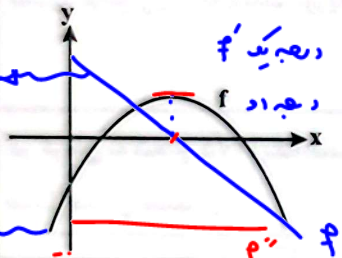
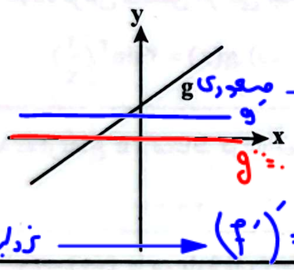
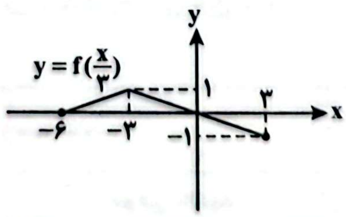
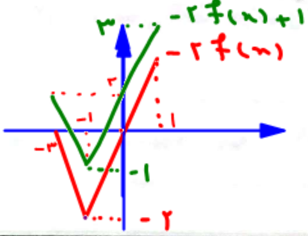
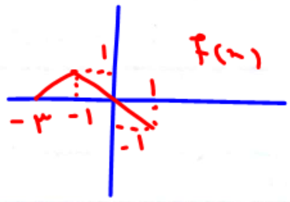
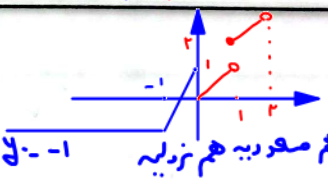
ردیف	سؤالات	نمره
	استفاده از ماشین‌حساب ساده مجاز است.	
۱	درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید. الف) حاصل $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}^-} \frac{[x]+2x}{-4x^2-4x-1}$ برابر $+\infty$ است. درست ب) آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع $f(x)=\sqrt[3]{x}+3x^2$ در $x=1$ برابر $\frac{19}{6}$ است. نادرست پ) نقطه‌ای به طول $x=-2$، نقطهٔ ~~مینیمم~~ ماکسیمم نسبی تابع $f(x)=2[x]$ است. نادرست $-1+2(-\frac{1}{2})=-2$ $\;=+\infty$ $\ominus(4x^2+4x+1)=\ominus(2x+1)^2=-$ $f'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}+6x \overset{x=1}{=} \frac{1}{3}+6=\frac{19}{3}$	۰/۷۵
۲	جاهای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پر کنید. الف) اگر $\tan\alpha=2m-3$ باشد و $-\frac{\pi}{4}\le\alpha\le\frac{\pi}{4}$، آن‌گاه فاصلهٔ کمترین مقدار و بیشترین مقدار m برابر با ...یک... است. ب) حاصل $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1-2x+3x^3}{(2x-1)^3}$ برابر با ...$\frac{3}{8}$... است. پ) خط ...$x=1$... مماس قائم بر منحنی تابع $f(x)=\sqrt[3]{x^3(x-1)}$ است. زیرا $f'(1)=\infty$ بقیه در برگه اضافه	۰/۷۵
۳	نمودار سهمی f و تابع خطی g در شکل‌های زیر رسم شده است. اگر f' و f'' مشتق اول و دوم تابع f و g' و g'' مشتق اول و دوم تابع g باشند، آن‌گاه به ازای هر x از دامنهٔ این دو تابع، کدام گزینه درست است؟   ۱) ~~$f''(x)<0\ ,\ g'(x)<0$~~ ۲) $f''(x)<0\ ,\ g'(x)>0$ ۳) $f'(x)>0\ ,\ g''(x)<0$ ۴) $f'(x)<0\ ,\ g''(x)>0$	۰/۲۵
۴	در شکل زیر، نمودار تابع $y=f(\frac{x}{2})$ رسم شده است. نمودار تابع $y=-2f(x)+1$ را رسم کنید.   	۱
۵	تابع $f(x)=\begin{cases} x+\|x+1\| & ; \quad x<0 \\ x+[x] & ; \quad 0\le x<2\end{cases}$ را در نظر بگیرید. $-1<x<0:\ y=2x+1$ $x<-1:\ y=-1$ الف) نمودار تابع f را رسم کنید.  ب) بزرگ‌ترین بازه‌ای را که تابع f در آن‌ها صعودی یا نزولی است، مشخص کنید. $(-\infty,0)$, $(0,2)$ $(-\infty,-1)$ تابع ثابت هم صعودی هم نزولی	۱
۶	مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که چندجمله‌ای $p(x)=x^3+ax^2+bx-3$ بر $x+1$ بخش‌پذیر بوده و باقی‌ماندهٔ تقسیم آن بر $x-2$ برابر ۳ باشد. $p(-1)=-1+a-b-3=0$, $f(2)=8+4a+2b-3=3$ → $\begin{cases}a-b=4\\2a+b=-1\end{cases}$ $a=1\ ,\ b=-3$	۱
۷	دورهٔ تناوب و مقدار مینیمم تابع $y=\sqrt{3}-2\cos(\frac{x}{2\pi}+\frac{\pi}{3})$ را مشخص کنید. $T=\frac{2\pi}{\|b\|}=\frac{2\pi}{\frac{1}{2\pi}}=4\pi^2$ $y_{min}=\sqrt{3}-2=2-\sqrt{3}$	۰/۵

$min=-\|a\|+d\le y=a\cos(bx+c)+d\le Max=\|a\|+d$, $T=\frac{2\pi}{\|b\|}$

نمره	سؤالات	ردیف
	استفاده از ماشین‌حساب ساده مجاز است.	
۱/۵	جواب‌های کلی معادلهٔ مثلثاتی $۶\sin^۲ x + ۲\sin^۲ ۲x = ۵$ را به دست آورید.	۸
۰/۷۵	اگر $\tan\alpha = ۲$ و $\tan(\alpha-\beta) = -۴$، آن‌گاه مقدار $\tan ۲\beta$ را محاسبه کنید. $\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=-4$ $-4-8\tan\beta=2-\tan\beta$ $-6=7\tan\beta \to \tan\beta=-\frac{6}{7}$ $\tan2\beta=\frac{2\tan\beta}{1-\tan^2\beta}=\frac{-\frac{12}{7}}{1-\frac{36}{49}}=\frac{13}{49}$ جواب $\frac{-84}{13}$	۹ حساب
۱/۵	حاصل حدهای زیر را به دست آورید. الف) $\lim_{x\to ۱^-} \frac{x^۲[-x]+۱}{(x-۱)^۲} = \frac{-x^2+1}{(x-1)^2}=\frac{-(x-1)(x+1)}{(x-1)^2}=1^- - 1 = 0^-$ ب) $\lim_{x\to -\infty} \frac{۲x\lvert x-۳\rvert+\sqrt{x^۲+۱}}{x\sqrt{x^۲}+۴x+۵} = \frac{2x(-x+3)}{x\lvert x\rvert}=\frac{-2x^2+6x}{-x^2}=2$	۱۰
۱	مجانب‌های قائم و افقی نمودار $f(x)=\frac{x^۲-۴}{x^۳+۴x}$ را در صورت وجود به دست آورید. (راه‌حل نوشته شود.) $x^3+4x=x(x^2+4)=0$ قائم $x=0$ $\lim_{x\to\pm\infty} y=\frac{x^2}{x^3}=0 \to y=0$ افقی	۱۱
۱	خط d در نقطهٔ $(-۱,۵)$ بر نمودار تابع f مماس است. اگر شیب خط d برابر $\frac{۳}{۴}$ و $g(x)=\sqrt[۳]{۲x+۱}\, f(x^۳)$ باشد، مقدار $g'(-۱)$ را به دست آورید.	۱۲
۱/۲۵	با استفاده از تعریف مشتق، مشتق‌پذیری تابع $f(x)=x\sqrt{۹x^۲-۶x+۱}$ را در نقطهٔ $x=\frac{۱}{۳}$ بررسی کنید.	۱۳
۱/۷۵	مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده‌کردن مشتق الزامی نیست.) الف) $f(x)=\frac{(۹x-۲\sqrt{x})^۳}{x^۲+۱}$ ب) $g(x)=۲\sin^۳(\frac{۱}{x})$ حساب $g'(x)=2(3)(-\frac{1}{x^2})\cos(\frac{1}{x})\sin^2(\frac{1}{x})$	۱۴
۱	در کره‌ای به شعاع $۲\sqrt{۵}$، یک استوانه به ارتفاع ۲h محاط کرده‌ایم. مقدار h را طوری تعیین کنید که حجم استوانه بیشترین مقدار ممکن باشد.	۱۵
۱/۵	مقدار مینیمم مطلق تابع $f(x)=(x^۲-۲۸)\sqrt[۳]{x}$ را در بازهٔ $[-۲,۱]$ به دست آورید.	۱۶
۱/۵	اگر $x=-۲$ طول نقطهٔ عطف و $x=۱$ طول یکی از نقاط بحرانی تابع $f(x)=ax^۳+bx^۲+۱۲x$ باشد، آن‌گاه مقادیر a و b را به دست آورید. $f'(x)=3ax^2+2bx+12$ $f'(1)=3a+2b+12=0$ $f''(x)=6ax+2b$ $f''(-2)=-12a+2b=0$ $b=6a$ $3a+12a+12=0$ $15a=-12$ $a=-\frac{12}{15}=-\frac{4}{5}$ $b=6(-\frac{4}{5})=-\frac{24}{5}$	۱۷ حساب
۲	جدول رفتار و نمودار تابع $f(x)=\frac{۳x-۱}{x+۳}$ را رسم کنید.	۱۸
۲۰	جمع نمره موفق باشید	

⑨ تنظیم یک جدول که با خلاصه‌کردن اطلاعات توابع f، f′ و f″ در آن تشخیص چگونگی شکل نمودار آسان‌تر شود.
⑩ رسم نمودار تابع با استفاده از اطلاعات قسمت‌های قبل.
⑪ در صورت نیاز از نقاط کمکی هم استفاده می‌کنیم.

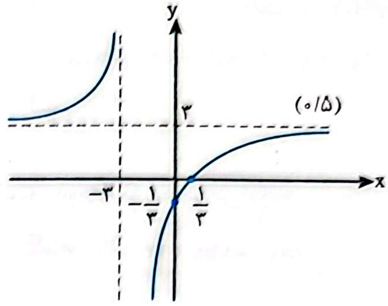
$D_f = \mathbb{R} - \{-۳\}$

$f'(x) = \frac{۱۰}{(x+۳)^۲}$ (۰/۲۵)

$f''(x) = \frac{-۲۰}{(x+۳)^۳}$ (۰/۲۵)

$x = -۳$ مجانب قائم (۰/۲۵)

$y = ۳$ مجانب افقی (۰/۲۵)



x	$-\infty$ تا -۳	-۳ تا $+\infty$
f′	+	+
f″	(+) ∪	(−) ∩
f	↗ $+\infty$	$-\infty$ ↗

(۰/۵)

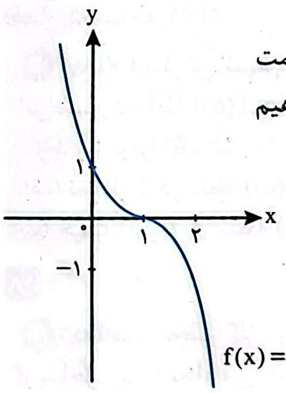
(فصل ۵، صفحهٔ ۱۴۲)

امتحان ۵ - حسابان (۲)

۱ الف) درست (۰/۲۵) (فصل ۱، صفحهٔ ۱۷)

نمودار تابع $f(x)=(۱-x)^۳$ با قرینه‌کردن نمودار تابع $y=x^۳$ نسبت به محور yها و سپس انتقال یک واحد به سمت راست به دست می‌آید:

واضح است که با حرکت روی نمودار (از سمت چپ به راست) همواره به سمت پایین خواهیم رفت؛ پس تابع f اکیداً نزولی است.



ب) نادرست (۰/۲۵) (فصل ۲، صفحهٔ ۳۲)

نکته: دامنهٔ تابع $y=\tan x$ به‌صورت زیر است:

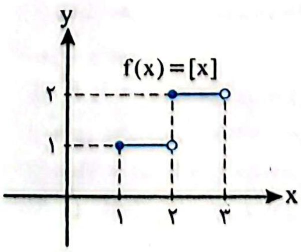
$$D=\{x\in\mathbb{R} \mid x\neq k\pi+\frac{\pi}{۲}, k\in\mathbb{Z}\}$$

۲ الف) صفر (۰/۲۵) (فصل ۴، صفحهٔ ۹۲)

نکته: مشتق تابع ثابت در هر نقطه از دامنه‌اش برابر صفر است.

ب) ماکزیمم نسبی (۰/۲۵) (فصل ۵، صفحهٔ ۱۱۴)

با توجه به نمودار تابع $f(x)=[x]$ مشاهده می‌شود در همسایگی نقطهٔ $x=۲$، مقدار $f(۲)$ همواره بزرگ‌تر یا مساوی با سایر مقادیر تابع در این همسایگی است؛ پس این نقطه ماکزیمم نسبی است.



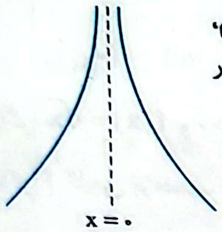
۳ شکل شمارهٔ (۴) (۰/۲۵) (فصل ۳، صفحهٔ ۵۸)

درسنامک: در این نوع سؤال‌ها کافی است حد چپ و راست تابع را در نزدیکی مجانب قائم بررسی کنیم. در این سؤال $x=۰$ است؛ پس:

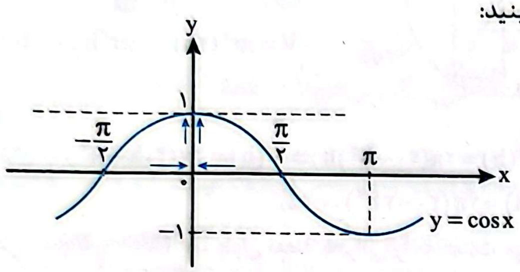
$$\lim_{x\to ۰^+}\frac{۱}{۱-\cos x}=\frac{۱}{۱-۱^-}=\frac{۱}{۰^+}=+\infty$$

$$\lim_{x\to ۰^-}\frac{۱}{۱-\cos x}=\frac{۱}{۱-۱^-}=\frac{۱}{۰^+}=+\infty$$

و این یعنی وقتی به نقطهٔ $x=۰$ نزدیک می‌شویم، مقادیر تابع به $+\infty$ میل می‌کنند. نمودار تابع در اطراف این نقطه تقریباً به شکل روبه‌رو است.

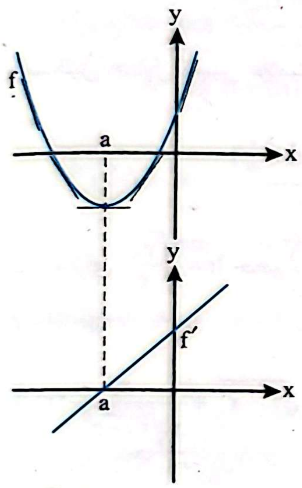


نکته: اگر روی نمودار تابع $y=\cos x$ به نقطهٔ $x=۰$ نزدیک شویم، مقادیر تابع با مقدارهای کمتر از یک به عدد یک نزدیک می‌شوند. نمودار زیر را ببینید:



۴ الف) شکل شمارهٔ (۱) (۰/۲۵)

با رسم خط‌های مماس بر نمودار تابع f مشاهده می‌شود در بازهٔ $(-\infty,a)$ شیب خط‌های مماس منفی است و با نزدیک‌شدن به نقطهٔ $x=a$ شیب خطوط مماس افزایش می‌یابد تا در نقطهٔ $x=a$ شیب خط مماس دقیقاً برابر صفر می‌شود و در ادامه در بازهٔ $(a,+\infty)$ شیب خطوط مماس افزایش می‌یابد. بنابراین مقدار تابع مشتق باید در بازهٔ $(-\infty,a)$ منفی باشد، یعنی نمودار f′ زیر محور xها باشد.



در نقطهٔ $x=a$ مقدار مشتق تابع برابر صفر است، یعنی نمودار f′ در نقطهٔ $x=a$ محور x را قطع می‌کند.
مقدار تابع مشتق باید در بازهٔ $(a,+\infty)$ مثبت باشد، یعنی نمودار f′ بالای محور xها باشد.

ب) شکل شمارهٔ (۴) (۰/۲۵)

نمودار تابع g مربوط به یک تابع خطی با شیب منفی است، پس مشتق آن یک مقدار همواره منفی و ثابت است. در نتیجه نمودار g′ یک خط افقی زیر محور xها است.

(فصل ۴، صفحهٔ ۱۰۰)

۵ الف)

$D_g: -۳\le \frac{۱}{۲}x < ۳ \Rightarrow -۶\le x<۶ \Rightarrow D_g=[-۶,۶]$ (۰/۵)

حواستون باشه: با توجه به نمودار، دامنهٔ تابع f بازهٔ $[-۳,۳)$ است، یعنی ورودی‌های تابع f باید در این بازه قرار بگیرند، در نتیجه $\frac{۱}{۲}x$ هم ناچار است در این بازه باشد!

$R_g: ۰ \le f(x) \le ۲ \xrightarrow{\times ۳} ۰ \le ۳f(x) \le ۶$

$\xrightarrow{+۱} ۱ \le ۳f(x)+۱ \le ۷ \Rightarrow R_g=[۱,۷]$ (۰/۵)

(فصل ۱، صفحهٔ ۱۰)

> **حواستون باشه:** وجود ضریب $\frac{۱}{۲}$ برای x، تأثیری روی برد تابع g ندارد و در نتیجه برد تابع $y=۳f(x)+۱$ همان برد تابع $g(x)=۳f(\frac{۱}{۲}x)+۱$ است.

درسنامه: اگر تابع $y=f(x)$ با دامنهٔ $[x_۰, x_۱]$ و برد $[y_۰, y_۱]$ موجود باشد، آن‌گاه دامنه و برد تابع $g(x)=cf(ax+b)+d$ به‌صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$D_g=[\frac{x_۰-b}{a}, \frac{x_۱-b}{a}]$$

$$R_g=[cy_۰+d, cy_۱+d]$$

ب) نقطهٔ $A'(-۴,۴)$ روی نمودار تابع g متناظر با نقطهٔ A روی نمودار تابع f است. (۰/۵)

$$(-۲,۱)\in f \xrightarrow{g(x)=۳f(\frac{۱}{۲}x)+۱} (۲\times(-۲), ۳(۱)+۱)\in g \Rightarrow (-۴,۴)\in g$$

(فصل ۱، صفحهٔ ۱۰)

نکته: اگر $A(x_۰, y_۰)$ نقطه‌ای روی نمودار تابع $y=f(x)$ باشد، آن‌گاه نقطهٔ متناظر با A روی نمودار تابع $y=cf(ax+b)+d$ به‌صورت $A'(\frac{x_۰-b}{a}, cy_۰+d)$ است.

۶

$$\begin{cases} p(-۲)=۰ \ (۰/۲۵) \\ p(۱)=۲ \ (۰/۲۵) \end{cases} \xrightarrow{\text{جای‌گذاری در } p(x)} \begin{cases} ۲(-۸)+۴a-b(-۲)+۲=۰ \\ ۲(۱)+a-b+۲=۲ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۴a+۲b=۱۴ \\ a-b=-۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۲a+b=۷ \\ a-b=-۲ \end{cases} (۰/۲۵) \Rightarrow ۳a=۵ \Rightarrow a=\frac{۵}{۳} \ (۰/۲۵)$$

$$\xrightarrow{\text{جای‌گذاری در معادلهٔ دوم}} \frac{۵}{۳}-b=-۲ \Rightarrow b=\frac{۱۱}{۳} \ (۰/۲۵)$$

(فصل ۱، صفحهٔ ۱۹)

درسنامه:
- باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $p(x)=a_n x^n + a_{n-۱}x^{n-۱}+\dots+a_۱x+a_۰$ بر عبارت $ax+b$ است از $r(x)=p(-\frac{b}{a})$.
- اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم $p(x)$ بر $ax+b$ برابر صفر باشد، آن‌گاه $p(x)$ بر $ax+b$ بخش‌پذیر است و داریم $p(\frac{-b}{a})=۰$.

۷

$T=\frac{۲\pi}{|۴|}=\frac{\pi}{۲}$ (۰/۲۵)

$\max=|-۳|+۲=۵$ (۰/۲۵)

(فصل ۲، صفحهٔ ۲۷)

نکته: تابع $y=a\sin(bx)+c$ دارای دورهٔ تناوب $T=\frac{۲\pi}{|b|}$ و مقدار ماکزیمم $|a|+c$ است.

۸

$۲+۳\sin x=\cos ۲x \Rightarrow ۲+۳\sin x=۱-۲\sin^۲ x$ (۰/۲۵)

$\Rightarrow ۲\sin^۲x+۳\sin x+۱=۰, \Delta=(۳)^۲-۴(۲)(۱)=۱ \Rightarrow \sin x=\frac{-۳\pm\sqrt{۱}}{۲(۲)}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x=-\frac{۱}{۲} \ (۰/۲۵) \xrightarrow{\sin(-\frac{\pi}{۶})=-\frac{۱}{۲}} \begin{cases} x=۲k\pi-\frac{\pi}{۶} \ (۰/۲۵) \\ x=(۲k+۱)\pi+\frac{\pi}{۶} \ (۰/۲۵) \end{cases} (k\in\mathbb{Z}) \\ \sin x=-۱ \ (۰/۲۵) \xrightarrow[\text{حالت خاص}]{\sin(-\frac{\pi}{۲})=-۱} x=۲k\pi-\frac{\pi}{۲} \ (k\in\mathbb{Z}) \ (۰/۲۵) \end{cases}$$

(فصل ۲، صفحهٔ ۳۷)

درسنامه:
- جواب‌های کلی معادلهٔ مثلثاتی $\sin x=\sin\alpha$ به‌صورت $x=۲k\pi+\alpha$ و $x=(۲k+۱)\pi-\alpha$ است که $k\in\mathbb{Z}$.
- جواب‌های کلی معادلهٔ مثلثاتی $\sin x=-۱$ که یک حالت خاص است به‌صورت $x=۲k\pi-\frac{\pi}{۲}$ است که $k\in\mathbb{Z}$. در این معادله اگر جواب را به‌صورت $x=(۲k+۱)\pi+\frac{\pi}{۲}$ بنویسید فقط جواب‌های تکراری به دست می‌آید.
- نسبت‌های مثلثاتی دو برابر کمان: $\cos ۲\alpha=۱-۲\sin^۲\alpha$

۹

$$\overbrace{\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{۱-\tan\alpha\cdot\tan\beta}}^{(۰/۲۵)}=\overbrace{\frac{\frac{۲}{۳}+(-۱)}{۱-(\frac{۲}{۳})(-۱)}}^{(۰/۲۵)}=\frac{-\frac{۱}{۳}}{\frac{۵}{۳}}=-\frac{۱}{۵} \ (۰/۲۵)$$

(فصل ۲، صفحهٔ ۴۲)

نکته: $\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{۱-\tan\alpha\cdot\tan\beta}$

۱۰ الف) **روش اول**

$$\lim_{x\to ۰^+}\frac{[x]+\cos x}{\sin x}=\lim_{x\to ۰^+}\frac{\overbrace{[۰^+]}^{۰}+\cos x}{\sin x}$$

$$=\lim_{x\to ۰^+}\frac{\cos x}{\sin x}=\frac{\overbrace{۱}^{(۰/۲۵)}}{\underbrace{۰^+}_{(۰/۲۵)}}=+\infty \ (۰/۲۵)$$

روش دوم

$$\lim_{x\to ۰^+}\frac{[x]+\cos x}{\sin x}=\lim_{x\to ۰^+}(\frac{[x]}{\sin x}+\frac{\cos x}{\sin x}) \ (۰/۲۵)$$

$$=\lim_{x\to ۰^+}\frac{\overbrace{[۰^+]}^{۰}}{\sin x}+\lim_{x\to ۰^+}\cot x=\overbrace{۰+\infty}^{(۰/۲۵)}=+\infty \ (۰/۲۵)$$

(فصل ۳، صفحهٔ ۵۳)

> **حواستون باشه:** در مسائل حد، اگر تابع دارای جزءصحیح است، ابتدا مقدار جزءصحیح را به دست آورید و جای‌گذاری کنید، سپس حد عبارت حاصل را محاسبه کنید.

ب) $\lim_{x\to-\infty}\frac{-۴x^۳+۵x+۲}{۷x^۳+۳x^۲}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-۴x^۳}{۷x^۳}=-\frac{۴}{۷}$ (۰/۵)

(فصل ۳، صفحهٔ ۶۶)

درسنامه: اگر $p(x)=a_m x^m+a_{m-۱}x^{m-۱}+\dots+a_۱x+a_۰$ یک چندجمله‌ای از درجهٔ m باشد $(a_m\neq ۰)$ و $q(x)=b_n x^n+b_{n-۱}x^{n-۱}+\dots+b_۱x+b_۰$ یک چندجمله‌ای از درجهٔ n باشد $(b_n\neq ۰)$، آن‌گاه برای تابع گویای $\frac{p(x)}{q(x)}$ داریم:

الف) اگر $m=n$، آن‌گاه $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{p(x)}{q(x)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_m x^m}{b_n x^n}=\frac{a_m}{b_n}$.

ب) اگر $m<n$، آن‌گاه $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{p(x)}{q(x)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_m x^m}{b_n x^n}=۰$.

پ) اگر $m>n$، آن‌گاه $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{p(x)}{q(x)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_m x^m}{b_n x^n}=\pm\infty$.

۱۶ نقاط بحرانی را می‌یابیم:

$$f'(x)=-\frac{2}{3}(3x^2)-2x+4=-2x^2-2x+4 \quad (۰/۲۵)$$

$$\xrightarrow{f'(x)=0} x^2+x-2=0 \Rightarrow (x+2)(x-1)=0 \Rightarrow x=-2\,,\,x=1 \quad (۰/۲۵)$$

همچنین نقاط $x=-3$ و $x=2$ نیز نقاط بحرانی‌اند. زیرا مشتق در نقاط ابتدا و انتهای بازه وجود ندارد.

با محاسبهٔ مقدار تابع در این نقاط و تشکیل جدول رفتار تابع داریم:

x	-3		-2		1		2
$f'(x)$	∄	$-$	0	$+$	0	$-$	∄
$f(x)$	-2	↘	$-\frac{17}{3}$	↗	$\frac{10}{3}$	↘	$-\frac{1}{3}$
	(۰/۲۵)		(۰/۲۵)		(۰/۲۵)		(۰/۲۵)

مقدار مینیمم مطلق تابع f برابر با $y=-\frac{17}{3}$ (۰/۲۵) و مقدار ماکزیمم مطلق آن برابر با $y=\frac{10}{3}$ (۰/۲۵) است.

(فصل ۵، صفحهٔ ۱۱۶)

دقت کنیم: نقاط بحرانی نقاطی از دامنهٔ تابع هستند که مشتق تابع در آن نقاط صفر است یا مشتق در آن نقاط وجود ندارد و نقاط اکسترمم تابع از بین نقاط بحرانی انتخاب می‌شوند!

۱۷

$$\begin{cases} f'(x)=3x^2+2ax+b \ (۰/۲۵) \\ f''(x)=6x+2a \ (۰/۲۵) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(2)=0 \\ f''(0)=0 \end{cases} (۰/۲۵)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 12+4a+b=0 \xrightarrow{\text{با جای‌گذاری } *} b=-12 \ (۰/۲۵) \\ 2a=0 \Rightarrow a=0 \ * \ (۰/۲۵) \end{cases}$$

(فصل ۵، صفحهٔ ۱۳۱)

نکته: ▪ اگر تابع f در نقطهٔ c از دامنه‌اش مشتق‌پذیر باشد و $x=c$ نقطهٔ اکسترمم نسبی تابع باشد، آن‌گاه $f'(c)=0$.

▪ اگر تابع f در نقطهٔ c از دامنه‌اش دارای مشتق دوم باشد و نقطهٔ $x=c$ نقطهٔ عطف تابع باشد، آن‌گاه $f''(c)=0$.

▪ توابع چندجمله‌ای روی $\mathbb{R}$ پیوسته و مشتق‌پذیرند و مشتق دوم آن‌ها نیز موجود است.

درسنامک: ▪ مختصات نقطه‌های اکسترمم نسبی و عطف در تابع f صدق می‌کند.

▪ در توابع چندجمله‌ای، طول نقاط اکسترمم نسبی f' و طول نقطهٔ عطف f'' را صفر می‌کند.

۱۸

نکته: اگر $P(x)$ و $Q(x)$ دو چندجمله‌ای باشند، آن‌گاه دامنهٔ تابع گویای $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ عبارت است از:

$$D_f=\{x\in\mathbb{R}\,|\,Q(x)\neq 0\}$$

با توجه به نکتهٔ بیان‌شده دامنهٔ تابع f را مشخص می‌کنیم:

$$D_f=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x-1\neq 0\}=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x\neq 1\}\Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{1\}$$

اینک محل برخورد نمودار تابع با محور مختصات را می‌یابیم:

برخورد با محور x: $y=0 \Rightarrow 2x+4=0 \Rightarrow x=-2$ (۰/۲۵)

برخورد با محور y: $x=0 \Rightarrow f(0)=\frac{0+4}{0-1}\Rightarrow y=-4$ (۰/۲۵)

برای پیداکردن مجانب افقی کافی است حد زیر را محاسبه کنیم:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x+4}{x-1}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x}{x}=2$$

بنابراین خط $y=2$ مجانب افقی تابع است. (۰/۲۵)

برای پیداکردن مجانب قائم حدود زیر را محاسبه می‌کنیم:

$$\lim_{x\to1^+}\frac{2x+4}{x-1}=\frac{6}{0^+}=+\infty$$

$$\lim_{x\to1^-}\frac{2x+4}{x-1}=\frac{6}{0^-}=-\infty$$

بنابراین خط $x=1$ مجانب قائم تابع است. (۰/۲۵)

با محاسبهٔ مشتق تابع f وجود نقاط بحرانی را بررسی می‌کنیم:

$$f'(x)=\frac{2(x-1)-1(2x+4)}{(x-1)^2}\Rightarrow f'(x)=\frac{-6}{(x-1)^2}\ ;\ x\neq 1$$

تابع f' در تمام نقاط دامنهٔ f تعریف شده و همواره مخالف صفر است؛ پس تابع f فاقد نقطهٔ اکسترمم است و چون همواره $f'(x)<0$، پس نمودار تابع f روی بازه‌های $(-\infty,1)$ و $(1,+\infty)$ اکیداً نزولی است.

حالا f'' را محاسبه می‌کنیم:

$$f''(x)=\frac{0-(-6)(2)(x-1)}{(x-1)^4}=\frac{12}{(x-1)^3}$$

تابع f'' در تمام نقاط دامنهٔ تابع f تعریف شده و مخالف صفر است؛ پس تابع f فاقد نقطهٔ عطف است. جهت تقعر تابع f روی بازهٔ $(-\infty,1)$ رو به پایین و روی بازهٔ $(1,+\infty)$ جهت تقعر رو به بالاست.

اطلاعات به دست آمده را در جدول رفتار زیر نمایش می‌دهیم:

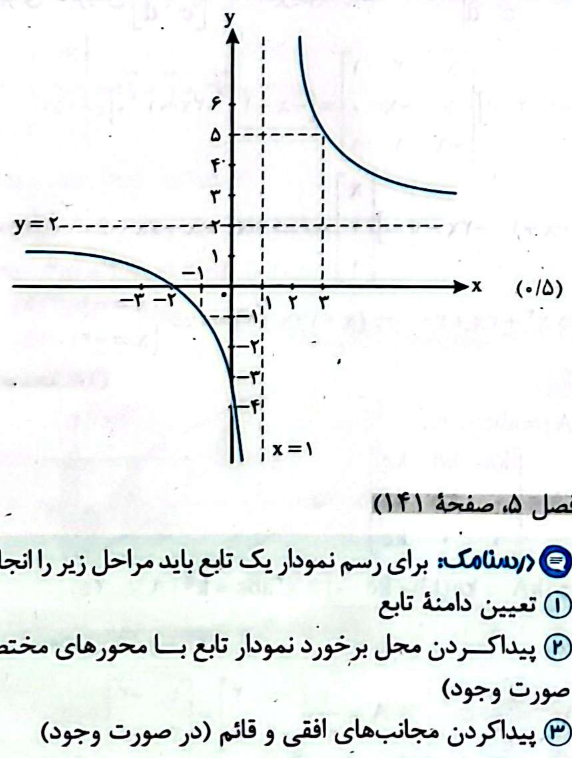
x	$-\infty$		-2		0		1		$+\infty$
f'		$-$		$-$		$-$	∥	$-$	
f''		∩		∩		∩	∥	∪	
f	2	↘	0	↘	-4	↘ $-\infty$	∥	$+\infty$ ↘	2

(۰/۲۵) (۰/۲۵)

نقاط کمکی:

x	-1	3
$f(x)$	-1	5

و اینک نمودار تابع را رسم می‌کنیم:



(فصل ۵، صفحهٔ ۱۴۱)

درسنامک: برای رسم نمودار یک تابع باید مراحل زیر را انجام دهیم:

① تعیین دامنهٔ تابع
② پیداکردن محل برخورد نمودار تابع با محورهای مختصات (در صورت وجود)
③ پیداکردن مجانب‌های افقی و قائم (در صورت وجود)
④ پیداکردن نقاط بحرانی (اکسترمم) و تشخیص یکنوایی
⑤ پیداکردن نقاط عطف و تشخیص جهت تقعر
⑥ رسم جدول رفتار تابع
⑦ مشخص‌کردن نقاط کمکی در صورت نیاز
⑧ رسم نمودار تابع

ردیف	سؤالات	نمره

استفاده از ماشین‌حساب ساده مجاز است.

۱ درستی یا نادرستی هر یک از عبارت‌های زیر را مشخص کنید. **۰/۵**

الف) تابع $f(x)=(1-x)^3$ ، تابعی اکیداً نزولی است.

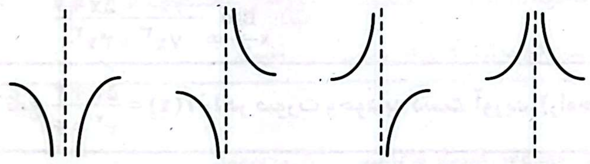
ب) دامنهٔ تابع $y=\tan x$ ، برابر با مجموعهٔ $D=\{x\in\mathbb{R} \mid x\neq 2k\pi+\frac{\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}\}$ است.

۲ جاهای خالی را با توجه به عبارت‌های داخل پرانتز، کامل کنید. ([ ] نماد جزءصحیح است.) **۰/۵**

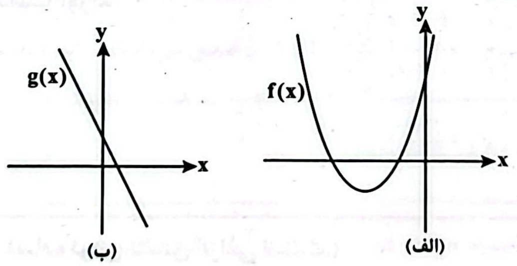
الف) مشتق تابع $f(x)=\sqrt{2}$ در $x=1$ ، برابر .... است. (صفر ـ یک)

ب) نقطه‌ای به طول $x=2$ ، نقطهٔ .... تابع $f(x)=[x]$ است. (ماکزیمم نسبی ـ مینیمم نسبی)

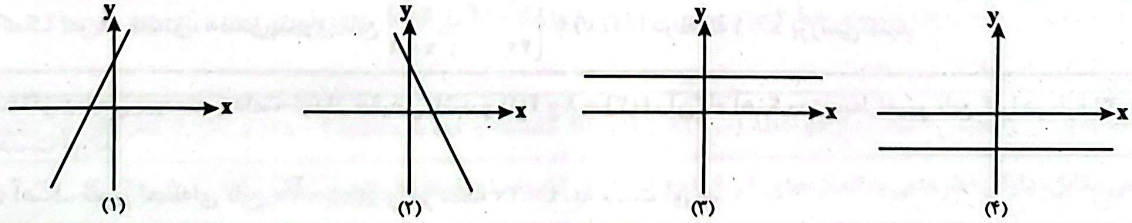
۳ کدام شکل زیر وضعیت نمودار تابع $f(x)=\frac{1}{1-\cos x}$ را در همسایگی $x=0$ نمایش می‌دهد؟ (شمارهٔ شکل مربوط به آن را در پاسخ‌برگ بنویسید.) **۰/۲۵**



۴ نمودار توابع f و g به‌صورت زیر است. **۰/۵**



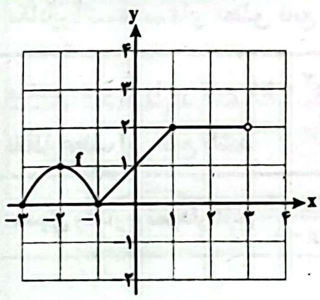
نمودار مشـــتق هر کدام از توابع f و g را از بین نمودارهای زیر انتخاب کنید. سپس شمارهٔ مربوط به آن را در پاسخ‌برگ بنویسید. (دو نمودار اضافه است.)

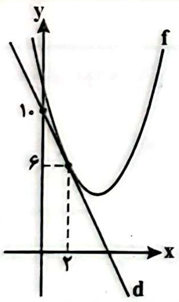


۵ نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. اگر تابع $g(x)=3f(\frac{1}{2}x)+1$ باشد، آن‌گاه: **۱/۵**

الف) دامنه و برد تابع g را به‌صورت بازه بنویسید.

ب) اگر $A=(-2,1)$ ، یک نقطه از نمودار تابع f باشد، آن‌گاه نقطهٔ متناظر A ، روی نمودار تابع g را بنویسید.



ردیف	سؤالات	نمره
	استفاده از ماشین‌حساب ساده مجاز است.	
۶	مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که چندجمله‌ای $p(x) = 2x^3 + ax^2 - bx + 2$ بر $x + 2$ بخش‌پذیر و باقی‌ماندهٔ تقسیم آن بر $x - 1$ برابر با ۲ باشد.	۱/۲۵
۷	دورهٔ تناوب و مقدار ماکزیمم تابع $f(x) = 2 - 3\sin 4x$ را به دست آورید.	۰/۵
۸	جواب‌های کلی معادلهٔ مثلثاتی $2 + 3\sin x = \cos 2x$ را به دست آورید.	۱/۵
۹	اگر $\tan\alpha = \frac{2}{3}$ و $\tan\beta = -1$ باشد، آن‌گاه مقدار $\tan(\alpha+\beta)$ را محاسبه کنید.	۰/۷۵
۱۰	حاصل حدهای زیر را در صورت وجود به‌دست آورید. ([ ] نماد جزءصحیح است.) الف) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{[x] + \cos x}{\sin x}$ ب) $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{-4x^3 + 5x + 2}{7x^3 + 3x^2}$	۱/۲۵
۱۱	مجانب‌های قائم و افقی نمودار تابع $f(x) = \frac{5x + 2}{x^2 - 4}$ را در صورت وجود به دست آورید. (راه‌حل نوشته شود.)	۱/۵
۱۲	مطابق شکل روبه‌رو، خط d بر نمودار تابع f در نقطهٔ (۲,۶) مماس است. حاصل $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(2) - f(2+h)}{3h}$ را به دست آورید.  	۰/۷۵
۱۳	مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده‌کردن مشتق الزامی نیست.) الف) $f(x) = (1 + \sin 5x)^3$ ب) $g(x) = (x^3 - 5x)(\sqrt{x^2 + 1})$	۱/۷۵
۱۴	به کمک تعریف مشتق، مشتق‌پذیری تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & ; x \geq 1 \\ 4x & ; x < 1 \end{cases}$ را در نقطهٔ $x = 1$ بررسی کنید.	۱/۲۵
۱۵	الف) اگر f تابعی پیوسته با دامنهٔ اعداد حقیقی باشد و $f(3) = 8 + f(1)$، آن‌گاه آهنگ متوسط تغییر تابع f را در بازهٔ $[1,3]$ به دست آورید. ب) آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع $g(x) = \sqrt[3]{x}$ را در نقطهٔ $x = 27$، به دست آورید.	۱
۱۶	مقادیر اکسترمم‌های مطلق تابع $f(x) = \frac{-2}{3}x^3 - x^2 + 4x + 1$ را در بازهٔ $[-3,2]$ به دست آورید.	۲
۱۷	مقادیر a و b را در تابع $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ طوری به دست آورید که $x = 2$، طول نقطهٔ اکسترمم نسبی و $x = 0$، طول نقطهٔ عطف این تابع باشد.	۱/۲۵
۱۸	جدول رفتار و نمودار تابع $f(x) = \frac{2x + 4}{x - 1}$ را رسم کنید.	۲
	موفق باشید جمع نمره	۲۰

⑨ تنظیم یک جدول که با خلاصه‌کردن اطلاعات توابع f، f' و f'' در آن تشخیص چگونگی شکل نمودار آسان‌تر شود.

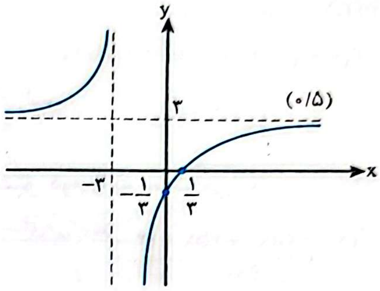
⑩ رسم نمودار تابع با استفاده از اطلاعات قسمت‌های قبل.

⑪ در صورت نیاز از نقاط کمکی هم استفاده می‌کنیم.

$D_f = \mathbb{R} - \{-3\}$

$$\begin{cases} f'(x) = \dfrac{10}{(x+3)^2} & (0/25) \\ f''(x) = \dfrac{-20}{(x+3)^3} & (0/25) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -3 \text{ مجانب قائم } (0/25) \\ y = 3 \text{ مجانب افقی } (0/25) \end{cases}$$



x	$-\infty$	-3	$+\infty$
f'	+		+
f''	(+) ∪		(−) ∩
f	↗ $+\infty$		$-\infty$ ↗

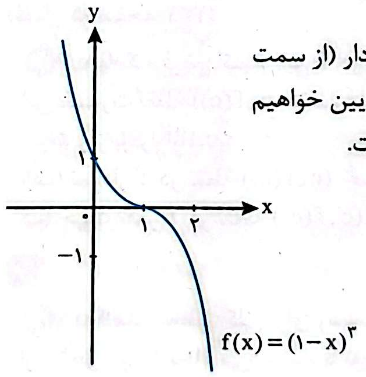
(0/5)

(فصل ۵، صفحهٔ ۱۴۲)

امتحان ۵ - حسابان (۲)

۱ الف) درست (0/25) (فصل ۱، صفحهٔ ۱۷)

نمودار تابع $f(x) = (1-x)^3$ با قرینه‌کردن نمودار تابع $y = x^3$ نسبت به محور yها و سپس انتقال یک واحد به سمت راست به دست می‌آید:



واضح است که با حرکت روی نمودار (از سمت چپ به راست) همواره به سمت پایین خواهیم رفت؛ پس تابع f اکیداً نزولی است.

ب) نادرست (0/25) (فصل ۲، صفحهٔ ۳۲)

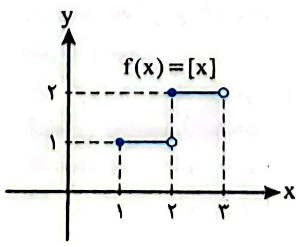
نکته: دامنهٔ تابع $y = \tan x$ به‌صورت زیر است:

$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$$

۲ الف) صفر (0/25) (فصل ۴، صفحهٔ ۹۲)

نکته: مشتق تابع ثابت در هر نقطه از دامنه‌اش برابر صفر است.

ب) ماکزیمم نسبی (0/25) (فصل ۵، صفحهٔ ۱۱۴)



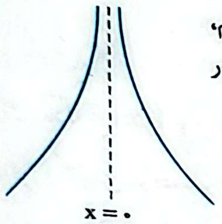
با توجه به نمودار تابع $f(x) = [x]$ مشاهده می‌شود در همسایگی نقطهٔ $x = 2$، مقدار $f(2)$ همواره بزرگ‌تر یا مساوی با سایر مقادیر تابع در این همسایگی است؛ پس این نقطه ماکزیمم نسبی است.

۳ شکل شمارهٔ (۴) (0/25) (فصل ۳، صفحهٔ ۵۸)

درسنامک: در این نوع سؤال‌ها کافی است حد چپ و راست تابع را در نزدیکی مجانب قائم بررسی کنیم. در این سؤال $x = 0$ است؛ پس:

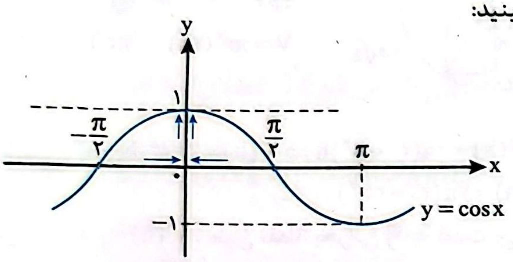
$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{1-\cos x} = \frac{1}{1-1^-} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{1-\cos x} = \frac{1}{1-1^-} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

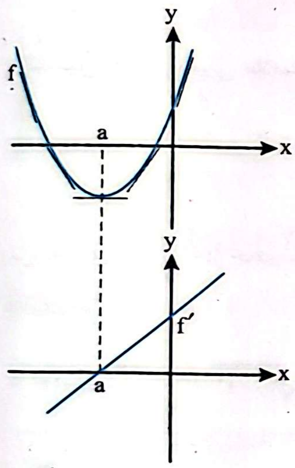


و این یعنی وقتی به نقطهٔ $x = 0$ نزدیک می‌شویم، مقادیر تابع به $+\infty$ میل می‌کنند. نمودار تابع در اطراف این نقطه تقریباً به شکل روبه‌رو است.

نکته: اگر روی نمودار تابع $y = \cos x$ به نقطهٔ $x = 0$ نزدیک شویم، مقادیر تابع با مقدارهای کمتر از یک به عدد یک نزدیک می‌شوند. نمودار زیر را ببینید:



۴ الف) شکل شمارهٔ (۱) (0/25)



با رسم خط‌های مماس بر نمودار تابع f مشاهده می‌شود در بازهٔ $(-\infty, a)$ شیب خط‌های مماس منفی است و با نزدیک‌شدن به نقطهٔ $x = a$ شیب خطوط مماس افزایش می‌یابد تا در نقطهٔ $x = a$ شیب خط مماس دقیقاً برابر صفر می‌شود و در ادامه در بازهٔ $(a, +\infty)$ شیب خطوط مماس افزایش می‌یابد. بنابراین مقدار تابع مشتق باید در بازهٔ $(-\infty, a)$ منفی باشد، یعنی نمودار f' زیر محور xها باشد.

در نقطهٔ $x = a$ مقدار مشتق تابع برابر صفر است، یعنی نمودار f' در نقطهٔ $x = a$ محور x را قطع می‌کند.

مقدار تابع مشتق باید در بازهٔ $(a, +\infty)$ مثبت باشد، یعنی نمودار f' بالای محور xها باشد.

ب) شکل شمارهٔ (۴) (0/25)

نمودار تابع g مربوط به یک تابع خطی با شیب منفی است، پس مشتق آن یک مقدار همواره منفی و ثابت است. در نتیجه نمودار g' یک خط افقی زیر محور xها است.

(فصل ۴، صفحهٔ ۱۰۰)

۵ الف)

$D_g : -3 \leq \frac{1}{2}x < 3 \Rightarrow -6 \leq x < 6 \Rightarrow D_g = [-6, 6]$ (0/5)

حواستون باشه: با توجه به نمودار، دامنهٔ تابع f بازهٔ $[-3, 3)$ است، یعنی ورودی‌های تابع f باید در این بازه قرار بگیرند، در نتیجه $\frac{1}{2}x$ هم ناچار است در این بازه باشد!

$R_g: 0 \le f(x) \le 2 \xrightarrow{\times 3} 0 \le 3f(x) \le 6$

$\xrightarrow{+1} 1 \le 3f(x)+1 \le 7 \Rightarrow R_g=[1,7]$ (۰/۵)

(فصل ۱، صفحهٔ ۱۰)

حواستون باشه: وجود ضریب $\frac{1}{2}$ برای x، تأثیری روی برد تابع g ندارد و در نتیجه برد تابع $y=3f(x)+1$ همان برد تابع $g(x)=3f(\frac{1}{2}x)+1$ است.

درسنامه: اگر تابع $y=f(x)$ با دامنهٔ $[x_0, x_1]$ و برد $[y_0, y_1]$ موجود باشد، آن‌گاه دامنه و برد تابع $g(x)=cf(ax+b)+d$ به‌صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$D_g=[\frac{x_0-b}{a}, \frac{x_1-b}{a}]$$

$$R_g=[cy_0+d, cy_1+d]$$

ب) نقطهٔ $A'(-4,4)$ روی نمودار تابع g متناظر با نقطهٔ A روی نمودار تابع f است. (۰/۵)

$$(-2,1)\in f \xrightarrow{g(x)=3f(\frac{1}{2}x)+1} (2\times(-2), 3(1)+1)\in g \Rightarrow (-4,4)\in g$$

(فصل ۱، صفحهٔ ۱۰)

نکته: اگر $A(x_0, y_0)$ نقطه‌ای روی نمودار تابع $y=f(x)$ باشد، آن‌گاه نقطهٔ متناظر با A روی نمودار تابع $y=cf(ax+b)+d$ به‌صورت $A'(\frac{x_0-b}{a}, cy_0+d)$ است.

۶

$$\begin{cases} p(-2)=0 \ (0/25) \\ p(1)=2 \ (0/25) \end{cases} \xrightarrow{\text{جای‌گذاری در } p(x)} \begin{cases} 2(-8)+4a-b(-2)+2=0 \\ 2(1)+a-b+2=2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4a+2b=14 \\ a-b=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a+b=7 \\ a-b=-2 \end{cases} (0/25) \Rightarrow 3a=5 \Rightarrow a=\frac{5}{3} \ (0/25)$$

$$\xrightarrow{\text{جای‌گذاری در معادلهٔ دوم}} \frac{5}{3}-b=-2 \Rightarrow b=\frac{11}{3} \ (0/25)$$

(فصل ۱، صفحهٔ ۱۹)

درسنامه: ■ باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+a_0$ بر عبارت $ax+b$ است از $r(x)=p(-\frac{b}{a})$.

■ اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم $p(x)$ بر $ax+b$ برابر صفر باشد، آن‌گاه $p(x)$ بر $ax+b$ بخش‌پذیر است و داریم $p(\frac{-b}{a})=0$.

۷

$T=\frac{2\pi}{|4|}=\frac{\pi}{2}$ (۰/۲۵)

$\max=|-3|+2=5$ (۰/۲۵)

(فصل ۲، صفحهٔ ۲۷)

نکته: تابع $y=a\sin(bx)+c$ دارای دورهٔ تناوب $T=\frac{2\pi}{|b|}$ و مقدار ماکزیمم $|a|+c$ است.

۸

$2+3\sin x=\cos 2x \Rightarrow 2+3\sin x=1-2\sin^2 x$ (۰/۲۵)

$\Rightarrow 2\sin^2 x+3\sin x+1=0, \Delta=(3)^2-4(2)(1)=1 \Rightarrow \sin x=\frac{-3\pm\sqrt{1}}{2(2)}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x=-\frac{1}{2} \ (0/25) \xrightarrow{\sin(-\frac{\pi}{6})=-\frac{1}{2}} \begin{cases} x=2k\pi-\frac{\pi}{6} \ (0/25) \\ x=(2k+1)\pi+\frac{\pi}{6} \ (0/25) \end{cases} (k\in\mathbb{Z}) \\ \sin x=-1 \ (0/25) \xrightarrow[\text{حالت خاص}]{\sin(-\frac{\pi}{2})=-1} x=2k\pi-\frac{\pi}{2} \ (k\in\mathbb{Z}) \ (0/25) \end{cases}$$

(فصل ۲، صفحهٔ ۳۷)

درسنامه: ■ جواب‌های کلی معادلهٔ مثلثاتی $\sin x=\sin\alpha$ به‌صورت $x=2k\pi+\alpha$ و $x=(2k+1)\pi-\alpha$ است که $k\in\mathbb{Z}$.

■ جواب‌های کلی معادلهٔ مثلثاتی $\sin x=-1$ که یک حالت خاص است به‌صورت $x=2k\pi-\frac{\pi}{2}$ است که $k\in\mathbb{Z}$. در این معادله اگر جواب را به‌صورت $x=(2k+1)\pi+\frac{\pi}{2}$ بنویسید فقط جواب‌های تکراری به دست می‌آید!

■ نسبت‌های مثلثاتی دو برابر کمان: $\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha$

۹

$$\overbrace{\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta}}^{(0/25)}=\overbrace{\frac{\frac{2}{3}+(-1)}{1-(\frac{2}{3})(-1)}}^{(0/25)}=\frac{-\frac{1}{3}}{\frac{5}{3}}=-\frac{1}{5} \ (0/25)$$

(فصل ۲، صفحهٔ ۴۲)

نکته: $\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta}$

۱۰ الف) **روش اول**

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{[x]+\cos x}{\sin x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\overbrace{[0^+]}^{0}+\cos x}{\sin x}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\cos x}{\sin x}=\frac{\overbrace{1}^{(0/25)}}{\underbrace{0^+}_{(0/25)}}=+\infty \ (0/25)$$

روش دوم

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{[x]+\cos x}{\sin x}=\lim_{x\to 0^+}(\frac{[x]}{\sin x}+\frac{\cos x}{\sin x}) \ (0/25)$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\overbrace{[0^+]}^{0}}{\sin x}+\lim_{x\to 0^+}\cot x=\overbrace{0+\infty}^{(0/25)}=+\infty \ (0/25)$$

(فصل ۳، صفحهٔ ۵۳)

حواستون باشه: در مسائل حد، اگر تابع دارای جزءصحیح است، ابتدا مقدار جزءصحیح را به دست آورید و جای‌گذاری کنید، سپس حد عبارت حاصل را محاسبه کنید.

ب) $\lim_{x\to -\infty}\frac{-4x^3+5x+2}{7x^3+3x^2}=\lim_{x\to -\infty}\frac{-4x^3}{7x^3}=-\frac{4}{7}$ (۰/۵)

(فصل ۳، صفحهٔ ۶۶)

درسنامه:

اگر $p(x)=a_mx^m+a_{m-1}x^{m-1}+\dots+a_1x+a_0$ یک چندجمله‌ای از درجهٔ m باشد $(a_m\neq 0)$ و $q(x)=b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+\dots+b_1x+b_0$ یک چندجمله‌ای از درجهٔ n باشد $(b_n\neq 0)$، آن‌گاه برای تابع گویای $\frac{p(x)}{q(x)}$ داریم:

الف) اگر $m=n$، آن‌گاه $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{p(x)}{q(x)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_mx^m}{b_nx^n}=\frac{a_m}{b_n}$.

ب) اگر $m<n$، آن‌گاه $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{p(x)}{q(x)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_mx^m}{b_nx^n}=0$.

پ) اگر $m>n$، آن‌گاه $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{p(x)}{q(x)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_mx^m}{b_nx^n}=\pm\infty$.

۱۱ ابتدا مجانب افقی تابع را می‌یابیم:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{۵x+۲}{x^۲-۴}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{۵x}{x^۲}=۰\ (۰/۲۵)$$

خط $y=۰$ مجانب افقی تابع است. (۰/۲۵)

برای پیداکردن مجانب‌های قائم، ابتدا ریشه‌های عبارت مخرج کسر را محاسبه می‌کنیم: $x^۲-۴=۰\Rightarrow x=\pm۲$

حالا حدهای مقابل را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to۲^+}\dfrac{۵x+۲}{x^۲-۴}=\dfrac{۱۲}{۰^+}=+\infty\\ \text{یا}\\ \lim\limits_{x\to۲^-}\dfrac{۵x+۲}{x^۲-۴}=\dfrac{۱۲}{۰^-}=-\infty\end{cases}\quad (۰/۲۵)$$

خط $x=۲$ مجانب قائم تابع است. (۰/۲۵)

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to-۲^+}\dfrac{۵x+۲}{x^۲-۴}=\dfrac{-۸}{۰^-}=+\infty\\ \text{یا}\\ \lim\limits_{x\to-۲^-}\dfrac{۵x+۲}{x^۲-۴}=\dfrac{-۸}{۰^+}=-\infty\end{cases}\quad (۰/۲۵)$$

خط $x=-۲$ مجانب قائم تابع است. (۰/۲۵)

(فصل ۳، صفحهٔ ۶۹)

درسنامک:

- خط $x=a$ مجانب قائم تابع $y=f(x)$ است، هرگاه حداقل یکی از شرط‌های زیر برقرار باشد:

① $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=+\infty$ ③ $\lim\limits_{x\to a^-}f(x)=+\infty$

② $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=-\infty$ ④ $\lim\limits_{x\to a^-}f(x)=-\infty$

- در توابع گویا برای پیداکردن مجانب‌های قائم کافی است ریشه‌های عبارت مخرج را محاسبه کنید و بی‌نهایت‌بودن حد تابع را در اطراف این نقاط بررسی کنید.
- خط $y=b$ مجانب افقی تابع $y=f(x)$ است، هرگاه حداقل یکی از شرط‌های زیر برقرار باشد:

① $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=b$ ② $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=b$

- در توابع گویا اگر درجهٔ عبارت صورت کوچک‌تر یا مساوی با درجهٔ عبارت مخرج باشد، آن‌گاه مجانب افقی وجود دارد.

۱۲ ابتدا حد داده‌شده را کمی ساده‌تر می‌نویسیم:

$$\lim_{h\to۰}\frac{f(۲)-f(۲+h)}{۳h}=\lim_{h\to۰}\left(-\frac{۱}{۳}\times\frac{f(۲+h)-f(۲)}{h}\right)$$

$$=-\frac{۱}{۳}\lim_{h\to۰}\frac{f(۲+h)-f(۲)}{h}$$

می‌دانیم $\lim\limits_{h\to۰}\dfrac{f(۲+h)-f(۲)}{h}$ در صورت وجود برابر با شیب خط مماس بر نمودار تابع f در نقطهٔ $x=۲$ است. از طرفی خط مماس از نقاط $(۲,۶)$ و $(۰,۱۰)$ می‌گذرد؛ بنابراین:

$$\overbrace{\lim_{h\to۰}\frac{f(۲+h)-f(۲)}{h}}^{(۰/۲۵)}=f'(۲)=\frac{۱۰-۶}{۰-۲}=\frac{۴}{-۲}=-۲\ (۰/۲۵)$$

در نتیجه داریم:

$$\lim_{h\to۰}\frac{f(۲)-f(۲+h)}{۳h}=-\frac{۱}{۳}(-۲)=\frac{۲}{۳}\ (۰/۲۵)$$

(فصل ۴، صفحهٔ ۷۷)

نکته: شیب خط مماس بر منحنی تابع f در نقطهٔ $A(a,f(a))$ از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$\text{شیب خط مماس بر منحنی در نقطهٔ } A=\lim_{h\to۰}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

به شرط آن‌که این حد موجود و متناهی باشد.

۱۳ الف)

$$f'(x)=\underbrace{۳}_{(۰/۲۵)}\underbrace{(۱+\sin۵x)^۲}_{(۰/۲۵)}\underbrace{(\cos۵x)(۵)}_{(۰/۲۵)}$$

ب) **روش اول**

$$f'(x)=\underbrace{(۳x^۲-۵)}_{(۰/۲۵)}\underbrace{(\sqrt{x^۲+۱})}_{(۰/۲۵)}+\underbrace{(x^۳-۵x)}_{(۰/۲۵)}\underbrace{\left(\frac{۲x}{۲\sqrt{x^۲+۱}}\right)}_{(۰/۲۵)}$$

روش دوم

$$f'(x)=\underbrace{(۳x^۲-۵)}_{(۰/۲۵)}\underbrace{(\sqrt{x^۲+۱})}_{(۰/۲۵)}+\underbrace{\frac{۱}{۲}(۲x)(x^۲+۱)^{-\frac{۱}{۲}}}_{(۰/۲۵)}\underbrace{(x^۳-۵x)}_{(۰/۲۵)}$$

(فصل ۴، صفحهٔ ۹۶)

مشاوره: تنها راه کسب نمرهٔ این سؤال حفظ‌کردن قواعد مشتق‌گیری است، از آن‌ها غافل نشوید.

۱۴ **روش اول** مشتق چپ و راست را در نقطهٔ $x=۱$ محاسبه می‌کنیم:

$$f'_+(۱)=\overbrace{\lim_{x\to۱^+}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}=\lim_{x\to۱^+}\frac{x^۲+۳-۴}{x-۱}=\lim_{x\to۱^+}\frac{x^۲-۱}{x-۱}}^{(۰/۲۵)}$$

$$=\lim_{x\to۱^+}\frac{(x-۱)(x+۱)}{(x-۱)}=\lim_{x\to۱^+}(x+۱)=۲\ (۰/۲۵)$$

$$f'_-(۱)=\underbrace{\lim_{x\to۱^-}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}=\lim_{x\to۱^-}\frac{۴x-۴}{x-۱}}_{(۰/۲۵)}=\lim_{x\to۱^-}\frac{۴(x-۱)}{x-۱}=۴\ (۰/۲۵)$$

چون $f'_+(۱)\neq f'_-(۱)$، بنابراین تابع f در نقطهٔ $x=۱$ مشتق‌پذیر نیست. (۰/۲۵)

روش دوم

$$f'_+(۱)=\overbrace{\lim_{h\to۰^+}\frac{f(۱+h)-f(۱)}{h}=\lim_{h\to۰^+}\frac{(۱+h)^۲+۳-۴}{h}}^{(۰/۲۵)}$$

$$=\lim_{h\to۰^+}\frac{h^۲+۲h+۱-۱}{h}=\lim_{h\to۰^+}\frac{h(h+۲)}{h}=\lim_{h\to۰^+}(h+۲)=۲\ (۰/۲۵)$$

$$f'_-(۱)=\overbrace{\lim_{h\to۰^-}\frac{f(۱+h)-f(۱)}{h}=\lim_{h\to۰^-}\frac{۴(۱+h)-۴}{h}}^{(۰/۲۵)}=\lim_{h\to۰^-}\frac{۴h}{h}=۴\ (۰/۲۵)$$

چون $f'_+(۱)\neq f'_-(۱)$، پس تابع f در نقطهٔ $x=۱$ مشتق‌پذیر نیست. (۰/۲۵)

(فصل ۴، صفحهٔ ۱۰۰)

نکته: اگر تابع f در نقطهٔ $x=a$ از دامنه‌اش پیوسته باشد، آن‌گاه f در $x=a$ مشتق‌پذیر است هرگاه مشتق چپ و راست در نقطهٔ $x=a$ موجود (متناهی) و با هم برابر باشند.

۱۵ الف)

$$\text{آهنگ متوسط تغییر تابع } f \text{ در بازهٔ } [۱,۳]=\frac{f(۳)-f(۱)}{۳-۱}\ (۰/۲۵)$$

$$=\frac{۸+f(۱)-f(۱)}{۲}=\frac{۸}{۲}=۴\ (۰/۲۵)$$

ب) آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع g در نقطهٔ $x=۲۷$ همان $g'(۲۷)$ است، ابتدا $g'(x)$ را به دست می‌آوریم:

$$g'(x)=\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{x^۲}}\ (۰/۲۵)$$

$$\text{آهنگ لحظه‌ای تغییر در } x=۲۷=g'(۲۷)=\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{۲۷^۲}}=\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{۳^۶}}=\frac{۱}{۲۷}\ (۰/۲۵)$$

(فصل ۴، صفحهٔ ۱۱۰)

۱۶ نقاط بحرانی را می‌یابیم:

$$f'(x) = -\frac{2}{3}(3x^2) - 2x + 4 = -2x^2 - 2x + 4 \quad (0/25)$$

$$\xrightarrow{f'(x)=0} x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow (x+2)(x-1) = 0 \Rightarrow x=-2,\ x=1 \quad (0/25)$$

همچنین نقاط $x=-3$ و $x=2$ نیز نقاط بحرانی‌اند، زیرا مشتق در نقاط ابتدا و انتهای بازه وجود ندارد.

با محاسبهٔ مقدار تابع در این نقاط و تشکیل جدول رفتار تابع داریم:

x	-3		-2		1		2
$f'(x)$	تن	$-$	0	$+$	0	$-$	تن
$f(x)$	-2	↘	$-\frac{17}{3}$	↗	$\frac{10}{3}$	↘	$-\frac{1}{3}$
	(۰/۲۵)		(۰/۲۵)		(۰/۲۵)		(۰/۲۵)

مقدار مینیمم مطلق تابع f برابر با $y=-\frac{17}{3}$ (۰/۲۵) و مقدار ماکزیمم مطلق آن برابر با $y=\frac{10}{3}$ (۰/۲۵) است.

(فصل ۵، صفحهٔ ۱۱۶)

دقت کنیم: نقاط بحرانی نقاطی از دامنهٔ تابع هستند که مشتق تابع در آن نقاط صفر است یا مشتق در آن نقاط وجود ندارد و نقاط اکسترمم تابع از بین نقاط بحرانی انتخاب می‌شوند!

۱۷

$$\begin{cases} f'(x)=3x^2+2ax+b \quad (0/25) \\ f''(x)=6x+2a \quad (0/25) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(2)=0 \\ f''(0)=0 \end{cases} \quad (0/25)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 12+4a+b=0 \xrightarrow{\text{با جای‌گذاری } *} b=-12 \quad (0/25) \\ 2a=0 \Rightarrow a=0 \; * \quad (0/25) \end{cases}$$

(فصل ۵، صفحهٔ ۱۳۱)

نکته: ▪ اگر تابع f در نقطهٔ c از دامنه‌اش مشتق‌پذیر باشد و $x=c$ نقطهٔ اکسترمم نسبی تابع باشد، آن‌گاه $f'(c)=0$.

▪ اگر تابع f در نقطهٔ c از دامنه‌اش دارای مشتق دوم باشد و نقطهٔ $x=c$ نقطهٔ عطف تابع باشد، آن‌گاه $f''(c)=0$.

▪ توابع چندجمله‌ای روی $\mathbb{R}$ پیوسته و مشتق‌پذیرند و مشتق دوم آن‌ها نیز موجود است.

درسنامک: ▪ مختصات نقطه‌های اکسترمم نسبی و عطف در تابع f صدق می‌کند.

▪ در توابع چندجمله‌ای، طول نقاط اکسترمم نسبی f' و طول نقطهٔ عطف f'' را صفر می‌کند.

۱۸

نکته: اگر $P(x)$ و $Q(x)$ دو چندجمله‌ای باشند، آن‌گاه دامنهٔ تابع گویای $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ عبارت است از:

$$D_f=\{x\in\mathbb{R} \mid Q(x)\neq 0\}$$

با توجه به نکتهٔ بیان‌شده دامنهٔ تابع f را مشخص می‌کنیم:

$$D_f=\{x\in\mathbb{R} \mid x-1\neq 0\}=\{x\in\mathbb{R} \mid x\neq 1\} \Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{1\}$$

اینک محل برخورد نمودار تابع با محور مختصات را می‌یابیم:

برخورد با محور x: $y=0 \Rightarrow 2x+4=0 \Rightarrow x=-2$ (۰/۲۵)

برخورد با محور y: $x=0 \Rightarrow f(0)=\frac{0+4}{0-1} \Rightarrow y=-4$ (۰/۲۵)

برای پیداکردن مجانب افقی کافی است حد زیر را محاسبه کنیم:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x+4}{x-1}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x}{x}=2$$

بنابراین خط $y=2$ مجانب افقی تابع است. (۰/۲۵)

برای پیداکردن مجانب قائم حدود زیر را محاسبه می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{2x+4}{x-1}=\frac{6}{0^+}=+\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{2x+4}{x-1}=\frac{6}{0^-}=-\infty$$

بنابراین خط $x=1$ مجانب قائم تابع است. (۰/۲۵)

با محاسبهٔ مشتق تابع f وجود نقاط بحرانی را بررسی می‌کنیم:

$$f'(x)=\frac{2(x-1)-1(2x+4)}{(x-1)^2} \Rightarrow f'(x)=\frac{-6}{(x-1)^2} \ ; \ x\neq 1$$

تابع f' در تمام نقاط دامنهٔ f تعریف شده و همواره مخالف صفر است؛ پس تابع f فاقد نقطهٔ اکسترمم است و چون همواره $f'(x)<0$، پس نمودار تابع f روی بازه‌های $(-\infty,1)$ و $(1,+\infty)$ اکیداً نزولی است.

حالا f'' را محاسبه می‌کنیم:

$$f''(x)=\frac{0-(-6)(2)(x-1)}{(x-1)^4}=\frac{12}{(x-1)^3}$$

تابع f'' در تمام نقاط دامنهٔ تابع f تعریف شده و مخالف صفر است؛ پس تابع f فاقد نقطهٔ عطف است. جهت تقعر تابع f روی بازهٔ $(-\infty,1)$ رو به پایین و روی بازهٔ $(1,+\infty)$ جهت تقعر رو به بالاست.

اطلاعات به دست آمده را در جدول رفتار زیر نمایش می‌دهیم:

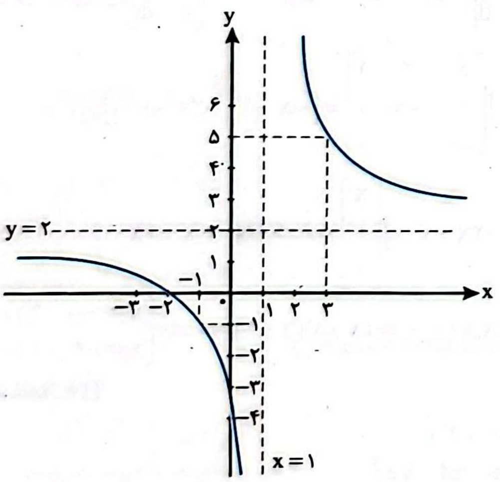
x	$-\infty$		-2		0		1		$+\infty$
f'		$-$		$-$		$-$	‖	$-$	
f''		∩		∩		∩	‖	∪ (+)	
f	2	↘	0	↘	-4	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	2

(۰/۲۵) (۰/۲۵)

نقاط کمکی:

x	-1	3
$f(x)$	-1	5

و اینک نمودار تابع را رسم می‌کنیم:



(۰/۵)

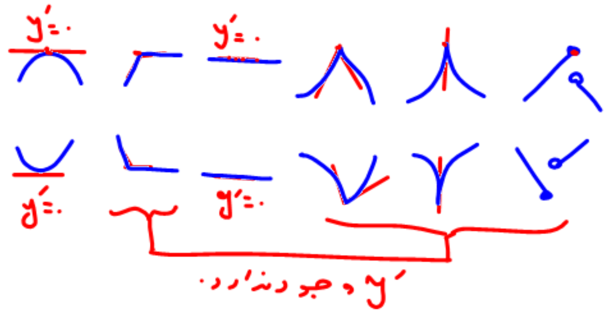
(فصل ۵، صفحهٔ ۱۴۱)

درسنامک: برای رسم نمودار یک تابع باید مراحل زیر را انجام دهیم:

① تعیین دامنهٔ تابع
② پیداکردن محل برخورد نمودار تابع با محورهای مختصات (در صورت وجود)
③ پیداکردن مجانب‌های افقی و قائم (در صورت وجود)
④ پیداکردن نقاط بحرانی (اکسترمم) و تشخیص یکنوایی
⑤ پیداکردن نقاط عطف و تشخیص جهت تقعر
⑥ رسم جدول رفتار تابع
⑦ مشخص‌کردن نقاط کمکی در صورت نیاز
⑧ رسم نمودار تابع

به ازای هر $\forall x \in (a,b) : f(c) \geq f(x)$ ماکزیمم نسبی $f(c)$

$\forall x \in (a,b) : f(c) \leq f(x)$ مینیمم نسبی $f(c)$



تابع ثابت همه جایش Max , min نسبی است.

$\pm\infty$ ، Max , min مطلق محسوب نمی‌شوند.

اصلاً لازم نیست در نقطهٔ Max , min نسبی مشتق صفر شود یا f پیوسته باشد.

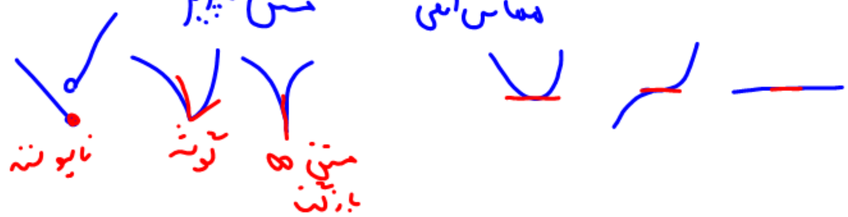
اگر در نقطهٔ Max یا min مشتق وجود داشته باشد حتماً صفر است

هر نقطهٔ اکسترمم (Max یا min) بحرانی است ولی عکس این مطلب درست نیست زیرا مثلاً در $y=x^3$ ولی $f'(0)=0$

$y=\sqrt[3]{x}$ با $x=0$ بحرانی است و اکسترمم نیست $f'(0)$ وجود ندارد

و $x=0$ بحرانی است ولی اکسترمم نیست.

نقطهٔ بحرانی: $c \in D_f$ که $\underbrace{f'(c)=0}_{\text{مماس افقی}}$ یا $\underbrace{f'(c)}_{\text{مشتق ناپذیر}}$ موجود نباشد.



تابع $y=\frac{1}{x}$ دارای هیچ نقطهٔ بحرانی نیست.

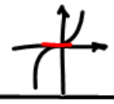
در تابع $f(x)=\begin{cases}x^2 & x\neq 0\\ 1 & x=0\end{cases}$ نقطه‌ای به طول صفر Max نسبی تابع است.

نقاط سر و ته بستهٔ بازه $[a,b]$ برای تابع f بحرانی هستند.

سر و ته بستهٔ بازه اکسترمم نسبی محسوب نمی‌شوند.

هر نقطهٔ بحرانی اکسترمم محسوب نمی‌شود.

مثل $x=0$ در $y=x^3$



حد کسری در ∞ : 3 حالت

الف) صورت و مخرج هم درجه : $L=\frac{a}{a'}$

ب) درجه مخرج > درجه صورت $L=0$

ج) درجه مخرج < درجه صورت $L=\infty$

تابع کسری دارای مجانب افقی است خط $y=\frac{a}{a'}$ (الف) یا $y=0$ (ب)

$$\lim_{x\to\infty} y=\frac{3x^2+x}{2x^2+1}=\frac{3}{2}=\frac{\text{ضریب پرتوان صورت}}{\text{ضریب پرتوان مخرج}}$$

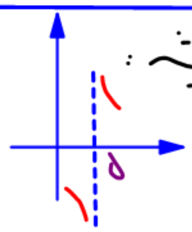
$$\lim_{x\to\infty} y=\frac{2x+1}{3x^2+x-7}=0$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{-3x^4}{2x+1}=-\frac{3x^4}{2x}=\lim_{x\to-\infty}-\frac{3}{2}x^3=-\frac{3}{2}(-\infty)^3=-\frac{3}{2}(-\infty)=+\infty$$

نکته: اگر $x\to\pm\infty$ ، $y\to b$ خط $y=b$ مجانب افقی است. برای یافتن مجانب افقی حد در ∞ می‌گیریم.

حد ∞ : جواب حد ∞ باشد:

$$\lim_{x\to 5}\frac{2x+3}{x-5}\begin{cases}x\to 5^- & \frac{13}{5^- -5=0^-}=-\infty\\ x\to 5^+ & \frac{13}{5^+ -5=0^+}=+\infty\end{cases}$$



نکته: اگر $x\to a$ و $y\to\pm\infty$

آن‌گاه خط $x=a$ مجانب قائم است

مجانب قائم دیگر توابع کسری و لگاریتمی است.  $y=\log_b^x$ ($b>1$) $x=0$ مجانب قائم. در تابع کسری مجانب قائم از حل مخرج = 0 به دست می‌آید که در 2 صورت ریشهٔ مخرج مجانب قائم نیست.

الف) در توابع کسری رادیکال زوج باشد که ریشه مخرج زیر آن را منفی کند. مثلاً برای $x=$

$y=\frac{\sqrt{x-1}}{x}$ مجانب قائم نیست. یا در $y=\frac{1}{\sqrt{x-1}}+\frac{1}{\sqrt{x-2}}$ خط $x=1$

مجانب قائم نیست ولی $x=2$ مجانب قائم است.

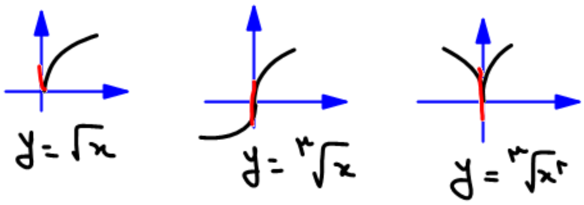
ب) ریشه مخرج، ریشه صورت باشد و صورت در ریشه مخرج ∞ نشود. مثلاً در

$$y=\frac{x^2+3x-4}{x^2-1}=\frac{\cancel{(x-1)}(x+4)}{\cancel{(x-1)}(x+1)}$$

فقط $x=-1$ مجانب قائم

نکته: هر جا بتوان بر تابع مماس افقی کشید مشتق صفر است و برعکس و هر جا بتوان مماس قائم کشید مشتق ∞ است

و برعکس.



نشان دهید که در $f(x)=\sqrt[3]{x^3(x-1)}$ در $x=1$ مماس قائم داریم.

تعریف مشتق در نقطه a

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

$$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x^3(x-1)}-\overset{\text{صفر}}{f(1)}}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x\sqrt[3]{x-1}}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x\,\cancel{\sqrt[3]{x-1}}}{\sqrt[3]{(x-1)^2}\,\cancel{\sqrt[3]{x-1}}}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

چون $f'(1)=+\infty$ در $x=1$ مماس قائم داریم.

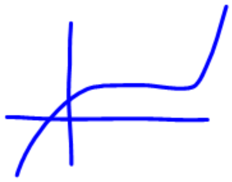
رسم $y=af(bx+c)+d$ از روی تابع $f(x)$:

① اگر $c>0$ بود c واحد به چپ اگر $c<0$، c واحد به راست

② x ها تقسیم بر $|b|$ اگر $b<0$ شکل قرینه نسبت به محور y ها

③ y ها ضرب در $|a|$ اگر $a<0$ " " " x ها

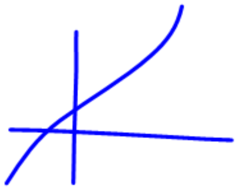
④ اگر $d>0$ باشد d واحد به بالا و اگر $d<0$، d واحد به پایین



$x_1 < x_2$

$f(x_1) < f(x_2)$

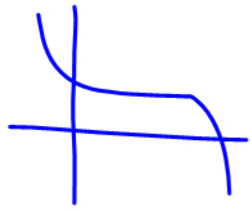
صعودی



$x_1 < x_2$

$f(x_1) < f(x_2)$

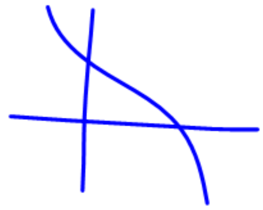
اکیداً صعودی



$x_1 < x_2$

$f(x_1) \geq f(x_2)$

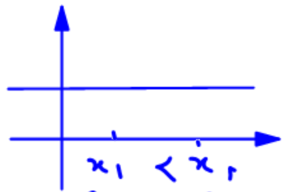
نزولی



$x_1 < x_2$

$f(x_1) > f(x_2)$

اکیداً نزولی



$x_1 < x_2$, $f(x_1) = f(x_2)$ } تابع ثابت هم صعودی هم نزولی

$$\begin{array}{c|l} P(x) & ax+b=0 \rightsquigarrow x = -\frac{b}{a} \\ \hline & Q(x) \end{array}$$

باقیمانده: $R = P\left(-\frac{b}{a}\right)$

⑦ $P(x) = Q(x)(ax+b) + R$

$P\left(-\frac{b}{a}\right) = R$

---

⑧ جواب کلی معادله مثلثاتی $6\sin^2 x + 2\sin^2 2x = 5$ را بدست آورید. اول باید کمان ها یکی شوند.

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = (1-\sin^2 x) - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x \rightsquigarrow \cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$

$* \quad 2\sin^2 x = 1 - \cos 2x$

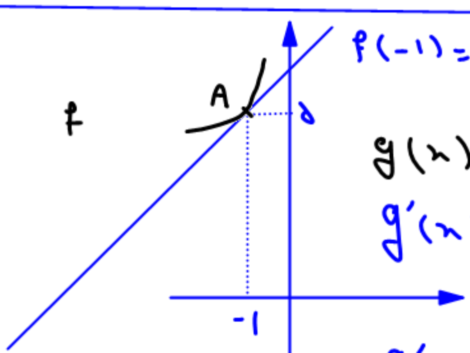
$3(2\sin^2 x) + 2\sin^2 2x - 5 = 0 \xrightarrow{*} 3(1-\cos 2x) + 2(1-\cos^2 2x) - 5 = 0$

$-3\cos 2x - 2\cos^2 2x = 0 \longrightarrow \cos 2x(-3 - 2\cos 2x) = 0 \begin{cases} \cos 2x = -\frac{3}{2} = -1.5 & \text{غ ق ق} \\ \cos 2x = 0 \\ 2x = k\pi + \frac{\pi}{2} \\ x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \end{cases}$

$y = f(u)$

$y' = u' f'(u)$

حل سؤال ⑫



$f(-1) = 5$

$f'(-1) = \frac{3}{4}$

$g(x) = \sqrt[3]{2x+1} \cdot f(x^3)$

$g'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{(2x+1)^2}} f(x^3) + 3x^2 f'(x^3) \sqrt[3]{2x+1}$

$g'(-1) = \frac{2}{3} f(-1) + 3\cancel{(-1)^2} f'(-1) \sqrt[3]{-1} = \frac{2}{3}(5) - 3\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{10}{3} - \frac{9}{4} = \frac{13}{12}$

(۱۳) بررسی مشتق پذیری تابع روبرو در $x=\frac{1}{3}$ به کمک تعریف مشتق:

$$f(x)=x\sqrt{9x^2-6x+1}$$

$$f(x)=x\sqrt{(3x-1)^2}=x|3x-1|=\begin{cases} x(3x-1) & 3x-1\geq 0 \quad x\geq\frac{1}{3} \\ -x(3x-1) & 3x-1<0 \quad x<\frac{1}{3}\end{cases}$$

اول بررسی پیوستگی: $l_1=l_2=f(\frac{1}{3})=0$ تابع f در $x=\frac{1}{3}$ پیوسته است

$$f'(\tfrac{1}{3})=\lim_{x\to\frac{1}{3}}\frac{f(x)-\overset{\text{صفر}}{f(\frac{1}{3})}}{x-\frac{1}{3}}\begin{cases} x\to\frac{1}{3}^+ & \lim \dfrac{x(3x-1)=3x\cancel{(x-\frac{1}{3})}}{\cancel{x-\frac{1}{3}}}=1 \\ x\to\frac{1}{3}^- & \lim \dfrac{-x(3x-1)=-3x\cancel{(x-\frac{1}{3})}}{\cancel{x-\frac{1}{3}}}=-1\end{cases}$$

$$f'_+(\tfrac{1}{3})\neq f'_-(\tfrac{1}{3}) \longrightarrow$$ f در $x=\frac{1}{3}$ مشتق ناپذیر

---

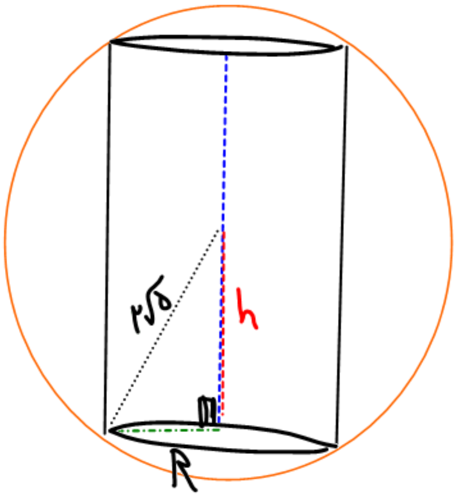
(۱۴) الف

$$f(x)=\frac{(9-2\sqrt{x})^3}{x^2+1} \qquad y=u^n \rightsquigarrow y'=nu'u^{n-1}$$

$$f'(x)=\frac{3\left(0-2\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\right)(9-2\sqrt{x})^2(x^2+1)-2x(9-2\sqrt{x})^3}{(x^2+1)^2}$$

---

(۱۵)



$$h^2+R^2=(2\sqrt{5})^2=20 \rightsquigarrow R^2=20-h^2$$

$$\text{حجم استوانه}=\underbrace{(\pi R^2)}_{\text{مساحت قاعده}}\underbrace{(2h)}_{\text{ارتفاع}}=2\pi hR^2$$

$$V=2\pi h(20-h^2)=2\pi(20h-h^3)$$

$$V'=2\pi(20-3h^2)=0 \rightsquigarrow h^2=\frac{20}{3}$$

$$h=\sqrt{\frac{20}{3}}$$

یافتن Max و min مطلق در بازه $[a,b]$: ابتدا با عمل $f'=0$ و f' ت.ن نقاط بحرانی را می‌یابیم در جدول زیر

x	a	c_1	c_2	b
$f(x)$	$f(a)$	$f(c_1)$	$f(c_2)$	$f(b)$

بیشترین عدد Max مطلق و کمترین عدد min مطلق است.

(۱۶)

$$f(x)=(x^2-28)\sqrt[3]{x}=(x^2-28)x^{\frac{1}{3}}=x^{\frac{7}{3}}-28x^{\frac{1}{3}}$$

$$f'(x)=\frac{7}{3}x^{\frac{4}{3}}-\frac{28}{3}x^{-\frac{2}{3}}=\frac{7}{3}\sqrt[3]{x^4}-\frac{28}{3\sqrt[3]{x^2}}=0 \to \frac{\cancel{7}}{\cancel{3}}\sqrt[3]{x^4}=\frac{\cancel{28}^{\,4}}{\cancel{3}\sqrt[3]{x^2}}$$

ن.ت $=f'(0)$ بحرانی $x=0$

$$\sqrt[3]{x^6}=4 \qquad x^{\frac{6}{3}}=2 \qquad =4 \qquad x=\pm 2$$

$f'(\pm 2)=0$ بحرانی $x=\pm 2$

x	-2	0	1
$f(x)$		0	-27

$$Max=f(-2)=(4-28=-24)\sqrt[3]{-2}=24\sqrt[3]{2}$$

$$f(x)=\frac{3x-1}{x+3}$$

$D_f: \mathbb{R}-\{-3\}$

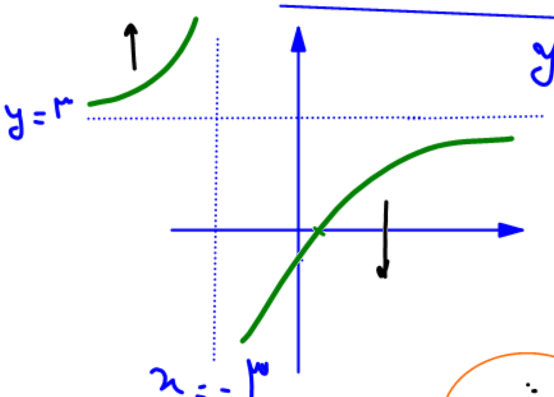
$x+3=0$
$x=-3$
مجانب قائم

$$\lim_{x\to\pm\infty} y=\frac{3x}{x}=3$$

مجانب افقی $y=3$

$$f'(x)=\frac{3(x+3)-1(3x-1)=10}{(x+3)^2}>0$$

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
f'		$+$		$+$	
f	3 ↗	$+\infty$		$-\infty$ ↗	3

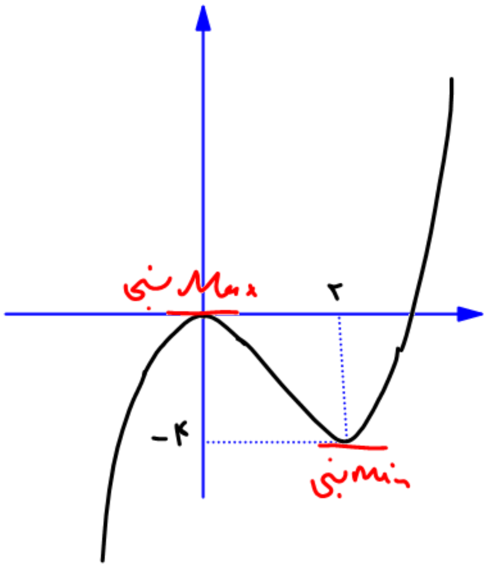


$$y=\frac{3x-1}{x+3}$$

دنبه حابان $y'=\frac{10}{(x+3)^2}$ $y''=\frac{-2(x+3)(10)}{(x+3)^4}=\frac{-20}{(x+3)^3}$

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
y''		$+$		$-$	
y		$\cup$		$\cap$	

رسم رشته تجربی : $f(x)=x^3-3x^2$



$D_f : \mathbb{R}$

مجانب ندارد

$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2) = 0 \begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases}$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y		$\nearrow$	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$	