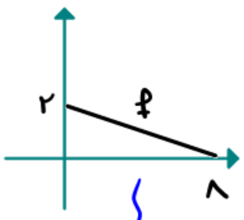
تست یک

نمودار f داده شده است. اگر $g(x)=3^x-1$ و دامنه تابع fog بازه [a,b] باشد. حاصل b-a ؟

۱	$\boxed{۲}$
۳	۴



$D_f\ [0,8]$

$D_{fog}=D_{f(g(x))}=\{x\in D_g \ , \ g(x)\in D_f\}=[0,2]$, a , b , $b-a=2$

$x\in R$ (الف)

$0\leq 3^x-1\leq 8$

$1\leq 3^x\leq 9$

$3^0\leq 3^x\leq 3^2$

$0\leq x\leq 2$ (ب)

(الف) ∩ (ب)

تست ۲: از مجموعه $A=\{1,2,3,4\}$ چند تابع به $B=\{a,b,c\}$ می‌توان تعریف کرد؟

۲۷	۶۴
$\boxed{۸۱}$	۱۶

$\boxed{3^4=81}$

اگر A ، m عضوی و B ، n عضوی ($m=4$ ، $n=3$) تعداد کل توابع از A به B : n^m

$f:A\to B$

تست ۳: مجموعه جواب نامعادله $\frac{x+1}{x-1}-\frac{x+6}{x+2}>1$ به صورت $x\in(a,b)\cup(c,d)$ است.

$a+b+c+d=?$

-۱	-۲
-۳	-۴

$$\frac{x+1}{x-1}-\frac{x+6}{x+2}>1 \longrightarrow \frac{\overbrace{(x^2+3x+2)-(x^2+5x-6)}^{}}{(x+1)(x+2)-(x+6)(x-1)}-1>0$$

$(x-1)(x+2)=x^2+x-2$

$$\frac{-2x+8-x^2-x+2}{x^2+x-2}>0$$

$$\frac{-x^2-3x+10}{x^2+x-2}>0$$

$-(x^2+3x-10)$

$+2 \quad -5$

x		-5		-2		1		2		$+\infty$
		ریشه		ریشه		ریشه		ریشه		
	-	0	+	ت.ن	-	ت.ن	+	0	-	

$x\in(-5,-2)\cup(1,2)$

$a+b+c+d=-4$

---

۴) اگر f خطی و نزولی باشد، $f(f(x))=4x-3$ ، $f^{-1}(9)=?$

-۶	-۳
۶	۳

$a<0$

$f(x)=ax+b$

$f(f(x))=a(ax+b)+b=\underbrace{a^2x+ab+b}=4x-3$

$a^2=4 \quad a=\pm2 \xrightarrow{a<0} a=-2$

$ab+b=-3 \xrightarrow{a=-2} -2b+b=-3 \rightarrow b=3$

$f(x)=-2x+3$

$f^{-1}(9)=\alpha \rightarrow f(\alpha)=9 \rightarrow -2\alpha+3=9 \rightarrow \alpha=-3 \qquad f^{-1}(9)=-3$

---

۵) فرض کنید [a,b] برد $y=2^{-\sqrt{8\sin^2x+1}}$ است. $a+b=?$

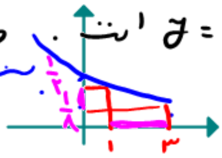
$f(x)=2^{-x}$

$g(x)=\sqrt{8\sin^2x+1}$

$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$
$\frac{5}{8}$	$\frac{3}{8}$

$a=\frac{1}{8}\leq y=f(1\leq g(x)\leq 3)\leq\frac{1}{2}=b$

$f(x)=2^{-x}$



$-1\leq \sin x\leq 1 \longrightarrow 0\leq \sin^2x\leq 1 \longrightarrow 0\leq 8\sin^2x\leq 8 \quad 1\leq 8\sin^2x+1\leq 9 \longrightarrow 1\leq\boxed{\overset{g(x)}{\sqrt{8\sin^2x+1}}}\leq 3$

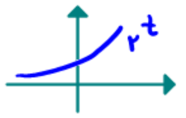
۶) بُرد $f(x) = 2^{\sqrt[3]{7\cos^2x+1}} - 2^{-\sqrt[3]{1+7\cos^2x}}$ به صورت $[a,b]$ است. $b+a$ ؟

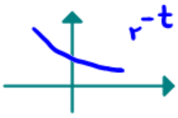
$\frac{15}{4}$	$\frac{9}{4}$
$\frac{21}{4}$	$\frac{9}{2}$

$-1 \leq \cos x \leq 1$ ، $0 \leq \cos^2x \leq 1$ ، $0 \leq 7\cos^2x \leq 7$ ، $1 \leq 7\cos^2x+1 \leq 8$ ، $\sqrt[3]{1}=1 \leq \boxed{\overset{t}{\sqrt[3]{1+7\cos^2x}}} \leq \sqrt[3]{8}=2$ ، $1 \leq t \leq 2$

$f(x) = 2^t - 2^{-t} = 2^t + (-2^{-t}) =$ اکیداً صعودی ، اکیداً صعودی جمع دو تابع

$y = 2^t - 2^{-t}$



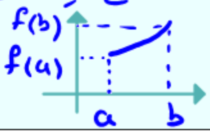


$2^{-t} = (\frac{1}{2})^t = \frac{1}{2^t} \rightsquigarrow -2^{-t}$ صعودی

$D:[1,2]$

نکته : در تابع اکیداً صعودی $D[a,b]$

$R[f(a), f(b)]$



$R = [f(1), f(2)]$

$a = \frac{3}{2}$ و $\frac{15}{4} = b$

$b + a = \frac{15}{4} + \frac{3}{2} = \frac{15+6}{4} = \frac{21}{4}$

---

۷) اگر $f(x)=\sqrt{2x+3}$ و $(gof)^{-1}(\sqrt{2x}-1) = 3x+5$ باشد ، عرض از مبدأ وارون g ؟

۴	$\sqrt{13}-1$
۲	$\frac{49}{2}$

طبق تعریف تابع وارون :

$(gof)^{-1}(b) = a \longrightarrow (gof)(a) = b$

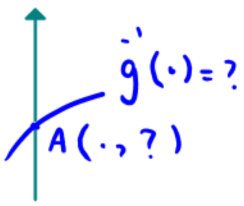
$(gof)^{-1}(\sqrt{2x}-1) = 3x+5 \longrightarrow (gof)(3x+5) = \sqrt{2x}-1$

$g(f(3x+5)) = \sqrt{2x}-1$ ، $f(x) = \sqrt{2x+3}$

$g(\sqrt{2(3x+5)+3}) = \sqrt{2x}-1$

$g(\sqrt{6x+13}) = \sqrt{2x}-1$ دوباره تعریف وارون

$g^{-1}(\overset{\text{صفر}}{\sqrt{2x}-1}) = \sqrt{6x+13}$



برای اینکه نوی شکم g^{-1} به صفر $x=\frac{1}{2}$

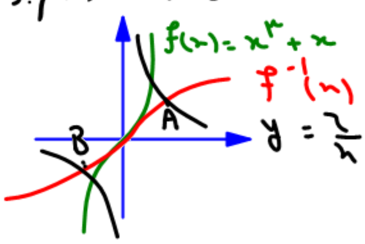
$g^{-1}(\sqrt{2(\frac{1}{2})}=1-1=0) = \sqrt{6(\frac{1}{2})+13} = 3+13 = \sqrt{16} = 4$

$\boxed{g^{-1}(0)=4}$

---

۸) وارون $f(x)=x^3+x$ منحنی $y=\frac{6}{x}$ را در A و B قطع می‌کند. خطی که از A و B می‌گذرد، در کدام بازه بالای $y=\frac{1}{3x}$ قرار دارد؟

$(0,2)$	$(-1,1)$
$(3,4)$	$(-2,0)$



f^{-1} را لازم نیست پیدا کنیم ، به جای تلاقی f^{-1} با $g(x)=\frac{6}{x}$ خود f را با g قطع می‌دهیم

$\frac{6}{x} = x^3+x \rightsquigarrow x^4+x^2-6=0$ ، $x^2=t$

$t^2+t-6=0 \rightsquigarrow t=2$ ، $x^2=2$ ؛ $t=-3=x^2$ غ ق ق

طول نقاط برخورد f با y ثابت که میشه $x=\pm\sqrt{2}$

عرض نقاط برخورد f^{-1} با g

$g(x)=\frac{6}{x}$

$\pm\sqrt{2}=\frac{6}{x} \to x=\frac{6}{\pm\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\pm 6\frac{\sqrt{2}}{2}=\pm 3\sqrt{2}$

طول نقاط برخورد f^{-1} با g

$A(3\sqrt{2}, \sqrt{2})$ $\quad$ $B(-3\sqrt{2}, -\sqrt{2})$

خط عبوری از A و B: یعنی نسبت عرض A و B، ثلث طولشه: $y=\frac{1}{3}x$

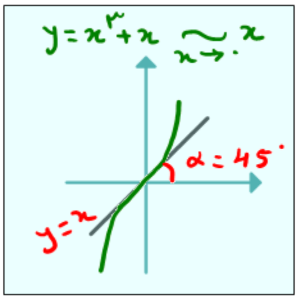
حالا می‌خوام ببینم خط $y=\frac{1}{3}x$ کجاها (در کدام x ها) بالای $y=\frac{1}{3x}$ است؟

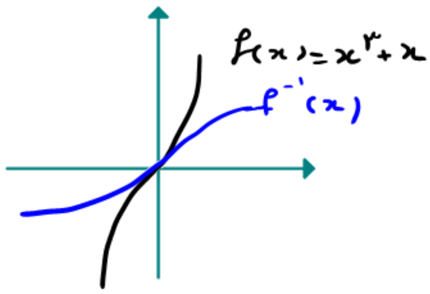
$\frac{1}{3}x>\frac{1}{3x} \xrightarrow{\times 3} x>\frac{1}{x} \to x-\frac{1}{x}>0 \to \frac{x^2-1}{x}>0$

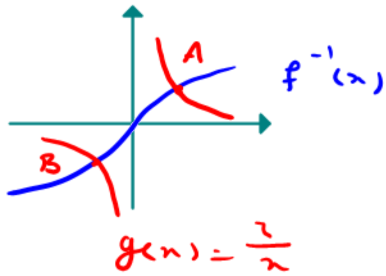
x		-1 (ساده)		0 (ساده)		1 (ساده)	
$\frac{x^2-1}{x}>0$	$-$	o	$+$	ت ن	$-$	o	$+$

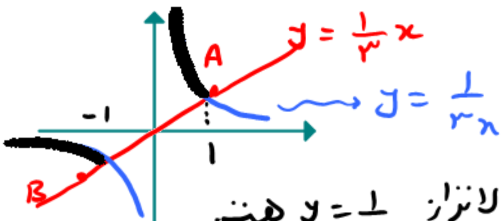
$x\in(-1,0)$ یا $(1,+\infty)$

توضیحات تصویری تست نوین:



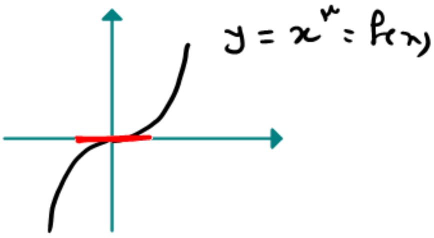


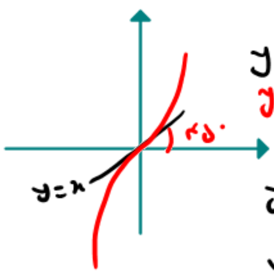




می‌بینیم $y=\frac{1}{3}x$ در بازه $x\in(-\infty,-1)\cup(0,1)$ بالاتر از $y=\frac{1}{3x}$ هست.

نکته:



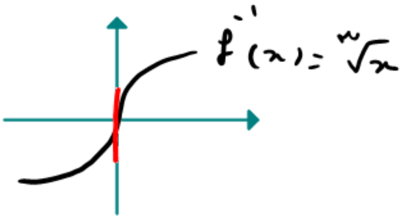


$y=x^3+x$

$y'_{(0)}=3x^2+1=1=\tan\alpha \to \alpha=45°$

$y=x^3+x \underset{x\to 0}{\sim} x$ کم توان

$y=x^3+x \underset{x\to\pm\infty}{\sim} x^3$ پرتوان

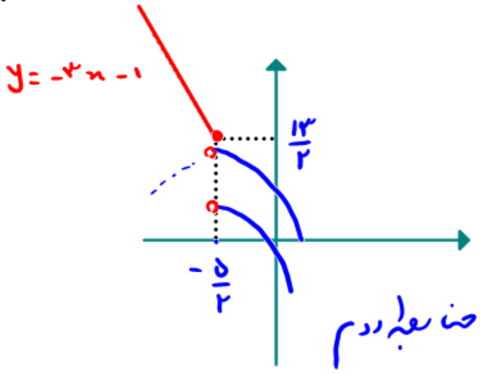


۹) تابع

$$f(x)=\begin{cases} -1-3x & 2x+5\le 0 \\ -x^2+2x(m-1)+2m+1 & 2x+5>0 \end{cases}$$

روی دامنه‌اش وارون پذیر است. اگر f^{-1} وارون f به ازای مقادیر صحیح m باشد. مقدار $f^{-1}(-30)$ کدام است؟ $(m\neq -1)$

۲	۳
صفر	۱



ضابطه اول برای $2x+5\le 0$ یعنی $x\le -\frac{5}{2}$ به صورت خط نزولی $f(x)=-3x-1$ است

$f(-\frac{5}{2})=-3(-\frac{5}{2})-1=\frac{15}{2}-1=\frac{13}{2}$

برای وارون پذیری f باید یک به یک باشد و کاملاً نزولی پس ضابطه دوم که یک سهمی دهانه به پایین است باید در دامنه $x>-\frac{5}{2}$ اولاً نزولی باشد یعنی راس سهمی در $x>-\frac{5}{2}$ نباشد $\boxed{x_s=\frac{-b}{2a}\le -\frac{5}{2}}$ و شروع سهمی از $\frac{13}{2}$ بالاتر نباشد.

الف) $x_s=-\frac{b}{2a}=-\frac{2(m-1)}{2(-1)}=m-1\le -\frac{5}{2}\longrightarrow m\le -\frac{3}{2}=-1/5$ الف

ب) $f(-\frac{5}{2})\overset{\text{ضابطه دوم}}{=\!=}-\frac{25}{4}-5(m-1)+2m+1\le\frac{13}{2}$

$-3m-\frac{1}{4}\le\frac{13}{2}\rightsquigarrow -\frac{1}{4}-\frac{13}{2}\le 3m\xrightarrow{\div 3}-\frac{27}{12}\le m$ ب

(الف)∩(ب) $-2/\ldots=-\frac{27}{12}\le m\le -\frac{3}{2}=-1/5\xrightarrow{m\in\mathbb{Z}} m\in\{-2,\cancel{-1}\}$

سوال گفته $m\neq -1$ پس فقط $\boxed{m=-2}$

ضابطه دوم

$x)=-x^2-6x-3$

$f^{-1}(-30)=b\longrightarrow f(b)=-30\longrightarrow f(b)=-b^2-6b-3=-30$

$b^2+6b-27=0$

$(x+9)(x+3)=0$

$\underbrace{b=-9 \quad b=3}_{\text{فقط}}$

ضابطه دوم برای $2x+5>0$ یعنی $x>-\frac{5}{2}$ تعریف شده پس $b=3>-\frac{5}{2}$ درسته و قابل قبوله.

نکته:

f وارون پذیر $\longrightarrow$ f یک به یک (هر خط افقی f را حداکثر یک جا قطع می‌کنه و y به x وابسته) $\longrightarrow$ f اکیداً یکنوا (اگر مشتق f ریشه نده یا ریشه مضاعف بده)

۱۰) اگر $f(x)=x+[-x]$, $g(x)=f(2x-[x])$ برد تابع $f(gof(x))$ کدام است؟

$[-1,0]$	$\boxed{(-1,0]}$
$[-1,0)$	$(-1,0)$

راه تستی: دوتا عدد $x=-1$ و $x=1$ بده صدور خربی بدست میاد.

$$g(x)=f(2x-[x]) \overset{*}{=} 2x-[x]+\left[-(2x-[x])\right]=2x-\underbrace{[x]+[x]}_{\text{حذف}}+[-2x]=2x+[-2x]$$

$$-(2x-[x]) = \underbrace{[x]}_{\in \mathbb{Z}}-2x$$

$$[u+k]=[u]+k \qquad k\in \mathbb{Z}$$

$$g(x)=2x+[-2x] \longrightarrow gof=g(f(x))=2f(x)+[-2f(x)]=2(x+[-x])+[-2x-2[-x]]$$

$$=2x+\cancel{2[-x]}-\cancel{2[-x]}+[-2x]=2x+[-2x]$$

$$gof=2x+[-2x]$$

$$f(gof)=f(2x+[-2x])=2x+[-2x]+[-2x-[-2x]]$$

$$f(gof)=2x+\underbrace{[-2x]-[-2x]}+[-2x]=2x+[-2x]=\begin{cases}0 & 2x\in \mathbb{Z}\\ 2x-[2x]-1 & 2x\notin \mathbb{Z}\end{cases}$$

$$0<u-[u]<1$$

$$-1<\underbrace{u-[u]-1}<0$$

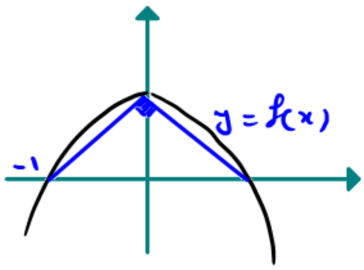
بلدیم:

$$[-u]=\begin{cases}-[u] & u\in \mathbb{Z}\\ -[u]-1 & u\notin \mathbb{Z}\end{cases}$$

برای جواب با $y=0$ اجتماع بگیر $(-1,0]$ جواب

---

۱۱) نمودار سهمی f رسم شده. برد تابع $y=\sqrt{\log_2 f(x-1)}$ کدام است؟



$[0,1]$	$(0,1]$
$\{0\}$	$\{0,1\}$

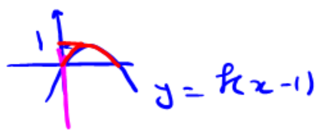
سهمی ساده نسبت به y متقارن است لذا ریشه دیگر $x=1$ است و ضابطه آن $f(x)=-x^2+1$ است

$f(x)\leq 1$

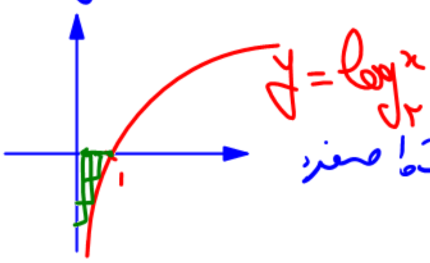
نکته: با تبدیل x به $x-1$ نمودار $f(x)$ فقط به واحد به سمت راست می رود و تاثیری در عرض ماکزیمم ندارد.

$f(x-1)\leq 1$

$y=f(x-1)\leq 1$



$$\log_2 f(x-1)\leq \log_2 1=0$$



$$y=\sqrt{\boxed{\log_2 f(x-1)}}=\sqrt{0}=0$$

یا صفر یا کمتر که کمتر از صفر نمی تونه باشه لذا فقط صفر

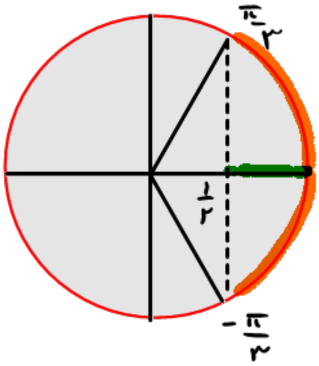
برد $y\in\{0\}$

گزینه *

۱۲) اگر x در دامنه $f(x)=\cos\left(\frac{\pi}{3}\sin x\right)$ تغییر کند. مقادیر $f(x)$ در چه بازه‌ای تغییر می‌کنند؟

$\boxed{[\frac{1}{2},1]}$	$(\frac{1}{2},1]$
$[\frac{1}{2},1)$	$(\frac{1}{2},1)$

$-1 \le \sin x \le 1 \xrightarrow{\text{ضرب در } \frac{\pi}{3}} -\frac{\pi}{3} \le \frac{\pi}{3}\sin x \le \frac{\pi}{3}$ $\qquad \frac{1}{2} \le y=\cos\left(\frac{\pi}{3}\sin x\right) \le 1$



جواب: $y\in[\frac{1}{2},1]$ برد

---

۱۳) برد تابع $y=\dfrac{\sqrt{-x^2+8x-7}}{\sqrt[5]{[x]+[-x]}}$ کدام است؟

$$y=\frac{\sqrt{-(x^2-8x+7)}=-(x-1)(x-7)\ge 0}{\sqrt[5]{[x]+[-x]}\underset{x\notin\mathbb{Z}}{=}-1}=-1 \qquad 1\le x\le 7 \qquad x\notin\mathbb{Z}$$

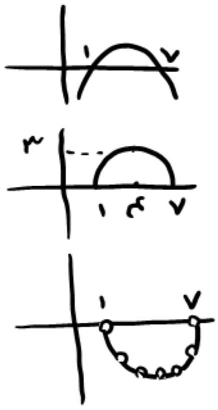
مخرج همیشه برابر ۱- است

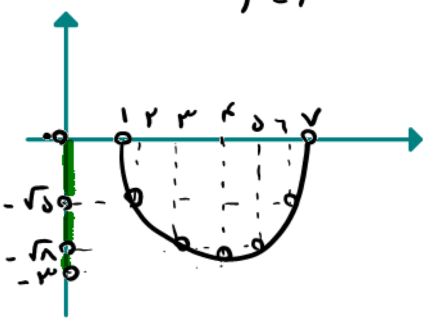
$$[x]+[-x]=\begin{cases}0 & x\in\mathbb{Z}\\ -1 & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$$

صورت $y=-(x-1)(x-7)$

$y=\sqrt{-(x-1)(x-7)}$

$y=-\sqrt{-(x-1)(x-7)}$





تابع من از $1\le x\le 7$ صحیح را نمی‌گیرد و yهای مربوط را هم نمی‌گوید.

$$y\in(-3,0)-\{-\sqrt{8},-\sqrt{5}\}$$

---

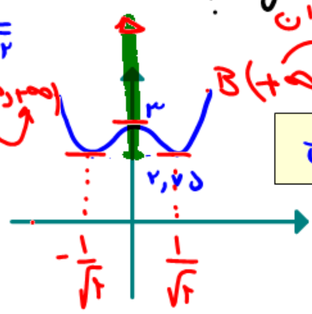
۱۴) برد $y=x^4-x^2+3$ ؟

$y'=4x^3-2x=2x(2x^2-1)=0 \longrightarrow \begin{cases}x=0\\ x=\pm\sqrt{\frac{1}{2}}=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\end{cases}$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{\sqrt{2}}$		0		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	2.75 min	$\nearrow$	3 = Max	$\searrow$	2.75 min	$\nearrow$	$+\infty$

ناحیه شروع: $A(-\infty,+\infty)$ x^4 زوج اول

ناحیه ختم: اول $B(+\infty,+\infty)$ زوج توان



$\boxed{y\ge 2.75}$

نکته:

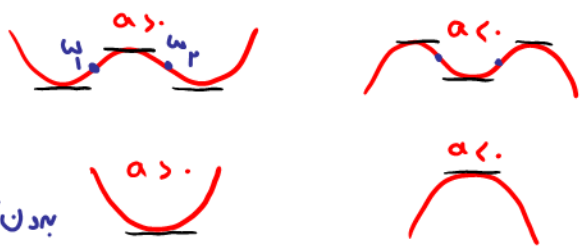
تابع ۲ مجذور دری

$y=ax^4+bx^2+c$

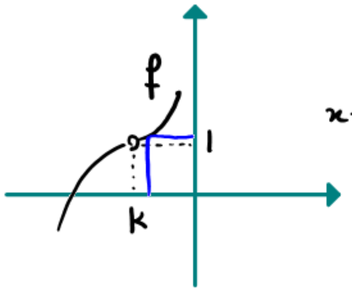
$y'=4ax^3+2bx=0$ چند ریشه؟

$ab<0$ ۲ عطف

$ab\ge 0$ بدون عطف



۱۶



$$\lim_{x\to k^+}\frac{x}{1-f(x)}=\frac{k \text{ عدد منفی}}{1-f(k^+)=0^-}=+\infty$$

$$\underbrace{f(k^+)}_{1^+}$$

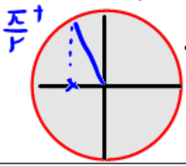
$-\infty$	$\boxed{+\infty}$
$-k$	صفر

۱۷

$$\lim_{x\to\pi^+}\frac{\sin x\,\sin\frac{x}{2}\,\sin\frac{x}{4}}{\sqrt{1+\cos x}}=\frac{2\sin\frac{x}{2}\,\cancel{\cos\frac{x}{2}}\,\sin\frac{x}{2}\,\sin\frac{x}{4}=2\left(\frac{\sqrt2}{2}\right)=\sqrt2}{\sqrt{2\cos^2\frac{x}{2}}=\sqrt2\left|\cos\frac{x}{2}\right|=-\sqrt2\,\cancel{\cos\frac{x}{2}}}=-1$$

1	-1
$-\sqrt2$	$\sqrt2$

$\frac{\pi}{2}^+$



داخل قدر مطلق منفی است زیرا $\cos\frac{\pi}{2}^+<0$

$$1+\cos\theta=2\cos^2\frac{\theta}{2}$$
$$1-\cos\theta=2\sin^2\frac{\theta}{2}$$

$$\sin\theta=2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

۱۸

اگر $f^{-1}(x)=-\sqrt{x-5}$ باشد حاصل $\lim_{x\to(-2)^-}\frac{1+2x+\sqrt{f(x)}}{|x^2+x-2|}$ ؟

$\frac{4}{9}$	$-\frac{4}{9}$
$-\frac{4}{3}$	$\frac{4}{3}$

$f(-2)=b \qquad A(-2,9)\in f$

$f^{-1}(b)=-2 \qquad A'(9,-2)\in f^{-1}$

$-\sqrt{b-5}=-2$

$\sqrt{b-5}=2$

$b-5=4 \qquad b=9$

$f(-2)=b=9$

می توان از اول $f(x)$ را یافت یعنی f^{-1} را وارون کرد.

$$\lim_{x\to(-2)^-}\frac{1-4+\sqrt{f(-2)=9}=0}{|\underbrace{(x-1)(x+2)}_{+}|=\underbrace{(x-1)(x+2)}_{x^2+x-2}}$$

$$\frac{0}{0}\xrightarrow{\text{Hop}}\lim_{x\to-2}\frac{0+2+\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}}{2x+1}=$$

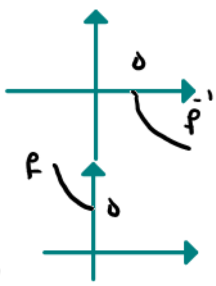
$$\frac{2+\frac{\boxed{f'(-2)=-4}}{2\sqrt{f(-2)=9}=6}}{2(-2)+1=-3}$$

$y=f^{-1}(x)=-\sqrt{x-5}$

$y^2=x-5$

$y^2+5=x$

$x^2+5=y=f(x)$



$f'(x)=2x$

$\boxed{f'(-2)=-4}$

$$\frac{2-\frac{2}{3}=\frac{4}{3}}{-3}=\boxed{-\frac{4}{9} \quad \text{جواب}}$$

$f(x)=mx+h$

$f^{-1}(x)=\frac{1}{m}x-\frac{h}{m}$

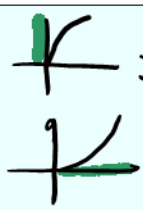
$f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$

$f^{-1}(x)=\frac{-dx+b}{cx-a}$

$y=\sqrt{x} \qquad y\geq0$

$y^2=x$

$x^2=y$



$f^{-1}(x)=x^2 \quad x\geq0$