (۱) و (۲) به دست می‌آید $\beta = ۶$، درنتیجه $D = (۴ , ۶)$ و مجموع مختصات آن برابر ۱۰ است.

۱۰ گزینه ۳

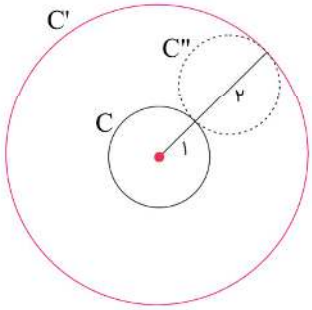
مرکز دو دایره را برابر هم قرار می‌دهیم:

$$(-\frac{m}{۲}\ ,\ ۳) = (-۲\ ,\ -\frac{n}{۲}) \ \Rightarrow\ \begin{cases} m = ۴ \\ n = -۶ \end{cases}$$

$$C : x^۲ + y^۲ + ۴x - ۶y + ۱۲ = ۰ \Rightarrow r = \sqrt{۴ + ۹ - ۱۲} = ۱$$

$$C' : x^۲ + y^۲ + ۴x - ۶y + ۴ = ۰ \Rightarrow r' = \sqrt{۴ + ۹ - ۴} = ۳$$

حال دو دایره با مرکزهای یکسان و شعاع‌های ۱ و ۳ داریم. دایره‌ای که بر هر دوی آن‌ها مماس باشد به‌صورت زیر است:

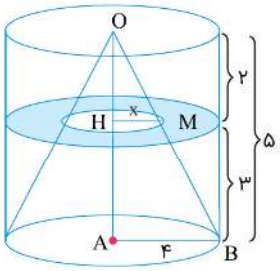


باتوجه‌به نمودار قطر دایرهٔ C'' برابر ۲ و درنتیجه شعاع آن ۱ است. مساحت آن برابر است با:

$$S = \pi R^۲ = \pi(۱)^۲ = \pi$$

۱۱ گزینه ۴

سطح مقطع حاصل، قسمت رنگی در شکل زیر است. در مثلث OAB بنا بر تالس:



$$\frac{HM}{AB}=\frac{OH}{OA}\Rightarrow\frac{x}{۴}=\frac{۲}{۵}\Rightarrow x=\frac{۸}{۵}$$

اکنون به سادگی سطح مقطع رنگی را به دست می‌آوریم:

$$S_{\text{رنگی}}=\pi\times(۴)^{۲}-\pi(x)^{۲}=۱۶\pi-\frac{۶۴}{۲۵}\pi=\frac{۳۳۶\pi}{۲۵}=۱۳/۴۴\pi$$

۱۲ گزینه ۳

ابتدا مختصات مرکز و اندازهٔ شعاع دایره را به دست می‌آوریم:

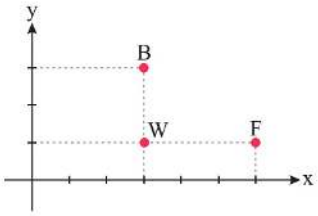
$$x^{۲}+y^{۲}-۶x+۴y+۴=۰\Rightarrow\ O'(۳\ ,\ -۲)\ ,\ R'=\sqrt{۹+۴-۴}=۳$$

می‌دانیم در دو دایرهٔ مماس داخل $OO'=|R-R'|$، بنابراین:

$$\sqrt{(-۱-۳)^{۲}+(۱+۲)^{۲}}=|R-۳|\Rightarrow ۵=|R-۳|\Rightarrow\begin{cases}R-۳=۵\\R-۳=-۵\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}R=۸\\R=-۲\ \text{غ ق ق}\end{cases}$$

۱۳ گزینه ۳

نقطه‌ها را در دستگاه مختصات رسم می‌کنیم. باتوجه‌به شکل:



$$\begin{cases} c = WF = ۳ \\ b = WB = ۲ \end{cases}$$

می‌توان نوشت:

$$a = \sqrt{b^۲ + c^۲} = \sqrt{۱۳}$$

بنابراین مجموع فواصل هر نقطه روی بیضی از دو کانون برابر $۲a = ۲\sqrt{۱۳}$ است.

۱۴ گزینه ۳

مرکز دایره روی خط $y = x - ۱$ قرار دارد، پس مرکز را $W(\alpha\ ,\ \alpha - ۱)$ در نظر می‌گیریم. نقطه‌های $A(۳\ ,\ ۲)$ و $B(۰\ ,\ ۴)$ روی دایره قرار دارند، پس:

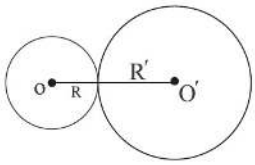
$$r = |WA| = |WB| \Rightarrow (\alpha - ۳)^۲ + (\alpha - ۱ - ۲)^۲ = (\alpha - ۰)^۲ + (\alpha - ۱ - ۴)^۲$$

$$\Rightarrow \alpha^۲ - ۶\alpha + ۹ + \alpha^۲ - ۶\alpha + ۹ = \alpha^۲ + \alpha^۲ - ۱۰\alpha + ۲۵$$

$$\Rightarrow -۱۲\alpha + ۱۸ = -۱۰\alpha + ۲۵ \Rightarrow ۲\alpha = -۷ \Rightarrow \alpha = \frac{-۷}{۲} \Rightarrow W(\frac{-۷}{۲}, \frac{-۹}{۲})$$

خطی که از W بگذرد، قطری از دایره خواهد بود، پس جواب مسئله $x + y = -۸$ است.

۱۵ ابتدا مختصات مرکز و شعاع دایره داده‌شده را به دست می‌آوریم:



$$x^۲ + y^۲ - ۲x + ۴y - ۴ = ۰ \Rightarrow O'(۱, -۲), R' = ۳$$

می‌دانیم در دو دایره مماس خارج $OO' = R' + R$ می‌باشد:

$$\sqrt{۹ + ۱۶} = R + ۳ \Rightarrow R = ۲$$

بنابراین معادله دایره خواسته شده به صورت زیر است:

$$(x + ۲)^۲ + (y - ۲)^۲ = ۴, x^۲ + y^۲ + ۴x - ۴y + ۴ = ۰$$

۱۶ گزینه ۲

باتوجه‌به اطلاعات روی شکل:

$$\left.\begin{matrix} a = OA = ۵ \\ c = OF = ۳ \end{matrix}\right\} \Rightarrow b = \sqrt{a^۲ - c^۲} = \sqrt{۵^۲ - ۳^۲} = ۴$$

به سادگی معلوم است که حاصل‌ضرب فواصل F و F' تا خط d برابر $b^۲$ است؛ یعنی:

$$FH \times F'H' = b^۲ = ۱۶$$

۱۷ گزینه ۲

$$S_{A'FB'} = \frac{۹}{۲}|WB'| \Rightarrow \frac{۱}{۲}|FA'| \times |WB'| = \frac{۹}{۲}|WB'| \Rightarrow |FA'| = ۹ \Rightarrow a + c = ۹$$

$$a^۲ = b^۲ + c^۲ \Rightarrow a^۲ - c^۲ = ۱ \Rightarrow (a-c)(a+c) = ۱ \xrightarrow{a+c=۹} a - c = \frac{۱}{۹}$$

$$\begin{cases} a + c = ۹ \\ a - c = \frac{۱}{۹} \end{cases} \xrightarrow{+} ۲a = \frac{۸۲}{۹} \Rightarrow a = \frac{۴۱}{۹}, \; c = ۹ - \frac{۴۱}{۹} = \frac{۴۰}{۹}$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{۴۰}{۴۱}$$

۱۸ مرکز و شعاع دایره را به دست می‌آوریم:

$$x^۲ + y^۲ - ۲x + ۴y + ۳ = ۰ \Rightarrow O(۱, -۲), \; r = \sqrt{۲}$$

$$OA = \sqrt{۳^۲ + ۳^۲} = ۳\sqrt{۲}$$

چون $r < OA$، پس A خارج دایره است.

۱۹ به دست می‌آید:

$$a^۲ + b^۲ - ۴c > ۰ \Rightarrow ۹ + ۲۵ - ۴a > ۰ \Rightarrow \frac{۱۷}{۲} > a$$

۲۰ گزینه ۳

باید نقطهٔ $A(۱, m)$ خارج دایره باشد، پس $OA > R$:

$$x^۲ + y^۲ - ۲x - ۶y + ۶ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} O(۱, ۳) \\ R = \sqrt{۱ + ۹ - ۶} = ۲ \end{cases}$$

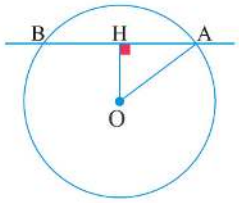
$$OA > R \Rightarrow \sqrt{۰ + (m-۳)^۲} > ۲ \Rightarrow |m - ۳| > ۲ \Rightarrow \begin{cases} m - ۳ > ۲ \\ m - ۳ < -۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m > ۵ \\ m < ۱ \end{cases}$$

چون m عدد طبیعی یک رقمی است، پس:

$$m \in \{۶, ۷, ۸, ۹\}$$

۲۱ گزینه ۳

از نمادگذاری شکل زیر استفاده می‌کنیم:



به دست می‌آید:

$$x^۲ + y^۲ - ۲x - ۸y = ۸ \Rightarrow \begin{cases} O(۱, ۴) \\ R = ۵ \end{cases}$$

$$|OH| = \frac{|۵ + ۴۸ - ۱۴|}{\sqrt{۵^۲ + ۱۲^۲}} = ۳$$

در مثلث OAH، بنا بر قضیهٔ فیثاغورس:

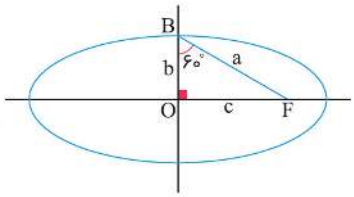
$$AH = \sqrt{OA^۲ - OH^۲} = \sqrt{۵^۲ - ۳^۲} = ۴$$

درنتیجه:

$$AB = ۲AH = ۸$$

۲۲ گزینه ۲

از نمادگذاری شکل زیر استفاده می‌کنیم. در مثلث OBF می‌توان نوشت:



$$\sin ۶۰^\circ = \frac{c}{a} \Rightarrow e = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

۲۳ گزینه ۳

می‌توان نوشت:

$$\begin{matrix} C : O(۰, ۱) & R = ۱ \\ C' : O'(۱, ۰) & R' = ۱ \end{matrix}, \quad OO' = \sqrt{۲}$$

چون $|R - R'| < OO' < R + R'$، پس دو دایره متقاطع هستند.

احتمال کل دوازدهم

Homework

۱ مدرسهٔ A سه برابر مدرسهٔ B دانش‌آموز دارد. ۲۵ درصد دانش‌آموزان مدرسهٔ A و ۱۵ درصد دانش‌آموزان مدرسهٔ B معدلی بالای ۱۸ دارند. اگر همهٔ دانش‌آموزان هر دو مدرسه در یک محوطه حاضر باشند و به‌تصادف یکی از آن‌ها را انتخاب کنیم:

کتاب درسی علوم تجربی دوازدهم ریاضی تمرین

الف با چه احتمالی فرد انتخابی از مدرسهٔ A و با چه احتمالی از مدرسهٔ B است؟

ب با چه احتمالی فرد انتخابی معدلی بالای ۱۸ دارد؟

۲ مینا در انتخاب رشتهٔ خود برای تحصیل در دبیرستان بین سه رشتهٔ ریاضی، تجربی و انسانی مردد است. اگر او رشتهٔ ریاضی را انتخاب کند، به احتمال ۰/۴۵، اگر تجربی را انتخاب کند به احتمال ۰/۱ و اگر انسانی را انتخاب کند به احتمال ۰/۳ در آزمون ورودی دانشگاه پذیرفته خواهد شد. اگر احتمال اینکه او رشتهٔ ریاضی را انتخاب کند ۰/۱، احتمال اینکه رشتهٔ تجربی را انتخاب کند ۰/۶ و احتمال اینکه رشتهٔ انسانی را انتخاب کند ۰/۳ باشد، با چه احتمالی در دانشگاه پذیرفته خواهد شد؟

کتاب درسی علوم تجربی دوازدهم ریاضی تمرین

۳ دو جعبه داریم. درون یکی از آن‌ها ۱۲ لامپ قرار دارد که ۶تا از آن‌ها معیوب است و درون جعبهٔ دیگر ۹۶ لامپ قرار دارد که ۴تا از آن‌ها معیوب‌اند. به تصادف جعبه‌ای انتخاب کرده، یک لامپ از آن بیرون می‌آوریم. چقدر احتمال دارد لامپ موردنظر معیوب باشد؟

کتاب درسی علوم تجربی دوازدهم ریاضی تمرین

۴ در یک جعبه ۵ ساعت دیواری از نوع A، ۲تا از نوع B و ۱۵تا از نوع C وجود دارد و احتمال اینکه عمر آن‌ها از ۱۰ سال بیشتر باشد، برای نوع A، $\frac{4}{5}$، برای نوع B، $\frac{9}{10}$ و برای نوع C، $\frac{1}{2}$ است. به تصادف یک ساعت از کارتن بیرون می‌آوریم. با چه احتمالی عمر این ساعت بیش از ۱۰ سال است؟

کتاب درسی علوم تجربی دوازدهم ریاضی تمرین

۵ یک سکه را پرتاب می‌کنیم و اگر پشت بیاید ۳ سکهٔ دیگر را باهم پرتاب می‌کنیم. در این آزمایش احتمال اینکه دقیقاً یک سکه رو ظاهر شود چقدر است؟

کتاب درسی علوم تجربی دوازدهم ریاضی تمرین

۶ فرض کنید جمعیت یک کشور متشکل از ۲۰ درصد کودک و نوجوان، ۵۰ درصد میانسال و ۳۰ درصد سالمند باشند و شیوع یک بیماری خاص در این دسته‌ها به ترتیب ۳ درصد، ۵ درصد و ۱ درصد باشد. اگر فردی به تصادف از این جامعه انتخاب شود، با چه احتمالی به بیماری موردنظر مبتلا است؟

کتاب درسی علوم تجربی دوازدهم ریاضی تمرین

۷ درون جعبه A چهار مهره زرد و سه مهره قرمز و درون جعبه B سه مهره زرد و سه مهره قرمز قرار دارد. از جعبه A مهره‌ای را برداشته و در جعبه B قرار می‌دهیم، سپس از جعبه B مهره‌ای انتخاب می‌کنیم. اگر دو مهره همرنگ باشند، با چه احتمالی هر دو زرد‌اند؟

۱) $\frac{۴}{۵}$ ۲) $\frac{۴}{۷}$
۳) $\frac{۳}{۷}$ ۴) $\frac{۳}{۵}$

علوی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۱۱ ۱۴۰۱

۸ درون کیسه A، ۵ مهره قرمز و دو مهره آبی و درون کیسه B، ۲ مهره قرمز و ۵ مهره آبی قرار دارد. ۳ مهره از کیسه A و دو مهره از کیسه B را انتخاب و در ظرف C می‌ریزیم، سپس مهره‌ای از ظرف C انتخاب می‌کنیم. با چه احتمالی این مهره قرمز است؟

۱) $\frac{۱۹}{۳۶}$ ۲) $\frac{۱۷}{۳۵}$
۳) $\frac{۱۹}{۳۵}$ ۴) $\frac{۱۷}{۳۶}$

علوی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۱۲ ۱۴۰۱

۹ درون جعبهٔ A، ۴ مهرهٔ قرمز و ۳ مهرهٔ آبی و درون جعبهٔ B، ۸ مهرهٔ قرمز وجود دارد. اگر احتمال انتخاب جعبهٔ A سه برابر احتمال انتخاب جعبهٔ B باشد و با چشمان بسته جعبه‌ای را انتخاب و از درون آن دو مهره همزمان انتخاب کنیم، با چه احتمالی دو مهره همرنگ است؟

۱) $\frac{۶}{۷}$ ۲) $\frac{۵}{۷}$
۳) $\frac{۴}{۷}$ ۴) $\frac{۳}{۷}$

علوی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۱۰ ۱۴۰۱

۱۰ جعبهٔ A شامل ۶ مهرهٔ آبی، ۴ مهرهٔ سبز و ۵ مهرهٔ قرمز است و جعبهٔ B شامل ۵ مهرهٔ آبی، ۳ مهرهٔ سبز و ۶ مهرهٔ قرمز است. از جعبهٔ A به‌تصادف یک مهره انتخاب کرده، در جعبهٔ B قرار می‌دهیم. سپس یک مهره از جعبهٔ B انتخاب می‌کنیم. با کدام احتمال مهرهٔ خارج‌شده از جعبهٔ B آبی است؟

۱) ۰/۳۶ ۲) ۰/۳۲
۳) ۰/۲۸ ۴) ۰/۲۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

---

۱۱ در ظرف اول ۳ مهرهٔ آبی و ۶ مهرهٔ قرمز و در ظرف دوم ۴ مهرهٔ آبی و ۵ مهرهٔ قرمز دارند. دو تاس پرتاب می‌کنیم. اگر مجموع اعداد روشده ۷ یا ۱۰ باشد، به تصادف یک مهره از ظرف اول خارج کرده و در ظرف دوم می‌اندازیم. در غیر این صورت از ظرف دوم یک مهره برداشته و به ظرف اول اضافه می‌کنیم. اکنون یک مهره از ظرف با مهرهٔ بیشتر انتخاب می‌کنیم. احتمال این‌که مهره آبی باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۷}{۱۸}$ ۲) $\frac{۱۱}{۳۰}$
۳) $\frac{۱۹}{۳۰}$ ۴) $\frac{۱۱}{۱۸}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۰

۱۲ در یک روستا ۵۴ درصد جمعیت را مردان و ۴۶ درصد را زنان تشکیل می‌دهند. اگر ۶۰ درصد مردان و ۷۵ درصد زنان دفترچه سلامت داشته باشند، با کدام احتمال یک فرد انتخابی به تصادف از بین آن‌ها دفترچهٔ سلامت دارد؟

۱) ۰/۶۵۸ ۲) ۰/۶۶۹

۳) ۰/۶۸۵ ۴) ۰/۶۹۶

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۰

۱۳ احتمال انتقال بیماری مسری به افرادی که واکسن زده‌اند ۰/۰۲۵ و احتمال انتقال به افراد دیگر ۰/۲ است. $\frac{۲}{۵}$ کارگران یک کارگاه واکسن زده‌اند. اگر فرد حامل بیماری با یکی از کارگران ملاقات کند، با کدام احتمال، این بیماری منتقل می‌شود؟

۱) ۰/۱۳ ۲) ۰/۱۴

۳) ۰/۱۵ ۴) ۰/۱۶

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۹

۱۴ انتقال نوعی بیماری ارثی از والدین به فرزند پسر ۱۰ درصد و به فرزند دختر ۶ درصد است. با کدام احتمال فرزندی که به دنیا می‌آید این نوع بیماری را ندارد؟

۱) ۹۱% ۲) ۹۲%

۳) ۹۳% ۴) ۹۴%

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۳

۱۵ ۵۵ درصد دانشجویان سال اول دختر و بقیه پسر هستند. ۶۰ درصد دختران و ۶۴ درصد پسران تمام واحدهای درسی خود را گذرانده‌اند. چند درصد کل دانشجویان، تمام واحدهای درسی خود را گذرانده‌اند؟

۱) ۶۱/۴ ۲) ۶۱/۸

۳) ۶۲/۴ ۴) ۶۲/۸

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۸

۱۶ احتمال اینکه امیر برای قبولی در رشته پزشکی، یکی از سه دانشگاه A، B و C را انتخاب کند، به ترتیب، ۰/۴، ۰/۳۵ و ۰/۲۵ است. اگر او یکی از دانشگاه‌های A، B و C را انتخاب کند، به ترتیب، با احتمال ۰/۲۵، ۰/۳ و ۰/۳۵ در آن دانشگاه پذیرفته می‌شود. چند درصد احتمال دارد که امیر در رشته پزشکی قبول شود؟

۱) ۲۰/۵۵ ۲) ۲۹/۵۵

۳) ۲۰/۲۵ ۴) ۲۹/۲۵

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۱۷ احتمال اینکه پارسا یکی از سه رشته A، B و C را در دانشگاه انتخاب کند، به ترتیب، ۰/۴۵، ۰/۲ و ۰/۳۵ است. اگر او یکی از سه رشته A، B و C را انتخاب کند، به ترتیب با احتمال ۰/۲، ۰/۲۵ و ۰/۳ در آن رشته پذیرفته می‌شود. پارسا با کدام احتمال در رشته مورد علاقه‌اش پذیرفته می‌شود؟

۱) ۰/۲۴۵ ۲) ۰/۲۴

۳) ۰/۱۹۵ ۴) ۰/۱۹

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

۱۸ دو سکه را پرتاب می‌کنیم. اگر هر دو سکه "رو" یا هر دو "پشت" ظاهر شوند، یک سکه دیگر می‌اندازیم، در غیراینصورت دو سکه دیگر پرتاب می‌کنیم. در مجموع با کدام احتمال، دقیقاً دو سکه به "پشت" ظاهر می‌شود؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$

۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{۳}{۸}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

۱۹ سه ظرف یکسان داریم که هرکدام به‌ترتیب حاوی ۱۶، ۱۵ و ۱۴ مهره هستند. تعداد مهره‌های قرمز سه ظرف، به‌ترتیب ۴، ۶ و ۵ مهره است. احتمال انتخاب هر ظرف متناسب با تعداد مهره‌های آن ظرف است. یکی از ظرف‌ها را انتخاب کرده و مهره‌ای بیرون می‌کشیم، با کدام احتمال، مهرهٔ انتخابی قرمز است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱۳۱}{۵۶۰}$

۳) $\frac{۱}{۵}$ ۴) $\frac{۱۷}{۱۲۰}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۲۰ یک تاس را آن‌قدر پرتاب می‌کنیم تا برای اولین بار، عدد مضرب ۳ ظاهر شود. با کدام احتمال، حداکثر در پرتاب سوم، این نتیجه حاصل می‌شود؟

۱) $\frac{۱۰}{۲۷}$ ۲) $\frac{۵}{۹}$

۳) $\frac{۱۶}{۲۷}$ ۴) $\frac{۱۹}{۲۷}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۵

۲۱ یک سکه را پرتاب می‌کنیم، اگر"رو" بیاید آنگاه تاس می‌ریزیم. اگر "پشت" بیاید دوباره سکه را پرتاب می‌کنیم. این عمل را آن‌قدر ادامه می‌دهیم تا مجاز به پرتاب تاس باشیم. با کدام احتمال، حداکثر بعد از پرتاب سوم سکه، عدد تاس مضرب ۳ است؟

۱) $\frac{۱}{۶}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$

۳) $\frac{۷}{۲۴}$ ۴) $\frac{۵}{۱۲}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۴

۲۲ در دو ظرف به ترتیب ۲۴ و ۱۸ مهره یکسان موجود است. در ظرف اول شش مهره سفید و در ظرف دوم سه مهره سفید است. از اولی هفت مهره و از دومی پنج مهره به‌تصادف برداشته و در ظرف دیگری می‌ریزیم. سپس از ظرف آخر یک مهره بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال این مهره سفید است؟

۱) $\frac{۱۳}{۷۲}$ ۲) $\frac{۷}{۳۶}$

۳) $\frac{۱۵}{۷۲}$ ۴) $\frac{۳۱}{۱۴۴}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۴

۲۳ در ظرفی ۴ مهرهٔ سفید و ۳ مهرهٔ سیاه است. به‌تصادف ۲ مهره از ظرف بدون رؤیت خارج شده است. از ۵ مهرهٔ باقی‌مانده یک مهره خارج می‌کنیم. با کدام احتمال این مهره سفید است؟

۱) $\frac{۱۲}{۳۵}$ ۲) $\frac{۳}{۷}$

۳) $\frac{۱۶}{۳۵}$ ۴) $\frac{۴}{۷}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۶

۲۴ در یک شهر صنعتی ۶۰ درصد جمعیت مرد و ۴۰ درصد آن زن هستند. اگر ۱۸ درصد مردان و ۱۲ درصد زنان تحصیلات دانشگاهی داشته باشند، چند درصد این جمعیت تحصیلات دانشگاهی دارند؟

۱) ۱۵/۲ ۲) ۱۵/۶

۳) ۱۵/۸ ۴) ۱۶/۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۶

۲۵ ظرف A دارای ۴ مهرهٔ سفید و ۵ مهرهٔ سیاه است و هریک از دو ظرف B و C دارای ۶ مهرهٔ سفید و ۳ مهرهٔ سیاه می‌باشند. به‌تصادف یکی از سه ظرف را انتخاب کرده و ۴ مهره از آن خارج می‌کنیم. با کدام احتمال، دو مهره از مهره‌های خارج‌شده، سفید است؟

۱) $\frac{۲۵}{۶۳}$ ۲) $\frac{۲۶}{۶۳}$

۳) $\frac{۱۰}{۲۱}$ ۴) $\frac{۱۱}{۲۱}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۳

۲۶ در ظرف اول ۳ مهرهٔ آبی و ۶ مهرهٔ قرمز و در ظرف دوم ۴ مهرهٔ آبی و ۵ مهرهٔ قرمز قرار دارند. دو تاس پرتاب می‌کنیم. اگر مجموع اعداد روشده بیشتر از ۹ باشد، به تصادف از ظرف اول یک مهره خارج کرده در ظرف دوم می‌اندازیم. در غیر این صورت از ظرف دوم یک مهره برداشته و به ظرف اول اضافه می‌کنیم. اکنون یک مهره از ظرف با مهرهٔ بیشتر انتخاب می‌کنیم. احتمال اینکه مهره قرمز باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۱۵۷}{۲۷۰}$ ۲) $\frac{۱۶۵}{۲۷۰}$

۳) $\frac{۱۷۳}{۲۷۰}$ ۴) $\frac{۱۸۰}{۲۷۰}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۰

۲۷ در جعبه‌ای ۶ مهرهٔ سفید و ۹ مهرهٔ سیاه موجود است. دو مهره متوالیاً و بدون جایگذاری بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال بدون توجه به اولین مهره، دومین مهرهٔ خارج‌شده سفید است؟

۱) $\frac{۵}{۱۴}$ ۲) $\frac{۳}{۷}$

۳) $\frac{۲}{۵}$ ۴) $\frac{۳}{۵}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۲

۲۸ در جعبهٔ اول ۶ مهرهٔ سفید و ۳ مهرهٔ سیاه و در جعبهٔ دوم ۴ مهرهٔ سفید و ۵ مهرهٔ سیاه قرار دارند. از جعبهٔ اول یک مهره به‌دلخواه خارج و در جعبهٔ دوم می‌اندازیم. سپس دو مهره از جعبهٔ دوم بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال، لااقل یکی از این دو مهره، سفید است؟

۱) $\frac{۲۰}{۲۷}$ ۲) $\frac{۳۴}{۴۵}$

۳) $\frac{۳۸}{۴۵}$ ۴) $\frac{۲۳}{۲۷}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

۲۹ سه ظرف داریم. در ظرف اول ۹ مهرهٔ سفید، در دومی ۹ مهرهٔ سیاه و در سومی ۴ مهرهٔ سفید و ۵ مهرهٔ سیاه قرار دارند. به‌تصادف از یک ظرف دو مهره بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال، لااقل یکی از این دو مهره سیاه است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱۱}{۱۸}$

۳) $\frac{۲۵}{۳۶}$ ۴) $\frac{۱۳}{۱۸}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۹

۳۰ در جعبهٔ اول ۴ مهرهٔ سفید و ۳ مهرهٔ سیاه و در جعبهٔ دوم ۳ مهرهٔ سفید و ۶ مهرهٔ سیاه موجود است. به تصادف یکی از جعبه‌ها را انتخاب کرده و دو مهره با هم از آن بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال هر دو مهره سفید است؟

۱) $\frac{۳۱}{۱۶۸}$ ۲) $\frac{۱۱}{۵۶}$

۳) $\frac{۱۷}{۸۴}$ ۴) $\frac{۱۳}{۵۶}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۲

۳۱ در جعبه‌ای ۶ مهرهٔ سفید، ۴ مهرهٔ سیاه است. دو مهره به‌صورت پی‌درپی و بدون جایگذاری از آن خارج می‌کنیم. با کدام احتمال، مهرهٔ دوم، سفید است؟

۱) ۰/۵ ۲) ۰/۶

۳) ۰/۶۴ ۴) ۰/۷۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۸

۳۲ بهروز جهت مشارکت در یک مسابقه، از بین پرسش‌های ۵ بستهٔ ریاضی، ۷ بستهٔ تجربی و ۶ بستهٔ علوم انسانی، به‌تصادف یک بسته اختیار کرده است. احتمال برنده‌شدن در هر بستهٔ این دروس به ترتیب ۰/۷، ۰/۸ و ۰/۹ است. با کدام احتمال، بهروز برنده می‌شود؟

۱) $\frac{۲۵}{۳۶}$ ۲) $\frac{۲۹}{۳۶}$

۳) $\frac{۳۰}{۳۶}$ ۴) $\frac{۳۱}{۳۶}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

۳۳ در دو جعبه به ترتیب ۲۰ و ۱۲ لامپ موجود است. در جعبهٔ اول ۴ لامپ و در جعبهٔ دوم ۳ لامپ معیوب است. از جعبهٔ اول ۵ لامپ و از جعبهٔ دوم ۷ لامپ، به تصادف برداشته و در جعبهٔ جدید قرار می‌دهیم. با کدام احتمال، یک لامپ انتخابی از جعبهٔ جدید، معیوب است؟

۱) $\frac{۵}{۲۴}$ ۲) $\frac{۱۱}{۴۸}$

۳) $\frac{۱۳}{۴۸}$ ۴) $\frac{۷}{۲۴}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۸

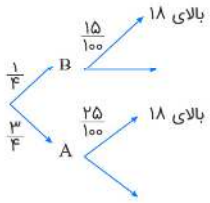
۱

کتاب درسی علوم تجربی دوازدهم ریاضی تمرین

الف

$$P(\text{از مدرسهٔ A}) = \frac{۳}{۴}$$
$$P(\text{از مدرسهٔ B}) = \frac{۱}{۴}$$

ب



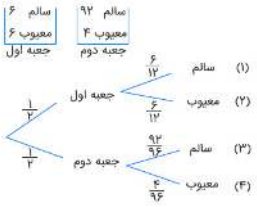
$$P(\text{معدل بالای ۱۸}) = \frac{۱}{۴} \times \frac{۱۵}{۱۰۰} + \frac{۳}{۴} \times \frac{۲۵}{۱۰۰} = \frac{۱۵ + ۷۵}{۴۰۰} = \frac{۹۰}{۴۰۰} = \frac{۹}{۴۰}$$

۲

$$P(\text{پذیرفته شدن}) = P(\text{پذیرفته شدن} \cap \text{ریاضی}) + P(\text{پذیرفته شدن} \cap \text{تجربی}) + P(\text{پذیرفته شدن} \cap \text{انسانی})$$
$$= P(\text{ریاضی}) \times P(\text{پذیرفته شدن}|\text{ریاضی}) + P(\text{تجربی}) \times P(\text{پذیرفته شدن}|\text{تجربی})$$
$$+ P(\text{انسانی}) \times P(\text{پذیرفته شدن}|\text{انسانی})$$

$$= \frac{۱}{۱۰} \times \frac{۴۵}{۱۰۰} + \frac{۶}{۱۰} \times \frac{۱۰}{۱۰۰} + \frac{۳}{۱۰} \times \frac{۳۰}{۱۰۰} = \frac{۴۵}{۱۰۰۰} + \frac{۶۰}{۱۰۰۰} + \frac{۹۰}{۱۰۰۰} = \frac{۱۹۵}{۱۰۰۰} = ۰/۱۹۵$$

۳



خواستهٔ مسئله معیوب بودن لامپ می‌باشد، بنابراین شاخه‌های (۲) و (۴) مدنظر است که طبق قانون احتمال کل به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

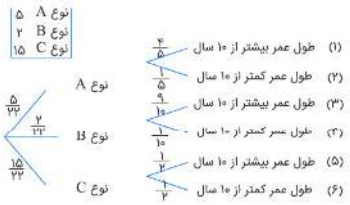
$$P = P(\text{شاخهٔ }(۱)) + P(\text{شاخهٔ }(۲))$$
$$= \frac{۱}{۲} \times \frac{۶}{۱۲} + \frac{۱}{۲} \times \frac{۴}{۹۶} = \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۴۸} = \frac{۱۳}{۴۸}$$

لازم به توضیح است که احتمال در هر شاخه به‌صورت زیر محاسبه شده است:

$$P(\text{شاخهٔ ۱}) = P(\text{جعبهٔ اول}) \times P(\text{معیوب}|\text{جعبهٔ اول})$$
$$P(\text{شاخهٔ ۲}) = P(\text{جعبهٔ دوم}) \times P(\text{معیوب}|\text{جعبهٔ دوم})$$

کتاب درسی علوم تجربی دوازدهم ریاضی تمرین

۴

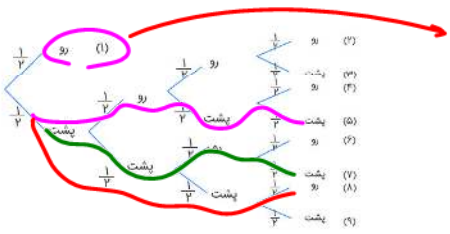


خواستهٔ مسئله، طول عمر بیشتر از ۱۰ سال است که این اتفاق در شاخه‌های ۱، ۳ و ۵ رخ می‌دهد.

$$P = P(\text{شاخهٔ ۱}) + P(\text{شاخهٔ ۳}) + P(\text{شاخهٔ ۵})$$
$$= \frac{۵}{۲۲} \times \frac{۴}{۵} + \frac{۲}{۲۲} \times \frac{۹}{۱۰} + \frac{۱۵}{۲۲} \times \frac{۱}{۲}$$
$$= \frac{۲}{۱۱} + \frac{۹}{۱۱۰} + \frac{۱۵}{۴۴} = \frac{۴۰ + ۱۸ + ۷۵}{۲۲۰} = \frac{۱۳۳}{۲۲۰}$$

کتاب درسی علوم تجربی دوازدهم ریاضی تمرین

۵



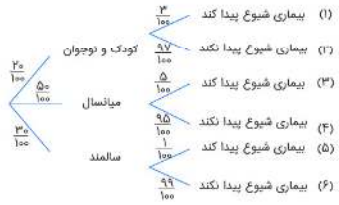
حالت مطلوب درخت فوق: ۱، ۵، ۷، ۹ رخ می‌دهد.

خواستهٔ مسئله، آمدن دقیقاً یک سکه به رو می‌باشد که این اتفاق در شاخه‌های ۱، ۵، ۷ و ۸ رخ می‌دهد، بنابراین:

$$P = P(\text{شاخهٔ ۱}) + P(\text{شاخهٔ ۵}) + P(\text{شاخهٔ ۷}) + P(\text{شاخهٔ ۸})$$
$$= \frac{۱}{۲} + \left(\frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲}\right) + \left(\frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲}\right) + \left(\frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲}\right)$$
$$= \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۱۶} + \frac{۱}{۱۶} + \frac{۱}{۱۶} = \frac{۸ + ۳}{۱۶} = \frac{۱۱}{۱۶}$$

کتاب درسی علوم تجربی دوازدهم ریاضی تمرین

۶

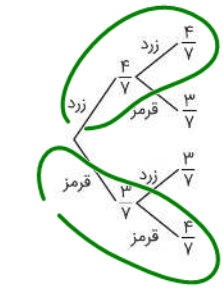


احتمال موردنظر شاخه‌های ۱ و ۳ و ۵ است که به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$P = P(\text{شاخهٔ ۱}) + P(\text{شاخهٔ ۳}) + P(\text{شاخهٔ ۵})$$
$$= \frac{۲۰}{۱۰۰} \times \frac{۳}{۱۰۰} + \frac{۵۰}{۱۰۰} \times \frac{۵}{۱۰۰} + \frac{۳۰}{۱۰۰} \times \frac{۱}{۱۰۰} = \frac{۳۴۰}{۱۰۰۰۰} = ۰/۰۳۴$$

کتاب درسی علوم تجربی دوازدهم ریاضی تمرین

۷ گزینه ۲



حالات مطلوب — کل حالات — هر دو زرد

$$P(\text{هر دو زرد} \mid \text{همرنگ باشند}) = \frac{\frac{۴}{۷} \times \frac{۴}{۷}}{(\frac{۳}{۷} \times \frac{۴}{۷}) + (\frac{۴}{۷} \times \frac{۴}{۷})} = \frac{۱۶}{۱۲ + ۱۶} = \frac{۴}{۷}$$

به شرطی — هر دو زرد یا هر دو قرمز

علوی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۱۱ ۱۴۰۱

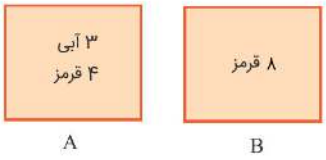
۸ گزینه ۳

۵ مهره انتخابی، سه تا از A و دو تا از B بوده است.

$$P = \frac{۳}{۵} \times \frac{۵}{۷} + \frac{۲}{۵} \times \frac{۲}{۷} = \frac{۱۵ + ۴}{۳۵} = \frac{۱۹}{۳۵}$$

علوی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۱۲ ۱۴۰۱

۹ گزینه ۳



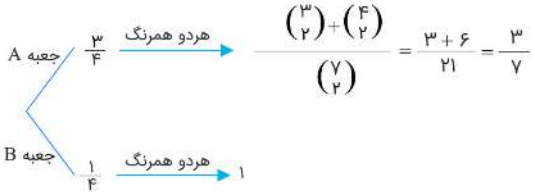
ترکیب $\binom{۷}{۲} = \frac{۷!}{۲!(۷-۲)!} = ۲۱$

تنی $\binom{۷}{۲} = \frac{۷ \times ۶}{۱ \times ۲} = ۲۱$

$$P(A)+P(B)=۱ \xrightarrow{P(A)=۳P(B)} \begin{cases} P(B)=\frac{۱}{۴} \\ P(A)=\frac{۳}{۴} \end{cases}$$

$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

$\binom{۵}{۳} = \frac{۵ \times ۴ \times ۳}{۱ \times ۲ \times ۳} = ۱۰$

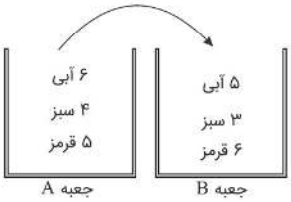


$$\frac{\binom{۳}{۲}+\binom{۴}{۲}}{\binom{۷}{۲}} = \frac{۳+۶}{۲۱} = \frac{۳}{۷}$$

$$P(\text{هر دو همرنگ}) = \frac{۳}{۴} \times \frac{۳}{۷} + \frac{۱}{۴} \times ۱ = \frac{۹}{۲۸} + \frac{۷}{۲۸} = \frac{۱۶}{۲۸} = \frac{۴}{۷}$$

علوی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۱۰ ۱۴۰۱

۱۰ گزینه ۱



احتمال آبی بودن را $P(C)$ در نظر می‌گیریم. احتمال آبی بودن مهره انتخابی از جعبه B برابر است با:

$$P(C) = \left(\frac{۶}{۱۵} \times \frac{۶}{۱۵}\right) + \left(\frac{۹}{۱۵} \times \frac{۵}{۱۵}\right) = \frac{۸۱}{۲۲۵} = ۰/۳۶$$

(از A آبی و از B آبی) یا (از A سبز و از B آبی)

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

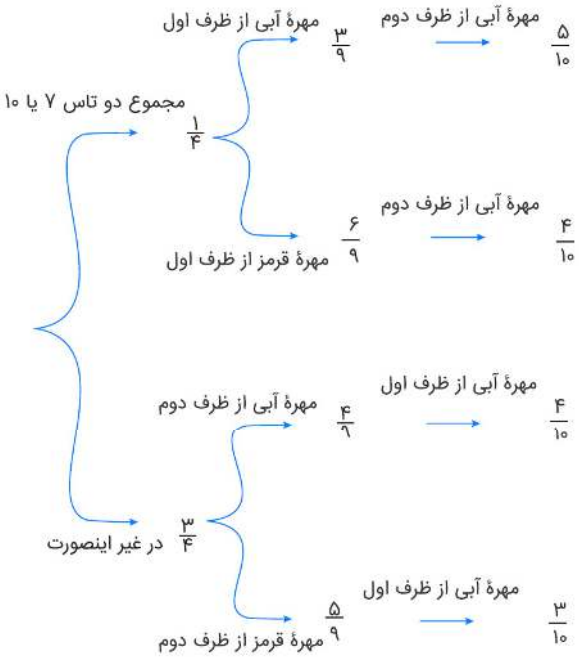
۱۱ گزینه ۲

مجموع دو تاس ۷ یا ۱۰ $= \{(۱,۶),(۶,۱),(۲,۵),(۵,۲),(۳,۴)$

$,(۴,۳),(۴,۶),(۶,۴),(۵,۵)\} \Rightarrow$ ۹ عضو

$$P(\text{مجموع دو تاس ۷ یا ۱۰}) = \frac{۹}{۳۶}$$

$$P(\text{مجموع دو تاس غیر از ۷ یا ۱۰}) = \frac{۲۷}{۳۶}$$



با فرمول احتمال کل داریم:

$$\frac{۱}{۴}(\frac{۳}{۹}\times\frac{۵}{۱۰}+\frac{۶}{۹}\times\frac{۴}{۱۰})+\frac{۳}{۴}(\frac{۴}{۹}\times\frac{۴}{۱۰}+\frac{۵}{۹}\times\frac{۳}{۱۰})=\frac{۱۱}{۳۰}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۰

۱۲ گزینه ۲

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۰

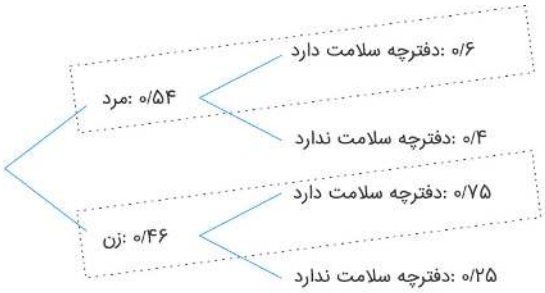
گام اول

فرد انتخاب شده با احتمال۰/۵۴ مرد و با احتمال ۰/۴۶ زن است.

هر مرد با احتمال ۰/۶ دفترچه دارد و با احتمال $۰/۴ = ۰/۶ - ۱$ دفترچه ندارد. همچنین هر زن با احتمال ۰/۷۵ دفترچه دارد و با احتمال ۰/۲۵ دفترچه ندارد.

گام دوم

با رسم یک نمودار درختی می‌توان احتمال دفترچه‌دار بودن فرد انتخاب شده را محاسبه کرد.



حالت مطلوب می‌تواند به صورت مردی با دفترچه باشد یا یک زن با دفترچه، پس:

$$\text{P (دفترچه دار بودن)} = \text{P (مرد با دفترچه)} + \text{P (زن با دفترچه)}$$

$$= (۰/۵۴ \times ۰/۶) + (۰/۴۶ \times ۰/۷۵) = ۰/۳۲۴ + ۰/۳۴۵ = ۰/۶۶۹$$

۱۳ گزینه ۱

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۹

گام اول

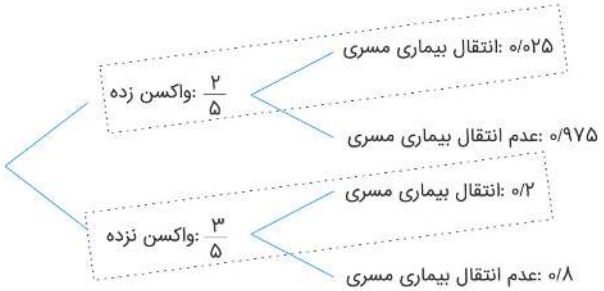
الف) هر یک از کارگران کارگاه می‌توانند واکسن زده باشند یا واکسن نزده باشند. احتمال این‌که کارگری واکسن زده باشد $\frac{۲}{۵}$ و احتمال این‌که واکسن نزده باشد $\frac{۳}{۵} = ۱ - \frac{۲}{۵}$ است.

ب) هر فرد واکسن زده با احتمال ۰/۰۲۵ بیماری مسری را می‌گیرد و با احتمال $۰/۹۷۵ = ۰/۰۲۵ - ۱$ بیمار نمی‌شود.

ج) هر فردی که واکسن نزده باشد با احتمال ۰/۲ بیماری مسری را می‌گیرد و با احتمال $۰/۸ = ۰/۲ - ۱$ بیمار نمی‌شود.

گام دوم

با استفاده از نمودار درختی احتمال این‌که یک کارگر به بیماری مسری مبتلا شود را محاسبه می‌کنیم.



$$P(\text{انتقال بیماری به کارگر}) = P(\text{انتقال به واکسن زده}) + P(\text{انتقال به واکسن نزده})$$

$$= \left(\frac{۲}{۵} \times ۰/۰۲۵\right) + \left(\frac{۳}{۵} \times ۰/۲\right) = ۰/۰۱ + ۰/۱۲ = ۰/۱۳$$

۱۴ گزینه ۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۳

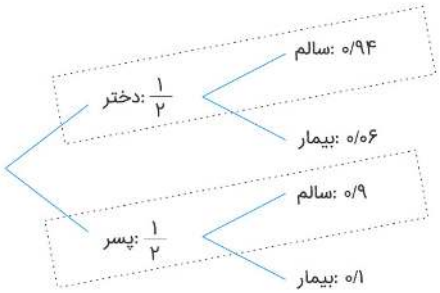
گام اول

الف) هر فرزند پسر با احتمال ۰/۱ بیماری ارثی از والدینش دریافت می‌کند و با احتمال ۰/۹ دریافت نمی‌کند و سالم است. به همین ترتیب هر فرزند دختر با احتمال ۰/۰۶ بیماری ارثی دریافت می‌کند و با احتمال ۰/۹۴ دریافت نمی‌کند و سالم است.

ب) به کلمه ندارد دقت کنید. احتمال سالم بودن فرزند به دنیا آمده را باید حساب کرد.

گام دوم

هر فرزند به دنیا آمده با احتمال $\frac{۱}{۲}$ دختر و با احتمال $\frac{۱}{۲}$ پسر است. دو حالت مطلوب وجود دارد: فرزند پسر و سالم باشد یا فرزند دختر و سالم باشد. با استفاده از نمودار درختی احتمال خواسته شده را محاسبه می‌کنیم.



$$\text{P (سالم بودن فرزند)} = \text{P (دختر و سالم)} + \text{P (پسر و سالم)} = \left(\frac{۱}{۲} \times ۰/۹۴\right) + \left(\frac{۱}{۲} \times ۰/۹\right) = ۰/۴۷ + ۰/۴۵ = ۰/۹۲ = ۹۲\%$$

۱۵ گزینه ۲

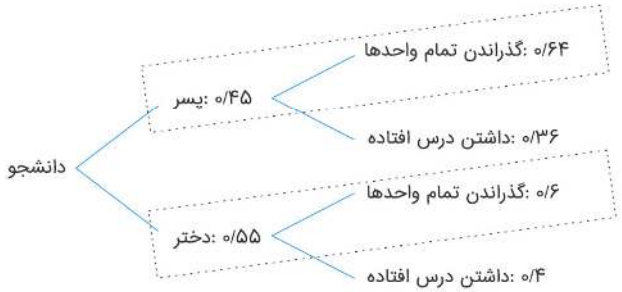
کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۸

گام اول

هر دانشجوی سال اول با احتمال ۰/۵۵ دختر است و با احتمال ۰/۴۵ پسر است. هر دانشجوی دختر با احتمال ۰/۶ تمام واحدهای درسی خود را گذرانده و با احتمال ۰/۴ درس افتاده دارد. همچنین هر دانشجوی پسر با احتمال ۰/۶۴ تمام واحدهای درسی خود را گذرانده و با احتمال ۰/۳۶ درس افتاده دارد.

گام دوم

با استفاده از نمودار درختی می‌توان احتمال این‌که هر دانشجو تمام واحد درسی خود را گذرانده باشد، را حساب کرد:



$$P(\text{گذراندن تمام واحدها}) = P(\text{پسر و گذراندن تمام واحدها}) + P(\text{دختر و گذراندن تمام واحدها})$$

$$= (۰/۴۵ \times ۰/۶۴) + (۰/۵۵ \times ۰/۶) = ۰/۶۱۸$$

بنابراین ۶۱/۸ درصد از دانشجویان تمام واحدهای درسی را گذرانده‌اند.

۱۶ گزینه ۴

$$۰/۴ \times ۰/۲۵ + ۰/۳۵ \times ۰/۳ + ۰/۲۵ \times ۰/۳۵ = ۰/۱ + ۰/۱۰۵ + ۰/۰۸۷۵ = ۰/۲۹۲۵$$

۲۹/۲۵ درصد احتمال دارد امیر در رشته پزشکی قبول شود.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۱۷ گزینه ۱

با استفاده از فرمول احتمال کل داریم:

$$P = ۰/۴۵ \times ۰/۲ + ۰/۲ \times ۰/۲۵ + ۰/۳۵ \times ۰/۳ = ۰/۲۴۵$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

۱۸ گزینه ۴

$$\text{پرتاب دو سکه}: \begin{cases} \text{جفت رو}: \frac{۱}{۴} \Rightarrow \text{یک سکه می‌اندازیم} \xrightarrow[\text{داشته باشیم}]{\text{دو سکه پشت}} \text{صفر} \\ (\text{رو},\text{پشت}): \frac{۱}{۴} \Rightarrow \text{دو سکه می‌اندازیم} \xrightarrow[\text{داشته باشیم}]{\text{دو سکه پشت}} \frac{۱}{۲}: \text{یکی پشت و یکی رو می‌خواهیم} \\ (\text{پشت},\text{رو}): \frac{۱}{۴} \Rightarrow \text{دو سکه می‌اندازیم} \xrightarrow[\text{داشته باشیم}]{\text{دو سکه پشت}} \frac{۱}{۲}: \text{یکی پشت و یکی رو می‌خواهیم} \\ \text{جفت پشت}: \frac{۱}{۴} \Rightarrow \text{یک سکه می‌اندازیم} \xrightarrow[\text{داشته باشیم}]{\text{دو سکه پشت}} \frac{۱}{۲}: \text{یک رو ظاهر شود} \end{cases}$$

$$\text{در کل}: \frac{۱}{۴} \times ۰ + \frac{۱}{۴} \times \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۴} \times \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۴} \times \frac{۱}{۲} = \frac{۳}{۸}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

۱۹ گزینه ۱

$$۱۴x + ۱۵x + ۱۶x = ۱ \Rightarrow x = \frac{۱}{۴۵}$$

$$P(A) = \frac{۱۴}{۴۵} \times \frac{۵}{۱۴} + \frac{۱۵}{۴۵} \times \frac{۶}{۱۵} + \frac{۱۶}{۴۵} \times \frac{۴}{۱۶} = \frac{۵+۶+۴}{۴۵} = \frac{۱۵}{۴۵} = \frac{۱}{۳}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۲۰ گزینه ۴

از میان اعداد روی تاس، فقط دو عدد ۳ و ۶ مضرب ۳ هستند، بنابراین احتمال ظاهر شدن مضرب ۳ در یک پرتاب تاس برابر با $\frac{۲}{۶}$ و احتمال ظاهر نشدنش برابر با $\frac{۴}{۶}$ است. احتمال اینکه حداکثر در پرتاب سوم برای اولین‌بار، مضرب ۳ ظاهر شود معادل است با اینکه یا در پرتاب اول مضرب ۳ ظاهر شود ($P(\text{پرتاب اول مضرب ۳})$) یا در پرتاب دوم مضرب ۳ ظاهر شود ($P(\text{پرتاب دوم مضرب ۳})$) و یا در پرتاب سوم مضرب ۳ ظاهر شود ($P(\text{پرتاب سوم مضرب ۳})$). داریم:

بار اول مضرب ۳ بیاید:

$$P_۱ = \frac{۲}{۶} = \frac{۱}{۳}$$

بار اول مضرب ۳ نیاید و بار دوم مضرب ۳ بیاید:

$$P_۲ = \frac{۴}{۶} \times \frac{۲}{۶} = \frac{۸}{۳۶} = \frac{۲}{۹}$$

بار اول و دوم مضرب ۳ نیاید و بار سوم مضرب ۳ بیاید:

$$P_۳ = \frac{۴}{۶} \times \frac{۴}{۶} \times \frac{۲}{۶} = \frac{۳۲}{۲۱۶} = \frac{۴}{۲۷}$$

بنابراین احتمال اینکه حداکثر در پرتاب سوم، برای اولین‌بار مضرب ۳ ظاهر شود برابر است با:

$$P = P_۱ + P_۲ + P_۳ = \frac{۱}{۳} + \frac{۲}{۹} + \frac{۴}{۲۷} = \frac{۱۹}{۲۷}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۵

۲۱ گزینه ۳

می‌دانیم هر سکه دو حالت دارد پس احتمال ظاهر شدن هریک از حالت‌ها برابر $\frac{۱}{۲}$ است، همچنین در پرتاب یک تاس، با احتمال $\frac{۲}{۶}$ عدد ظاهرشده مضرب ۳ خواهد بود. باتوجه‌به صورت سؤال اگر در پرتاب سکه "رو" بیاید، تاس می‌ریزیم و اگر "پشت" بیاید، دوباره سکه پرتاب می‌کنیم. می‌خواهیم حداکثر در پرتاب سوم سکه، عدد تاس مضرب ۳ باشد؛ بنابراین باید یکی از سه حالت زیر اتفاق بیفتد:

حالت اول: در اولین پرتاب سکه، "رو" بیاید و با پرتاب تاس، عدد ظاهرشده مضرب ۳ باشد (A).

$$P(A) = \overset{\text{رو}}{\frac{۱}{۲}} \times \overset{\text{مضرب ۳}}{\frac{۲}{۶}} = \frac{۱}{۶}$$

حالت دوم: در اولین پرتاب سکه، "پشت" و در دومین پرتاب سکه، "رو" بیاید و با پرتاب تاس، مضرب ۳ ظاهر شود (B).

$$P(B) = \overset{\text{پشت}}{\frac{۱}{۲}} \times \overset{\text{رو}}{\frac{۱}{۲}} \times \overset{\text{مضرب ۳}}{\frac{۲}{۶}} = \frac{۱}{۱۲}$$

حالت سوم: در اولین و دومین پرتاب سکه، "پشت" و در سومین پرتاب سکه، "رو" بیاید سپس با پرتاب تاس، مضرب ۳ ظاهر شود (C).

$$P(C) = \overset{\text{پشت}}{\frac{۱}{۲}} \times \overset{\text{پشت}}{\frac{۱}{۲}} \times \overset{\text{رو}}{\frac{۱}{۲}} \times \overset{\text{مضرب ۳}}{\frac{۲}{۶}} = \frac{۱}{۲۴}$$

بنابراین داریم:

$$P(A) + P(B) + P(C) = \frac{۱}{۶} + \frac{۱}{۱۲} + \frac{۱}{۲۴} = \frac{۴+۲+۱}{۲۴} = \frac{۷}{۲۴}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۴

۲۲ گزینه ۴

اگر مهره‌ای را از ظرف آخر برداریم به احتمال $\frac{۷}{۱۲}$ متعلق به ظرف اول است. پس با قانون احتمال کل داریم:

$$P(\text{مهره سفید}) \begin{cases} \text{مهره از ظرف اول} \Rightarrow \frac{۷}{۱۲} \xrightarrow{\text{احتمال سفید بودن}} \frac{۶}{۲۴} \\ \text{مهره از ظرف دوم} \Rightarrow \frac{۵}{۱۲} \xrightarrow{\text{احتمال سفید بودن}} \frac{۳}{۱۸} \end{cases} \Rightarrow P(\text{مهره سفید}) = \frac{۷}{۱۲} \times \frac{۶}{۲۴} + \frac{۵}{۱۲} \times \frac{۳}{۱۸} = \frac{۳۱}{۱۴۴}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۴

۲۳ گزینه ۴

درصورتی‌که از رنگ دو مهرهٔ خارج‌شده اطلاعی نداشته باشیم، احتمال آنکه مهرهٔ سوم خارج‌شده، سفید باشد دقیقاً مانند آن است که اولین مهرهٔ خارج‌شده سفید باشد یعنی $P(A) = \frac{۴}{۷}$ است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۶

۲۴ گزینه ۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۶

گام اول

فرد تحصیل‌کرده می‌تواند زن با تحصیلات دانشگاهی یا مرد با تحصیلات دانشگاهی باشد. برای حل سؤال از قانون احتمال کل (نمودار درختی) استفاده می‌کنیم.

گام دوم

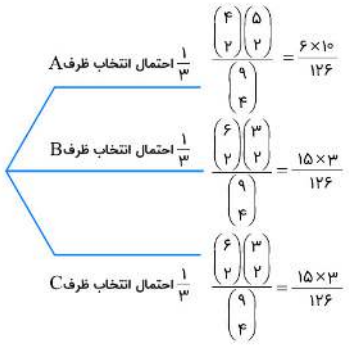
$$\begin{cases} \text{مرد} : ۰/۶ \xrightarrow{\text{تحصیلات دانشگاهی}} ۰/۱۸ \\ \text{زن} : ۰/۴ \xrightarrow{\text{تحصیلات دانشگاهی}} ۰/۱۲ \end{cases}$$

$$P(\text{تحصیلات دانشگاهی}) = (۰/۶ \times ۰/۱۸) + (۰/۴ \times ۰/۱۲) = ۰/۱۰۸ + ۰/۰۴۸$$

$$= ۰/۱۵۶ \Rightarrow P(\text{تحصیلات دانشگاهی}) = \%۱۵/۶$$

۲۵ گزینه ۱

دقت کنید که چون می‌خواهیم احتمال آن را بیابیم که ۲ مهره از ۴ مهرهٔ انتخابی سفید باشد بنابراین باید ۲ مهرهٔ دیگر سیاه باشند و چون سه ظرف داریم، احتمال انتخاب هریک از ۳ ظرف $\frac{۱}{۳}$ است. احتمال آنکه از هر ظرف ۲ مهرهٔ سیاه و ۲ مهرهٔ سفید خارج شود را پیدا می‌کنیم:



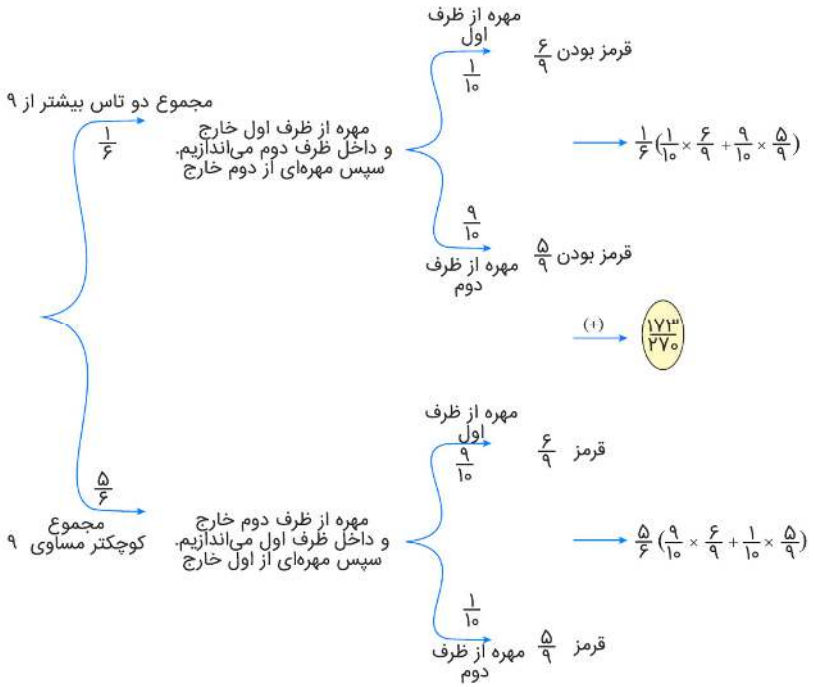
$$\Rightarrow P(E) = \frac{۱}{۳}\left(\frac{۶۰}{۱۲۶} + \frac{۴۵}{۱۲۶} + \frac{۴۵}{۱۲۶}\right) = \frac{۱}{۳} \times \frac{۱۵۰}{۱۲۶} = \frac{۵۰}{۱۲۶} = \frac{۲۵}{۶۳}$$

توجه کنید:

$$\binom{n}{۲} = \frac{n(n-۱)}{۲} \Rightarrow \begin{cases} \binom{۶}{۲} = \frac{۶ \times ۵}{۲} = ۱۵ \\ \binom{۵}{۲} = \frac{۵ \times ۴}{۲} = ۱۰ \end{cases}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۳

۲۶ گزینه ۳



کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۰

۲۷ گزینه ۳

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۲

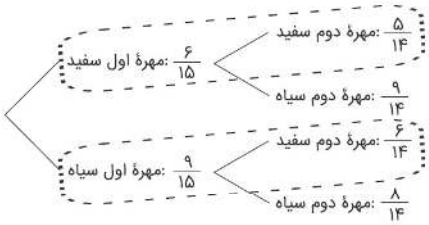
گام اول

الف) مهره اول خارج شده می‌تواند سفید یا سیاه باشد. احتمال سفیدبودن مهرهٔ دوم بر اساس حالت مهرهٔ اول قابل محاسبه است.

ب) از نگاهی دیگر، چون رنگ مهرهٔ اول را نمی‌دانیم فرض می‌کنیم هنوز مهره‌ای خارج نشده و احتمال سفیدبودن مهرهٔ دوم را محاسبه می‌کنیم.

گام دوم

روش اول:



بنابراین داریم:

$$P\ (\text{دو مهرهٔ سفید}) = \left(\frac{۶}{۱۵} \times \frac{۵}{۱۴}\right) + \left(\frac{۹}{۱۵} \times \frac{۶}{۱۴}\right) = \frac{۳۰ + ۵۴}{۲۱۰} = \frac{۸۴}{۲۱۰} = \frac{۲}{۵}$$

روش دوم:

بدون توجه به رنگ مهرهٔ اول و با فرض اینکه هنوز مهره‌ای خارج نشده، احتمال سفیدبودن رنگ مهرهٔ دوم برابر $\frac{۲}{۵}$ است.

۲۸ گزینه ۱

احتمال خواسته‌شده را به‌صورت زیر مرحله‌به‌مرحله بررسی می‌کنیم:

$$P(A) = \text{احتمال حداقل یک مهرهٔ سفید} \times \text{اگر مهرهٔ خارج‌شده از ظرف اول سفید باشد} + \text{احتمال حداقل یک مهرهٔ سفید} \times \text{اگر مهره خارج‌شده از ظرف اول سیاه باشد}$$

$$P(A) = \frac{۶}{۹} \times \frac{\binom{۵}{۲} + \binom{۵}{۱}\binom{۵}{۱}}{\binom{۱۰}{۲}} + \frac{۳}{۹} \times \frac{\binom{۴}{۲} + \binom{۴}{۱}\binom{۶}{۱}}{\binom{۱۰}{۲}}$$

$$= \frac{۲}{۳} \times \frac{۱۰ + ۲۵}{۴۵} + \frac{۱}{۳} \times \frac{۶ + ۲۴}{۴۵} = \frac{۲ \times ۳۵ + ۱ \times ۳۰}{۳ \times ۴۵} = \frac{۷۰ + ۳۰}{۳ \times ۴۵} = \frac{۱۰۰}{۳ \times ۴۵} = \frac{۲۰}{۲۷}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

۲۹ گزینه ۲

شکل نمودار درختی مسئله به‌صورت زیر است:

احتمال خواسته‌شده عبارت است از:

$$P(A)=\frac{1}{3}\times\frac{0}{\binom{9}{2}}+\frac{1}{3}\times\frac{\binom{9}{2}}{\binom{9}{2}}+\frac{1}{3}\times\frac{\binom{5}{2}+\binom{4}{1}\binom{5}{1}}{\binom{9}{2}}$$
$$=0+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{10+20}{36}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{30}{36}=\frac{1}{3}\times(1+\frac{5}{6})=\frac{1}{3}\times\frac{11}{6}=\frac{11}{18}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۹

۳۰ گزینه ۱

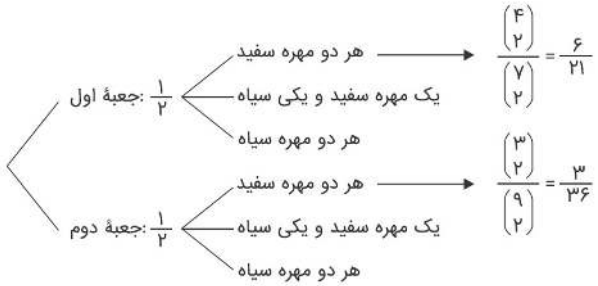
کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۲

گام اول

الف) احتمال انتخاب هر یک از جعبه‌ها برابر $\frac{1}{2}$ است.

ب) احتمال سفید بودن دو مهره خارج شده از هر یک از جعبه‌ها را تعیین کرده و با استفاده از نمودار درختی احتمال کل را محاسبه می‌کنیم.

گام دوم



$$P(\text{هر دو مهره سفید})=P(\text{جعبهٔ اول و سفید})+P(\text{جعبهٔ دوم و سفید})$$
$$=\left(\frac{1}{2}\times\frac{6}{21}\right)+\left(\frac{1}{2}\times\frac{3}{36}\right)=\frac{31}{168}$$

۳۱ گزینه ۲

راه‌حل اول:

باتوجه‌به آنکه رنگ مهرهٔ اولی که از جعبه خارج شده، مشاهده نشده است، مثل این است که مهره‌ای خارج نشده، پس احتمال خروج مهرهٔ سفید در انتخاب دوم $\frac{۶}{۱۰} = ۰/۶$ است.

راه‌حل دوم:

پیشامد سفیدبودن کارت اول: B

پیشامد سیاه‌بودن کارت اول: B'

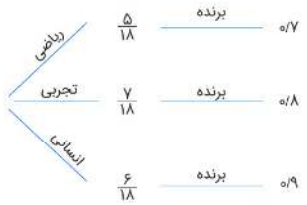
پیشامد سفیدبودن کارت دوم: A

$$P(A) = P(B)P(A|B) + P(B')P(A|B') = \frac{۶}{۱۰} \times \frac{۵}{۹} + \frac{۴}{۱۰} \times \frac{۶}{۹}$$
$$= \frac{۵۴}{۹۰} = ۰/۶$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۸

۳۲ گزینه ۲

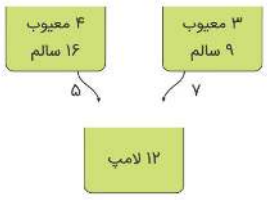
فرض کنید A پیشامد برنده‌شدن بهروز باشد، پس:



$$P(A) = \frac{۵}{۱۸} \times ۰/۷ + \frac{۷}{۱۸} \times ۰/۸ + \frac{۶}{۱۸} \times ۰/۹$$
$$= \frac{۳۵}{۱۸۰} + \frac{۵۶}{۱۸۰} + \frac{۵۴}{۱۸۰} = \frac{۱۴۵}{۱۸۰} = \frac{۲۹}{۳۶}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

۳۳ گزینه ۲



در جعبهٔ جدید در کل ۱۲ لامپ وجود دارد. حال اگر لامپی از جعبهٔ جدید انتخاب کنیم، احتمال اینکه به ترتیب متعلق به جعبهٔ اول و دوم باشد برابر $\frac{۵}{۱۲}$ و $\frac{۷}{۱۲}$ است. همچنین احتمال معیوب‌بودن لامپ جعبهٔ اول و دوم برابر $\frac{۴}{۲۰}$ و $\frac{۳}{۱۲}$ است. فرض کنید A پیشامد معیوب‌بودن لامپ جعبهٔ جدید باشد، پس:

$$P(A) = \frac{۵}{۱۲} \times \frac{۴}{۲۰} + \frac{۷}{۱۲} \times \frac{۳}{۱۲} = \frac{۱}{۱۲} + \frac{۷}{۴۸} = \frac{۱۱}{۴۸}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۸

شمارش بدون شمردن

Homework

۱ یک کودک ۳ مکعب مستطیل یکسان با رنگ‌های مختلف دارد. او به چند طریق می‌تواند با روی هم قرار دادن یک یا چند تا از آن‌ها یک ستون بسازد؟

۱) ۱۵ ۲) ۷۸

۳) ۶۶ ۴) ۴۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۳

۲ با ارقام ۰, ۱, ۲, ۴, ۵, ۷ چند عدد سه‌رقمی فرد بدون تکرار رقم‌ها که مضرب ۵ نباشد، می‌توان نوشت؟

۱) ۴۸ ۲) ۴۰

۳) ۳۶ ۴) ۳۲

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۴۰۳

۳ یک فروشگاه دارای ۵ درب است. وقتی مشتری از یک در وارد می‌شود باید از درب دیگری خارج شود. زهرا و نازنین به چند طریق می‌توانند از فروشگاه خرید کنند به طوری که آن ها از درب ورودی و خروجی یکسانی استفاده نکرده باشند؟

۱) ۳۲۰ ۲) ۲۶۰

۳) ۱۶۰ ۴) ۱۳۰

کنکور سراسری علوم انسانی خارج از کشور ۱۴۰۲

۴ یک پارکینگ دارای ۴ درب است. وقتی از یک در وارد می‌شوید باید از درب دیگر خارج شوید. به چند طریق حسن و علی می‌توانند از این پارکینگ استفاده کنند به طوری که آن‌ها درب ورودی و درب خروجی یکسانی نداشته باشند؟

۱) ۱۶۸ ۲) ۱۰۸

۳) ۸۴ ۴) ۵۴

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۴۰۲

۵ چند عدد طبیعی پنج رقمی با ارقام غیرتکراری می‌توان نوشت که ارقام آن یک در میان زوج و فرد باشند؟

۱) ۱۸۴۰ ۲) ۱۹۲۰

۳) ۲۱۶۰ ۴) ۲۴۰۰

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۱

۶ با ارقام ۵ ,۴ ,۳ ,۲ ,۱ ,۰، چند عدد چهاررقمی بخش‌پذیر بر ۵، بدون تکرار رقم‌ها، می‌توان نوشت؟

۱) ۷۲
۲) ۹۶
۳) ۱۰۸
۴) ۱۲۰

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۳۹۸

۷ با ارقام موجود در مجموعهٔ {۱۰, ۸, ۷, ۶, ۴, ۲}، چند عدد پنج رقمی فرد، بدون تکرار رقم‌ها، می‌توان نوشت؟

۱) ۱۲۰
۲) ۱۸۰
۳) ۲۴۰
۴) ۳۰۰

کنکور سراسری علوم انسانی خارج از کشور ۱۳۹۸

۸ تعداد اعداد چهاررقمی با ارقام غیرتکراری که شامل رقم ۵ باشند، کدام است؟

۱) ۱۸۴۸
۲) ۱۷۹۲
۳) ۱۷۴۸
۴) ۱۶۵۸

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

۹ تعداد اعداد طبیعی چهاررقمی بخش‌پذیر بر ۵، با ارقام غیرتکراری، کدام است؟

۱) ۹۴۸
۲) ۹۵۲
۳) ۹۶۸
۴) ۹۷۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۹

۱۰ چند عدد چهاررقمی با ارقام متمایز و فرد، بزرگ‌تر از ۳۰۰۰ وجود دارد؟

۱) ۷۲
۲) ۸۴
۳) ۹۶
۴) ۱۰۸

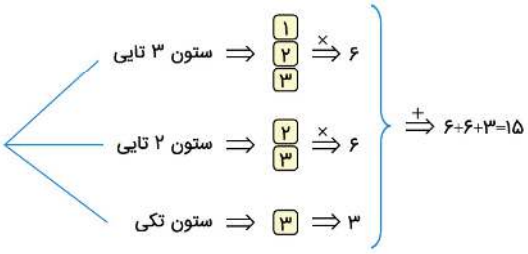
کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

پاسخ Homework

۱ گزینه ۲

صورت سوال ابهام دارد و دیدگاه‌های زیر مطرح می‌شود:

- دیدگاه اول: مهم نیست که مکعب مستطیل‌ها از کدام وجه بر روی یکدیگر قرار گیرند که در این صورت گزینهٔ ۱ صحیح است:



- دیدگاه دوم: سه مکعب مستطیل روی یکی از وجوه مانند هم، روی هم قرار گیرند که تعداد حالات سه برابر حالت بالا خواهد بود یعنی:

$$۱۵ \times ۳ = ۴۵$$

که پاسخ در گزینه‌ها نیست.

- دیدگاه سوم: مکعب مستطیل‌ها به هر ترتیب دلخواهی می‌توانند روی هم قرار گیرند، یعنی حتماً به روی وجه بزرگ‌تر یا کوچک‌تر روی هم چیده نشوند که در این صورت داریم:

$$۳ \times ۳ + ۳ \times ۲ \times ۳^{۲} + ۳ \times ۲ \times ۱ \times ۳^{۳} = ۹ \times ۲۵ = ۲۲۵$$

که پاسخ در گزینه‌ها نیست.

- دیدگاه چهارم: برای چیدن، مکعب مستطیل‌ها را بتوان به ۲ روش مختلف روی هم چید (یعنی یک وجه آن را مربع در نظر بگیریم) که در این صورت خواهیم داشت:

$$۳ \times ۲ + ۳ \times ۲ \times ۲^{۲} + ۳ \times ۲ \times ۱ \times ۲^{۳} = ۷۸$$

کلید سنجش گزینه ۲ است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۳

۲ گزینه ۴

کل اعداد سه‌رقمی بدون تکرار ارقام که فرد باشد و مضرب ۵ نباشد، برابر است با:

$$\underset{\substack{\text{به غیر از صفر}\\ \text{و رقم یکان}\\ \text{به‌کار برده شده}}}{\underline{\quad ۴ \quad}} \times \underline{\quad ۴ \quad} \times \underset{\{۷ \text{ یا } ۱\}}{\underline{\quad ۲ \quad}} = ۳۲$$

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۴۰۳

۳ گزینه ۲

حالت‌های زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\text{حالت اول} : \underset{\text{ورود A}}{\underline{\quad ۵ \quad}} \times \underset{\text{خروج A}}{\underline{\quad ۴ \quad}} \times \underset{\text{ورود B از جایی غیر از خروج A}}{\underline{\quad ۳ \quad}} \times \underset{\text{خروج B}}{\underline{\quad ۳ \quad}} = ۱۸۰$$

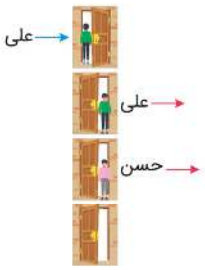
$$\text{حالت دوم} : \underset{\text{ورود A}}{\underline{\quad ۵ \quad}} \times \underset{\text{خروج A}}{\underline{\quad ۴ \quad}} \times \underset{\text{ورود B از خروج A}}{\underline{\quad ۱ \quad}} \times \underset{\text{خروج B}}{\underline{\quad ۴ \quad}} = ۸۰$$

$$\Rightarrow ۱۸۰ + ۸۰ = ۲۶۰$$

کنکور سراسری علوم انسانی خارج از کشور ۱۴۰۲

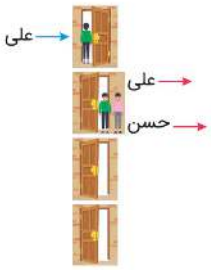
۴ گزینه ۳

حالت اول:



$$\frac{۴}{\text{ورود علی}} \times \frac{۳}{\text{خروج علی}} \times \frac{۲}{\text{ورود حسن از جایی غیر از در خروجی علی}} \times \frac{۲}{\text{خروج حسن}} = ۴۸$$

حالت دوم:



$$\frac{۴}{\text{ورود علی}} \times \frac{۳}{\text{خروج علی}} \times \frac{۱}{\text{ورود حسن از خروجی علی}} \times \frac{۳}{\text{خروج حسن}} = ۳۶$$

پس:

$$۳۶ + ۴۸ = ۸۴$$

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۴۰۲

۵ گزینه ۳

دو حالت داریم: (می‌دانیم ۵ رقم زوج به همراه صفر داریم و ۵ رقم فرد)

با فرد شروع کنیم : $\underline{۵}\ \underline{۵}\ \underline{۴}\ \underline{۴}\ \underline{۳} = ۱۲۰۰$

با زوج شروع کنیم : $\underline{۴}\ \underline{۵}\ \underline{۴}\ \underline{۴}\ \underline{۳} = ۹۶۰$

$$\Rightarrow ۱۲۰۰ + ۹۶۰ = ۲۱۶۰$$

توجه کنید که صفر ابتدای عدد نمی‌تواند ظاهر شود!

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۱

۶ گزینه ۳

$$\begin{cases} \text{حالت ۱}: ۵ \times ۴ \times ۳ \times \underbrace{۱}_{\text{فقط ۰}} \Rightarrow \text{جواب} = ۶۰ \\ \text{حالت ۲}: ۴ \times ۴ \times ۳ \times \underbrace{۱}_{\text{فقط ۵}} \Rightarrow \text{جواب} = ۴۸ \end{cases} \xrightarrow{+} \text{جواب نهایی} = ۱۰۸$$

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۳۹۸

۷ گزینه ۳

برای آنکه عدد فرد باشد، رقم یکان باید یکی از ارقام ۱ یا ۷ باشد، چون تکرار ارقام مجاز نیست. پس:

$$\underbrace{۵}_{\substack{\text{از ۶ رقم یکی در یکان} \\ \text{استفاده شد}}} \times \underline{}^{۴} \times \underline{}^{۳} \times \underline{}^{۲} \times \underbrace{۲}_{\{۱, ۷\}} = ۲۴۰$$

کنکور سراسری علوم انسانی خارج از کشور ۱۳۹۸

۸ گزینه ۱

رقم ۵ می‌تواند در جایگاه‌های هزارگان، صدگان، دهگان یا یکان باشد.

اگر رقم ۵ در جایگاه هزارگان باشد:

$$\underbrace{۱}_{\substack{\downarrow \\ ۵ \text{ باشد}}} \quad \underline{۹} \quad \underline{۸} \quad \underline{۷} : ۹ \times ۸ \times ۷ = ۵۰۴$$

اگر رقم ۵ در یکی از جایگاه‌های صدگان، دهگان یا یکان باشد:

$$\underbrace{۸}_{\substack{\downarrow \\ \text{صفر نباید} \\ \text{باشد}}} \quad \overbrace{\underline{} \quad \underline{} \quad \underline{}}^{۱ \times ۸ \times ۷} : ۸ \times ۱ \times ۸ \times ۷ \times ۳ = ۱۳۴۴$$

$\downarrow$ یک ۵ داشته باشد

پس تعداد حالات ممکن برابر است با:

$$۱۳۴۴ + ۵۰۴ = ۱۸۴۸$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

۹ گزینه ۲

برای اینکه عددی بر ۵ بخش‌پذیر باشد، رقم یکان آن باید ۰ یا ۵ باشد؛ پس مسئله را در دو حالت زیر بررسی می‌کنیم:

حالت اول: اگر رقم یکان صفر باشد:

$$\underset{\text{صفر نباید باشد}}{\underline{۹}} \quad \underline{۸} \quad \underline{۷} \quad \underset{\text{صفر باشد}}{\underline{۱}} \quad : ۹ \times ۸ \times ۷ = ۷۲ \times ۷ = ۵۰۴$$

حالت دوم: اگر رقم یکان ۵ باشد:

$$\underset{\text{صفر نباید باشد}}{\underline{۸}} \quad \underline{۸} \quad \underline{۷} \quad \underset{\text{۵ باشد}}{\underline{۱}} \quad : ۸ \times ۸ \times ۷ = ۶۴ \times ۷ = ۴۴۸$$

پس تعداد کل حالات $۵۰۴ + ۴۴۸ = ۹۵۲$ است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۹

۱۰ گزینه ۳

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

گام اول

الف) عدد موردنظر ما چهار رقم دارد.

ب) ارقام به‌کار رفته در عدد باید متمایز باشند یعنی رقم تکراری نداشته باشیم.

ج) فقط باید از ارقام فرد ۱ و ۳ و ۵ و ۷ و ۹ استفاده کنیم.

د) این عدد چهاررقمی باید بزرگ تر از ۳۰۰۰ باشد یعنی در جایگاه هزارگان نمی‌شود از رقم ۱ استفاده کرد.

گام دوم

پس تعداد ارقام چهار رقمی با ارقام متمایز و فرد بزرگ تر از ۳۰۰۰ برابر است با:

$$\underset{\text{یک رقم از بین ۳و۵،۷،۹}}{۴} \times \underset{\text{رقم۱به ارقام موجود اضافه می شود}}{۴} \times ۳ \times ۲ = ۹۶$$

فاکتوریل

Homework

۱ معادلهٔ $(x-1)! = 1$ چند جواب دارد؟

۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۴

۲ ساده‌شدهٔ عبارت $\frac{n!}{(n-1)!} + \frac{n!}{(n+1)!} + \frac{n}{n+1}$ کدام است؟

۱) $n+1$
۲) $n-1$
۳) n
۴) $2n$

۳ اگر $\frac{(n-1)!}{(n+1)!} = \frac{1}{20}$ باشد، آنگاه $n!$ کدام است؟

۱) ۶
۲) ۲۴
۳) ۱۲۰
۴) ۷۲۰

۴ از تساوی زیر، مقدار k را حساب کنید.

$$\frac{(k-1)!}{(k+1)!} = \frac{1}{6}$$

۵ درستی یا نادرستی عبارات زیر را تعیین کنید.

الف) $\sqrt[6]{(-4)^6} = \sqrt[3]{-4^3}$

ب) اگر $A \subseteq B$ باشد، آنگاه $B' \subseteq A'$.

پ) اگر $n! = 1$ باشد، آنگاه فقط $n = 1$.

ت) اندازهٔ جامعه کمتر از اندازهٔ نمونه است.

ث) اولین گام در علم آمار، جمع‌آوری اعداد و ارقام است.

۶ معادلهٔ $(5x^2 - 4x)! = 1$ دارای چند جواب است؟

۱) ۳
۲) ۱
۳) ۴
۴) ۲

۷ حاصل $\frac{۱۰!}{۱۰! - ۱۱!} - \frac{۱۰!}{۱۰! + ۱۱!}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱۱}{۳۳}$

۲) $\frac{۱}{۶}$

۳) $\frac{۱}{۲}$

۴) $\frac{۱۱}{۶۰}$

۸ اگر $\frac{(n+۱)!}{(n-۱)!} = ۳۰$ باشد، آن‌گاه حاصل $\frac{n^۲ + ۵}{n!}$ کدام است؟

۱) ۴

۲) ۵

۳) $\frac{۱}{۴}$

۴) $\frac{۱}{۵}$

پاسخ Homework

۱ گزینه ۳

می‌دانیم که $۰! = ۱! = ۱$ می‌شود، بنابراین:

$$(x-۱)! = ۰! \Rightarrow x-۱ = ۰ \Rightarrow x = ۱$$

$$(x-۱)! = ۱! \Rightarrow x-۱ = ۱ \Rightarrow x = ۲$$

۲ گزینه ۱

$$\frac{n!}{(n-۱)!} = \frac{n(n-۱)!}{(n-۱)!} = n$$

$$\frac{n!}{(n+۱)!} = \frac{n!}{(n+۱)n!} = \frac{۱}{n+۱}$$

$$\frac{n!}{(n-۱)!} + \frac{n!}{(n+۱)!} + \frac{n}{n+۱} = n + \frac{۱}{n+۱} + \frac{n}{n+۱} = n + \frac{n+۱}{n+۱} = n+۱$$

۳ گزینه ۲

$$\frac{(n-۱)!}{(n+۱)!} = \frac{۱}{۲۰} \Rightarrow \frac{(n-۱)!}{(n+۱)n(n-۱)!} = \frac{۱}{۲۰}$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{n(n+۱)} = \frac{۱}{۲۰} \Rightarrow n(n+۱) = ۲۰ \Rightarrow n = ۴ \Rightarrow n! = ۴! = ۲۴$$

۴

$$\frac{(k-۱)!}{(k+۱)!} = \frac{۱}{۶} \Rightarrow \frac{(k-۱)!}{(k+۱)(k)(k-۱)!} = \frac{۱}{۶} \Rightarrow \frac{۱}{k^۲+k} = \frac{۱}{۶}$$

$$k^۲ + k - ۶ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} k = ۲ \\ k = -۳ \times \end{cases}$$

۵

الف) نادرست

ب) درست

پ) نادرست

ت نادرست

ث درست

۶ گزینه ۳

$۰! = ۱ \quad , \quad ۱! = ۱$

$۵x^۲ - ۴x = ۰ \Rightarrow x(۵x - ۴) = ۰ \Rightarrow x = ۰ \ , \ x = \frac{۴}{۵}$

$۵x^۲ - ۴x = ۱ \Rightarrow ۵x^۲ - ۴x - ۱ = ۰ \Rightarrow x = ۱ \ , \ x = -\frac{۱}{۵}$

مجموعه جواب : $\{-\frac{۱}{۵} , ۰ , \frac{۴}{۵} , ۱\}$

۷ گزینه ۴

$$\frac{۱۰!}{۱۰! + ۱۱!} - \frac{۱۰!}{۱۰! - ۱۱!} = \frac{۱۰!}{۱۰! + ۱۱!} + \frac{۱۰!}{۱۱! - ۱۰!}$$

$$= \frac{۱۰!}{۱۰! + ۱۱ \times ۱۰!} + \frac{۱۰!}{۱۱ \times ۱۰! - ۱۰!} = \frac{۱۰!}{۱۰!(۱ + ۱۱)} + \frac{۱۰!}{۱۰!(۱۱ - ۱)}$$

$$= \frac{\cancel{۱۰!}}{۱۲ \times \cancel{۱۰!}} + \frac{\cancel{۱۰!}}{۱۰ \times \cancel{۱۰!}} = \frac{۱}{۱۲} + \frac{۱}{۱۰} = \frac{۱۱}{۶۰}$$

۸ گزینه ۳

$$\frac{(n+۱)!}{(n-۱)!} = \frac{(n+۱)n\cancel{(n-۱)!}}{\cancel{(n-۱)!}} = n(n+۱) \Rightarrow n(n+۱) = ۳۰ \Rightarrow n = ۵$$

$$\frac{n^۲ + ۵}{n!} = \frac{۲۵ + ۵}{۵!} = \frac{۳۰}{۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱} = \frac{۱}{۴}$$

جایگشت

Homework (1)

با حروف کلمه "ساحل شنی" و بدون تکرار حروف:

۱ چند کلمه ۷ حرفی می‌توان نوشت؟

۲ چند کلمه ۴ حرفی می‌توان نوشت که در آن‌ها دو حرف "ش، ن" کنار هم باشند؟

۳ چند کلمه ۵ حرفی می‌توان نوشت که با کلمه "شن" شروع شود؟

۴ چند کلمه ۷ حرفی می‌توان نوشت که کلمه "شن" در آن دیده نشود؟

۳ سرباز و ۴ افسر به چند طریق می‌توانند در یک صف قرار بگیرند، به‌طوری که:

۵ همواره نفر وسط افسر باشد.

۶ ابتدا و انتهای صف افسر باشد.

۷ یکی در میان قرار بگیرند.

۸ تعداد ترتیب‌های مختلف حروف کدام‌یک از واژه‌ها متفاوت با واژه‌های دیگر است؟

۱) آرمین ۲) آرمان ۳) شروین ۴) بهزاد

۹ از تساوی $P(n, n-2) = ۱۲$ مقدار n کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۱۰ به چند طریق می‌توان ۳ مهره آبی و ۴ مهره زرد را روی یک خط چید به‌طوری‌که هیچ دو مهره زردی کنار هم نباشند؟

۱) ۷۲ ۲) ۸۴ ۳) ۹۶ ۴) ۱۴۴

۱۱ با حروف کلمه جهان‌گردی و بدون تکرار:

الف چند کلمه ۸ حرفی می‌توان ساخت که با ج شروع و به (ی) ختم شود.

ب چند کلمه هشت حرفی می‌توان ساخت که در آن‌ها حروف (د) و (ی) کنار هم باشند.

پ چند کلمه ۶ حرفی می‌توان نوشت؟

۱۲ با حروف کلمهٔ "random" و بدون تکرار حروف:

الف چند کلمهٔ ۵ حرفی می‌توان نوشت که در آن، حروف کلمهٔ "ran" کنار هم باشند؟

ب چند کلمهٔ ۶ حرفی می‌توان نوشت که با حرف صدادار شروع شود؟

۱۳ با حروف کلمهٔ polices چند کلمهٔ ۷ حرفی می‌توان ساخت که حروف p، l و c کنار هم باشند؟

۱) ۱۲۰ ۲) $\frac{7!}{3}$

۳) $6! \times 2$ ۴) ۷۲۰

۱۴ تعداد راه‌های مختلف مرتب کردن حرف‌های واژه "مسلمانان" برابر است با:

۱) $9!$ ۲) $8!$

۳) $7!$ ۴) $6!$

۱۵ سه معلم و دو معاون مدرسه‌ای می‌خواهند عکس یادگاری بگیرند. به چند طریق می‌توانند این کار را انجام دهند به‌طوری‌که معلمین در کنار هم و معاونین نیز در کنار هم باشند؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۸

۳) ۲۴ ۴) ۳۶

۱۶ با حروف کلمهٔ "فرزانه" چند کلمهٔ شش حرفی می‌توان نوشت به‌طوری‌که دو حرف "ر" و "ز" کنار هم باشند و با حرف "الف" شروع شود؟

۱) ۹۶ ۲) ۴۸

۳) ۶۴ ۴) ۳۶

۱۷ با ارقام ۲، ۰، ۳، ۵، ۷ و بدون تکرار:

الف چند عدد پنج رقمی می‌توان نوشت؟

ب چند عدد پنج رقمی زوج می‌توان نوشت؟

پ چند عدد پنج رقمی کوچک‌تر از ۳۰۰۰۰ می‌توان نوشت؟

۱۸ بر روی محیط یک دایره شش نقطهٔ جدا از هم قرار دارند. با این شش نقطه:

الف چند پاره‌خط می‌توان تشکیل داد؟

ب چند بردار می‌توان ساخت؟

پ چند مثلث می‌توان رسم کرد؟

۱۹ در یک کلاس ده نفره چند حالت برای رتبه‌بندی نفرات اول تا سوم وجود دارد؟

۲۰ سه دانش‌آموز کلاس دهم، دو دانش‌آموز کلاس یازدهم و چهار دانش‌آموز کلاس دوازدهم می‌خواهند در یک صف بایستند. به چند طریق می‌توانند این صف را تشکیل دهند، اگر:

الف دانش‌آموزان سال دهم کنار هم باشند.

ب) دانش‌آموزان هم‌کلاسی کنار هم باشند.

۲۱ با حروف کلمه sportman و بدون تکرار حروف:

الف) چند کلمه ۸ حرفی می‌توان نوشت که با کلمه man شروع شود؟

ب) چند کلمه ۵ حرفی می‌توان نوشت که در آن حروف کلمه man کنار هم باشند؟

۲۲ از ۱۲ نفر دانش‌آموز به چند طریق می‌توان ۳ نفر را به عنوان نمایندهٔ گروه‌ها در نظر گرفت؟

۱) ۱۳۲۰ ✓
۲) ۶۶۰
۳) ۳۳۰
۴) ۲۲۰

۲۳ با حروف کلمه EEEOOA چند کلمه ۵ حرفی می‌توان ساخت؟

۱) ۴۸
۲) ۶۰ ✓
۳) ۱۰
۴) ۳۶

۲۴ تعداد جایگشت‌های حروف کلمه PARROT به‌طوری‌که Rها کنار هم نباشند، کدام است؟

۱) ۲۴۰ ✓
۲) ۶۰۰
۳) ۳۶۰
۴) ۴۸۰

پاسخ Homework (1)

۱

$$۷! = ۵۰۴۰$$

۲

$$\left.\begin{array}{l} \underline{۵} \times \underline{۴} \times \overbrace{\underline{\text{ش}} \times \underline{\text{ن}}}^{۲!} = ۴۰ \\ \underline{۵} \times \overbrace{\underline{\text{ن}} \times \underline{\text{ش}}}^{۲!} \times \underline{۴} = ۴۰ \\ \overbrace{\underline{\text{ن}} \times \underline{\text{ش}}}^{۲!} \times \underline{۵} \times \underline{۴} = ۴۰ \end{array}\right\} \Rightarrow ۴۰ + ۴۰ + ۴۰ = ۱۲۰$$

۳

$$P(۵, ۳) = \frac{۵!}{۲!} = ۵ \times ۴ \times ۳ = ۶۰$$

$$\frac{۵!}{(۵-۳)!} = \frac{۵!}{۲!} = \frac{۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲!}{۲!} = ۶۰$$

۴

کل جایگشت‌ها: $۷! = ۵۰۴۰$

جایگشت‌هایی که "شن" دارد: $۶! = ۷۲۰$

جایگشت‌هایی که در آن "شن" دیده نمی‌شود: $۷! - ۶! = ۵۰۴۰ - ۷۲۰ = ۴۳۲۰$

پاسخ سؤالات ۵ تا ۷

۵

$$۴ \times ۶! = ۲۸۸۰$$

۶

$$\underbrace{\binom{۴}{۲} \times ۲!}_{(*)} \times \underbrace{۵!}_{\text{سایر افراد}}$$

(*): انتخاب دو افسر و چیدن آنها در ابتدا و انتها

۷

$$۴! \times ۳! = ۲۴ \times ۶ = ۱۴۴$$

۸ گزینه ۲

کلمات آرمین، شروین و بهزاد کلمات ۵ حرفی هستند و تعداد ترتیب آن‌ها $۵!$ می‌باشد. ولی کلمهٔ آرمان یک کلمهٔ ۵ حرفی با دو حرف تکراری می‌باشد که تعداد ترتیب آن $\frac{۵!}{۲!}$ می‌باشد.

۹ گزینه ۲

$$P(n, n-۲) - ۱۲ \Rightarrow \frac{n!}{(n-(n-۲))!} - ۱۲$$

$$\frac{n!}{۲!} = ۱۲ \Rightarrow n! = ۱۲ \times ۲ \times ۱ = ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱ \Rightarrow n = ۴$$

۱۰ گزینه ۴

ابتدا ۴ مهره زرد را به $۴!$ حالت کنار هم قرار می‌دهیم پس در سه مکان موجود در بین مهره‌های زرد، مهره‌های آبی را به $۳!$ طریق می‌چینیم، بنابراین: $۴! \times ۳! = ۱۴۴$

۱۱ الف

$$۱ \times ۶ \times ۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱ \times ۱ = ۷۲۰$$

ب

$$۲! \times ۷! = ۱۰۰۸۰$$

پ

$$P(۸, ۶) = \frac{۸!}{۲!}$$

۱۲ الف

۲تا حرف دیگر ran

$$\binom{۳}{۲} \times ۳! \times ۳! = ۳ \times ۶ \times ۶ = ۱۰۸$$

ب

حروف صدادار : a , o

$$۲! \times ۵! = ۲ \times ۱۲۰ = ۲۴۰$$

۱۳ گزینه ۴

حروف c، l و p را در یک باکس قرار می‌دهیم این ۳ به $۳!$ طریق می‌توانند قرار بگیرند. ۴ حرف دیگر در ۴ باکس و باکسی که شامل سه حرف c، l و p است جمعاً ۵ باکس خواهند بود که جایگشت آن‌ها $۵!$ می‌باشد؛ پس تعداد کل حالت‌ها $۵! \times ۳! = ۷۲۰$ می‌باشد.

۱۴ گزینه ۳

در کلمه "مسلمانان" حرف "الف" ۲ بار و حرف "ن" ۲ بار و حرف "م" نیز ۲ بار تکرار شده است و تعداد کل حروف ۸ می‌باشد، بنابراین:

$$\text{تعداد جایگشت‌ها} : \frac{۸!}{۲! \times ۲! \times ۲!} = \frac{۸ \times ۷!}{۸} = ۷!$$

۱۵ گزینه ۳

معلمین و معاونین به‌ترتیب به $۳!$ و $۲!$ حالت می‌توانند در کنار هم جایگشت داشته باشند، ازطرفی معلمین می‌توانند در ابتدا قرار گیرند و معاونین به دنبال آن‌ها و برعکس، پس دو حالت نیز ترتیب آن‌ها را داریم، پس تعداد کل حالات برابر است با:

$$۲ \times ۳! \times ۲! = ۲۴$$

۱۶ گزینه ۲

اگر حروف "ر" و "ز" را با هم در نظر بگیریم، آن‌گاه حرف "ر" و "ز" نیز کنار هم ۲ حالت برای قرار گرفتن دارند، پس: $۲۴ \times ۲ = ۴۸$

$$\underbrace{۱ - - - \underbrace{- -}_{۲!}}_{۴!} = ۲ \times ۲۴ = ۴۸$$

۱۷ الف

$$\underline{۴}\,\underline{۴}\,\underline{۳}\,\underline{۲}\,\underline{۱} \qquad ۴ \times ۴! = ۹۶$$

ب

$$\left.\begin{array}{ll} \underline{۴}\,\underline{۳}\,\underline{۲}\,\underline{۱}\,\underset{(۰)}{\underline{۱}} & ۴! \times ۱ = ۲۴ \\ \underline{۳}\,\underline{۳}\,\underline{۲}\,\underline{۱}\,\underset{(۲)}{\underline{۱}} & ۳ \times ۳! = ۱۸ \end{array}\right\} \Rightarrow ۲۴ + ۱۸ = ۴۲$$

پ

$$\underset{(۲)}{\underline{۱}}\,\underline{۴}\,\underline{۳}\,\underline{۲}\,\underline{۱} \qquad ۱ \times ۴! = ۲۴$$

۱۸ الف

$$C(۶\ ,\ ۲) = \frac{۶!}{۴!۲!} = ۱۵$$

ب

$$P(۶\ ,\ ۲) = \frac{۶!}{۴!} = ۳۰$$

پ

$$C(۶\ ,\ ۳) = \frac{۶!}{۳!۳!} = ۲۰$$

۱۹

$$P(۱۰\ ,\ ۳) = \frac{۱۰!}{۷!} = ۱۰ \times ۹ \times ۸ = ۷۲۰$$

۲۰ الف

$$۷! \times ۳!$$

ب

$$۳! \times ۲! \times ۴! \times ۳!$$

۲۱ الف

$$۵! = \frac{۱}{m} \times \frac{۱}{a} \times \frac{۱}{n} \times \frac{۵}{-} \times \frac{۴}{-} \times \frac{۳}{-} \times \frac{۲}{-} \times \frac{۱}{-}$$

ب

$$\underbrace{m \times a \times n}_{۳!} \times ۵ \times ۴ = ۳! \times ۲۰ = ۶ \times ۲۰ = ۱۲۰$$

$$۵ \times \underbrace{m \times a \times n}_{۳!} \times ۴ = ۲۰ \times ۳! = ۱۲۰$$

$$۵ \times ۴ \times \underbrace{m \times a \times n}_{۳!} = ۲۰ \times ۳! = ۱۲۰$$

$$\Rightarrow ۱۲۰ \times ۳ = ۳۶۰$$

روش دوم: $\binom{۵}{۲} \times ۳! \times ۳! = ۳۶۰$

۲۲

گزینه ۱

برای انتخاب ۳ نفر از ۱۲ نفر داریم:

$$P(۱۲\ ,\ ۳) = \frac{۱۲!}{(۱۲-۳)!} = \frac{۱۲!}{۹!} = \frac{۱۲ \times ۱۱ \times ۱۰ \times \cancel{۹!}}{\cancel{۹!}} = ۱۲ \times ۱۱ \times ۱۰ = ۱۳۲۰$$

۲۳

گزینه ۲

حالات زیر را می‌توانیم در نظر بگیریم:

$$EEEOO \Rightarrow \frac{۵!}{۳!۲!} = ۱۰$$
$$EEEOA \Rightarrow \frac{۵!}{۳!} = ۲۰$$
$$EEOOA \Rightarrow \frac{۵!}{۲!۲!} = ۳۰$$
$$\Rightarrow \text{درمجموع} : ۱۰ + ۲۰ + ۳۰ = ۶۰$$

۲۴

گزینه ۱

تعداد کل جایگشت‌ها: $\frac{۶!}{۲!}$

Rها کنار هم باشند: $۵!$

Rها کنار هم نباشند: $R = \frac{۶!}{۲!} - ۵! = ۲۴۰$

Homework (2)

۱ با حروف کلمهٔ "آهنگری" چند کلمه ۶ حرفی می‌توان نوشت که حروف کلمهٔ "گنه" کنار هم باشند؟

۱) ۲۴ ۲) ۷۲

۳) ۱۴۴ ۴) ۲۱۶

۲ ۴ وزیر هر کدام با یک معاون به چند طریق می‌توانند روی ۸ صندلی در دو ردیف روبه‌روی هم بنشینند به‌طوری‌که هر وزیر دقیقاً روبه‌روی معاونش قرار بگیرد؟ (وزیرها در یک ردیف بنشینند) (با تغییر)

۱) ۲۴ ۲) ۳۲

۳) ۴۸ ۴) ۶۴

۳ حروف کلمهٔ LAGRANGE را با جایگشت‌های مختلف کنار هم قرار می‌دهیم. در چند حالت حروف یکسان کنار هم قرار می‌گیرند؟

۱) ۳۶۰ ۲) ۵۴۰

۳) ۷۲۰ ۴) ۱۴۴۰

۴ در یک جلسهٔ آموزشی میز گردی شامل ۴ دانش‌آموز کلاس پایهٔ یازدهم و ۴ دانش‌آموز کلاس پایهٔ دوازدهم تشکیل شده است. به چند حالت دانش‌آموزان در صندلی‌ها بنشینند، به‌طوری‌که در کنار هر دانش‌آموزی، دانش‌آموز هم‌پایه قرار نگیرد؟

۱) ۱۴۴ ۲) ۲۸۸

۳) ۲۷۶ ۴) ۱۱۵۲

۵ ۵ نفر قرار است در یک جلسه سخنرانی کنند. در چند حالت، دو نفر خاص پشت سر هم سخنرانی می‌کنند؟

۱) ۲۴ ۲) ۴۸

۳) ۷۲ ۴) ۹۶

۶ با جابه‌جایی ارقام عدد ۵۷۶۲۲۲ چند عدد شش رقمی می‌توان تشکیل داد به‌طوری‌که رقم‌های ۲، یک‌درمیان قرار بگیرند؟

۱) ۹ ۲) ۱۲

۳) ۱۸ ۴) ۲۴

۷ ۴ کتاب متمایز با موضوع ریاضی و ۲ کتاب متمایز با موضوع آمار را به چند طریق می‌توان در یک قفسه کنار هم قرار داد، به‌طوری‌که موضوع دو کتاب مجاور هر کتاب (بجز کتاب اول و آخر)، متفاوت باشد؟

۱) ۹۶ ۲) ۷۲

۳) ۴۸ ۴) ۲۴

۸ دور یک میز گرد، ۶ نفر به چند طریق می‌توانند قرار گیرند، به‌طوری‌که ۲ فرد موردنظر از آنان، همواره کنار یکدیگر باشند؟

۱) ۳۶ ۲) ۴۸

۳) ۹۶ ۴) ۱۲۰

۹ در یک اتومبیل معمولی، ۵ نفر به چند طریق می‌توانند بنشینند، به‌طوری‌که ۳ نفر آن‌ها مجاز به رانندگی باشند؟

۱) ۶۰ ۲) ۷۲

۳) ۷۵ ۴) ۸۴

۱۰ به چند طریق ۳ بازیکن فوتبال، ۲ بازیکن والیبال و ۳ شناگر دور یک میز بنشینند، به‌طوری‌که افراد هم تیمی کنار هم باشند؟

۱) ۷۲ ۲) ۱۴۴

۳) ۲۱۶ ۴) ۴۳۲

پاسخ Homework (2)

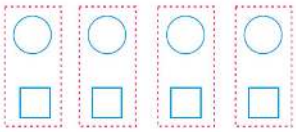
۱ گزینه ۳

حروف گ، ن، هـ را یک دسته در نظر می‌گیریم.

ی ر آ گ ن هـ

پس تعداد کلمات $۴! \times ۳!$ یعنی ۱۴۴تا است.

۲ گزینه ۳



وزیر اول روی هشت صندلی می‌تواند بنشیند، پس ۸ انتخاب دارد. زمانی‌که وزیر اول ردیفی را انتخاب کرد، سه وزیر دیگر در همان ردیف و در ۳ صندلی خالی می‌توانند بنشینند، بنابراین $۳!$ حالت دارد.
درنتیجه تعداد حالت‌ها برابر است با:

$$۸ \times ۳! = ۴۸$$

۳ گزینه ۳

گام اول

الف) در این کلمه دو حرف یکسان A و دو حرف یکسان G مشاهده می‌شود. این حروف یکسان باید کنار هم باشند.
ب) با قرار دادن حروف یکسان در کنار هم ۶ حرف متمایز داریم. تعداد حالت‌های قرارگیری این ۶ حرف را در کنار هم حساب می‌کنیم.
ج) دقت کنید دو حرف یکسان در کنار هم فقط به یک حالت می‌توانند قرار بگیرند و دیگر بین آن‌ها جابجایی نخواهیم داشت.

گام دوم

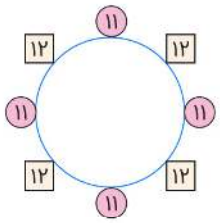
حروف ما به این صورت در می‌آیند :

$$\underbrace{LAA}\,GGRNE$$

$$\text{تعداد حالت ها} = ۶! = ۷۲۰$$

۴ گزینه ۱

دانش‌آموزان پایهٔ یازدهم اول به $(۴-۱)! = ۶$ طریق دور میز می‌نشینند.
حالا ۴ دانش‌آموز دوازدهم به $۴!$ طریق در ۴ جایگاه بین آن‌ها قرار می‌گیرند.



جواب : $۶ \times ۴! = ۱۴۴$

۵ گزینه ۲

$\underline{AB}\,C\,D\,E \Rightarrow ۲! \times ۴! = ۴۸$

۶ گزینه ۲

گام اول

سه رقم ۲ و سه رقم غیر ۲ داریم (۶ و ۷ و ۵). اگر قرار باشد این ارقام به‌صورت یک‌درمیان کنار هم قرار بگیرند، دو حالت وجود دارد:
حالت اول این است که عدد شش رقمی ما با رقم ۲ شروع شود و حالت دوم این‌که عدد شش رقمی ما با رقم ۲ تمام شود. در هرکدام از حالت‌ها سه رقم باقی‌مانده یعنی ۶ و ۷ و ۵ می‌توانند به $۳!$ حالت در جاهای خالی قرار گیرند.

گام دوم

حالت اول : ۲ ◯ ۲ ◯ ۲◯
تعداد حالت ها : ۵ و ۶ و۷ در سه دایره باقی مانده $= ۳ \times ۲ \times ۱ = ۶$

حالت دوم : ◯۲ ◯ ۲ ◯ ۲
تعداد حالت ها : ۵ و ۶ و ۷ در سه دایره باقی مانده $= ۳ \times ۲ \times ۱ = ۶$

پس در مجموع ۱۲ عدد داریم که در آن ارقام ۲ به‌صورت یک‌درمیان قرار گرفته باشند.

۷ گزینه ۳

ازآنجایی‌که ۲ کتاب آمار داریم، این دو کتاب نمی‌توانند در ابتدا و انتها قرار گیرند، پس تنها حالت زیر اتفاق می‌افتد (R کتاب ریاضی - A کتاب آمار):

$R\ R\ A\ A\ R\ R \Rightarrow$ تعداد حالت‌ها $= ۴! \times ۲! = ۴۸$

توجه: دقت کنید که در صورت سؤال عنوان شده ۲ کتاب مجاور هر کتاب، این حالت با حالتی که دو کتاب مجاور متفاوت باشند، تفاوت دارد.

۸ گزینه ۲

n نفر به $(n-۱)!$ می‌توانند دور یک میز بنشینند. حال چون می‌خواهیم دو نفر همواره کنار یکدیگر باشند، بنابراین جایگاه این دو نفر را به عنوان یک جایگاه در نظر می‌گیریم که می‌توانند کنار هم به $۲!$ جابه‌جا شوند. پس ۶ نفر به $(۵-۱)! \times ۲!$ حالت می‌توانند دور یک میز بنشینند به‌طوری‌که دو نفر همواره کنار هم باشند:

$$(۵-۱)! \times ۲ = ۴! \times ۲ = ۲۴ \times ۲ = ۴۸$$

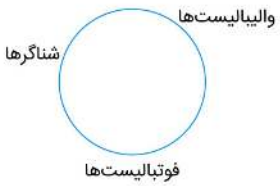
۹ گزینه ۲

باتوجه‌به توضیحات صورت تست، ۵ نفر قرار است در یک اتومبیل بنشینند به‌طوری‌که ۳ نفر آن‌ها مجاز به رانندگی هستند. بنابراین برای انتخاب راننده ۳ حالت وجود دارد. اگر از بین ۳ نفر یک نفر به عنوان راننده انتخاب شود، ۴ نفر دیگر باقی می‌مانند که به $۴!$ حالت می‌توانند بنشینند، بنابراین داریم:

$$\underbrace{۳}_{\text{راننده}} \quad \underbrace{۴\ ۳\ ۲\ ۱}_{\text{۴نفر باقی‌مانده}}$$

$$\Rightarrow \text{تعداد کل حالات} = ۳ \times ۴! = ۷۲$$

۱۰ گزینه ۲



تعداد حالت‌های قرارگرفتن برابر است با:

$$(۲!)(۳!)(۲!)(۳!) = ۱۴۴$$

ترکیب

Homework (1)

۱ به چند طریق می‌توان یک کمیته از میان ۵ دانش‌آموز و ۴ دانشجو انتخاب کرد، به‌طوری‌که در کمیته، ۲ دانش‌آموز و ۳ دانشجو عضویت داشته باشد؟

۱) ۲۵ ۲) ۳۰ ۳) ۳۵ ۴) ۴۰

۲ با ۸ نقطه بر روی یک دایره حداکثر چند مثلث با این نقاط می‌توان رسم کرد؟

۱) ۱۱۲ ۲) ۷۲ ۳) ۵۶ ۴) ۲۸

۳ سرباز و ۴ افسر به چند طریق می‌توانند در یک صف قرار بگیرند، به‌طوری که:

۳ همواره نفر وسط افسر باشد.

۴ ابتدا و انتهای صف افسر باشد.

۵ یکی در میان قرار بگیرند.

۶ به چند طریق می‌توانیم ۶ نفر را به دو تیم سه نفره تقسیم کنیم؟

۱) ۲۰ ۲) ۱۲۰ ۳) ۱۵ ۴) ۱۰

۷ در کیسه‌ای ۳ مهره آبی، ۴ مهره قرمز و ۳ مهره سیاه قرار دارد. به چند طریق می‌توان ۳ مهره انتخاب کرد، به‌طوری‌که حداقل دو مهره سیاه باشد؟

۱) ۲۰ ۲) ۲۱ ۳) ۲۲ ۴) ۲۴

۸ بر روی محیط یک دایره شش نقطهٔ جدا از هم قرار دارند. با این شش نقطه:

الف چند پاره‌خط می‌توان تشکیل داد؟

ب چند مثلث می‌توان رسم کرد؟

۹ با نقاط شکل زیر چند مثلث می‌توان رسم کرد؟

$\binom{4}{1}\binom{2}{2}+\binom{2}{1}\binom{4}{2}$

$4\left(\frac{2\times5}{1\times2}=10\right)+2\times\left(\frac{4\times3}{1\times2}=6\right)=96$

$20+36$

۱۰ در یک آزمون که ۱۲ سؤال دارد، شخصی می‌خواهد به ۶ سؤال پاسخ دهد این کار به چند طریق ممکن است اگر قرار باشد حداقل به ۳ سؤال از ۵ سوال اول پاسخ دهد؟

$\binom{5}{3}\binom{7}{3}=10\left(\frac{7\times6\times5}{1\times2\times3}\right)=350$

$\binom{5}{4}\binom{7}{2}=5\left(\frac{7\times6}{1\times2}=21\right)=105$

$\binom{5}{5}\binom{7}{1}=1(7)=7$ } 112

$350+112=462$

۱) ۴۶۲ ✓

۲) ۵۷۲

۳) ~~۳۴۳~~

۴) ~~۱۹۷~~

۱۱ از بین ۴ گوی سفید، ۲ گوی قرمز و ۵ گوی سبز به چند طریق می‌توان ۳ گوی انتخاب کرد به‌طوری که در این انتخاب گوی قرمزی وجود نداشته باشد؟

$\binom{4}{3}\binom{2}{0}\binom{5}{0}+\binom{4}{2}\binom{2}{0}\binom{5}{1}+\binom{4}{1}\binom{2}{0}\binom{5}{2}+\binom{4}{0}\binom{2}{0}\binom{5}{3}$

$(4\times1\times1)+\left(\frac{4\times3}{1\times2}=6\right)(1)(5)+4(1)(10)+(1)(1)(10)$

۱) ۶۲

۲) ۷۸

۳) ۸۴ ✓

۴) ۹۶

۱۲ یک اداره دارای ۱۵ عضو است. این اداره دارای ۱ رئیس، ۲ معاون، ۳ کارمند، ۶ کارشناس اداری و ۳ کارشناس حقوقی است. برای تشکیل یک جلسه ۵ نفره که در آن رئیس و دقیقاً یک معاون و یک کارشناس اداری حضور داشته باشند، چند انتخاب وجود دارد؟

۱) ۱۵۰

۲) ۱۲۰

۳) ۱۸۰

۴) ۹۰

۱۳ از میان ۸ دونده سرعت، به چند طریق ممکن است سه نفر مدال‌های طلا، نقره و برنز را کسب کنند؟

۱) ۵۶

۲) ۳۳۶

۳) ۱۰۸

۴) ۱۶۸

۱۴ از میان ۵ ریاضی‌دان و ۶ فیزیک‌دان و ۳ شیمی‌دان قرار است کمیته‌ای علمی انتخاب شود. به چند طریق می‌توان کمیته‌ای پنج نفره تشکیل داد که از هر رشته حداقل یک عضو در آن باشد؟

۱) ۴۹۵۰

۲) ۷۸۰۰

۳) ۳۵۰۰

۴) ۴۶۵۰

۱۵ از بین ۴ شیمی‌دان، ۵ ریاضی‌دان و ۶ فیزیک‌دان به چند طریق می‌توان ۶ نفر را انتخاب کرد به‌طوری‌که تعداد شیمی‌دانان و ریاضی‌دانان برابر باشد؟

۱) ۱۵۴۱

۲) ۲۰۴۱

۳) ۳۶۸۱

۴) ۱۲۴۱

پاسخ Homework (1)

۱ گزینه ۴

$$\binom{۵}{۲} \times \binom{۴}{۳} = ۱۰ \times ۴ = ۴۰$$

۲ گزینه ۳

با هر سه نقطه روی یک دایره می‌توانیم یک مثلث درست کنیم، پس:

$$\binom{۸}{۳} = \frac{۸!}{۳! \times ۵!} = ۵۶$$

پاسخ سؤالات ۳ تا ۵

۳

$$۴ \times ۶! = ۲۸۸۰$$

۴

$$\underbrace{\binom{۴}{۲} \times ۲!}_{(*)} \times \underbrace{۵!}_{\text{سایر افراد}}$$

(*): انتخاب دو افسر و چیدن آنها در ابتدا و انتها

۵

$$۴! \times ۳! = ۲۴ \times ۶ = ۱۴۴$$

۶ گزینه ۱

$$\binom{۶}{۳} \times \binom{۳}{۳} = ۲۰$$

۷ گزینه ۳

از ترکیب استفاده می‌کنیم:

دو مهره سیاه:

$$\binom{۳}{۲} \times \binom{۷}{۱} = ۳ \times ۷ = ۲۱$$

سه مهره سیاه:

$$\binom{۳}{۳} \times \binom{۷}{۰} = ۱ \times ۱ = ۱$$

$$\Rightarrow ۲۱ + ۱ = ۲۲$$

۸ الف

$$C(۶ , ۲) = \frac{۶!}{۴!۲!} = ۱۵$$

ب

$$C(۶ , ۳) = \frac{۶!}{۳!۳!} = ۲۰$$

۹

$$\binom{۴}{۱} \times \binom{۶}{۲} + \binom{۶}{۱} \times \binom{۴}{۲} = ۴ \times ۱۵ + ۶ \times ۶ = ۶۰ + ۳۶ = ۹۶$$

۱۰ گزینه ۱

۳ سؤال از ۵ سؤال اول و ۳ سؤال از ۷ سؤال بعدی: $\binom{۵}{۳} \times \binom{۷}{۳} = ۳۵۰$

۴ سؤال از ۵ سؤال اول و ۲ سؤال از ۷ سؤال بعدی: $\binom{۵}{۴} \times \binom{۷}{۲} = ۱۰۵$

۵ سؤال از ۵ سؤال اول و ۱ سؤال از ۷ سؤال بعدی: $\binom{۵}{۵} \times \binom{۷}{۱} = ۷$

$$\xrightarrow{\text{طبق اصل جمع}} ۳۵۰ + ۱۰۵ + ۷ = ۴۶۲$$

۱۱ گزینه ۳

چون گوی قرمزی نباید انتخاب شود، درواقع باید ۳ گوی از بین ۹ گوی دیگر انتخاب کرد.

$$C(۹ , ۳) = \frac{۹!}{۶! \times ۳!} = \frac{۹ \times ۸ \times ۷ \times ۶!}{۶! \times ۳ \times ۲ \times ۱} = ۸۴$$

۱۲ گزینه ۳

$$\binom{۲}{۱} \times \binom{۶}{۱} \times \binom{۶}{۲} = ۲ \times ۶ \times ۱۵ = ۱۸۰$$

۱۳ گزینه ۲

هر نفر می‌تواند سه حالت داشته باشد (طلا ـ نقره ـ برنز):

تعداد کل برندگان : $\binom{۸}{۳} = \frac{۸!}{۳! \times ۵!} = ۵۶$

$\Rightarrow ۵۶ \times ۳! = ۵۶ \times ۶ = ۳۳۶$

۱۴ گزینه ۱

سه نفر اول را دقیقاً از هر سه رشته و دو نفر بعد را از تمام رشته‌ها انتخاب می‌کنیم.

$$\binom{۵}{۱} \times \binom{۶}{۱} \times \binom{۳}{۱} \times \binom{۱۱}{۲} = ۵ \times ۶ \times ۳ \times ۵۵ = ۴۹۵۰$$

۱۵ گزینه ۴

تعداد شیمی‌دانان و ریاضی‌دانان می‌توانند به حالت‌های صفر، یک، دو و سه نفر باهم برابر باشند:

صفر شیمی‌دان و صفر ریاضی‌دان : $\binom{۴}{۰} \times \binom{۵}{۰} \times \binom{۶}{۶} = ۱ \times ۱ \times ۱ = ۱$

یک شیمی‌دان و یک ریاضی‌دان : $\binom{۴}{۱} \times \binom{۵}{۱} \times \binom{۶}{۴} = ۴ \times ۵ \times ۱۵ = ۳۰۰$

دو شیمی‌دان و دو ریاضی‌دان : $\binom{۴}{۲} \times \binom{۵}{۲} \times \binom{۶}{۲} = ۹۰۰$

سه شیمی‌دان و سه ریاضی‌دان : $\binom{۴}{۳} \times \binom{۵}{۳} \times \binom{۶}{۰} = ۴۰$

$\Rightarrow ۱ + ۳۰۰ + ۹۰۰ + ۴۰ = ۱۲۴۱$

Homework (2)

۱ چند عدد یازده رقمی با ارقام ۱ و ۲ می‌توان نوشت به طوری که مضرب ۶ باشند؟

۱) ۱۳۱ ۲) ۲۲۱

۳) ۳۴۱ ۴) ۴۳۱

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۲ چند عدد چهاررقمی با ارقام ۷ و ۸ می‌توان نوشت به‌طوری‌که مضرب ۶ بوده و از هر دو طرف (سمت چپ و راست) یکسان خوانده شوند؟

۱) ۲۱ ۲) ۲۲

۳) ۶ ۴) ۷

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

۳ ۳ نفر به همراه علی و حسن قرار است در یک هتل، هر کدام در یک اتاق، اقامت کنند. هتل سه اتاق خالی کنار هم در یک طرف راهرو و دو اتاق دیگر در کنار هم، در طرف دیگر راهرو دارد. به چند طریق، این افراد در اتاق‌ها می‌توانند اقامت کنند، به طوری که علی و حسن در اتاق‌های کنار هم ساکن شوند؟

۱) ۸ ۲) ۲۴

۳) ۳۶ ۴) ۷۲

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۴۰۲

۴ ۷ کتاب در موضوعات مختلف که ریاضی، فیزیک و زیست هم جزو آن‌ها است، در اختیار داریم. به چند طریق می‌توان ۴ کتاب را طوری انتخاب کرد که اگر ریاضی انتخاب شود، زیست نیز انتخاب شود و اگر فیزیک انتخاب شود، زیست انتخاب نشود؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۱

۳) ۱۵ ۴) ۱۶

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

۵ از هریک از ۸ مدرسهٔ علاقمند، ۶ نفر برای بازی تنیس چهار نفری (۲ نفر در مقابل ۲ نفر) انتخاب شده‌اند. به چند طریق این بازی ممکن است انجام شود به طوری که هر دو نفر هم‌یار هم، از یک مدرسه باشند؟ (بازی بین مدارس مختلف انجام می‌شود)

۱) ۴۲۰۰ ۲) ۵۴۰۰

۳) ۵۶۰۰ ۴) ۶۳۰۰

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۲

۶ در یک مطب ۵ صندلی در یک ردیف قرار دارد. ۷ بیمار هم‌زمان وارد مطب می‌شوند. به چند طریق بیماران می‌توانند روی ۵ صندلی بنشینند، به‌طوری‌که دو نفر از آن‌ها نخواهند کنار هم بنشینند؟

۱) ۱۵۶۰ ۲) ۱۸۰۰

۳) ۲۰۴۰ ۴) ۲۲۸۰

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۱

۷ تعداد زیرمجموعه‌های ۴ عضوی مجموعهٔ $\{۰, ۱, ۲, ۴, ۶, ۸, ۹\}$ که شامل عدد ۸ باشد، ولی شامل عدد ۴ نباشد، کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۲۰

۳) ۴۰ ۴) ۵۰

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۴۰۱

۸ در چند زیرمجموعهٔ ۵ عضوی از مجموعهٔ $\{۱, ۲, ۳, \ldots, ۹\}$، حداقل سه عضو زوج وجود دارد؟

۱) ۶۰ ۲) ۵۵

۳) ۴۵ ۴) ۴۰

کنکور سراسری علوم انسانی خارج از کشور ۱۴۰۱

۹ با ارقام ۹ و ... و ۳ و ۲ و ۱ به چند طریق می‌توان یک عدد پنج‌رقمی ساخت به‌طوری‌که درست دو رقم آن زوج باشد؟

۱) ۶۴۰۰ ۲) ۷۲۰۰

۳) ۸۴۰۰ ۴) ۹۶۰۰

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۴

۱۰ با ارقام متمایز $۱, ۲, ۳, ۴, \ldots, ۹$ به چند طریق می‌توان یک عدد چهاررقمی ساخت، به‌طوری‌که فقط یکی از ارقام آن زوج باشد؟

۱) ۶۴۰ ۲) ۷۲۰

۳) ۷۸۰ ۴) ۹۶۰

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۴

۱۱ گل‌فروشی از ۸ نوع گل مختلف، به چند طریق می‌تواند دسته گل‌های متمایز درست کند، به‌طوری‌که در هر دسته ۴ یا ۵ یا ۶ شاخهٔ مختلف موجود باشد؟

۱) ۱۲۶ ۲) ۱۴۰

۳) ۱۵۴ ۴) ۱۶۸

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۱۲ از هر ۵ مدرسهٔ نمونه، ۴ نفر در اردویی شرکت دارند. به چند طریق می‌توان از بین آنان ۳ نفر انتخاب کرد، به‌طوری‌که هیچ دو نفر انتخاب‌شده از یک مدرسه نباشند؟

۱) ۱۳۵ ۲) ۲۷۰

۳) ۳۲۰ ۴) ۶۴۰

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

۱۳ به چند طریق می‌توان ۵ نفر از ۹ دوست صمیمی خود را به مهمانی دعوت کرد، به‌طوری‌که دو نفر آنان، نخواهند باهم در مهمانی شرکت کنند؟

۱) ۸۴ ۲) ۸۷

۳) ۹۱ ۴) ۹۵

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

۱۴ به چند طریق می‌توان ۵ کتاب متمایز را بین ۳ نفر توزیع کرد، به شرط آنکه هر نفر حداقل یک کتاب، دریافت کند؟

۱) ۱۰۵ ۲) ۱۲۵

۳) ۱۳۵ ۴) ۱۵۰

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۱۵ اگر $\frac{P(n,۴)}{C(n-۱,۴)} = ۲۶$ ، مقدار n کدام است؟

۱) ۵۲ ۲) ۵۳

۳) ۵۴ ۴) ۵۵

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۴

۱۶ حاصل عبارت $\sum_{k=۱}^{n} k\binom{n}{k}$، کدام است؟

۱) $n۲^{n-۱}$ ۲) $n۲^{n}$

۳) $(n-۱)۲^{n-۱}$ ۴) $(n-۱)۲^{n}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۰

۱۷ در یک همایش ۵ نفر جهت سخنرانی ثبت‌نام کرده‌اند. چند طریق ترتیب سخنرانی برای آنان وجود دارد، به طوری که بین سخنرانی دو نفر موردنظر a و b از آنان فقط یک نفر سخنرانی کند؟

۱) ۲۰ ۲) ۲۴

۳) ۳۶ ۴) ۴۰

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۷

۱۸ از ده پرسش موجود، به چند طریق می‌توان ۸ پرسش را جهت پاسخگویی انتخاب کرد به شرط آن که حداقل ۴ پرسش از ۵ پرسش اول انتخاب شود؟

۱) ۲۵ ۲) ۳۲

۳) ۳۰ ۴) ۳۵

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۹

۱۹ با ارقام ۹ و ۷ و ۵ و ۳ و ۱ چند عدد سه‌رقمی با شرط " رقم یکان < رقم دهگان < رقم صدگان" می‌توان نوشت؟

۱) ۸ ۲) ۹

۳) ۱۰ ۴) ۱۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۱

۲۰ از هریک از ۶ منطقهٔ کشوری ۱۵ دانش‌آموز به یک اردوگاه فرهنگی دعوت شده‌اند. به چند طریق می‌توان ۳ دانش‌آموز از بین آن‌ها که دو به دو غیر هم منطقه‌ای هستند انتخاب نمود؟

۱) ۵۷۶۰۰ ۲) ۶۷۵۰۰

۳) ۷۵۶۰۰ ۴) ۷۶۵۰۰

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۲

۲۱ از هریک از مدارس A، B، C، D و E چهار نفر به اردوگاه دانش‌آموزی دعوت شده‌اند. به چند طریق می‌توان سه دانش‌آموز که دوبه‌دو غیر هم‌مدرسه باشند، انتخاب کرد؟

۱) ۱۶۰ ۲) ۳۲۰

۳) ۴۸۰ ۴) ۶۴۰

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۲

۲۲ از بین ۵ دانش‌آموز تجربی و ۳ دانش‌آموز ریاضی، به چند طریق می‌توان ۳ نفر را برای کار در آزمایشگاه انتخاب کرد به‌طوری که لااقل ۲ نفر از آن‌ها دانش‌آموز تجربی باشند؟

۱) ۲۵ ۲) ۳۰

۳) ۳۵ ۴) ۴۰

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۰

پاسخ Homework (2)

۱ گزینه ۳

چون عدد بر ۶ بخش‌پذیر است، پس رقم یکان فقط ۲ می‌تواند باشد و علاوه بر آن مجموع ارقام باید بر ۳ بخش‌پذیر باشد.

$$\underbrace{_____}_{(n)\text{ تا }۱\text{ و }(۱۰-n)\text{ تا }۲}\ ۲$$

n حداکثر می‌تواند ۱۰ باشد.

$$\text{مجموع ارقام} = ۲(۱۰-n)+n+۲ = ۲۲-n$$

$$\xrightarrow{\text{بخش‌پذیر بر ۳ باشد}} n = ۱, ۴, ۷, ۱۰$$

n مقدار دیگری نمی‌تواند بپذیرد، چون در این صورت مجموع ارقام مضرب ۳ نمی‌شود.

$$\binom{۱۰}{۱}+\binom{۱۰}{۴}+\binom{۱۰}{۷}+\binom{۱۰}{۱۰} = ۱۰+۲۱۰+۱۲۰+۱ = ۳۴۱$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۲ گزینه ۱

رقم یکان باید حتماً ۸ باشد تا زوج بودن عدد برقرار شود. ازطرفی مجموع ارقام باید بر ۳ بخش‌پذیر باشد و عدد نیز متقارن شود. پس رقم چهاردهم هم ۸ است. برای برقراری تقارن ارقام ۷ باید زوج تا باشند.

حال از بین ۱۲ رقم باقی‌مانده، اگر ۷تا n باشد، $۱۲-n$ تا ۸ وجود دارد. پس مجموع ارقام برابر است با:

$$۱۶+۷n+۸(n-۱) = ۱۶+۷n+۹۶-۸n = ۱۱۲-n$$

و این مجموع باید بر ۳ بخش پذیر باشد. همچنین به دلیل تقارن ارقام، باید n زوج باشد.

با بررسی تمامی حالات، متوجه می‌شویم n می‌تواند اعداد ۴ و ۷ باشد. یعنی فقط حالت داشتن ۴ رقم ۷ و ۱۰ رقم ۷ می‌تواند درست باشد.

الف) ۴ رقم ۷ و ۱۰ رقم ۸ داریم. عدد ۱۴ رقم را از وسط نصف می‌کنیم. جای یکی از ارقام مهم که از قبل مشخص شده است، پس برای ۶ جای باقی‌مانده، ۲ تا ۷ و ۴ تا ۸ قرار می‌دهیم:

$$\underline{۸}\ \underbrace{\underline{۸}\ \underline{۸}\ \underline{۸}\ \underline{۸}\ \underline{۷}\ \underline{۷}}\ \underbrace{\underline{۷}\ \underline{۷}\ \underline{۸}\ \underline{۸}\ \underline{۸}\ \underline{۸}}\ \underline{۸}$$

$$\text{تعداد حالات} = \binom{۶}{۲} = ۱۵$$

ب) ۱۰ رقم ۷ و ۴ رقم ۸ داریم. دوباره عدد را نصف می‌کنیم. جای یکی از ارقام از قبل تعیین شده است، برای ۶ جای باقی‌مانده ۵ رقم ۷ و ۱ رقم ۸ قرار می‌دهیم:

$$\underline{۸}\ \underbrace{\underline{۸}\ \underline{۷}\ \underline{۷}\ \underline{۷}\ \underline{۷}\ \underline{۷}}\ \underbrace{\underline{۷}\ \underline{۷}\ \underline{۷}\ \underline{۷}\ \underline{۷}\ \underline{۸}}\ \underline{۸}$$

$$\text{تعداد حالات} = \binom{۶}{۵} = ۶$$

بنابراین $۱۵+۶ = ۲۱$ عدد با این شرایط می‌توان ساخت.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

۳ گزینه ۳

A :

B:

$$\text{علی و حسن در } A \text{ باشند} \Rightarrow \text{حالت اول} : \underbrace{\text{حسن علی}}_{۲!} \times ۲! \times \underbrace{۳!}_{\text{جایگشت سه نفر دیگر}} = ۲۴$$

$$\text{علی و حسن در } B \text{ باشند} \Rightarrow \text{حالت دوم} : \underbrace{\text{حسن علی}}_{۲!} \times ۳! = ۱۲$$

$$\Rightarrow ۲۴ + ۱۲ = ۳۶$$

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۴۰۲

۴ گزینه ۳

حالت‌های انتخاب ۴ کتاب از ۷ کتاب به‌صورت زیر است:

تعداد حالت‌ها	زیست	فیزیک	ریاضی
$\binom{۱}{۱}\binom{۱}{۱}\binom{۴}{۲} = ۶$	✓	×	✓
$\binom{۱}{۱}\binom{۴}{۳} = ۴$	×	✓	×
$\binom{۱}{۱}\binom{۴}{۳} = ۴$	✓	×	×
$\binom{۴}{۴} = ۱$	×	×	×

$$\text{تعداد کل حالت‌ها} = ۶ + ۴ + ۴ + ۱ = ۱۵$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

۵ گزینه ۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۲

گام اول

الف) بازی بین مدارس مختلف انجام می‌شود پس برای یک بازی ۲ نفر در مقابل ۲ نفر، باید از بین ۸ مدرسه دو مدرسه، انتخاب شود.

ب) هر مدرسه ۶ دانش‌آموز برای بازی تنیس دارد. از بین این ۶ نفر باید ۲ نفر برای بازی انتخاب شود، یعنی برای هریک از مدارس $\binom{۶}{۲}$ انتخاب داریم.

گام دوم

$$\text{تعداد کل حالت ها} = \underbrace{\binom{۸}{۲}}_{\text{انتخاب ۲مدرسه از ۸مدرسه}} \times \overbrace{\binom{۶}{۲}}^{\text{انتخاب ۲دانش آموز از مدرسه اول}} \times \underbrace{\binom{۶}{۲}}_{\text{انتخاب ۲دانش آموز از مدرسه دوم}} = ۲۸ \times ۱۵ \times ۱۵ = ۶۳۰۰$$

۶ گزینه ۳

از اصل متمم بهره می‌گیریم:

$$\text{کل حالات} : \underline{۷}\ \underline{۶}\ \underline{۵}\ \underline{۴}\ \underline{۳} = ۲۵۲۰$$

حال باید حالت‌هایی که دو نفر خاص در بین این ۵ نفر بوده و کنار هم می‌نشینند را از تعداد کل حالت‌ها کم کنیم، درصورتی‌که دو نفر خاص انتخاب شده باشند، باید از ۵ نفر دیگر ۳ نفر انتخاب کرد، این دو نفر را یک بسته در نظر می‌گیریم:

$$\underbrace{۴}_{۲!}\ \underline{۳}\ \underline{۲}\ \underline{۱} = ۲! \times ۴! = ۴۸$$

بنابراین تعداد جایگشت‌ها برابر $۲! \times ۴!$ است، پس تعداد حالت‌هایی که این دو نفر خاص کنارهم می‌نشینند، برابر است با:

$$\binom{۵}{۳} \times ۲! \times ۴! = ۱۰ \times ۲ \times ۲۴ = ۴۸۰$$

حالا برای محاسبهٔ حالت مطلوب داریم:

$$\text{مطلوب} : \text{کل} - \text{نامطلوب} = ۲۵۲۰ - ۴۸۰ = \underline{۲۰۴۰}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۱

۷ گزینه ۱

اگر شرطی در کار نباشد، ۴ انتخاب از میان ۷ شیء داریم. اما ۸ باید باشد، پس یک انتخاب از ۴ انتخاب ما حذف می‌شود. ۸ را که برداشتیم و ۴ هم نباید برداریم می‌ماند: $\{۰, ۱, ۲, ۶, ۹\}$

سه انتخاب از ۵ شیء داریم:

$$\binom{۵}{۳} = \binom{۵}{۲} = ۱۰$$

تذکر: می‌دانیم $\binom{۵}{۳}$ برابر با $\binom{۵}{۲}$ می‌باشد و راحت‌تر است که $\binom{۵}{۲}$ را حساب کنیم.

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۴۰۱

۸ گزینه ۳

اعداد زوج : $۲, ۴, ۶, ۸$

اعداد فرد : $۱, ۳, ۵, ۷, ۹$

$$\begin{cases} \text{دو فرد و سه زوج} : \binom{۴}{۳}\binom{۵}{۲} = ۴ \times ۱۰ = ۴۰ \\ \text{یک فرد و چهار زوج} : \binom{۴}{۴}\binom{۵}{۱} = ۱ \times ۵ = ۵ \end{cases} \xrightarrow{+} ۴۵$$

کنکور سراسری علوم انسانی خارج از کشور ۱۴۰۱

۹ گزینه ۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۴

گام اول

الف) عدد ما پنج‌رقمی است پس به پنج رقم از بین نه رقم موجود نیاز داریم.

ب) در صورت تست گفته شده درست دو رقم زوج باشد یعنی برای تشکیل این عدد پنج‌رقمی، باید دو رقم از بین چهار رقم زوج و سه رقم از بین پنج رقم فرد انتخاب کنیم.

گام دوم

$$\text{تعداد اعداد پنج‌رقمی با دو رقم زوج} = \underbrace{\binom{۴}{۲}}_{\text{دو رقم از بین ارقام ۲و۴،۶،۸}} \times \underbrace{\binom{۵}{۳}}_{\text{سه رقم از بین ارقام ۱و۳،۵،۷،۹}} \times \underbrace{۵!}_{\text{حالت‌های مختلف قرار گرفتن ارقام}}$$

$$= ۶ \times ۱۰ \times ۱۲۰ = ۷۲۰۰$$

۱۰ گزینه ۴

$$\underbrace{\binom{۴}{۱}}_{\text{انتخاب یک رقم از بین } ۲,۴,۶,۸} \times \underbrace{\binom{۵}{۳}}_{\text{انتخاب سه رقم از بین } ۱,۳,۵,۷,۹} \times \underbrace{۴!}_{\text{جایگشت ۴ رقم در کنار هم}} = ۴ \times ۱۰ \times ۲۴ = ۹۶۰$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۴

۱۱ گزینه ۳

تعداد انتخاب‌ها به‌صورت زیر است:

$$\binom{۸}{۴} + \binom{۸}{۵} + \binom{۸}{۶} = \frac{۸!}{۴!۴!} + \frac{۸!}{۵!۳!} + \frac{۸!}{۶!۲!}$$

$$= \frac{۸ \times ۷ \times ۶ \times ۵}{۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱} + \frac{۸ \times ۷ \times ۶}{۶} + \frac{۸ \times ۷}{۲} = ۷۰ + ۵۶ + ۲۸ = ۱۵۴$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۱۲ گزینه ۴

اول ۳تا از مدرسه‌ها را به $\binom{۵}{۳}$ طریق انتخاب می‌کنیم. بعد از هر مدرسه ۱ نفر برمی‌داریم.

$$\binom{۵}{۳}\binom{۴}{۱}\binom{۴}{۱}\binom{۴}{۱} = ۱۰ \times ۴ \times ۴ \times ۴ = ۶۴۰$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

۱۳ گزینه ۳

برای اینکه دو نفر مشخص باهم در مهمانی نباشند دو حالت زیر را داریم:

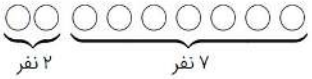
۱) از آن دو نفر فقط یکی در مهمانی باشد.

۲) هیچ‌کدام از آن دو نفر در مهمانی نباشند.

بنابراین داریم:

$$\underbrace{\binom{۲}{۱}\binom{۷}{۴}}_{\text{حالت اول}} + \underbrace{\binom{۲}{۰}\binom{۷}{۵}}_{\text{حالت دوم}} = ۲ \times \frac{۷!}{۴!۳!} + ۱ \times \frac{۷!}{۵!۲!}$$

$$۲ \times \frac{۷ \times ۶ \times ۵}{۶} + \frac{۷ \times ۶^{۳}}{۲} = ۷۰ + ۲۱ = ۹۱$$



کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

۱۴ گزینه ۴

برای توزیع کتاب دو حالت زیر را داریم:

۱) یک نفر فقط یک کتاب دریافت کند و دو نفر دیگر هرکدام دو کتاب داشته باشند:

ابتدا دو نفر از سه نفر را انتخاب می‌کنیم و به هرکدام دو کتاب می‌دهیم. سپس یک کتاب باقی‌مانده را به نفر سوم می‌دهیم.

یک کتاب دو کتاب دو کتاب

$$\binom{۳}{۲}\binom{۵}{۲}\binom{۳}{۲}\binom{۱}{۱} = ۳ \times \frac{۵!}{۲!۳!} \times ۳ \times ۱ = ۹۰$$

۲) یک نفر سه کتاب دریافت کند و دو نفر دیگر هرکدام یک کتاب داشته باشند:

ابتدا دو نفر را انتخاب می‌کنیم و به هرکدام یک کتاب می‌دهیم. سپس سه کتاب باقی‌مانده را به نفر سوم می‌دهیم.

یک کتاب یک کتاب سه کتاب

$$\binom{۳}{۲}\binom{۵}{۱}\binom{۴}{۱}\binom{۳}{۳} = ۳ \times ۵ \times ۴ \times ۱ = ۶۰$$

در انتها تعداد حالت‌های به‌دست‌آمده را باهم جمع می‌کنیم:

$$۹۰ + ۶۰ = ۱۵۰$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۱۵ گزینه ۱

در حل تست به دو نکتهٔ زیر توجه کنید.

الف) $P(n, r)$ یعنی تبدیل r شئ از میان n شئ که از رابطهٔ $P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$ محاسبه می‌شود.

ب) $C(n, r)$ یا $\binom{n}{r}$ یعنی ترکیب r شئ از بین n شئ که از رابطهٔ $C(n, r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ به دست می‌آید.

$P(n, ۴)$ و $C(n-۱, ۴)$ را جایگذاری کرده و مقدار n را به دست می‌آوریم:

$$\frac{P(n, ۴)}{C(n-۱, ۴)} = \frac{\frac{n!}{(n-۴)!}}{\frac{(n-۱)!}{(n-۱-۴)! \times ۴!}} = \frac{\frac{n!}{(n-۴)!}}{\frac{(n-۱)!}{(n-۵)! \times ۴!}}$$

$$= \frac{n! \times (n-۵)! \times ۴!}{(n-۴)! \times (n-۱)!} = \frac{n \times (n-۱)! \times (n-۵)! \times ۲۴}{(n-۴) \times (n-۵)! \times (n-۱)!} = ۲۶$$

$$\Rightarrow \frac{۲۴n}{n-۴} = ۲۶ \Rightarrow ۲۴n = ۲۶n - ۱۰۴ \Rightarrow ۲n = ۱۰۴ \Rightarrow n = ۵۲$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۴

۱۶ گزینه ۱

روش اول:

نکته: $n\binom{n-۱}{k-۱} = k\binom{n}{k}$

طبق نکته :

$$\sum_{k=۱}^{n} k\binom{n}{k} = \sum_{k=۱}^{n} n\binom{n-۱}{k-۱} = n\sum_{k=۱}^{n}\binom{n-۱}{k-۱} = n \times ۲^{n-۱}$$

روش دوم: با درنظرگرفتن $n = ۳$ داریم:

$$\sum_{k=۱}^{۳} k\binom{۳}{k} = ۱\binom{۳}{۱} + ۲\binom{۳}{۲} + ۳\binom{۳}{۳} = ۳ + ۶ + ۳ = ۱۲$$

حال در گزینه‌ها به ازای $n = ۳$ باید به ۱۲ برسیم:

۱) $۳ \times ۲^{۲} = ۱۲$

۲) $۳ \times ۲^{۳} = ۲۴$

۳) $۲ \times ۲^{۲} = ۸$

۴) $۲ \times ۲^{۳} = ۱۶$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۰

۱۷ گزینه ۳

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۷

گام اول

الف) ۵ نفر برای سخنرانی ثبت‌نام کرده‌اند. دو نفر a و b را جدا کرده ایم. اگر قرار باشد بین دو نفر a و b فقط یک نفر سخنرانی کند، باید از ۳ نفر باقی مانده یک نفر انتخاب شود و بین این دو نفر قرار گیرد، یعنی انتخاب یک نفر از ۳ نفر باقی مانده.

ب) در صورت تست اشاره نشده است که ابتدا شخص a سخنرانی می‌کند یا شخص b، پس در محاسبهٔ تعداد حالت‌های ممکن باید جابه‌جایی این دو نفر را هم درنظر بگیریم (پس $۲!$ حالت برای جابه‌جایی a و b).

ج) حالا a و b و فردی که بین آن‌ها قرار می‌گیرد را یک نفر فرض می‌کنیم که با دو نفر باقی مانده می‌توانند جابه‌جا شوند ($۳!$ حالت داریم).

گام دوم

$$\text{تعداد کل حالت ها} = \underbrace{\binom{۳}{۱}}_{\text{انتخاب یک نفر بین a,b}} \times \overbrace{۲!}^{\text{جابجایی a,b}} \times \underbrace{۳!}_{\text{جابجایی ترکیب ۳ نفر با ۲نفر دیگر}} = ۳ \times ۲ \times ۶ = ۳۶$$

۱۸ گزینه ۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۹

گام اول

به کلمهٔ "حداقل" در صورت تست خیلی توجه کنید. چون گفته شده حداقل ۴ پرسش از ۵ پرسش اول پاسخ داده شود، یعنی ۴ تا یا بیشتر. پس دو حالت می‌تواند رخ دهد:

یک حالت این است که از ۵ پرسش اول به ۴ پرسش و از ۵ پرسش دوم هم به ۴ پرسش پاسخ داده شود. حالت دوم این است که از ۵ پرسش اول، به هر ۵ پرسش و از ۵ پرسش دوم به ۳ پرسش پاسخ داده شود.

گام دوم

$$\text{تعداد حالت های پاسخگویی} = \underbrace{\binom{۵}{۴}\times\binom{۵}{۴}}_{\text{از۵پرسش اول۴پرسش و از۵پرسش دوم۴پرسش}} + \underbrace{\binom{۵}{۵}\times\binom{۵}{۳}}_{\text{هر۵پرسش اول و از۵پرسش دوم ۳پرسش}}$$

$$= (۵\times۵)+(۱\times۱۰) = ۲۵+۱۰ = ۳۵$$

۱۹ گزینه ۳

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۱

گام اول

رقم صدگان باید از ارقام یکان و دهگان بزرگ تر باشد. پس ما نمی‌توانیم دو رقم ۱ و ۳ را در جایگاه صدگان به کار ببریم. برای هریک از ارقام ۵ و ۷ و ۹ که در جایگاه صدگان قرار می‌گیرند، حالت‌های موردنظر را به‌دست می‌آوریم.

گام دوم

۱) رقم صدگان ۵ : ۵۳۱ $\Rightarrow$ یک حالت

۲) رقم صدگان ۷ : ۷۵۳, ۷۵۱, ۷۳۱ $\Rightarrow$ سه حالت

۳) رقم صدگان ۹ : ۹۷۵, ۹۷۳, ۹۷۱, ۹۵۳, ۹۵۱, ۹۳۱ $\Rightarrow$ شش حالت

تعداد کل حالت‌ها : $۱+۳+۶=۱۰$

راه‌حل دوم: ابتدا سه رقم متمایز از بین این ۵ رقم انتخاب می‌کنیم که به $\binom{۵}{۳}=۱۰$ حالت امکان‌پذیر است. واضح است که با هر سه رقم متمایز، فقط یک عدد سه‌رقمی با شرط داده‌شده می‌توان نوشت، پس تعداد اعداد موردنظر ۱۰تا است.

۲۰ گزینه ۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۲

گام اول

الف) دانش‌آموزان باید دو به دو غیر هم‌منطقه‌ای باشند. بنابراین برای داشتن ۳ دانش‌آموز باید ۳ منطقه از بین ۶ منطقهٔ کشوری انتخاب شود تا مطمئن باشیم دو دانش‌آموز هم‌منطقه‌ای نداریم.

ب) هر منطقه ۱۵ دانش‌آموز دارد که هرکدام از این ۱۵ دانش‌آموز می‌توانند انتخاب شوند.

گام دوم

$$\text{تعداد کل حالت ها} = \underbrace{\binom{۶}{۳}}_{\text{انتخاب ۳ منطقه از بین ۶ منطقه}} \times \underbrace{\binom{۱۵}{۱} \times \binom{۱۵}{۱} \times \binom{۱۵}{۱}}_{\text{هرکدام از ۱۵ دانش آموز این ۳ منطقه می توانند دعوت شوند}} = ۲۰ \times ۱۵ \times ۱۵ \times ۱۵ = ۶۷۵۰۰$$

۲۱ گزینه ۴

ابتدا از میان پنج مدرسهٔ A، B، C، D و E سه تا را انتخاب می‌کنیم، این کار به $\binom{۵}{۳}$ حالت امکان‌پذیر است. حال از هرکدام از این سه مدرسهٔ انتخابی، باید فقط یک نفر را انتخاب کنیم. چون از هر مدرسه چهار نفر به اردوگاه دعوت شده‌اند؛ پس برای انتخاب یک نفر از هرکدام از سه مدرسه، چهار حالت امکان‌پذیر است. یعنی با مشخص بودن مدارس، $۴ \times ۴ \times ۴ = ۴^۳$ حالت برای انتخاب دانش‌آموزان وجود دارد.

$$\binom{۵}{۳} \times ۴^۳ = ۱۰ \times ۶۴ = ۶۴۰$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۲

۲۲ گزینه ۴

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۰

گام اول

دقت کنید که گفته شده حداقل ۲ نفر از بین ۳ نفر انتخاب شده، باید از رشتهٔ تجربی باشند. دو حالت ممکن است رخ دهد: حالت اول این که ۲ نفر تجربی و یک نفر ریاضی باشند و حالت دوم این که هرسه نفر تجربی باشند.

گام دوم

تعداد حالت‌های انتخاب دانش‌آموزها با شرط انتخاب حداقل ۲ دانش‌آموز تجربی برابراست با:

$$\underbrace{\binom{۵}{۲} \times \binom{۳}{۱}}_{\text{دو دانش آموز تجربی و یک دانش آموز ریاضی}} + \underbrace{\binom{۵}{۳}}_{\text{هر سه تجربی}} = (۱۰ \times ۳) + ۱۰ = ۳۰ + ۱۰ = ۴۰$$

$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}$

احتمال

Homework (1)

۱ یک سکه و یک تاس را با هم پرتاب می‌کنیم، تعداد حالت‌هایی که در آن‌ها تاس عدد زوج آمده است، کدام است؟

۱) ۶ ✓

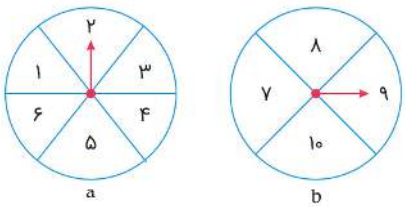
۲) ۳

۳) ۲

۴) ۱

$۳\times۲=۶$

۲ تعداد اعضای فضای نمونه چرخاندن دو صفحهٔ عقربه‌دار a و b در شکل زیر کدام است؟



۱) ۴۵

۲) ۱۲

۳) ۲۴ ✓

۴) ۱۰

$۶\times۴=۲۴$

۳ خانواده‌ای دارای ۲ فرزند است. تعداد اعضای فضای نمونه‌ای که هر ۲ فرزند در روز شنبه به دنیا آمده باشند، کدام است؟

۱) ۱۴

۲) ۴

۳) ۲۱

۴) ۴۹ ✓

$۷\times۷=$

۴ کدام مورد زیر یک پدیدهٔ تصادفی است؟

۱) نتیجهٔ رهاشدن سیب از درخت

۲) انتخاب یک مهره از کیسه‌ای حاوی مهره‌های همرنگ

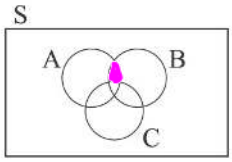
۳) جنسیت فرزند اول یک خانواده که هنوز به دنیا نیامده است. ✓

۴) وجود دانش‌آموزی که سن او بیشتر از ده سال باشد، در کلاس دوازدهم.

۵ برای سه پیشامد A، B و C در فضای S، عبارت مجموعه‌ای پیشامد زیر را نوشته و بر روی نمودار ون با سایه زدن این پیشامد را مشخص کنید.

"پیشامدهای A و B رخ دهند ولی پیشامد C رخ ندهد."

$(A\cap B)-C$



۶ کدام دو پیشامد در پرتاب یک تاس ناسازگارند؟

۱) پیشامد فرد آمدن و مربع کامل آمدن
۲) پیشامد مربع کامل آمدن و اول آمدن
۳) پیشامد زوج آمدن و اول آمدن
۴) پیشامد فرد آمدن و اول آمدن

۷ از بین مجموعهٔ اعداد $\{۱۰, ۱۳, ۱۶, ۱۸, ۲۱, ۲۲, ۲۷, ۳۲\}$ سه عدد به‌تصادف انتخاب می‌کنیم. تعداد اعضای پیشامد اینکه هر سه عدد زوج باشند، کدام است؟

۱) ۵
۲) ۲۸
۳) ۵۶
۴) ۱۰

۸ از بین ۴ خودکار قرمز، ۳ خودکار آبی و ۲ خودکار مشکی، ۳ خودکار به‌تصادف انتخاب می‌کنیم. پیشامد اینکه حداکثر ۲ خودکار قرمز باشد چند عضو دارد؟

۱) ۱۶۰
۲) ۸۰
۳) ۴۵
۴) ۷۰

۹ در یک خانوادهٔ ۴ فرزندی، احتمال آنکه حداکثر ۲ فرزند، پسر باشند کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۸}$
۲) $\frac{۳}{۸}$
۳) $\frac{۱۱}{۱۶}$
۴) $\frac{۱۳}{۱۶}$

۱۰ از بین تمام کلمات ۵ حرفی متمایز که با حروف کلمه LIKED می‌توان ساخت کلمه‌ای به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال اینکه کلمه KILED انتخاب شده باشد چقدر است؟

۱) $\frac{۱}{۱۲۰}$
۲) $\frac{۵}{۱۲۰}$
۳) $\frac{۱}{۶۰}$
۴) $\frac{۵}{۶۰}$

۱۱ احتمال رخ ندادن پیشامدی $\frac{۳}{۸}$ و فضای نمونه آن دارای ۶۴ عضو می‌باشد. تعداد اعضای مشاهده شده از وقوع پیشامد چقدر است؟

۱) ۶۰
۲) ۴۰
۳) ۳۰
۴) ۵۰

۱۲ از بین رامبد و پوریا و سه نفر از دوستانشان سه نفر را انتخاب می‌کنیم. با چه احتمالی رامبد و پوریا باهم انتخاب نمی‌شوند؟

۱) $\frac{۳}{۵}$
۲) $\frac{۷}{۱۰}$
۳) $\frac{۲}{۵}$
۴) $\frac{۱}{۲}$

۱۳ سه تاس را پرتاب می‌کنیم با چه احتمالی مجموع اعداد رو شده حداقل ۱۶ است؟

۱) $\frac{۵}{۲۱۶}$ ۲) $\frac{۵}{۱۰۸}$ ۳) $\frac{۱}{۳۶}$ ۴) $\frac{۷}{۳۶}$

۱۴ از بین ۴ کتاب رمان و ۳ کتاب شعر، ۴ کتاب به دوستی امانت داده‌ایم. احتمال این‌که در بین کتاب‌های امانت‌داده‌شده، حتماً کتاب رمان باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۷}$ ۲) $\frac{۴}{۷}$ ۳) $\frac{۳۴}{۳۵}$ ۴) $\frac{۳}{۳۵}$

۱۵ اگر احتمال قبول نشدن فردی در یک آزمون ورودی $\frac{۶}{۷}$ برابر احتمال قبولی‌اش باشد، در این صورت احتمال اینکه فرد در آزمون قبول نشود چقدر است؟

۱) $\frac{۱}{۷}$ ۲) $\frac{۵}{۷}$ ۳) $\frac{۶}{۱۳}$ ۴) $\frac{۷}{۱۳}$

۱۶ احتمال رخ ندادن پیشامدی $\frac{۵}{۸}$ و فضای نمونه آن دارای ۶۴ عضو می‌باشد. تعداد اعضای مشاهده‌شده از وقوع پیشامد چقدر است؟

۱) ۲۴ ۲) ۴۲ ۳) ۱۴ ۴) ۴۱

۱۷ حسن و ۴ نفر دیگر به‌تصادف در یک ردیف قرار می‌گیرند، احتمال آنکه علی در وسط قرار گیرد، کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۵}$ ۲) $\frac{۳}{۵}$ ۳) $\frac{۱}{۵}$ ۴) $\frac{۴!}{۲! \times ۵!}$

۱۸ اعداد رو شده از ریختن ۳ تاس همگن را به‌جای ضرایب معادلهٔ درجه دوم $ax^۲ + bx + c = ۰$ قرار می‌دهیم. احتمال اینکه یکی از ریشه‌های این معادله (-۱) شود، کدام است؟

۱) $\frac{۱۴}{۶^۳}$ ۲) $\frac{۱۵}{۶^۳}$ ۳) $\frac{۱۶}{۶^۳}$ ۴) $\frac{۱۳}{۶^۳}$

۱۹ در یک عدد ۳ رقمی ساخته‌شده با ارقام ۷ ، ۶ ، ۵ ، ۴ ، ۳ ، ۲، احتمال اینکه حداقل ۲ رقم آن یکسان باشند کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۶}$ ۲) $\frac{۵}{۶}$ ۳) $\frac{۴}{۹}$ ۴) $\frac{۵}{۹}$

۲۰ خانواده‌ای دارای ۴ فرزند است. با چه احتمالی حداقل ۲ نفر از آن‌ها در یک فصل از سال به دنیا آمده‌اند؟

۱) $\frac{۴}{۳۲}$ ۲) $\frac{۲۵}{۳۲}$ ۳) $\frac{۳}{۳۲}$ ۴) $\frac{۲۹}{۳۲}$

۲۱ یک جعبه حاوی ۳ مهره قرمز، ۲ مهره سفید و ۴ مهره آبی است. اگر به‌طور تصادفی ۳ مهره را خارج کنیم، احتمال این‌که حداکثر ۲ مهره قرمز باشد کدام است؟

۱) $\frac{۶۹}{۷۷}$ ۲) $\frac{۸۳}{۸۴}$ ۳) $\frac{۱۱۲}{۱۱۵}$ ۴) $\frac{۵۶}{۵۷}$

۲۲ ۷ مهرهٔ آبی، قرمز، بنفش، سبز، سفید، زرد و سیاه داریم. با چه احتمالی دقیقاً ۳ مهره می‌توان بین مهره‌های آبی و قرمز قرار داد؟

۱) $\frac{۱}{۷}$ ۲) $\frac{۳}{۷}$ ۳) $\frac{۵}{۷}$ ۴) $\frac{۲}{۷}$

۲۳ احتمال رخداد متمم پیشامدی $\frac{۳}{۷}$ است. اگر این پیشامد دارای ۱۶ عضو باشد، فضای نمونه آن دارای چند عضو است؟

۱) ۱۱ ۲) ۳۷ ۳) ۲۸ ۴) ۱۸

۲۴ احتمال این‌که عدد سه‌رقمی ساخته‌شده با ارقام ۲، ۶، ۷، ۳ و ۵ مضرب ۲ نباشد چقدر است؟ (بدون تکرار ارقام)

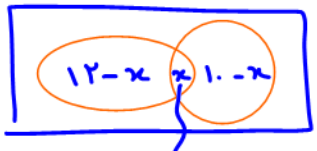
۱) $\frac{۹}{۱۰}$ ۲) $\frac{۱}{۱۰}$ ۳) $\frac{۱}{۵}$ ۴) $\frac{۳}{۵}$

۲۵ شش کارت داریم که با حروف E , D , A , H , M , R نام‌گذاری شده‌اند. با چه احتمالی دقیقاً ۲ کارت می‌توان بین کارت H و D قرار داد؟

۱) $\frac{۱}{۵}$ ۲) $\frac{۱}{۶}$ ۳) $\frac{۱}{۱۰}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

۲۶ دو تاس را با هم می‌ریزیم. اگر مجموع آن‌ها بزرگ‌تر از ۶ باشد، احتمال آن‌که فقط یکی از تاس‌ها زوج باشد کدام است؟

۱) $\frac{۴}{۷}$ ۲) $\frac{۳}{۷}$ ۳) $\frac{۲}{۷}$ ۴) $\frac{۱}{۷}$



$(۱۲-x)+(x)+(۱۰-x)=۱۸$

$x=۴$

۲۷ از بین ۱۸ دانش‌آموز یک کلاس که ۱۲ نفر به رشتهٔ فیزیک و ۱۰ نفر به رشتهٔ شیمی علاقه‌مند هستند، یک نفر به‌تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال اینکه این فرد به هر دو رشته علاقه‌مند باشد کدام است؟

هم فیزیک هم شیمی

$\frac{x=۴}{۱۸}=\frac{۲}{۹}$

۱) $\frac{۸}{۹}$
۲) $\frac{۱}{۹}$
۳) $\frac{۷}{۹}$
۴) $\frac{۲}{۹}$ ✓

۲۸ بر روی ۵ کارت یکسان هریک از ارقام ۵ ، ۴ ، ۳ ، ۲ ، ۱ نوشته و داخل جعبه قرار داده‌ایم. یک کارت انتخاب و با ثبت شماره آن به داخل جعبه برمی‌گردانیم و دوباره یک کارت دیگر انتخاب می‌کنیم. احتمال اینکه عدد دورقمی حاصل‌شده مضرب ۵ نباشد، کدام است؟

$A'=\{۱۵,۲۵,۳۵,۴۵,۵۵\}$

$P(A')=\frac{۵=n(A')}{۵\times۵=n(S)}=\frac{۱}{۵}$

$P(A)=۱-\frac{۱}{۵}=\frac{۴}{۵}$

۱) $\frac{۱۷}{۲۵}$
۲) $\frac{۶}{۲۵}$
۳) $\frac{۲۰}{۲۵}$ ✓
۴) $\frac{۷}{۲۵}$

۲۹ از جعبه‌ای که شامل ۴ خودکار قرمز و ۳ خودکار آبی است، ۳ خودکار به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال اینکه این ۳ خودکار همرنگ نباشند کدام است؟

$\binom{۴}{۳}+\binom{۳}{۳}=۵$

$\frac{۵}{\binom{۷}{۳}=\frac{۷\times۶\times۵}{۱\times۲\times۳}=۳۵}=\frac{۱}{۷}$

۱) $\frac{۸}{۹}$
۲) $\frac{۱}{۷}$ ✓
۳) $\frac{۱}{۹}$
۴) $\frac{۶}{۷}$

۳۰ با جایگشت ارقام عدد ۲۳۴۴۳، اعداد ۵ رقمی نوشته‌ایم، یکی از آن‌ها را انتخاب می‌کنیم، با چه احتمالی ارقام شبیه به هم کنار هم قرار می‌گیرند؟

۳۱

$\frac{۳۱!=۲}{\frac{۵!}{۲!\,۳!}=\frac{۵\times۴\times۳\times۲\times۱}{۲\times۱\times۳\times۲\times۱}=۳۰}=\frac{۲}{۳۰}=\frac{۱}{۱۵}$

۱) ۰/۲ ✓
۲) ۰/۳
۳) ۰/۱
۴) ۰/۴

پاسخ Homework (1)

۱ گزینه ۱

فضای نمونه‌ای این پرتاب به‌صورت:

$\{(۲, \text{رو}), (۴, \text{رو}), (۶, \text{رو})(۲, \text{پشت}), (۴, \text{پشت}), (۶, \text{پشت})\}$

پس $n(A) = ۶$.

۲ گزینه ۳

$$\begin{matrix} a \text{ صفحه عقربه‌دار : قسمت } ۶ \\ b \text{ صفحه عقربه‌دار : قسمت } ۴ \end{matrix} \Rightarrow n(S) = ۶ \times ۴ = ۲۴$$

۳ گزینه ۴

چون یکی از روزهای هفته ذکر شده، بنابراین بحث هفته مطرح است:

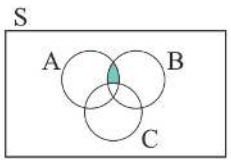
$n(S) = ۷ \times ۷ = ۴۹$

۴ گزینه ۳

به پدیده‌ها یا آزمایش‌هایی که نتیجهٔ آن‌ها قبل از اجرای آزمایش به‌طور قطع مشخص نیست، پدیده یا آزمایش تصادفی می‌گویند؛ فقط گزینهٔ "۳" این شرط را دارا است.

۵

$(A \cap B) - C$



۶ گزینه ۲

اگر پیشامد مربع کامل آمدن عدد روی تاس A و پیشامد اول آمدن آن را B بنامیم، داریم:

$A = \{۱, ۴\} \quad , \quad B = \{۲, ۳, ۵\}$

$A \cap B = \varnothing$ ناسازگارند A و B

۷ گزینه ۴

اعداد زوج مجموعه عبارت‌اند از $\{۱۰, ۱۶, ۱۸, ۲۲, ۳۲\}$ که تعداد آن‌ها برابر ۵ می‌باشد. باید سه عدد را از بین این اعداد انتخاب کنیم، بنابراین داریم:

$$n(A) = \binom{۵}{۳} = \frac{۵!}{(۵-۳)! \times ۳!} = \frac{۵!}{۲! \times ۳!} = \frac{۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲}{۲ \times ۶} = ۱۰$$

۸ گزینه ۲

برای اینکه حداکثر ۲ خودکار قرمز باشد، باید ۲ خودکار قرمز یا ۱ خودکار قرمز یا صفر خودکار قرمز داشته باشیم:

$$n(A) = \underset{\text{قرمز}}{\binom{۴}{۲}} \times \underset{\text{غیرقرمز}}{\binom{۵}{۱}} + \underset{\text{قرمز}}{\binom{۴}{۱}} \times \underset{\text{غیرقرمز}}{\binom{۵}{۲}} + \underset{\text{قرمز}}{\binom{۴}{۰}} \times \underset{\text{غیرقرمز}}{\binom{۵}{۳}}$$

$$\Rightarrow \quad n(A) = ۶ \times ۵ + ۴ \times ۱۰ + ۱ \times ۱۰ = ۳۰ + ۴۰ + ۱۰ = ۸۰$$

۹ گزینه ۳

$$\begin{cases} n(S) = ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲ = ۲^۴ = ۱۶ \\ n(A) = \binom{۴}{۲} + \binom{۴}{۱} + \binom{۴}{۰} = ۶ + ۴ + ۱ = ۱۱ \end{cases} \Rightarrow \quad P(A) = \frac{۱۱}{۱۶}$$

۱۰ گزینه ۱

$$\text{LIKED} : n(S) = ۵! = ۱۲۰$$

از بین ۱۲۰ کلمه، فقط یک کلمه می‌خواهیم انتخاب کنیم: $n(A) = ۱$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۱}{۱۲۰}$$

۱۱ گزینه ۲

$$P(A') = \frac{۳}{۸} \quad \Rightarrow \quad P(A) = ۱ - P(A') = ۱ - \frac{۳}{۸} = \frac{۵}{۸}$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} \quad \Rightarrow \quad \frac{۵}{۸} = \frac{n(A)}{۶۴} \quad \Rightarrow \quad n(A) = ۴۰$$

۱۲ گزینه ۲

۵ نفر را به‌صورت زیر دسته‌بندی می‌کنیم:

A , B , C	رامبد و پویا
دسته اول	دسته دوم

برای آنکه رامبد و پوریا باهم انتخاب نشوند:

$$n(A) = \binom{۲}{۱}\binom{۳}{۲} + \binom{۳}{۳} = ۷$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۷}{\binom{۵}{۳}} = \frac{۷}{۱۰}$$

۱۳ گزینه ۲

حالت‌های زیر مطلوب است:

الف) تاس‌ها اعداد ۴ , ۶ , ۶ بیایند، تعداد حالات $\frac{۳!}{۲!}$ است.

ب) تاس‌ها اعداد ۵ , ۵ , ۶ بیایند، تعداد حالات $\frac{۳!}{۲!}$ است.

پ) تاس‌ها اعداد ۶ , ۶و ۵ بیایند، تعداد حالات $\frac{۳!}{۲!}$ است.

ت) تاس‌ها اعداد ۶ , ۶ , ۶ بیایند، تعداد حالات ۱ است.

پس در کل $۱ + ۳ + ۳ + ۳$ یعنی ۱۰ حالت داریم:

$$P(A) = \frac{۱۰}{۶^۳} = \frac{۱۰}{۲۱۶} = \frac{۵}{۱۰۸}$$

۱۴ گزینه ۳

$$n(S) = \binom{۷}{۴} = \frac{۷!}{۴! \times ۳!} = ۳۵$$

$$n(A) = \binom{۳}{۱}\binom{۴}{۳} + \binom{۳}{۲}\binom{۴}{۲} + \binom{۳}{۳}\binom{۴}{۱}$$
$$= ۱۲ + ۱۸ + ۴ = ۳۴$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۳۴}{۳۵}$$

۱۵ گزینه ۳

$$\begin{cases} P(A') : \text{احتمال قبول نشدن} \\ P(A) : \text{احتمال قبول شدن} \\ P(A)+P(A')=۱ \end{cases} \Rightarrow P(A')=\frac{۶}{۷}P(A) \Rightarrow \frac{P(A')}{P(A)}=\frac{۶}{۷}$$

$$\Rightarrow \frac{P(A')}{۱-P(A')}=\frac{۶}{۷} \Rightarrow ۷P(A')=۶-۶P(A') \Rightarrow ۱۳P(A')=۶ \Rightarrow P(A')=\frac{۶}{۱۳}$$

۱۶ گزینه ۱

$$P(A')=\frac{۵}{۸} \Rightarrow P(A)=۱-P(A')=۱-\frac{۵}{۸}=\frac{۳}{۸}$$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)} \Rightarrow \frac{۳}{۸}=\frac{n(A)}{۶۴} \Rightarrow n(A)=۲۴$$

۱۷ گزینه ۳

ابتدا علی را در جای وسط می‌نشانیم، سپس بقیه نفرات را در بقیه جاها قرار می‌دهیم.

$$n(S)=۵\times۴\times۳\times۲\times۱=۵!$$

$$n(A)=\underline{۴}\ \underline{۳}\ \underbrace{\underline{۱}}_{\text{علی}}\ \underline{۲}\ \underline{۱}=۴!$$

$$\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۴!}{۵!}=\frac{۱}{۵}$$

۱۸ گزینه ۲

در ریختن ۳ بار متوالی یک تاس همگن، تعداد اعضای نمونه‌ای $n(S)=۶^۳$ است، از طرفی می‌دانیم اگر یک ریشهٔ معادلهٔ درجهٔ دوم برابر (-۱) باشد، داریم:

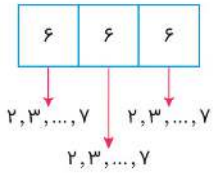
$$\begin{cases} ax^۲+bx+c=۰ \\ x=-۱ \end{cases} \Rightarrow a(-۱)^۲+b(-۱)+c=۰ \Rightarrow b=a+c$$

پس اگر اعداد رو شده از ریختن متوالی ۳ تاس به‌صورت ۳تایی مرتب $(a\ ,\ b\ ,\ c)$ نشان دهیم آنگاه ۳ تایی مرتب زیر در رابطهٔ $a+c=b$ صدق می‌کند، یعنی:

$$A=\left\{\begin{matrix}(۱,۲,۱)(۱,۳,۲)(۱,۴,۳)(۱,۵,۴)(۱,۶,۵)(۲,۳,۱)(۲,۴,۲)(۲,۵,۳) \\ (۲,۶,۴)(۳,۴,۱)(۳,۵,۲)(۳,۶,۳)(۴,۵,۱)(۴,۶,۲)(۵,۶,۱)\end{matrix}\right\}$$

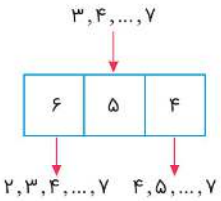
$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۱۵}{۶^۳}$$

۱۹ گزینه ۳



$$\Rightarrow n(S) = ۶ \times ۶ \times ۶$$

$$\begin{cases} A : \text{هیچ‌کدام از رقم‌ها یکسان نباشد} \\ A' : \text{حداقل دو رقم یکسان باشد} \end{cases}$$



$$\Rightarrow n(A) = ۶ \times ۵ \times ۴$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۶ \times ۵ \times ۴}{۶ \times ۶ \times ۶} = \frac{۵}{۹}$$

$$\Rightarrow P(A') = ۱ - P(A) = ۱ - \frac{۵}{۹} = \frac{۴}{۹}$$

۲۰ گزینه ۴

یک سال، ۴ فصل دارد:

$$n(S) = ۴ \times ۴ \times ۴ \times ۴$$

باید از پیشامد متمم استفاده کنیم:

$P(A')$: احتمال اینکه حداقل ۲ نفر در یک فصل به دنیا آمده باشند.

$P(A)$: احتمال اینکه هر ۴ فرزند در فصل‌های مختلف به دنیا بیایند.

$$n(A) = ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱ \Rightarrow P(A) = \frac{۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱}{۴ \times ۴ \times ۴ \times ۴} = \frac{۳}{۳۲}$$

$$\Rightarrow P(A') = ۱ - P(A) = ۱ - \frac{۳}{۳۲} = \frac{۲۹}{۳۲}$$

۲۱ گزینه ۲

کل جعبه دارای $۹ = ۴ + ۲ + ۳$ مهره است. از بین این مهره‌ها ۳ مهره انتخاب می‌کنیم:

$$n(S) = \binom{۹}{۳} = \frac{۹!}{(۹-۳)! \times ۳!} = \frac{۹!}{۶! \times ۳!} = \frac{\overset{۳}{\cancel{۹}} \times \overset{۴}{\cancel{۸}} \times ۷ \times \cancel{۶!}}{\cancel{۶!} \times \cancel{۳} \times \cancel{۲}} = ۸۴$$

برای این‌که حداکثر ۲ مهره قرمز باشد باید دو مهره قرمز یا یک مهره قرمز و یا صفر مهره قرمز داشته باشیم:

$$\text{غیرقرمز } ۶ = \underset{\text{سفید}}{۲} + \underset{\text{آبی}}{۴}$$

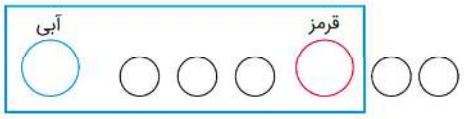
$$n(A) = \overset{\text{قرمز}}{\binom{۳}{۲}} \times \overset{\text{غیرقرمز}}{\binom{۶}{۱}} + \overset{\text{قرمز}}{\binom{۳}{۱}} \times \overset{\text{غیرقرمز}}{\binom{۶}{۲}} + \overset{\text{قرمز}}{\binom{۳}{۰}} \times \overset{\text{غیرقرمز}}{\binom{۶}{۳}}$$

$$= (۳ \times ۶) + (۳ \times ۱۵) + (۱ \times ۲۰) \Rightarrow n(A) = ۱۸ + ۴۵ + ۲۰ = ۸۳$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۸۳}{۸۴}$$

۲۲ گزینه ۱

نحوهٔ قرار گرفتن ۷ مهره در کنار هم بدون هیچ شرطی عبارت است از: $n(S) = ۷!$



یک بسته در نظر می‌گیریم

انتخاب ۳ مهره برای قرارگیری بین مهره آبی و قرمز

جابه‌جایی ۲ مهره و بسته بزرگ

$$n(A) = ۲! \times \binom{۵}{۳} \times ۳! \times ۳! = ۲ \times ۱۰ \times ۶ \times ۶ = ۷۲۰$$

جابه‌جایی مهره آبی و قرمز

جابه‌جایی ۳ مهره بین مهره‌های آبی و قرمز

$$\Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۷۲۰}{۷!} = \frac{\cancel{۲} \times \cancel{۱۰} \times \cancel{۶} \times \cancel{۶}}{۷ \times \cancel{۶} \times \cancel{۵} \times \cancel{۴} \times \cancel{۳} \times \cancel{۲}} = \frac{۱}{۷}$$

۲۳ گزینه ۳

احتمال وقوع متمم یک پیشامد با $P(A')$ نشان داده می‌شود، برای دو پیشامد متمم A و A' داریم:

$$\begin{cases} n(A) = ۱۶ \\ P(A') = \frac{۳}{۷} \end{cases}$$

$$P(A) = ۱ - P(A')$$

$$P(A) = ۱ - \frac{۳}{۷} = \frac{۴}{۷} \ , \ P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

$$\Rightarrow \ \frac{۴}{۷} = \frac{۱۶}{n(S)} \ \Rightarrow \ n(S) = ۲۸$$

۲۴ گزینه ۴

$$\underline{۵}\ \underline{۴}\ \underline{۳} \ \Rightarrow \ n(S) = ۵ \times ۴ \times ۳ = ۶۰$$

احتمال این‌که عدد مضرب ۲ باشد:

$$\underline{۴}\ \underline{۳}\ \underbrace{\underline{۲}}_{\text{فقط ۲,۶}} \ \Rightarrow \ n(A) = ۴ \times ۳ \times ۲ = ۲۴$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} \Rightarrow P(A) = \frac{۲۴}{۶۰} = \frac{۲}{۵}$$

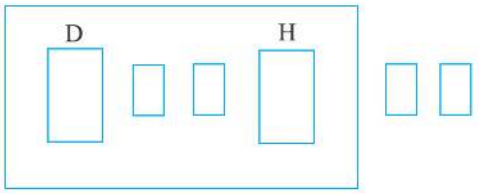
احتمال این‌که عدد مضرب ۲ نباشد:

$$P(A') = ۱ - \frac{۲}{۵} = \frac{۳}{۵}$$

۲۵ گزینه ۱

نحوهٔ قرار گرفتن ۶ کارت در کنار هم بدون هیچ شرطی عبارت است از:

$$n(S) = ۶!$$



$$\Rightarrow n(A) = \underbrace{۲!}_{\text{جابجایی دو کارت D , H}} \times \underbrace{\binom{۴}{۲}}_{\substack{\text{انتخاب دو کارت برای قرارگیری}\\ \text{بین کارت‌های D , H}}} \times \underbrace{۳!}_{\substack{\text{جابجایی دو کارت}\\ \text{و بستهٔ بزرگ}}} \times \underbrace{۲!}_{\substack{\text{جابجایی دو کارت}\\ \text{بین کارت‌های D , H}}}$$

$$n(A) = ۲ \times ۶ \times ۶ \times ۲ = ۱۴۴ \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} \Rightarrow P(A) = \frac{۱۴۴}{۶!} = \frac{۱۴۴}{۶ \times ۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲} \Rightarrow P(A) = \frac{۱}{۵}$$

۲۶ گزینه ۱

$$S = \{(۱ , ۶) , (۲ , ۵) , (۲ , ۶) , (۳ , ۴) , (۳ , ۵) , (۳ , ۶) , (۴ , ۳) , (۴ , ۴) , (۴ , ۵) , (۴ , ۶) , (۵ , ۲) , (۵ , ۳) , (۵ , ۴), (۵ , ۵) , (۵ , ۶) , (۶ , ۱) , (۶ , ۲) , (۶ , ۳) , (۶ , ۴) , (۶ , ۵) , (۶ , ۶)\} \Rightarrow n(S) = ۲۱$$

$$A = \{(۱ , ۶) , (۲ , ۵) , (۳ , ۴) , (۳ , ۶) , (۴ , ۳) , (۴ , ۵) , (۵ , ۲) , (۵ , ۴) , (۵ , ۶) , (۶ , ۱) , (۶ , ۳) , (۶ , ۵)\} \Rightarrow n(A) = ۱۲$$

$$P(A) = \frac{۱۲}{۲۱} = \frac{۴}{۷}$$

۲۷ گزینه ۴

$$\begin{cases} ۱۲ - x : & \text{فقط رشتهٔ فیزیک} \\ ۱۰ - x : & \text{فقط رشتهٔ شیمی} \\ x : & \text{هم رشتهٔ فیزیک هم شیمی} \end{cases}$$

$$\Rightarrow ۱۲ - x + ۱۰ - \cancel{x} + \cancel{x} = ۱۸ \Rightarrow x = ۴ \Rightarrow P(x) = \frac{۴}{۱۸} = \frac{۲}{۹}$$

۲۸ گزینه ۳

در مرحلهٔ اول ۵ انتخاب داریم، در مرحلهٔ دوم نیز چون کارت را به جعبه برمی‌گردانیم ۵ انتخاب داریم:

$$n(S) = ۵ \times ۵ = ۲۵$$

ابتدا احتمال این را حساب می‌کنیم که عدد حاصل مضرب ۵ باشد، سپس از پیشامد متمم استفاده می‌کنیم تا احتمال اینکه عدد مضرب ۵ نباشد به دست آید:

$$\begin{cases} A = \{ ۱۵ , ۲۵ , ۳۵ , ۴۵ , ۵۵\} \\ n(A) = ۵ \end{cases} \Rightarrow P(A) = \frac{۵}{۲۵}$$

احتمال اینکه عدد دورقمی مضرب ۵ نباشد:

$$P(A') = ۱ - P(A) = ۱ - \frac{۵}{۲۵} = \frac{۲۰}{۲۵}$$

۲۹ گزینه ۴

$$\underset{\text{قرمز}}{۴} + \underset{\text{آبی}}{۳} = ۷ \Rightarrow n(S) = \binom{۷}{۳} = \frac{۷!}{۴! \times ۳!} = \frac{۷ \times ۶ \times ۵ \times ۴!}{۴! \times ۶} \Rightarrow n(S) = ۳۵$$

ابتدا احتمال این را به دست می‌آوریم که خودکارها همرنگ باشند، سپس از احتمال متمم استفاده می‌کنیم. همرنگ باشند یعنی هر سه خودکار قرمز یا هر سه خودکار آبی باشد:

$$n(A) = \binom{۴}{۳} + \binom{۳}{۳} = ۴ + ۱ = ۵$$

احتمال همرنگ شدن:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۵}{۳۵} = \frac{۱}{۷}$$

احتمال همرنگ نشدن:

$$P(A') = ۱ - P(A) \Rightarrow P(A') = ۱ - \frac{۱}{۷} = \frac{۶}{۷}$$

۳۰ گزینه ۱

$$n(S) = \frac{۵!}{۲!۲!} = \frac{۱۲۰}{۴} = ۳۰$$

$$\underline{۲} \quad \underline{۳۳} \quad \underline{۴۴} \Rightarrow n(A) = ۳! = ۶$$

$$P(A) = \frac{۶}{۳۰} = \frac{۱}{۵} = ۰/۲$$

Homework (2)

۱ دو تاس همگن را پرتاب می‌کنیم. با کدام احتمال، حداقل یک عدد مضرب ۳ و مجموع دو عدد روشده برابر ۷ است؟

۱) $\frac{۱}{۱۸}$ ۲) $\frac{۱}{۹}$

۳) $\frac{۱}{۶}$ ۴) $\frac{۱}{۳}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۱

۲ دو تاس را پرتاب می‌کنیم. با کدام احتمال اعداد ظاهرشده متوالی و برابر نیستند؟

۱) $\frac{۵}{۱۲}$ ۲) $\frac{۵}{۹}$

۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۶}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

۳ خانواده ای ۵ فرزند دارد که دو فرزند آن‌ها دوقلو هستند. قرار است والدین به همراه ۳ تا از فرزندان‌شان به یک مهمانی بروند، احتمال این‌که دوقلوها با هم به مهمانی نروند، کدام است؟

۱) ۰/۱ ۲) ۰/۶

۳) ۰/۳ ۴) ۰/۷

کنکور سراسری علوم انسانی خارج از کشور ۱۴۰۲

۴ در یک مسابقه دو میدانی، ۷ نفر شرکت کرده‌اند که ۳ دانش‌آموز از مدرسه A و ۴ دانش‌آموز از مدرسه B به خط پایان رسیده‌اند. با کدام احتمال، مقام اول و آخر، از مدرسه A است؟

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۷}$

۳) $\frac{۵}{۹}$ ۴) $\frac{۳}{۱۴}$

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۴۰۲

۵ در هیئت‌مدیرهٔ یک شرکت، ۹ نفر عضو هستند. در رأی‌گیری برای یک سرمایه‌گذاری، ۴ نفر رأی موافق، ۳ نفر رأی مخالف و ۲ نفر رأی ممتنع داده‌اند. اگر سه نفر به‌طورتصادفی انتخاب شوند، احتمال اینکه نظر هیچ دو نفری مثل هم نباشد، چقدر است؟

۱) $\frac{۲}{۷}$ ۲) $\frac{۱}{۲۱}$

۳) $\frac{۱}{۹}$ ۴) $\frac{۱}{۳}$

کنکور سراسری علوم انسانی خارج از کشور ۱۴۰۱

۶ در پرتاب یک تاس و ۲ سکه، احتمال اینکه لااقل یکی از سکه‌ها پشت و عدد روشده در تاس، فرد باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۸}$ ۲) $\frac{۵}{۱۲}$

۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۵}{۸}$

کنکور سراسری علوم انسانی خارج از کشور ۱۳۹۹

۷ در جعبه‌ای ۵ مهرهٔ سفید و ۴ مهرهٔ سیاه یکسان قرار دارد. به تصادف ۳ مهره خارج می‌کنیم. با کدام احتمال ۲ مهرهٔ سفید و یک مهرهٔ سیاه، خارج می‌شود؟

۱) $\frac{۵}{۱۴}$ ۲) $\frac{۳}{۷}$

۳) $\frac{۱۰}{۲۱}$ ۴) $\frac{۱۱}{۲۱}$

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۳۹۹

۸ پنج کتاب زبان فارسی و ۳ کتاب زبان انگلیسی، به تصادف در یک قفسه کنار هم چیده شده‌اند. با کدام احتمال کتاب‌های هم‌زبان، کنار هم قرار می‌گیرند؟

۱) $\frac{۱}{۱۴}$ ۲) $\frac{۱}{۲۱}$

۳) $\frac{۱}{۲۸}$ ۴) $\frac{۱}{۵۶}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

۹ ۱۰ نفر در یک صف ایستاده‌اند. با کدام احتمال دو فرد موردنظر از آن‌ها، در کنار هم نیستند؟

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$

۳) $\frac{۴}{۵}$ ۴) $\frac{۹}{۱۰}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۱۰ مریم می‌خواهد ۶ کتاب متمایز را به تعداد یکسان در دو ردیف یک قفسه به‌تصادف قرار دهد. با کدام احتمال مریم دو کتاب با عناوین ریاضی و ادبیات را کنار هم در یک ردیف قرار می‌دهد؟

۱) $\frac{۴}{۱۵}$ ۲) $\frac{۱}{۵}$

۳) $\frac{۵}{۶}$ ۴) $\frac{۹}{۱۰}$

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۴۰۳

۱۱ در پرتاب همزمان دو تاس، اعداد روشده m و n هستند. با کدام احتمال، معادلهٔ $x^۲ - mx + n = ۰$ دارای دو ریشهٔ حقیقی و متمایز است؟ (با تغییر)

۱) $\frac{۱}{۳}$
۲) $\frac{۱}{۴}$
۳) $\frac{۱۷}{۳۶}$
۴) $\frac{۴}{۹}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۲

۱۲ در یک گروه ۱۵۰ نفری دانش‌آموزی، ۴۰ نفر فقط بلیت فیلم "الف" و ۷۵ نفر فقط بلیت فیلم "ب" را خریداری کرده‌اند. اگر $P(A)$ و $P(B)$ به ترتیب احتمال خرید بلیت فیلم‌های "الف" و "ب" باشند، بیشترین مقدار $\frac{P(A)}{P(B)}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱۵}{۲۹}$
۲) $\frac{۳۸}{۴۵}$
۳) $\frac{۸}{۱۵}$
۴) $\frac{۱۵}{۲۲}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۲

۱۳ خانواده‌ای دارای ۵ فرزند شامل ۲ فرزند پسر و ۳ فرزند دختر است. قرار است ۵ نفر از اعضای این خانواده با اتومبیل شخصی به مسافرت بروند. احتمال این‌که فقط والدین حق رانندگی داشته باشند و دو فرزند پسر با هم به مسافرت نروند، کدام است؟

۱) $\frac{۱۱}{۲۱}$
۲) $\frac{۱۰}{۲۱}$
۳) $\frac{۳}{۷}$
۴) $\frac{۱}{۷}$

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۴۰۲

۱۴ پنج بازیکن فوتسال تیم مدرسه‌ای، به‌طورتصادفی در یک ردیف کنار یکدیگر می‌ایستند. اگر دروازه‌بان و کاپیتان دو نفر متفاوت باشند، با کدام احتمال بین دروازه‌بان و کاپیتان دقیقاً دو نفر حضور دارند؟

۱) $\frac{۱}{۵}$
۲) $\frac{۱}{۱۰}$
۳) $\frac{۱}{۱۵}$
۴) $\frac{۱}{۲۰}$

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۴۰۱

پاسخ Homework (2)

۱ گزینه ۲

فضای نمونهٔ پرتاب دو تاس: $n(S) = ۳۶$

حالات مطلوب:

$$A = \{(۳, ۴), (۴, ۳), (۱, ۶), (۶, ۱)\} \Rightarrow n(A) = ۴$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۴}{۳۶} = \frac{۱}{۹}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۱

۲ گزینه ۲

تعداد زوج‌هایی که باهم برابر و متوالی‌اند را در جدول زیر مشخص می‌کنیم.

	۱	۲	۳	۴	۵	۶
۱	×	×				
۲	×	×	×			
۳		×	×	×		
۴			×	×	×	
۵				×	×	×
۶					×	×

بنابراین:

$$P(A) = ۱ - \frac{۱۶}{۳۶} = ۱ - \frac{۴}{۹} = \frac{۵}{۹}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

۳ گزینه ۴

فضای نمونه عبارت است از:

$$n(S) = \binom{۵}{۳} = ۱۰$$

مسئله را از روش متمم حل می‌کنیم یعنی:

$$n(A') = \text{قلوها باشند } ۲ = \binom{۲}{۲} \cdot \binom{۳}{۱} = ۳$$

پس:

$$P(A) = ۱ - P(A') = ۱ - \frac{۳}{۱۰} = ۰/۷$$

کنکور سراسری علوم انسانی خارج از کشور ۱۴۰۲

۴ گزینه ۲

$$\underline{A} \quad _ \quad _ \quad _ \quad _ \quad _ \quad \underline{A}$$

$$n(S) = ۷!$$

$$n(A) = \binom{۳}{۲} \times ۲! \times ۵! \Rightarrow P(A) = \frac{۳ \times ۲ \times \cancel{۵!}}{۷ \times ۶ \times \cancel{۵!}} = \frac{۱}{۷}$$

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۴۰۲

۵ گزینه ۱

$$n(S) = \binom{۹}{۳} = \frac{۹ \times ۸ \times ۷}{۳ \times ۲ \times ۱} = ۸۴$$

$$n(A) = \binom{۴}{۱}\binom{۳}{۱}\binom{۲}{۱} = ۲۴$$

$$P(A) = \frac{۲۴}{۸۴} = \frac{۲}{۷}$$

کنکور سراسری علوم انسانی خارج از کشور ۱۴۰۱

۶ گزینه ۱

نکته: اگر قرار باشد لااقل یکی از سکه‌ها پشت بیاید می‌تواند یک سکه پشت و دیگری رو بیاید و یا اینکه هردو پشت بیایند.
در پرتاپ تاس برای اینکه عدد روشده فرد باشد باید یکی از اعداد ۱، ۳ یا ۵ ظاهر شود.
احتمال رخداد پیشامد A از رابطهٔ $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}$ محاسبه می‌شود.
تعداد کل حالت‌ها در پرتاب یک تاس و دو سکه برابر است با:

$$n(S)=۲\times ۲\times ۶=۲۴$$

حالت‌های مطلوب به‌صورت زیر است:

$$A=\{(پ,ر,۱),(پ,ر,۳),(پ,ر,۵),(ر,پ,۱),(ر,پ,۳),(ر,پ,۵),(پ,پ,۱),(پ,پ,۳),(پ,پ,۵)\}$$
$$\Rightarrow n(A)=۹$$

احتمال موردنظر برابر است با:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۹}{۲۴}=\frac{۳}{۸}$$

کنکور سراسری علوم انسانی خارج از کشور ۱۳۹۹

۷ گزینه ۳

نکته: ترکیب r شیء از بین n شیء از رابطهٔ $\binom{n}{r}=\frac{n!}{(n-r)!r!}$ به دست می‌آید. احتمال پیشامد A را می‌توان از رابطهٔ $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}$ محاسبه کرد.
فضای نمونه انتخاب ۳ مهره از میان $۵+۴=۹$ مهره است. پیشامد موردنظر انتخاب ۲ مهرهٔ سفید و یک مهرهٔ سیاه می‌باشد.
بنابراین داریم:

$$n(S)=\binom{۹}{۳}=\frac{۹!}{۶!۳!}=\frac{۹\times ۸\times ۷}{۳\times ۲}=۸۴$$
$$n(A)=\binom{۵}{۲}\binom{۴}{۱}=\frac{۵\times ۴}{۲}\times ۴=۴۰$$
$$\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۴۰}{۸۴}=\frac{۱۰}{۲۱}$$

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۳۹۹

۸ گزینه ۳

۳ کتاب انگلیسی ۵ کتاب فارسی

$$n(S) = ۸!$$

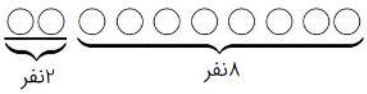
$$n(A) = ۵! \times ۳! \times ۲$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۵! \times ۳! \times ۲}{۸!} = \frac{۳ \times ۲ \times ۲}{۸ \times ۷ \times ۶} = \frac{۱}{۲۸}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

۹ گزینه ۳

برای محاسبهٔ احتمال اینکه دو فرد موردنظر در کنار هم نباشند، احتمال اینکه هر دو فرد در کنار هم باشند را محاسبه می‌کنیم و از احتمال کل کم می‌کنیم.



دو نفر در کنار هم باشند:

$$P(A') = \frac{۲!۹!}{۱۰!} = \frac{۱}{۵}$$

دو نفر در کنار هم نباشند:

$$P(A) = ۱ - P(A') = ۱ - \frac{۱}{۵} = \frac{۴}{۵}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۱۰ گزینه ۱

راه‌حل اول:

$$n(S) = \binom{۶}{۳} \times ۳! \times \binom{۳}{۳} \times ۳!$$
$$= ۲۰ \times ۶ \times ۱ \times ۶ = ۷۲۰$$

$$n(A) = \left(\binom{۴}{۱} \times \underbrace{۲!}_{\text{جایگشت ۲ کتاب}} \times \underbrace{۲!}_{\text{جایگشت بسته‌ها}} \times \binom{۳}{۳} \times ۳! \right) \times \underbrace{۲}_{\text{جابه‌جایی ردیف}} = ۱۹۲$$

یکی از ۴ کتاب دیگر را با دو کتاب موردنظر در یک ردیف قرار می‌دهیم.

$$\Rightarrow P(A) = \frac{۱۹۲}{۷۲۰} = \frac{۴}{۱۵}$$

راه‌حل دوم:

$$\Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۲! \times ۴ \times ۴!}{۶!} = \frac{۱۹۲}{۷۲۰} = \frac{۴}{۱۵}$$

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۴۰۳

۱۱ گزینه ۳

$$\Delta = (-m)^۲ - ۴(۱)(n) = m^۲ - ۴n > ۰ \Rightarrow m^۲ > ۴n$$

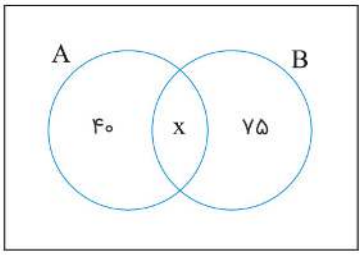
حال سراغ حالت‌بندی بروید. (دقت شود $n(S) = ۳۶$ است.)

تعداد حالات	n	m
۰	-	۱
۰	-	۲
۲	۱ یا ۲	۳
۳	۱ یا ۲ یا ۳	۴
۶	۱ یا ۲ یا ... یا ۶	۵
۶	۱ یا ۲ یا ... یا ۶	۶
۱۷	مجموع	

$$P(A) = \frac{۱۷}{۳۶}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۲

۱۲ گزینه ۴



$$\frac{P(A)}{P(B)} = \frac{\frac{n(A)}{n(S)}}{\frac{n(B)}{n(S)}} = \frac{n(A)}{n(B)} = \frac{۴۰ + x}{۷۵ + x}$$

هنگامی کسر $\frac{۴۰ + x}{۷۵ + x}$ بیشترین مقدار می‌شود که x بیشترین شود. پس در واقع باید قسمت اشتراک که برابر با x است، بیشترین مقدار باشد. بنابراین:

$$\max(x) = ۱۵۰ - (۴۰ + ۷۵) = ۳۵$$

$$\Rightarrow \frac{P(A)}{P(B)} = \frac{۴۰ + x}{۷۵ + x} = \frac{۴۰ + ۳۵}{۷۵ + ۳۵} = \frac{۷۵}{۱۱۰} = \frac{۱۵}{۲۲}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۲

۱۳ گزینه ۱

فضای نمونه برابر است با:

$$n(S) = \binom{۷}{۵} = \frac{۷ \times ۶}{۲} = ۲۱$$

فضای پیشامد برابر است با:

$$\begin{cases} \text{حالت اول} = \text{هر دو والدین باشند} = \binom{۲}{۲} \times \Big(\underbrace{\binom{۵}{۳}}_{\text{انتخاب ۳ فرزند}} - \underbrace{\binom{۲}{۲}}_{\text{پسرها با هم}} \binom{۳}{۱} \Big) = ۱(۱۰ - ۳) = ۷ \\ \text{حالت دوم} = \text{یکی از والدین باشد} = \binom{۲}{۱} \Big(\binom{۵}{۴} - \binom{۲}{۲} \binom{۳}{۲} \Big) = ۲(۵ - ۳) = ۴ \end{cases}$$

$$\Rightarrow n(A) = ۱۱$$

بنابراین:

$$P(A) = \frac{۱۱}{۲۱}$$

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۴۰۲

۱۴ گزینه ۱

ابتدا شکلی برای مسئله رسم می‌کنیم.

ک	◯	◯	د	◯

$$n(A) = \underbrace{۲!}_{\substack{\text{جابه‌جایی کاپیتان} \\ \text{و دروازه‌بان}}} \times \underbrace{۲!}_{\substack{\text{جابه‌جایی بسته و} \\ \text{شخص بیرون بسته}}} \times \underbrace{۲!}_{\substack{\text{جابه‌جایی دو نفر بین} \\ \text{کاپیتان و دروازه‌بان}}} \times \underbrace{\binom{۳}{۲}}_{\substack{\text{انتخاب دو نفر بین} \\ \text{کاپیتان و دروازه‌بان}}}$$

$$= ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۳ = ۲۴$$

همچنین می‌دانیم: $n(S) = ۵! = ۱۲۰$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۲۴}{۱۲۰} = \frac{۱}{۵}$$

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۴۰۱

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

احتمال شرطی

Homework (1)

۱ کارخانه‌ای به هنگام نصب دستگاه‌های جدید به احتمال ۰/۴ به متخصصین جدید و به احتمال ۰/۳ به کارگران جدید و به احتمال ۰/۵ به متخصصین جدید یا کارگران جدید نیاز دارد. اگر این کارخانه به متخصصین جدید نیاز داشته باشد با کدام احتمال به کارگران جدید نیاز دارد؟

$P(B)=۰/۳$ $P(A)=۰/۴$ $P(A\cup B)=۰/۵$

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$۰/۵=۰/۴+۰/۳-P(A\cap B)$

$P(A\cap B)=۰/۲$

$P(B|A)=\frac{P(B\cap A)=۰/۲}{P(A)=۰/۴}=\frac{۱}{۲}$

۱) $\frac{۳}{۵}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ✓ ۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{۲}{۵}$

۲ اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند، به‌طوری‌که $A\subseteq B$، $P(A)=\frac{۱}{۴}$ و $P(B)=\frac{۴}{۵}$، آنگاه $P(B|A')$ کدام است؟

$P(B|A')=\frac{P(B\cap A')=P(B-A)}{P(A')}=\frac{P(B)-P(A)}{۱-P(A)}=\frac{\frac{۴}{۵}-\frac{۱}{۴}=\frac{۱۶-۵}{۲۰}=\frac{۱۱}{۲۰}}{\frac{۳}{۴}}=\frac{۱۱}{۱۵}$

۱) ✓ $\frac{۱۱}{۱۵}$ ۲) $\frac{۱۰}{۱۷}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۷}{۱۵}$

۳ در یک خانواده سه فرزندی، یکی از فرزندان پسر است با چه احتمالی دو فرزند دیگر دختر است؟

$n(S)=۲\times۲\times۲=۸$

حالت ۳ دختر صدق نمی‌کند

$۸-۱=۷=n(S_{new})$

{(پ د د)، (د پ د)، (د د پ)} ← جواب $\frac{۳}{۷}$

۱) $\frac{۳}{۸}$ ۲) ✓ $\frac{۳}{۷}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

۴ احتمال باران‌آمدن در منطقه‌ای $\frac{۱}{۶}$ و احتمال تصادف در آن‌جا $\frac{۱}{۵}$ و احتمال بارش باران و تصادف باهم $\frac{۱}{۱۲}$ است. اگر امروز باران بیاید، چقدر احتمال تصادف هست؟

$P(A)$ $P(B)$ $P(A\cap B)=\frac{۱}{۱۲}$

$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)=\frac{۱}{۱۲}}{P(A)=\frac{۱}{۶}}=\frac{۱}{۲}$

۱) $\frac{۱}{۱۲}$ ۲) $\frac{۱}{۳۰}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) ✓ $\frac{۱}{۲}$

۵ خانواده‌ای چهار فرزند دارند، احتمال آنکه تعداد پسرها بیشتر از تعداد دخترها باشد، چند برابر احتمال آنکه تعداد پسرها و دخترها برابر باشد، است؟

با ۳ پسر یا ۴ پسر

$\frac{\binom{۴}{۴}+\binom{۴}{۳}=۱+\frac{۴\times۳\times۲}{۱\times۲\times۳}=۵}{۲^۴=۱۶}=\frac{۵}{۱۶}$

$\binom{۴}{۲}=\frac{۴\times۳}{۱\times۲}=۶$

$\frac{۵}{۱۶}\div\frac{۶}{۱۶}=\frac{۵}{۶}$

۱) $\frac{۶}{۵}$ ۲) ✓ $\frac{۵}{۶}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

۶ اگر $P(A)=۰/۳$، $P(B)=۰/۴$ و $P(A\cup B)=۰/۶$ باشد، $P(A|B)$ کدام است؟

۱) ۰/۱۵ ۲) ۰/۲۵ ۳) ۰/۳۵ ۴) ۰/۴۵

۷ در جعبه‌ای ۶ مهرهٔ سفید و ۹ مهرهٔ سیاه موجود است. دو مهره به‌طور متوالی و بدون جایگذاری از آن بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال بدون توجه به اولین مهره، دومین مهرهٔ خارج‌شده سفید است؟

۱) $\frac{۵}{۱۴}$ ۲) $\frac{۳}{۷}$ ۳) $\frac{۲}{۵}$ ۴) $\frac{۳}{۵}$

۸ فرض کنید A و B دو پیشامد باشند به‌طوری‌که $P(A)=\frac{۱}{۲}$، $P(B)=\frac{۱}{۳}$ و $P(A\cap B)=\frac{۱}{۴}$ آنگاه $P(B|A')$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۶}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

۹ در پرتاب دو تاس، اگر تفاضل اعداد دو تاس بیشتر از ۳ باشد، چقدر احتمال دارد که یکی از اعداد ۶ باشد؟

۱) $\frac{۱}{۹}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۲}{۹}$

۱۰ درون جعبه‌ای ۵ مهره آبی و ۴ مهره زرد وجود دارد. مهره‌های داخل جعبه را یکی یکی و بدون جایگذاری خارج می‌کنیم، احتمال آن‌که اولین مهره زرد خارج شده مهره چهارم باشد، چقدر است؟

۱) $\frac{۵}{۶۳}$ ۲) $\frac{۴}{۶۳}$ ۳) $\frac{۱}{۲۱}$ ۴) $\frac{۲}{۲۱}$

۱۱ در پرتاب سه تاس، احتمال آن‌که اعداد رو شده ۶ نباشد چقدر است؟

۱) $\frac{۵}{۶}$ ۲) $\frac{۱۲۵}{۲۱۶}$ ۳) $\frac{۲۱۵}{۲۱۶}$ ۴) $\frac{۱}{۶}$

۱۲ خانواده‌ای سه فرزند دارد، با چه احتمالی دو فرزند اول دختر است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۸}$

۱۳ فرزند دوم خانواده‌ای پسر است. با کدام احتمال فرزند اول و سوم این خانواده دختر هستند؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ✓ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۸}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

$\frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۴}$

۱۴ یک تاس را آنقدر پرتاب می‌کنیم تا برای اولین بار مضرب ۳ ظاهر شود. با کدام احتمال، حداکثر در پرتاب سوم این نتیجه حاصل می‌شود؟

۱) $\frac{۱۰}{۲۷}$ ۲) $\frac{۵}{۹}$ ۳) $\frac{۱۶}{۲۷}$ ۴) $\frac{۱۹}{۲۷}$ ✓

مضرب ۳ بیاید $\frac{۱}{۳}$ — مضرب ۳ نیاید $\frac{۲}{۳}$

$\frac{۱}{۳} + \frac{۲}{۳} \times \frac{۱}{۳} + \frac{۲}{۳} \times \frac{۲}{۳} \times \frac{۱}{۳}$

$\frac{۹}{۲۷} + \frac{۶}{۲۷} + \frac{۴}{۲۷} = \frac{۱۹}{۲۷}$

۱۵ احتمال برد تیم A در یک مسابقه برابر $\frac{۲}{۳}$ است. احتمال اینکه این تیم در ۵ مسابقه دقیقاً ۳ بار پیروز شود، چقدر است؟

۱) $\frac{۵}{۱۶}$ ۲) $\frac{۲۰}{۸۱}$ ۳) $\frac{۸۰}{۲۴۳}$ ✓ ۴) $\frac{۱۰}{۲۷}$

باخت $\frac{۱}{۳}$

$\binom{۵}{۳} \times \frac{۲}{۳} \times \frac{۲}{۳} \times \frac{۲}{۳} \times \frac{۱}{۳} \times \frac{۱}{۳} = \frac{۸۰}{۲۴۳}$

$۱۰ \times \frac{۸}{۲۴۳}$

۱۶ سه تاس را باهم پرتاب می‌کنیم، با کدام احتمال اعداد روشده مضرب ۳ هستند؟

۱) $\frac{۸}{۹}$ ۲) $\frac{۱}{۹}$ ۳) $\frac{۸}{۲۷}$ ۴) $\frac{۱}{۲۷}$

$\frac{۱}{۳} \times \frac{۱}{۳} \times \frac{۱}{۳}$

۱۷ ویدا به احتمال ۰/۷ و مریم به احتمال ۰/۸ در کنکور قبول می‌شوند. با چه احتمالی فقط یکی از آن‌ها قبول می‌شوند؟

۱) ۰/۲۴ ۲) ۰/۳۸ ✓ ۳) ۰/۱ ۴) ۰/۱۴

۰٫۳ ۰٫۲

$P(A \cap B') + P(A' \cap B) =$

$\frac{۷}{۱۰} \times \frac{۲}{۱۰} + \frac{۳}{۱۰} \times \frac{۸}{۱۰}$

$\frac{۱۴}{۱۰۰} + \frac{۲۴}{۱۰۰} = \frac{۳۸}{۱۰۰}$

۱۸ در خانواده‌ای با ۵ فرزند، با چه احتمالی فقط ۲ فرزند دختر است؟

۱) $\frac{۳}{۱۶}$ ۲) $\frac{۵}{۱۶}$ ✓ ۳) $\frac{۳}{۸}$ ۴) $\frac{۵}{۸}$

$\binom{۵}{۲} \times \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲}$

۱۰ — $\frac{۱}{۲۵} = \frac{۱۰}{۳۲} = \frac{۵}{۱۶}$

۱۹ احتمال گل شدن هر ضربه پنالتی توسط یک بازیکن ۰/۸ است. اگر او ۴ پنالتی بزند، احتمال اینکه فقط ضربه دوم گل شود، کدام است؟

گل نشدن ۰٫۲

۱) ۰/۴۸ ۲) ۰/۱۶ ۳) $(۰/۲)^۳(۰/۸)$ ✓ ۴) $(۰/۸)^۳(۰/۲)$

$۰٫۸ \times (۰٫۲)^۳ \times ۰٫۸ \times ۰٫۲ \times ۰٫۲$

۲۰ یک تاس را آن‌قدر پرتاب می‌کنیم تا برای اولین بار مضرب ۳ ظاهر شود. با کدام احتمال، حداکثر در پرتاب سوم این نتیجه حاصل می‌شود؟

$\frac{۲}{۶} = \frac{۱}{۳}$

۱) $\frac{۱۰}{۲۷}$

۲) $\frac{۵}{۹}$

۳) $\frac{۱۶}{۲۷}$

۴) $\frac{۱۹}{۲۷}$ ✓

$\frac{۱}{۳} + \frac{۲}{۳} \times \frac{۱}{۳} + \frac{۲}{۳} \times \frac{۲}{۳} \times \frac{۱}{۳}$

۲۱ در پرتاب ۵ سکه چقدر احتمال دارد حداقل ۴ بار "پشت" ظاهر شود؟

۱) $\frac{۳}{۱۶}$ ✓

۲) $\frac{۵}{۱۶}$

۳) $\frac{۷}{۱۶}$

۴) $\frac{۹}{۱۶}$

$\binom{۵}{۴} \times \frac{۱}{۲^۵} + \binom{۵}{۵} \times \frac{۱}{۲^۵}$

$\frac{۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲}{۱ \times ۲ \times ۳ \times ۴} = ۵$

$\frac{۵}{۳۲} + \frac{۱}{۳۲} = \frac{۶}{۳۲} = \frac{۳}{۱۶}$

پاسخ Homework (1)

۱ گزینه ۲

A: کارخانه به متخصصین جدید نیاز داشته باشد.

B: کارخانه به کارگران جدید نیاز داشته باشد.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow ۰/۵ = ۰/۴ + ۰/۳ - P(A \cap B)$$

$$\Rightarrow P(A \cap B) = ۰/۲$$

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{۰/۲}{۰/۴} = \frac{۱}{۲}$$

۲ گزینه ۱

$$P(B|A') = \frac{P(B \cap A')}{P(A')} = \frac{P(B - A)}{۱ - P(A)} = \frac{P(B) - P(A)}{۱ - P(A)} = \frac{\frac{۴}{۵} - \frac{۱}{۴}}{۱ - \frac{۱}{۴}} = \frac{\frac{۱۱}{۲۰}}{\frac{۳}{۴}} = \frac{۴ \times ۱۱}{۲۰ \times ۳} = \frac{۱۱}{۱۵}$$

۳ گزینه ۲

در این سوال شرط مسئله یک پسر بودن است پس فضای نمونه کاهش یافته ۷ عضو خواهد داشت یعنی حالت "سه دختری" حذف می‌شود. برای آنکه دو فرزند دیگر دختر باشد سه حالت {پ د د، د پ د، د د پ} مطلوب است پس:

$$P(A) = \frac{۳}{۷}$$

۴ گزینه ۴

اگر پیشامد بارش باران را با A و پیشامد تصادف را با B نشان دهیم، داریم:

$$P(A) = \frac{۱}{۶}\ ,\ P(B) = \frac{۱}{۵}\ ,\ P(A \cap B) = \frac{۱}{۱۲}$$

$$\Rightarrow P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{۱}{۱۲}}{\frac{۱}{۶}} = \frac{۱}{۲}$$

۵ گزینه ۲

اگر تعداد پسرها بیشتر از دخترها باشند، باید سه پسر و یک دختر و یا اینکه چهار پسر داشته باشد:

$$P_۱ = \frac{\binom{۴}{۳}}{۲^۴} + \frac{۱}{۱۶} = \frac{۵}{۱۶}$$

اگر تعداد دخترها و پسرها برابر باشند، آنگاه:

$$P_۲ = \frac{\binom{۴}{۲}}{۲^۴} = \frac{۶}{۱۶}$$
$$\frac{P_۱}{P_۲} = \frac{۵}{۶}$$

۶ گزینه ۲

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$۰/۶ = ۰/۳ + ۰/۴ - x \Rightarrow x = ۰/۱ = P(A \cap B)$$
$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{۰/۱}{۰/۴} = \frac{۱}{۴} = ۰/۲۵$$

۷ گزینه ۳

اولین مهره تأثیری در حل سؤال ندارد.

$$P(A) = \frac{۶}{۱۵} = \frac{۲}{۵}$$

۸ گزینه ۲

$$P(B|A') = \frac{P(B \cap A')}{P(A')} = \frac{P(B - A)}{P(A')} = \frac{P(B) - P(A \cap B)}{P(A')}$$
$$= \frac{\frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۴}}{\frac{۱}{۲}} = \frac{\frac{۱}{۱۲}}{\frac{۱}{۲}} = \frac{۱}{۶}$$

۹ گزینه ۲

تعداد کل حالت‌ها برابر است با تعداد حالت‌هایی که تفاضل اعداد دو تاس بیشتر از ۳ باشد، بنابراین:

$$S = \{(۱, ۵)(۱, ۶)(۲, ۶)(۵, ۱)(۶, ۱)(۶, ۲)\} \Rightarrow n(S) = ۶$$

از بین اعضای مجموعهٔ بالا در ۴ تای آن‌ها یکی از اعداد ۶ است، پس $n(A) = ۴$.

$$P(A) = \frac{۴}{۶} = \frac{۲}{۳}$$

۱۰ گزینه ۱

مفهوم این سؤال این است که سه مهره اول آبی و چهارمین مهره زرد خارج شود.

$$P(A) = \frac{۵}{۹} \times \frac{۴}{۸} \times \frac{۳}{۷} \times \frac{۴}{۶} = \frac{۵}{۹} \times \frac{۱}{۲} \times \frac{۳}{۷} \times \frac{۲}{۳} = \frac{۵}{۶۳}$$

۱۱ گزینه ۲

چون پرتاب سه تاس از هم مستقل هستند.

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \times P(B) \times P(C) \Rightarrow \frac{۵}{۶} \times \frac{۵}{۶} \times \frac{۵}{۶} = \frac{۱۲۵}{۲۱۶}$$

۱۲ گزینه ۲

$$P = (\text{اولی دختر}) \times (\text{دومی دختر}) = \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۴}$$

۱۳ گزینه ۱

$$P = \underbrace{\frac{۱}{۲}}_{\text{فرزند اول دختر باشد}} \times \underbrace{\frac{۱}{۲}}_{\text{فرزند سوم پسر باشد}} = \frac{۱}{۴}$$

۱۴ گزینه ۴

احتمال این‌که مضرب ۳ ظاهر شود، برابر $\frac{۱}{۳} = \frac{۲}{۶}$ و ظاهر نشدن مضرب ۳ برابر $\frac{۲}{۳}$ است. احتمال مطلوب را به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم:

در پرتاب اول مضرب ۳ + در پرتاب دوم مضرب ۳ + در پرتاب سوم مضرب ۳

$$= \frac{۱}{۳} + \frac{۲}{۳} \times \frac{۱}{۳} + \frac{۲}{۳} \times \frac{۲}{۳} \times \frac{۱}{۳} = \frac{۱۹}{۲۷}$$

۱۵ گزینه ۳

احتمال مطلوب را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$P(\text{A سه مسابقه برنده شده و دو مسابقه را باخته}) = P(\text{A دقیقاً سه مسابقه از پنج مسابقه را برنده شده})$$

$$= \binom{۵}{۳} \times (\frac{۲}{۳})^{۳} \times (\frac{۱}{۳})^{۲} = \frac{۸۰}{۲۴۳}$$

۱۶ گزینه ۴

$$\text{تاس مضرب ۳ باشد} : \{۳,۶\} \Rightarrow P(A) = \frac{۲}{۶} = \frac{۱}{۳}$$

پرتاب تاس‌ها مستقل از یکدیگرند، بنابراین:

$$P(B) = \underbrace{\frac{۱}{۳}}_{\text{تاس اول مضرب ۳ باشد}} \times \underbrace{\frac{۱}{۳}}_{\text{تاس دوم مضرب ۳ باشد}} \times \underbrace{\frac{۱}{۳}}_{\text{تاس سوم مضرب ۳ باشد}} = \frac{۱}{۲۷}$$

۱۷ گزینه ۲

A: پیشامد قبولی ویدا

B: پیشامد قبولی مریم

$$P(\text{قبولی یکی از آن‌ها}) = P(A \cap B') + P(B \cap A')$$

$$= P(A)P(B') + P(B)P(A') = \frac{۷}{۱۰} \times \frac{۲}{۱۰} + \frac{۸}{۱۰} \times \frac{۳}{۱۰} = \frac{۱۴}{۱۰۰} + \frac{۲۴}{۱۰۰} = \frac{۳۸}{۱۰۰}$$

۱۸ گزینه ۲

۵ فرزند یا پسر هستند یا دختر؛ پس جایگاه هر فرزند $\frac{۱}{۲}$ احتمال دارد که دختر شود:

$$\frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲} = (\frac{۱}{۲})^{۵}$$

اما تولد دو فرزند دختر در ۵ فرزند خانواده به $\binom{۵}{۲} = ۱۰$ حالت امکان‌پذیر است، پس داریم:

$$P(A) = ۱۰ \times \frac{۱}{۳۲} = \frac{۵}{۱۶}$$

۱۹ گزینه ۳

پنالتی‌ها مستقل از هم‌اند، پس داریم:

$$P(\text{مطلوب}) = (۰/۲) \times (۰/۸) \times (۰/۲) \times (۰/۲) = (۰/۲)^{۳}(۰/۸)$$

۲۰ گزینه ۴

اگر بخواهیم تاس حداکثر در پرتاب سوم مضرب ۳ بیاید:

$$A = \{۳, ۶\} \Rightarrow P(A) = \frac{۱}{۳}$$
$$S = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶\}$$

یا تاس در بار اول مضرب ۳ می‌آید: $\frac{۱}{۳}$

یا تاس در بار اول مضرب ۳ نمی‌آید و بار دوم مضرب ۳ می‌آید: $\frac{۲}{۳} \times \frac{۱}{۳}$

یا ۲ بار اول مضرب ۳ نمی‌آید، بار سوم ۳ می‌آید: $\frac{۲}{۳} \times \frac{۲}{۳} \times \frac{۱}{۳}$

$$P = \frac{۱}{۳} + \frac{۲}{۹} + \frac{۴}{۲۷} = \frac{۱۹}{۲۷}$$

۲۱ گزینه ۱

$$P(\text{حداقل ۴ بار پشت بیاید}) = P(\text{۴ بار پشت}) + P(\text{۵ بار پشت})$$
$$= \binom{۵}{۴} \times \frac{۱}{۲۵} + \binom{۵}{۵} \times \frac{۱}{۲۵} = ۵ \times \frac{۱}{۳۲} + ۱ \times \frac{۱}{۳۲} = \frac{۶}{۳۲} = \frac{۳}{۱۶}$$

Homework (2)

۱ احتمال اینکه یک کشتی‌گیر رقیب اصلی خود را ببرد $\frac{۱}{۵}$ و احتمال کسب مدال طلا برای او $\frac{۱}{۳}$ بوده و درصورتی‌که اصلی‌ترین رقیب خود را ببرد به $\frac{۱}{۲}$ افزایش خواهد یافت. با کدام احتمال، این کشتی‌گیر قهرمان می‌شود یا رقیب اصلی خود را می‌برد؟

۱) $\frac{۴}{۱۵}$ ۲) $\frac{۱۱}{۳۰}$

۳) $\frac{۱۳}{۳۰}$ ۴) $\frac{۷}{۱۵}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۲ پیشامدهای ناسازگار A و B از فضای نمونه‌ای S هستند. اگر $P(A)=\frac{۱}{۶}$ و $P(B)=\frac{۱}{۴}$ باشد، مقدار $P(B'|A')$ کدام است؟

۱) ۰/۷ ۲) ۰/۵

۳) ۰/۵۵ ۴) ۰/۷۵

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۲

۳ احتمال شیوع یک بیماری در جامعه‌ای برابر ۰/۰۸ و احتمال بهبود یافتن فرد مبتلا به این بیماری برابر ۰/۵ است. احتمال اینکه فردی از این جامعه به این بیماری مبتلا شود و بهبود یابد، چند درصد است؟

۱) ۰/۰۲ ۲) ۰/۰۴

۳) ۲ ۴) ۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

۴ A و B دو پیشامد از یک فضای نمونه‌ای هستند. اگر $P(A)=۰/۴$، $P(B|A)=۰/۲۵$ و $P(B)=۰/۳$ باشد، $P(B|A')$ کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$

۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۵}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۹

۵ سه عدد را به طور متوالی و بدون جایگذاری از میان اعداد ۱ تا n انتخاب می‌کنیم. احتمال اینکه عدد سوم ۱۰ باشد، برابر $\frac{۱}{۱۵}$ است. در انتخاب تصادفی سه عدد و بدون جایگذاری از میان همین اعداد، با کدام احتمال فقط عدد سوم مضرب ۳ است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$
۲) $\frac{۱}{۵}$
۳) $\frac{۱۵}{۹۱}$
۴) $\frac{۵}{۵۱}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۶ اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند، به‌طوری‌که $P(A) = ۰/۲$، $P(B) = ۰/۲۲$ و $P(B|A) = ۰/۷$، آنگاه $P(B'|A')$ کدام است؟

۱) ۰/۸۴
۲) ۰/۹۰
۳) ۰/۹۲
۴) ۰/۹۶

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۰
علوی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۷ ۱۴۰۱

۷ احتمال متولد شدن یک خرگوش نر در یک نسل در دورهٔ بارداری مادر، ۷۰ درصد و احتمال متولد شدن دو خرگوش نر در دوبار متوالی زایمان ۶۰ درصد است. اگر دومین فرزند خرگوش، نر باشد، احتمال آن‌که در زایمان قبلی خرگوش نر به دنیا آمده باشد، کدام است؟ (فرض بر این است که در هر دوره فقط یک تولد صورت می‌گیرد) (با تغییر)

۱) $\frac{۲۰}{۲۷}$
۲) $\frac{۲}{۳}$
۳) $\frac{۷}{۱۰}$
۴) $\frac{۶}{۷}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

۸ احتمال اینکه یک دانش‌آموز در یک امتحان نمرهٔ قبولی بگیرد ۰/۹ و در دو امتحان متوالی نمرهٔ قبولی بگیرد ۰/۸۵ است. اگر دانش‌آموز در امتحان دوم موفق باشد، احتمال اینکه در امتحان قبلی نیز موفق شده باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۸}{۹}$
۲) $\frac{۸۵}{۹۴}$
۳) $\frac{۱۷}{۱۸}$
۴) $\frac{۴۵}{۴۷}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

۹ امیر و بهروز هرکدام به ترتیب با احتمال ۰/۶ و ۰/۳ در یک مسابقهٔ علمی شرکت می‌کنند. احتمال شرکت امیر به شرط شرکت بهروز برابر ۰/۵ است. احتمال شرکت امیر به شرط شرکت نکردن بهروز، کدام است؟

۱) $\frac{۹}{۱۴}$
۲) $\frac{۵}{۷}$
۳) $\frac{۱۱}{۱۴}$
۴) $\frac{۶}{۷}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۸

۱۰ دو تاس را باهم می‌ریزیم، درحالی که حداقل عدد یک تاس مضرب ۳ نباشد، با کدام احتمال جمع دو عدد روشده مضرب ۳ است؟

۱) $\frac{۲}{۹}$
۲) $\frac{۵}{۱۸}$
۳) $\frac{۱}{۳}$
۴) $\frac{۱}{۴}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۳

۱۱ در جعبه‌ای ۵ مهرهٔ سفید و ۶ مهرهٔ سیاه است. ابتدا یک مهره را بدون رؤیت خارج می‌کنیم، سپس از بین بقیهٔ مهره‌ها، ۲ مهره بیرون می‌کشیم. با کدام احتمال هر دو مهرهٔ اخیر، سفید است؟

۱) $\frac{۱}{۱۱}$
۲) $\frac{۲}{۱۱}$
۳) $\frac{۴}{۱۱}$
۴) $\frac{۵}{۲۲}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۱۲ پنج مهرهٔ سفید یکسان با شماره‌های ۱ تا ۵ و همچنین پنج مهرهٔ سیاه یکسان با شماره‌های ۱ تا ۵ را در ظرفی قرار می‌دهیم، به‌تصادف دو مهره از بین آن‌ها بیرون می‌آوریم، اگر مجموع شماره‌های هر دو مهره ۶ باشد، با کدام احتمال هر دو مهره همرنگ هستند؟

۱) $\frac{۲}{۵}$
۲) $\frac{۴}{۹}$
۳) $\frac{۵}{۹}$
۴) $\frac{۳}{۵}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۲

۱۳ اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند به‌طوری‌که $A \subseteq B$ و $P(A) = \frac{۱}{۳}$ و $P(B) = \frac{۳}{۴}$، آنگاه $P(B|A')$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۸}$
۲) $\frac{۱}{۲}$
۳) $\frac{۷}{۱۲}$
۴) $\frac{۵}{۸}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۰

۱۴ در یک خانوادهٔ دو فرزندی، می‌دانیم یکی از فرزندان پسر است. با کدام احتمال این خانواده فرزند دختر دارد؟

۱) $\frac{۱}{۳}$
۲) $\frac{۱}{۲}$
۳) $\frac{۲}{۳}$
۴) $\frac{۳}{۴}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۵

۱۵ احتمال موفقیت فردی در آزمون اول ۰/۷ و در آزمون دوم ۰/۶ است. اگر این فرد در آزمون اول موفق شود، احتمال موفقیت وی در آزمون دوم ۰/۸ است. با کدام احتمال، لااقل در یکی از این دو آزمون موفق می‌شود؟

۱) ۰/۷۴ ۲) ۰/۷۶

۳) ۰/۸۲ ۴) ۰/۸۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۱۶ یک خانوادهٔ سه فرزندی با کدام احتمال، حداقل دو فرزند دختر دارد؟ در صورتی که می‌دانیم حداقل یکی از فرزندان، دختر است.

۱) $\frac{۳}{۸}$ ۲) $\frac{۵}{۸}$

۳) $\frac{۳}{۷}$ ۴) $\frac{۴}{۷}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۷

۱۷ در یک خانواده سه فرزندی می‌دانیم فرزند اول آن‌ها دختر است. با کدام احتمال لااقل یکی از فرزندان پسر است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$

۳) $\frac{۵}{۸}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۷

۱۸ در یک خانواده سه فرزندی، می‌دانیم یکی از فرزندان پسر است. با کدام احتمال دو فرزند دیگر، دختر است؟

۱) $\frac{۳}{۸}$ ۲) $\frac{۳}{۷}$

۳) $\frac{۴}{۷}$ ۴) $\frac{۵}{۸}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۹

۱۹ در جعبه‌ای ۳ مهرهٔ سفید و ۴ مهرهٔ سیاه موجود است. ۲ مهره بدون رؤیت از جعبه خارج می‌کنیم، سپس از بین باقی‌ماندهٔ مهره‌ها به‌تصادف یک مهره بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال این مهره سفید است؟

۱) $\frac{۵}{۱۴}$ ۲) $\frac{۳}{۷}$

۳) $\frac{۴}{۷}$ ۴) $\frac{۹}{۱۴}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۳

پاسخ Homework (2)

۱ گزینه ۳

پیشامد "بردن رقیب اصلی" را با A و پیشامد "کسب مدال طلا" را با B نمایش می‌دهیم.

$$P(A)=\frac{۱}{۵}\ ,\ P(B)=\frac{۱}{۳}$$

$$P(B|A)=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\frac{P(B\cap A)}{P(A)}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow P(B\cap A)=\frac{۱}{۱۰}$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{۱}{۵}+\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۱۰}=\frac{۶+۱۰-۳}{۳۰}=\frac{۱۳}{۳۰}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۲ گزینه ۱

$$P(A'|B')=\frac{P(A'\cap B')}{P(A')}=\frac{P(A\cup B)'}{۱-P(A)}$$

$$=\frac{۱-P(A\cup B)}{۱-P(A)}=\frac{۱-[\overbrace{P(A)}^{\frac{۱}{۶}}+\overbrace{P(B)}^{\frac{۱}{۴}}-\overbrace{P(A\cap B)}^{۰}]}{۱-\underbrace{P(A)}_{\frac{۱}{۶}}}=\frac{\frac{۱۴}{۲۴}}{\frac{۵}{۶}}=۰/۷$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۲

۳ گزینه ۴

$$P(\text{ابتلا})=۰/۰۸\ ,\ P(\text{بهبود}|\text{ابتلا})=۰/۵$$

$$\Rightarrow P(\text{ابتلا}\cap\text{بهبود})=P(\text{ابتلا})\times P(\text{بهبود}|\text{ابتلا})$$
$$=۰/۰۸\times۰/۵=۰/۰۴$$

$$\Rightarrow ۰/۰۴\times۱۰۰=۴\,\%$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

۴ گزینه ۲

برای محاسبهٔ $P(B|A')$ به $P(B \cap A')$ و $P(A')$ نیاز است.

$$P(A') = ۱ - P(A) = ۱ - ۰/۴ = ۰/۶$$

$$P(B \cap A') = P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) = ۰/۳ - P(A).P(B|A)$$
$$= ۰/۳ - ۰/۴ \times ۰/۲۵ = ۰/۳ - ۰/۱ = ۰/۲$$

پس:

$$P(B|A') = \frac{P(B \cap A')}{P(A')} = \frac{۰/۲}{۰/۶} = \frac{۱}{۳}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۹

۵ گزینه ۳

طبق اطلاعات مسئله پیشامد "عدد سوم ۱۰ باشد" را با A نمایش می‌دهیم.
معنی این جمله این است که عدد انتخابی اول و دوم ۱۰ نمی‌باشند و عدد سوم ۱۰ است.

$$P(A) = \frac{n-۱}{n} \times \frac{n-۲}{n-۱} \times \frac{۱}{n-۲} = \frac{۱}{n} = \frac{۱}{۱۵} \Rightarrow n = ۱۵$$

حال از بین اعداد ۱ تا ۱۵ احتمال آن را حساب می‌کنیم که عدد اول و دوم مضرب ۳ نباشد و فقط عدد سوم مضرب ۳ باشد. توجه داشته باشید که مضارب ۳ عبارتند از $\{۳, ۶, ۹, ۱۲, ۱۵\}$.

$$P(B) = \frac{۱۰}{۱۵} \times \frac{۹}{۱۴} \times \frac{۵}{۱۳} = \frac{۱۵}{۹۱}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۶ گزینه ۲

طبق روابط احتمال شرطی داریم:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \Rightarrow ۰/۷ = \frac{P(A \cap B)}{۰/۲} \Rightarrow P(A \cap B) = ۰/۱۴$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = ۰/۲ + ۰/۲۲ - ۰/۱۴ = ۰/۲۸$$

$$P(B'|A') = \frac{P(A' \cap B')}{P(A')} = \frac{P[(A \cup B)']}{P(A')} = \frac{۱ - ۰/۲۸}{۱ - ۰/۲} = \frac{۰/۷۲}{۰/۸} = ۰/۹$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۰
علوی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۷ ۱۴۰۱

۷ گزینه ۴

A: متولد شدن خرگوش نر در اولین بارداری

B: متولد شدن خرگوش نر در دومین بارداری

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{۰/۶}{۰/۷} = \frac{۶}{۷}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

۸ گزینه ۳

A: قبولی در امتحان اول

B: قبولی در امتحان دوم

$$P(B) = ۰/۹ \quad , \quad P(A \cap B) = ۰/۸۵$$
$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{۰/۸۵}{۰/۹} = \frac{۱۷}{۱۸}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

۹ گزینه ۱

اگر پیشامد شرکت‌کردن امیر در مسابقه را با A و شرکت‌کردن بهروز را با B نشان دهیم، داریم:

$$P(A) = ۰/۶ \ , \ P(B) = ۰/۳$$
$$P(A|B) = ۰/۵ \ , \ P(A|B') = ?$$
$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = ۰/۵ \Rightarrow P(A \cap B) = ۰/۳ \times ۰/۵ = ۰/۱۵$$
$$P(A|B') = \frac{P(A \cap B')}{P(B')} = \frac{P(A - B)}{۱ - P(B)} = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{۱ - P(B)}$$
$$= \frac{۰/۶ - ۰/۱۵}{۱ - ۰/۳} = \frac{۰/۴۵}{۰/۷} = \frac{۹}{۱۴}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۸

۱۰ گزینه ۴

S' = فضای نمونه‌ای جدید = پیشامد اینکه حداقل عدد یک تاس مضرب ۳ نباشد

$n(S')$ = کل حالت‌ها − تعداد حالت‌هایی که هر دو عدد تاس مضرب ۳ باشند

= ۳۶ − تعداد حالت‌هایی که هر دو عدد تاس مضرب ۳ باشند

هر دو عدد تاس مضرب ۳ باشند : $(۳,۳),(۶,۳),(۳,۶),(۶,۶)$

$n(S') = ۳۶ - ۴ = ۳۲$

جمع مضرب ۳ : $A = \{(۲,۱),(۱,۲),(۴,۲),(۲,۴),(۵,۱),(۱,۵),(۴,۵),(۵,۴)\}$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S')} = \frac{۸}{۳۲} = \frac{۱}{۴}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۳

۱۱ گزینه ۲

مهرهٔ اول در حل مسئله تأثیری ندارد.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\binom{۵}{۲}}{\binom{۱۱}{۲}} = \frac{\frac{۵\times۴}{۲}}{\frac{۱۱\times۱۰}{۲}} = \frac{۲}{۱۱}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۱۲ گزینه ۲

اگر مهره‌های سفید و سیاه را باتوجه‌به شماره‌های آن‌ها با $\omega_۱$ تا $\omega_۵$ و $b_۱$ تا $b_۵$ نمایش دهیم، فضای نمونهٔ آزمایش موردنظر برابر است با:

$$S = \{(\omega_۱,\omega_۵),(\omega_۲,\omega_۴),(b_۱,b_۵),(b_۲,b_۴),(\omega_۱,b_۵),(\omega_۲,b_۴),(\omega_۳,b_۳),(\omega_۴,b_۲),(\omega_۵,b_۱)\}$$

و پیشامد مطلوب عبارت است از:

$$A = \{(\omega_۱,\omega_۵),(\omega_۲,\omega_۴),(b_۱,b_۵),(b_۲,b_۴)\}$$

احتمال موردنظر : $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۴}{۹}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۲

۱۳ گزینه ۴

احتمال موردنظر را به‌صورت زیر می‌توان نوشت:

$$P(B|A') = \frac{P(B \cap A')}{P(A')} = \frac{P(B - A)}{1 - P(A)} = \frac{P(B) - P(A)}{1 - P(A)} \Rightarrow \frac{\frac{3}{4} - \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{\frac{5}{12}}{\frac{2}{3}} = \frac{5}{8}$$

تذکر: اگر $A \subseteq B$، آنگاه $A \cap B = A$ و $P(B - A) = P(B) - P(A)$ است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۰

۱۴ گزینه ۳

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۵

گام اول

الف) فضای نمونه‌ای مربوط به یک خانواده دو فرزندی چهار حالت دارد. اما با توجه به اینکه می‌دانیم یکی از فرزندان پسر است، حالتی که هر دو فرزند دختر باشند را حذف می‌کنیم.

ب) با توجه به فضای نمونه‌ای جدید، احتمال پیشامد خواسته شده را حساب می‌کنیم.

گام دوم

$$S = \{(\text{پ}, \text{پ}), (\text{پ}, \text{د}), (\text{د}, \text{پ})\} \ , \ n(S) = 3$$

از میان ۳ حالت نوشته شده فقط ۲ حالت مطلوب ماست و حالتی که هر دو فرزند پسر باشد قابل قبول نیست. بنابراین احتمال این‌که این خانواده دارای فرزند دختر باشد برابر $\frac{2}{3}$ است.

۱۵ گزینه ۱

احتمال قبولی در آزمون اول را $P(A)$ و احتمال قبولی در آزمون دوم را $P(B)$ فرض می‌کنیم.

$$P(A) = 0/7 \ , \ P(B) = 0/6 \ , \ P(B|A) = 0/8$$

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} \Rightarrow P(B \cap A) = 0/7 \times 0/8 = 0/56$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0/7 + 0/6 - 0/56$$
$$= 1/3 - 0/56 = 0/74$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۱۶ گزینه ۴

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۷

گام اول

الف) در چنین تست‌های احتمال شرطی بهتر است ابتدا فضای نمونه‌ای جدید را با توجه به شرط داده شده تعریف کنیم. می‌دانیم در یک خانوادهٔ سه فرزندی تعداد اعضای فضای نمونه‌ای $۲^۳ = ۸$ است. چون حداقل یکی از فرزندان حتماً دختر است پس حالتی که هر سه فرزند پسر باشند از فضای نمونه‌ای حذف می‌شود.

ب) پیشامد مطلوب را با توجه به فضای نمونه‌ای جدید تعیین می‌کنیم.

گام دوم

$$n(S) = ۸ - ۱ = ۷$$

اگر پیشامد داشتن حداقل دو فرزند دختر را با A نشان دهیم، داریم:

$$A = \{(د, د, پ), (د, پ, د), (پ, د, د), (د, د, د)\}$$

$$n(A) = ۴$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۴}{۷}$$

۱۷ گزینه ۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۷

گام اول

الف) با توجه به این‌که مشخص شده فرزند اول خانواده دختر است، اعضای فضای نمونه‌ای را در حالت جدید حساب کرده و احتمال مورد نظر را به دست می‌آوریم.

ب) چون گفته شده لااقل یکی از فرزندان پسر باشد، پس از دو فرزند باقی مانده یکی یا هر دو باید پسر باشد.

گام دوم

$$S = \{(د, پ, پ), (د, پ, د), (د, د, پ), (د, د, د)\}$$

$$n(S) = ۴$$

$$A = \{(د, پ, د), (د, د, پ), (د, پ, پ)\}$$

$$n(A) = ۳$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۳}{۴}$$

۱۸ گزینه ۲

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۹

گام اول

با این شرط که می‌دانیم یکی از فرزندان خانوادهٔ سه فرزندی پسر است، فضای نمونه‌ای جدید را تعریف کرده و پیشامد مطلوب را از میان آن مشخص می‌کنیم.

گام دوم

$$S = \{(پ, د, د), (د, پ, د), (د, د, پ), (پ, پ, د), (پ, د, پ), (د, پ, پ), (پ, پ, پ)\}$$

در واقع حالتی که تمام فرزندان دختر باشد، حذف شده است. پس در حالت جدید داریم:

$$n(S) = ۷$$

پیشامد A که داشتن دو دختر از میان سه فرزند را بیان می‌کند، ۳ عضو دارد.

$$A = \{(پ, د, د), (د, پ, د), (د, د, پ)\}$$

$$n(A) = ۳$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۳}{۷}$$

۱۹ گزینه ۲

چون هیچ اطلاعی از رنگ مهره‌های خارج‌شده نداریم، پس می‌توانیم فرض کنیم که هیچ مهره‌ای خارج نشده و احتمال سفید بودن این مهره را به دست آوریم:

$$P(\text{سفید بودن}) = \frac{۳}{۷}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۳

پیشامد مستقل

Homework (1)

به سؤالات داده شده پاسخ دهید.

۱ ۱- تعداد اعضای یک خانواده ۲- مقدار وزن هر کدام ۳- مدارک تحصیلی آنها به ترتیب چه نوع متغیرهایی هستند.

۲ دو پیشامد مستقل را در یک فضای نمونه‌ای تعریف کنید.

درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید.

۳ برای دو گزاره دلخواه p و q می‌توان گفت: $p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p$

۴ برای دو مجموعه A و B از مجموعه مرجع U اگر $A \subseteq B$ باشد، آنگاه: $B' \subseteq A'$

۵ در یک خانواده سه فرزندی اگر فرزند اول دختر باشد، به احتمال ۰/۲۵ این خانواده دو فرزند پسر دارد.

۶ اگر دو پیشامد A و B از فضای S مستقل از هم باشند: $P(A|B) = P(B)$

عبارات زیر را کامل کنید.

۷ اگر مجموعه دامنه گزاره‌نمای $(x^2 - 9)(4x - 5)(x^2 - 5) = 0$ اعداد صحیح باشد، مجموعه جواب آن دارای ..... عضو است.

۸ دو تاس و سه سکه را با هم می‌اندازیم. فضای نمونه این آزمایش ..... عضو دارد.

۹ احتمال قبولی علی در درس ریاضی ۹۰ درصد و احتمال قبولی رضا در این درس ۷۰ درصد است. با احتمال ..... درصد علی در درس ریاضی قبول و رضا مردود می‌شود.

۱۰ اگر واریانس داده‌های $x_1, x_2, \ldots, x_n$ برابر ۱۶ باشد، انحراف معیار داده‌های $-2x_1 + 7, -2x_2 + 7, \ldots, -2x_n + 7$ برابر است با: .....

۱۱ در یک جامعه آماری، نمونه‌ای که معرف خوبی برای جامعه نیست و به سمت خاصی انحراف پیدا می‌کند، نمونه ..... نام دارد.

۱۲ احتمال قبولی کیمیا و کیانا در کنکور ۰/۷ و ۰/۶ است. احتمال اینکه حداقل یکی از این دو نفر در کنکور قبول شوند چقدر است؟

۱۳ در پرتاب سه تاس، احتمال آن‌که اعداد رو شده ۶ نباشد چقدر است؟

۱) $\frac{۵}{۶}$ ۲) $\frac{۱۲۵}{۲۱۶}$

۳) $\frac{۲۱۵}{۲۱۶}$ ۴) $\frac{۱}{۶}$

۱۴ خانواده‌ای سه فرزند دارد، با چه احتمالی دو فرزند اول دختر است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$

۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۸}$

۱۵ دو تاس را باهم پرتاب می‌کنیم. اگر A پیشامد مشاهده عدد ۵ در تاس دوم و B پیشامد مجموع ۷ در برآمدهای دو تاس باشند، $P(A \cap B)$ برابر ..... و A و B ..... .

۱) $\frac{۱}{۳۶}$ - مستقل‌اند. ۲) $\frac{۱}{۱۲}$ - مستقل‌اند.

۳) $\frac{۱}{۳۶}$ - وابسته‌اند. ۴) $\frac{۱}{۱۲}$ - وابسته‌اند.

۱۶ فرزند دوم خانواده‌ای پسر است. با کدام احتمال فرزند اول و سوم این خانواده دختر هستند؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$

۳) $\frac{۱}{۸}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

۱۷ یک تاس را آنقدر پرتاب می‌کنیم تا برای اولین بار مضرب ۳ ظاهر شود. با کدام احتمال، حداکثر در پرتاب سوم این نتیجه حاصل می‌شود؟

۱) $\frac{۱۰}{۲۷}$ ۲) $\frac{۵}{۹}$

۳) $\frac{۱۶}{۲۷}$ ۴) $\frac{۱۹}{۲۷}$

۱۸ خانواده‌ای دارای ۳ فرزند است. چقدر احتمال دارد تمام فرزندان این خانواده در روز جمعه به دنیا آمده باشند؟

۱) $\frac{۱}{۷}$ ۲) $\frac{۱}{۴۲}$

۳) $\frac{۱}{۴۹}$ ۴) $\frac{۱}{۳۴۳}$

۱۹ احتمال اینکه دانشجویان یک دانشکده از کتابخانه استفاده کنند ۶۰ درصد است. از بین دو دانشجوی این دانشکده احتمال اینکه حداقل ۱ نفر از کتابخانه استفاده کند چقدر است؟

۱) ۰/۷۵ ۲) ۰/۷۸

۳) ۰/۸۴ ۴) ۰/۸۶

۲۰ در خانواده‌ای با ۵ فرزند، با چه احتمالی فقط ۲ فرزند دختر است؟

۱) $\frac{۳}{۱۶}$ ۲) $\frac{۵}{۱۶}$

۳) $\frac{۳}{۸}$ ۴) $\frac{۵}{۸}$

۲۱ احتمال گل شدن هر ضربه پنالتی توسط یک بازیکن ۰/۸ است. اگر او ۴ پنالتی بزند، احتمال اینکه فقط ضربه دوم گل شود، کدام است؟

۱) ۰/۴۸ ۲) ۰/۱۶

۳) $(۰/۲)^{۳}(۰/۸)$ ۴) $(۰/۸)^{۳}(۰/۲)$

۲۲ یک تاس را آن‌قدر پرتاب می‌کنیم تا برای اولین بار مضرب ۳ ظاهر شود. با کدام احتمال، حداکثر در پرتاب سوم این نتیجه حاصل می‌شود؟

۱) $\frac{۱۰}{۲۷}$ ۲) $\frac{۵}{۹}$

۳) $\frac{۱۶}{۲۷}$ ۴) $\frac{۱۹}{۲۷}$

۲۳ در پرتاب ۵ سکه چقدر احتمال دارد حداقل ۴ بار "پشت" ظاهر شود؟

۱) $\frac{۳}{۱۶}$ ۲) $\frac{۵}{۱۶}$

۳) $\frac{۷}{۱۶}$ ۴) $\frac{۹}{۱۶}$

۲۴ پرتاب‌های بسکتبالیست A، ۲۰ درصد بیشتر از پرتاب‌های بسکتبالیست B وارد سبد می‌شود. اگر هرکدام از این دو نفر یک پرتاب انجام دهند و احتمال آنکه حداقل یکی از این دو پرتاب وارد سبد شود برابر ۷۶ درصد باشد، با کدام احتمال پرتاب بسکتبالیست A وارد سبد شده است؟

۱) ۰/۶ ۲) ۰/۴

۳) ۰/۷ ۴) ۰/۲۴

پاسخ Homework (1)

۱ ۱- کمی گسسته ۲- کمی پیوسته ۳- کیفی ترتیبی

۲ دو پیشامد A و B را در فضای S مستقل گوییم اگر وقوع یکی در احتمال وقوع دیگری تأثیری نداشته باشد.
یا به زبان ریاضی $P(A|B) = P(A)$ و $P(B|A) = P(B)$
و در نتیجه $P(A \cap B) = P(A).P(B)$

پاسخ سؤالات ۳ تا ۶

۳ درست

۴ درست

۵ درست

۶ نادرست

پاسخ سؤالات ۷ تا ۱۱

۷ دو

۸ ۲۸۸

۹ ۲۷

۱۰ ۸

۱۱ اریب

۱۲

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A) \times P(B)$$
$$= ۰/۷ + ۰/۶ - ۰/۴۲ = ۰/۸۸$$

۱۳ گزینه ۲

چون پرتاب سه تاس از هم مستقل هستند.

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \times P(B) \times P(C) \Rightarrow \frac{۵}{۶} \times \frac{۵}{۶} \times \frac{۵}{۶} = \frac{۱۲۵}{۲۱۶}$$

۱۴ گزینه ۲

$$P = (\text{اولی دختر}) \times (\text{دومی دختر}) = \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۴}$$

۱۵ گزینه ۱

$$A = \{(۱, ۵), (۲, ۵), (۳, ۵), (۴, ۵), (۵, ۵), (۶, ۵)\} \Rightarrow P(A) = \frac{۶}{۳۶} = \frac{۱}{۶}$$
$$B = \{(۱, ۶), (۶, ۱), (۲, ۵), (۵, ۲), (۳, ۴), (۴, ۳)\} \Rightarrow P(B) = \frac{۶}{۳۶} = \frac{۱}{۶}$$
$$A \cap B = \{(۲, ۵)\} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{۱}{۳۶}$$
$$\Rightarrow P(A) \times P(B) = P(A \cap B)$$

درنتیجه A و B مستقل‌اند.

۱۶ گزینه ۱

$$P = \underbrace{\frac{۱}{۲}}_{\text{فرزند اول دختر باشد}} \times \underbrace{\frac{۱}{۲}}_{\text{فرزند سوم پسر باشد}} = \frac{۱}{۴}$$

۱۷ گزینه ۴

احتمال این‌که مضرب ۳ ظاهر شود، برابر $\frac{۲}{۶} = \frac{۱}{۳}$ و ظاهر نشدن مضرب ۳ برابر $\frac{۲}{۳}$ است. احتمال مطلوب را به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم:

در پرتاب سوم مضرب ۳ + در پرتاب دوم مضرب ۳ + در پرتاب اول مضرب ۳
$$= \frac{۱}{۳} + \frac{۲}{۳} \times \frac{۱}{۳} + \frac{۲}{۳} \times \frac{۲}{۳} \times \frac{۱}{۳} = \frac{۱۹}{۲۷}$$

۱۸ گزینه ۴

احتمال به دنیا آمدن در روز جمعه: $\frac{۱}{۷}$

$$\frac{۱}{۷} \times \frac{۱}{۷} \times \frac{۱}{۷} = \frac{۱}{۳۴۳}$$

۱۹ گزینه ۳

اگر A و B به‌ترتیب پیشامد آن باشد که اولین و دومین دانشجو از کتابخانه استفاده کند، در این صورت احتمال اینکه حداقل یکی از آن‌ها از کتابخانه استفاده کند برابر $P(A \cup B)$ است. طبق فرض $P(A) = P(B) = ۰/۶$. دقت کنید که A و B مستقل هستند:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = ۰/۶ + ۰/۶ - ۰/۳۶ = ۰/۸۴$$

۲۰ گزینه ۲

۵ فرزند یا پسر هستند یا دختر؛ پس جایگاه هر فرزند $\frac{۱}{۲}$ احتمال دارد که دختر شود:

$$\frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲} = (\frac{۱}{۲})^{۵}$$

اما تولد دو فرزند دختر در ۵ فرزند خانواده به $\binom{۵}{۲} = ۱۰$ حالت امکان‌پذیر است، پس داریم:

$$P(A) = ۱۰ \times \frac{۱}{۳۲} = \frac{۵}{۱۶}$$

۲۱ گزینه ۳

پنالتی‌ها مستقل از هم‌اند، پس داریم:

$$P(\text{مطلوب}) = (۰/۲) \times (۰/۸) \times (۰/۲) \times (۰/۲) = (۰/۲)^{۳}(۰/۸)$$

۲۲ گزینه ۴

اگر بخواهیم تاس حداکثر در پرتاب سوم مضرب ۳ بیاید:

$$A = \{۳, ۶\} \Rightarrow P(A) = \frac{۱}{۳}$$
$$S = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶\}$$

یا تاس در بار اول مضرب ۳ می‌آید: $\frac{۱}{۳}$

یا تاس در بار اول مضرب ۳ نمی‌آید و بار دوم مضرب ۳ می‌آید: $\frac{۲}{۳} \times \frac{۱}{۳}$

یا ۲ بار اول مضرب ۳ نمی‌آید، بار سوم ۳ می‌آید: $\frac{۲}{۳} \times \frac{۲}{۳} \times \frac{۱}{۳}$

$$P = \frac{۱}{۳} + \frac{۲}{۹} + \frac{۴}{۲۷} = \frac{۱۹}{۲۷}$$

۲۳ گزینه ۱

$$P(\text{حداقل ۴ بار پشت بیاید}) = P(\text{۴ بار پشت}) + P(\text{۵ بار پشت})$$
$$= \binom{۵}{۴} \times \frac{۱}{۲۵} + \binom{۵}{۵} \times \frac{۱}{۲۵} = ۵ \times \frac{۱}{۳۲} + ۱ \times \frac{۱}{۳۲} = \frac{۶}{۳۲} = \frac{۳}{۱۶}$$

۲۴ گزینه ۱

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

A و B مستقل‌اند:

$$\Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = (P(B) + ۰/۲) \times P(B)$$

حال داریم:

$$P(B) = a \Rightarrow (a + ۰/۲) + a - a \times (a + ۰/۲) = ۰/۷۶$$
$$\Rightarrow a + ۰/۲ + a - a^۲ - ۰/۲a = ۰/۷۶ \Rightarrow a^۲ - ۱/۸a + ۰/۵۶ = ۰$$
$$\Rightarrow (a - ۰/۴)(a - ۱/۴) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} a = ۰/۴ & \text{ق ق} \\ a = ۱/۴ & \text{غ ق ق} \end{cases}$$
$$\Rightarrow P(B) = ۰/۴ \,,\, P(A) = ۰/۶$$

Homework (2)

۱ احتمال قبولی فرد A در یک آزمون ۰/۸۴ و احتمال قبولی فرد B در همان آزمون ۰/۷۵ است. با کدام احتمال لااقل یکی از آنان، در این آزمون قبول می‌شوند؟

۱) ۰/۹۲
۲) ۰/۹۴
۳) ۰/۹۶
۴) ۰/۹۸

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۶

۲ احتمال موفقیت عمل جراحی برای شخص A برابر ۰/۹ و برای شخص B برابر ۰/۸ می‌باشد. با کدام احتمال، لااقل عمل جراحی برای یکی از این دو نفر، موفقیت‌آمیز است؟

۱) ۰/۹۲
۲) ۰/۹۴
۳) ۰/۹۶
۴) ۰/۹۸

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

۳ سه نفر مشغول رمزگشایی یک پیام هستند. احتمال موفقیت آن‌ها به ترتیب $\frac{۲}{۳}$، $\frac{۳}{۴}$ و $\frac{۱}{۲}$ است. با کدام احتمال لااقل یکی از آنان، موفق می‌شود؟

۱) $\frac{۱۹}{۲۴}$
۲) $\frac{۵}{۶}$
۳) $\frac{۱۱}{۱۲}$
۴) $\frac{۲۳}{۲۴}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۷

۴ دو سکه و یک تاس را باهم پرتاب می‌کنیم. با کدام احتمال هر دو سکه "رو" یا تاس ۶ ظاهر می‌شود؟

۱) $\frac{۳}{۸}$
۲) $\frac{۵}{۸}$
۳) $\frac{۵}{۱۲}$
۴) $\frac{۷}{۱۲}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۶

۵ دانش‌آموزی به ۶ پرسش ۴ گزینه‌ای به‌تصادف پاسخ می‌دهد. با کدام احتمال ۳ پرسش را پاسخ درست داده است؟

۱) $\frac{۱۳۵}{۱۰۲۴}$ ۲) $\frac{۱۳۵}{۵۱۲}$

۳) $\frac{۴۵}{۵۱۲}$ ۴) $\frac{۲۷}{۵۱۲}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۶

۶ در دو پیشامد مستقل A و B، اگر $P(A \cap B) = ۰/۱$، $P(A \cup B) = ۰/۶$ و با فرض $P(B') > P(B)$، احتمال وقوع پیشامد B کدام است؟

۱) ۰/۴ ۲) ۰/۳

۳) ۰/۲ ۴) ۰/۲۵

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

۷ در گروه زنان ساکن یک روستا، ۶۰ درصد آنان تحصیلات ابتدایی و ۲۵ درصد آنان مهارت قالی‌بافی دارند. اگر یک فرد از این گروه انتخاب شود، با کدام احتمال این فرد تحصیلات ابتدایی دارد یا مهارت قالی‌بافی دارد؟

۱) ۰/۷ ۲) ۰/۷۵

۳) ۰/۸ ۴) ۰/۸۵

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

۸ دو تاس سالم را باهم پرتاب می‌کنیم تا برای اولین بار هر دو عدد رو شده زوج باشند. با کدام احتمال، حداکثر در سه پرتاب این نتیجه حاصل می‌شود؟

۱) $\frac{۲۷}{۶۴}$ ۲) $\frac{۳۷}{۶۴}$

۳) $\frac{۱۹}{۳۲}$ ۴) $\frac{۳۹}{۶۴}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۱

۹ در دو پیشامد مستقل A و B، اگر $P(A \cap B) = ۰/۶$ و $P(A \cap B') = ۰/۲$، آنگاه $P(A \cup B')$ کدام است؟

۱) ۰/۷ ۲) ۰/۷۵

۳) ۰/۸۵ ۴) ۰/۹

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۸

۱۰ سه سکه و یک تاس را باهم پرتاب می‌کنیم. احتمال اینکه لااقل یکی از پیشامدهای سکه فقط یک "رو" یا عدد تاس زوج باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۹}{۱۶}$ ۲) $\frac{۷}{۱۲}$

۳) $\frac{۵}{۸}$ ۴) $\frac{۱۱}{۱۶}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۷

۱۱ یک سکه و دو تاس را باهم پرتاب می‌کنیم. با کدام احتمال جمع عدد دو تاس بیشتر از ۴ یا سکه "رو" ظاهر شده است؟

۱) $\frac{۷}{۱۲}$ ۲) $\frac{۵}{۸}$

۳) $\frac{۷}{۸}$ ۴) $\frac{۱۱}{۱۲}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۶

۱۲ احتمال موفقیت فردی، در یک آزمون مستقل، ۲ برابر احتمال موفقیت دوست وی است. احتمال موفقیت لااقل یکی از آن دو، $\frac{۷}{۹}$ است. احتمال موفقیت این فرد کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۶}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$

۳) $\frac{۴}{۹}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

۱۳ در آزمایشگاهی ۵ موشِ سفید و ۳ موشِ سیاه نگه‌داری می‌شوند. به تصادف متوالیاً سه موش از بین آن‌ها انتخاب می‌شود. با کدام احتمال اولین موش سفید و سومین موش سیاه است؟

۱) $\frac{۱۱}{۵۶}$ ۲) $\frac{۱۷}{۵۶}$

۳) $\frac{۱۳}{۵۶}$ ۴) $\frac{۱۵}{۵۶}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۸

پاسخ Homework (2)

۱ گزینه ۳

راه‌حل اول:

چون دو پیشامد A و B مستقل هستند، بنابراین داریم:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A).P(B) = \frac{۸۴}{۱۰۰} + \frac{۷۵}{۱۰۰} - (\frac{۸۴}{۱۰۰} \times \frac{۷۵}{۱۰۰}) = ۰/۹۶$$

راه‌حل دوم:

هرگاه در مسائل احتمال لااقل یکی داشتیم از متمم استفاده می‌کنیم (C' : احتمال اینکه هیچ‌کدام قبول نشوند):

$$P(C') = \frac{۱۶}{۱۰۰} \times \frac{۲۵}{۱۰۰} = \frac{۴}{۱۰۰} \Rightarrow P(C) = ۱ - \frac{۴}{۱۰۰} = \frac{۹۶}{۱۰۰}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۶

۲ گزینه ۴

راه‌حل اول:

دو پیشامد مستقل از یکدیگرند:

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= P(A) + P(B) - P(A)P(B) \\ &= ۰/۹ + ۰/۸ - ۰/۹ \times ۰/۸ = ۰/۹۸ \end{aligned}$$

راه‌حل دوم:

متمم پیشامد آنکه "حداقل یک نفر عمل موفقیت‌آمیز داشته باشد" آن است که "هیچ‌کدام عمل موفقیت‌آمیز نداشته باشند"، ازآنجاکه عمل جراحی A و B مستقل از هم است، احتمال پیشامد اخیر برابر است با:

$$(۱ - ۰/۹) \times (۱ - ۰/۸) = ۰/۰۲$$

پس احتمال موردنظر سؤال، برابر می‌شود با $۱ - ۰/۰۲ = ۰/۹۸$.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

۳ گزینه ۴

$$P(\text{حداقل یکی موفق شود}) = ۱ - P(\text{هیچ‌کدام موفق نشوند})$$
$$\xrightarrow{\text{مستقل‌اند}} ۱ - (\frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۴} \times \frac{۱}{۳}) = ۱ - \frac{۱}{۲۴} = \frac{۲۳}{۲۴}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۷

۴ گزینه ۱

A: پیشامد آن است که هر دو سکه رو بیاید.

B: پیشامد آن است که تاس ۶ بیاید.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۶} - \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۶}$$
$$= \frac{۶ + ۴ - ۱}{۲۴} = \frac{۹}{۲۴} = \frac{۳}{۸}$$

نکته: دقت کنید که A و B دو پیشامد مستقل از یکدیگر هستند.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۶

۵ گزینه ۱

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۶

گام اول

ابتدا باید از شش سوال سه سوال را انتخاب کنیم، یعنی: $\binom{۶}{۳}$

احتمال درست جواب دادن به هر تست $\frac{۱}{۴}$ و احتمال غلط جواب دادن تست برابر $\frac{۳}{۴}$ است. پاسخ هر تست مستقل از تست دیگر است.

گام دوم

$$P(A) = \binom{۶}{۳} (\frac{۱}{۴})^{۳} (\frac{۳}{۴})^{۳} = ۲۰ \times \frac{۱}{۶۴} \times \frac{۲۷}{۶۴} = \frac{۱۳۵}{۱۰۲۴}$$

۶ گزینه ۳

رابطهٔ احتمال اجتماع را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$\Rightarrow ۰/۶ = P(A) + P(B) - ۰/۱ \Rightarrow P(A) + P(B) = ۰/۷$$

همچنین چون A و B مستقل‌اند، پس:

$$P(A \cap B) = P(A).P(B) \Rightarrow P(A).P(B) = ۰/۱ \Rightarrow P(A) = \frac{۰/۱}{P(B)}$$

بنابراین:

$$P(A) + P(B) = ۰/۷ \Rightarrow \frac{۰/۱}{P(B)} + P(B) = ۰/۷ \Rightarrow P^{۲}(B) - ۰/۷P(B) + ۰/۱ = ۰$$
$$P(B) = \frac{۰/۷ \pm \sqrt{۰/۴۹ - ۰/۴}}{۲} = \frac{۰/۷ \pm ۰/۳}{۲} \Rightarrow P(B) = ۰/۵ \ , \ ۰/۲$$

باتوجه‌به اینکه $P(B') > P(B)$ است، پس $P(B) = ۰/۲$.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

۷ گزینه ۱

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

گام اول

الف) پیشامد داشتن تحصیلات ابتدایی را با A و پیشامد داشتن مهارت قالی‌بافی را با B نشان می‌دهیم. هدف محاسبه $P(A \cup B)$ است.

ب) می‌دانیم

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

ج) دو پیشامد A و B مستقل‌اند پس $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

با محاسبه $P(A \cap B)$ می‌توان $P(A \cup B)$ را حساب کرد.

گام دوم

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = ۰/۶ \times ۰/۲۵ = ۰/۱۵$$
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = ۰/۶ + ۰/۲۵ - ۰/۱۵ = ۰/۷$$

۸ گزینه ۲

ابتدا توجه کنید که در هر بار پرتاب هر تاس، احتمال زوج آمدن عدد رو شده برابر $\frac{۱}{۲} = \frac{۳}{۶}$ است.

سه حالت مطلوب امکان‌پذیر است که با توجه به مستقل بودن پرتاب تاس‌ها از هم، می‌توان نوشت:

۱) در پرتاب اول، هر دو تاس زوج بیایند: $P_۱ = \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۴}$

۲) در پرتاب دوم، برای اولین بار هر دو تاس زوج بیایند:

$$P_۲ = \underbrace{(۱ - \overbrace{\frac{۱}{۴}}^{\text{هر دو زوج}})}_{\text{پرتاب اول}} \underbrace{(\frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲})}_{\text{پرتاب دوم}} = \frac{۳}{۴} \times \frac{۱}{۴} = \frac{۳}{۱۶}$$

۳) در پرتاب سوم، برای اولین بار هر دو تاس زوج بیایند:

$$P_۳ = \underbrace{(۱ - \overbrace{\frac{۱}{۴}}^{\text{هر دو زوج}})}_{\text{پرتاب اول}} \underbrace{(۱ - \overbrace{\frac{۱}{۴}}^{\text{هر دو زوج}})}_{\text{پرتاب دوم}} \underbrace{(\frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲})}_{\text{پرتاب سوم}} = \frac{۳}{۴} \times \frac{۳}{۴} \times \frac{۱}{۴} = \frac{۹}{۶۴}$$

چون سه حالت بالا ناسازگارند، پس:

$$\Rightarrow \text{احتمال مورد نظر} : P = P_۱ + P_۲ + P_۳$$

$$= \frac{۱}{۴} + \frac{۳}{۱۶} + \frac{۹}{۶۴} = \frac{۱۶}{۶۴} + \frac{۱۲}{۶۴} + \frac{۹}{۶۴} = \frac{۱۶ + ۱۲ + ۹}{۶۴} = \frac{۳۷}{۶۴}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۱

۹ گزینه ۳

وقتی A و B باشند، A و B' نیز مستقل‌اند. پس:

$$P(A\cap B)=P(A)P(B)=۰/۶$$
$$P(A\cap B')=P(A)P(B')=۰/۲$$
$$\Rightarrow \frac{P(A\cap B)}{P(A\cap B')}=\frac{P(B)}{P(B')}=\frac{۰/۶}{۰/۲}=۳$$
$$\Rightarrow P(B)=۳P(B') \quad , \quad P(B)+P(B')=۱$$
$$\Rightarrow P(B')=\frac{۱}{۴} \quad , \quad P(B)=\frac{۳}{۴}$$

حال چون $P(A)P(B)=۰/۶$، پس $P(A)=\frac{۴}{۵}$ و داریم:

$$P(A\cup B')=P(A)+P(B')-P(A\cap B')$$
$$=\frac{۴}{۵}+\frac{۱}{۴}-\frac{۲}{۱۰}=\frac{۱۷}{۲۰}=۰/۸۵$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۸

۱۰ گزینه ۴

گام اول: احتمال هر پیشامد را حساب می‌کنیم:

$$P(A)=\text{فقط یک سکه رو}=\binom{۳}{۱}\times(\frac{۱}{۲})^{۳}=\frac{۳}{۸}$$
$$P(B)=\text{تاس زوج}=\frac{۱}{۲}$$
$$P(\text{مطلوب})=P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{۱}{۲}+\frac{۳}{۸}-\frac{۱}{۲}\times\frac{۳}{۸}=\frac{۱۱}{۱۶}$$

توجه داشته باشید که دو پیشامد از هم مستقل‌اند، بنابراین:

$$P(A\cap B)=P(A).P(B)$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۷

۱۱ گزینه ۴

اگر پیشامد آنکه جمع عدد دو تاس بیشتر از ۴ باشد را با A و پیشامد آنکه سکه رو ظاهر شود را با B نمایش دهیم، آنگاه متمم پیشامد A آن است که جمع دو تاس کمتر یا مساوی ۴ باشد. در این صورت داریم:

$$A' = \{(۱,۱), (۱,۲), (۱,۳), (۲,۱), (۲,۲), (۳,۱)\}$$
$$P(A') = \frac{n(A')}{n(S)} = \frac{۶}{۳۶} = \frac{۱}{۶} \Rightarrow P(A) = \frac{۵}{۶}$$

همچنین احتمال وقوع پیشامد B برابر $P(B) = \frac{۱}{۲}$ است. دو پیشامد A و B، مستقل از یکدیگرند، پس $P(A \cap B) = \frac{۵}{۶} \times \frac{۱}{۲} = \frac{۵}{۱۲}$ است. داریم:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{۵}{۶} + \frac{۱}{۲} - \frac{۵}{۱۲} = \frac{۱۱}{۱۲}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۶

۱۲ گزینه ۴

$$P(A) = ۲P(B) = ۲x$$
$$P(A \cup B) = \frac{۷}{۹} \Rightarrow P(A) + P(B) - \underbrace{P(A \cap B)}_{P(A)P(B)} = \frac{۷}{۹}$$

$$\Rightarrow ۲x + x - ۲x(x) = \frac{۷}{۹} \Rightarrow ۳x - ۲x^۲ = \frac{۷}{۹}$$
$$\xrightarrow{\times ۹} ۲۷x - ۱۸x^۲ = ۷ \Rightarrow ۱۸x^۲ - ۲۷x + ۷ = ۰$$

$$\Rightarrow (۳x - ۱)(۶x - ۷) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{۱}{۳} & \checkmark \\ x = \frac{۷}{۶} & \times \end{cases}$$

بنابراین $P(A) = ۲x = \frac{۲}{۳}$ است.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

۱۳ گزینه ۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۸

گام اول

الف) به طور کلی $۸ = ۳ + ۵$ موش در آزمایشگاه وجود دارد. قرار است اولین موش سفید و سومین موش سیاه باشد پس موش دوم می‌تواند سفید یا سیاه باشد. یعنی دو حالت داریم.

ب) این دو حالت هیچ اشتراکی با هم ندارند پس احتمال کل برابر مجموع احتمال‌های دو حالت تعریف می‌شود.

گام دوم

حالت اول: موش اول سفید، موش دوم سفید، موش سوم سیاه

$$P_۱ = \frac{۵}{۸} \times \frac{۴}{۷} \times \frac{۳}{۶} = \frac{۶۰}{۳۳۶} = \frac{۵}{۲۸}$$

حالت دوم: موش اول سفید، موش دوم سیاه، موش سوم سیاه

$$P_۲ = \frac{۵}{۸} \times \frac{۳}{۷} \times \frac{۲}{۶} = \frac{۳۰}{۳۳۶} = \frac{۵}{۵۶}$$

پس احتمال خواسته شده برابر است با:

$$P = P_۱ + P_۲ = \frac{۵}{۲۸} + \frac{۵}{۵۶} = \frac{۱۰ + ۵}{۵۶} = \frac{۱۵}{۵۶}$$

آمار

شاخص آماری

- شاخص مرکزی: داده‌ها حول چه عددی متمرکز و متجمع هستند
  - میانگین: $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$
  - میانه: داده وسطی با Q_2 یا چارک دوم
  - مُد (نما): اونی که از بقیه بیشتر تکرار شده و داده‌ای با بیشترین فراوانی
- شاخص پراکندگی: برای بررسی میزان تجمع و تمرکز بقیه داده‌ها حول $\bar{x}$ میانگین
  - دامنه تغییرات: $R = max - min$
  - انحراف از میانگین: $x_i - \bar{x}$ و می‌دانیم مجموع انحراف از میانگین‌ها صفر است. $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}) = 0$
  - واریانس یا پراش: میانگین مربعات انحرافات از میانگین است.
  - ضریب تغییرات: $C.V = \frac{\sigma}{\bar{x}}$

$$\sigma^2 = S^2 = V^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n} = \text{واریانس} \geq \text{برابر}^{\text{داده‌ها}} \Rightarrow \sigma = S = V \text{ انحراف معیار}$$

تمرین: نمرات یک نفر ۲۰ و ۱۶ شده، میانگین نمرات و تعبیر آن؟

تمرین: در یک کلاس، ۳ نفر ۲۰ شده‌اند. میانگین یا معدل نمرات کلاس ۱۹ است پس

میانه: $\tilde{x}$: چارک دوم یا Q_2 :

اگر داده‌ها را به ترتیب از کوچک به بزرگ مرتب کرده و تکراری‌ها را هم بنویسیم داده وسط (در تعداد فرد: وسطی و در تعداد زوج میانگین دوتای وسطی) میانه است که نیمی از داده‌ها بالای آن و نیم دیگر زیر آن هستند. ۵۰٪ بالاتر ۵۰٪ پایین‌تر یعنی $\frac{۲}{۴}$ داده‌ها بالاتر، $\frac{۲}{۴}$ کم‌تر از چارک دوم‌اند.

تمرین: میانه داده‌های زیر را بیابید.

۱۱, ۱۹, ۱۳, ۱, ۵, ۰, ۱۹, ۱۷, ۱۹, ۲, ۳/۵, ۴

تمرین: برای دو دسته (الف) و (ب) از داده‌های زیر واریانس و انحراف معیار را حساب و با هم مقایسه کنید.

(الف) ۱ , ۲ , ۳ , ۴ , ۵

(ب) ۲/۵ , ۲/۷۵ , ۳ , ۳/۲۵ , ۳/۵

هرچه واریانس (یا انحراف معیار)کم‌تر باشد یعنی داده‌ها به $\bar{x}$ نزدیک‌تر و فشرده‌ترند.

هرچه واریانس کم‌تر یعنی داده‌ها یکدست‌تر هستند. واریانس صفر حاکی از داده‌های کاملاً یکسان و برابر است.

برای بررسی بهتربودن گروه‌ها اگر $\bar{x}$ها برابر باشند (مثل مثال بالا) هر دسته که S^2 یا S کم‌تر بهتر اگر $\bar{x}$ فرق داشتند هر دسته ضریب تغییراتش کم‌تر بهتر. $\frac{\sigma}{\bar{x}} = C.V$

نکات:

۱) وقتی داده‌ها به دنباله حسابی (عددی) با قدرنسبت ثابت d هستند اگر تعدادشان فرد باشد، داده وسطی $\bar{x}$ است.

۲) در داده‌هایی که به دنباله حسابی‌اند با تعداد n و قدرنسبت d.

$$\bar{x} = \frac{S_n}{n} = \frac{\frac{n}{2}(a_1 + a_n)}{n} = \frac{\frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)}{n}$$

S_n : جمع جملات دنباله حسابی

n : تعداد

a_1 : جمله اول

a_n : جمله آخر

$$\bar{x} = \frac{a_1 + a_n}{2} = \text{نصف جمع اولی و آخری} \qquad \bar{x} = \frac{1}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$

۳) وقتی داده‌ها دنباله حسابی با قدرنسبت d باشند واریانس از دستور $V^2 = \sigma^2 = S^2 = \frac{d^2}{12}(n^2 - 1)$ به دست می‌آید.

۴) واریانس ۵ داده متوالی (پشت هم با $d = 1$) برابر ۲ و واریانس ۷ داده متوالی برابر ۴ است.

۵) در داده‌های برابر میانگین، میانه و مد برابر یکی از داده‌هاست ولی واریانس، انحراف معیار، ضریب تغییرات و دامنه تغییرات صفر است، چون همگی برابرند.

۶) واحد واریانس مربع واحد داده‌هاست ولی واحد انحراف معیار همان واحد داده‌هاست.

داده‌های دستکاری‌شده:

$$x_i \to ax_i + b$$

$$\bar{x}_{\text{جدید}} = a\bar{x}_{\text{قدیم}} + b$$

هر بلایی سر x_iها (داده‌ها) بیاوریم سر میانگین و میانه و مد هم می‌آید یعنی:

اما:

$$\begin{cases} R_{\text{جدید}} = aR_{\text{قدیم}} \\ S^2_{\text{جدید}} = a^2 S^2_{\text{قدیم}} \\ S_{\text{جدید}} = |a| S_{\text{قدیم}} \end{cases}$$

مثلاً اگر داده‌هایی را در ۲- ضرب و با عدد ۳ جمع کنیم:

$$\bar{x}_{\text{جدید}} = -2\bar{x}_{\text{قدیم}} + 3$$

$$S^2_{\text{جدید}} = (-2)^2 S^2_{\text{قدیم}} = 4S^2_{\text{قدیم}}$$

$$S_{\text{جدید}} = |-2| S_{\text{قدیم}} = 2S_{\text{قدیم}}$$

تمرین: در یک کلاس با واریانس ۱۰۰ داده‌ها را دو برابر کرده و از همه ۳ واحد کسر می‌کنیم. واریانس جدید؟

$$S^2_{\text{ج}} = S^2_{\text{ج}} = 4(100) = 400$$

تمرین: در یک کلاس با واریانس نمرات ۱۰۰ به هر نفر ۰/۱ نمره خودش را اضافه می‌کنیم. واریانس جدید؟

$$x_i + 0.1x_i = 1.1x_i$$

$$S^2_{\text{جدید}} = (1.1)^2 S^2_{\text{قدیم}} = (1.21)100 = 121$$

Homework

۱ گروه خونی افراد، کدام نوع متغیر است؟

۱) کیفی - اسمی
۲) کیفی - ترتیبی
۳) کمی - پیوسته
۴) کمی - گسسته

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰
کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۷

۲ نوع آلایندگی هوا چگونه متغیری است؟

۱) کمّی گسسته
۲) کمّی پیوسته
۳) کیفی اسمی
۴) کیفی ترتیبی

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۱

۳ برای داده‌های زیر، چارک اول و سوم به ترتیب برابر ۹ و ۳۹ است. اگر میانگین داده‌های بین چارک اول و چارک سوم برابر ۲۶ باشد، میانگین داده‌های بزرگ‌تر از چارک سوم کدام است؟

$۱۸, ۲۳, ۳۹, ۱, ۳, ۴۲, a, a, 2a+1, ۲۷, ۹$

۱) ۲۰
۲) ۲۱/۸
۳) ۴۵
۴) ۵۴/۵

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

۴ میانگین دسته اول با ۴ داده برابر میانگین دسته دوم با ۵ داده است. یک داده از دسته اول را با یک داده از دسته دوم جابه‌جا می‌کنیم به‌طوری‌که میانگین دسته‌های جدید مجدداً برابر خواهند شد. اگر واریانس دسته اول قبل از جابه‌جایی داده‌ها برابر ۱/۲۵ باشد، واریانس دسته اول بعد از جابه‌جایی داده‌ها کدام است؟

۱) ۱/۲۵
۲) ۲/۵
۳) ۳/۷۵
۴) ۴/۵

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۳

۵ اگر یکی از داده‌های ۲، ۴، ۶ و ۸ را با یک عدد فرد که فقط کوچک‌تر از همان عدد است، جایگزین کنیم، به‌طوری‌که واریانس داده‌های جدید کمتر از واریانس داده‌های اولیه باشد؛ میانگین داده‌های جدید کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۴/۲۵
۳) ۴/۵ ۴) ۴/۷۵

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۴۰۳

۶ اعداد ۹ تا ۱۹ در اختیار است. دو عدد دلخواه از بین این اعداد را حذف نموده و با مقدار اختلاف آن دو عدد جایگزین می‌شود. این روند تا جایی ادامه می‌یابد که همهٔ اعداد زوج، غیرتکراری و با بیشترین میانگین ممکن باشند. انحراف معیار داده‌های جدید کدام است؟

۱) $\sqrt{10}$ ۲) $\sqrt{11}$
۳) $\sqrt{21}$ ۴) $\sqrt{28}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۲

۷ در یک دسته ۷ تایی از اعداد زوج متوالی (دسته اول)، انحراف معیار نصف میانگین است. هر بار، کوچک‌ترین عدد دسته را حذف نموده و عدد زوج دیگر را اضافه می‌کنیم به طوری‌که اعداد دسته جدید نیز متوالی هستند. ساختن دسته‌های مختلف را تا جایی ادامه می‌دهیم که میانگین آن دسته (دسته آخر)، مجذور انحراف معیار باشد. اختلاف بزرگ‌ترین عضو دسته اول و آخر، کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۸
۳) ۶ ۴) ۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۸ در یک دسته ۷تایی از اعداد طبیعی متوالی (دسته اول)، انحراف معیار نصف میانگین است. هر بار، کوچک‌ترین عدد دسته را حذف نموده و عدد طبیعی دیگری را اضافه می‌کنیم به‌طوری‌که اعداد دسته جدید نیز متوالی هستند. ساختن دسته‌های مختلف را تا جایی ادامه می‌دهیم که میانگین دسته آخر، مکعب انحراف معیار باشد. اختلاف کوچک‌ترین عضو دسته اول و دسته آخر، کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴
۳) ۶ ۴) ۷

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

۹ اعداد ۱ تا ۱۰۰ در یک دسته (دسته اول) قرار دارند. دو عدد از بین اعداد دسته اول را حذف نموده و مقدار اختلاف آن دو عدد را در دسته جدید قرار می‌دهیم. این روند تا جایی ادامه می‌یابد که همه اعداد دسته اول حذف شده و همه اعداد در دسته جدید فرد و غیرتکراری باشند. میانگین داده‌های دسته جدید کدام است؟

۱) ۲۵ ۲) ۲۵/۵
۳) ۵۰ ۴) ۵۰/۵

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۲

$$\bar{x} = \frac{8+9+11+2a}{4} = \frac{28+2a}{4} = 7+\frac{3}{2}a$$

۱۰ اگر ۱ , ۲a , ۱ , ۴ به ترتیب مربع انحراف از میانگین داده‌های ۱۱ , ۶a , ۹ , ۸ باشد، مقدار انحراف معیار داده‌ها کدام است؟

۱) $\frac{5}{\sqrt{10}}$ ✓ ۲) $\frac{3}{\sqrt{5}}$ ۳) ۱/۸ ۴) ۲/۵

$$\left(8-(7+\frac{3}{2}a)\right)^2 = 4 \quad 1-\frac{3}{2}a = 2 \rightsquigarrow -1 = \frac{3}{2}a \quad a=-\frac{2}{3}$$ غ ق ق

$$1-\frac{3}{2}a = -2 \rightsquigarrow 3 = \frac{3}{2}a \quad a=2$$

$$S^2 = \frac{4+1+4+1}{4} = \frac{10}{4} \quad S = \frac{\sqrt{10}}{2} \times \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}} = \frac{10}{2\sqrt{10}} = \frac{5}{\sqrt{10}}$$

کنکور سراسری علوم انسانی خارج از کشور ۱۴۰۲

۱۱ اگر ۲۵ , ۲a − ۱۷ , ۱۶ , ۴ به ترتیب مربع انحراف از میانگین داده‌های متمایز ۱۳ , a , ۴ , ۶ باشد، واریانس این داده‌ها کدام است؟

$$\bar{x} = \frac{23+a}{4} \quad \left(7-\frac{23+a}{4}\right)^2 = 4 \quad S^2 = \frac{4+16+1+25}{4} = \frac{46}{4} = \frac{23}{2}$$

۱) ۹ ۲) ۹/۵ ۳) ۱۱ ✓ ۴) ۱۱/۵

$$\left(\frac{1-a}{4}\right)^2 = 4 \quad \frac{1-a}{4} = \pm 2 \quad a=9 \quad a=-7$$

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۴۰۲

۱۲ انحراف معیار شش دادهٔ آماری ۲ و اختلاف آن‌ها از میانگین برابر ۳, −۱, b, −۱, ۰, a است. اگر $a > 0$ باشد، مقدار b کدام است؟

$$3+(-1)+b+(-1)+0+a = 0 \quad S=2$$

$$(a+b)^2 = a^2+b^2+2ab \quad S: a+b=-1$$

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) -۲ ۴) -۳

$$S^2 = 4 = \frac{(9)+1+b^2+10+a^2}{6} \quad 24-11 = a^2+b^2 \quad a^2+b^2=13$$

$$1 = 13+2ab \quad ab=-6 \quad P \quad x^2-Sx+P=0 \quad x^2+x-6=0$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

۱۳ چارک دوم تعدادی دادهٔ آماری برابر ۳ است. قرینهٔ میانگین داده‌های کوچک‌تر از میانه، ۶ واحد کوچک‌تر از میانگین داده‌های بزرگ‌تر از میانه است. اگر تعداد داده‌ها زوج باشد، میانگین داده‌ها کدام است؟

$$x_1, \dots, x_{\frac{n}{2}} \quad \{ x_{\frac{n}{2}+1}, \dots, x_n \}$$

۱) ۶ ۲) ۴/۵ ۳) ۳ ✓ ۴) ۱/۵

$$-\left(\frac{x_1+\dots+x_{\frac{n}{2}}}{\frac{n}{2}}\right) = \left(\frac{x_{\frac{n}{2}+1}+\dots+x_n}{\frac{n}{2}}\right) - 6 \quad 3 = \frac{x_1+\dots+x_n}{n} = \bar{x}$$

$$3 = \frac{1}{n}\left(\frac{x_1+\dots+x_{\frac{n}{2}}}{\frac{n}{2}} + \frac{x_{\frac{n}{2}+1}+\dots+x_n}{\frac{n}{2}}\right)$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

۱۴ در یک دسته از اعداد، چهار عدد فرد یک رقمی در اختیار داریم. دوتای آن‌ها را با کوچک‌ترین عدد زوج بعد از خود و دوتای دیگر را با بزرگ‌ترین عدد زوج قبل از خود جایگزین می‌کنیم به‌طوری‌که اعداد در دستهٔ دوم (دستهٔ جدید) تک‌رقمی و غیرتکراری باشند. نسبت ضریب تغییرات دستهٔ اول به دستهٔ دوم کدام است؟

$$\{1,3,7,9\} \quad \bar{x} = \frac{20}{4} = 5$$

$$\{2,4,6,8\} \quad \bar{x} = \frac{20}{4} = 5$$

۱) $0/2\sqrt{5}$ ۲) $0/4\sqrt{10}$ ۳) $\sqrt{2}$ ✓ ۴) ۱/۲۵

$$S^2 = \frac{16+4+4+16}{4} = 10 \quad S = \sqrt{10} \quad C.V = \frac{\sqrt{10}}{5}$$

$$S^2 = \frac{9+1+1+9}{4} = 5 \quad S = \sqrt{5} \quad C.V = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}} = \sqrt{2}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۲

۱۵ کوچک‌ترین ضریب تغییرات دسته‌های سه‌تایی از اعداد زوج متوالی دورقمی با رقم دهگان یکسان، کدام است؟

۱) $\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$ ۲) $\frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}$ ۳) $\frac{1}{12\sqrt{6}}$ ۴) $\sqrt{\frac{1}{24\sqrt{6}}}$

$$C.V = \frac{6\sigma}{\bar{x}} \quad S = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{2} \quad \bar{x} = 96$$

$$94, 96, 98$$

$$S^2 = \frac{d^2}{12}(n^2-1) = \frac{4}{12}(8) = \frac{1}{2}$$

$$S = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2}{4\sqrt{6}} = \frac{1}{2\sqrt{6}}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۱۶ در یک مطالعهٔ آماری ۸۳ داده جمع‌آوری شده است. اگر توان دوم انحراف از میانگین داده‌ها برابر ۱ یا صفر باشد، حداقل چند داده با میانگین این داده‌ها برابر هستند؟

$(x_i - \bar{x})^2 = 0$ یا ۱

$x_i - \bar{x} = 0$ یا 1 یا -1

$\sum_{i=1}^{83}(x_i - \bar{x}) = (x_1 - \bar{x}) + (x_2 - \bar{x}) + \dots + (x_{83} - \bar{x}) = 0$

۱) صفر ۲) ۱۳

۳) ۳ ۴) ۱ ✓

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۱

۱۷ اعداد طبیعی طوری دسته‌بندی شده‌اند که تعداد عضوهای هر دسته (به جز دستهٔ اول) برابر بزرگ‌ترین عضو دستهٔ قبل است؛ یعنی $\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5, 6, 7, 8\}, \dots$. میانهٔ عضوهای دستهٔ سیزدهم، کدام است؟

۱) ۶۱۴۴/۵ ۲) ۶۱۴۵/۵

۳) ۱۲۲۸۹/۵ ۴) ۱۲۲۸۸/۵

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۱

۱۸ میانگین شش دادهٔ آماری، عددی طبیعی است و توان دوم انحراف از میانگین این داده‌ها به‌صورت $۹, a^۲, ۰, ۹, b^۲, ۱$ است. اگر واریانس این داده‌ها برابر ۴ باشد، مقدار ab کدام است؟ $(a, b \in \mathbb{Z})$

۱) ۴- ۲) ۴

۳) ۲ ۴) ۲-

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۱

۱۹ در یک کارگاه، دو گروه مشغول کار هستند. میانگین نمرات مسئولیت‌پذیری و واریانس در گروه اول به ترتیب ۸۰ و ۲۵ و در گروه دوم ۷۲ و ۱۶ می‌باشد. کدام گروه بهتر است؟

۱) گروه اول ۲) گروه دوم

۳) یکسان ۴) اظهارنظر نمی‌توان کرد

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۲۰ داده‌های جمع‌آوری‌شده در یک مطالعهٔ آماری اعداد طبیعی متوالی هستند. اگر به همهٔ داده‌ها ۲ واحد بیافزاییم، اختلاف میانه و میانگین داده‌های جدید چقدر است؟

۱) صفر ۲) ۱

۳) ۲ ۴) ۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

۲۱ ۹ دادهٔ آماری را در نظر بگیرید. اختلاف هشت دادهٔ آماری، از میانگین برابر ۱+ یا ۱- و اختلاف یک داده از میانگین برابر صفر است. انحراف معیار این داده‌ها، کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) $۲\sqrt{۲}$

۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

۲۲ در داده‌های ۲, ۱۲, ۸, ۴, ۵, ۲, ۱۰ با حذف داده‌های کوچک‌تر از چارک اول و داده‌های بزرگ‌تر از چارک سوم، دامنه تغییرات چند درصد کاهش می‌یابد؟

۱) ۵۰ ۲) ۴۰

۳) ۲۵ ۴) ۲۰

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۴۰۱

۲۳ اگر انحراف معیار پنج داده برابر صفر باشد و با ترکیب داده‌های ۸، ۵ و ۱۱ با پنج داده اولیه، میانگین هشت داده تغییر نکند، انحراف معیار این هشت داده، کدام است؟

۱) ۱/۲۵ ۲) ۱/۵

۳) ۲/۲۵ ۴) ۲/۵

کنکور سراسری علوم انسانی خارج از کشور ۱۴۰۱

۲۴ نمرات ادبیات دانش‌آموزی در ۱۰ آزمون به صورت زیر است. با حذف دو نمرهٔ کمترین و بیشترین آن‌ها، مقدار انحراف معیار، تقریباً کدام است؟

۱۴, ۱۲, ۱۵, ۹, ۱۴, ۱۵, ۱۶, ۱۵, ۲۰, ۱۱

۱) ۰/۹ ۲) ۱/۲

۳) ۱/۵ ۴) ۱/۶

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۳۹۸

۲۵ در داده‌های آماری ۱۸, ۸, ۱۵, ۷, ۱۴, ۹, ۱۰, ۱۱, ۱۸, ۱۰, ۱۲, ۱۷، انحراف معیار داده‌های بیشتر از چارک اول و کمتر از چارک سوم کدام است؟

۱) ۱/۶ ۲) ۱/۹

۳) ۲/۱ ۴) ۲/۴

کنکور سراسری علوم انسانی خارج از کشور ۱۳۹۸

۲۶ در داده‌های آماری ۱۵, ۱۷, ۱۰, ۱۲/۵, ۱۳, ۹, ۱۶, ۱۷/۵, ۱۳, ۱۴ تفاضل میانه از میانگین، کدام است؟

۱) ۰/۱ ۲) ۰/۲

۳) ۰/۳ ۴) ۰/۴

کنکور سراسری علوم انسانی خارج از کشور ۱۳۹۹

۲۷ داده‌های آماری ۵، ۷، ۸، ۸، ۸، ۱۰ و ۱۰ مفروض‌اند. ضریب تغییرات داده‌ها کدام است؟ $\left(\sqrt{\frac{۲}{۷}} \simeq ۰/۵۳۴\right)$

۱) ۰/۱۵ ۲) ۰/۲۰

۳) ۰/۲۵ ۴) ۰/۳۰

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۲۸ ضریب تغییرات داده‌های آماری به‌صورت جدول زیر، کدام است؟

داده	۱۰, ۱۰, ۱۰, ۱۰, ۱۰, ۱۱, ۱۱, ۱۱, ۱۱, ۱۴, ۱۴, ۱۴, ۱۴, ۱۴, ۱۴, ۱۴

۱) ۰/۱۲
۲) ۰/۱۵
۳) ۰/۱۷
۴) ۰/۱۸

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

۲۹ نرخ بیکاری یک کشور در ۱۰ سال گذشته به‌صورت زیر است، مقدار $\frac{Q_1 + Q_3 - 2Q_2}{Q_3 - Q_1}$ کدام است؟

۱۲/۷, ۳۰/۲, ۱۰/۶, ۱۱/۹, ۱۰/۶, ۱۲/۳, ۱۱/۲, ۱۳/۵, ۱۲/۸, ۱۱/۵

۱) -۰/۲۲۵
۲) -۰/۱۲۵
۳) ۰/۱۷۵
۴) ۰/۲۷۵

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۸

۳۰ نمرات مهارت برای کارگر (A) : ۱۶، ۱۵، ۱۴، ۱۳ و ۱۲ و برای کارگر (B) : ۱۶/۵، ۱۶، ۱۵/۵، ۱۳ و ۱۱/۵ بوده است. دقت عمل کدام بیشتر است؟

۱) A
۲) B
۳) یکسان
۴) اظهارنظر نمی‌توان کرد.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

پاسخ Homework

-

۱ گزینه ۱

گروه خونی افراد، یک متغیر کیفی اسمی است.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰
کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۷

۲ گزینه ۳

ازآنجایی‌که نوع آلایندگی هوا می‌تواند به‌صورت آلایندگی مونوکسید کربن، دی‌اکسید کربن و غیره باشد، پس کیفی اسمی است.
توجه کنید در این سؤال میزان آلایندگی هوا که کمّی پیوسته می‌باشد، سؤال نشده است.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۱

۳ گزینه ۴

چارک اول $Q_1 = ۹$ و چارک سوم $Q_3 = ۳۹$ است، بنابراین داده‌های بین چارک‌های اول و سوم $a, a, ۲۳, ۲۳, ۱۸$ خواهد بود.

$$\frac{a + a + ۲۳ + ۲۳ + ۱۸}{۵} = ۲۶ \Rightarrow ۲a + ۶۴ = ۱۳۰$$

$$\Rightarrow ۲a = ۶۶ \Rightarrow a = ۳۳$$

داده‌ها به‌صورت زیر مرتب می‌شود.

$$۱ \quad ۳ \quad \boxed{۹} \quad ۱۸ \quad ۲۳ \quad \boxed{۲۳} \quad ۳۳ \quad ۳۳ \quad \boxed{۳۹} \quad ۴۲ \quad ۶۴$$
$$\qquad\quad \downarrow Q_1 \qquad\qquad \downarrow Q_2 \qquad\qquad \downarrow Q_3$$

میانگین داده‌های بزرگ‌تر از چارک سوم برابر است با:

$$\bar{x} = \frac{۴۲ + ۶۷}{۲} = \frac{۱۰۹}{۲} = ۵۴/۵$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

۴ گزینه ۱

داده‌ای که جابه‌جا شده با هم برابر بوده است پس بعد از جابه‌جایی واریانس تغییر نخواهد کرد.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۳

۵ گزینه ۴

تنها با تبدیل ۸ به ۷ می‌توانیم عددی فرد اضافه کنیم که فقط از ۸ کوچک‌تر باشد و از ۲، ۴ و ۶ بزرگ‌تر است، پس:

$$\bar{x} = \frac{۲+۴+۶+۷}{۴} = \frac{۱۹}{۴} = ۴/۷۵$$

دقت کنید که در این حالت با کم شدن دامنه تغییرات، واریانس و انحراف معیار نیز کم می‌شود.

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۴۰۳

۶ گزینه ۳

$$۹, ۱۰, ۱۱, ۱۲, ۱۳, ۱۴, ۱۵, ۱۶, ۱۷, ۱۸, ۱۹$$

باید اعداد زوج، غیرتکراری و با بیشترین میانگین باشند. بنابراین همهٔ اعداد زوج $۱۰, ۱۲, ۱۴, ۱۶, ۱۸$ را کنار می‌گذاریم. از اعداد باقی‌مانده که فرد هستند $(۹, ۱۱, ۱۳, ۱۵, ۱۷, ۱۹)$ به‌صورتی دوتا دوتا انتخاب می‌کنیم که اختلاف آن‌ها تکراری نباشد و همچنین بیشترین میانگین شود. بنابراین داریم:

$$۱۷ - ۹ = ۸$$
$$۱۹ - ۱۳ = ۶$$
$$۱۵ - ۱۱ = ۴$$

درنتیجه دنبالهٔ اعداد زیر حاصل می‌شود:

$$۴, ۶, ۸, ۱۰, ۱۲, ۱۴, ۱۶, ۱۸$$

حال انحراف معیار این اعداد را محاسبه می‌کنیم:

$$\bar{x} = \frac{۴+۶+۸+۱۰+۱۲+۱۴+۱۶+۱۸}{۸} = \frac{۸۸}{۸} = ۱۱$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{۷^۲+۵^۲+۳^۲+۱^۲+۱^۲+۳^۲+۵^۲+۷^۲}{۸}} = \sqrt{\frac{۲(۴۹+۲۵+۹+۱)}{۸}}$$

$$= \sqrt{\frac{۲(۸۴)}{۸}} = \sqrt{۲۱}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۲

۷ گزینه ۲

دسته ۷ تایی از اعداد زوج متوالی را به شکل زیر نشان می‌دهیم (دسته اول):

$$۲k, ۲k+۲, ۲k+۴, ۲k+۶, ۲k+۸, ۲k+۱۰, ۲k+۱۲$$

اعداد متوالی و تعدادشان فرد است، پس میانگین برابر عدد وسط است یعنی $۲k+۶$

$$\overline{x} = ۲k+۶$$

از همه اعداد موجود در دسته $۲k$ را کم می‌کنیم و مطمئن هستیم که انحراف معیار دسته ایجاد شده با انحراف معیار دسته قبلی برابر است:

$$\text{دسته جدید} : ۰, ۲, ۴, ۶, ۸, ۱۰, ۱۲$$

$$\sigma = ۴$$

در سؤال گفته شده در دسته اول میانگین دو برابر انحراف معیار است پس: $\overline{x} = ۸$.

$$\overline{x} = ۲k+۶ = ۸ \Rightarrow ۲k = ۲ \Rightarrow k = ۱$$

میانگین دسته آخر، مجذور انحراف معیار است، پس:

$$\text{دسته اول} : \text{داده وسط} = \text{میانگین} = ۸$$

$$\text{دسته آخر} : \text{داده وسط} = \sigma^۲ = ۱۶$$

اختلاف بزرگ‌ترین عضو دسته اول و آخر برابر اختلاف داده‌های وسط دو دسته است: $۱۶ - ۸ = ۸$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۸ گزینه ۲

نکته: واریانس n دادهٔ آماری که تشکیل دنبالهٔ حسابی با قدر نسبت d می‌دهند برابر است با:

$$\sigma^۲ = \frac{n^۲ - ۱}{۱۲} \times d^۲$$

انحراف معیار ۷ عدد طبیعی متوالی برابر است با: $\sigma = \sqrt{\frac{۷^۲ - ۱}{۱۲}} = ۲$

اگر ۷ دادهٔ اول را $۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷$ فرض کنیم، میانگین برابر ۴ دارند و انحراف معیار ۲ که نصف میانگین است. دسته‌ای که میانگین (داده وسطی) آن $\sigma^۳ = ۸$ است، دستهٔ $۵, ۶, ۷, ۸, ۹, ۱۰, ۱۱$ می‌باشد. کوچک‌ترین عضو دسته اول برابر ۱ و کوچک‌ترین عضو دسته آخر برابر ۵ است. پس اختلاف آن‌ها $۵ - ۱ = ۴$ می‌باشد.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

۹ گزینه ۳

باتوجه‌به توضیحات داده‌شده در صورت سؤال اعداد به‌صورت یک عدد زوج و یک عدد فرد از دستهٔ اول به‌صورت زیر انتخاب می‌کنیم:

$$\underbrace{۱,۱۰۰}_{۹۹}\quad \underbrace{۲,۹۹}_{۹۷}\quad \underbrace{۳,۹۸}_{۹۵}\quad \underbrace{۴,۹۷}_{۹۳}\quad \cdots\quad \underbrace{۴۹,۵۲}_{۳}\quad \underbrace{۵۰,۵۱}_{۱}$$

اعداد دستهٔ جدید : $۱,۳,۵,\ldots,۹۹$

$$\overline{x}=\frac{۱+۳+۵+\cdots+۹۹}{۵۰}=\frac{۱+۳+\cdots+(۲\times ۵۰-۱)}{۵۰}$$

$$=\frac{(۵۰)^{۲}}{۵۰}=۵۰\Rightarrow \overline{x}=۵۰$$

نکته: می‌دانیم: $۱+۳+۵+\cdots+(۲n-۱)=n^{۲}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۲

۱۰ گزینه ۱

میانگین داده‌ها عبارت است از:

$$\overline{x}=\frac{۸+۹+۶a+۱۱}{۴}=\frac{۲۸+۶a}{۴}=۷+\frac{۳a}{۲}$$

با توجه به مربع انحراف از میانگین داده‌ها پس:

$$(۸-۷-\frac{۳a}{۲})^{۲}=۴\Rightarrow ۱-\frac{۳a}{۲}=\pm ۲\Rightarrow \begin{cases} ۱-\frac{۳a}{۲}=۲\Rightarrow a=-\frac{۲}{۳} & \times \\ ۱-\frac{۳a}{۲}=-۲\Rightarrow a=۲ \end{cases}$$

انحراف معیار داده‌ها برابر است با:

$$\sigma^{۲}=\frac{۴+۱+۴+۱}{۴}=\frac{۵}{۲}\Rightarrow \sigma=\sqrt{\frac{۵}{۲}}=\frac{۵}{\sqrt{۱۰}}$$

کنکور سراسری علوم انسانی خارج از کشور ۱۴۰۲

۱۱ گزینه ۴

ابتدا میانگین را حساب می‌کنیم:

$$\bar{x} = \frac{۶ + ۴ + a + ۱۳}{۴} = \frac{۲۳ + a}{۴}$$

برای داده ۶ داریم:

$$(۶ - \frac{۲۳ + a}{۴})^۲ = ۴ \Rightarrow \frac{۲۴ - ۲۳ - a}{۴} = \pm ۲ \Rightarrow \frac{۱ - a}{۴} = \pm ۲ \Rightarrow \begin{cases} ۱ - a = ۸ \Rightarrow a = -۷ \\ ۱ - a = -۸ \Rightarrow a = ۹ \end{cases}$$

اگر برای داده ۴ امتحان کنیم:

$$(۴ - \frac{۲۳ + a}{۴})^۲ \Rightarrow \begin{cases} a = -۷ \Rightarrow (۴ - ۴)^۲ = ۰ & \text{غ ق ق} \\ a = ۹ \Rightarrow (۴ - ۸)^۲ = ۱۶ & \text{درست} \end{cases}$$

پس:

$$\sigma^۲ = \frac{۴ + ۱۶ + ۲a - ۱۷ + ۲۵}{۴} = \frac{۲۰ + ۱۸ - ۱۷ + ۲۵}{۴} = \frac{۴۶}{۴} = ۱۱/۵$$

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۴۰۲

۱۲ گزینه ۴

$$\sigma = ۲ \Rightarrow \sigma^۲ = ۴ \Rightarrow ۴ = \frac{۳^۲ + (-۱)^۲ + b^۲ + (-۱)^۲ + ۰^۲ + a^۲}{۶}$$

$$a^۲ + b^۲ + ۱۱ = ۲۴ \Rightarrow a^۲ + b^۲ = ۱۳ \quad (۱)$$

ازطرفی می‌دانیم جمع انحرافات از میانگین همواره صفر است یعنی:

$$۳ + (-۱) + b + (-۱) + ۰ + a = ۰ \Rightarrow a + b = -۱ \quad (۲)$$

$$a^۲ + b^۲ = (a + b)^۲ - ۲ab \xrightarrow{(۱),(۲)} ۱۳ = ۱ - ۲ab \Rightarrow ab = -۶$$

$$x^۲ - Sx + P = ۰ \Rightarrow x^۲ + x - ۶ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = -۳ = b \\ x = ۲ = a \end{cases}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

۱۳ گزینه ۳

زوج $n : x_1 , x_2 , \dots , x_{\frac{n}{2}} , x_{\frac{n}{2}+1} , \dots , x_n$

$$-\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{\frac{n}{2}}}{\frac{n}{2}}\right) = \left(\frac{x_{\frac{n}{2}+1} + \dots + x_n}{\frac{n}{2}}\right) - 6$$

$$\Rightarrow \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{\frac{n}{2}} = 6 \Rightarrow 2\left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}\right) = 6 \Rightarrow 2\bar{x} = 6 \Rightarrow \bar{x} = 3$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

۱۴ گزینه ۳

باتوجه‌به صورت مسئله اعداد دستهٔ دوم همگی زوج تک‌رقمی و غیرتکراری هستند پس اعداد دستهٔ دوم ۲, ۴, ۶, ۸ خواهند بود. درنتیجه اعداد دستهٔ اول ۱, ۳, ۷, ۹ می‌باشند. داریم:

$$\{1,3,7,9\} \Rightarrow \bar{x} = \frac{1+3+7+9}{4} = 5$$

$$\sigma^2 = \frac{(1-5)^2 + (3-5)^2 + (7-5)^2 + (9-5)^2}{4} = 10 \Rightarrow \sigma = \sqrt{10}$$

$$\{2,4,6,8\} \Rightarrow \bar{x} = \frac{2+4+6+8}{4} = 5$$

$$\sigma^2 = \frac{(2-5)^2 + (4-5)^2 + (6-5)^2 + (8-5)^2}{4} = 5 \Rightarrow \sigma = \sqrt{5}$$

$$\frac{CV_1}{CV_2} = \frac{\frac{\sqrt{10}}{5}}{\frac{\sqrt{5}}{5}} = \sqrt{2}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۲

۱۵ گزینه ۴

سه عدد زوج متوالی را به شکل زیر در نظر می‌گیریم:

$$x-۲\,,\ x\,,\ x+۲ \Rightarrow \sigma^۲=\frac{(-۲)^۲+۰^۲+۲^۲}{۳}=\frac{۸}{۳}$$

میانگین هر سه عدد زوج متوالی عدد وسط است و چون در محاسبه ضریب تغییرات، میانگین در مخرج قرار دارد، بنابراین برای یافتن کوچک‌ترین ضریب تغییرات بزرگ‌ترین میانگین را انتخاب می‌کنیم که متعلق به سه‌تایی $\{۹۴,۹۶,۹۸\}$ می‌باشد:

$$\overline{X}=۹۶$$

$$CV=\frac{\sigma}{\overline{X}}=\frac{\frac{۲\sqrt{۲}}{\sqrt{۳}}}{۹۶}=\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۳}\times ۴۸}\times\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}}=\frac{۱}{۲۴\sqrt{۶}}$$

نکته: واریانس سه عدد زوج متوالی برابر است با:

$$\sigma^۲=\frac{d^۲}{۱۲}(N^۲-۱)=\frac{۴}{۱۲}(۹-۱)=\frac{۱}{۳}\times ۸=\frac{۸}{۳}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۱۶ گزینه ۴

اگر هیچ‌کدام از داده‌ها با میانگین برابر نباشند، مجموع انحرافات از میانگین نمی‌تواند صفر شود! چون ۸۳ داده داریم و امکان ندارد که جمع تعداد فردی از ۱+ یا ۱- باهم به صفر برسند، پس حداقل یکی از داده‌ها باید برابر میانگین باشد!

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۱

۱۷ گزینه ۱

تعداد اعداد دستهٔ دوم برابر ۲تا است. دستهٔ سوم ۴تا، دستهٔ چهارم ۸تا و به همین طریق پیش خواهد رفت یعنی $۲^{n-۱}$ ، پس دستهٔ سیزدهم با جملهٔ $۱+۲^{۱۲}$ آغاز شده و به $۲^{۱۳}$ ختم می‌شود. همچنین می‌دانیم این دسته $۲^{۱۲}$ یعنی ۴۰۹۶ عضو دارد.

$$\text{دسته سیزدهم}: \{۴۰۹۷, ۴۰۹۸, \ldots, ۸۱۹۱, ۸۱۹۲\}$$

میانهٔ این ۴۰۹۶ داده برابر میانگین داده‌های ۲۰۴۸ و ۲۰۴۹ام است.

$$\text{میانه}=\frac{(۴۰۹۶+۲۰۴۸)+(۴۰۹۶+۲۰۴۹)}{۲}=۶۱۴۴/۵$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۱

۱۸ گزینه ۴

$$\sigma^۲ = ۴ \Rightarrow ۴ = \frac{۱ + b^۲ + ۹ + ۰ + a^۲ + ۹}{۶} \Rightarrow a^۲ = ۵ - b^۲$$

چون a و b اعدادی صحیح هستند، پس حتماً یکی از آن‌ها اندازهٔ ۱ دارد و دیگری اندازهٔ ۲. اما برای این‌که مجموع انحرافات از میانگین صفر شود، حتماً باید یکی از آن‌ها را منفی در نظر بگیریم. پس $ab = -۲$.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۱

۱۹ گزینه ۲

در گروه اول $\overline{X}_۱ = ۸۰$ و $\sigma_۱ = ۵$ و در گروه دوم $\overline{X}_۲ = ۷۲$ و $\sigma_۲ = ۴$ است. برای دو گروه، ضریب تغییرات را محاسبه می‌کنیم:

$$CV_۱ = \frac{\sigma_۱}{\overline{X}_۱} = \frac{۵}{۸۰} = \frac{۱}{۱۶}$$

$$CV_۲ = \frac{\sigma_۲}{\overline{X}_۲} = \frac{۴}{۷۲} = \frac{۱}{۱۸}$$

چون $CV_۲ < CV_۱$ است، پس گروه دوم بهتر است.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۲۰ گزینه ۱

نکته: در داده‌هایی که به صورت دنبالهٔ حسابی هستند، میانه و میانگین برابرند.

داده‌های آماری اعداد طبیعی متوالی هستند، پس جملات دنباله‌ای حسابی می‌باشند. بنابراین طبق نکته میانگین و میانه برابر است. با افزودن ۲ واحد به تمام داده‌ها، همچنان دنباله‌ای حسابی می‌باشد، بنابراین اختلاف میانه و میانگین برابر با صفر است.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

۲۱ گزینه ۴

می‌دانیم مجموع اختلاف داده‌ها از میانگین برابر با صفر است، بنابراین اختلاف چهار داده از میانگین برابر با ۱ و اختلاف چهار داده از میانگین نیز برابر با ۱- می‌باشد.

$$\sigma^۲ = \frac{۴(۱)^۲ + ۴(-۱)^۲ + ۰}{۹} = \frac{۸}{۹} \Rightarrow \sigma = \frac{۲\sqrt{۲}}{۳}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

۲۲ گزینه ۴

$$\underset{Q_1}{\downarrow}\ ۲,\ ۲\ ,\ ۴,\ \underset{Q_2}{\downarrow}\ ۵\ ,\ ۸,\ \underset{Q_3}{\downarrow}\ ۱۰\ ,\ ۱۲$$

دامنه تغییرات اولیه را می‌یابیم:

$$R_1 = ۱۲ - ۲ = ۱۰$$

دامنهٔ تغییرات جدید بعد از حذف ۱۲:

$$R_2 = ۱۰ - ۲ = ۸$$

توجه کنید که ۲ کوچک‌تر از ۲ نیست و آن را حذف نمی‌کنیم. (هر چند تأثیری در حل سؤال نداشت)

$$\begin{matrix} ۱۰ & ۱۰۰ \\ ۲ & x \end{matrix} \Rightarrow x = \frac{۲ \times ۱۰۰}{۱۰} = ۲۰\%$$

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۴۰۱

۲۳ گزینه ۲

انحراف معیار زمانی صفر است که داده‌ها برابر باشند. همهٔ پنج داده را x فرض می‌کنیم:

$$x = \frac{۵x + ۸ + ۵ + ۱۱}{۸} \Rightarrow x = ۸$$

ابتدا واریانس را می‌یابیم:

$$\sigma^2 = \frac{(۱۱ - ۸)^2 + (۵ - ۸)^2 + (۸ - ۸)^2 + ۵(۸ - ۸)^2}{۸} = \frac{۱۸}{۸} = ۲/۲۵$$

$$\sigma = \sqrt{۲/۲۵} = ۱/۵$$

کنکور سراسری علوم انسانی خارج از کشور ۱۴۰۱

۲۴ گزینه ۴

نمرات ۹ و ۲۰ را حذف می‌کنیم:

$$۱۴, ۱۲, ۱۵, ۱۴, ۱۵, ۱۶, ۱۵, ۱۱$$

$$\bar{x} = \frac{\text{مجموع}}{\text{تعداد}} = \frac{۱۱۲}{۸} = ۱۴$$

$$\sigma^۲ = \frac{(x_۱ - \bar{x})^۲ + (x_۲ - \bar{x})^۲ + \ldots + (x_n - \bar{x})^۲}{n}$$

$$\sigma^۲ = \frac{(۱۱ - ۱۴)^۲ + (۱۲ - ۱۴)^۲ + ۲(۱۴ - ۱۴)^۲ + ۳(۱۵ - ۱۴)^۲ + (۱۶ - ۱۴)^۲}{۸}$$

$$= \frac{۹ + ۴ + ۰ + ۳ + ۴}{۸} = \frac{۲۰}{۸} = ۲/۵$$

$$\Rightarrow \sigma = \sqrt{۲/۵} \simeq ۱/۶$$

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۳۹۸

۲۵ گزینه ۲

ابتدا داده‌ها را مرتب می‌کنیم:

$$۷, ۸, ۹, ۱۰, ۱۰, ۱۱, ۱۲, ۱۴, ۱۵, ۱۷, ۱۸, ۱۸$$

چون تعداد داده‌ها زوج است، میانه برابر میانگین دو دادهٔ وسط است. چارک اول میانهٔ نیمهٔ اول داده‌ها و چارک سوم میانهٔ نیمهٔ دوم داده‌ها است.

$$۷, ۸, \overbrace{۹, ۱۰}^{Q_۱ = \frac{۹+۱۰}{۲} = ۹/۵}, ۱۰, \underbrace{۱۱, ۱۲}_{Q_۲ = \frac{۱۱+۱۲}{۲} = ۱۱/۵}, ۱۴, \overbrace{۱۵, ۱۷}^{Q_۳ = \frac{۱۵+۱۷}{۲} = ۱۶}, ۱۸, ۱۸$$

داده‌های بین چارک اول و سوم : $۱۰, ۱۰, ۱۱, ۱۲, ۱۴, ۱۵$

$$\overline{x} = \frac{۱۰ + ۱۰ + ۱۱ + ۱۲ + ۱۴ + ۱۵}{۶} = \frac{۷۲}{۶} = ۱۲$$

$$\sigma^۲ = \frac{(۱۰ - ۱۲)^۲ + (۱۰ - ۱۲)^۲ + (۱۱ - ۱۲)^۲ + (۱۲ - ۱۲)^۲ + (۱۴ - ۱۲)^۲ + (۱۵ - ۱۲)^۲}{۶}$$

$$= \frac{۴ + ۴ + ۱ + ۰ + ۴ + ۹}{۶} = \frac{۲۲}{۶} = \frac{۱۱}{۳} \Rightarrow \sigma = \sqrt{\frac{۱۱}{۳}} \simeq ۱/۹$$

کنکور سراسری علوم انسانی خارج از کشور ۱۳۹۸

۲۶ گزینه ۲

برای پیدا کردن میانه، داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم:

$$۹, ۱۰, ۱۲/۵, ۱۳, ۱۳, ۱۴, ۱۵, ۱۶, ۱۷, ۱۷/۵$$

تعداد داده‌ها زوج است بنابراین میانه برابر با میانگین دو دادهٔ پنجم و ششم است. داریم:

$$\text{میانه} = \frac{۱۳ + ۱۴}{۲} = ۱۳/۵$$

میانگین داده‌ها را به‌صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$\text{میانگین} = \frac{۹ + ۱۰ + ۱۲/۵ + ۱۳ + ۱۳ + ۱۴ + ۱۵ + ۱۶ + ۱۷ + ۱۷/۵}{۱۰} = ۱۳/۷$$

بنابراین تفاضل میانه از میانگین برابر است با:

$$۱۳/۷ - ۱۳/۵ = ۰/۲$$

کنکور سراسری علوم انسانی خارج از کشور ۱۳۹۹

۲۷ گزینه ۲

راه‌حل اول: ابتدا میانگین را محاسبه می‌کنیم:

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \frac{5 + 7 + 3 \times 8 + 2 \times 10}{7} = \frac{12 + 24 + 20}{7} = \frac{56}{7} = 8$$

سپس انحراف معیار را به دست می‌آوریم:

واریانس:

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 + \ldots + (x_n - \overline{x})^2}{n}$$

$$= \frac{(5 - 8)^2 + (7 - 8)^2 + 3 \times (8 - 8)^2 + 2 \times (10 - 8)^2}{7}$$

$$= \frac{9 + 1 + 0 + 8}{7} = \frac{18}{7}$$

$$\Rightarrow \text{انحراف معیار} : \sigma = \sqrt{\frac{18}{7}} = 3\sqrt{\frac{2}{7}}$$

حال ضریب تغییرات را محاسبه می‌کنیم:

$$CV = \frac{\sigma}{\overline{x}} = \frac{3\sqrt{\frac{2}{7}}}{8} = \frac{3}{8} \times 0/534 \simeq 0/20$$

راه‌حل دوم: برای کمتر شدن محاسبات، عدد ۸ را از همهٔ داده‌ها کم می‌کنیم:

$$-3, -1, 0, 0, 0, 2, 2$$

$$\overline{x}_{\text{جدید}} = \frac{2 + 2 - 1 - 3}{7} = 0$$

$$\sigma^2 = \frac{2 \times 2^2 + (-1)^2 + (-3)^2}{7} = \frac{18}{7} \quad \Rightarrow \sigma = 3\sqrt{\frac{2}{7}}$$

$$\overline{x}_{\text{اصلی}} = \overline{x}_{\text{جدید}} + 8 = 0 + 8 = 8$$

$$\Rightarrow CV = \frac{\sigma}{\overline{x}_{\text{اصلی}}} = \frac{3\sqrt{\frac{2}{7}}}{8} \simeq 0/20$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۲۸ گزینه ۲

راه‌حل اول:

ابتدا میانگین را محاسبه می‌کنیم:

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \frac{5 \times 10 + 4 \times 11 + 7 \times 14}{16} = \frac{50 + 44 + 98}{16} = \frac{192}{16} = 12$$

سپس انحراف معیار را محاسبه می‌کنیم:

$$\text{واریانس } \sigma^2 = \frac{(x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 + \ldots + (x_n - \overline{x})^2}{n}$$

$$= \frac{5 \times (10 - 12)^2 + 4 \times (11 - 12)^2 + 7 \times (14 - 12)^2}{16}$$

$$= \frac{5 \times 4 + 4 \times 1 + 7 \times 4}{16} = \frac{20 + 4 + 28}{16} = \frac{52}{16} = \frac{13}{4}$$

$$\Rightarrow \text{انحراف معیار} = \sigma = \sqrt{\frac{13}{4}} = \frac{\sqrt{13}}{2}$$

حالت ضریب تغییرات را به دست می‌آوریم:

$$CV = \frac{\sigma}{\overline{x}} = \frac{\frac{\sqrt{13}}{2}}{12} = \frac{\sqrt{13}}{24} \simeq 0/15$$

راه‌حل دوم:

برای کمتر شدن محاسبات، عدد ۱۰ را از همهٔ داده‌ها کم می‌کنیم:

$$\text{داده‌ها}: \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{\text{تا ۵}}, \underbrace{1, \ldots, 1}_{\text{تا ۴}}, \underbrace{4, 4, \ldots, 4}_{\text{تا ۷}}$$

$$\overline{x}_{\text{کوچک}} = \frac{0 + 4(1) + 7(4)}{16} = \frac{32}{16} = 2$$

$$\sigma^2 = \frac{5(-2)^2 + 4(-1)^2 + 7(2)^2}{16} = \frac{52}{16} = \frac{13}{4}$$

$$\Rightarrow \sigma = \sqrt{\frac{13}{4}} = \frac{\sqrt{13}}{2}$$

$$\overline{x}_{\text{اصلی}} = \overline{x}_{\text{کوچک}} + 10 = 2 + 10 = 12$$

$$CV = \frac{\sigma}{\overline{x}_{\text{اصلی}}} = \frac{\frac{\sqrt{13}}{2}}{12} \simeq 0/15$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹

۲۹ گزینه ۲

داده‌ها را مرتب می‌کنیم:

$$۱۰/۶, ۱۰/۶, ۱۱/۲, ۱۱/۵, ۱۱/۹, ۱۲/۳, ۱۲/۷, ۱۲/۸, ۱۳/۵, ۳۰/۲$$

چون تعداد داده‌ها زوج است، پس میانه ($Q_۲$) برابر میانگین دادهٔ پنجم و ششم است.

$$Q_۲ \text{ چارک دوم(میانه)} = \frac{۱۱/۹ + ۱۲/۳}{۲} = ۱۲/۱$$

۵ عدد قبل از میانه و ۵ عدد بعد از آن قرار دارند، بنابراین:

$$Q_۱ = ۱۱/۲ \quad , \quad Q_۳ = ۱۲/۸$$

پس:

$$\frac{Q_۱ + Q_۳ - ۲Q_۲}{Q_۳ - Q_۱} = \frac{۱۱/۲ + ۱۲/۸ - ۲(۱۲/۱)}{۱۲/۸ - ۱۱/۲} = \frac{-۰/۲}{۱/۶} = -۰/۱۲۵$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۸

۳۰ گزینه ۱

$$A : ۱۲ \quad ۱۳ \quad ۱۴ \quad ۱۵ \quad ۱۶ \Rightarrow \bar{x}_A = ۱۴$$
$$B : ۱۱/۵ \quad ۱۳ \quad ۱۵/۵ \quad ۱۶ \quad ۱۶/۵ \Rightarrow \bar{x}_B = ۱۴/۵$$

$$\sigma^۲ = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^۲}{n} \quad , \quad CV = \frac{\sigma}{\bar{x}}$$

$$\sigma_A^۲ = \frac{(۱۲ - ۱۴)^۲ + (۱۳ - ۱۴)^۲ + ۰ + (۱۵ - ۱۴)^۲ + (۱۶ - ۱۴)^۲}{۵} = \frac{۴ + ۱ + ۰ + ۱ + ۴}{۵} = \frac{۱۰}{۵} = ۲$$

$$\Rightarrow CV_A = \frac{\sqrt{۲}}{۱۴}$$

$$\sigma_B^۲ = \frac{(۱۱/۵ - ۱۴/۵)^۲ + (۱۳ - ۱۴/۵)^۲ + (۱۵/۵ - ۱۴/۵)^۲ + (۱۶ - ۱۴/۵)^۲ + (۱۶/۵ - ۱۴/۵)^۲}{۵}$$

$$= \frac{۹ + ۲/۲۵ + ۱ + ۲/۲۵ + ۴}{۵} = \frac{۱۸/۵}{۵} = ۳/۷ \Rightarrow CV_B = \frac{\sqrt{۳/۷}}{۱۴/۵}$$

CV_A کوچک‌تر است، پس کارگر A دقت بیشتری دارد.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

تابع نمایی و لگاریتمی

معرفی تابع نمایی و لگاریتمی

$$\log_b x = y \Leftrightarrow b^y = x$$

(به توان)

تعریف لگاریتم

می‌بینیم که $y = f(x) = \log_b x$ و x را برحسب y حساب کنیم $x = b^y$ و جای x و y را عوض کنیم، تابع وارون به دست می‌آید. یعنی:

$$y = b^x = f^{-1}(x)$$

تابع لگاریتمی، تابع نمایی وارون یکدیگرند.

دامنه تابع لگاریتمی: در تابع $y = \log_b u$ باید: جلویش مثبت و زیرش مثبت و زیرش یک نشه‌ها!

$(u > 0) \cap (b > 0) \cap (b \neq 1)$ → اشتراک

b:base : پایه

تمرین: تابع $y = \log_x(4 - x^2)$ برای کدام xها تعریف شده است؟

تمرین: عدد ۸ چه توانی از ۲ است؟ ۳

دقت: در لگاریتم پایه ۱۰ نوشته نمی‌شود.

$\log 1 = 0$ $\log 0/1 = -1$ $\log 0/01 = -2$ $\log 0/001 = -3$

$\log 10000 = 4$ $\log 1000 = 3$ $\log 100 = 2$ $\log 10 = 1$

نکته: if $A > 1$ $[\log A] =$ تعداد ارقام $A - 1$

تمرین: $[\underbrace{\log 637}_{2/\ldots}] = 3 - 1 = 2$

تمرین: اگر $\log A = 2/37$ باشد، عدد A چند رقمی است؟ ۳ رقمی

نکته: $[\log A] = -$(تعداد صفرهای بعد از ممیز قبل از اولین رقم غیرصفر) − ۱ if $0 < A < 1$

تمرین: $[\log 0/000902] = -3-1 = -4$

$[\log 0/000902] = [\log 902 \times 10^{-6}] = [\log 902 + \log 10^{-6}] = [2/\ldots - 6\log 10] = [2/\ldots] - 6 = 2 - 6 = -4$

$\log a\cdot b = \log a + \log b$ $\quad \log a^n = n\log a$

قوانین لگاریتم:

$\log_b^1 = 0$ $\quad \log_b^b = 1$

قوانین	مثال‌ها
۱) $\log_k abc = \log_k a + \log_k b + \log_k c$	$\log_3 56 = \log_3 7(8) = \log_3 7 + \log_3 8$
۲) $\log_k \frac{a}{b} = \log_k a - \log_k b$	$\log 5 = \log \frac{10}{2} = \log 10 - \log 2 = 1 - \overbrace{\log 2}^{0/3} = 0/7$ $\quad \log 5 = 1 - \log 2$
۴) $\log_b a^n = n\log_b a$	$\log_2 128 = \log_2 2^7 = 7\log_2 2 = 7$
۵) $\log_{b^m} a^n = \frac{n}{m}\log_b a$	$\log_{\frac{1}{1024}} 512 = \log_{2^{-10}} 2^9 = -\frac{9}{10}\log_2 2 = -\frac{9}{10} = -0/9$
$\log_b a = \log_{b^2} a^2 = \log_{\sqrt{b}} \sqrt{a} = \log_{\frac{1}{b}} \frac{1}{a}$	
۶) $\log_b b = 1$	$\log_3 81 = \log_3 3^4 = 4(\overbrace{\log_3 3}^{1}) = 4$
۷) $\log_b 1 = 0$	$\log(\tan 1^\circ \times \tan 2^\circ \times \cdots \times \tan 45^\circ \times \cdots \times \underbrace{\tan 88^\circ}_{\cot 2^\circ} \times \underbrace{\tan 89^\circ}_{\cot 1^\circ}) = \log 1 = 0$
۸) $a^{\log_b x} = x^{\log_b a}$	$6^{\log_6 3} = 3^{\log_6 6} = 3$
۹) $b^{\log_b x} = x^{\log_b b} = x$	$5^{\log_5 3} = 3^{\log_5 5} = 3$
۱۰) $\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$ مزدل تغییر مبنا	$\log_b a \times \log_a b = \frac{\log_{10} a}{\log_{10} b} \times \frac{\log_{10} b}{\log_{10} a} = 1 \Rightarrow \boxed{\log_b a = \frac{1}{\log_a b}}$

در مورد عبارت $A = \log_7^2 + \log_7^5$ کدام درست است؟ $A > 2$ ۴) $A < -2$ ۳) $A \geq 2$ ۲) $\boxed{A > 2}$ ۱

$A = \log_7^2 + \log_7^5 > 2$

$\begin{cases} a + \frac{1}{a} \geq 2 & a > 0 \\ a + \frac{1}{a} \leq -2 & a < 0 \end{cases}$ $\quad a = 1$ $\quad a = -1$

$1 + g(x) \geq 2 + 1 = 3$

$1 + g(x) \leq -2 + 1 = -1$

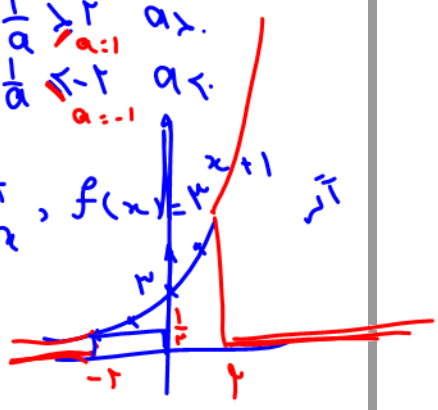
$y \in (0, \frac{1}{3}] \cup [27, +\infty)$

$y \geq 27$

$0 < y \leq \frac{1}{3}$

آخر $f(x) = 3^{x+1}$, $g(x) = \log_{\frac{1}{2}}^2 + \log_2^2$ برد تابع $y = fog(x)$ کدام است؟

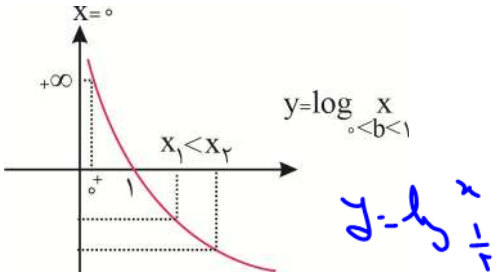
$y = f\left(g(x) = \log_{\frac{1}{2}}^2 + \log_2^2 \geq 2 \right) = f(g(x))$



نمودار $y = \log_b x$ اعداد منفی و صفر لگاریتم ندارند. اعداد هرچه بیشتر شوند لگاریتم، گنها بیشتری شود به شرطی که پایه بیشتر از یک باشد

دامنه: $x > 0$ باید $b \neq 1, b > 0$ پس یا $0 < b < 1$ یا $b > 1$

$\log_b b = 1$ $\log_b 1 = 0$ خط $x = 0$ مجانب قائم ت.ن = صفر log هر دو تابع در $x > 0$ رسم می‌شوند.



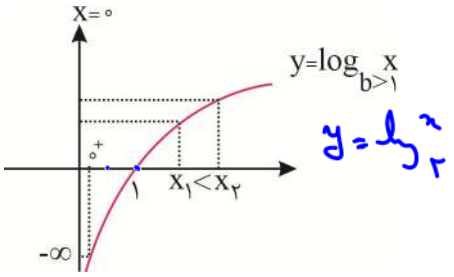
$\log_{0^+} = +\infty$

اکید نزولی

$x_1 < x_2$

$\log_b x_1 > \log_b x_2$

$\log_{0/1} 5 < 0$ $\log_{0/1} 0/2 > 0$



$\log_{0^+} = -\infty$

اکید صعودی

$x_1 < x_2$

$\log_b x_1 < \log_b x_2$

$\log_6 5 > 0$ $\log_6 0/5 < 0$

نکته: در $\log_{\bigcirc} \bigcirc$ اگر هر دو $\bigcirc$ بیشتر از یک یا هر دو $\bigcirc$ بین صفر و یک باشند، حاصل مثبت است:

$\log_6 5 > 0$ $\log_{0/6} 0/5 > 0$

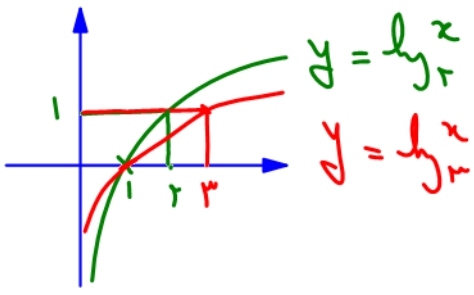
اما اگر یکی از $\bigcirc$ها بیشتر از یک و دیگری بین صفر و یک باشند، حاصل منفی است: $\log_6 0/5 < 0$ $\log_{0/1} 5 < 0$

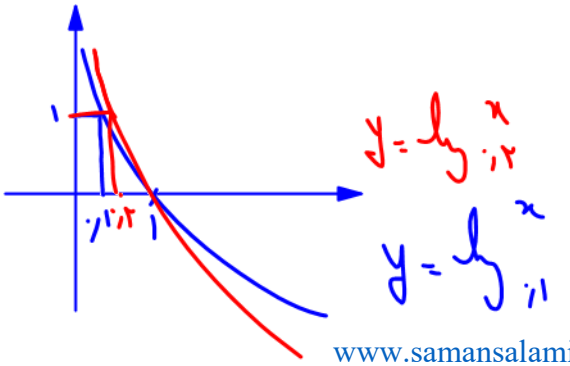
تمرین: اگر $A = \log \frac{1}{\cos x}$ باشد، آن‌گاه:

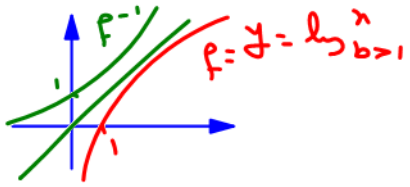
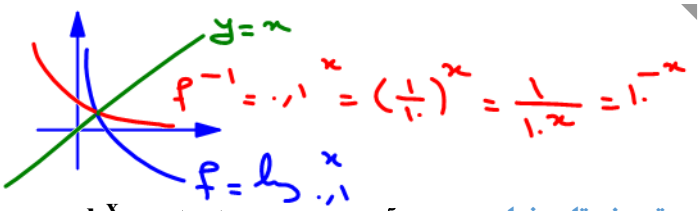
۱) $A \geq 0$ ✓ ۲) $A > 0$ ۳) $A < 0$ ۴) $A \leq 0$

$-1 \leq \cos x \leq 1$ $\begin{cases} \frac{1}{\cos x} \geq 1 \\ \frac{1}{\cos x} \leq -1 \end{cases}$ $A = \log \frac{1}{\cos x}$ ت.ن $A = \log_{0/1} \frac{1}{\cos x} \geq 1$ $0/1 \geq 1$

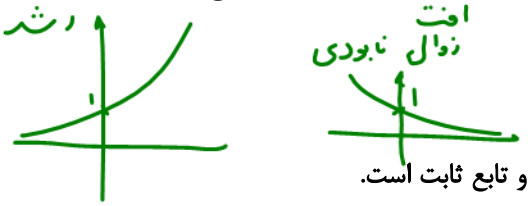
$y = \log \frac{1}{|\cos x|} \geq 1$ باشد، برد تابع کدام است؟ $y \geq 0$ $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$





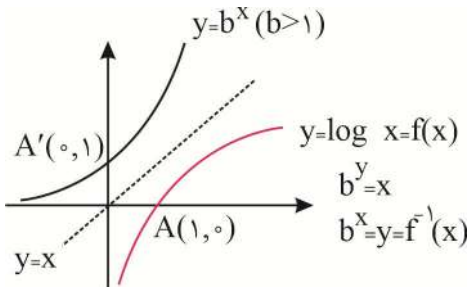
تعریف تابع نمایی: متغیر آن یا x در نما (توان) است. $y = b^x$ باید $b > 0$ و $b \neq 1$ اگر $0 < b < 1$ باشد اکید نزولی و برای $b > 1$ اکید صعودی است.

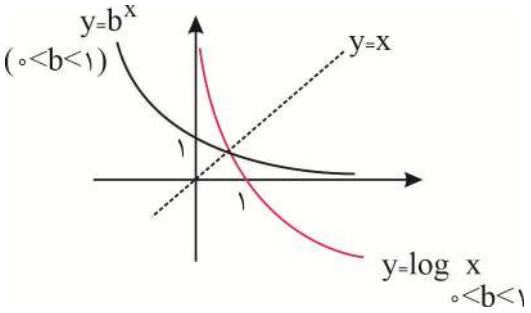


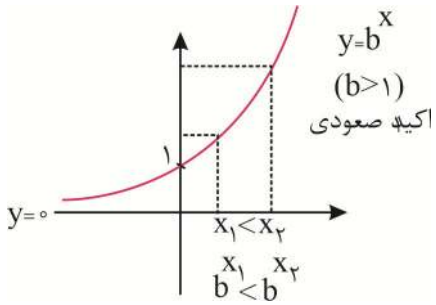
نمودار تابع نمایی $y = b^x$:

$b \neq 1$ و $b > 0$ پس یا $0 < b < 1$ یا $b > 1$, $b \neq 1$ است زیرا $y = (b = 1)^x = 1$ و تابع ثابت است.

می‌دانیم تابع نمایی وارون تابع لگاریتمی است پس باید قرینه آن نسبت به نیمساز ناحیه او لو سوم یعنی خط $y = x$ باشد:





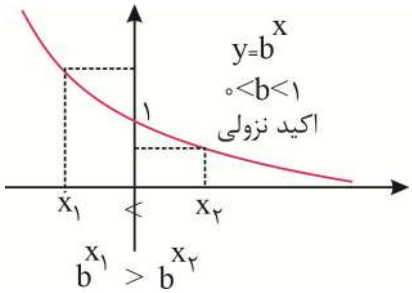


خط $y = 0$ مجانب افقی

$f(0) = b^0 = 1$

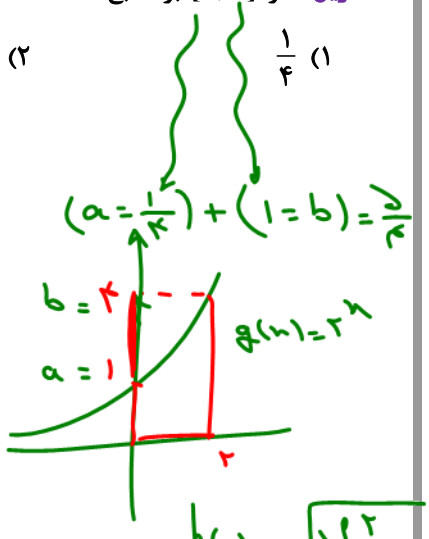
ارزش تابع مثبت و بالای محور xهاست

برد هر دو تابع $y > 0$



تمرین: اگر $[a,b]$ برد تابع $f(x) = 2^{-\sqrt{5\sin^2 x - 1}}$ باشد، $a + b$ کدام است؟ (ریاضی خارج ۱۴۰۰)

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) $\frac{5}{4}$



$-1 \leq \sin x \leq 1$

$0 \leq \sin^2 x \leq 1$

$0 \leq 5\sin^2 x \leq 5$

$-1 \leq 5\sin^2 x - 1 \leq 4$

$0 \leq \sqrt{5\sin^2 x - 1} \leq \sqrt{4} = 2$

$\times -1$

$0 \geq -\sqrt{5\sin^2 x - 1} \geq -2$

$2^0 \geq 2^{-\sqrt{5\sin^2 x - 1}} \geq 2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$

$h(x) = -\sqrt{5\sin^2 x - 1}$

$f(x) = g(h(x))$

تمرین: تابع $f(x)=a+b(\frac{1}{2})^x$ از مبداء عبور می‌کند. اگر $f^{-1}(-1)=-1$ باشد، حاصل $a-b$ کدام است؟ (تجربی داخل ۱۴۰۱)

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۲ ۴) ۳

$(0,0)\in f$

$f(0)=a+b(\frac{1}{2})^0=a+b=0$

$a=-b$

$f(-1)=a+b(\frac{1}{2})^{-1}=a+2b=-1$

$-b+2b=-1$

$b=-1$

$a=1$

$a-b=2$

تمرین: نمودار تابع $f(x)=A(2)^{Bx}$ و خط به معادله $4y=5x$ در دو نقطه به طول‌های ۲ و ۴ متقاطع‌اند. مقدار $f^{-1}(10)$ کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۵)

۱) ۳ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۸

$y=\frac{5}{4}x$

$A(2,\frac{5}{2})$

$B(4,5)$

$f(2)=A\,2^{2B}=\frac{5}{2}\rightarrow 2A=\frac{5}{2}$

$f(4)=A\,2^{4B}=5$

$A=\frac{5}{4}$

$\frac{2^{2B}}{2^{4B}}=\frac{1}{2}$

$2^{-2B}=2^{-1}$

$-2B=-1$

$B=\frac{1}{2}$

$f(x)=\frac{5}{4}\,2^{\frac{x}{2}}$

$10=\frac{5}{4}\,2^{\frac{x}{2}}$

$8=2^3=2^{\frac{x}{2}}\rightarrow 3=\frac{x}{2}$

$f^{-1}(10)=6$

$f(6)=10$

تمرین: کدام تابع زیر با $y=\log\frac{x-2}{x}$ برابر است؟ (تجربی خارج ۹۷)

۱) $\log(x-2)-\log x$ ۲) $\log\frac{x^2-4}{x^2+2x}$ ۳) $\frac{1}{2}\log\frac{x-2}{x}$ ۴) $2\log\sqrt{\frac{x-2}{x}}$

$\frac{x-2}{x}>0$

	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$x-2$	−	−	−	−	0	+	+
x	−	0	+	+	+	+	+
$\frac{x-2}{x}$	+	∄	−	−	0	+	+

$D_f:(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$

$\log\frac{x^2-4}{x^2+2x}=\log\frac{(x+2)(x-2)}{x(x+2)}$

	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$x+2$	−	0	+	+	+	+	+	+	+
$x-2$	−	−	−	−	−	−	0	+	+
x	−	−	−	0	+	+	+	+	+
$\frac{x^2-4}{x^2+2x}$	−	∄	+	0	−	∄	+	0	+

$(-\infty,-2)\cup(0,2)$

$x-2>0$

$x>2$

تمرین: اگر برد $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(\frac{1}{12+\sqrt{[x]}-[x]})-1$ برابر $\{\log_2 3+1\}$ باشد، دامنه f کدام است؟ (ریاضی خارج ۱۴۰۰ با کمی تغییر)

۱) $[0,2)$ ۲) $(0,2)$ ۳) $(0,1)$ ۴) $[0,1]$

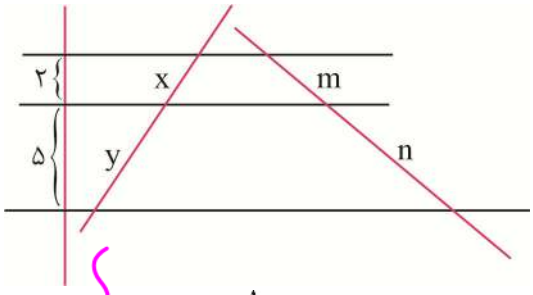
تمرین: اگر $\log 2\approx 0/3$ و $\log 3\approx 0/4$ باشد، اختلاف ریشه‌های معادله $(\log\frac{5}{3})x^2+(\log 9)x-\log 15=0$ چه‌قدر است؟ (تجربی خارج ۱۴۰۲)

۱) $\frac{26}{3}$ ۲) $\frac{14}{3}$ ۳) $\frac{14}{11}$ ۴) $\frac{26}{11}$

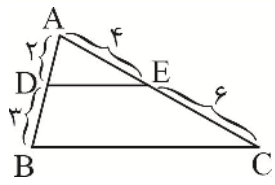
تمرین: اگر $A=\{\frac{1}{\sqrt{\log_8 x+4\log_{x^3}2}}\ ;\ x>1\}$ باشد، بزرگ‌ترین عضو مجموعه A کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ ۲) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۳) $\sqrt{6}$ ۴) $\sqrt{3}$

تالس و تشابه



$$\frac{x}{y}=\frac{m}{n}=\frac{۲}{۵}\Rightarrow$$

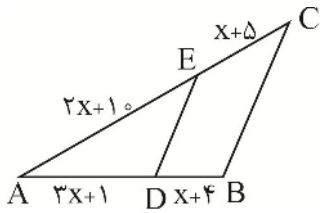


تالس جزء به جزء: $\frac{AD=۲}{DB=۳}=\frac{AE=۴}{EC=۶}$

تالس جزء به کل: $\frac{AD=۲}{AB=۲+۳=۵}=\frac{AE=۴}{AC=۴+۶=۱۰}=\frac{DE}{BC}$

عکس قضیه تالس هم برقراره، یعنی اگر داشتیم: $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$ آن‌گاه: $DE \parallel BC$

تمرین: در شکل مقابل $DE \parallel BC$. مقدار x کدام است؟



۱) ۵

۲) ۷ ✓

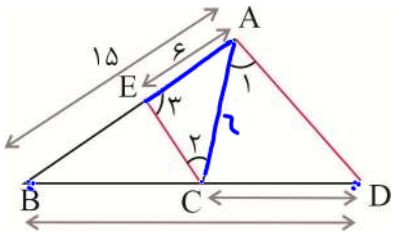
۳) ۳

۴) -۵

$\frac{۲x+۱۰}{x+۵}=\frac{۳x+۱}{x+۴}$

$\frac{۲(۷)+۱۰=۲۴}{۷+۵=۱۲}=۲=\frac{۲۲}{۱۱}$

تمرین: در شکل مقابل $\hat{۳}=\hat{۲}=\hat{۱}$ اگر $AB=۱۵$ و $AC=۶$ ، حاصل $\frac{CD}{BD}$ کدام است؟



۱) $\frac{۳}{۵}$

۲) $\frac{۲}{۵}$ ✓

۳) $\frac{۱}{۲}$

۴) $\frac{۱}{۳}$

CE || AD

$\frac{CD}{BD}=\frac{AE=۶}{AB=۱۵}=\frac{۲}{۵}$

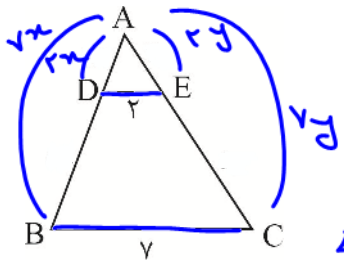
تمرین: در شکل مقابل پاره‌خط DE موازی قاعده BC است. اگر محیط مثلث کوچک‌تر برابر ۱۰ باشد، محیط مثلث کوچک‌تر برابر ۱۰ باشد، محیط مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ کدام است؟

۱) ۳۲

۲) ۳۰

۳) ۴۰

۴) ۳۵ ✓



$\frac{DE}{BC} = \frac{۲}{۷}$

$\overset{\Delta}{ADE}$ محیط $= ۲x + ۲y + ۲ = ۱۰ \rightarrow x + y + ۱ = ۵$

$\overset{\Delta}{ABC}$ محیط $= ۷x + ۷y + ۷ = ۷(x + y + ۱) = ۳۵$

داستان لاله و لادن: دو مثلث از یک ضلع به هم چسبیده‌اند و در هر کدام از آن‌ها خطی موازی قاعده داریم. هر نسبتی روی یکی از مساحت‌های مثلث برقرار باشد، آن نسبت روی همه ساق‌ها برقرار است. در این مسئله‌ها اول از مثلثی شروع می‌کنیم که مجهولات کم‌تری دارد.

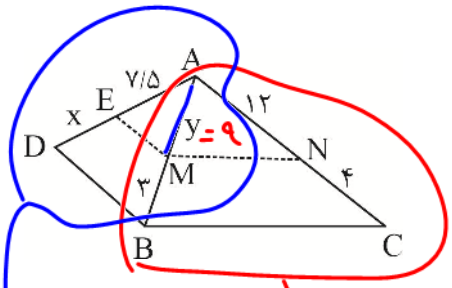
تمرین: در شکل مقابل $MN \parallel BC$ و $EM \parallel DB$ ، حاصل $x + y$ کدام است؟

۱) ۱۲/۵

۲) ۱۰/۵

۳) ۱۲

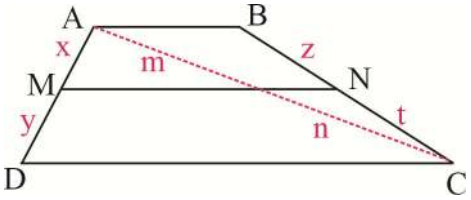
۴) ۱۱/۵ ✓



$\frac{۱۲}{۴} = \frac{۷/۵}{۲}$ $\quad y = \frac{۳(۱۲)}{۴} = ۹$

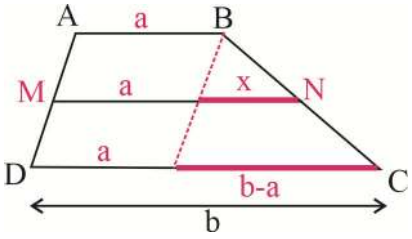
$\frac{۹}{۳} = \frac{۷/۵}{x}$ $\quad x = \frac{۳(۷/۵)}{۹} = ۲/۵$

نکته: در ذوزنقه خطی که موازی قاعده‌ها رسم می‌شود و دو ساق را قطع می‌کند، روی آن‌ها نسبت‌های مساوی پدید می‌آورد. (کافی است یکی از قطرها را بکشید.)



$$\begin{cases} \overset{\Delta}{ADC} \\ \frac{x}{y}=\frac{m}{n} \end{cases} \Rightarrow \frac{x}{y}=\frac{m}{n}=\frac{z}{t} \qquad \boxed{\frac{x}{y}=\frac{z}{t}}$$

$$\begin{cases} \overset{\Delta}{CAB} \\ \frac{m}{n}=\frac{z}{t} \end{cases}$$



$$\frac{x}{b-a}=\frac{AM}{MD}$$

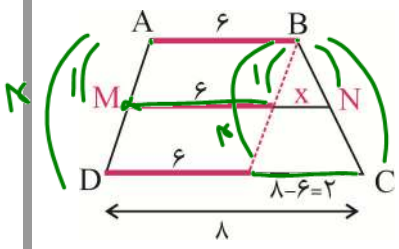
تمرین: در ذوزنقه $ABCD$ داریم: $\frac{AM}{AD}=\frac{1}{4}$ و پاره‌خط MN موازی قاعده‌هاست. اگر قاعده‌ها ۶ و ۸ باشند، اندازه MN کدام است؟

۱) ۵/۵

۲) ۶/۵ ✓

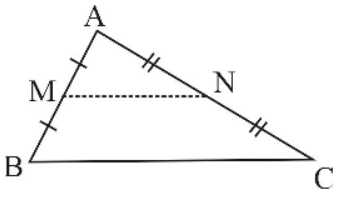
۳) ۷/۵

۴) ۷



$\frac{x}{2}=\frac{1}{4} \quad x=0.5$

نکته: طبق تالس خطی که اوساط دو ضلع مثلث را به هم وصل می‌کند، موازی ضلع سوم و نصف آن است.



$$\left.\begin{matrix} AM=MB \\ AN=NC \end{matrix}\right\} \Rightarrow MN=\frac{1}{2}BC \ , \ MN \parallel BC$$

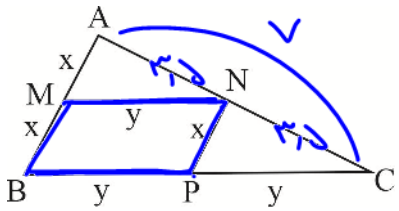
تمرین: در شکل مقابل M وسط AB از $\overset{\Delta}{ABC}$ است. اگر $AC = ۷$ باشد و محیط متوازی‌الاضلاع MNPB برابر ۱۳ باشد، محیط مثلث ABC کدام است؟

۱) ۱۳/۵

۲) ۲۰

۳) ۲۱

۴) ۲۰/۵



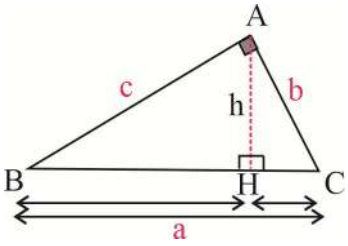
$$۲(x+y)=۱۳$$

$$P_{\overset{\Delta}{ABC}} = ۲x+۷+۲y = ۷+۲(x+y) = ۷+۲\left(\frac{۱۳}{۲}\right) = ۲۰$$

روابط خطی در مثلث قائم‌الزاویه:

$$S = \frac{h.BC}{۲} = \frac{b.c}{۲} \longrightarrow h.BC = b.c$$

۴ چیز مهم در مثلث قائم‌الزاویه:



۱) $a^۲ = b^۲ + c^۲$

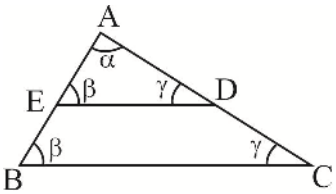
۲) $ah = b.c$

۳) $\begin{cases} b^۲ = a.CH \Rightarrow CH = \dfrac{b^۲}{a} \\ c^۲ = a.BH \Rightarrow BH = \dfrac{c^۲}{a} \end{cases}$

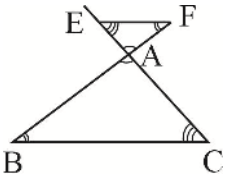
۴) $h^۲ = BH.CH$

تشابه دو مثلث:

زوایای برابر و اضلاع متناسب



$\overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{AED}$



$\overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{AEF}$

حالات تشابه:

الف) برابری ۲ زاویه از ۲ مثلث

ب) تناسب ۲ ضلع و برابری زاویه بین آن‌ها

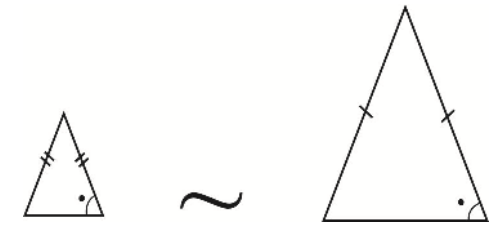
ج) تناسب ۳ ضلع از ۲ مثلث

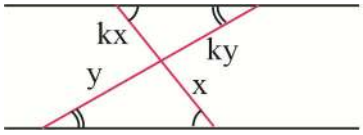
$$\frac{\text{مثلث بزرگ}}{\text{مثلث کوچک}}: \frac{BC}{DE}=\frac{AC}{AD}=\frac{AB}{AE}$$

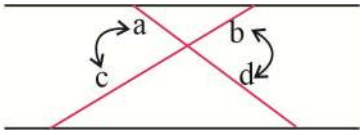
α روبه β روبه γ روبه

نکته:

- ✓ دو مثلث قائم‌الزاویه با یک زاویه حاده برابر متشابه‌اند.
- ✓ دو مثلث متساوی‌الساقین با زاویه رأس برابر متشابه‌اند.
- ✓ دو مثلث متساوی‌آلساقین با یک زاویه مجاور به قاعده برابر متشابه‌اند.
- ✓ هر دو مثلث متساوی‌الاضلاع دلخواه متشابه‌اند.





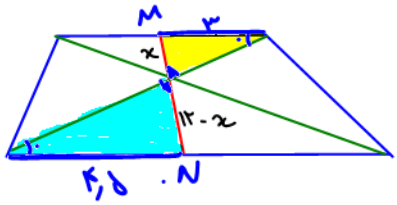


$$ac=b.d$$

$$\frac{a}{d}=\frac{b}{c}$$

تمرین: اندازه دو قاعده یک ذوزنقه ۶ و ۹ است. طول پاره‌خطی که اوساط دو قاعده را به هم وصل می‌کند، ۱۲ واحد است. فاصله نقطه تلاقی دو قطر از وسط قاعده کوچک‌تر چه‌قدر است؟ (ریاضی داخل ۸۵)

۱) ۳/۶ ۲) ۴/۳ ۳) ۴/۸ ۴) ۵/۴

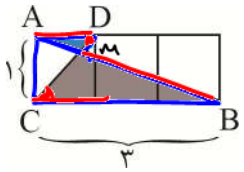


$$\frac{3}{4.5}=\frac{x}{12-x}$$

$$36-3x=4.5x$$

$$36=7.5x \rightarrow x=\frac{36}{7.5}=\frac{36}{\frac{15}{2}}=\frac{72}{15}=\frac{24}{5}=4.8$$

تمرین: در شکل مقابل مربع‌ها به ضلع واحد هستند. AM چند برابر $\sqrt{10}$ است؟



۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{2}{9}$ ۴) $\frac{1}{5}$

$$AB=\sqrt{9+1}=\sqrt{10}$$

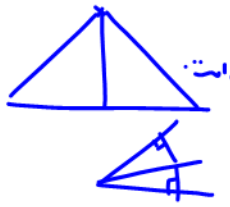
$$\frac{AD=1}{BC=3}=\frac{AM}{BM}$$

$$\frac{1}{3+1}=\frac{AM}{AM+BM=\sqrt{10}} \quad AM=\frac{1}{4}\sqrt{10}$$

ترسیم

Homework

جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.



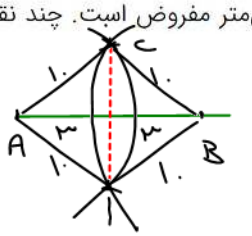
۱ فاصله هر نقطه داخل دایره از مرکز دایره کمتر از شعاع است.

۲ هر نقطه که روی عمود منصف یک پاره‌خط باشد از دو سر پاره‌خط به یک اندازه است.

۳ هر نقطه روی نیمساز یک زاویه به ضلع‌های زاویه برابر است. فاصله‌اش تا دو ضلع زاویه برابر است.

۴ مجموعهٔ نقاطی که از یک نقطه ثابت به فاصله r باشد دایره نامیده می‌شود.

۵ پاره‌خط AB به طول ۶ سانتی‌متر مفروض است. چند نقطه روی عمودمنصف AB می‌توان یافت که فاصلهٔ آن از نقاط A و B برابر ۱۰ سانتی‌متر باشد؟



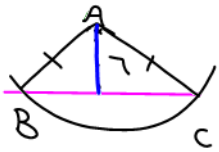
۱) ۱

۲) ۲

۳) ۴

۴) نقطه‌ای یافت نمی‌شود.

۶ فرض کنید نقطهٔ A به فاصلهٔ ۶ سانتی‌متری از خط d باشد، روش رسم مثلث متساوی‌الساقین که A یک رأس آن و قاعده بر خط d منطبق باشد، توضیح دهید (شکل ترسیم شود).



جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید.

۷ از نقطهٔ دلخواه P در صفحه به تعداد بی‌شمار خط راست می‌توان رسم نمود.

۸ هر نقطه که از دو سر پاره‌خط به فاصلهٔ یکسان باشد روی عمودمنصف آن پاره‌خط قرار دارد.

۹ برخی نتایج مهم و پرکاربرد که با استدلال استنتاجی به دست می‌آیند قضیه نامیده می‌شوند.

۱۰ اگر فرض و حکم یک قضیه را جابه‌جا کنیم، آن‌چه حاصل می‌شود عکس قضیه است.

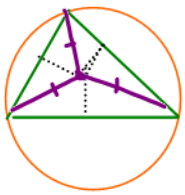
۱۱ مثلثی را داخل یک دایره طوری رسم کرده‌ایم که رئوس مثلث، روی محیط دایره قرار گیرند. مرکز این دایره چگونه مشخص می‌شود؟

۱) محل برخورد ارتفاع‌های مثلث است.

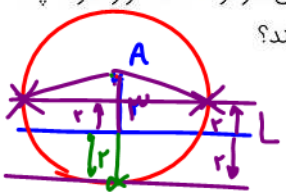
۲) محل برخورد نیمسازهای مثلث است.

۳) محل برخورد عمودمنصف‌های مثلث است. ✓

۴) محل برخورد میانه‌های مثلث است.

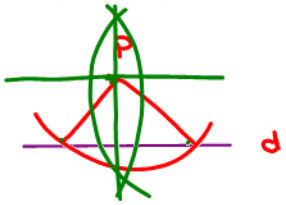


۱۲ نقطه A به فاصله ۳ سانتی‌متر از خط L قرار دارد. چند نقطه در صفحه وجود دارد که از نقطه A به فاصله ۵ سانتی‌متر و از خط L به فاصله ۲ سانتی‌متر باشند؟



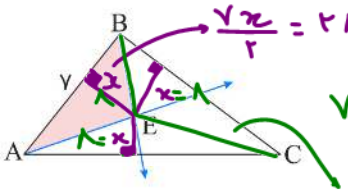
۱) صفر
۲) یک
۳) دو
۴) سه

۱۳ خط d و نقطهٔ P خارج از آن را داریم. برای رسم خطی که از نقطهٔ P بگذرد و با d موازی باشد، در مجموع چند کمان باید رسم کنیم؟



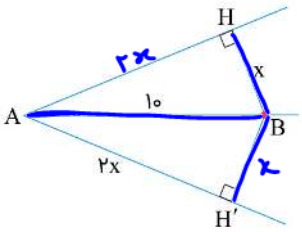
۱) ۲
۲) ۴
۳) ۶
۴) ۳

۱۴ در شکل زیر، E محل برخورد نیمسازهای زاویه‌های داخلی زوایای A و B است. اگر مساحت قسمت رنگی ۲۸ و محیط مثلث ABC، برابر ۲۵ باشد، مساحت قسمت سفیدرنگ کدام است؟



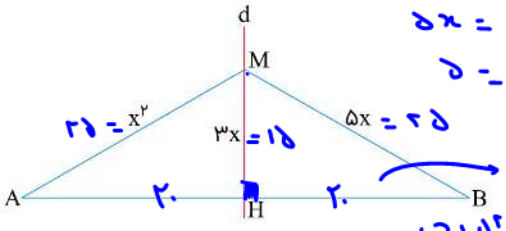
۱) ۶۴
۲) ۳۶
۳) ۷۲
۴) اطلاعات مسئله کافی نیست.

۱۵ در شکل زیر، نقطهٔ B روی نیمساز زاویهٔ A قرار دارد. محیط چهار ضلعی $AHBH'$ کدام است؟



۱) $12\sqrt{5}$
۲) $8\sqrt{5}$
۳) $\sqrt{20}$
۴) $3\sqrt{20}$

۱۶ خط d، عمودمنصف AB می‌باشد. باتوجه‌به شکل، طول پاره‌خط AB کدام است؟



۱) ۲۰
۲) ۳۰
۳) ۴۰
۴) ۵۵

۱۷ اگر $x-11$، $x-7$ و $2x$ طول اضلاع یک مثلث باشند، برای x چند مقدار صحیح یافت می‌شود؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) هیچ‌مقدار

پاسخ Homework

۱ کمتر از شعاع است.

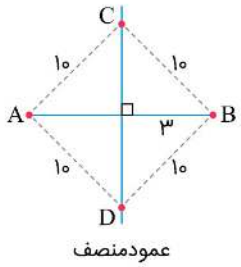
۲ دو سر پاره‌خط به یک فاصله است.

۳ از دو ضلع زاویه به یک فاصله است.

۴ دایره

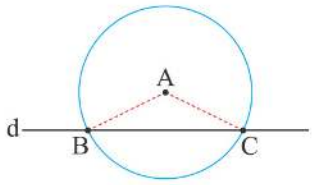
۵ **گزینه ۲**

باتوجه‌به تعریف عمودمنصف، ۲ نقطهٔ C و D را می‌توان یافت:



عمودمنصف

۶ کافی است دایره‌ای به مرکز A و به شعاع بیش از ۶ سانتی‌متر رسم کنیم و نقاط برخورد این دایره با خط d را B و C بنامیم. در این صورت $\overset{\Delta}{ABC}$، جواب مسئله است.



۷ بی‌شمار

۸ عمودمنصف

۹ قضیه

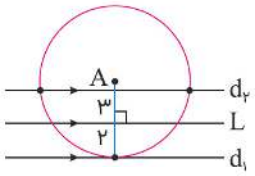
۱۰ عکس قضیه

۱۱ **گزینه ۳**

محل برخورد عمودمنصف‌های مثلث، همان مرکز دایره است.

۱۲ **گزینه ۴**

دو خط d_1 و d_2 در فاصلهٔ ۲ سانتی‌متر از خط L قرار گرفته‌اند، بنابراین سه نقطه با شرایط موردنظر وجود دارد:

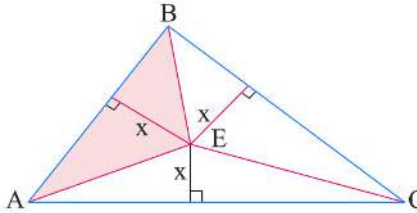


۱۳ **گزینه ۳**

ابتدا باید خط d_1 را به‌گونه‌ای رسم کنیم که از نقطه P بگذرد و بر d عمود باشد. برای این منظور سه کمان باید رسم کنیم.
سپس خط d_2 را به‌گونه‌ای رسم می‌کنیم که از P گذشته و بر d_1 عمود باشد. برای این منظور نیز باید سه کمان رسم کنیم.
بنابراین در مجموع شش کمان باید رسم کنیم.

۱۴ **گزینه ۳**

می‌دانیم فاصله هر نقطه روی نیمساز یک زاویه، از دو ضلع آن زاویه به یک اندازه است، پس:



$$S_{\triangle ABE} = ۲۸ \Rightarrow \frac{۷ \times x}{۲} = ۲۸ \Rightarrow x = ۸ \quad (۱)$$

$$۷ + BC + AC = ۲۵ \Rightarrow BC + AC = ۱۸ \quad (۲)$$

$$S_{\text{سفید}} = S_{\triangle BCE} + S_{\triangle ACE} = \frac{BC \times x}{۲} + \frac{AC \times x}{۲} = \frac{x}{۲}(BC + AC)$$

$$\xrightarrow{(۱)\ ,\ (۲)} S_{\text{سفید}} = ۴ \times ۱۸ = ۷۲$$

۱۵ گزینه ۱

$$BH = BH' = x$$

$$AB^{۲} = BH'^{۲} + AH'^{۲}$$

$$۱۰۰ = x^{۲} + ۴x^{۲} \Rightarrow x^{۲} = ۲۰ \Rightarrow x = ۲\sqrt{۵}$$

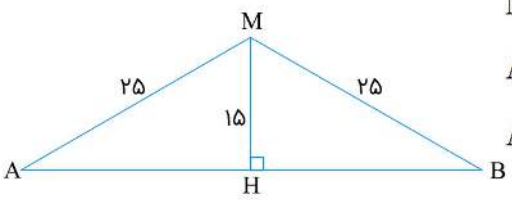
$$AH' = AH = ۲x = ۴\sqrt{۵}$$

$$\text{محیط} = ۴\sqrt{۵} + ۴\sqrt{۵} + ۲\sqrt{۵} + ۲\sqrt{۵} = ۱۲\sqrt{۵}$$

۱۶ گزینه ۳

بنا به خاصیت عمودمنصف: $MA = MB$

$$x^{۲} = ۵x \Rightarrow x^{۲} - ۵x = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۰ & \text{ع.ق.ق} \\ x = ۵ \end{cases}$$



$$MA^{۲} = MH^{۲} + AH^{۲} \Rightarrow ۶۲۵ = ۲۲۵ + AH^{۲}$$

$$AH^{۲} = ۴۰۰ \Rightarrow AH = ۲۰$$

$$AB = ۲AH = ۴۰$$

۱۷ گزینه ۴

طول اضلاع باید مثبت باشند و همچنین در نامساوی مثلثی صدق کنند.

$$\begin{cases} ۱۱ - x > ۰ \Rightarrow x < ۱۱ \\ x - ۷ > ۰ \Rightarrow x > ۷ \\ ۲x > ۰ \Rightarrow x > ۰ \end{cases} \xrightarrow{\cap} ۷ < x < ۱۱ \quad (۱)$$

$$\begin{cases} ۱۱ - x + x - ۷ > ۲x \Rightarrow x < ۲ \\ ۱۱ - x + ۲x > x - ۷ \Rightarrow ۱۱ > -۷ \\ x - ۷ + ۲x > ۱۱ - x \Rightarrow x > \frac{۹}{۲} \end{cases} \xrightarrow{\cap} \varnothing \quad (۲)$$

$$(۱), (۲) \xrightarrow{\cap} \varnothing$$

تالس

Homework (1)

۱ برای اثبات کدام مورد زیر، از برهان خلف استفاده نمی‌شود؟

۱) اگر $n^۲$ عددی فرد باشد، n نیز عددی فرد است.

۲) عکس قضیه تالس

۳) از یک نقطه غیرواقع بر یک خط، فقط یک خط عمود بر آن خط می‌توان رسم کرد.

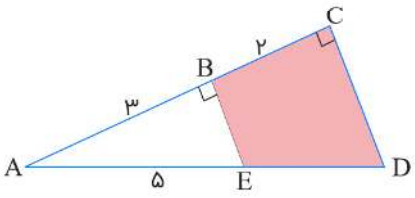
۴) اگر n مضرب ۳ باشد، $n^۳$ نیز مضرب ۳ است.

۲ اگر $\frac{۲a+۴}{۵b+۲} = \frac{۲a+۶}{۵b+۳}$ باشد، حاصل $\frac{a}{b}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۵}$ ۲) ۵

۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) ۳

۳ در شکل زیر، مساحت قسمت رنگی کدام است؟



۱) ۱۰

۲) ۱۶

۳) $\frac{۳۲}{۳}$

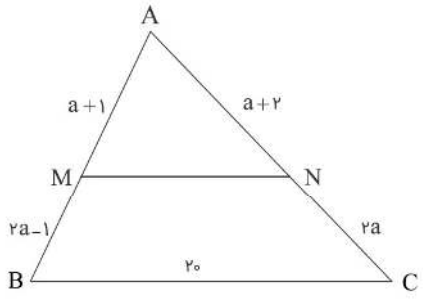
۴) $\frac{۳۱}{۳}$

۴ در مثلث به طول اضلاع ۵، ۱۲ و ۱۳، فاصله محل برخورد ارتفاع‌ها از محل برخورد عمود منصف‌ها کدام است؟

۱) ۶/۵ ۲) ۵

۳) ۶ ۴) ۵/۵

۵ در شکل زیر، محیط چهارضلعی $MNCB$ کدام است؟(MN موازی BC است.) $(BC = ۲۰)$



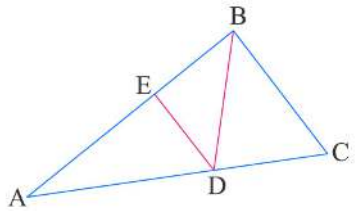
۱) ۳۲

۲) ۳۵

۳) ۳۷

۴) ۳۹

۶ در شکل زیر $ED||BC$، BD نیمساز زاویهٔ B، $BC = ۴$ و $BE = x$ می‌باشد. مقدار AB کدام است؟



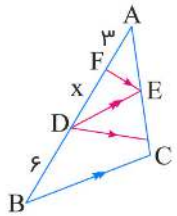
۱) $۲x$

۲) $\frac{۲x}{x-۱}$

۳) $\frac{۴x}{۴-x}$

۴) $\frac{۴x}{۱-x}$

۷ در شکل زیر، مقدار x کدام است؟



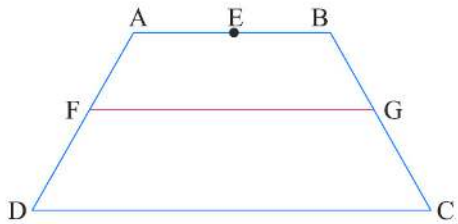
۱) ۲

۲) ۳

۳) ۴

۴) ۵

۸ در ذوزنقهٔ شکل زیر، E وسط AB، F وسط AD و G وسط BC می‌باشد. مساحت مثلث EFG چندبرابر مساحت ذوزنقهٔ $ABCD$ است؟



۱) $\frac{۳}{۱۶}$

۲) $\frac{۱}{۴}$

۳) $\frac{۳}{۴}$

۴) $\frac{۱}{۶}$

پاسخ Homework (1)

۱ گزینه ۴

$$n = ۳k \Rightarrow n^۳ = (۳k)^۳ = ۳(\underbrace{۹k^۳}_{k'}) = ۳k'$$

۲ گزینه ۲

$$(۲a + ۶)(۵b + ۲) = (۲a + ۴)(۵b + ۳)$$
$$\Rightarrow ۱۰ab + ۴a + ۳۰b + ۱۲ = ۱۰ab + ۶a + ۲۰b + ۱۲$$
$$\Rightarrow -۲a = -۱۰b$$
$$\frac{a}{b} = \frac{۱۰}{۲} \Rightarrow \frac{a}{b} = ۵$$

۳ گزینه ۳

$$BE^۲ = AE^۲ - AB^۲ \Rightarrow BE = ۴$$

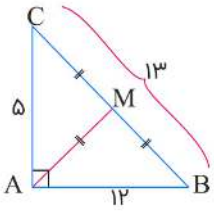
$$\left.\begin{matrix} BE \perp AC \\ CD \perp AC \end{matrix}\right\} \Rightarrow BE \| CD \xrightarrow{\text{قضیهٔ تالس}} \frac{BE}{CD} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{۴}{CD} = \frac{۳}{۵}$$

$$\Rightarrow CD = \frac{۲۰}{۳}$$

$$S_{\text{رنگی}} = S_{\text{کل}} - S_{\text{سفید}} = \frac{۵ \times \frac{۲۰}{۳}}{۲} - \frac{۳ \times ۴}{۲} = \frac{۵۰}{۳} - ۶ = \frac{۳۲}{۳}$$

۴ گزینه ۱

طول اضلاع در رابطه فیثاغورس صدق می‌کنند: $۱۳^۲ = ۱۲^۲ + ۵^۲$



بنابراین مثلث موردنظر قائم‌الزاویه می‌باشد. اما می‌دانیم در هر مثلث قائم‌الزاویه:

۱) محل برخورد ارتفاع‌ها روی رأس زاویه قائمه قرار دارد.

۲) محل برخورد عمود منصف‌ها در وسط وتر قرار دارد.

بنابراین باید طول AM را بیابیم اما می‌دانیم در هر مثلث قائم‌الزاویه، میانه وارد بر وتر نصف وتر است، پس:

$$AM = ۱۳ \div ۲ = ۶/۵$$

۵ گزینه ۳

بنا به قضیهٔ تالس داریم (MN موازی BC):

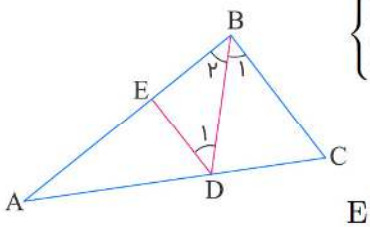
$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

$$\underbrace{\frac{a+۱}{۳a} = \frac{a+۲}{۳a+۲}} = \frac{x}{۲۰}$$

$$۳a^۲ + ۳a + ۲a + ۲ = ۳a^۲ + ۶a \Rightarrow a = ۲ \Rightarrow \frac{a+۱}{۳a} = \frac{x}{۲۰} \Rightarrow \frac{۳}{۶} = \frac{x}{۲۰} \Rightarrow x = ۱۰$$

محیط $MNCB$: $۱۰ + ۴ + ۲۰ + ۳ = ۳۷$

۶ گزینه ۳



$$\begin{cases} ED||BC \text{ , مورب } BD \Rightarrow \hat{B}_۱ = \hat{D}_۱ \\ \hat{B} \text{ نیمساز } BD \Rightarrow \hat{B}_۱ = \hat{B}_۲ \end{cases} \Rightarrow \hat{B}_۲ = \hat{D}_۱$$

درنتیجه مثلث BDE متساوی‌الساقین است و $ED = BE = x$.

$$ED||BC \xrightarrow{\text{تعمیم قضیهٔ تالس}} \frac{AE}{AB} = \frac{ED}{BC}$$

$$\xrightarrow{\text{تفضیل در صورت}} \frac{AB - AE}{AB} = \frac{BC - ED}{BC} \Rightarrow \frac{BE}{AB} = \frac{۴ - BE}{۴}$$

$$\Rightarrow AB = \frac{۴BE}{۴ - BE} \Rightarrow AB = \frac{۴x}{۴ - x}$$

۷ گزینه ۲

$$\left.\begin{array}{l} FE||DC \xrightarrow{\text{تعمیم قضیه تالس}} \frac{۳}{۳ + x} = \frac{AE}{AC} \\ DE||BC \xrightarrow{\text{تعمیم قضیه تالس}} \frac{۳ + x}{۹ + x} = \frac{AE}{AC} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{۳}{۳ + x} = \frac{۳ + x}{۹ + x}$$

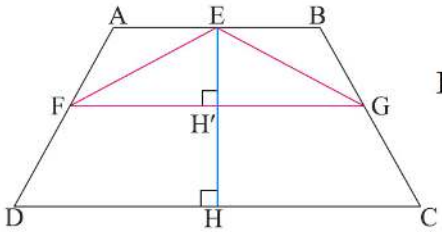
$$\Rightarrow (۳ + x)^۲ = ۳(۹ + x) \Rightarrow x^۲ + ۶x + ۹ = ۳x + ۲۷$$

$$\Rightarrow x^۲ + ۳x - ۱۸ = ۰ \Rightarrow (x + ۶)(x - ۳) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = -۶ (\text{غ ق ق}) \\ x = ۳ \end{cases}$$

(طول ضلع نمی‌تواند منفی باشد)

۸ گزینه ۲

نکته: در ذوزنقهٔ $ABCD$، اگر F و G وسط اضلاع AD و BC باشد، داریم:



$$FG = \frac{AB + CD}{۲} \text{ , } EH' = \frac{۱}{۲}EH$$

بنابراین:

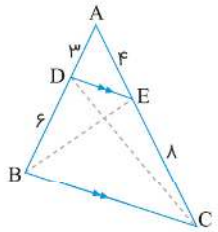
$$S_{EFG} = \frac{۱}{۲}FG \times EH' = \frac{۱}{۲}(\frac{AB + CD}{۲}) \times \frac{۱}{۲}EH = \frac{۱}{۸}(AB + CD)EH$$

$$S_{ABCD} = \frac{۱}{۲}(AB + CD)EH$$

$$\Rightarrow \frac{S_{EFG}}{S_{ABCD}} = \frac{۱}{۴}$$

Homework (2)

۱ در شکل زیر، نسبت مساحت مثلث CDE به مساحت مثلث BDE کدام است؟



۱) $\frac{۱}{۲}$

۲) $\frac{۲}{۳}$

۳) $\frac{۳}{۴}$

۴) ۱

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

۲ در یک ذوزنقه، خطی که وسط ساق‌ها را به هم وصل کند، مساحت آن را به نسبت ۳ به ۵ تقسیم می‌کند. نسبت قاعده‌های ذوزنقه کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$

۲) $\frac{۱}{۳}$

۳) $\frac{۲}{۵}$

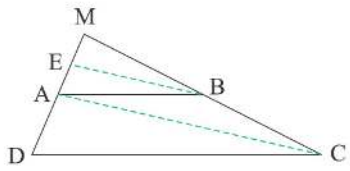
۴) $\frac{۳}{۵}$

علوی علوم تجربی دهم آزمون شماره ۸ ۱۴۰۱

علوی ریاضی و فیزیک دهم آزمون شماره ۸ ۱۴۰۱

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۸

۳ در ذوزنقهٔ $ABCD$، پاره‌خط BE موازی قطر AC است. اگر $AD = ۷$ و $AE = ۳$ باشد، فاصلهٔ MD کدام است؟



۱) ۱۲

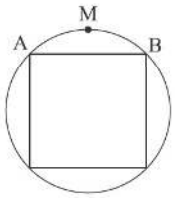
۲) ۱۲/۲۵

۳) ۱۲/۵

۴) ۱۲/۷۵

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۳

۴ در شکل زیر، ضلع مربع برابر ۲ واحد است. فاصلهٔ وسط کمان AB از نزدیک‌ترین رأس مربع چقدر است؟



۱) $\sqrt{۲-\sqrt{۲}}$

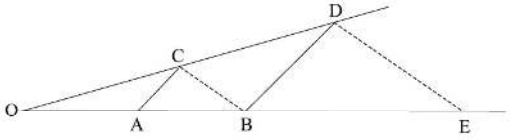
۲) $\sqrt{۴-۲\sqrt{۲}}$

۳) $\sqrt{۲}$

۴) $\sqrt{۱+\sqrt{۲}}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۱

۵ در شکل زیر، دو جفت پاره‌خط موازی‌اند. $OA = ۳$ و $AB = ۵$، اندازهٔ BE، کدام است؟



۱) $۱۳\frac{۱}{۳}$

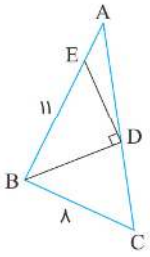
۲) $۱۲\frac{۲}{۳}$

۳) $۱۱\frac{۱}{۳}$

۴) $۱۰\frac{۲}{۳}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۴

۶ در شکل زیر، BD نیمساز است. اگر در مثلث BDE ارتفاع وارد بر ضلع BE موازی BC باشد، طول AE کدام است؟



۱) ۶/۶

۲) ۵/۴

۳) ۳/۶

۴) ۲/۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

۷ کدام عدد کلیت حکم "هر عدد طبیعی را می‌توان به‌صورت مجموع چند عدد متوالی نوشت" را نقض می‌کند؟

۱) ۵۶

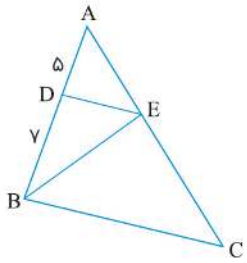
۲) ۶۴

۳) ۷۲

۴) ۷۴

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۲

۸ در مثلث ABC، ضلع BC موازی ضلع DE است. مساحت مثلث BCE، چند برابر مساحت مثلث BDE است؟



۱) ۱/۵

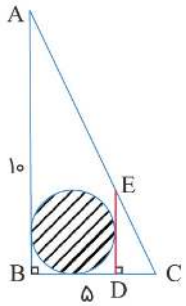
۲) ۱/۷

۳) ۲/۱

۴) ۲/۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

۹ اگر اندازهٔ اضلاع قائمهٔ مثلث ABC، ۵ و ۱۰ باشد، مساحت ناحیهٔ هاشورخورده، کدام است؟ (طول پاره‌خط DE برابر با قطر دایره است) (با تغییر)



۱) $\frac{۲۵}{۹}\pi$

۲) $\frac{۱۶}{۹}\pi$

۳) $\frac{۹}{۴}\pi$

۴) $\frac{۵}{۴}\pi$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۲

پاسخ Homework (2)

۱ گزینه ۴

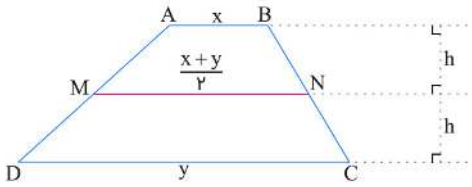
قاعدهٔ هر دو مثلث DE است و ارتفاع هر دو یکسان است، پس مساحت‌های برابر دارند.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

۲ گزینه ۲

می‌دانیم در ذوزنقه طول خط واصل وسط‌های دو ساق، میانگین دو قاعده است.

باتوجه‌به شکل و فرض سؤال، داریم:



$$\frac{S_{ABNM}}{S_{MNCD}} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{\frac{1}{2}(x + \frac{x+y}{2})(h)}{\frac{1}{2}(\frac{x+y}{2} + y)(h)} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{\frac{3x+y}{2}}{\frac{x+3y}{2}} = \frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{3x+y}{x+3y} = \frac{3}{5} \Rightarrow 15x + 5y = 3x + 9y \Rightarrow 12x = 4y \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{1}{3}$$

علوی علوم تجربی دهم آزمون شماره ۸ ۱۴۰۱

علوی ریاضی و فیزیک دهم آزمون شماره ۸ ۱۴۰۱

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۸

۳ گزینه ۲

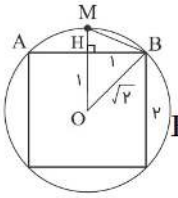
طبق قضیهٔ تالس می‌توان نوشت $(ME = x)$:

$$\left.\begin{array}{l} BE||AC \Rightarrow \dfrac{ME}{AE} = \dfrac{MB}{BC} \\ AB||DC \Rightarrow \dfrac{MA}{AD} = \dfrac{MB}{BC} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{ME}{AE} = \frac{MA}{AD} \Rightarrow \frac{x}{۳} = \frac{x+۳}{۷} \Rightarrow x = ۲/۲۵$$

$$\Rightarrow MD = ME + AE + AD = ۲/۲۵ + ۳ + ۷ = ۱۲/۲۵$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۳

۴ گزینه ۲



هدف محاسبهٔ اندازهٔ MB است. در مثلث قائم‌الزاویهٔ $\overset{\triangle}{MHB}$ داریم:

$$HB = ۱\ ,\ \ MH = OM - OH$$

برای محاسبهٔ MH، ابتدا لازم است با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس شعاع دایره را به‌دست آوریم:

$$OB = \sqrt{۱^۲ + ۱^۲} = \sqrt{۲} \ \Rightarrow\ OM = OB = \sqrt{۲} \ \Rightarrow\ MH = \sqrt{۲} - ۱$$

اکنون با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس اندازهٔ MB را محاسبه می‌کنیم:

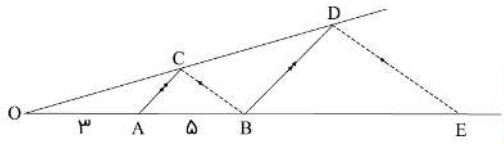
$$MB^۲ = MH^۲ + HB^۲ \ \Rightarrow\ MB^۲ = (\sqrt{۲} - ۱)^۲ + ۱^۲ = ۲ - ۲\sqrt{۲} + ۱ + ۱ = ۴ - ۲\sqrt{۲}$$

$$\Rightarrow MB = \sqrt{۴ - ۲\sqrt{۲}}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۱

۵ گزینه ۱

باتوجه‌به شکل و با کمک قضیهٔ تالس داریم:



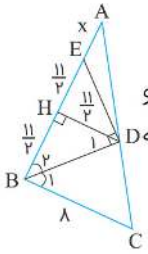
$$\begin{cases} AC||BD \Rightarrow \dfrac{OA}{AB}=\dfrac{OC}{CD} \\ BC||DE \Rightarrow \dfrac{OB}{BE}=\dfrac{OC}{CD} \end{cases}$$

طرف راست تساوی‌ها باهم برابر است پس طرف چپ آن نیز باهم برابر است.

$$\Rightarrow \frac{OA}{AB}=\frac{OB}{BE} \Rightarrow \frac{۳}{۵}=\frac{۸}{BE} \Rightarrow BE=\frac{۴۰}{۳}=۱۳\frac{۱}{۳}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۴

۶ گزینه ۱



عمود DH را رسم می‌کنیم. چون $DH||BC$ و همچنین BD نیمساز زاویه B است بنابراین $\hat{B}=۹۰^\circ$ و درنتیجه $\hat{B}_۱=\hat{B}_۲=۴۵^\circ$ خواهد بود، پس DH ارتفاع و میانه وارد بر وتر است و درنتیجه

$$DH=BH=EH=\frac{۱۱}{۲}$$

اکنون قضیه تالس را در مثلث ABC اعمال می‌کنیم.

$$\frac{\frac{۱۱}{۲}}{۸}=\frac{x+\frac{۱۱}{۲}}{x+۱۱} \Rightarrow \frac{۱۱}{۸}=\frac{۲x+۱۱}{x+۱۱} \Rightarrow ۱۱x+۱۲۱=۱۶x+۸۸$$

$$\Rightarrow ۵x=۳۳ \Rightarrow x=۶/۶$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

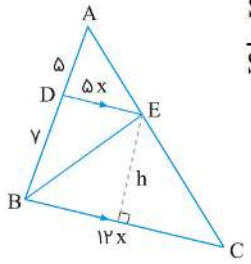
۷ گزینه ۲

نکته:عدد طبیعی را نمی‌توان به‌صورت مجموع چند عدد متوالی نوشت هرگاه آن عدد، یکی از توان‌های طبیعی عدد ۲ باشد.

در بین اعداد داده‌شده تنها ۶۴ دارای این ویژگی است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۲

۸ گزینه ۴

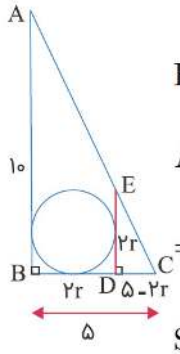


$$\frac{S_{\triangle BCE}}{S_{\triangle BDE}} = \frac{\frac{۱}{۲} \times h \times BC}{\frac{۱}{۲} \times h \times DE} = \frac{BC}{DE} = \frac{۱۲x}{۵x} = \frac{۱۲}{۵} = ۲/۴$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۱

۹ گزینه ۱

طول شعاع دایره را r می‌نامیم. پس $DE = ۲r$ و داریم:



$$BD = ۲r \xrightarrow{BC=۵} DC = ۵ - ۲r$$

$$\overset{\triangle}{ABC} : DE||BA \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{DE}{BA} = \frac{CD}{CB} \Rightarrow \frac{۲r}{۱۰} = \frac{۵ - ۲r}{۵}$$

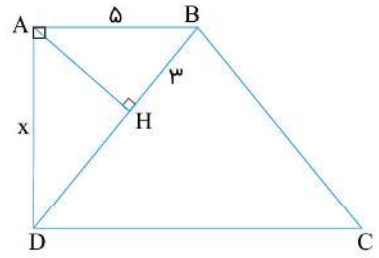
$$\Rightarrow \frac{r}{۵} = \frac{۵ - ۲r}{۵} \Rightarrow r = ۵ - ۲r \Rightarrow ۳r = ۵ \Rightarrow r = \frac{۵}{۳}$$

$$S_{\text{دایره}} = \pi r^۲ = \pi(\frac{۵}{۳})^۲ = \frac{۲۵}{۹}\pi$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۲

تشابه

۱ در ذوزنقهٔ قائم‌الزاویهٔ زیر $(ABCD)$، مقدار x کدام است؟



۱) $\frac{۱۷}{۳}$

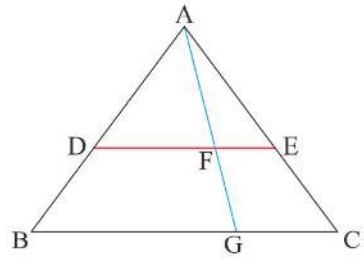
۲) $\frac{۲۰}{۳}$

۳) $\frac{۲۵}{۳}$

۴) $\frac{۱۶}{۳}$

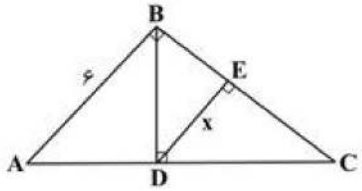
علوی علوم تجربی یازدهم آزمون شماره ۴ ۱۴۰۱

۲ در شکل زیر $DE||BC$ و $\frac{AF}{FG}=\frac{۳}{۲}$ می‌باشد. نسبت مساحت مثلث‌های ADE و ABC را به دست آورید.



علوی علوم تجربی یازدهم آزمون شماره ۵ ۱۴۰۰

۳ در شکل زیر، اندازه x کدام است؟ $(AC=۱۰)$



۱) ۳/۴۸

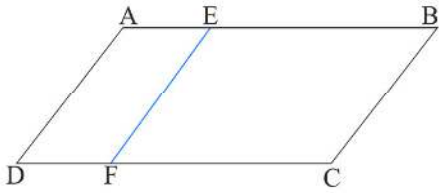
۲) ۲/۸۴

۳) ۳/۸۴

۴) ۲/۴۸

علوی علوم تجربی یازدهم آزمون شماره ۴ ۱۴۰۰

۴ در شکل زیر اگر متوازی‌الاضلاع‌های $ABCD$ و $AEFD$ متشابه باشند و $CD = ۸$ و $DF = ۲$، نسبت محیط $AEFD$ به محیط $ABCD$ کدام است؟



۱) $\frac{۱}{۴}$

۲) $\frac{۳}{۸}$

۳) $\frac{۱}{۲}$

۴) $\frac{۴}{۵}$

علوی علوم تجربی یازدهم آزمون شماره ۴ ۱۳۹۹

۵ در یک مثلث قائم‌الزاویه، اندازهٔ دو پاره‌خطی که ارتفاع وارد بر وتر، بر روی وتر ایجاد می‌کند ۲/۵ و ۱۴/۴ سانتی‌متر است. طول ارتفاع وارد بر وتر، چند سانتی‌متر است؟

۱) ۴/۸

۲) ۶

۳) ۷/۲

۴) ۸

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۱

۶ در یک مستطیل با ابعاد ۱ و ۲ واحد، از انتهای یک قطر، خطی بر آن قطر عمود می‌کنیم تا امتداد ضلع کوچک‌تر مستطیل را در M قطع کند. فاصلهٔ نقطهٔ M از سر دیگر این قطر چند واحد است؟

۱) ۴

۲) ۴/۵

۳) ۵

۴) ۶

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۰

۷ اندازهٔ اضلاع مثلث قائم‌الزاویه‌ای به‌صورت $x + ۱$، $۲x + ۱$ و $۲x + ۳$ است. مساحت مثلث، کدام است؟

۱) ۶۰

۲) ۵۶

۳) ۴۵

۴) ۳۹

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۹

۸ در یک ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین، قطر عمود بر ساق است. اگر اندازهٔ قاعدهٔ بزرگ‌تر و قطر آن به ترتیب ۱۰ و ۸ واحد باشند، اندازهٔ قاعدهٔ کوچک‌تر چند واحد است؟

۱) ۲/۸

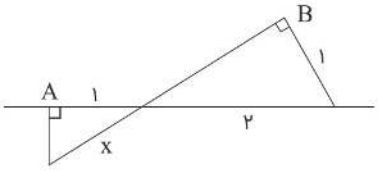
۲) ۳/۲

۳) ۳/۶

۴) ۴/۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۱

۹ در شکل زیر دو زاویهٔ $\hat{A}$ و $\hat{B}$ قائمه‌اند، مقدار x چقدر است؟



۱) $\frac{۱}{۲}\sqrt{۳}$

۲) $\frac{۲}{۳}\sqrt{۳}$

۳) $\frac{۴}{۳}$

۴) $\frac{۳}{۲}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۱

۱۰ درون مثلثی به اضلاع ۹ و ۷ و ۵ واحد، مثلث دیگر طوری رسم می‌کنیم که اضلاع آن موازی اضلاع مثلث اصلی باشد، اگر بزرگ‌ترین ضلع این مثلث ۶ واحد باشد، مساحت محدود به این دو مثلث، چند برابر مساحت مثلث کوچک‌تر است؟

۱) ۰/۷۵

۲) ۱

۳) ۱/۲۵

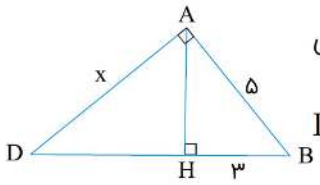
۴) ۱/۵

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

پاسخ Homework

۱ گزینه ۲

در مثلث قائم‌الزاویه $\overset{\Delta}{ABD}$ داریم:



$$\text{رابطهٔ طولی } AB^{۲} = BH \times BD \Rightarrow ۲۵ = ۳BD \Rightarrow BD = \frac{۲۵}{۳}$$

$$DH = BD - BH \Rightarrow DH = \frac{۲۵}{۳} - ۳ \Rightarrow DH = \frac{۱۶}{۳}$$

$$\text{رابطهٔ طولی } AD^{۲} = DH \times BD \Rightarrow x^{۲} = \frac{۱۶}{۳} \times \frac{۲۵}{۳} \Rightarrow x = \frac{۲۰}{۳}$$

علوی علوم تجربی یازدهم آزمون شماره ۴ ۱۴۰۱

۲

$$DE||BC \Rightarrow \frac{AD}{BD} = \frac{AF}{FG} = \frac{۳}{۲}$$

$$\xrightarrow{\text{ترکیب نسبت در مخرج}} \frac{AD}{\underbrace{AD+BD}_{AB}} = \frac{۳}{\underbrace{۳+۲}_{۵}}$$

$$DE||BC \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC} = \frac{۳}{۵} = K$$

$$\Rightarrow \underset{\text{(تناسب سه ضلع)}}{\overset{\Delta}{ADE} \sim \overset{\Delta}{ABC}} \Rightarrow \frac{S_{\overset{\Delta}{ADE}}}{S_{\overset{\Delta}{ABC}}} = K^{۲} = (\frac{۳}{۵})^{۲} = \frac{۹}{۲۵}$$

علوی علوم تجربی یازدهم آزمون شماره ۵ ۱۴۰۰

۳ گزینه ۳

با استفاده از قضیه فیثاغورس، در مثلث ABC اندازه ضلع BC برابر است با:

$$BC = \sqrt{۱۰^۲ - ۶^۲} = ۸$$

دو مثلث ABC و BDC متشابه‌اند، بنابراین:

$$AB \times BC = AC \times BD \Rightarrow BD = ۴/۸$$

در مثلث ADB، اندازه ضلع AD برابر است با:

$$AD = \sqrt{۶^۲ - (۴/۸)^۲} = ۳/۶ \Rightarrow DC = ۶/۴$$

هم‌چنین دو مثلث BDC و DEC متشابه‌اند، بنابراین:

$$BC \times x = BD \times DC \Rightarrow x = ۳/۸۴$$

علوی علوم تجربی یازدهم آزمون شماره ۴ ۱۴۰۰

۴ گزینه ۳

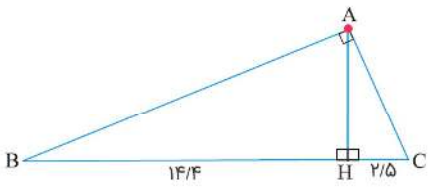
$$ABCD \sim AEFD \Rightarrow \frac{AD}{CD} = \frac{DF}{AD} \Rightarrow \frac{AD}{۸} = \frac{۲}{AD} \Rightarrow AD = ۴$$

$$\Rightarrow \text{نسبت تشابه} = \frac{AD}{CD} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{P_{AEFD}}{P_{ABCD}} = \frac{۱}{۲}$$

علوی علوم تجربی یازدهم آزمون شماره ۴ ۱۳۹۹

۵ گزینه ۲

طبق روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه، داریم:



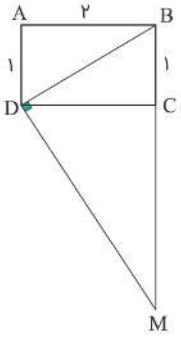
$$AH^۲ = BH.HC$$

$$\Rightarrow AH = \sqrt{BH.HC} = \sqrt{(۱۴/۴)(۲/۵)} = \sqrt{\frac{۱۴۴}{۱۰} \times \frac{۲۵}{۱۰}} = \frac{۱۲ \times ۵}{۱۰} = ۶$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۱

۶ گزینه ۳

راه‌حل اول: باتوجه‌به توضیحات صورت سؤال، شکلی ساده و دقیق رسم می‌کنیم:



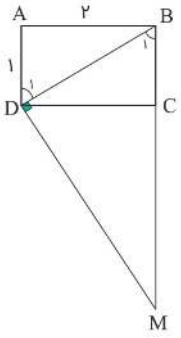
هدف محاسبهٔ MB است. BD قطر مستطیل است، با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس داریم:

$$BD^۲ = AB^۲ + AD^۲ = ۲^۲ + ۱^۲ = ۴ + ۱ = ۵ \Rightarrow BD = \sqrt{۵}$$

با استفاده از رابطه طولی در مثلث BDM داریم:

$$BD^۲ = MB.BC \Rightarrow (\sqrt{۵})^۲ = MB \times ۱ \Rightarrow MB = ۵$$

راه‌حل دوم:



هدف محاسبهٔ MB است. BD قطر مستطیل است، با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس داریم:

$$BD^۲ = AB^۲ + AD^۲ = ۲^۲ + ۱^۲ = ۴ + ۱ = ۵ \Rightarrow BD = \sqrt{۵}$$

دو مثلث قائم‌الزاویهٔ $\overset{\triangle}{BAD}$ و $\overset{\triangle}{BDM}$ متشابه هستند، زیرا:

$$\left.\begin{array}{l} \hat{A} = B\hat{D}M = ۹۰^\circ \\ AD||BC \\ \text{مورب } BD \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{D}_۱ = \hat{B}_۱ \Bigg\} \Rightarrow \overset{\triangle}{BAD} \sim \overset{\triangle}{BDM}$$

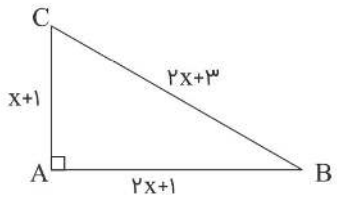
در دو مثلث متشابه، نسبت اضلاع متناظر برابر است بنابراین:

$$\frac{AD}{BD} = \frac{BD}{MB} \Rightarrow \frac{۱}{\sqrt{۵}} = \frac{\sqrt{۵}}{MB} \Rightarrow MB = (\sqrt{۵})^۲ = ۵$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۰

۷ گزینه ۱

چون ضلع به طول $۲x+۳$ بزرگ‌ترین ضلع مثلث است، وتر مثلث می‌باشد؛ بنابراین طبق قضیهٔ فیثاغورس، داریم:



$$(۲x+۳)^۲=(x+۱)^۲+(۲x+۱)^۲$$
$$\Rightarrow ۴x^۲+۱۲x+۹=x^۲+۲x+۱+۴x^۲+۴x+۱\Rightarrow x^۲-۶x-۷=۰$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x=-۱ & \text{غ.ق.ق} \\ \text{یا} & \Rightarrow x=۷\Rightarrow AB=۱۵,\ AC=۸ \\ x=۷ & \text{ق.ق} \end{cases}$$
$$\Rightarrow S=\frac{۱}{۲}(۱۵)(۸)=۶۰$$

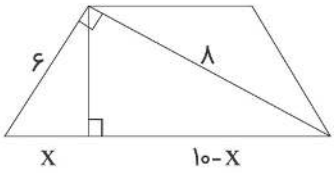
تذکر: $x=-۱$ غیرقابل‌قبول است؛ زیرا به ازای آن طول ضلع AC برابر با صفر می‌شود.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۹

۸ گزینه ۱

در هر مثلث قائم‌الزاویه هر ضلع زاویهٔ قائمه واسطهٔ هندسی بین وتر و تصویر آن ضلع روی وتر است.

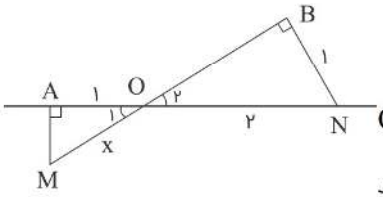
$$۶^۲=۱۰x\Rightarrow x=۳/۶$$
$$\text{طول قاعدهٔ کوچک}=۱۰-۲x=۱۰-۷/۲=۲/۸$$



کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۱

۹ گزینه ۲

طبق قضیهٔ فیثاغورس در مثلث OBN داریم:



$$OB = \sqrt{ON^۲ - BN^۲} = \sqrt{۴ - ۱} = \sqrt{۳}$$

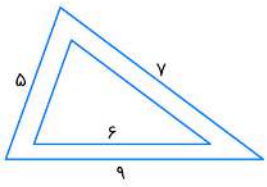
دو مثلث OAM و OBN به حالت تساوی دو زاویه، متشابه‌اند $(\hat{O}_۱ = \hat{O}_۲, \hat{A} = \hat{B} = ۹۰^\circ)$. داریم:

$$\frac{OM}{ON} = \frac{OA}{OB} \Rightarrow \frac{x}{۲} = \frac{۱}{\sqrt{۳}} \Rightarrow x = \frac{۲}{\sqrt{۳}} = \frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۱

۱۰ گزینه ۳

طبق توضیحات صورت سؤال، شکلی به‌صورت زیر رسم می‌کنیم:



چون اضلاع دو مثلث موازی یکدیگرند، پس دو مثلث متشابه هستند. می‌دانیم نسبت مساحت‌های دو مثلث متشابه برابر مجذور نسبت تشابه آن‌ها است؛ بنابراین داریم:

$$\frac{\text{مساحت مثلث بزرگ تر}}{\text{مساحت مثلث کوچک تر}} = \frac{S}{S'} = \left(\frac{۹}{۶}\right)^۲ = \left(\frac{۳}{۲}\right)^۲ = \frac{۹}{۴}$$

نسبت مساحت محدود به این دو مثلث به مساحت مثلث کوچک‌تر برابر است با:

$$\frac{S - S'}{S'} = \frac{S}{S'} - \frac{S'}{S'} = \frac{S}{S'} - ۱ = \frac{۹}{۴} - ۱ = \frac{۵}{۴} = ۱/۲۵$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

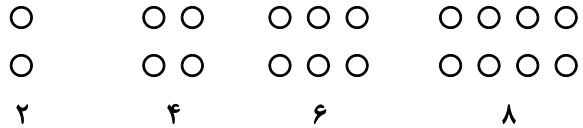
الگو و دنباله

دنباله خطی:

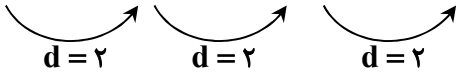
در این دنباله اختلاف دو جمله متوالی عدد ثابت d است.

درجه یک حسابی یا عددی: (n) ...

شماره شکل (۱) (۲) (۳) (۴)



تعداد ۲ ۴ ۶ ۸



الگوی تکرارشونده اعداد زوج: $2n$ ...

a_n برحسب n از درجه یک است و ضریب n قدرنسبت $d = ۲$ ⇒ درجه یک الگوی خطی یا دنباله حسابی

$$a_n = U_n = t_n = ۲n$$

جمله عمومی یا جمله nام

جمله گویاست تعداد دایره‌ها را در شکل n ام می‌گوید.

مثلاً در شکل سیزدهم $۲(۱۳) = ۲۶$ تا دایره داریم.

$a_۱$	$a_۲$	$a_۳$	$a_۴$	...	a_n	$a_n = a_۱ + (n-۱)d$
$a_۱$	$a_۱ + d$	$a_۱ + ۲d$	$a_۱ + ۳d$		$a_۱ + (n-۱)d$	$a_n = dn + a_۱ - d$

a_n برحسب n درجه یک است و ضریب n برابر d =قدرنسبت است. مثل $a_n = ۲n + ۳$ که جملات آن ۵ , ۷ , ۹ ,... می‌باشد.

+۲ +۲

جمله بعدی − قبلی $= a_{n+۱} - a_n = d$ اختلاف دو جمله متوالی عدد ثابت d است.

S_n = مجموع جمله‌های اول تا n ام دنباله حسابی $= \frac{n}{۲}(a_۱ + a_n) = \frac{n}{۲}(a_۱ + \overbrace{a_۱ + (n-۱)d}^{a_n}) = \frac{n}{۲}(۲a_۱ + (n-۱)d) = \frac{d}{۲}n^۲ + \cdots$

در دنباله خطی یا حسابی یا عددی جمع جمله‌ها برحسب n از درجه ۲ است و ۲ برابر ضرب $n^۲$ قدرنسبت است.

دنباله حسابی (عددی) الگوی خطی:

الف) $\begin{cases} ۲,۴,۶ \\ ۲+۶ = ۲(۴) \end{cases}$

$$a, b, c \xrightarrow{\text{دنباله حسابی}} a + c = ۲b$$

میانگین یا واسطه حسابی a و c $= b = \frac{a+c}{۲}$ جمع الطرفین دوبل الوسطی

ب) $\begin{cases} ۲,۴,۶,۸ \\ ۲+۸=۴+۶ \end{cases}$

a,b,c,d جمع‌الطرفین برابر جمع‌الوسطین $\xrightarrow{\text{دنباله‌حسابی}}$ $a+d=b+c$

ج) $۲,۴,۶,۸,۱۰$

جمع جملات متساوی‌الفاصله از وسط برابر : $۲+۱۰=۴+۸=۲(۶)$

د) $۲,۴,۶,۸,۱۰,۱۲$

$۲+۱۲=۴+۱۰=۶+۸$

$a_{۱۳}=a_{۲۰}-۷d=۳۰-۷(۲)=۱۶$

تمرین: در یک دنباله عددی $a_{۲۰}=۳۰$ و $a_{۳۰}=۵۰$ است. جمله سیزدهم؟ جمله بیست و دوم؟ جمله بیست و نهم؟

$a_{۲۰}-d=۵۰-۲=۴۸$ $\quad a_{۲۰}+۲d=۳۰+۲(۲)=۳۴$

$a_{۱۳}=a_۱+۱۲d$

$a_{۱۳}=-۸+۱۲(۲)$

$a_{۱۳}=۲۴-۸=۱۶$

$a_۱+۱۹d=۳۰$

$a_۱+۲۹d=۵۰$

$۱۰d=۲۰$

$d=۲ \quad a_۱=-۸$

نکته: $d=\dfrac{a_m-a_n}{m-n}$ مثل: $d=\dfrac{a_{۳۰}-a_{۲۰}}{۳۰-۲۰}=\dfrac{۵۰-۳۰}{۱۰}=۲$

نکته: در هر دنباله دلخواه داریم: $S_n-S_{n-۱}=a_n$

نکته: اگر بین a (اولی) و b (آخری) تعداد m واسطه حسابی درج کنیم: $d=\dfrac{b-a}{m+۱}$

تمرین: بین ۶ و ۶۶ چهار واسطه حسابی درج کرده‌ایم. قدرنسبت کدام است؟

$a=۶ \quad ۱۸ \quad ۳۰ \quad ۴۲ \quad ۵۴ \quad ۶۶=b$

$a_۱=۶ \quad a_۲ \quad a_۳ \quad a_۴ \quad a_۵ \quad a_۶=۶۶$

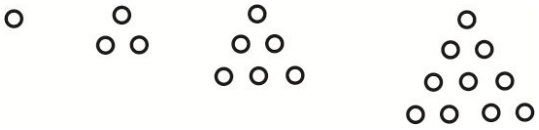
$d=\dfrac{b-a}{m+۱}=\dfrac{۶۶-۶}{۴+۱}=\dfrac{۶۰}{۵}=۱۲$

$a_۶=a_۱+۵d$

$۶۶=۶+۵d$

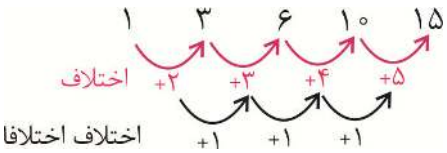
$d=۱۲$

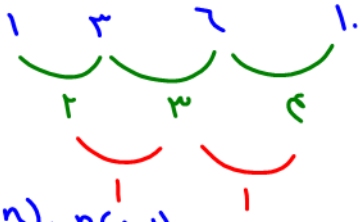
معرفی دنباله درجه دوم: $a_n = an^2 + bn + c$



$\Rightarrow$ اعداد مثلثی $1,3,6,10,\ldots \Rightarrow \frac{n(n+1)}{2}$ یک دنباله درجه دوم است.

شماره شکل	۱	۲	۳	۴	۵	...	n
تعداد دایره	۱	۱+۲	۱+۲+۳	۱+۲+۳+۴	۱+۲+۳+۴+۵	...	$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$





$a_n = an^2 + bn + c$

$a_n = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$

$a_n = an^2 + bn + c$

$a_n = \frac{1}{2}n^2 + bn + c$

$a_1 = \frac{1}{2} + b + c = 1$

$a_2 = 2 + 2b + c = 3$

$b + c = \frac{1}{2}$

$2b + c = 1$

$b = \frac{1}{2}$

$c = 0$

نکته: در دنباله درجه دوم اختلاف ۲ جمله متوالی یکسان نیست ولی اختلاف اختلافای دو جمله متوالی ثابت است. نصف اختلاف اختلاف‌ها ضریب n^2 یا a است.

نصف اختلاف اختلافا $= \frac{+1}{2} = a$

$a_n = an^2 + bn + c$

$a_n = \frac{1}{2}n^2 + bn + c$

جملات دنباله $\underset{a_1=1}{\downarrow}\ 1\ ,\ \underset{a_2=3}{\downarrow}\ 3\ ,\ 6\ ,\ 10\ ,\ 15\ ,\ldots$

$\xrightarrow{n=1}\ a_1 = \frac{1}{2} + b + c = 1$

$\xrightarrow{n=2}\ a_2 = \frac{1}{2}(2)^2 + 2b + c = 3$

$$\begin{cases} b + c = \frac{1}{2} \\ 2b + c = 1 \end{cases}$$

$$+\begin{cases} -b - c = -\frac{1}{2} \\ 2b + c = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = \frac{1}{2} \\ c = 0 \end{cases} \Big\} b + c = \frac{1}{2}$$

$a_n = an^2 + bn + c$

دنباله درجه دو $a_n = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n + 0$

نکته:

جمع اعداد طبیعی ۱ تا n $= 1+2+3+4+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

جمع اعداد زوج ۲ تا $2n$ $= 2+4+6+8+\cdots+2n = n(n+1)$

جمع اعداد فرد ۱ تا $2n-1$ $= 1+3+5+7+\cdots+(2n-1) = n^2$ $\Rightarrow$ جواب $= n^2 = 7^2 = 49$: ۱۳ ↓ $2n-1=13$ $n=7$

جمع مربعات اعداد طبیعی $= 1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

جمع مکعبات اعداد طبیعی $= 1^3+2^3 = 3^3+\cdots+n^3 = (\frac{n(n+1)}{2})^2$

معرفی دنباله هندسی:

$\begin{cases} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_1q & a_1q^2 & a_1q^3 & \cdots & a_n = a_1q^{n-1} \end{cases}$

قدرنسبت $q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$

الف) ۲ , ۴ , ۸

ضرب‌الطرفین مربع‌الوسطی $2(8) = (4)^2$

$a,b,c \xrightarrow{\text{هندسی}} ac = b^2$

$\sqrt{ac} = b$

واسطه هندسی بین a و b

واسطه حسابی $\geq$ واسطه هندسی $= \sqrt{ac} \leq \frac{a+c}{2}$ ↓ $a=c$

نکته:

ب) ۲ , ۴ , ۸ , ۱۶

ضرب‌الطرفین برابر ضرب‌الوسطین $2(16) = 4(8)$

$a,b,c,d \xrightarrow{\text{هندسی}} a.d = bc$

ج) قانون اندیس‌ها $m+n = p+q$

$m+n = 2k$

$\begin{cases} \xrightarrow{\text{دنباله حسابی}} \begin{cases} a_m + a_n = a_p + a_q \\ a_m + a_n = 2a_k \end{cases} \\ \xrightarrow{\text{دنباله هندسی}} \begin{cases} a_m a_n = a_p a_q \\ (a_m)(a_n) = (a_k) \end{cases} \end{cases}$

$\begin{cases} a_1\ a_2\ a_3\ a_4\ a_5\ a_6 \\ 2, 4, 6, 8, 10, 12 \\ 1+6 = 3+4 \Rightarrow a_1 + a_6 = a_3 + a_4 \\ 1+5 = 2(3) \qquad 2+12 = 6+8 \\ a_1 + a_5 = 2a_3 \end{cases}$

$$\begin{cases} ۱ & ۲ & ۴ & ۸ & ۱۶ & ۳۲ \\ a_۱ & a_۲ & a_۳ & a_۴ & a_۵ & a_۶ \end{cases}$$

$$۱+۶=۳+۴$$
$$a_۱a_۶=a_۳a_۴$$
$$(۱)(۳۲)=(۴)(۸)$$

$$۱+۵=۲(۳)$$
$$a_۱a_۵=(a_۳)^۲$$

ضرب جملات دنباله هندسی از $a_۱$ تا a_n $=\sqrt{(a_۱a_n)^n}$

جمع جملات دنباله هندسی از $a_۱$ تا a_n $=\dfrac{a_۱(۱-q^n)}{۱-q}$

q قدرنسبت

تمرین: مساحت مثلثی قائم‌الزاویه که اضلاعش به دنباله حسابی‌اند و با هم قدرنسبت d دارند، برحسب d کدام است؟

۱) $\dfrac{d^۲}{۶}$ ۲) $۶d^۲$ ۳) $\dfrac{d}{۶}$ ۴) $۶d$

تمرین: اگر جملات اول، نهم و چهل‌ونهم یک دنباله حسابی به ترتیب جملات اول و دوم و سوم یک دنباله هندسی دیگر را تشکیل دهند، قدرنسبت دنباله هندسی کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

تمرین: اعداد طبیعی فرد را طوری دسته‌بندی کرده‌ایم که تعداد جملات هر دسته برابر شماره آن دسته است. $(۱),(۳,۵),(۷,۹,۱۱),\ldots$

مجموع دو جمله اول و آخر دسته سی‌اُم کدام است؟ (تجربی ۹۳)

۱) ۱۷۰۰ ۲) ۱۸۰۰ ۳) ۱۷۵۰ ۴) ۱۸۵۰

Homework

۱ با اضافه کردن ۴ واحد به جملات اول و دوم یک دنبالهٔ حسابی، جملات اول و دوم دنبالهٔ حسابی جدید ساخته می‌شود. اختلاف جملهٔ nاُم دو دنباله کدام است؟

۱) ۴
۲) ۸
۳) ۲
۴) ۶

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

۲ مقادیر a، $2a+1$ و $a-5$ به‌ترتیب جملات متوالی یک دنباله حسابی هستند. اگر a جمله نخست این دنباله باشد، جمله نهم کدام است؟

۱) ۲/۷۵
۲) ۴/۲۵
۳) ۱۲/۲۵
۴) ۱۴/۷۵

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۳

۳ در یک دنبالهٔ حسابی، مجموع جملات سوم و بیست‌وهشتم از جملهٔ پنجم، ۶۱ واحد بیشتر است. جملهٔ بیست‌وششم این دنباله کدام است؟

۱) ۷۶
۲) ۶۱
۳) ۵۵
۴) ۴۳

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۴۰۳

۴ در یک دنبالهٔ حسابی با جملهٔ اول a و قدرنسبت d، تساوی $6a_4^2 = 5a_3a + 3a_2a$ برقرار است. نسبت جملهٔ چهارم دنباله به d، کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۱
۲) ۱/۵
۳) ۳/۵
۴) ۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۵ جمله‌های چهارم و هشتم یک دنبالهٔ حسابی به‌ترتیب جملهٔ دوم و هفتم یک الگوی خطی هستند. اگر صفر، جملهٔ دهم الگوی خطی باشد، جملهٔ پانزدهم الگو، چند برابر قدرنسبت دنبالهٔ حسابی است؟

۱) $\frac{۶}{۵}$ ۲) $\frac{۸}{۵}$

۳) ۳ ۴) ۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۶ اگر جملهٔ اول و پنجم یک دنبالهٔ حسابی به ترتیب ۳ و ۱۱ باشد، جملهٔ دهم این دنباله کدام است؟

۱) ۲۱ ۲) ۲۲

۳) ۲۳ ۴) ۲۴

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۴۰۱

پاسخ Homework

۱ گزینه ۱

به همه جملات ۴ واحد اضافه می‌شود، بنابراین اختلاف جملات برابر ۴ خواهد بود.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

۲ گزینه ۴

اگر جملات فوق به‌ترتیب جملات متوالی یک دنباله حسابی باشند پس:

$$۱+۲a=\frac{a+۵-a}{۲}\Rightarrow ۲+۴a=۵\Rightarrow ۴a=۳$$
$$\Rightarrow a=\frac{۳}{۴}$$

بنابراین جملات عبارتند از:

$$\frac{۳}{۴}, ۱+۲\times\frac{۳}{۴}=\frac{۵}{۲}, \cdots$$

یعنی:

$$d=\frac{۵}{۲}-\frac{۳}{۴}=\frac{۷}{۴}$$

پس:

$$a_۹=a+۸d=\frac{۳}{۴}+۸\times\frac{۷}{۴}=\frac{۳}{۴}+۱۴=۱۴/۷۵$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۳

۳ گزینه ۲

$$a_۳+a_{۲۸}=a_۵+۶۱\Rightarrow a_۱+۲d+a_۱+۲۷d=a_۱+۴d+۶۱$$
$$\Rightarrow a_۱+۲۵d=۶۱\Rightarrow a_{۲۶}=۶۱$$

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۴۰۳

۴ گزینه ۱

$$a, a+d, a+۲d, \ldots$$

$$۶(a+d)^۲ = ۵(a+۲d)a + ۳(a+d)a$$

$$\Rightarrow ۶a^۲ + ۱۲ad + ۶d^۲ = ۵a^۲ + ۱۰ad + ۳a^۲ + ۳ad$$

$$\Rightarrow ۲a^۲ - ۶d^۲ + ad = ۰ \quad , \quad \frac{a}{d} = x \Rightarrow a = dx$$

$$\Rightarrow ۲d^۲x^۲ - ۶d^۲ + d^۲x = ۰ \Rightarrow d^۲(۲x^۲ + x - ۶) = ۰$$

$$\Rightarrow (۲x - ۳)(x + ۲) = ۰ \Rightarrow x = \frac{۳}{۲}, x = -۲$$

$$\frac{a_۴}{d} = \frac{a + ۳d}{d} = \frac{a}{d} + ۳ = x + ۳ : \begin{cases} x = -۲ : x + ۳ = ۱ \\ x = \frac{۳}{۲} : x + ۳ = ۴/۵ \end{cases}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۵ گزینه ۴

دنبالهٔ حسابی را t_n با قدرنسبت d و الگوی خطی را a_n با قدرنسبت d' نمایش دهیم:

$$t_۸ - t_۴ = a_۷ - a_۲ \Rightarrow ۴d = ۵d' \Rightarrow \frac{d'}{d} = \frac{۴}{۵}$$

$$a_{۱۰} = ۰ \Rightarrow a_۱ + ۹d' = ۰ \Rightarrow a_۱ = -۹d'$$

$$\frac{a_{۱۵}}{d} = \frac{a_۱ + ۱۴d'}{d} = \frac{-۹d' + ۱۴d'}{d} = ۵\frac{d'}{d} = ۵ \times \frac{۴}{۵} = ۴$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۶ گزینه ۱

باتوجه‌به اطلاعات مسئله، داریم:

$$a_۱ = ۳$$
$$a_۵ = ۱۱ \Rightarrow a_۱ + ۴d = ۱۱ \Rightarrow ۳ + ۴d = ۱۱ \Rightarrow ۴d = ۸ \Rightarrow d = ۲$$

برای محاسبهٔ جملهٔ دهم داریم:

$$a_{۱۰} = a_۱ + ۹d \Rightarrow a_{۱۰} = ۳ + ۹ \times ۲ = ۳ + ۱۸ = ۲۱$$

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۴۰۱