

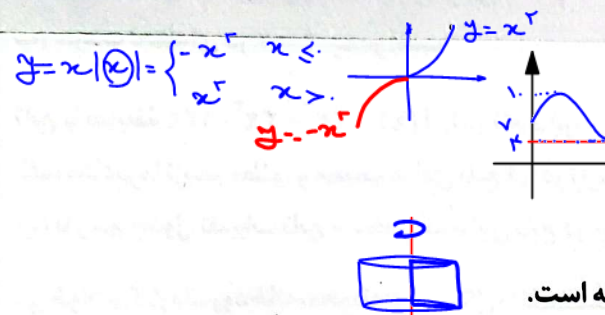
1 درست یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید.

الف) نمودار تابع $|x|$ در بازه $(-\infty, 0]$ نزولی است. X

ب) خط $y = 4$ بر نمودار تابع $y = 3 \sin 2x + 7$ مماس است. ✓ درست

پ) هر نقطه اکسترمم نسبی تابع، یک نقطه بحرانی آن است. ✓ درست

ت) شکل حاصل از دوران یک مربع حول هر کدام از ضلع هایش، یک استوانه است. ✓ درست



1 جاهای خالی را با عدد یا کلمه مناسب به جمله صحیح تبدیل کنید.

الف) نقطه $(2, 3)$ روی نمودار تابع $y = f(x)$ قرار دارد. نقطه متناظر آن روی نمودار تابع $y = 1 + f(\frac{x}{4})$ برابر $(\frac{1}{2}, 4)$ است.


ب) برد تابع $y = \tan 2x$ برابر \mathbb{R} است.

پ) شکلی که از برخورد یک صفحه با یک جسم هندسی حاصل می شود، **قطع منقطع** آن نامیده می شود.

ت) اگر A و B دو پیشامد در فضای S باشند به طوری که $P(A - B) = P(A) \cdot P(B')$ آنگاه دو پیشامد A و B **مستقل** هستند.

$P(A \cap B') = P(A) \cdot P(B')$

1 به کمک نمودار تابع $y = x^2$ ، نمودار تابع $f(x) = x^2 + 6x^2 + 12x + 9$ را رسم کنید.



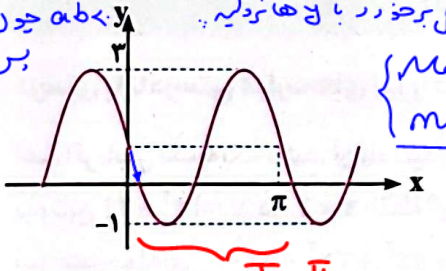
1/5 الف) وارون تابع $y = x^2 - 2x$ را برای $x < 1$ به دست آورید.

ب) اگر $f(x) = 5 + \sqrt{x-1}$ باشد، دامنه تابع $(f \circ f^{-1})(x)$ را بیابید.

$y = f(f^{-1}(x)) \rightarrow x \in D_f = \mathbb{R} \cdot [0, +\infty)$

1/5 شکل مقابل، قسمتی از نمودار تابع f با ضابطه $f(x) = a \sin(bx) + c$ است. در محل برخورد با y ها نزدیکه.

پارامترها $a > 0$ ، a ، b و c را به دست آورید.



$\begin{cases} \text{Max} = |a| \\ \text{Min} = -|a| + c = -1 \end{cases}$

$2c = 2 \rightarrow c = 1 \rightarrow |a| = 2 \rightarrow a = \pm 2 \xrightarrow{a > 0} a = 2$

$T = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{-b} = \pi \rightarrow \frac{2}{-b} = 1 \rightarrow b = -2$

1 معادله مثلثاتی $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos x$ را حل کنید.

$\cos 2x = \cos x \rightarrow 2x = 2k\pi \pm x \rightarrow x = 2k\pi$ یا $x = 2k\pi - x \rightarrow x = k\pi$

1 اگر چند جمله ای $P(x) = x^2 + mx + 2$ بر $x - 2$ بخش پذیر باشد، آن گاه باقی مانده تقسیم $P(x)$ بر $x + 1$ را به دست آورید.

$P(x) = x^2 - 5x + 2$ یا $P(-1) = (-1)^2 - 5(-1) + 2 = 8$

1/5 حاصل هریک از حدهای زیر را بیابید.

الف) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi^+}{2}} \frac{|x| - 5}{\cos x} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$

ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x - \sqrt{4x^2 + 2}}{2x} = \frac{4x - 2|x|}{2x} = \frac{4x - 2(-x)}{2x} = \frac{6x}{2x} = 3$

پ) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|2x^2 - 5x + 2|}{x^2 - 8} = \frac{2(x-2)(x-1)}{(x-2)(x^2+2x+4)} = \frac{2(x-1)}{x^2+2x+4} = \frac{2(2-1)}{4+4+4} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$

1 اگر $f(1) = 1$ و $g'(1) = 5$ ، $f'(1) = 3$ باشد، مقدار مشتق تابع $g \circ f$ در $x = 1$ را به دست آورید.

$y' = f'(x) \cdot g'(f(x)) \Rightarrow f'(1) \cdot g'(f(1)) = 3 \cdot 5 = 15$

1/5 مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن الزامی نیست).

الف) $f(x) = (x^2 - 2x^2 + 1)^5$

ب) $g(x) = \frac{2x}{\sqrt{x+4}}$

۰/۷۵

مشتق پذیری تابع $f(x) = \begin{cases} |x| & ; x < 0 \\ x^2 & ; x \geq 0 \end{cases}$ را در نقطه $x = 0$ به کمک تعریف مشتق بررسی کنید.

۱۱

دوچرخه سواری طبق معادله $d(t) = \frac{1}{3}t^3 + 10t$ حرکت می کند که در آن $0 \leq t \leq 6$ بر حسب ثانیه است.
 الف) سرعت متوسط این دوچرخه سوار را در بازه $[1, 3]$ به دست آورید.
 ب) سرعت لحظه ای در $t = 2$ چقدر است؟

سرعت متوسط $[1, 3] = \frac{d(3) - d(1)}{3 - 1} = \frac{29 - \frac{1}{3}}{2} = \frac{86}{6}$
 $d'(t) = t^2 + 10 = 4 + 10 = 14$ سرعت لحظه ای در $t=2$

۱/۷۵

تابع با ضابطه $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$ را در نظر بگیرید.
 الف) مقادیر ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق تابع f را در بازه $[-1, 3]$ به دست آورید.
 ب) با رسم جدول تغییرات تابع مشخص کنید این تابع در چه بازه ای اکیداً نزولی است.

x	-1	1	2	3
$f(x)$	13	-7	4	45

min at $x=1$, Max at $x=3$

۱/۲۵

می خواهیم کنار یک رودخانه، محوطه ای به شکل مثلث متساوی الساقین رانده کشی کنیم. اگر تنها هزینه ۱۰۰ مترنرده را در اختیار داشته باشیم؛ در این صورت بیشترین مساحت ممکن برای نرده کشی این محوطه چقدر خواهد بود؟

۱/۲۵

مرکز دایره ای، نقطه $O(-1, 4)$ است. این دایره روی خط $2x - 3y + 1 = 0$ و تری به طول $2\sqrt{7}$ جدا می کند. معادله این دایره را بنویسید.

نقاط $(-2, -1)$ و $(-2, 5)$ دو سر قطر بزرگ یک بیضی هستند و قطر کوچک آن ۴ واحد است.
 الف) اندازه فاصله کانونی و خروج از مرکز بیضی را محاسبه کنید.
 ب) مختصات کانون های بیضی را بیابید.

$BB' = 2b = 4 \Rightarrow b = 2$
 $AA' = 2a = 6 \Rightarrow a = 3$
 $a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 9 = 4 + c^2 \Rightarrow c = \sqrt{5}$
 $FF' = 2c = 2\sqrt{5}$
 خروج از مرکز $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3}$

۱/۲۵

در یک شهر ۶۰ درصد جمعیت مرد و ۴۰ درصد آن ها زن هستند. اگر ۱۸ درصد مردان و ۱۲ درصد زنان تحصیلات دانشگاهی داشته باشند و فردی به تصادف از این شهر انتخاب شود، با چه احتمالی تحصیلات دانشگاهی دارد؟

۲۰

$P(A) = \left(\frac{18}{100} \times \frac{40}{100}\right) + \left(\frac{12}{100} \times \frac{60}{100}\right) = \frac{72}{10000} + \frac{7200}{10000} = \frac{7272}{10000} = 0.7272$
 موفق و مؤید باشید.

الف) نادرست

ب) درست

پ) درست

ت) درست

(هر مورد ۰/۲۵)

الف) (۴, ۴)

ب) \mathbb{R}

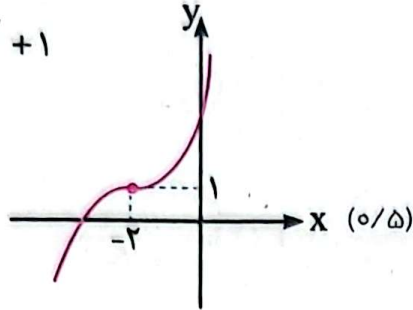
پ) سطح مقطع

ت) مستقل

(هر مورد ۰/۲۵)

$$f(x) = (x+2)^3 + 1$$

(۰/۵)



۳

الف) $y = (x-1)^2 - 1 \Rightarrow y+1 = (x-1)^2 \Rightarrow \sqrt{y+1} = |x-1|$ (۰/۲۵)

$$\xrightarrow{x < 1} \sqrt{y+1} = (x-1) \Rightarrow -\sqrt{y+1} + 1 = x \Rightarrow y^{-1} = -\sqrt{x+1} + 1$$

(۰/۲۵) (۰/۲۵)

ب) $D_{f \circ f^{-1}}(x) = D_{f^{-1}} = R_f = [1, +\infty)$

(۰/۲۵) (۰/۵)

$$T = \frac{2\pi}{|b|} = \pi \Rightarrow |b| = 2 \xrightarrow{b < 0} b = -2$$

(۰/۲۵) (۰/۲۵)

$$\text{Max} = |a| + c = 3 \Rightarrow c = 1, a = 2$$

$$\text{Min} = -|a| + c = -1$$

(۰/۲۵) (۰/۲۵)

$$\cos^2 x - (1 - \cos^2 x) - \cos x = 0$$

(۰/۲۵) ۶

$$2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0 \Rightarrow \cos x = 1, \cos x = \frac{-1}{2}$$

$$\cos x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi$$

(۰/۲۵)

$$\cos x = \frac{-1}{2} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$$

(۰/۵)

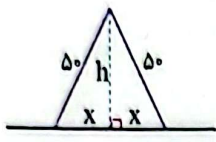
$$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2, P(2) = 1 + 2m = 0 \Rightarrow m = -\frac{1}{2}$$

(۰/۲۵) (۰/۲۵) ۷

$$x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow P(-1) = 6$$

(۰/۵)

۱۳ با استفاده از رابطه فیثاغورس داریم:



$$x^2 + h^2 = 5^2 \Rightarrow h = \sqrt{25 - x^2}$$

$$S = \frac{1}{2}(2x) \times h = x\sqrt{25 - x^2}$$

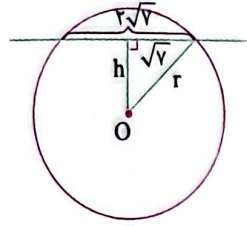
$$\Rightarrow S'(x) = 1 \times \sqrt{25 - x^2} + x \times \frac{-2x}{2\sqrt{25 - x^2}}$$

$$\frac{S'(x)}{\sqrt{25 - x^2}} = \frac{2x^2}{2\sqrt{25 - x^2}} \Rightarrow x^2 = 25 - x^2$$

$$\Rightarrow 2x^2 = 25 \Rightarrow x^2 = 12.5 \Rightarrow x = \sqrt{12.5}$$

$$\Rightarrow S = \sqrt{12.5} \times \sqrt{25 - (\sqrt{12.5})^2} = \sqrt{12.5} \times \sqrt{12.5} = 12.5$$

$$h = \frac{|2(-1) - 3(4) + 1|}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{13}{\sqrt{13}} = \sqrt{13}$$



$$h^2 + (\sqrt{2})^2 = r^2 \Rightarrow r = \sqrt{2}$$

$$(x+1)^2 + (y-4)^2 = 20$$

الف $A' = (-2, 5)$
 $A' = (-2, -1) \Rightarrow 2a = |5 - (-1)| = 6 \Rightarrow a = 3$

$$2b = 4 \Rightarrow b = 2$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 9 = 4 + c^2 \Rightarrow c = \sqrt{5}$$

فاصله کانونی $2c = 2\sqrt{5}$, $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3}$

ب مرکز $O(-2, 2)$ $F = (-2, 2 + \sqrt{5})$

$$F' = (-2, 2 - \sqrt{5})$$

$$P(A) = \frac{6}{100} \times \frac{18}{100} + \frac{4}{100} \times \frac{12}{100} = \frac{156}{10000}$$

(به پاسخ مشابه با نمودار درختی نیز نمره تعلق می‌گیرد.)

آزمون

۱ الف) نادرست (ب) نادرست
 پ) درست (ت) نادرست

۲ الف) بحرانی (ب) مستطیل

پ) $\frac{1}{8}$ (ت) $(-\infty, 1)$

الف) $\lim_{x \rightarrow \frac{2\pi^+}{3}} \frac{[\frac{2\pi^+}{3}] - \Delta}{\cos(\frac{2\pi^+}{3})} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$

ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x - \sqrt{4x^2 + 2}}{4x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x - 2|x|}{4x} = \frac{6x}{4x} = \frac{3}{2}$

پ) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|(2x-1)(x-2)|}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(2x-1)(x-2)}{(x-2)(x^2 + 2x + 4)}$

$$= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(2x-1)}{x^2 + 2x + 4} = \frac{-3}{12} = -\frac{1}{4}$$

$f'(x) \times g'(f(x)) = f'(1) \times g'(1) = 3 \times 5 = 15$

الف) $f'(x) = 5(3x^2 - 4x)(x^2 - 2x^2 + 1)^4$

ب) $g'(x) = \frac{2(\sqrt{x} + 4) - \frac{1}{2\sqrt{x}}(2x)}{(\sqrt{x} + 4)^2}$

$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$

$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x| - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1$

چون $f'_-(0) \neq f'_+(0)$ تابع $f(x)$ در $x = 0$ مشتق پذیر نیست.

سرعت متوسط $= \frac{d(3) - d(1)}{3 - 1} = \frac{39 - \frac{31}{2}}{2} = \frac{\frac{78 - 31}{2}}{2} = \frac{47}{4}$

$d'(t) = t^2 + 1 \Rightarrow d'(2) = 5$

الف) $f'(x) = 6x^2 + 6x - 12 = 0 \Rightarrow x = 1, x = -2$

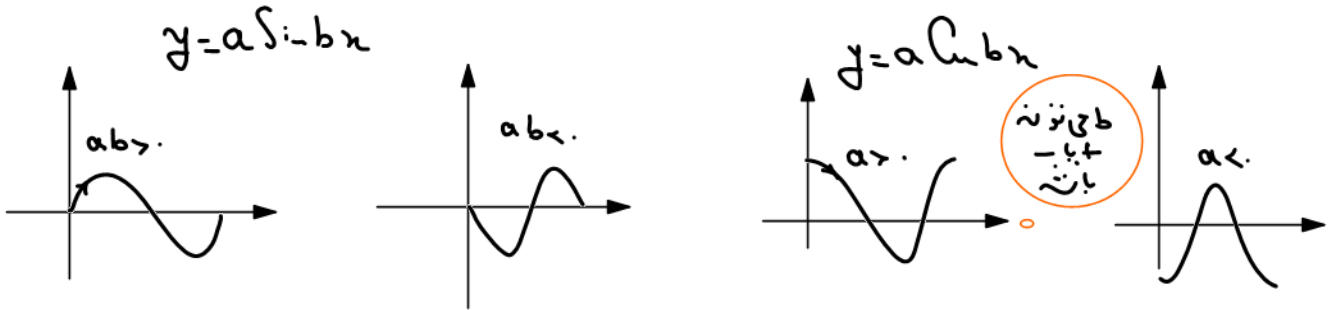
$f(1) = -7 \min$, $f(2) = 45 \max$

x	-∞	-2	1	+∞
f'(x)	+	-	+	

در بازه $(-2, 1)$ اکیداً نزولی است.

$$\min = -|a| + d \ll \begin{cases} y = a \sin(bx+c)+d \\ y = a \cos(bx+c)+d \end{cases} \ll \max = |a| + d$$

$$T = \frac{2\pi}{|b|}$$



سوال 10

1) $y = (x^3 - 2x^2 + 1)^5$ $y = u^n \rightarrow y' = n u' u^{n-1}$

توی س اینس داریم د پایه عبارت توان دارا با بیز

2) $y = \frac{2x}{\sqrt[3]{x+8}}$ $y' = \frac{2(\sqrt[3]{x+8}) - (\frac{1}{\sqrt[3]{x+8}})(2x)}{(\sqrt[3]{x+8})^2}$ $y = \frac{u}{v} \rightarrow y' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$

سوال 11) مشتق پذیری $f(x) = \begin{cases} |x| & x < 0 \\ x^2 & x \geq 0 \end{cases}$ در $x=0$ به کمک تقریب مشتق بررسی کنید

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$$

در بررسی مشتق پذیری تابع اول بیوستگی بررسی کن

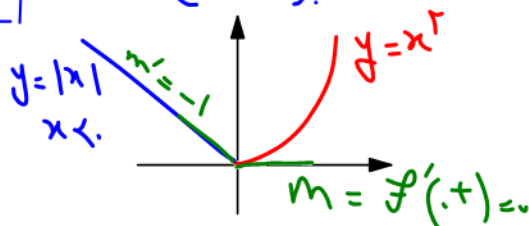
$l_1 = l_2 = f(0)$

$\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0 = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$

بیوسته است

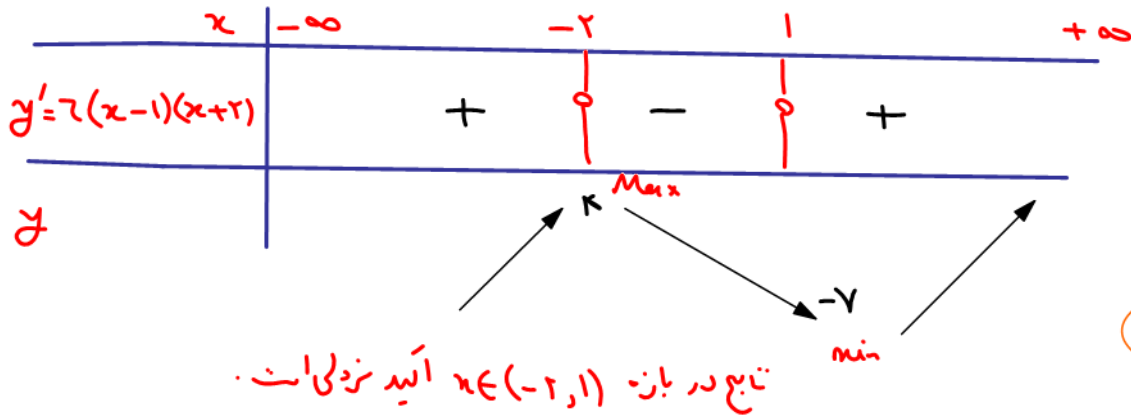
$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = \frac{-x}{x} = -1 = f'(0^-) \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{x} = x = 0 = f'(0^+) \end{cases} \neq$$

چون در $x=0$ مشتق چپ و راست برابرند مشتق در $x=0$ مشتق پذیر نیست.

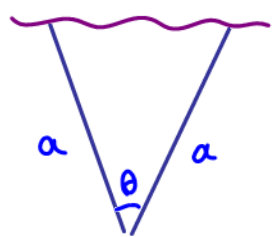


$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$$

$$f'(x) = 2x^2 + 2x - 12 = 2(x^2 + x - 6) = 0 \rightarrow x = 1, -2$$



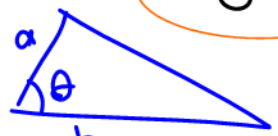
سوال ۱۳ ب



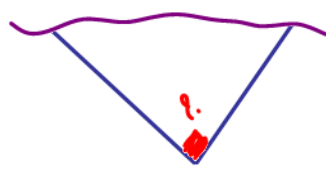
$$a + a = 2a = 1 \rightarrow a = \frac{1}{2}$$

$$S = \frac{1}{2} a \cdot a \sin \theta = \frac{1}{2} a^2 \sin \theta$$

باید $\theta = \frac{\pi}{2}$ باشد تا $\sin \theta = 1$ که بیشترین مقدار است.
در حساب باید $\sin \theta$ و $\cos \theta$ را بنویسیم.



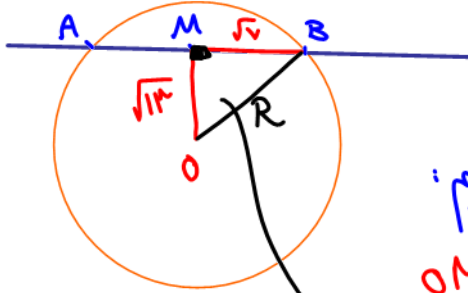
$$S = \frac{1}{2} ab \sin \theta$$



$$S_{\text{Max}} = \frac{1}{2} a^2 (\sin \theta = 1) = \frac{a^2}{2} = \frac{(0.5)^2}{2} = \frac{0.25}{2} = \frac{1}{8} (0.5) = 125 \text{ m}^2$$

سوال ۱۴

۱۵) مرکز دایره $(-1, 4)$ است. خط $2x - 3y + 1 = 0$ ردی دایره و نزدیکی به طول $2\sqrt{13}$ خواهد گشت.



$$AB = 2\sqrt{13} \quad AM = RM = \sqrt{13}$$

فاصله O از خط $ax + by + c = 0$ می باشد:

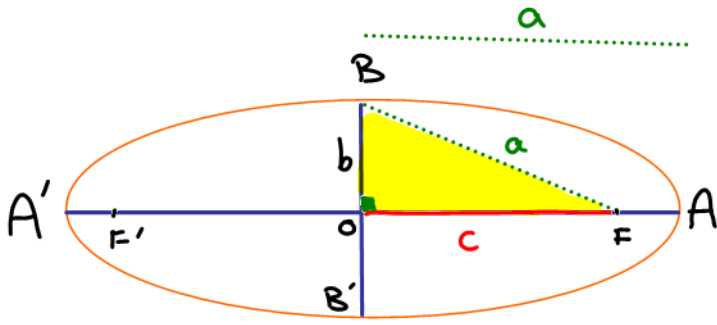
$$OM = d = \frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|2x - 3y + 1|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}} = \frac{13}{\sqrt{13}} = \sqrt{13}$$

فاصله از مرکز $R^2 = (\sqrt{13})^2 + (\sqrt{13})^2$
 $R^2 = 26$

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2$$

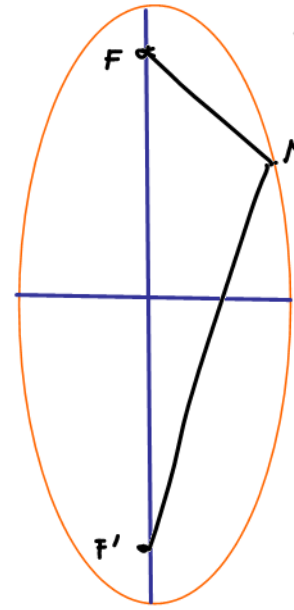
$$(x + 1)^2 + (y - 4)^2 = 26$$

معادله دایره به مرکز $O(\alpha, \beta)$ و شعاع R :



$$\begin{array}{l}
 \frac{0}{P} \quad F \mid \frac{a+c}{P} \quad A \mid \frac{a+a}{P} \\
 \quad \quad B \mid \frac{a}{P+b} \quad B' \mid \frac{a}{P-b} \quad F' \mid \frac{a-c}{P} \\
 a^2 = b^2 + c^2
 \end{array}$$

$a =$ فاصله مرکز O تا رأس A یا A' برابر
 $a =$ فاصله کانون F تا رأس B یا B' است



تعریف بیضی:
 $MF + MF' = 2a$
 طول نخ
 $AA' =$



$e = \frac{c}{a} < 1$ ضریب انحراف
 پارابولا
 دایره

$$e = \frac{c}{a} + 1$$

$$e = \frac{c = \sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}} = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = 1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2 = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}$$

مربع نسبت قطر