

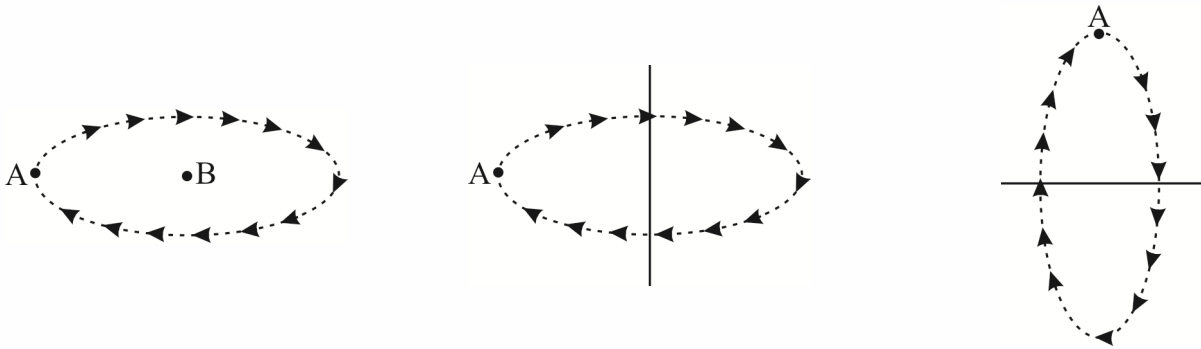
هندسه

تفکر تجسمی و آشنایی با مقاطع مخروطی

تفکر تجسمی یعنی فکر کردن با شکل‌ها و تصاویر. ما به طور معمول با کلمات فکر می‌کنیم اما اگر به جای کلمه‌ها از شکل‌ها استفاده کنیم، می‌گوییم به جای تفکر کلامی از تفکر تجسمی استفاده کرده‌ایم. در تفکر تجسمی سعی می‌کنیم تصاویر را در ذهنمان تجسم کنیم و یا اگر لازم باشد آن‌ها را روی کاغذ رسم کنیم. برای آن‌که ببینیم تفکر تجسمی و این حرف‌هایی که زدیم در عمل یعنی چه، بیایید با هم در مورد دوران و برش اجسام حرف بزنیم.

دوران:

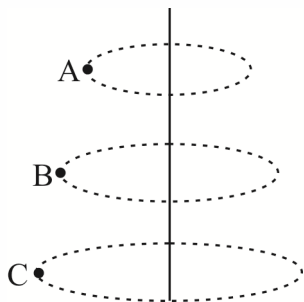
منظور از دوران، چرخیدن یک شیء به دور یک شیء، یا یک خط یا یک نقطه است. مسیر دوران یک حلقه دایره‌ای شکل است. در زیر، شکل و مسیر دوران نقطه A را حول (دور) یک نقطه و خط‌های عمودی و افقی رسم کرده‌ایم.



در این جا بحث ما بیشتر در مورد دوران حول (دور) یک خط خواهد بود.

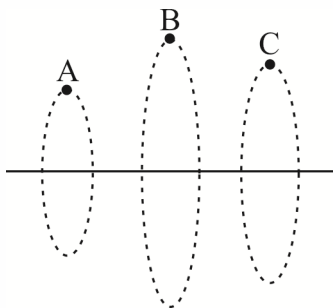
دوران حول یک خط:

همان‌طور که در شکل‌های قبل نشان دادیم، دوران (چرخیدن) به دور یک خط (حول یک خط)، یعنی نقطه یک مسیر دایره‌ای را طی می‌کند و دوباره به سر جای خودش بازمی‌گردد. شعاع این دایره، با فاصله نقطه از خط برابر است. در شکل زیر، سه نقطه A، B و C را حول خط‌های عمودی و افقی دوران داده‌ایم.

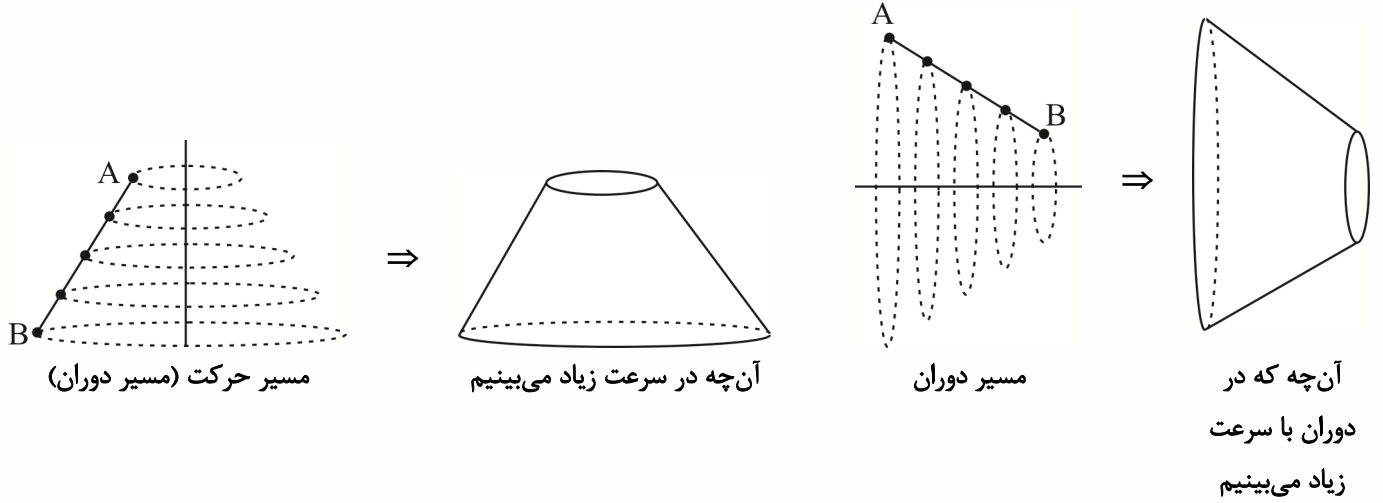


دوران یک پاره‌خط حول یک خط:

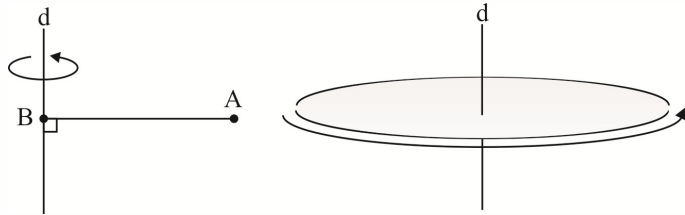
وقتی یک پاره‌خط حول یک خط دوران پیدا می‌کند، در واقع کل نقاط روی آن، حول آن خط دوران پیدا می‌کنند. در شکل زیر، نحوه دوران پاره‌خط AB را حول دو خط عمودی و افقی نمایش داده‌ایم.



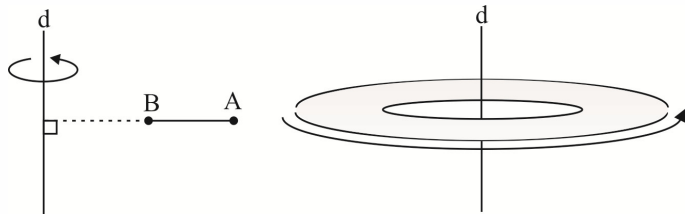
حال اگر این چرخش با سرعت زیاد انجام شود، دیگر چشم ما قادر به دنبال کردن مسیر حرکت نیست، بلکه یک حجم سه‌بعدی می‌بینید.



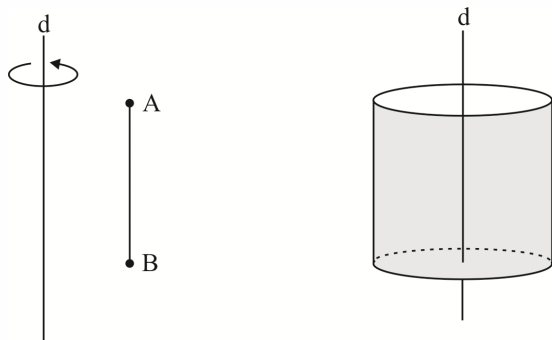
(۱) از دوران یک پاره‌خط حول محور عمود و متقاطع با آن سطح یک دایره ایجاد می‌شود.



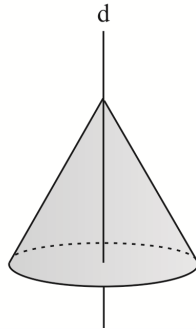
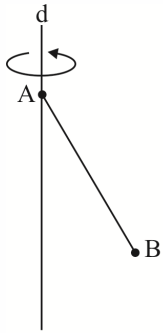
توجه: اگر پاره‌خط، با محور تقارن متقاطع نباشد، پس از دوران سطح محدود به دو دایره هم‌مرکز ایجاد می‌شود.



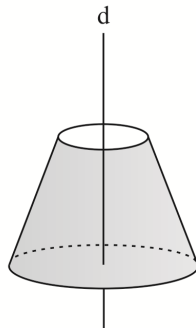
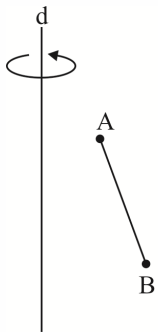
(۲) از دوران یک پاره‌خط حول محوری که با آن موازی است، یک استوانه توخالی ایجاد می‌شود.



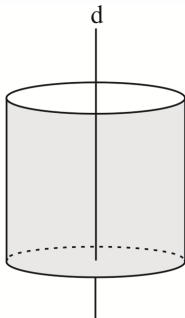
۳) از دوران پاره‌خط حول محور غیر عمود و متقاطع با آن، یک سطح مخروطی (مخروط توخالی) ایجاد می‌شود.



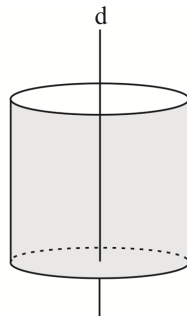
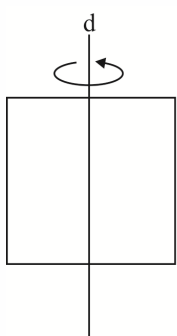
توجه: اگر پاره‌خط، با محور تقارن متقاطع باشد، پس از دوران یک سطح مخروطی ناقص ایجاد می‌شود.



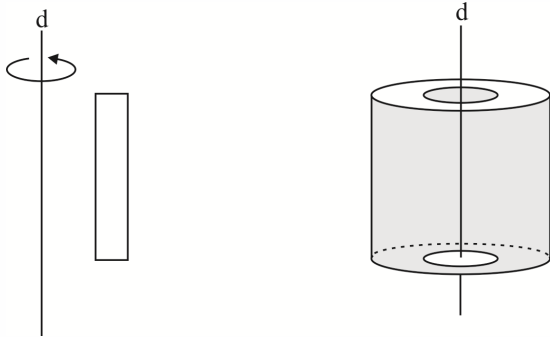
۴) از دوران مربع یا مستطیل حول یک ضلعشان یک استوانه توپر ایجاد می‌شود.



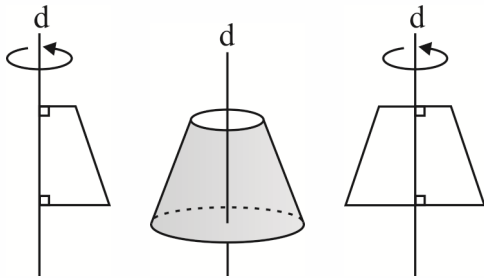
توجه: از دوران مربع یا مستطیل حول خطی که از وسط دو ضلع مقابل آن‌ها می‌گذرد یک استوانه توپر ایجاد می‌شود.



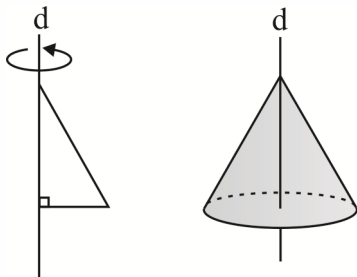
توجه: از دوران مربع یا مستطیل حول خطی که موازی یک ضلع آن‌ها است دو استوانه با محور یکسان تشکیل می‌شود که فضای بین آن‌ها توپر است.



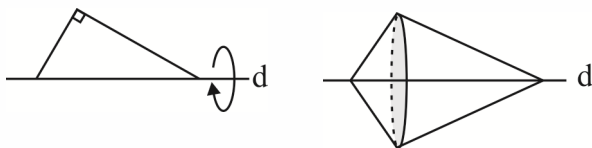
۵) از دوران یک دوزنقه قائم‌الزاویه حول ساق قائم آن با یک دوزنقه متساوی‌الساقین حول خطی که وسط‌های دو قاعده را به هم وصل می‌کند، یک مخروط ناقص ایجاد می‌شود.



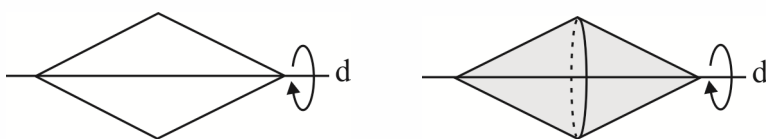
۶) از دوران یک مثلث قائم‌الزاویه حول ضلع قائم‌اش یک مخروط ایجاد می‌شود.



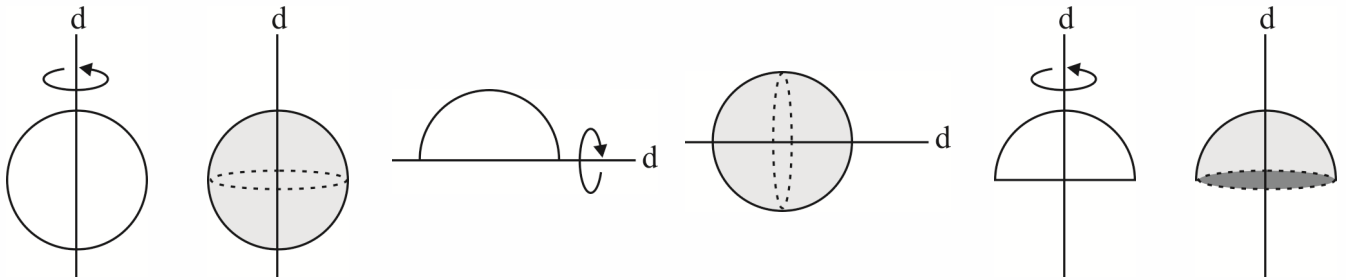
۷) از دوران یک مثلث قائم‌الزاویه حول وترش دو مخروط که در قاعده به هم چسبیده‌اند ایجاد می‌شود.



توجه: از دوران مربع یا مستطیل حول یکی از قطرهایشان نیز دو مخروط که در قاعده به هم چسبیده‌اند ایجاد می‌شود.



۸) از دوران دایره حول یکی از قطرهایش کره ایجاد می‌شود. هم‌چنین از دوران نیم‌دایره حول قطرش یک کره و حول شعاع عمود بر قطرش یک نیم‌کره ایجاد می‌شود.



تمرین: امتداد پاره خط AB بر خط ℓ عمود است. اگر دو نقطه A و B از ℓ به فاصله ۳ و ۵ باشند، از دوران AB حول ℓ چه مساحتی ایجاد می‌شود؟

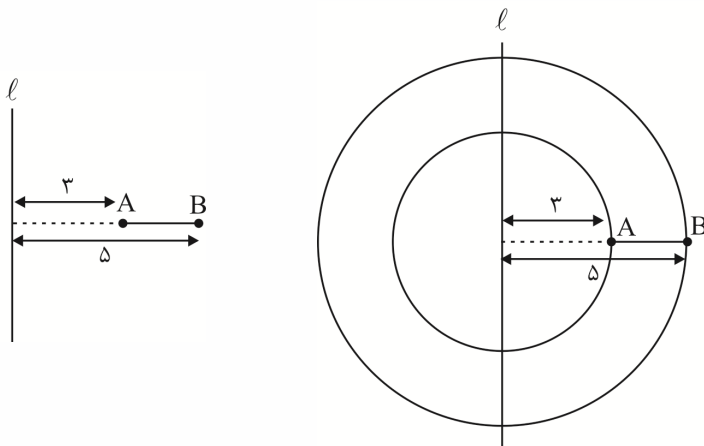
۸π (۴)

۱۲π (۳)

۴π (۲)

۱۶π (۱)

پاسخ: گزینه «۱» - شکل را ببینید.

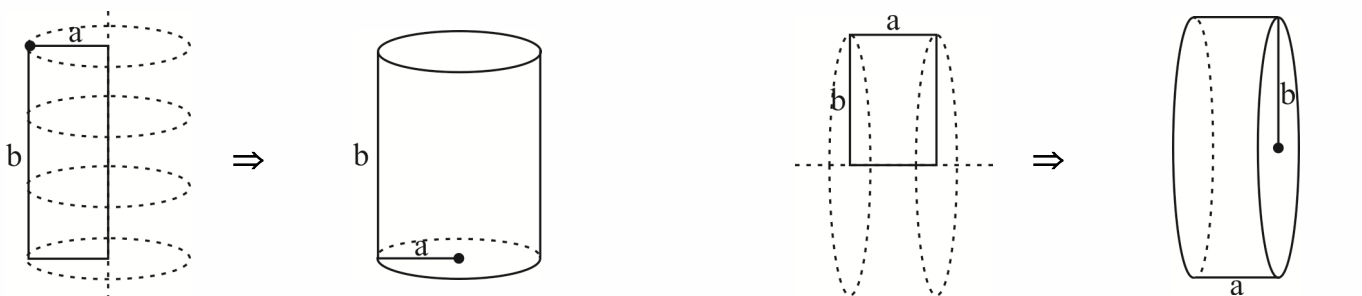


$$S = \pi(r_1^2 - r_2^2) = \pi(5^2 - 3^2) = 16\pi$$

سطح موردنظر بین دو دایره به شعاع‌های ۳ و ۵ قرار دارد.

تحلیل دوران مستطیل:

در پایه هفتم دیدیم که از دوران یک مستطیل حول یک ضلع خودش (یا حول یک خط موازی ضلع‌هایش) یک استوانه ایجاد می‌شود.



مسیر دوران حول ضلع b

حجمی که می‌بینیم (استوانه‌ای به شعاع a و ارتفاع b)

مسیر دوران حول ضلع a

حجمی که می‌بینیم (استوانه‌ای به شعاع b و ارتفاع a)

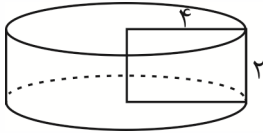
مشاهده می‌کنید که وقتی یک مستطیل را حول یکی از ضلع‌های آن دوران می‌دهیم، آن ضلع ارتفاع استوانه خواهد بود و ضلع دیگر، شعاع قاعده استوانه است.

تعریف: اگر مستطیلی به طول ۴ و عرض ۲ را حول عرضش دوران دهیم، حجم جسم حاصل چه قدر است؟

- ۱) ۱۶π ۲) ۲۰π ۳) ۳۲π ۴) ۸π

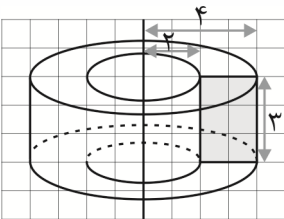
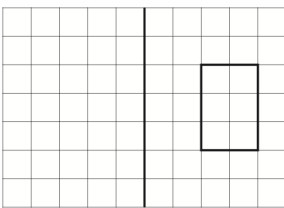
پاسخ: طبق شکل روبه‌رو استوانه‌ای ایجاد می‌شود که شعاع قاعده‌اش برابر ۴ و ارتفاعش برابر ۲ است و چون حجم استوانه از رابطه

$$V = \pi r^2 h \text{ به دست می‌آید، پس: } V = \pi(4)^2(2) = 32\pi$$



تعریف: در شکل مقابل اگر مستطیل حول خط دوران کند، حجم جسم ایجاد شده کدام است؟

- ۱) ۴۸π ۲) ۳۶π ۳) ۱۲π ۴) ۲۴π



پاسخ: طبق شکل روبه‌رو اگر مستطیل حول خط دوران کند، جسمی که پدید می‌آید استوانه‌ای است به شعاع قاعده ۴ و ارتفاع ۳ که یک استوانه به شعاع قاعده ۲ و ارتفاع ۳ از آن خارج شده است. پس حجم جسم ایجاد شده برابر تفاضل حجم این دو استوانه است، یعنی:

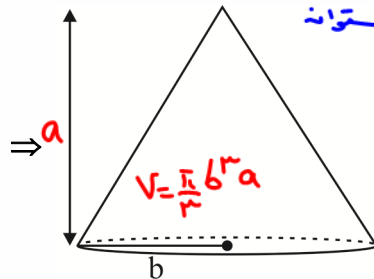
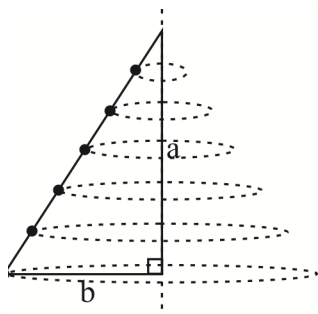
$$V = \pi r_1^2 h - \pi r_2^2 h \Rightarrow V = \pi(4)^2(3) - \pi(2)^2(3) = 48\pi - 12\pi = 36\pi$$

تحلیل دوران مثلث قائم‌الزاویه:

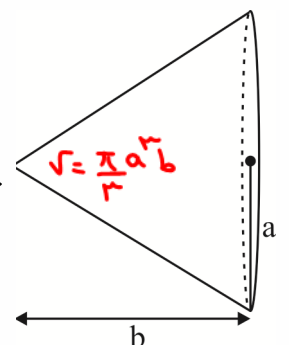
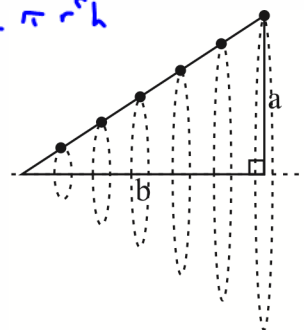
در شکل‌های زیر، مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ای را حول ضلع‌های قائمه آن‌ها دوران داده‌ایم. مشاهده می‌کنید که وقتی یک مثلث قائم‌الزاویه را حول یک ضلع قائمه آن دوران می‌دهیم، یک مخروط ایجاد می‌شود.

حجم مخروط یک سوم حجم استوانه هم قاعده و هم ارتفاع آن است

ضلعی که حول آن دوران داده‌ایم، ارتفاع مخروط و ضلع دیگر شعاع قاعده مخروط خواهد بود.



آن چه می‌بینیم (مخروطی به شعاع قاعده b و ارتفاع a)



آن چه می‌بینیم (مخروطی به شعاع قاعده b و ارتفاع a)

تمرین: مثلث قائم‌الزاویه‌ای را حول یکی از اضلاع قائمه‌اش به طول ۳ دوران می‌دهیم. حجم شکل حاصل از دوران 24π است. مساحت مثلث قائم‌الزاویه کدام است؟

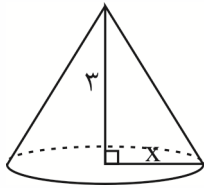
- (۱) $2\sqrt{6}$ (۲) $3\sqrt{6}$ (۳) $2\sqrt{2}$ (۴) $3\sqrt{2}$



پاسخ: گزینه «۲» - مثلث قائم‌الزاویه به شکل

را حول ضلع به طول ۳ دوران می‌دهیم، شکل حاصل، مخروطی به شعاع قاعده x و

ارتفاع ۳ است. پس طبق فرض مسئله که حجم شکل به وجود آمده 24π است، می‌توان نوشت:

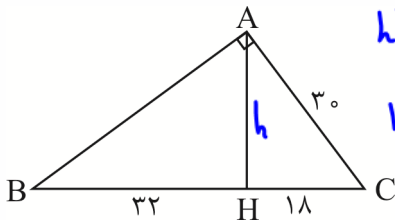


$$24\pi = \frac{1}{3}\pi(x^2) \times 3 \Rightarrow \pi x^2 = 24\pi \Rightarrow x^2 = 24 \Rightarrow x = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

حالا باید مساحت مثلث قائم‌الزاویه را پیدا کنیم که برابر $S = \frac{1}{2} \times 3 \times 2\sqrt{6} = 3\sqrt{6}$ است.



تمرین: مثلث قائم‌الزاویه‌ی زیر را حول ضلع BC دوران می‌دهیم. حجم حاصل چند برابر $\pi(24)^2$ است؟



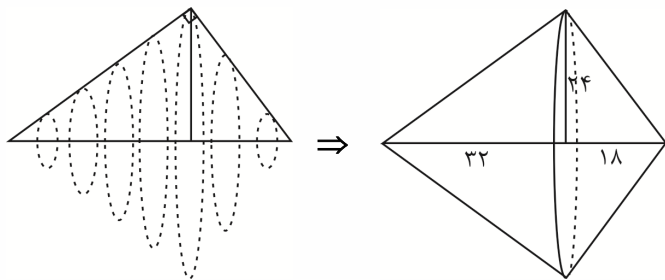
- (۱) $\frac{25}{3}$ (۲) ۲۵ (۳) $\frac{50}{3}$
- فکتیبه: ارتفاع دارد بر وتر
دایره هندی است
بین ۲ نقطه روی دایره
- (۴) ۵۰ (۳) $\frac{50}{3}$
- $h^2 = (32)(18) = 4(8)(2)(9) = \sqrt{4(16)(9)} = 2(4)(3) = 24$

پاسخ: ابتدا از رابطه فیثاغورس، طول AH را به دست می‌آوریم:

$$AH^2 + 18^2 = 30^2 \Rightarrow AH^2 + 324 = 900 \Rightarrow AH^2 = 576 \Rightarrow AH = 24$$

$$\text{یا } (AH^2) = BH \times CH = 32 \times 18 \Rightarrow AH = 24$$

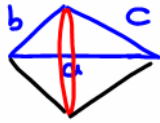
حالا شکل دوران را کامل می‌کنیم. مشاهده می‌کنید که دو مخروط ایجاد می‌شود، یکی به شعاع ۲۴ و ارتفاع ۱۸ (مخروط سمت راست) و دیگری به شعاع ۲۴ و ارتفاع ۳۲ (مخروط سمت چپ). پس قاعده هر دو مخروط یکسان است:



$$\text{حجم مخروط سمت راست} = \frac{\pi(24)^2 \times 18}{3} = 6\pi(24)^2 \Rightarrow \text{مساحت قاعده}$$

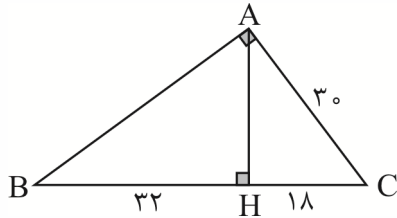
$$\text{حجم مخروط سمت چپ} = \frac{\pi(24)^2 \times 32}{3} \Rightarrow \text{حجم کل} = \pi(24)^2 \left(6 + \frac{32}{3}\right) = \frac{50}{3} \pi(24)^2$$

$$V = \frac{1}{3} \pi \frac{b^2 c^2}{a}$$



نکته: حجم حاصل از دوران مثلث قائم‌الزاویه با اضلاع قائم b و c و وتر a می‌شود:

مثلاً در سؤالی که دیدید:



$$a = 32 + 18 = 50$$

$$b = 30$$

$$c^2 = 32 \times 50$$

$$V = \frac{1}{3} \pi \left(\frac{(30)^2 \times 32 \times 50}{50} \right) = \frac{1}{3} \pi (900)(32) = 9600\pi$$

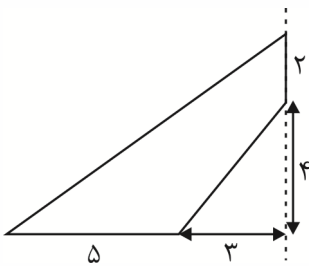
تمرین: حجم حاصل از دوران شکل زیر حول خط چین، چند برابر π است؟

۱۲۸ (۱)

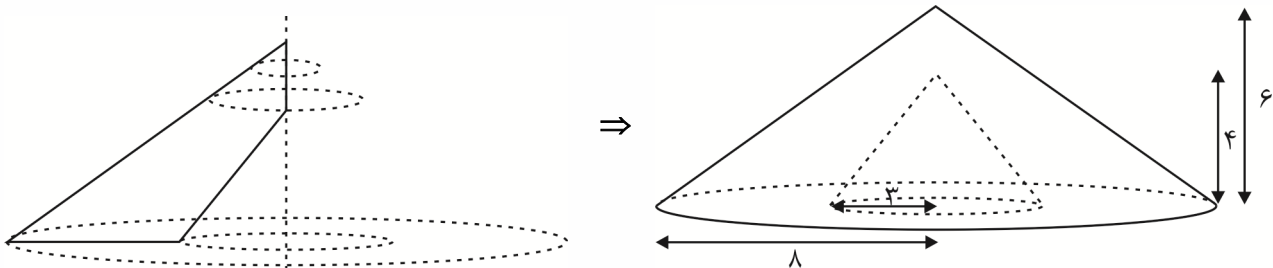
۶۴ (۲)

۱۲ (۳)

۱۱۶ (۴)



پاسخ: حجم حاصل مخروطی به شعاع و ارتفاع ۶ است که مخروطی به شعاع ۳ و ارتفاع ۴ از آن خارج شده است:

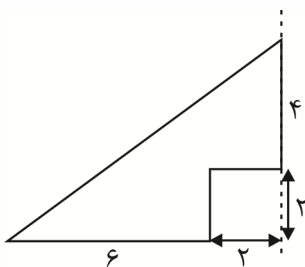


$$\text{حجم مخروط بزرگ} = \frac{\pi(64) \times 6}{3} = 128\pi \Rightarrow \text{مساحت قاعده مخروط بزرگ} = \pi(8)^2$$

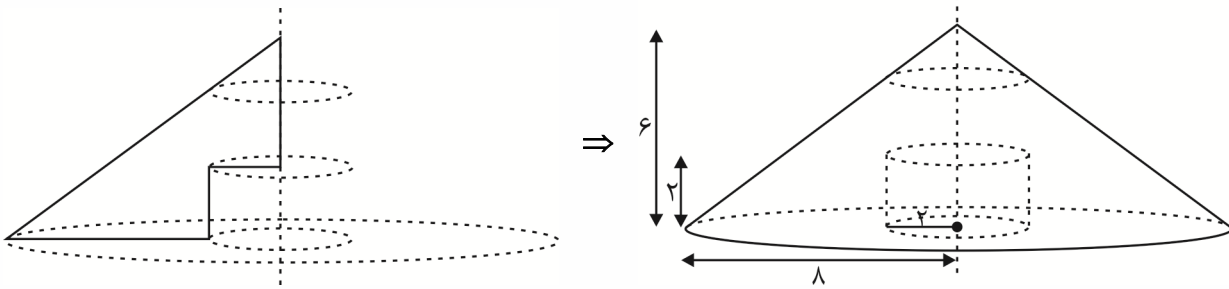
$$\text{مساحت قاعده مخروط خالی شده} = \pi(3)^2$$

$$\text{حجم مخروط خالی شده} = \frac{9\pi \times 4}{3} = 12\pi \Rightarrow \text{حجم باقی مانده} = 128\pi - 12\pi = 116\pi$$

تمرین: حجم حاصل از دوران شکل زیر حول خط چین را به دست آورید.



پاسخ: حجم حاصل مخروطی به شعاع ۸ و ارتفاع ۶ است که یک استوانه به شعاع ۲ و ارتفاع ۲ از آن خالی شده است:



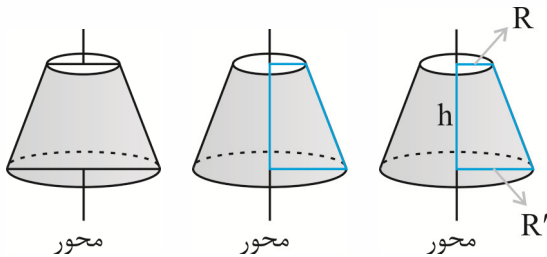
$$\text{حجم مخروط} = \frac{64\pi \times 6}{3} = 128\pi \Rightarrow \text{مساحت قاعده مخروط} = \pi(8)^2$$

$$\text{حجم استوانه خالی شده} = 4\pi \times 2 = 8\pi \Rightarrow \text{مساحت قاعده استوانه خالی شده} = \pi(2)^2 = 4\pi$$

$$\Rightarrow \text{حجم باقی مانده} = 128\pi - 8\pi = 120\pi$$

تحلیل دروان دوزنقه قائم الزاویه:

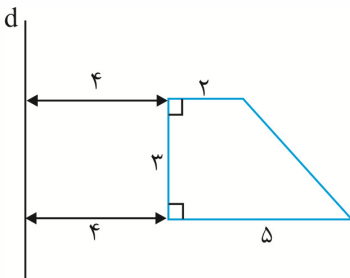
از دوران دوزنقه قائم الزاویه حول ساق قائم یا دوران دوزنقه متساوی الساقین حول محور تقارن آن، مخروط ناقص ساخته می شود.



$$V = \frac{1}{3} \pi (R^2 + R'^2 + RR')h$$

حجم مخروط ناقص دوار را بلد باشید:

تعریف: از دوران شکل مقابل حول محور d چه حجمی ایجاد می شود؟



- ۱) 113π
- ۲) 117π
- ۳) 121π
- ۴) 123π

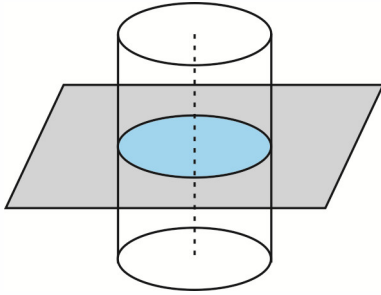
پاسخ: گزینه «۴» - یک مخروط ناقص (V_1) با شعاع های ۶ و ۹ و ارتفاع ۳ داریم که یک سوراخ استوانه ای (V_2) به شعاع قاعده ۴ و ارتفاع ۳ دارد:

$$V = V_1 - V_2 = \frac{\pi}{3} (6^2 + 9^2 + 6 \times 9) \times 3 - \pi(4^2) \times 3 = 171\pi - 48\pi = 123\pi$$

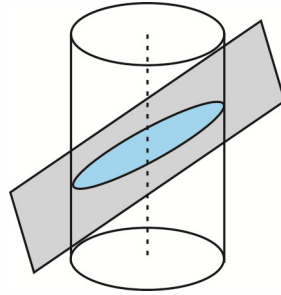
برش و سطح مقطع

اگر صفحه‌ای یک جسم سه‌بعدی را قطع کند، شکلی ایجاد می‌شود که به آن می‌گوییم «سطح مقطع». مثلاً اگر یک استوانه را با یک صفحه برش بزنیم، حالت‌های زیر ایجاد می‌شود:

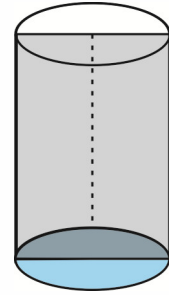
اگر صفحه بر ارتفاع استوانه عمود باشد، مقطع یک دایره است (شکل الف). اگر صفحه نسبت به ارتفاع استوانه مایل باشد، مقطع یک بیضی است (شکل ب). اگر صفحه عمود بر قاعده و شامل ارتفاع استوانه باشد، سطح مقطع یک مستطیل است (شکل پ).



(الف)



(ب)



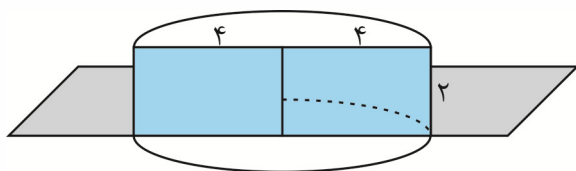
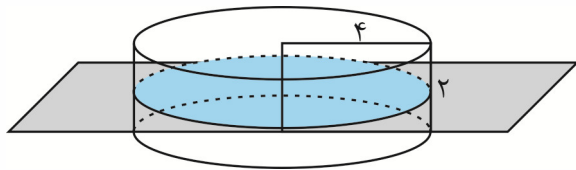
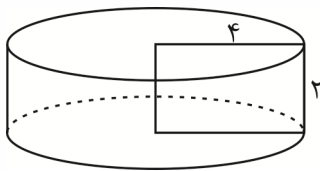
(پ)

تعریف: مستطیلی با ابعاد ۴ و ۲ را حول عرضش دوران می‌دهیم. مساحت سطح مقطع حاصل از برخورد هر کدام از صفحات زیر را با جسم حاصل پیدا کنید.

(الف) یک صفحه افقی که بر عرض مستطیل عمود است.

(ب) یک صفحه قائم که شامل عرض مستطیل است و بیشترین مساحت سطح مقطع را ایجاد می‌کند.

پاسخ: همان‌طور که در شکل روبه‌رو می‌بینیم، از دوران یک مستطیل حول عرضش یک استوانه با شعاع قاعده ۴ و ارتفاع ۲ ایجاد می‌شود. حالا اگر صفحه‌ای این استوانه را قطع کند:



(الف) اگر صفحه به عرض مستطیل که همان ارتفاع استوانه است عمود باشد، سطح مقطع دایره‌ای به شعاع ۴ است؛ پس مساحت سطح مقطع برابر است با:

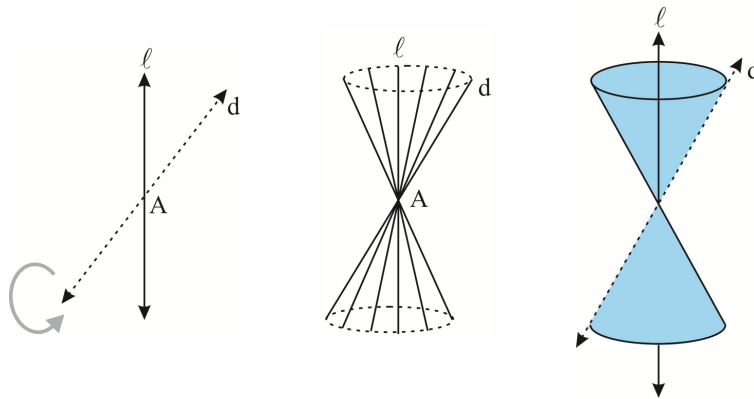
$$S = \pi r^2 \Rightarrow S = \pi(4^2) = 16\pi$$

(ب) اگر صفحه شامل عرض مستطیل یا همان ارتفاع استوانه باشد، بیشترین مساحتی که ایجاد می‌کند مستطیلی است با طول ۸ و عرض ۲؛ در نتیجه مساحتش برابر است با $2 \times 8 = 16$.

آشنایی با مقاطع مخروطی

سطح مخروطی

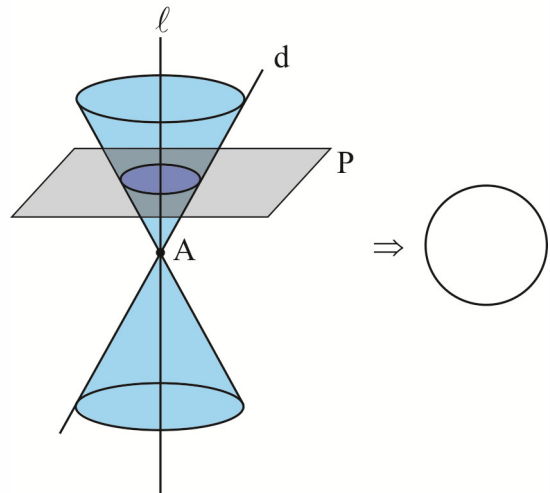
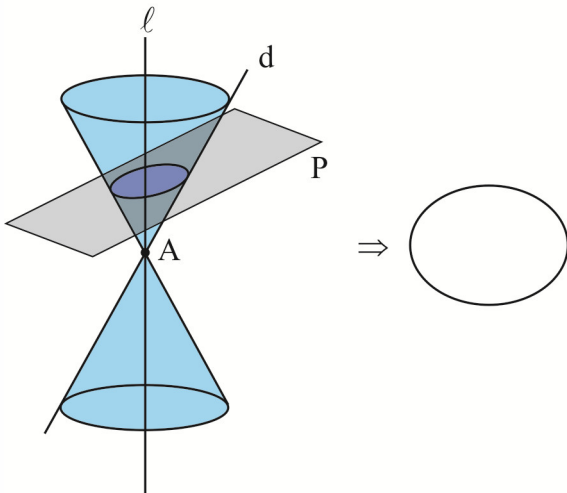
اگر دو خط متقاطع d و l را داشته باشیم و خط d را حول خط l دوران دهیم، به سطحی که ایجاد می‌شود می‌گوییم سطح مخروطی (در شکل بالا به l می‌گوییم محور سطح مخروطی (همان محور تقارن) و به هر کدام از وضعیت‌های خط d می‌گوییم مولد. حالا اگر این سطح را با یک صفحه قطع دهیم، شکلی به وجود می‌آید که به آن می‌گوییم مقاطع مخروطی. تعداد مقاطع مخروطی چهارتا است. دایره، بیضی، هذلولی و سهمی.



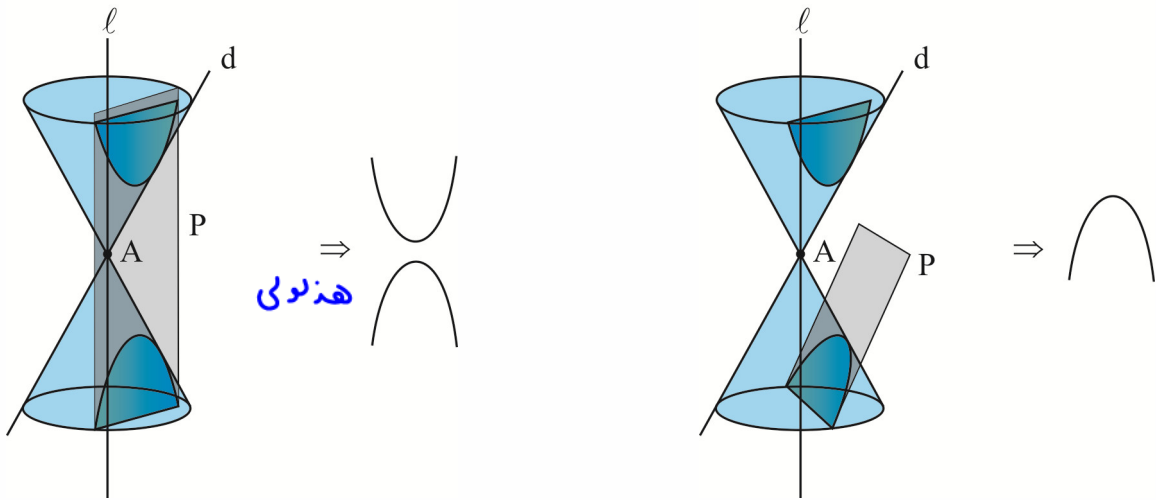
حالا بیایید ببینیم هر کدام از این مقطع‌ها چگونه ایجاد می‌شوند:

مقاطع مخروطی

(۱) اگر صفحه بر محور سطح مخروطی عمود باشد و از رأس آن عبور نکند، مقطع دایره است.
 (۲) اگر صفحه بر محور سطح مخروطی عمود یا با مولد سطح مخروطی موازی نباشد، مقطع بیضی است.



(۳) اگر صفحه با مولد سطح مخروطی موازی باشد و از رأس آن عبور نکند، مقطع سهمی است.
 (۴) اگر صفحه P موازی محور سطح مخروطی باشد و سطح مخروطی را در بالا و پایین آن قطع کند و از رأس سطح مخروطی عبور نکند، مقطع هذلولی است.



تعریف: شکل حاصل از برخورد یک صفحه با سطح مخروطی را در حالت‌های زیر مشخص کنید.

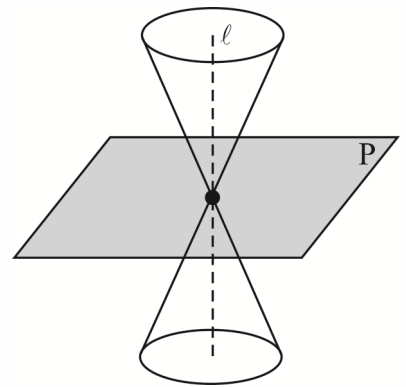
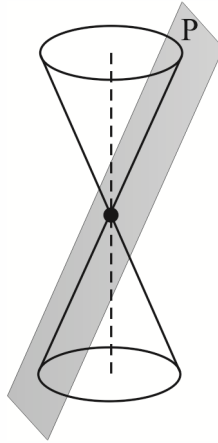
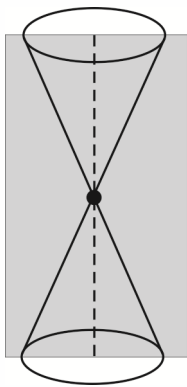
(الف) صفحه، عمود بر محور سطح مخروطی باشد و از رأس آن عبور کند.

(ب) صفحه، موازی مولد سطح مخروطی باشد و از رأس آن « \neq » عبور کند.

(پ) صفحه، موازی محور سطح مخروطی باشد و از رأس آن عبور کند.

پاسخ:

(الف) طبق شکل زیر وقتی صفحه P بر محور l عمود است و از رأس می‌گذرد، مقطع، یک نقطه (همان رأس) است. (ب) وقتی صفحه P با مولد سطح مخروطی موازی است و از رأس آن می‌گذرد، مقطع یک خط (یکی از مولدهای سطح مخروطی) است. (پ) وقتی صفحه P موازی محور سطح مخروطی است و از رأس آن می‌گذرد، مقطع دو خط متقاطع است.



Homework

۱ در یک مکعب به طول یال a ، صفحه قطری، آن را به دو قسمت مساوی تقسیم می‌کند. این دو قسمت را در وجه مربع به هم می‌چسبانیم. سطح کل منشور حاصل، چند برابر a^2 است؟

$$\begin{array}{ll} (۱) & ۵ + \sqrt{۲} \\ (۲) & ۴ + ۲\sqrt{۲} \\ (۳) & ۵ + ۲\sqrt{۲} \\ (۴) & ۳ + ۴\sqrt{۲} \end{array}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۰

۲ در هرم با قاعده مربع، یکی از یال‌ها عمود بر صفحه قاعده و بلندترین یال‌ها به طول ۶ واحد با تصویر خودش بر قاعده، زاویه ۶۰ درجه می‌سازد. حجم این هرم کدام است؟

$$\begin{array}{ll} (۱) & ۴\sqrt{۳} \\ (۲) & ۴/۵\sqrt{۳} \\ (۳) & ۴\sqrt{۶} \\ (۴) & ۷/۵\sqrt{۲} \end{array}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۵

۳ ظرفی است به شکل نیم‌کره، به ضخامت یکنواخت ۳ واحد و قطر خارجی دهانه آن ۱۶ واحد است. سطح کل این ظرف چند برابر π است؟

$$\begin{array}{ll} (۱) & ۲۰۸ \\ (۲) & ۲۱۲ \\ (۳) & ۲۱۵ \\ (۴) & ۲۱۷ \end{array}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

۴ مساحت مقطع یک مکعب با صفحه قطری آن برابر $۹\sqrt{۲}$ است، اندازه قطر مکعب کدام است؟

$$\begin{array}{ll} (۱) & ۲\sqrt{۳} \\ (۲) & ۳\sqrt{۲} \\ (۳) & ۲\sqrt{۶} \\ (۴) & ۳\sqrt{۳} \end{array}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

۵ در یک مکعب صفحه گذرا بر یک یال و وسط یال دیگر، آن را به دو قطعه نابرابر تقسیم می‌کند. نسبت حجم‌های این دو قطعه کدام است؟

$$\begin{array}{ll} (۱) & \frac{۱}{۴} \\ (۲) & \frac{۱}{۳} \\ (۳) & \frac{۱}{\sqrt{۵}} \\ (۴) & \frac{۱}{\sqrt{۳}} \end{array}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۸

۶ یک ذوزنقه قائم‌الزاویه به قاعده‌های ۲ و ۵ و ساق قائم ۳ واحد را حول ساق قائم دوران می‌دهیم. حجم جسم حاصل، کدام است؟

- (۱) 36π (۲) 38π
(۳) 39π (۴) 40π

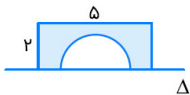
کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۵

۷ یک مثلث قائم‌الزاویه با زاویه 30° درجه و طول وتر ۸ واحد، حول وتر خود دوران می‌کند، حجم جسم حاصل چندبرابر π است؟

- (۱) ۲۴ (۲) ۳۲
(۳) ۳۶ (۴) ۴۰

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۶

۸ سطح محدود به مستطیل 5×2 و نیم‌دایره به قطر ۳ واحد، حول خط Δ دوران می‌کند. حجم جسم حاصل چندبرابر π است؟



- (۱) ۱۵
(۲) $15/5$
(۳) $16/5$
(۴) ۱۷

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۶

۹ حجم جسم حاصل از دوران مثلث قائم‌الزاویه ABC با ضلع‌های قائم AB و AC ، به ترتیب با اندازه‌های ۵ و $2\sqrt{6}$ واحد، حول خط گذرا از رأس C و موازی ضلع AB ، کدام است؟

- (۱) 60π (۲) 70π
(۳) 75π (۴) 80π

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۹

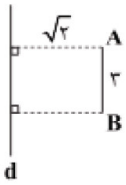
۱۰ از داخل یک استوانه قائم توپُر، به شعاع قاعده ۴ و ارتفاع ۵ واحد، بزرگ‌ترین مخروط قائم ممکن را حذف می‌کنیم. حجم جسم حاصل را با صفحه‌ای موازی قاعده مخروط به فاصله ۳ واحد از آن قطع می‌دهیم. مساحت مقطع حاصل، کدام است؟

- (۱) $10/36\pi$ (۲) $11/28\pi$
(۳) $12/56\pi$ (۴) $13/44\pi$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۶

۱۱

در شکل زیر، پاره‌خط AB موازی خط d است. از دوران AB حول d شکلی با کدام حجم به دست می‌آید؟



(۱) 4π

(۲) 2π

(۳) 8π

(۴) 6π

علوی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۴ ۱۴۰۰

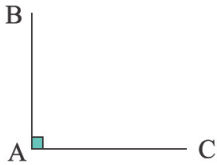
۱۲

یک دوزنقه قائم‌الزاویه به قاعده‌های ۳ و ۷ و ساق بزرگ ۵ را حول ساق کوچکش دوران می‌دهیم. شکل فضایی حاصل را بیان و حجم آن را بیابید.

علوی ریاضی و فیزیک دهم آزمون شماره ۶ ۱۴۰۱

۱۳

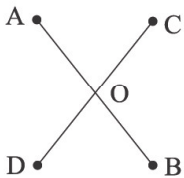
دو پاره‌خط عمود بر هم به صورت زیر مفروض‌اند. از دوران AB حول AC چه شکلی پدید می‌آید؟ (با رسم شکل)



علوی ریاضی و فیزیک دهم آزمون شماره ۷ ۱۳۹۹

۱۴

دو پاره‌خط متقاطع به صورت زیر مفروض‌اند. از دوران AB حول CD چه جسم هندسی پدید می‌آید؟ (با رسم شکل)



علوی ریاضی و فیزیک دهم آزمون شماره ۷ ۱۳۹۹

۱۵

از داخل یک استوانه قائم توپر، به شعاع قاعده ۴ و ارتفاع ۵ واحد، بزرگ‌ترین مخروط قائم ممکن را حذف می‌کنیم. حجم حاصل را با صفحه‌ای موازی قاعده مخروط به فاصله ۳ واحد از آن قطع می‌دهیم. مساحت مقطع حاصل کدام است؟

(۲) $11/28\pi$

(۱) $10/36\pi$

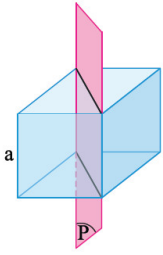
(۴) $13/44\pi$

(۳) $12/56\pi$

علوی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۴ ۱۴۰۱

۱۶ مساحت مقطع برش خورده توسط صفحه P از مکعب به ضلع واحد چقدر است؟

۱۶



(۱) ۲

(۲) $\sqrt{2}$

(۳) $2\sqrt{2}$

(۴) ۱

علوی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۱۰ ۱۴۰۰

۱۷ قاعده هرمی قائم، مستطیل $ABCD$ است. رأس هرم را نیز O نامیده‌ایم. سطح مقطع حاصل از برخورد صفحه P را با این هرم در هر حالت مشخص کنید.

۱۷

علوی ریاضی و فیزیک دهم آزمون شماره ۷ ۱۳۹۹

الف صفحه P از O نگذرد و بر ارتفاع هرم عمود باشد.

ب صفحه P از O بگذرد و بر قاعده هرم عمود باشد.

پ صفحه P از O نگذرد ولی بر قاعده هرم عمود باشد.

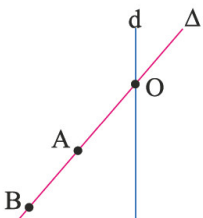
۱۸ صفحه P کره‌ای به مرکز O و شعاع ۵ سانتی‌متر را قطع کرده است. اگر فاصله نقطه O از صفحه ۳ سانتی‌متر باشد، مساحت این سطح مقطع چقدر است؟

۱۸

علوی ریاضی و فیزیک دهم آزمون شماره ۷ ۱۳۹۹

۱۹ کدام گزینه نادرست است؟

۱۹



(۱) از دوران خط Δ حول d دو مخروط به دست می‌آید.

(۲) از دوران یک مثلث قائم‌الزاویه حول یک ضلع زاویه قائمه آن یک مخروط به دست می‌آید.

(۳) از دوران یک مربع حول یک ضلع آن استوانه به دست می‌آید.

(۴) از دوران پاره‌خط AB حول خط d یک مخروط پدید می‌آید.

علوی ریاضی و فیزیک دهم آزمون شماره ۹ ۱۳۹۹

۲۰ دو کره با شعاع‌های r و r' یکدیگر را قطع کرده‌اند. به سؤالات زیر پاسخ دهید.

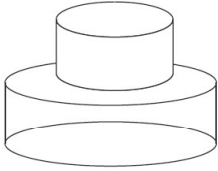
۲۰

علوی ریاضی و فیزیک دهم آزمون شماره ۷ ۱۳۹۹

الف نقاط مشترک واقع بر روی هر کره روی چه شکلی قرار دارد؟

ب اگر همه این نقاط را به مرکز یکی از دو کره وصل کنیم چه شکلی به دست می‌آید؟

۲۱ دو استوانه روی یکدیگر قرار داده‌ایم. اگر صفحه‌ای از بالا به‌طور عمودی هر دو استوانه را برش دهد، سطح مقطع حاصل چه شکلی خواهد بود؟ (همراه با رسم شکل)



علوی ریاضی و فیزیک دهم آزمون شماره ۱۳۹۹ ۷

۲۲ از دوران یک مثلث قائم‌الزاویه حول وتر آن چه جسمی پدید می‌آید؟ (با رسم شکل)

علوی ریاضی و فیزیک دهم آزمون شماره ۱۳۹۹ ۷

۲۳ شکل حاصل از دوران هریک را با رسم نام ببرید.

علوی ریاضی و فیزیک دهم آزمون شماره ۱۳۹۹ ۷

الف نیم‌دایره حول قطر آن

ب مستطیل حول طول یا عرض

پ مثلث قائم‌الزاویه حول یک ضلع زاویه قائمه

ت ذوزنقه قائم‌الزاویه حول ساق قائم آن

۲۴ یک شش ضلعی منتظم به طول ضلع a را حول قطر بزرگ آن دوران می‌دهیم. اگر حجم شکل حاصل برابر 8π باشد، a کدام است؟

(۲) $\sqrt{6}$

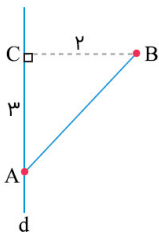
(۱) $\sqrt{3}$

(۴) $2\sqrt{2}$

(۳) ۲

علوی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۱۴۰۰ ۱۲

۲۵ مثلث ABC را حول خط d دوران می‌دهیم، سپس با صفحه‌ای عمود بر خط d به فاصله یک واحد از BC برش می‌دهیم. مساحت سطح مقطع چقدر است؟



(۱) $\frac{\pi}{16}$

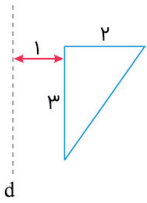
(۲) $\frac{9}{16}\pi$

(۳) $\frac{16}{7}\pi$

(۴) $\frac{16}{9}\pi$

علوی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۱۳۹۹ ۱۱

۲۶ اگر مثلث قائم‌الزاویه زیر را که یک ضلع آن با d موازی است را حول خط d دوران دهیم، حجم شکل حاصل چقدر است؟



(۱) 8π

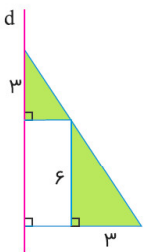
(۲) 10π

(۳) 12π

(۴) 14π

علوی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۱۰ شماره ۱۳۹۹

۲۷ شکل زیر را حول خط d دوران می‌دهیم. حجم حاصل از دوران بخش سایه‌دار کدام است؟



(۱) $\frac{378}{5}\pi$

(۲) $\frac{189\pi}{4}$

(۳) 92π

(۴) 100π

علوی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۴ شماره ۱۳۹۹

۲۸ یک کره توپیر به شعاع ۵ را با یک صفحه برش زده‌ایم. اگر مساحت سطح مقطع ایجادشده دارای مساحت 9π باشد، فاصله مرکز کره تا صفحه موردنظر کدام است؟

(۲) ۴

(۱) $\sqrt{7}$

(۴) $\sqrt{6}$

(۳) ۳

علوی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۴ شماره ۱۳۹۹

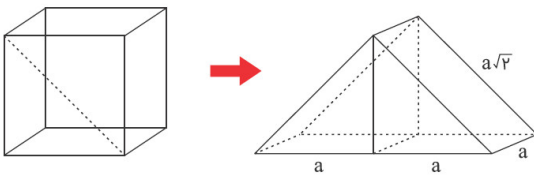
پاسخ Homework

گزینه ۲

۱

مساحت کل منشور حاصل برابر است با:

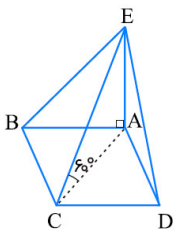
$$S = 2(a \times a\sqrt{2} + a \times a + 2 \times \frac{a^2}{2}) = 2(a^2\sqrt{2} + 2a^2) = a^2(4 + 2\sqrt{2})$$



کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۰

گزینه ۲

۲

اگر بلندترین یال هرم را EC فرض کنیم، پس زاویه $\hat{E}CA = 60^\circ$ است.

$$\sin 60^\circ = \frac{EA}{EC} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{EA}{6} \Rightarrow EA = 3\sqrt{3}$$

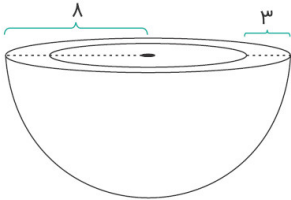
$$\cos 60^\circ = \frac{AC}{EC} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{AC}{6} \Rightarrow AC = 3$$

$$AC = \sqrt{2}AB \Rightarrow AB = \frac{3}{\sqrt{2}} \Rightarrow S_{ABCD} = \left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{9}{2}$$

$$V_{\text{هرم}} = \frac{1}{3}EA \times S_{ABCD} = \frac{1}{3} \times 3\sqrt{3} \times \frac{9}{2} = \frac{9}{2}\sqrt{3}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۵

طبق توضیحات صورت سؤال، شکل زیر را رسم می‌کنیم:



برای محاسبه سطح کل این ظرف کافی است مساحت نیم‌کره درونی، نیم‌کره بیرونی و مساحت سطح مقطع ظرف را به دست آوریم؛ دقت کنید که سطح مقطع ظرف به صورت دایره‌ای به شعاع ۸ است که دایره دیگری به شعاع ۵ از آن کسر شده است.

$$S_{\text{نیمکره بیرونی}} = \frac{1}{2} (4\pi \times 64) = 2\pi \times 64 = 128\pi$$

$$S_{\text{نیمکره درونی}} = \frac{1}{2} (4\pi \times 25) = 2\pi \times 25 = 50\pi$$

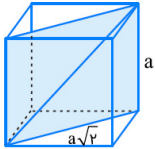
$$S_{\text{سطح مقطع}} = \pi(64 - 25) = 39\pi$$

$$S_{\text{کل}} = S_{\text{نیمکره بیرونی}} + S_{\text{نیمکره درونی}} + S_{\text{سطح مقطع}} = 128\pi + 50\pi + 39\pi = 217\pi$$

گزینه ۴

۴

همان طوری که در شکل زیر نیز مشخص است، سطح مقطع یک مکعب به طول یال a و صفحه قطری آن، مستطیلی به طول اضلاع a و $a\sqrt{2}$ است. با توجه به مساحت مستطیل، اندازه a را محاسبه می‌کنیم.



بنابراین می‌توان نوشت:

$$a(a\sqrt{2}) = 9\sqrt{2} \Rightarrow a^2\sqrt{2} = 9\sqrt{2} \Rightarrow a^2 = 9 \Rightarrow a = 3$$

قطر مکعب به طول یال a برابر $a\sqrt{3}$ است (با دو بار استفاده از قضیه فیثاغورس ثابت می‌شود)، پس داریم:

$$a\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$$

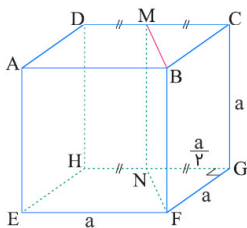
یال BF از مکعب زیر را در نظر می‌گیریم. نقطهٔ موردنظر نمی‌تواند وسط یال‌های AE, FG, EF و BC و CG باشد، زیرا در این صورت صفحهٔ گذرنده از BF و این نقطه، بر مکعب مماس می‌شود. ضمناً این نقطه نمی‌تواند وسط DH باشد، زیرا در این صورت، صفحهٔ گذرنده از AB و این نقطه، صفحهٔ قطری مکعب خواهد بود و حجم آن را نصف می‌کند که خلاف فرض است. پس فرض می‌کنیم نقطهٔ موردنظر، نقطهٔ M وسط یال CD است. (دقت کنید که برای یال‌های AD, EH, GH هم به همان نسبت یکسان، حجم‌ها تقسیم می‌شد). نقطهٔ M را به نقطهٔ N وسط HG وصل می‌کنیم. پس $MN \parallel BF$ و در نتیجه صفحهٔ گذرنده از BF و M ، از نقطهٔ N هم می‌گذرد و مکعب را به دو منشور تقسیم می‌کند. حال اگر حجم کوچک‌تر را V_1 ، حجم بزرگ‌تر را V_2 و حجم مکعب را V فرض کنیم، داریم:

$$V = a^3$$

$$V_1 = S_{\triangle GFN} \times CG = \frac{1}{2} \left(a\right) \left(\frac{a}{2}\right) (a) = \frac{a^3}{4}$$

$$\Rightarrow V_2 = V - V_1 = \frac{3a^3}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{3}$$



گزینه ۳

۶

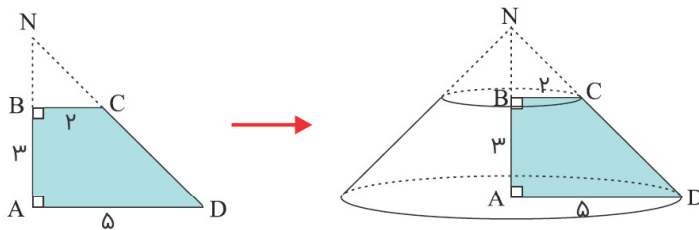
کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۵

گام اول

الف) در یک دوزنقه قائم‌الزاویه با امتداد دادن اضلاع غیرقاعده‌ای، یک مثلث قائم‌الزاویه به وجود می‌آید.
 ب) از دوران مثلث قائم‌الزاویه حول یکی از اضلاع قائمه‌اش، یک مخروط ایجاد می‌شود.
 ج) حجم مخروط از رابطه $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ به دست می‌آید که r شعاع قاعده و h ارتفاع آن است.

گام دوم

دوزنقه $ABCD$ را رسم می‌کنیم. نقطه تقاطع امتداد دو ضلع AB و CD را N می‌نامیم. دو مثلث $\triangle NAD$ و $\triangle NBC$ قائم‌الزاویه هستند. برای محاسبه حجم حاصل از دوران دوزنقه حول ضلع قائم آن، کافی است حجم مخروط حاصل از دوران مثلث $\triangle NBC$ حول ضلع NB را از حجم مخروط حاصل از دوران مثلث $\triangle NAD$ حول ضلع NA کم کنیم.



باتوجه به اینکه $BC \parallel AD$ است، طبق قضیه تالس داریم:

$$\frac{BN}{AN} = \frac{BC}{AD} \Rightarrow \frac{BN}{BN+3} = \frac{2}{5} \Rightarrow 5BN = 2BN + 6 \Rightarrow 3BN = 6 \Rightarrow BN = 2$$

بنابراین:

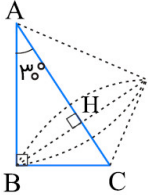
$$V_{\text{دوران دوزنقه}} = V_{\text{دوران مثلث } \triangle NAD} - V_{\text{دوران مثلث } \triangle NBC}$$

$$V_{\text{دوران دوزنقه}} = \frac{1}{3}\pi(5)^2 \times 3 - \frac{1}{3}\pi(2)^2 \times 3 = \frac{1}{3}\pi(125 - 8) = \frac{117}{3}\pi = 39\pi$$

گزینه ۲

۷

مطابق شکل از دوران مثلث قائم‌الزاویه ABC حول وتر AC ، دو مخروط پدید می‌آید که ارتفاع وارد بر وتر (BH) ، شعاع قاعده این دو مخروط است.



طول ضلع روبه‌رو به زاویه 30° در مثلث قائم‌الزاویه، نصف طول وتر است. پس طبق روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه داریم:

$$\begin{aligned} AC = 8 &\Rightarrow BC = \frac{1}{2} \times 8 = 4 \\ BC^2 &= AC \cdot CH \Rightarrow 16 = 8 \times CH \\ \Rightarrow CH &= 2 \Rightarrow AH = 8 - 2 = 6 \\ BH^2 &= AH \cdot CH = 2 \times 6 = 12 \end{aligned}$$

مجموع حجم دو مخروط برابر است با:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3}\pi(BH)^2 \times AH + \frac{1}{3}\pi(BH)^2 \times CH \\ &= \frac{\pi}{3} \times 12 \times 6 + \frac{\pi}{3} \times 12 \times 2 \\ &= 24\pi + 8\pi = 32\pi \end{aligned}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۶

گزینه ۲

۸

باتوجه به شکل، قطر نیم‌دایره بر طول مستطیل منطبق شده است. حال داریم:
نکته ۱: از دوران یک مستطیل حول طول خود یک استوانه به ارتفاعی برابر با طول مستطیل و شعاع قاعده‌ای برابر با عرض آن پدید می‌آید.

نکته ۲: از دوران یک نیم‌دایره حول قطر آن، یک کره به همان شعاع پدید می‌آید.
بنابراین باتوجه به این دو نکته، شکل ما یک استوانه می‌شود که از درون آن یک کره به شعاع $\frac{3}{4}$ خالی شده است، حجم جسم حاصل به صورت زیر محاسبه می‌شود:

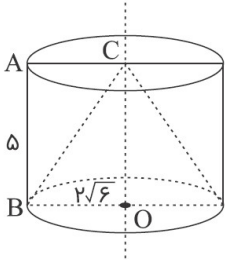
$$V_{\text{رنگی}} = V_{\text{استوانه}} - V_{\text{کره}} = \pi(2)^2 \times 5 - \frac{4}{3}\pi\left(\frac{3}{4}\right)^3 = 20\pi - \frac{9}{4}\pi = 15/5\pi$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۶

گزینه ۴

۹

مطابق شکل، باید حجم بین استوانه و مخروط را بیابیم که برابر است با:



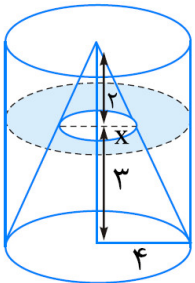
$$V_{\text{استوانه}} - V_{\text{مخروط}} = \pi(2\sqrt{6})^2(5) - \frac{1}{3}\pi(2\sqrt{6})^2(5) = \frac{2}{3}\pi(2\sqrt{6})^2(5)$$

$$= \frac{2}{3}\pi(24)(5) = 80\pi$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۹

گزینه ۴

۱۰



نسبت تشابه: $\frac{x}{4} = \frac{2}{5} \Rightarrow x = \frac{8}{5}$

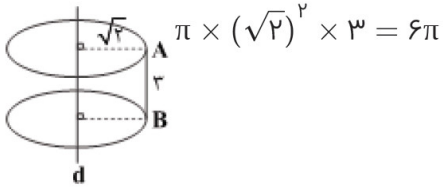
$$S = \pi(4)^2 - \pi\left(\frac{8}{5}\right)^2 = 16\pi - \frac{64}{25}\pi = \frac{336}{25}\pi = 13\frac{11}{25}\pi$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۶

گزینه ۴

۱۱

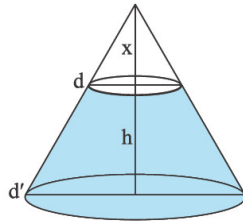
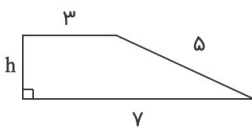
از دوران این پاره‌خط حول خط d یک استوانه قائم با شعاع قاعده $\sqrt{2}$ و ارتفاع ۳ به دست می‌آید و حجم آن به صورت زیر به دست می‌آید:



علوی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۴ ۱۴۰۰

از دوران ذوزنقه قائم‌الزاویه حول ساق کوچکش، یک مخروط ناقص ایجاد می‌شود.

۱۲



$$\frac{x}{x+h} = \frac{3}{7}$$

$$\frac{x}{3} = \frac{9}{4}$$

$$x = \frac{9}{4}$$

حجم مخروط کوچک - حجم مخروط بزرگ = حجم مخروط ناقص

$$\text{حجم مخروط ناقص} = \frac{1}{3}\pi r^2 h - \frac{1}{3}\pi (3)^2 x$$

$$V = \frac{1}{3}\pi (7)^2 (h+x) - \frac{1}{3}\pi 9x$$

$$V = \frac{1}{3}\pi (49h + 49x)$$

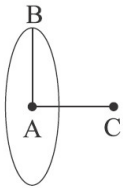
$$V = \frac{1}{3}\pi (49 \times 3 + 49 \times \frac{9}{4})$$

$$V = \frac{1}{3}\pi (237)$$

$$V = 79\pi$$

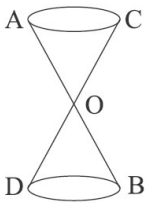
علوی ریاضی و فیزیک دهم آزمون شماره ۱۶ ۱۴۰۱

دایره ۱۳



علوی ریاضی و فیزیک دهم آزمون شماره ۱۳۹۹ ۷

دو مخروط که رأس مشترک دارند. (O) ۱۴

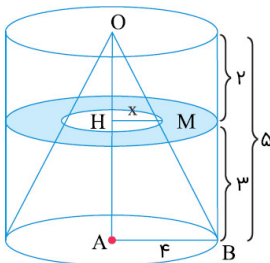


علوی ریاضی و فیزیک دهم آزمون شماره ۱۳۹۹ ۷

گزینه ۴

۱۵

سطح مقطع حاصل، قسمت رنگی در شکل زیر است. در مثلث OAB بنا بر تالس:



$$\frac{HM}{AB} = \frac{OH}{OA} \Rightarrow \frac{x}{4} = \frac{2}{5} \Rightarrow x = \frac{8}{5}$$

اکنون به سادگی سطح مقطع رنگی را به دست می‌آوریم:

$$S_{\text{رنگی}} = \pi \times (4)^2 - \pi(x)^2 = 16\pi - \frac{64}{25}\pi = \frac{336\pi}{25} = 13\frac{16}{25}\pi$$

علوی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۱۴۰۱ ۴

گزینه ۲

۱۶

صفحه موردنظر مستطیلی به عرض یال مکعب و به طول قطر وجه می‌باشد.

$$S = a \times a\sqrt{2} = a^2\sqrt{2} = (1)^2\sqrt{2} = \sqrt{2}$$

علوی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۱۰ ۱۴۰۰

علوی ریاضی و فیزیک دهم آزمون شماره ۷ ۱۳۹۹

۱۷

الف مستطیل

ب مثلث

پ دوزنقه

۱۸

سطح مقطع یک صفحه با کره، دایره می‌باشد. از A به O و O' وصل می‌کنیم، خواهیم داشت:

$$\Delta OO'A : \hat{O}' = 90^\circ \xrightarrow{\text{فیتاغورس}} OA^2 = OO'^2 + O'A^2 \Rightarrow 5^2 = 3^2 + r^2$$

$$r^2 = 25 - 9 = 16 \Rightarrow r = 4 \text{ شعاع دایره سطح مقطع}$$

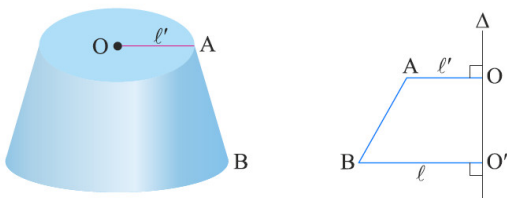
$$\text{دایره } S = \pi r^2 \Rightarrow S = \pi(4^2) = 16\pi \text{ cm}^2$$

علوی ریاضی و فیزیک دهم آزمون شماره ۷ ۱۳۹۹

گزینه ۴

۱۹

از دوران پاره خط AB حول d مخروطی پدید می‌آید که قسمت بالای آن حذف شده است، که به آن مخروط ناقص می‌گوییم.



علوی ریاضی و فیزیک دهم آزمون شماره ۹ ۱۳۹۹

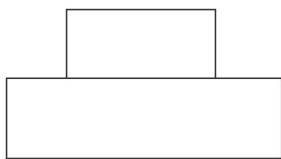
علوی ریاضی و فیزیک دهم آزمون شماره ۷ ۱۳۹۹

۲۰

الف دایره

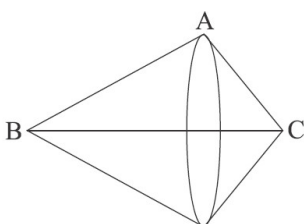
ب مخروط

۲۱ دو مستطیل به هم چسبیده و روی هم مانند شکل.



علوی ریاضی و فیزیک دهم آزمون شماره ۷ ۱۳۹۹

۲۲ دو مخروط که قاعده آن‌ها به هم چسبیده و مشترک هستند.

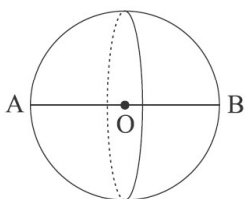


علوی ریاضی و فیزیک دهم آزمون شماره ۷ ۱۳۹۹

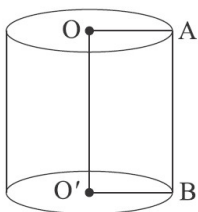
علوی ریاضی و فیزیک دهم آزمون شماره ۷ ۱۳۹۹

۲۳

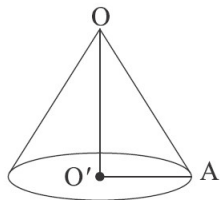
الف کره



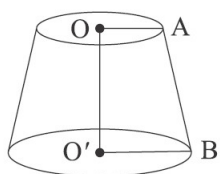
ب استوانه



پ مخروط

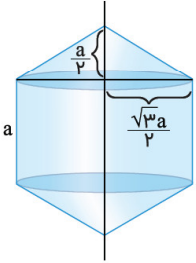


ت مخروط ناقص



گزینه ۳

۲۴



شکل حاصل از دو مخروط برابر و یک استوانه تشکیل شده است. شعاع قاعده مخروطها و استوانه نصف طول قطر کوچک شش ضلعی است و قطر کوچک شش ضلعی به ضلع a برابر $a\sqrt{3}$ است. ارتفاع هریک از مخروطها برابر $\frac{a}{2}$ و ارتفاع استوانه برابر a است. اکنون حجم شکل حاصل را به دست می‌آوریم:

$$\underbrace{2 \times \frac{1}{3} \times \pi \times \left(\frac{\sqrt{3}a}{2}\right)^2 \times \frac{a}{2}}_{\text{حجم مخروط}} + \underbrace{\pi \left(\frac{\sqrt{3}a}{2}\right)^2 \times a}_{\text{حجم استوانه}} = \frac{\pi a^3}{4} + \frac{3\pi a^3}{4} = \pi a^3$$

در نتیجه:

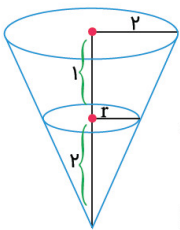
$$\pi a^3 = 8\pi \Rightarrow a = 2$$

علوی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۱۲ ۱۴۰۰

گزینه ۴

۲۵

اگر مثلث را حول d دوران دهیم، مخروطی ایجاد می‌شود، برش مورد نظر دایره‌ای به شعاع r می‌دهد که r را می‌توان با قضیه تالس محاسبه کرد.



$$\frac{r}{2} = \frac{1}{3} \Rightarrow r = \frac{4}{3}$$

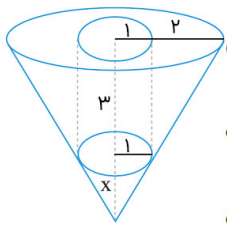
$$S \text{ مقطع} = \pi r^2 = \pi \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{9}\pi$$

علوی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۱۱ ۱۳۹۹

گزینه ۲

۲۶

شکل حاصل به صورت زیر خواهد بود.



$$\text{تالس: } \frac{x}{x+3} = \frac{1}{3} \Rightarrow 3x = x+3 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

$$V_{\text{مخروط بزرگ}} = \frac{\pi}{3}(3)^2(3 + \frac{3}{2}) = 3\pi \times \frac{9}{2} = \frac{27}{2}\pi$$

$$V_{\text{مخروط کوچک}} = \frac{\pi}{3}(1)^2 \times \frac{3}{2} = \frac{\pi}{2}$$

$$V_{\text{حجم استوانه}} = \pi(1)^2(3) = 3\pi$$

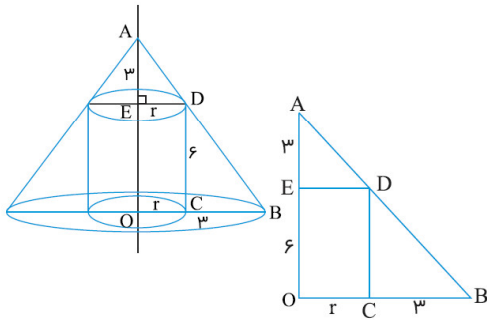
$$V_{\text{حجم اصلی}} = \frac{27\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - 3\pi = 10\pi$$

علوی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۱۰ ۱۳۹۹

گزینه ۲

۲۷

از نمادگذاری شکل زیر استفاده می‌کنیم. شکل فضایی حاصل، یک مخروط است که یک استوانه به شعاع قاعده r و ارتفاع ۶ از آن برداشته شده است.



از تشابه دو مثلث AED و DCB به دست می‌آید:

$$\frac{r}{3} = \frac{3}{6} \Rightarrow r = \frac{3}{2}$$

حجم شکل فضایی حاصل:

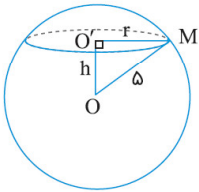
$$\frac{1}{3}\pi(3 + \frac{3}{2})^2 \times (3 + 6) - \pi \times (\frac{3}{2})^2 \times 6 = \frac{189}{4}\pi$$

علوی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۴ ۱۳۹۹

گزینه ۲

۲۸

از نمادگذاری شکل زیر استفاده می‌کنیم.

چون مساحت سطح مقطع برابر 9π است، پس:

$$\pi r^2 = 9\pi \Rightarrow r = 3$$

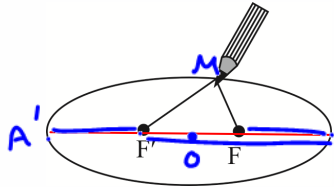
اکنون در مثلث قائم‌الزاویه OMO' بنا بر قضیه فیثاغورس:

$$h = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$$

علوی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۴ ۱۳۹۹

بیضی

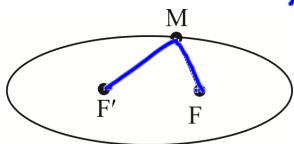
همان طور که دیدیم بیضی یکی از مقاطع مخروطی است. در ادامه با ویژگی‌های بیضی آشنا می‌شویم:
 (۱) رسم بیضی: اگر در دو نقطه از کاغذ دو سوزن فرو کنیم و نخ را که طولش بیشتر از فاصله این دو نقطه است به آن دو سوزن وصل کنیم و طبق شکل مداد را در حالتی که نخ کاملاً کشیده است روی صفحه حرکت دهیم، یک بیضی رسم می‌شود.
 (۲) طبق شیوه رسم بالا می‌توانیم بگوییم:



بیضی مجموعه نقاطی از صفحه است که مجموع فواصل آن‌ها از دو نقطه ثابت، مقداری ثابت است. $AA' = 2a$ قطر بزرگ $MF + MF' = 2a$ (۱) $AA' = 2a$ قطر بزرگ $MF + MF' = 2a$ (۲) به آن دو نقطه ثابت (همان نقاطی که در بالا در آن‌ها سوزن فرو کرده بودیم) می‌گوییم کانون‌های بیضی و معمولاً آن‌ها را با F و F' نشان می‌دهیم. مقدار ثابت را در تعریف بیضی با $2a$ نشان می‌دهیم.

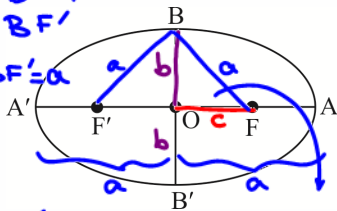


(۳) طبق مطالبی که گفتیم داریم: $AA' = 2a$ قطر بزرگ $MF + MF' = 2a$ بیضی مجموعه نقاطی از صفحه است که مجموع فاصله‌هایشان از دو نقطه ثابت به نام کانون برابر مقدار ثابت $2a$ باشد. یعنی اگر نقطه‌ای مانند M روی بیضی با کانون‌های F و F' باشد، داریم: $MF + MF' = 2a$



$BF + BF' = 2a$
 $BF = BF' = a$

$BB' = 2b$ قطر عمود کانونی $BB' = 2b$ قطر عمود کانونی

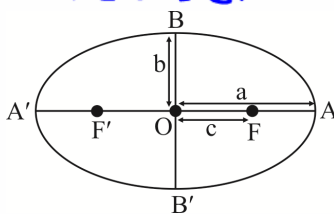


(۴) بیضی دو محور تقارن دارد که بزرگ‌ترین قطر (AA') و کوچک‌ترین قطر (BB') بیضی‌اند. $AA' = 2a$ است و $BB' = 2b$ ، نقطه وسط A یا A' و B یا B' و F یا F' مرکز تقارن یا مرکز بیضی است.

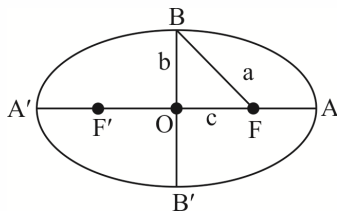
$a^2 = b^2 + c^2$ a : فاصله کانونی $AA' = 2a$
 $BB' = 2b$
 $FF' = 2c$

(۵) در هر بیضی نصف قطر بزرگ برابر a و نصف قطر کوچک برابر b و نصف فاصله کانونی (یعنی $\frac{FF'}{2}$) برابر c است.

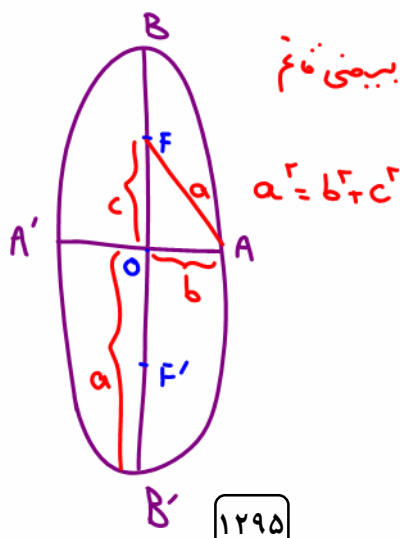
$OA = OA' = a$
 $OB = OB' = b$
 $OF = OF' = c$

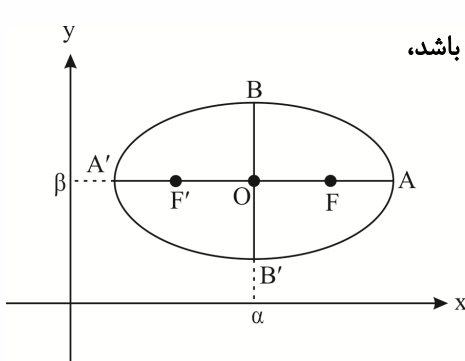


(۶) بین a و b و c رابطه $c^2 = a^2 - b^2$ برقرار است.



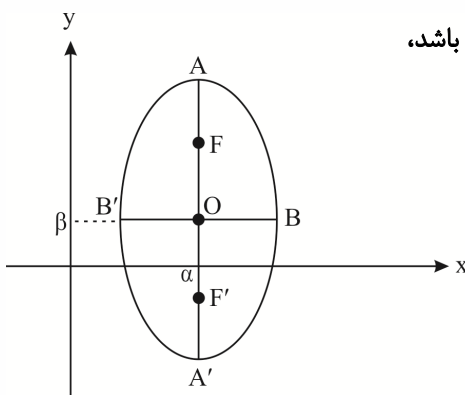
بیضی انقباضی





۷) در یک بیضی افقی (یعنی قطر بزرگ بیضی موازی محور xها است) اگر مرکز بیضی O باشد، داریم:

$$\begin{array}{l} A \begin{cases} \alpha + a \\ \beta \end{cases} \\ B \begin{cases} \alpha \\ \beta + b \end{cases} \\ F \begin{cases} \alpha + c \\ \beta \end{cases} \end{array} \quad \begin{array}{l} A' \begin{cases} \alpha - a \\ \beta \end{cases} \\ B' \begin{cases} \alpha \\ \beta - b \end{cases} \\ F' \begin{cases} \alpha - c \\ \beta \end{cases} \end{array}$$

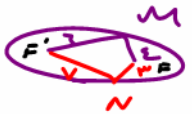


۸) در یک بیضی قائم (یعنی قطر بزرگ بیضی موازی محور yها است) اگر مرکز بیضی O باشد، داریم:

$$\begin{array}{l} A \begin{cases} \alpha \\ \beta + a \end{cases} \\ B \begin{cases} \alpha + b \\ \beta \end{cases} \\ F \begin{cases} \alpha \\ \beta + c \end{cases} \end{array} \quad \begin{array}{l} A' \begin{cases} \alpha \\ \beta - a \end{cases} \\ B' \begin{cases} \alpha - b \\ \beta \end{cases} \\ F' \begin{cases} \alpha \\ \beta - c \end{cases} \end{array}$$

۹) برای این که مختصات رأس‌ها و کانون‌های بیضی را راحت‌تر بنویسیم یا همیشه یک شکل فرضی رسم می‌کنیم یا می‌گوییم: در B و B' عرض مرکز با b جمع و تفریق می‌شود - در A و A' (یا F و F') طول مرکز با a (یا c) جمع و تفریق می‌شود \Rightarrow بیضی افقی در B و B' طول مرکز با b جمع و تفریق می‌شود - در A و A' (یا F و F') عرض مرکز با a (یا c) جمع و تفریق می‌شود \Rightarrow بیضی قائم دو سر قطر بزرگ $\Leftarrow \pm a$ دو سر قطر کوچک $\Leftarrow \pm b$ کانون‌ها $\Leftarrow \pm c$

تمرین: نقطه‌های M و N روی یک بیضی است که برای رسم آن باید نخ را در نقاط F و F' ببندیم. اگر $MF = 6$ ، $MF' = 4$ و فاصله نقطه N از F' برابر ۳ باشد، NF چه قدر است؟

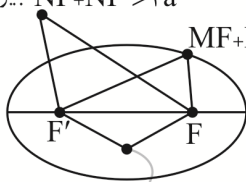


- ۷ (۴) ۶ (۳) ۵ (۲) ۴ (۱)

پاسخ: گزینه «۴» - قرار شد $MF + MF' = 10$ و $NF + NF' = 10$ و همگی ثابت و با هم برابر باشند. پس $6 + 4 = 3 + NF$ و در نتیجه $NF = 7$.

توجه: در بیضی سؤال قبل اگر جمع فاصله‌های نقطه‌ای از F و F' بیشتر از ۱۰ باشد، این نقطه بیرون بیضی است و اگر کم‌تر از ۱۰ باشد، درون بیضی است.

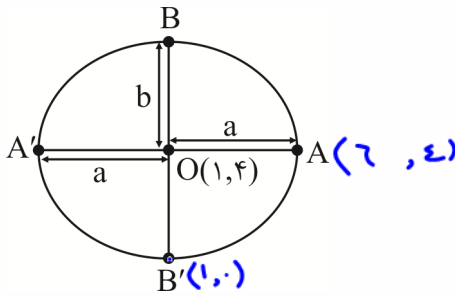
بیرون بیضی: $NF + NF' > 2a$



روی بیضی: $MF + MF' = 2a$

درون بیضی: $PF + PF' < 2a$

تعریف: در بیضی افقی با مرکز $(1, 4)$ و طول قطرهای ۸ و ۱۰، بیشترین مقدار طول و کمترین مقدار عرض نقاط، چه قدر اختلاف دارند؟
 پاسخ: گزینه «۲» - سؤال گفته $2a = 10$ و $2b = 8$ ، پس $a = 5$ و $b = 4$ و داریم:
 $y_{max} = y_B = y_O + b = 4 + 4 = 8$
 $y_{min} = y_{B'} = y_O - b = 4 - 4 = 0$
 اختلاف: $8 - 0 = 8$ (۱)
 $a^2 = b^2 + c^2$
 $5^2 = 4^2 + c^2$
 $25 = 16 + c^2$
 $c = 3$



نکته: موافقید که این بیضی بر محور x ها مماس است (چون $y_{B'} = 0$)

$x_{max} = x_A = x_O + a = 1 + 5 = 6$ $x_{min} = x_{A'} = x_O - a = 1 - 5 = -4$

پس $y_{max} - y_{min} = 6$

حالا مختصات نقاط این بیضی را ببینید:

راستی با توجه به فیثاغورس، c می شود ۳.

با این گزارهها موافقید؟

(الف) $-4 \leq x \leq 6$

(ب) $0 \leq y \leq 8$

(پ) $BF = a = 5$

(ت) یک کانون (F) روی نیمساز ربع اول است.

(ث) یک رأس کانونی روی نیمساز ربع دوم (A') است.

(ج) خطوط $x = 6$ ، $x = -4$ ، $y = 8$ و $y = 0$ بر بیضی مماس اند.

(چ) معادله محور تقارن افقی، $y = 4$ و معادله محور تقارن عمودی، $x = 1$ است.

تعریف: در یک بیضی کانونها $F(1, 2 + \sqrt{5})$ و $F'(1, 2 - \sqrt{5})$ هستند. اگر قطر کوچک به طول ۴ باشد، مجموع طول و عرض رأس

کانونی بیضی کدام می تواند باشد؟

وسط کانون: مرکز $O(1, 2)$

$5 = \frac{c}{a} \Rightarrow c = 5a$
 $4 = 2c \Rightarrow c = 2$
 $5 = \frac{2}{a} \Rightarrow a = \frac{2}{5}$

پاسخ: گزینه «۲» - F' و F طول مساوی و عرض متفاوت دارند پس بیضی قائم است. مرکز بیضی در وسط F' و F یعنی $O(1, 2)$ است و

فاصله OF برابر $c = \sqrt{5}$ است. سؤال گفته قطر کوچک $2b = 4$ است. پس $b = 2$:

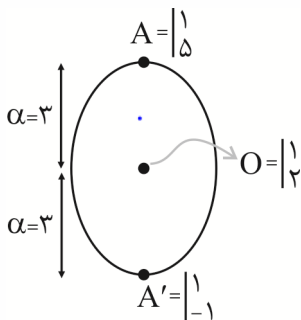
$a^2 = b^2 + c^2 = 2^2 + (\sqrt{5})^2 = 4 + 5 = 9 \Rightarrow a = 3$

$a^2 = b^2 + c^2$

$9 = 2^2 + (\sqrt{5})^2$

$a = 3$

حالا مختصات رأسهای کانونی:



درس: فریب از مرکز: e

هرچه e صغرتر، بیضی دایره تر و هرچه e یک تر بیضی پارهظنتر!

$e = \frac{c}{a}$

$e = 0$ (دایره)

$0 < e < 1$ (بیضی)

$e = 1$ (پاره‌خط)

$e > 1$ (هیپربول)

$\frac{b}{a}$ نسبت قطر کوچک به بزرگ

$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}$

و مجموع طول و عرض آن ۶ یا صفر است.

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$17 = b^2 + 7$$

$$b = 3$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{7}}{4} \rightarrow c = \sqrt{7}$$

$$7 - (-2) = 1 = 2a \rightarrow a = \frac{1}{2}$$

تمرین: دو سر قطر بزرگ یک بیضی (1,6) و (1,-2) و خروج از مرکز آن $\frac{\sqrt{7}}{4}$ است. طول قطر کوچک این بیضی کدام است؟

$$2b = 7 \rightarrow b = \frac{7}{2}$$

$$7 \text{ (3)}$$

$$8 \text{ (2)}$$

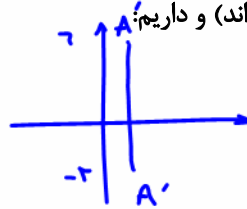
$$6 \text{ (1)}$$

$$AA' = 2a = 6 - (-2) = 8 \Rightarrow a = 4$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{7}}{4} \xrightarrow{a=4} c = \sqrt{7}$$

$$b^2 = a^2 - c^2 = 4^2 - \sqrt{7}^2 = 16 - 7 = 9 \Rightarrow b = 3$$

$$BB' = 2b = 6$$



پاسخ: گزینه «1» - این بیضی قائم است (یها متفاوت اند) و داریم: حالا e را داریم:

پس:

و طول قطر کوچک می شود:

تمرین: در یک بیضی فاصله رأس A از کانون دورتر 3 برابر فاصله آن از کانون نزدیک تر است. خروج از مرکز کدام است؟

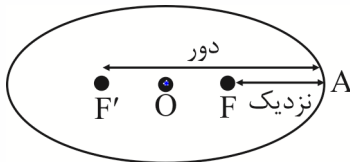
$$\frac{1}{6} \text{ (4)}$$

$$\frac{1}{2} \text{ (3)}$$

$$\frac{1}{4} \text{ (2)}$$

$$\frac{1}{3} \text{ (1)}$$

پاسخ: گزینه «3» - فاصله ها را ببینید:



$$AF = a - c$$

$$AF' = a + c$$

$$a + c = 3(a - c)$$

$$a + c = 3a - 3c$$

$$4c = 2a$$

$$c = \frac{1}{2}a \rightarrow \frac{c}{a} = \frac{1}{2} \rightarrow e = \frac{1}{2}$$

سؤال گفته:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2} \text{ پس } 4c = 2a \text{ و در نتیجه:}$$

تمرین: در یک بیضی زاویه BFB' قائمه است. خروج از مرکز کدام است؟

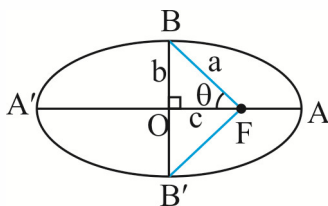
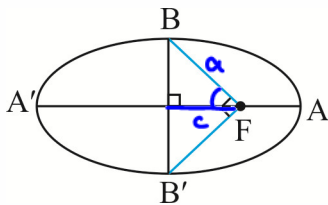
$$e = \frac{c}{a} = \cos(\hat{F}_1, -2\hat{5}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ (2)}$$

$$\frac{1}{2} \text{ (4)}$$

$$\frac{1}{4} \text{ (1)}$$

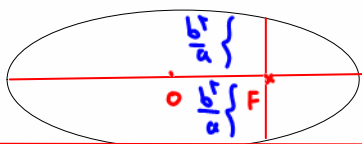
$$\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ (3)}$$

پاسخ: گزینه «2» - شکل را ببینید:



$$\hat{BFB}' = 90^\circ \Rightarrow \hat{BFO} = 45^\circ$$

$$e = \cos \theta = \frac{OF}{BF} = \frac{c}{a} = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$



نکته: $\frac{2ab}{a} = 2b$ طول وتر قائم الزامی

نکته: مساحت بیضی $S = \pi ab$ در حالت خاص $a = b$ مساحت

به دایره تبدیل می شود $S = \pi r^2$

$$S = \pi r^2$$

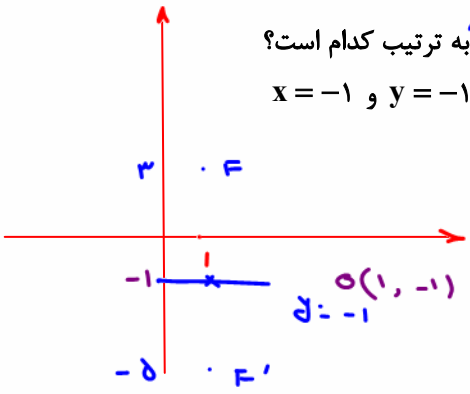
$x = 1$ قطر ماژول

$d = -1$

تمرین: اگر نقاط $(1, 3)$ و $(1, -5)$ کانون‌های یک بیضی باشند، معادله قطر بزرگ و کوچک بیضی به ترتیب کدام است؟

- (۱) $x = 1$ و $y = -1$ (۲) $x = -1$ و $y = 1$ (۳) $x = 1$ و $y = 1$ (۴) $x = -1$ و $y = -1$

$3 - (-5) = 8 = 2c \rightarrow c = 4 \quad OF = OF' = 4 \quad FF' = 8$



تمرین: مرکز یک بیضی افقی نقطه $O(-4, -1)$ و خروج از مرکزش $\frac{4}{5}$ و طول قطر کوچکش ۶ واحد است. مختصات کانون‌های بیضی کدام است؟

$O(-4, -1)$

$2b = 6 \quad b = 3$

$(-8, -1), (0, -1)$ (۲) ✓

$(-7, -1), (-1, -1)$ (۱)

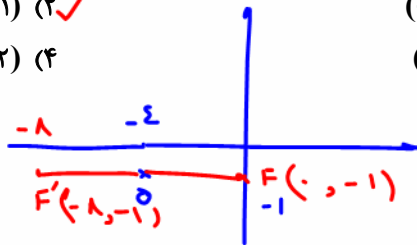
$(-4, -4), (-4, 2)$ (۴)

$(-4, -5), (-4, 3)$ (۳)

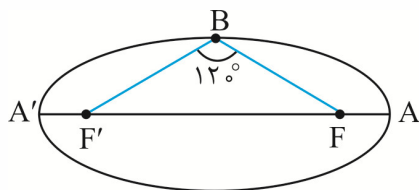
$e = \frac{c}{a} = \frac{4}{5} \rightarrow c = \frac{4}{5}a$

$a^2 = b^2 + c^2$
 $a^2 = 9 + (\frac{4}{5}a)^2 = 9 + \frac{16}{25}a^2$

$\frac{9}{25}a^2 = 9 \rightarrow a^2 = 25 \rightarrow a = 5 \rightarrow c = \frac{4}{5}(a=5) = 4 = c$

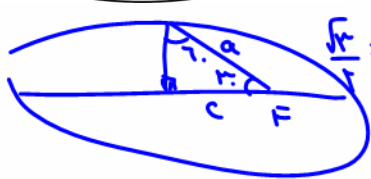


تمرین: در شکل مقابل A و A' دو رأس قطر بزرگ و B یک رأس قطر کوچک بیضی است. خروج از مرکز بیضی کدام است؟



- $\frac{1}{4}$ (۲)
 $\frac{\sqrt{3}}{4}$ (۴)

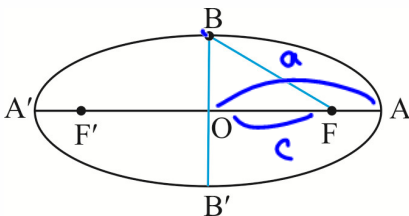
- $\frac{1}{2}$ (۱)
 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۳) ✓



$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{c}{a} = \frac{c}{a} = e$

$e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2} \rightarrow c = \frac{1}{2}a$

تمرین: در بیضی زیر، $AA' = 10$ و $BB' = 6$ است. نسبت $\frac{AF}{BF}$ برابر کدام است؟



- $\frac{1}{4}$ (۲)
 $\frac{1}{6}$ (۴)

$2b = 6 \quad 2a = 10$

$b = 3 \quad a = 5$

$a^2 = b^2 + c^2$

$25 = 9 + c^2 \rightarrow c = 4$

- $\frac{1}{3}$ (۱)
 $\frac{1}{5}$ (۳)

$\frac{AF}{BF} = \frac{a-c}{a} = \frac{5-4}{5} = \frac{1}{5}$

Homework

۱ کانون‌های یک بیضی نقاطی با طول $x = 3$ و $x = -3$ روی محور x ‌ها هستند. اگر خروج از مرکز بیضی $\frac{1}{3}$ باشد، طول قطر کوچک این بیضی کدام است؟

(۲) $12\sqrt{2}$

(۱) $15\sqrt{2}$

(۴) $6\sqrt{2}$

(۳) $8\sqrt{2}$

۲ نقطه $(-12, 0)$ یکی از کانون‌های یک بیضی است که طول قطر کوچک آن برابر ۱۸ است. اگر مبدأ مختصات مرکز بیضی باشد، خروج از مرکز بیضی، چقدر است؟

(۲) $0/8$

(۱) $0/6$

(۴) $1/8$

(۳) $1/4$

۳ در یک بیضی با خروج از مرکز $\sqrt{\frac{2}{3}}$ ، دو سر قطر بزرگ از انتهای قطر کوچک، با کدام زاویه رؤیت می‌شود؟

(۲) 90°

(۱) 60°

(۴) 150°

(۳) 120°

۴ یک بیضی به قطرهای $AA' = 14$ و $BB' = 4\sqrt{6}$ و کانون F نزدیک به نقطه A ، مفروض است. خط عمود بر قطر AA' از نقطه F ، دایره به قطر AA' را در نقطه M ، قطع می‌کند. اندازه پاره خط AM ، کدام است؟

(۲) $2\sqrt{7}$

(۱) 7

(۴) $2\sqrt{3}$

(۳) $2\sqrt{6}$

۵ در یک بیضی به کانون‌های $(2, -1)$ و $(2, 7)$ ، اندازه قطر کوچک ۶ واحد است. خروج از مرکز این بیضی کدام است؟

(۲) $0/64$

(۱) $0/6$

(۴) $0/8$

(۳) $0/75$

۶ در یک بیضی به اقطار $2\sqrt{5}$ و ۲ واحد، دایره‌ای هم‌مرکز با بیضی و شعاع ۲ واحد، بیضی را در نقطه M قطع می‌کند. مجموع مربعات فواصل M از دو کانون بیضی کدام است؟

(۲) 16

(۱) 12

(۴) 20

(۳) 18

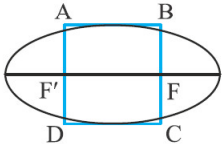
بیضی با خروج از مرکز $e = \frac{2}{3}$ و کانون $F(2, 1)$ و رأس کانونی نظیر آن $A(2, 4)$ مفروض است. بیشترین مساحت از بین مثلث‌هایی که یک رأس آن روی بیضی و دو رأس آن کانون‌های این بیضی باشند، کدام است؟

- (۱) $18\sqrt{5}$ (۲) $19\sqrt{5}$
 (۳) $5\sqrt{18}$ (۴) $36\sqrt{5}$

در یک بیضی خروج از مرکز $\frac{1}{4}$ و فاصله کانون از رأس دورتر برابر ۳ است. اندازه قطر کوچک بیضی چقدر است؟

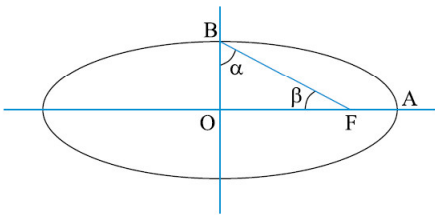
- (۱) $2\sqrt{3}$ (۲) $3\sqrt{2}$
 (۳) $2\sqrt{2}$ (۴) $\sqrt{3}$

در بیضی شکل زیر، قطرهای چهارضلعی ABCD عمودمنصف یکدیگرند. خروج از مرکز بیضی چقدر است؟ (F', F) کانون‌ها هستند.



- (۱) $\frac{1}{2}$
 (۲) $\frac{1}{3}$
 (۳) $\frac{1}{\sqrt{2}}$
 (۴) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

در شکل زیر، $2\alpha + 3\beta = 240^\circ$. خروج از مرکز بیضی چقدر است؟

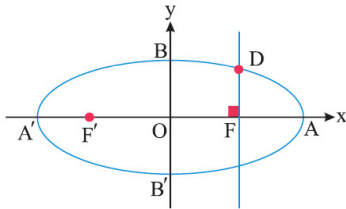


- (۱) $\frac{1}{2}$
 (۲) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
 (۳) $\frac{\sqrt{3}}{3}$
 (۴) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

یک بیضی با طول اقطار ۱۰ و ۸ مفروض است. از کانون F' خطی عمود بر محور کانونی رسم می‌کنیم تا دایره‌ای به قطر AA' (A و A' دو سر قطر بزرگ هستند) را در M قطع کند. طول پاره‌خط MA' کدام است؟

- (۱) $4\sqrt{5}$ (۲) ۸
 (۳) ۲۰ (۴) $5\sqrt{3}$

۱۲ مرکز بیضی شکل زیر بر مبدأ مختصات و قطرهای آن مانند شکل بر محورهای x و y منطبق هستند و فاصله F از هر دو نقطه O و A برابر ۴ است. خطی گذرا از F بر AA' عمود کرده‌ایم. این خط بیضی را در نقطه D قطع کرده است. مجموع مختصات D کدام است؟



(۱) ۱۰

(۲) ۹

(۳) ۸

(۴) $\frac{17}{2}$

۱۳ در بیضی به مرکز O و کانون‌های F و F' ، نقاط A و A' رؤس کانونی و B و B' رؤس غیرکانونی هستند. اگر مساحت مثلث OAB سه برابر مساحت مثلث FBF' باشد، خروج از مرکز بیضی کدام است؟

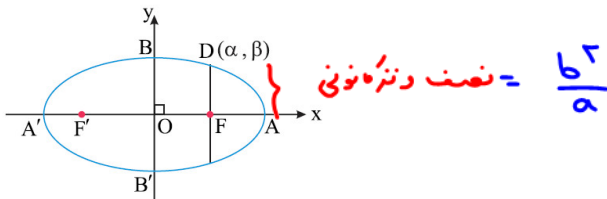
(۲) $\frac{1}{3}$

(۴) $\frac{1}{8}$

(۱) $\frac{1}{2}$

(۳) $\frac{1}{6}$

۱۴ مرکز بیضی زیر بر مبدأ مختصات و قطرهای آن مانند شکل بر محورهای x و y منطبق هستند و فاصله F از هر دو نقطه O و A برابر ۴ است. خطی گذرا از F بر AA' عمود کرده‌ایم. این خط بیضی را در نقطه D قطع کرده است. مختصات D کدام است؟



(۱) (۴, ۶)

(۲) (۴, ۵)

(۳) (۴, ۴)

(۴) $(4, \frac{9}{2})$

۱۵ در یک بیضی طول قطرهای برابر ۱۰ و ۸ است. تفاضل فواصل نقطه مفروض M از دو کانون بیضی برابر ۶ است. نقطه M کدام است؟

(۲) رأس ناکانونی

(۴) چنین نقطه‌ای روی بیضی وجود ندارد.

(۱) رأس کانونی

(۳) هر نقطه دلخواه روی بیضی

۱۶ اگر $F(6, 1)$ کانون بیضی، $B(3, 3)$ رأس ناکانونی آن باشد، آن‌گاه مجموع فواصل هر نقطه روی بیضی از دو کانون کدام است؟ (محورهای بیضی موازی محور مختصات هستند)

(۲) $2\sqrt{5}$

(۴) $2\sqrt{15}$

(۱) ۴

(۳) $2\sqrt{13}$

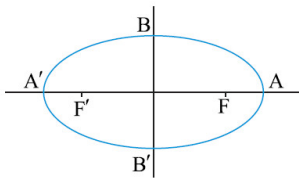
۱۷ نقطه $(2, 1)$ مرکز یک بیضی قائم است و نقاط $(2, 14)$ و $(7, 1)$ روی این بیضی قرار دارند. کدام نقطه یکی از کانون‌های این بیضی است؟

- (۱) $(2, 12)$
 (۲) $(2, 7)$
 (۳) $(2, -6)$
 (۴) $(2, -11)$

۱۸ در بیضی به طول قطر بزرگ ۳۴ و فاصله کانونی ۳۰، از رأس کانونی A مماسی بر دایره به قطر FF' رسم کرده‌ایم. طول این مماس کدام است؟

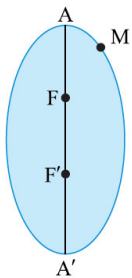
- (۱) ۸
 (۲) ۱۵
 (۳) ۱۷
 (۴) ۱۰

۱۹ در یک بیضی طول قطر بزرگ دو برابر طول قطر کوچک است. اندازه زاویه $F\hat{B}F'$ چند درجه است؟



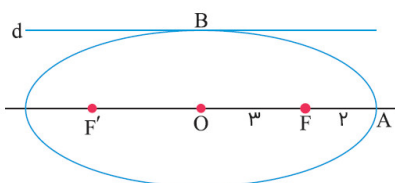
- (۱) 60°
 (۲) 30°
 (۳) 120°
 (۴) 45°

۲۰ در بیضی شکل زیر F و F' کانون‌های بیضی‌اند. اگر از نقطه دلخواه M (روی بیضی) به کانون F وصل کنیم و آن را امتداد دهیم، در این صورت بیضی را در نقطه N قطع می‌کند. محیط مثلث MNF' چقدر است؟ (قطر بزرگ را ۱۰ در نظر بگیرید)



- (۱) ۱۰
 (۲) ۲۰
 (۳) ۸
 (۴) ۱۶

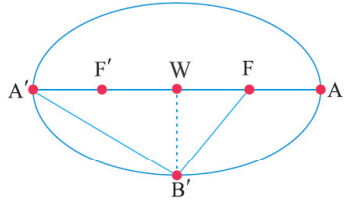
۲۱ در بیضی شکل زیر خط d در نقطه B بر این بیضی مماس است. حاصل ضرب فاصله‌های دو نقطه F و F' (کانون‌ها) از خط d کدام است؟



- (۱) ۹
 (۲) ۱۶
 (۳) ۲۵
 (۴) ۱۲

۲۲

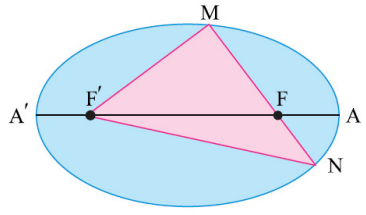
اگر در بیضی شکل زیر مساحت مثلث $A'FB'$ برابر $\frac{9}{4}$ قطر کوچک بیضی باشد، خروج از مرکز بیضی چقدر است؟ (F' و F) کانون، A' رؤس کانونی و W مرکز بیضی است و طول قطر کوچک بیضی ۲ است.)



- (۱) $\frac{39}{41}$
- (۲) $\frac{40}{41}$
- (۳) $\frac{39}{40}$
- (۴) $\frac{37}{40}$

۲۳

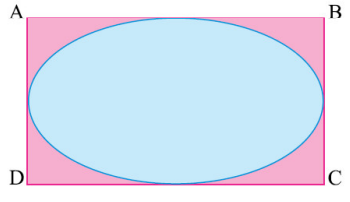
در بیضی زیر طول قطر کوچک ۱۶ و فاصله کانونی ۳۰ است. محیط مثلث MNF' کدام است؟



- (۱) ۳۰
- (۲) ۳۴
- (۳) ۴۲
- (۴) ۶۸

۲۴

در شکل زیر، یک بیضی به خروج از مرکز $\frac{\sqrt{8}}{3}$ درون یک مستطیل محاط شده است. طول قطر این مستطیل، چند برابر عرض مستطیل است؟



- (۱) $\sqrt{3}$
- (۲) $\sqrt{10}$
- (۳) $\sqrt{7}$
- (۴) $\sqrt{2}$

۲۵

در یک بیضی زاویه $\widehat{F'BF} = 120^\circ$. مقدار خروج از مرکز این بیضی کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$
- (۲) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
- (۳) $\frac{\sqrt{3}}{4}$
- (۴) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

۲۶

بیضی با کانون‌های $F(1, 2)$ و $F'(-1, p)$ که یکی از رأس‌های کانونی آن $A(2, 3)$ مفروض است. خروج از مرکز بیضی کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$
- (۲) $\frac{1}{3}$
- (۳) $\frac{1}{4}$
- (۴) $\frac{1}{6}$

پاسخ Homework

گزینه ۲

۱

طبق فرض، کانون‌های این بیضی، نقاط $F(3, 0)$ و $F'(-3, 0)$ می‌باشند. بنابراین:

$$FF' = 3 - (-3) = 6 \Rightarrow 2c = 6 \Rightarrow c = 3 \quad (1)$$

$$e = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{1}{3} \xrightarrow{(1)} \frac{3}{a} = \frac{1}{3} \Rightarrow a = 9 \quad (2)$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \xrightarrow{(1),(2)} 81 = b^2 + 9 \Rightarrow b^2 = 72 \Rightarrow b = 6\sqrt{2}$$

$$\text{طول قطر کوچک} = 2b = 2(6\sqrt{2}) = 12\sqrt{2}$$

گزینه ۲

۲

$$\begin{cases} c = 12 \\ 2b = 18 \Rightarrow b = 9 \end{cases} \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 = 81 + 144 = 225$$

$$\Rightarrow a = 15 \Rightarrow e = \frac{c}{a} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5} = 0.8$$

گزینه ۳

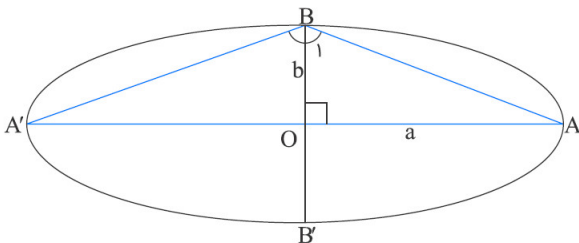
۳

$$e = \sqrt{\frac{2}{3}} \Rightarrow \frac{c}{a} = \sqrt{\frac{2}{3}} \Rightarrow \frac{c^2}{a^2} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{a^2 - b^2}{a^2} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow 1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2 = \frac{2}{3} \Rightarrow \left(\frac{b}{a}\right)^2 = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{a}{b} = \sqrt{3} \quad (*)$$

حال باتوجه به شکل زیر، داریم:



$$\triangle OAB : \tan \hat{B}_1 = \frac{a}{b} \xrightarrow{(*)} \tan \hat{B}_1 = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \hat{B}_1 = 60^\circ \Rightarrow \hat{B} = 2\hat{B}_1 = 120^\circ$$

گزینه ۲

۴

طبق فرض، داریم:

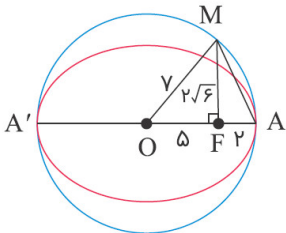
$$\left. \begin{aligned} AA' = 2a = 14 \Rightarrow a = 7 \\ BB' = 2b = 4\sqrt{6} \Rightarrow b = 2\sqrt{6} \end{aligned} \right\} \xrightarrow{a^2=b^2+c^2} 49 = 24 + c^2$$

$$\Rightarrow c^2 = 25 \Rightarrow c = 5 \Rightarrow OF = 5 \xrightarrow{OA=a=7} AF = 7 - 5 = 2$$

شعاع دایره است $OM \Rightarrow OM = OA = a = 7$

$\triangle OFM$: فیثاغورس $\Rightarrow FM^2 = OM^2 - OF^2 = 49 - 25 = 24 \Rightarrow FM = 2\sqrt{6}$

$\triangle AFM$: فیثاغورس $\Rightarrow AM = \sqrt{FM^2 + FA^2} = \sqrt{24 + 4} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$



گزینه ۴

۵

فاصله کانون‌های $F(2, 7)$ و $F'(-1, 7)$ برابر $2c$ است.

$$2c = |FF'| = |7 - (-1)| = 8 \Rightarrow c = 4$$

قطر کوچک برابر ۶ است، پس:

$$2b = 6 \Rightarrow b = 3$$

در بیضی رابطه $a^2 = b^2 + c^2$ برقرار است.

$$a^2 = 9 + 16 = 25 \Rightarrow a = 5$$

$$\text{خروج از مرکز} = \frac{c}{a} = \frac{4}{5} = 0.8$$

گزینه ۲

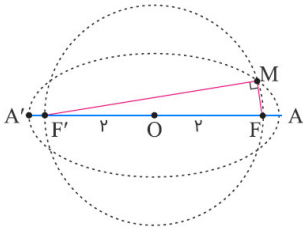
۶

باتوجه به معلومات سؤال، داریم:

$$\left. \begin{array}{l} \text{طول قطر بزرگ} = 2a = 2\sqrt{5} \Rightarrow a = \sqrt{5} \\ \text{طول قطر کوچک} = 2b = 2 \Rightarrow b = 1 \end{array} \right\} \xrightarrow{a^2=b^2+c^2} c = 2$$

پس $OF = OF' = 2$ و چون طول شعاع دایره هم ۲ واحد است، نقاط F و F' روی دایره‌اند. پس FF' قطر دایره است و چون زاویه FMF' محاطی و روبه‌رو به قطر می‌باشد، قائمه است و داریم:

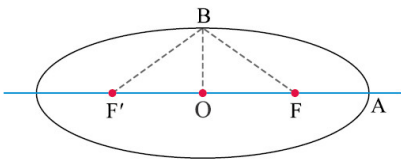
$$\triangle MF'F : \text{فیثاغورس} \Rightarrow MF^2 + MF'^2 = FF'^2 = 4^2 = 16$$



گزینه ۱

۷

بیشترین مساحت را مثلث $BF'F$ دارد:



و مقدار مساحت برابر است با:

$$S = \frac{1}{2} \times 2c \times b = b \times c \quad (1)$$

اکنون به دست می‌آید:

$$\left. \begin{array}{l} e = \frac{c}{a} = \frac{2}{3} \Rightarrow 2a = 3c \\ AF = a - c = 3 \Rightarrow 2a - 2c = 6 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} a = 9 \\ c = 6 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{a^2=b^2+c^2} b = \sqrt{81 - 36} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

$$S = 18\sqrt{5}, (1) \text{ بنابرین طبق رابطه}$$

گزینه ۱

۸

$$a + c = 3 \xrightarrow{\frac{c}{a} = \frac{1}{2}} 2c + c = 3 \Rightarrow c = 1, a = 2$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 4 = b^2 + 1 \Rightarrow b = \sqrt{3} \Rightarrow 2b = 2\sqrt{3}$$

گزینه ۳

۹

مفهوم این سؤال این است که چهارضلعی ABCD مربع است.

$$FF' = 2b \Rightarrow 2c = 2b \Rightarrow b = c$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = c^2 + c^2$$

$$\Rightarrow a^2 = 2c^2 \Rightarrow a = c\sqrt{2} \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

گزینه ۱

۱۰

چون مثلث OBF قائم‌الزاویه است، پس $\alpha + \beta = 90^\circ$. اکنون به دست می‌آید:

$$\begin{cases} 2\alpha + 3\beta = 240^\circ \\ \alpha + \beta = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 30^\circ \\ \beta = 60^\circ \end{cases}$$

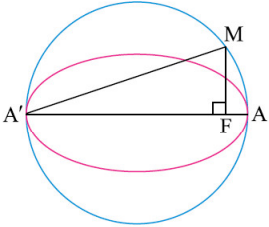
می‌توان نوشت:

$$\sin \alpha = \frac{OF}{BF} = \frac{c}{a} = e \Rightarrow e = \frac{1}{2}$$

گزینه ۱

۱۱

از نمادگذاری شکل زیر استفاده می‌کنیم. می‌دانیم $MF = b$ و $A'F = a + c$. در مثلث قائم‌الزاویه $A'FM$ ، بنا بر قضیه فیثاغورس:



$$MA' = \sqrt{MF^2 + FA'^2} = \sqrt{b^2 + (a+c)^2} \quad (1)$$

بنا بر فرض مسئله $2a = 10$ و $2b = 8$ ، یعنی $a = 5$ و $b = 4$ ، در نتیجه:

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{25 - 16} = 3$$

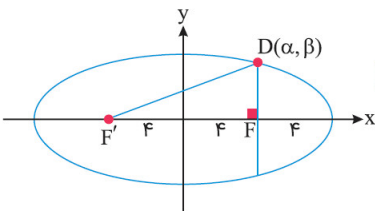
اکنون از رابطه (۱) به دست می‌آید:

$$MA' = \sqrt{16 + 64} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$$

گزینه ۱

۱۲

اگر $DF = \beta$ و $DF' = \gamma$ ، طبق تعریف بیضی:



$$\beta + \gamma = 2a = 16 \quad (1)$$

در مثلث $FF'D$ بنا بر قضیه فیثاغورس:

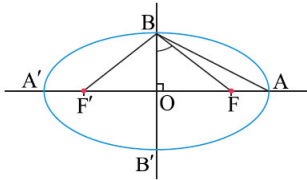
$$\gamma^2 - \beta^2 = 64 \Rightarrow (\gamma + \beta)(\gamma - \beta) = 64 \xrightarrow{\gamma + \beta = 16} \gamma - \beta = 4 \quad (2)$$

از برابری (۱) و (۲) به دست می‌آید $\beta = 6$ ، در نتیجه $D = (4, 6)$ و مجموع مختصات آن برابر ۱۰ است.

گزینه ۳

۱۳

از نمادگذاری شکل زیر استفاده می‌کنیم. بنا بر فرض مسئله: $\frac{S_{OAB}}{S_{FBF'}} = 3$



دو مثلث OAB و FBF' در ارتفاع OB مشترک هستند، پس نسبت مساحت آن‌ها برابر نسبت قاعده‌های نظیر این ارتفاع است:

$$\frac{S_{OAB}}{S_{FBF'}} = \frac{a}{2c} = 3 \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{1}{6}$$

یعنی $e = \frac{1}{6}$

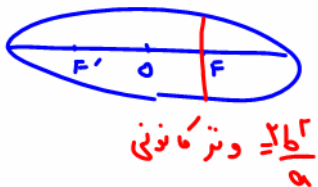
گزینه ۱

۱۴

بنابر فرض $OF = AF = 4$ یعنی $c = a - c = 4$ پس: $a = 8, c = 4$
 به دست می‌آید: $b^2 = a^2 - c^2 = 48$
 می‌دانیم DF نصف طول وتر کانونی بیضی است، پس:

$$DF = \frac{b^2}{a} = \frac{48}{8} = 6$$

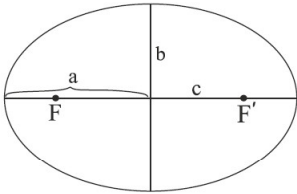
اکنون به دست می‌آید: $D = (4, 6)$



گزینه ۱

۱۵

چون طول قطرها برابر ۱۰ و ۸ است، پس $a = ۵$ و $b = ۴$ ، به دست می‌آید: $c = \sqrt{a^2 - b^2} = ۳$



بنابر فرض $MF - MF' = ۶$ همچنین می‌دانیم $MF + MF' = ۱۰$ می‌توان نوشت:

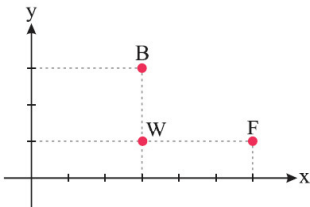
$$\begin{cases} MF + MF' = ۱۰ \\ MF - MF' = ۶ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} MF = ۸ \\ MF' = ۲ \end{cases}$$

مشاهده می‌شود $MF = a + c$ و $MF' = a - c$ ، بنابراین M یک رأس کانونی است.

گزینه ۳

۱۶

نقطه‌ها را در دستگاه مختصات رسم می‌کنیم. باتوجه به شکل:



$$\begin{cases} c = WF = ۳ \\ b = WB = ۲ \end{cases}$$

می‌توان نوشت:

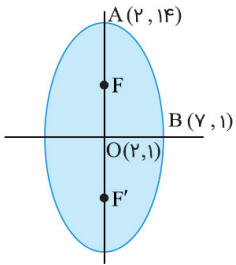
$$a = \sqrt{b^2 + c^2} = \sqrt{۱۳}$$

بنابراین مجموع فواصل هر نقطه روی بیضی از دو کانون برابر $2a = 2\sqrt{۱۳}$ است.

گزینه ۴

۱۷

باتوجه به فرض نتیجه می‌گیریم نقطه $A(2, 14)$ یک سر قطر بزرگ و نقطه $B(7, 1)$ یک سر قطر کوچک بیضی است، بنابراین:



$$a = OA = 13, b = OB = 5$$

در نتیجه:

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$$

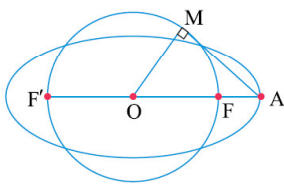
بنابراین کانون‌های بیضی به صورت زیر هستند:

$$F = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 + 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 13 \end{pmatrix}, F' = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 - 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -11 \end{pmatrix}$$

گزینه ۱

۱۸

از نمادگذاری شکل زیر استفاده می‌کنیم. مثلث OAM قائم‌الزاویه است:



$$AM = \sqrt{OA^2 - OM^2} = \sqrt{a^2 - c^2} = b$$

باتوجه به اطلاعات مسأله، $a = 17$ و $c = 15$ بنابراین:

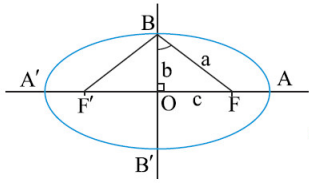
$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{17^2 - 15^2} = 8$$

یعنی طول مماس AM برابر ۸ است.

گزینه ۳

۱۹

از نمادگذاری شکل زیر استفاده می‌کنیم. بنا بر فرض مسأله $a = 2b$:



$$\cos(\widehat{OBF}) = \frac{b}{a} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{OBF} = 60^\circ$$

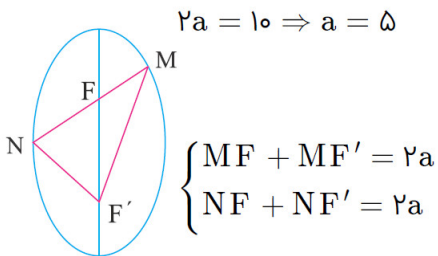
در مثلث قائم‌الزاویه OBF ، بنا بر نسبت‌های مثلثاتی:

در نتیجه:

$$\widehat{F'BF} = 2(\widehat{F'BO}) = 2 \times 60^\circ = 120^\circ$$

گزینه ۲

۲۰



$$2a = 10 \Rightarrow a = 5$$

$$\begin{cases} MF + MF' = 2a \\ NF + NF' = 2a \end{cases}$$

باتوجه به تعریف بیضی:

محیط مثلث MNF' را P فرض می‌کنیم:

$$P = MF + MF' + NF + NF' = 2a + 2a = 4a = 20$$

گزینه ۲

۲۱

باتوجه به اطلاعات روی شکل:

$$\left. \begin{matrix} a = OA = 5 \\ c = OF = 3 \end{matrix} \right\} \Rightarrow b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$$

به سادگی معلوم است که حاصل ضرب فواصل F و F' تا خط d برابر b^2 است؛ یعنی:

$$FH \times F'H' = b^2 = 16$$

گزینه ۲

۲۲

$$S_{AFB'} = \frac{9}{2} |WB'| \Rightarrow \frac{1}{2} |FA'| \times |WB'| = \frac{9}{2} |WB'| \Rightarrow |FA'| = 9 \Rightarrow a + c = 9$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 - c^2 = 1 \Rightarrow (a - c)(a + c) = 1 \xrightarrow{a+c=9} a - c = \frac{1}{9}$$

$$\begin{cases} a + c = 9 \\ a - c = \frac{1}{9} \end{cases} \xrightarrow{+} 2a = \frac{82}{9} \Rightarrow a = \frac{41}{9}, c = 9 - \frac{41}{9} = \frac{40}{9}$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{40}{41}$$

گزینه ۴

۲۳

چون $2b = 16$ و $2c = 30$ ، پس $b = 8$ و $c = 15$ و در نتیجه:

$$a = \sqrt{b^2 + c^2} = \sqrt{8^2 + 15^2} = 17$$

چون M و N روی بیضی است، پس:

$$MF + MF' = 2a = 34$$

$$NF + NF' = 2a = 34$$

در نتیجه:

$$MNF' \text{ محیط مثلث} = MF + MF' + NF + NF' = 34 + 34 = 68$$

گزینه ۲

۲۴

طول مستطیل برابر $2a$ و عرض آن برابر $2b$ خواهد بود.

$$\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{\lambda}}{3} \Rightarrow \frac{c^2}{a^2} = \frac{\lambda}{9} \Rightarrow \frac{a^2 - b^2}{a^2} = \frac{\lambda}{9}$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{b^2}{a^2} = \frac{\lambda}{9} \Rightarrow \frac{b^2}{a^2} = \frac{1}{9} \Rightarrow a = 3b$$

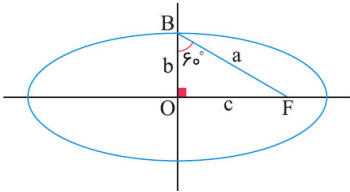
اگر دو قطر مستطیل را d فرض کنیم، داریم:

$$d = \sqrt{(2a)^2 + (2b)^2} = 2\sqrt{9b^2 + b^2} = 2b\sqrt{10} \Rightarrow \frac{d}{2b} = \sqrt{10}$$

گزینه ۲

۲۵

از نمادگذاری شکل زیر استفاده می‌کنیم. در مثلث OBF می‌توان نوشت:



$$\sin 60^\circ = \frac{c}{a} \Rightarrow e = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

گزینه ۱

۲۶

A, F' و F در یک راستا قرار دارند.

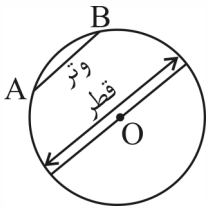
$$m_{FA} = m_{FF'} \Rightarrow \frac{p-2}{2-1} = \frac{p-2}{-1-1} \Rightarrow p=0 \Rightarrow F'(-1, 0)$$

$$2c = |FF'| = \sqrt{(-1-1)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \Rightarrow c = \sqrt{2}$$

$$a-c = |AF| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \Rightarrow a - \sqrt{2} = \sqrt{2} \Rightarrow a = 2\sqrt{2}$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

دایره، مفاهیم ابتدایی



دایره، مکان هندسی نقاطی از صفحه است که همگی از نقطه‌ی ثابت O ، به فاصله‌ی معلوم r ، قرار گرفته‌اند. به O مرکز دایره و به r شعاع آن می‌گوییم.
 خطی که دو نقطه‌ی روی دایره را به هم وصل می‌کند، وتر نام دارد و وترى که از O بگذرد، قطر دایره است.
 به جور دیگری: همه‌ی قطرها در یک نقطه مشترک‌اند: همان مرکز دایره!

شگرد دسته خطوط قطر برای دایره

اگر دسته خطوط بهت داد: که در اصل به معادله‌ی خط هستند که پارامتر هم داره و گفت این معادله‌ی همه‌ی قطرهای دایره است، تو این کار رو بکن: دو تا m دلخواه بهش بده تا دو تا معادله‌ی خط بدون پارامتر دربیاد، با حل اون دو تا توی یک دستگاه، مرکز درمیاد. اصلاً بهتره اون دو تا m رو طوری بدی که به بار ضریب x و به بار هم ضریب y رو صفر کنه، این جورى به راست مرکز درمیاد...

تعین: دسته‌ی خطوط به معادلات $(m+2)y + (m+1)x + 1 = 0$ قطرهای یک دایره‌اند. اگر این دایره از نقطه‌ی $M(5, 2)$ بگذرد، شعاع آن چه قدر است؟

(سراسری ریاضی)

- ۴ (۱)
- ۵ (۲)
- ۳ (۳)
- ۳ (۴)

پاسخ: گزینه‌ی «۲»

$$(m+2)y + (m+1)x + 1 = 0 \begin{cases} m=-2 \rightarrow -x+1=0 \Rightarrow x=1 \\ m=-1 \rightarrow y+1=0 \Rightarrow y=-1 \end{cases} \xrightarrow{\text{مرکز}} O(1, -1) \xrightarrow{M=(5, 2)} r = OM$$

$$= \sqrt{(5-1)^2 + (2+1)^2} = \sqrt{16+9} = 5$$

نوشتن معادله‌ی دایره در حالت استاندارد

فرم کلی معادله‌ی دایره: $(x-O)^2 + (y-O)^2 = r^2$

برای نوشتن معادله‌ی دایره، پس از نوشتن معادله‌ی خام بالا (۱)، پراوتزها رو با مختصات مرکز پُر کن و سمت راست رو با شعاع دایره. ببین:

$$(x-O)^2 + (y-O)^2 = r^2 \xrightarrow[r=\text{شعاع}]{O(\alpha, \beta) = \text{مرکز}} (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2$$

مربع شعاع
 عرض مرکز
 طول مرکز

مثال: دایره‌ی بی مرکز
 $(-1, 0)$ شعاع 5

فرم استاندارد
 $(x+1)^2 + y^2 = 5^2$
 $(x+1)^2 + (y-0)^2 = 25$
 $x^2 + 2x + 1 + y^2 - 25 = 0$
 $x^2 + 2x + y^2 - 24 = 0$
 یا ضعیف
 $(x+1)^2 + y^2 = 25$

اثبات
 فرمول
 استاندارد
 دایره



$M(x, y)$
 فاصله همه نقاط
 مثل M از O برابر R است.

ضربش به توان ۲
 $OM = R = \sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2}$
 $R^2 = (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2$

$R = \frac{1}{2} \sqrt{(2)^2 + (1)^2 - 2(-4)}$
 $R = \frac{1}{2} \sqrt{20} = \sqrt{5}$

$$R = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 - 4c}$$

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \rightarrow \left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right) \text{ مرکز}$$

یافتن مختصات مرکز شعاع دایره با داشتن معادله گسترده دایره:

تعریف: معادله دایره‌ای که مرکزش $O = (-1, 1)$ بوده و از نقطه‌ی $A = (2, 0)$ می‌گذرد، برابر است با:

$$x^2 + y^2 + 2x - 2y = 8 \quad (1) \quad \text{نامده } O \text{ تا } A \text{ شعاع}$$

$$x^2 + y^2 - 2x + 2y = 0 \quad (2) \quad OA = \sqrt{(2-(-1))^2 + (0-1)^2} = \sqrt{10} = R$$

$$O = (-1, 1) \xrightarrow{A=(2,0)} OA = r = \sqrt{(-1-2)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$$

پاسخ: گزینه‌ی «۳»

$$\xrightarrow{\text{معادله دایره}} (x - (-1))^2 + (y - 1)^2 = (\sqrt{10})^2 \xrightarrow{\text{باز کردن اتحادها}} x^2 + 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 = 10$$

$$\xrightarrow{\text{ساده}} x^2 + y^2 + 2x - 2y = 8$$

دریافت اطلاعات از معادله استاندارد دایره

(۱) توجه کن معادله‌ی داده‌شده، استاندارد باشد. یعنی ضریب x و y درون پرانتز و هم‌چنین ضریب خود پرانتزها، یک باشد. اگر در معادله‌ی

استاندارد، اتحادها باز نشده باشد ولی x و y یا پرانتزها، ضریبی غیر از ۱ داشته باشند؛ مثل $4(x-2)^2 + (2y-3)^2 = 8$ باید اول ضریب x

و y رو فاکتور بگیریم تا بیان بیرون پرانتزها بعدش دو طرف رو تقسیم کنی تا استاندارد بشه...
خب حالا می‌تونیم بگی:

(۲) مرکز دایره: هر کدام از پرانتزها رو صفر کن و ریشه‌ی حاصل رو اعلام کن...

(۳) شعاع دایره: از عدد سمت راست، جذر بگیر

تعریف: مساحت دایره‌ی $(2x+1)^2 + (1-2y)^2 = 2$ چه قدر است؟

$$\pi (4)$$

$$2\pi (3)$$

$$\frac{\pi}{2} (2)$$

$$4\pi (1)$$

پاسخ: گزینه‌ی «۲»

$$(2x+1)^2 + (1-2y)^2 = 2 \xrightarrow{\text{فاکتور از توی پرانتزها بگیر}} (2(x+\frac{1}{2}))^2 + (-2(y-\frac{1}{2}))^2 = 2$$

$$\xrightarrow{\text{توان رو بده به هر کدام}} 4(x+\frac{1}{2})^2 + 4(y-\frac{1}{2})^2 = 2 \xrightarrow{\div 4} (x+\frac{1}{2})^2 + (y-\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{2} \xrightarrow{\text{مرکز}} O = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$$

$$\xrightarrow{\text{شعاع}} r = \sqrt{\frac{1}{2}} \xrightarrow{\text{مساحت}} \pi r^2 = \pi \times \frac{1}{2} = \frac{\pi}{2}$$

$$R^2 = \frac{1}{2} \\ S = \pi R^2 = \frac{\pi}{2}$$

معادله گسترده‌ی دایره

شگرد دایره‌ی گسترده:

گاهی در معادله‌ی گسترده، پرانتز اتحادها رو به توان دو رسانده و تمام جملات را به یک طرف منتقل کرده و ساده می‌کنند! به این فرم دایره، معادله‌ی گسترده می‌گوییم.

اگر معادله‌ی گسترده، به صورت $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ داده شده بود، ضریب x و y را به -2 تقسیم کنید. این جوری مرکز به دست

میداد: $O(\frac{a}{-2}, \frac{b}{-2})$. برای به دست آوردن شعاع، این کار رو انجام بده: مرکز رو که درآوردی، اسمش رو به ترتیب بذار (α, β) ، بعدش هم اینا

رو بذار تو فرمول $r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - c}$ و تمام! راستی c ، عدد ثابت آخر معادله‌ی دایره است که بعدش دیگه معادله‌ی دایره، مساوی صفر

$$\text{شعاع } r = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 - 4c}$$

می‌شه!

حواستون باشه ضریب x^2 و y^2 حتماً ۱ باشه تا از این فرمول‌ها استفاده کنی! اگه نبود با تقسیم دو طرف، درستش کن! تازه عدد c هم باید

سمت چپ تساوی باشد! یعنی معادله‌ی دایره‌ی گسترده، سمت راستش صفر باشد؛ آنگاه نبود همه رو بیار به طرف‌ها ببین:

$$2x^2 + 2y^2 - 4x + 6y - 6 = 0 \xrightarrow{\div 2} x^2 + y^2 - 2x + 3y - 3 = 0 \xrightarrow{\text{مرکز}} O\left(\frac{-2}{-2}, \frac{3}{-2}\right) = (1, -\frac{3}{2})$$

$$\xrightarrow{\text{شعاع}} r = \sqrt{1^2 + (-\frac{3}{2})^2 - (-3)} = \frac{5}{2}$$

$$R = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 - 4c} = \frac{1}{2} \sqrt{(-2)^2 + (3)^2 - 4(-3)} = \frac{5}{2}$$

تعرین: اگر $O(1, 2)$ مرکز دایره‌ی $x^2 + y^2 - ax + 2by = 0$ باشد، $a + b$ کدام است؟

(۴) صفر

(۳) ۴

(۲) -۲

(۱) ۲

$$x^2 + y^2 - ax + 2by = 0 \xrightarrow{\text{مرکز}} O = \left(\frac{-a}{-2}, \frac{2b}{-2}\right) = \left(\frac{a}{2}, -b\right) = \boxed{(1, 2)} \Rightarrow \frac{a}{2} = 1, -b = 2$$

پاسخ: گزینه‌ی «۴»

$$\Rightarrow a = 2, b = -2 \Rightarrow a + b = 0$$

شرط دایره بودن به رابطه

☑ اگر معادله‌ی $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$ دایره باشد، آن‌گاه $A = B$ خواهد بود. البته عکس این جمله درست نیست. چرا که شعاع دایره هم باید عددی مثبت باشد.

یه جور دیگه: شرط لازم و کافی برای دایره بودن معادله‌ی $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ ، که ضریب x^2 و y^2 اون رو ۱ کردی (!) اینه

$$R = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 - 4c} \quad a^2 + b^2 > 4c \quad . a^2 + b^2 > 4c$$

تعرین: شعاع دایره‌ی $ax^2 + y^2 - 2x - 6y = k$ برابر ۳ است. $a + k$ کدام است؟

(۴) ۲

(۳) -۱

(۲) ۱

(۱) صفر

$$ax^2 + y^2 - 2x - 6y = k \xrightarrow{\text{ضریب } x^2 = \text{ضریب } y^2} a = 1 \xrightarrow{\text{همه یک طرف}} x^2 + y^2 - 2x - 6y - k = 0$$

پاسخ: گزینه‌ی «۱»

$$\xrightarrow{\text{مرکز}} O = \left(\frac{-2}{-2}, \frac{-6}{-2}\right) = \boxed{(1, 3)} \xrightarrow{\text{شعاع}} r = \sqrt{1^2 + 3^2 - (-k)} = \boxed{3} \xrightarrow{\text{فرض}} k = -1 \Rightarrow a + k = (1) + (-1) = 0$$

$$R = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 - 4c} = \frac{1}{2} \sqrt{(-2)^2 + (-6)^2 - 4(-k)} = 3$$

$$\frac{1}{2} \sqrt{4 + 36 + 4k} = 3 \quad k + 4k = 36$$

(تجربی خارج)

تعرین: به ازای چند مقدار a ، نمودار $2x^2 + (a^2 - 7)y^2 + 4y + a = 0$ دایره می‌باشد؟

(۴) هیچ مقدار

(۳) یک مقدار

(۲) حداقل دو مقدار

(۱) دو مقدار

$$2x^2 + (a^2 - 7)y^2 + 4y + a = 0 \xrightarrow{\text{ضریب } x^2 = \text{ضریب } y^2} 2 = a^2 - 7 \xrightarrow{\text{حل}} a^2 = 9 \Rightarrow a = \pm 3$$

پاسخ: گزینه‌ی «۳»

$$\text{جایگذاری کن} \begin{cases} a=3 \rightarrow 2x^2 + 2y^2 + 4y + 3 = 0 \\ a=-3 \rightarrow 2x^2 + 2y^2 + 4y - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \div 2 \rightarrow x^2 + y^2 + 2y + \frac{3}{2} = 0 \xrightarrow{\text{بررسی } a^2 + b^2 > 4c} \cdot 2 + 2^2 > ? 4\left(\frac{3}{2}\right) \quad \boxed{\times} \\ \div 2 \rightarrow x^2 + y^2 + 2y - \frac{3}{2} = 0 \xrightarrow{\text{بررسی } a^2 + b^2 > 4c} \cdot 2 + 2^2 > ? 4\left(-\frac{3}{2}\right) \quad \boxed{\times} \end{cases}$$

نوشتن معادله دایره با اطلاعاتی به جز مرکز و شعاع، به شش تایی کنکوری که معمولاً یکی از اینها در امتحان ناپی هم هست (😊)

(۱) مرکز دایره و نقطه‌ای از دایره داده شده‌اند: خُب، فاصله‌ی مرکز تا هر نقطه‌ی روی دایره، مساوی شعاع است...

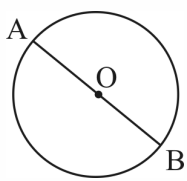
تعریف: نقطه‌ی $O = (a, 2a)$ مرکز دایره‌ای است که از نقاط $A = (2, 1)$ و $B = (-1, 4)$ می‌گذرد. شعاع دایره کدام است؟

- ۳ (۱) ۴ (۲) ۲√۲ (۳) ۳√۲ (۴)

پاسخ: گزینه‌ی «۱»
 $OA = OB = r \xrightarrow{O=(a,2a), A(2,1), B(-1,4)} \sqrt{(a-2)^2 + (2a-1)^2} = \sqrt{(a+1)^2 + (2a-4)^2}$

$\xrightarrow{\text{توان ۲ و اتحاد}} a^2 - 4a + 4 + 4a^2 - 4a + 1 = a^2 + 2a + 1 + 4a^2 - 16a + 16 \xrightarrow{\text{ساده}} 6a = 12 \Rightarrow a = 2$

$\xrightarrow{OA=r} r = \sqrt{(2-2)^2 + (4-1)^2} = 3$



(۲) مختصات دو سر یک قطر از دایره داده شده‌اند: وسط این دو نقطه، می‌شه مرکز دایره. فاصله‌ی این

دو نقطه رو هم حساب کن و بعد نصف کن تا بشه شعاع!
 $r = \frac{|AB|}{2}, O = \frac{A+B}{2}$

تعریف: دایره‌ای که مختصات دو سر قطر آن $A = (4, 1)$ و $B = (-2, 3)$ باشند، از کدام نقطه‌ی زیر نمی‌گذرنند؟

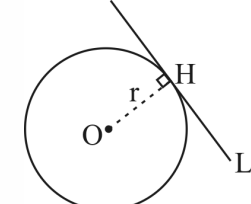
- (۱) (۲, ۵) (۲) (۴, ۱) (۳) (۰, ۱) (۴) (۰, -۱)

پاسخ: گزینه‌ی «۳»

می‌دونی شعاع نصف قطر؟
 فاصله ۲ نقطه ۲-ه شعاع
 مثل قطر، پیرایکن، نصف کن

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{|AB|}{2} \rightarrow r = \frac{1}{2} \sqrt{(-2-4)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{10} \\ \frac{A+B}{2} \rightarrow O = \frac{(2, 4)}{2} = (1, 2) \end{array} \right.$$

$\xrightarrow{\text{معادله دایره}} (x-1)^2 + (y-2)^2 = 10 \xrightarrow{\text{امتحان گزینه‌ها}} (0-1)^2 + (1-2)^2 = 10 \quad \square$
 گزینه‌ی ۳



(۳) مرکز دایره داده‌شده و معادله‌ی خطی که دایره بر آن مماس است، هم معلومه: فاصله‌ی مرکز رو از

اون خطِ مماس حساب کن، می‌شه شعاع دایره...

$d = \frac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} : ax+by+c=0$ (خط A) : نقطه
 فاصله نقطه O تا خط L

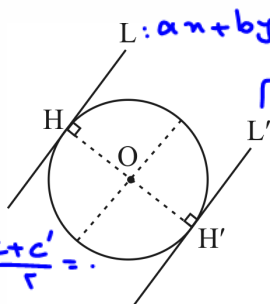
تعریف: دایره‌ای به مرکز $(2, -1)$ و مماس بر خط به معادله‌ی $x - y = 1$ ، محور Xها را در نقطه‌ای با کدام طول قطع می‌کند؟

- (۱) ۱ و ۳ (۲) ۱ و ۴ (۳) ۲ و ۳ (۴) ۱/۵ و ۴

پاسخ: گزینه‌ی «۱»

$x - y = 1 \xrightarrow{\text{همه رو بیار سمت چپ}} x - y - 1 = 0 \xrightarrow{O=(2,-1)} r = OH = \frac{|2 - (-1) - 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

$\xrightarrow{\text{معادله دایره}} (x-2)^2 + (y+1)^2 = 2 \xrightarrow{\text{تلاقی با محور Xها}} (x-2)^2 + 1 = 2 \Rightarrow x-2 = \pm 1 \Rightarrow x = 3, 1$



۴) دایره‌ای که بر دو خط موازی، مماس باشد: فاصله‌ی این دو خط موازی رو حساب کن، نصفش می‌شه شعاع دایره، هر نقطه‌ای که وسط این دو تا خط باشه هم، می‌تونه مرکز دایره باشه. (بین تست اطلاعات بیشتری داده یا نه؟) بد نیست یادآوری کنیم اگر $L: ax+by+c=0$ و $L': ax+by+c'=0$ باشند، آن وقت خط وسطی می‌شه $ax+by+\frac{c+c'}{2}=0$.

(سراسری ریاضی)

تعین: معادله‌ی دایره‌ای که مرکزش به طول ۱- و بر دو خط به معادلات $y = x + 4$ و $y = x$ مماس باشد، کدام است؟

$$x^2 + y^2 + 2x - 2y = 1 \quad (2)$$

$$x^2 + y^2 + 2x - 2y = 0 \quad (1)$$

$$x^2 + y^2 + 2x - y = 2 \quad (4)$$

$$x^2 + y^2 - 2x + y = 1 \quad (3)$$

پاسخ: گزینه‌ی «۱»

$$y = x \Rightarrow x - y = 0$$

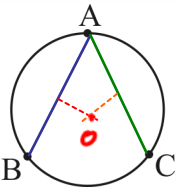
$$y = x + 4 \Rightarrow x - y + 4 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{فاصله دو خط موازی}} \frac{|0-4|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \xrightarrow{+2} r = \sqrt{2}$$

$$\xrightarrow{\text{وسط دو خط}} x - y + \frac{0+4}{2} = 0 \xrightarrow{\text{ساده}} x - y + 2 = 0 \xrightarrow{\text{طول مرکز ۱- است}} \begin{matrix} x = -1 \\ -1 - y + 2 = 0 \end{matrix} \Rightarrow y = 1 \Rightarrow O(-1, 1)$$

$$\xrightarrow{\text{معادله دایره}} (x+1)^2 + (y-1)^2 = 2 \xrightarrow{\text{اتحاد ساده}} x^2 + y^2 + 2x - 2y = 0$$

اگه تست بهتون گفت که دایره‌ای از نقطه‌ی (a, b) می‌گذره، معادله‌ی دایره رو تا هر جا که می‌تونن بنویس و آخرش نقطه‌ی (a, b) رو بذار توی معادله‌ی دایره: در واقع به جای x اش بذار a و به جای y هم بذار b ...



۵) معادله‌ی دایره‌ای که از سه نقطه‌ی غیرهم‌خط می‌گذرد: معادله‌ی دایره را به صورت $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ در نظر بگیرید، بعدش اون سه تا نقطه رو تو این معادله قرار بدید، حالا سه معادله داری و سه مجهول...

یه روش دیگه هم هست: عمودمنصف AB و AC رو بنویسی و قطع بدی، اون وقت مرکز به دست میاد. شعاع هم که دیگه کاری نداره!

(تجربی ۹۳)

تعین: شعاع دایره‌ی گذرا بر سه نقطه‌ی (۰, ۰)، (۲, ۱) و (۱, -۲) برابر کدام است؟

$$\frac{\sqrt{13}}{2} \quad (4)$$

$$\sqrt{5} \quad (3)$$

$$\sqrt{3} \quad (2)$$

$$\frac{\sqrt{10}}{2} \quad (1)$$

پاسخ: گزینه‌ی «۱»

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \xrightarrow{\text{صدق دادن نقطه‌ها}} \begin{cases} (0, 0) \Rightarrow c = 0 \\ (2, 1) \Rightarrow 4 + 1 + 2a + b + c = 0 \xrightarrow{c=0} 2a + b = -5 \\ (1, -2) \Rightarrow 1 + 4 + a - 2b + c = 0 \xrightarrow{c=0} a - 2b = -5 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{حل دستگاه}} a = -3, b = 1 \xrightarrow{\text{معادله دایره جایگزین کن!}} x^2 + y^2 - 3x + y = 0 \xrightarrow{\text{مرکز}} O = \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right) \xrightarrow{\text{شعاع}} r = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

۶) تست بهت می‌گه که مرکز دایره روی فلان خط هستش! خب شما مرکز رو $O(\alpha, \beta)$ می‌گیری و به جای x و y اون خط به ترتیب α و β رو جایگذاری می‌کنی، بعدش α رو برحسب β به دست میاری (اگرم خواستی می‌تونن β رو برحسب α به دست بیاری!!) حالا مرکز فقط برحسب یه مجهول خواهد بود...

تمرین: دایره‌ای از دو نقطه $(0, 1)$ و $(3, 0)$ گذشته و معادله یک قطر آن به صورت $x - y = 2$ است. شعاع این دایره کدام است؟

(تجربی فارغ ۹۰)

مرکز $O(\alpha, \beta)$ (۳، ۴) روی خط زیرات:

$$x - y = 2$$

$$\alpha - \beta = 2$$

$$\alpha = 2 + \beta$$

معادله دایره با مرکز $O(\alpha, \beta)$ و شعاع R :

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2$$

نقطه R است با صدقنداری نقطه R پیدا می‌شوند:

$$(0 - 2 - \beta)^2 + (1 - \beta)^2 = R^2$$

$$(3 - 2 - \beta)^2 + (0 - \beta)^2 = R^2$$

$$4 + 1 = R^2$$

$$R = \sqrt{5}$$

معادله دایره در قالب مکان هندسی!

$$(2 + \beta)^2 + (1 - \beta)^2 = (1 - \beta)^2 + \beta^2$$

$$2 + \beta = \beta$$

$$2 + \beta = -\beta \rightarrow \beta = -1$$

مکان هندسی نقاطی که فاصله‌شان از نقطه‌ی معلوم A ، برابر فاصله‌اش از نقطه‌ی معلوم B باشد $(k \neq 0, 1)$ دایره است. در این حالت $M = (x, y)$ را در نظر بگیرید، حالا شرط $|MA| = k|MB|$ رو اجرا کنید... معادله‌اش درمیاد!

تمرین: مکان هندسی نقاطی از صفحه که فاصله‌ی آن‌ها از نقطه‌ی $A = (3, 5)$ ، برابر فاصله‌ی آن‌ها از نقطه‌ی $B = (2, 3)$ باشد، کدام است؟

(مشابه تجربی ۹۷)

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 6 \quad (2)$$

$$(x-1)^2 + (y+1)^2 = 10 \quad (4)$$

$$x^2 + y^2 = 8 \quad (1)$$

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 10 \quad (3)$$

پاسخ: گزینه‌ی «۳»

$$\sqrt{(x-3)^2 + (y-5)^2} = \sqrt{2} \times \sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2}$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲ و اتحاد}} x^2 - 6x + 9 + y^2 - 10y + 25 = 2(x^2 - 4x + 4 + y^2 - 6y + 9) \xrightarrow{\text{ساده}} x^2 + y^2 - 2x - 2y - 8 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{مرکز}} O = (1, 1) \xrightarrow{\text{شعاع}} r = \sqrt{1+1+8} = \sqrt{10} \xrightarrow{\text{معادله‌ی استاندارد}} (x-1)^2 + (y-1)^2 = 10$$

Homework

۱ شعاع دایره گذرا بر سه نقطه $(0, 0)$ ، $(2, 1)$ و $(1, -2)$ ، برابر کدام است؟

(۲) $\sqrt{3}$

(۱) $\frac{\sqrt{10}}{2}$

(۴) $\frac{\sqrt{13}}{2}$

(۳) $\sqrt{5}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۳

۲ دایره‌ای، محور x ها را در دو نقطه به طول‌های ۱ و ۳ قطع کرده و مرکز آن، بر روی نیمساز ربع اول است. شعاع این دایره کدام است؟

(۲) ۲

(۱) $\sqrt{3}$

(۴) ۳

(۳) $\sqrt{5}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

۳ طول شعاع دایره‌ای که از سه نقطه $A(-1, 0)$ ، $B(3, 0)$ و $C(0, -3)$ می‌گذرد، کدام است؟

(۲) ۲

(۱) $\sqrt{3}$

(۴) ۳

(۳) $\sqrt{5}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۲

۴ به ازای کدام مجموعه مقادیر a ، منحنی به معادله $2x^2 + (a^2 - 7)y^2 + 4y + a = 0$ یک دایره است؟

(۲) $\{3\}$

(۱) $\{-3\}$

(۴) \emptyset

(۳) $\{-3, 3\}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۵

۵ دایره‌ای به مرکز $(-1, 2)$ و مماس بر خط به معادله $x - y = 1$ ، محور x ها را با کدام طول، قطع می‌کند؟

(۲) ۱ و ۴

(۱) ۱ و ۳

(۴) ۱/۵ و ۴

(۳) ۲ و ۳

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

۶ فاصله نقطه $M(x, y)$ از نقطه $A(3, 6)$ ، دو برابر فاصله آن از مبدأ مختصات است. بزرگترین وتر از مکان نقاط M کدام است؟

- (۱) $2\sqrt{3}$ (۲) $2\sqrt{5}$
(۳) $4\sqrt{3}$ (۴) $4\sqrt{5}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۷

۷ دایره‌ای بر محور x ها و خط به معادله $3x + 4y = 0$ مماس است. اگر مرکز این دایره در ناحیه اول و شعاع آن ۳ واحد باشد، نقطه مشترک آن با محور x ها با کدام طول است؟

- (۱) ۱ (۲) $1/5$
(۳) ۲ (۴) $2/5$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۴

۸ شعاع دایره‌ای که از دو نقطه $(0, 0)$ و $(3, 1)$ گذشته و مرکز آن روی خط به معادله $y = 2x$ باشد، کدام است؟

- (۱) $2\sqrt{2}$ (۲) $\sqrt{5}$
(۳) $\sqrt{10}$ (۴) $\sqrt{13}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۶

۹ دایره‌ای از دو نقطه $(2, 0)$ و $(-2, 0)$ گذشته و بر خط به معادله $y = 1$ مماس است. شعاع این دایره کدام می‌باشد؟

- (۱) $\frac{3}{2}$ (۲) $\sqrt{5}$
(۳) $\frac{5}{2}$ (۴) ۳

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۸

۱۰ هر خط قائم بر یک دایره، از نقطه $(-2, 1)$ می‌گذرد. این دایره بر خط به معادله $y = x - 1$ مماس است. شعاع دایره کدام می‌باشد؟

- (۱) ۲ (۲) $2\sqrt{2}$
(۳) ۳ (۴) $3\sqrt{2}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۸

۱۱ دایره‌ای از نقطه $(-1, 2)$ گذشته و بر هر دو محور مختصات مماس است. قطر دایره بزرگتر کدام می‌باشد؟

- (۱) ۸ (۲) ۱۰
(۳) ۱۲ (۴) ۱۵

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

۱۲ شعاع دایره‌ای که از سه نقطه با مختصات $(2, 1)$ و $(-2, 4)$ و $(0, 0)$ می‌گذرد، کدام است؟

$$2/5 \quad (2)$$

$$2 \quad (1)$$

$$3/5 \quad (4)$$

$$3 \quad (3)$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۱

پاسخ Homework

گزینه ۱

۱

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

$$\xrightarrow{\text{را صدق می‌دهیم } (0,0)} c = 0$$

$$\xrightarrow{\text{را صدق می‌دهیم } (2,1)} 4 + 1 + 2a + b = 0$$

$$\xrightarrow{\text{را صدق می‌دهیم } (1,-2)} 1 + 4 + a - 2b = 0$$

اکنون با معلوم بودن مقادیر a ، b و c شعاع دایره برابر است با:

$$\begin{aligned} \times 2 \rightarrow 4a + 2b = -10 \\ a - 2b = -5 \end{aligned} \Rightarrow 5a = -15 \Rightarrow a = -3, b = 1$$

$$R = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 - 4c} = \frac{1}{2} \sqrt{(-3)^2 + (1)^2 - 4(0)} = \frac{1}{2} \sqrt{10}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۳

گزینه ۳

۲

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

گام اول

الف) دایره محور x ها را در دو نقطه به طول $x = 1$ و $x = 3$ قطع می‌کند؛ بنابراین نقاط $A(1, 0)$ و $B(3, 0)$ روی دایره مورد نظر قرار دارند.

ب) مرکز دایره روی نیمساز ربع اول (خط $y = x$) است؛ بنابراین مرکز دایره را به صورت $O(\alpha, \alpha)$ در نظر می‌گیریم.

گام دوم

چون نقاط A و B روی دایره قرار دارند پس فاصله آنها تا مرکز دایره باهم برابر و برابر شعاع دایره است.

$$OA = OB = R \Rightarrow \sqrt{(\alpha - 1)^2 + \alpha^2} = \sqrt{(\alpha - 3)^2 + \alpha^2}$$

$$\xrightarrow{\text{به توان } 2} (\alpha - 1)^2 + \alpha^2 = (\alpha - 3)^2 + \alpha^2$$

$$\Rightarrow \alpha^2 - 2\alpha + 1 = \alpha^2 - 6\alpha + 9 \Rightarrow 4\alpha = 8 \Rightarrow \alpha = 2$$

بنابراین مرکز دایره نقطه $O(2, 2)$ می‌شود و شعاع دایره برابر است با:

$$R = OA = \sqrt{(2 - 1)^2 + 2^2} = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$$

گزینه ۳

۳

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۲

گام اول

معادله گسترده یک دایره به صورت $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ است. در این صورت شعاع دایره برابر است با:

$$R = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$$

گام دوم

سه نقطه A، B و C روی دایره قرار دارد، پس مختصات این نقاط در معادله دایره صدق می‌کند.

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

$$\xrightarrow{A(-1,0)} (-1)^2 + 0^2 + a(-1) + b(0) + c = 0 \Rightarrow 1 - a + c = 0 \Rightarrow a - c = 1 \quad (I)$$

$$\xrightarrow{B(3,0)} 3^2 + 0^2 + a(3) + b(0) + c = 0 \Rightarrow 9 + 3a + c = 0 \Rightarrow 3a + c = -9 \quad (II)$$

$$\xrightarrow{C(0,-3)} 0^2 + (-3)^2 + a(0) + b(-3) + c = 0 \Rightarrow 9 - 3b + c = 0 \Rightarrow c - 3b = -9 \quad (III)$$

بنابراین سه معادله و سه مجهول داریم. با کمی دقت متوجه می‌شویم که دو معادله I و II فقط شامل دو مجهول a و c است، پس با حل یک دستگاه دو معادله و دو مجهول مقدار a و c را حساب می‌کنیم.

$$\begin{cases} a - c = 1 \\ 3a + c = -9 \end{cases} \xrightarrow{+} 4a = -8 \Rightarrow a = -2$$

$$a - c = 1 \xrightarrow{a=-2} c = -2 - 1 = -3$$

با جایگذاری $c = -3$ در معادله (III) مقدار b را هم حساب می‌کنیم.

$$c - 3b = -9 \xrightarrow{c=-3} -3 - 3b = -9 \Rightarrow 3b = 6 \Rightarrow b = 2$$

اکنون باتوجه به گام اول، شعاع دایره را به دست می‌آوریم.

$$R = \sqrt{\left(\frac{-2}{2}\right)^2 + \left(\frac{2}{2}\right)^2 + 3} = \sqrt{1 + 1 + 3} = \sqrt{5}$$

گزینه ۱

۴

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۵

گام اول

الف) معادله استاندارد یک دایره به مرکز (α, β) و شعاع R به صورت $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2$ است.
 ب) معادله گسترده یک دایره به صورت $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ است.

گام دوم

باتوجه به معادله گسترده نوشته شده در گام اول، ضریب x^2 و y^2 باید با هم برابر و برابر با یک باشد، بنابراین مقادیر a را به گونه ای می یابیم که ضریب x^2 و y^2 با هم برابر شوند؛ در نتیجه:

$$a^2 - 4 = 4 \Rightarrow a^2 = 8 \Rightarrow a = \pm 2\sqrt{2}$$

از طرفی معادله این دایره را باید بتوان به صورت استاندارد نوشت، بنابراین دو مقدار $a = +2\sqrt{2}$ و $a = -2\sqrt{2}$ را در معادله دایره جایگذاری می کنیم تا مقدار صحیح را تشخیص دهیم.

$$a = 2\sqrt{2} : 2x^2 + (9 - 4\sqrt{2})y^2 + 4y + 2\sqrt{2} = 0 \Rightarrow 2x^2 + 2y^2 + 4y + 2\sqrt{2} = 0 \\ \Rightarrow 2(x - 0)^2 + 2(y^2 + 2y + 1) + 1 = 0 \Rightarrow 2(x - 0)^2 + 2(y + 1)^2 + 1 = 0$$

$$\xrightarrow{\div 2} (x - 0)^2 + (y + 1)^2 + \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow (x - 0)^2 + (y + 1)^2 = -\frac{1}{2} \quad \text{غ ق ق}$$

رابطه به دست آمده همواره نادرست است؛ زیرا عبارت سمت چپ تساوی همواره نامنفی می باشد ولی مساوی با یک عدد منفی شده است.

$$a = -2\sqrt{2} : 2x^2 + (9 - 4\sqrt{2})y^2 + 4y - 2\sqrt{2} = 0 \Rightarrow 2x^2 + 2y^2 + 4y - 2\sqrt{2} = 0 \\ \Rightarrow 2(x - 0)^2 + 2(y^2 + 2y + 1) - 5 = 0 \Rightarrow 2(x - 0)^2 + 2(y + 1)^2 - 5 = 0$$

$$\xrightarrow{\div 2} (x - 0)^2 + (y + 1)^2 - \frac{5}{2} = 0 \Rightarrow (x - 0)^2 + (y + 1)^2 = \frac{5}{2}$$

به ازای $a = -2\sqrt{2}$ ، معادله دایره ای به مرکز $(0, -1)$ و شعاع $R = \sqrt{\frac{5}{2}}$ داریم.

گزینه ۱

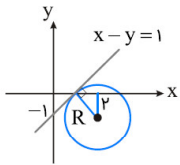
۵

فاصله مرکز دایره از خط مماس بر دایره برابر با شعاع دایره است. فاصله یک نقطه با مختصات (x_0, y_0) از خط به معادله $ax + by + c = 0$ برابر است با:

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

بنابراین شعاع دایره برابر است با:

$$R = \frac{|2 + 1 - 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \sqrt{2}$$



$$\text{معادله دایره: } (x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 2 \xrightarrow{y=0} (x - 2)^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} x - 2 = 1 \Rightarrow x = 3 \\ x - 2 = -1 \Rightarrow x = 1 \end{cases}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

گزینه ۴

۶

$$\begin{aligned} \sqrt{(x - 3)^2 + (y - 6)^2} &= 2\sqrt{x^2 + y^2} \\ \Rightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 - 12y + 36 &= 4x^2 + 4y^2 \\ \Rightarrow 3x^2 + 3y^2 + 6x + 12y - 45 &= 0 \\ \xrightarrow{\div 3} x^2 + y^2 + 2x + 4y - 15 &= 0 \\ \Rightarrow (x + 1)^2 + (y + 2)^2 &= 20 \Rightarrow O(-1, -2) \end{aligned}$$

معادله فوق، معادله یک دایره است که بزرگترین وتر همان قطر است:

$$r = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \Rightarrow 2r = 4\sqrt{5}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۷

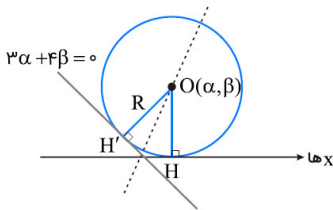
گزینه ۱

۷

مرکز دایره را نقطه $O(\alpha, \beta)$ در نظر می‌گیریم. باید فاصله O از محور x ها با فاصله آن از خط $3x + 4y = 0$ برابر باشد:

$$OH = OH' \Rightarrow |\beta| = \frac{|3\alpha + 4\beta|}{\sqrt{9+16}} = \frac{|3\alpha + 4\beta|}{5} \Rightarrow \begin{cases} 3\alpha + 4\beta = 5\beta \\ 3\alpha + 4\beta = -5\beta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3\alpha = \beta \\ 3\alpha = -9\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{مرکز: } O(\alpha, 3\alpha) \\ \text{مرکز: } O(\alpha, -\frac{1}{3}\alpha) \end{cases}$$



مرکز دایره در ناحیه اول است، پس فقط $O(\alpha, 3\alpha)$ قابل قبول است؛ بنابراین مطابق شکل، داریم:

$$R = OH = 3 \Rightarrow \beta = 3\alpha = 3 \Rightarrow \alpha = 1$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۴

گزینه ۲

۸

مرکز دایره روی خطی به معادله $y = 2x$ قرار دارد. فرض می‌کنیم مختصات مرکز دایره $(\alpha, 2\alpha)$ باشد. طبق تعریف دایره، می‌دانیم فاصله هر نقطه روی دایره از مرکز دایره برابر با شعاع است. شعاع دایره را R می‌نامیم. با محاسبه فاصله مرکز دایره از هریک از نقاط $(0, 0)$ و $(3, 1)$ ابتدا مقدار α و سپس مقدار R را به دست می‌آوریم.

$$\left. \begin{aligned} R &= \sqrt{(\alpha - 0)^2 + (2\alpha - 0)^2} \\ R &= \sqrt{(\alpha - 3)^2 + (2\alpha - 1)^2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \sqrt{\alpha^2 + 4\alpha^2} = \sqrt{(\alpha - 3)^2 + (2\alpha - 1)^2}$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} \Delta \alpha^2 = (\alpha - 3)^2 + (2\alpha - 1)^2 \Rightarrow \Delta \alpha^2 = \alpha^2 - 6\alpha + 9 + 4\alpha^2 - 4\alpha + 1$$

$$\Rightarrow \Delta \alpha^2 = 5\alpha^2 - 10\alpha + 10 \Rightarrow 10\alpha = 10 \Rightarrow \alpha = 1$$

$$\Rightarrow R = \sqrt{(1 - 0)^2 + (2 - 0)^2} = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$$

بنابراین دایره‌ای به مرکز $(1, 2)$ و شعاع $\sqrt{5}$ داریم.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۶

گزینه ۳

۹

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۸

گام اول

الف) هرگاه خطی بر دایره مماس باشد، فاصله مرکز دایره از این خط برابر با شعاع دایره خواهد بود.
 ب) عمودمنصف هر وتر از دایره، از مرکز دایره عبور می‌کند.

گام دوم

دو نقطه $A(2, 0)$ و $B(-2, 0)$ روی دایره قرار دارد بنابراین پاره‌خط AB وترى از دایره است که طبق گام اول، عمودمنصف آن از مرکز دایره عبور می‌کند. خط $x = 0$ عمودمنصف پاره‌خط AB است؛ پس فرض می‌کنیم نقطه $O(0, \alpha)$ مرکز دایره است. فاصله مرکز دایره از نقاط A و B و خط $y = 1$ برابر با شعاع دایره است، پس داریم:

$$\begin{aligned} R = OA &= \sqrt{(2-0)^2 + (0-\alpha)^2} = \sqrt{4 + \alpha^2} \\ y = 1 &\Rightarrow y - 1 = 0 \Rightarrow R = \frac{|\alpha - 1|}{\sqrt{1^2}} = |\alpha - 1| \\ \Rightarrow \sqrt{4 + \alpha^2} &= |\alpha - 1| \xrightarrow{\text{به توان } 2} 4 + \alpha^2 = (\alpha - 1)^2 \\ \Rightarrow 4 + \alpha^2 &= \alpha^2 - 2\alpha + 1 \Rightarrow -2\alpha = 3 \Rightarrow \alpha = -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

بنابراین شعاع دایره برابر است با:

$$R = |\alpha - 1| = \left| -\frac{3}{2} - 1 \right| = \left| -\frac{5}{2} \right| = \frac{5}{2}$$

گزینه ۲

۱۰

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۸

گام اول

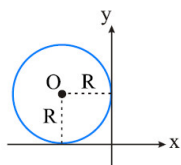
الف) هر خط قائم بر دایره، از مرکز دایره عبور می‌کند.
 ب) هرگاه خطی بر دایره مماس باشد، فاصله مرکز دایره از این خط برابر با شعاع دایره است.

گام دوم

باتوجه به اینکه هر خط قائم بر دایره از نقطه $(-2, 1)$ عبور می‌کند و باتوجه به قسمت الف) از گام اول، نقطه $(-2, 1)$ همان مرکز دایره است. طبق قسمت ب) از گام اول، فاصله نقطه $(-2, 1)$ از خط $y = x - 1$ برابر با شعاع دایره است؛ پس داریم:

$$\begin{aligned} y = x - 1 &\Rightarrow x - y - 1 = 0 \\ R &= \frac{|-2 - 1 - 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{|-4|}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

باتوجه به اینکه دایره بر هر دو محور مختصات مماس است پس باید به طور کامل در یکی از چهار ناحیه مختصاتی قرار بگیرد. چون دایره از نقطه $(-1, 2)$ نیز عبور می‌کند و این نقطه در ناحیه دوم قرار دارد، پس دایره مورد نظر به صورت زیر خواهد بود:



بنابراین دایره‌ای به شعاع R و به مرکز $(-R, R)$ داریم. معادله این دایره برابر است با:

$$(x + R)^2 + (y - R)^2 = R^2$$

چون دایره از نقطه $(-1, 2)$ عبور می‌کند پس مختصات این نقطه در معادله دایره صدق می‌کند:

$$\xrightarrow{x=-1, y=2} (-1 + R)^2 + (2 - R)^2 = R^2 \Rightarrow 1 - 2R + R^2 + 4 - 4R + R^2 = R^2$$

$$\Rightarrow R^2 - 6R + 5 = 0 \Rightarrow (R - 5)(R - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} R - 5 = 0 \Rightarrow R = 5 \\ R - 1 = 0 \Rightarrow R = 1 \end{cases}$$

قطر بزرگتر به ازای شعاع بزرگتر به دست می‌آید که برابر است با:

$$2R = 2(5) = 10$$

گزینه ۲

۱۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۱

گام اول

معادله گسترده یک دایره به صورت $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ است. در این صورت شعاع دایره برابر است با:

$$R = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$$

گام دوم

سه نقطه $(2, 1)$ ، $(-2, 4)$ و $(0, 0)$ روی دایره قرار دارد، پس مختصات این نقطه در معادله دایره صدق می‌کند.

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

$$\xrightarrow{(2,1)} 2^2 + 1^2 + a(2) + b(1) + c = 0 \Rightarrow 4 + 1 + 2a + b + c = 0 \Rightarrow 2a + b + c = -5 \quad (I)$$

$$\xrightarrow{(-2,4)} (-2)^2 + 4^2 + a(-2) + b(4) + c = 0 \Rightarrow 4 + 16 - 2a + 4b + c = 0 \Rightarrow -2a + 4b + c = -20 \quad (II)$$

$$\xrightarrow{(0,0)} 0^2 + 0^2 + a(0) + b(0) + c = 0 \Rightarrow c = 0 \quad (III)$$

با جایگذاری $c = 0$ در دو معادله I و II، به یک دستگاه دو معادله و دو مجهول می‌رسیم و آن را حل می‌کنیم.

$$\begin{cases} 2a + b = -5 \\ -2a + 4b = -20 \end{cases} \xrightarrow{+} 5b = -25 \Rightarrow b = -5$$

$$2a + b = -5 \xrightarrow{b=-5} 2a - 5 = -5 \Rightarrow 2a = 0 \Rightarrow a = 0$$

اکنون باتوجه به گام اول، شعاع دایره را به دست می‌آوریم.

$$R = \sqrt{\left(\frac{0}{2}\right)^2 + \left(\frac{-5}{2}\right)^2 - 0} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2} = 2.5$$

وضعیت یک نقطه و دایره نسبت به هم

شگرد نقطه و دایره در یک جدول

☑ اگر $A = (x_0, y_0)$ به نقطه و $f(x, y) = x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ معادله‌ی دایره باشند، اون وقت اگر نقطه رو تو معادله‌ی دایره جایگذاری کنی، یعنی $f(A) = x_0^2 + y_0^2 + ax_0 + by_0 + c$ می‌شه باهش وضع نقطه و دایره رو فهمید:

شکل	تعداد مماس‌های قابل رسم از A بر دایره	شرط مختصاتی	مفهوم هندسی	
	۱ مماس	$f(A) = 0$	$OA = r$	A روی دایره
	هیچ مماس	$f(A) < 0$	$OA < r$	A داخل دایره
	۲ مماس مساوی	$f(A) > 0$	$OA > r$	A خارج دایره

تعرین: از نقطه‌ی $A = (1, 2)$ چند مماس بر دایره‌ی $x^2 + y^2 - 2x - 6y = 26$ می‌توان رسم کرد؟
 (۱) هیچ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) بی‌شمار

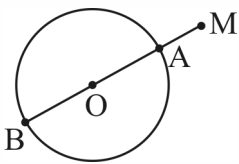
پاسخ: گزینه‌ی «۱»

$$x^2 + y^2 - 2x - 6y - 26 = 0 \xrightarrow[\text{جایگذاری کن } (1, 2) \text{ را}]{x=1, y=2} (1)^2 + (2)^2 - 2(1) - 6(2) - 26 = -35 < 0$$

هیچ تعداد مماس \rightarrow نقطه داخل دایره است \Rightarrow

دورترین و نزدیک‌ترین نقطه‌های دایره تا یک نقطه‌ی داده‌شده

کم‌ترین و بیشترین فاصله‌ی نقطه‌ی M تا دایره، زمانی اتفاق می‌افتد که از M به مرکز دایره وصل کنید تا دایره را در دو نقطه‌ی A و B قطع کند. اون وقت:



(۱) بیشترین فاصله‌ی نقطه‌ی M تا (نقاط) دایره $OM + r = MB$

(۲) کم‌ترین فاصله‌ی نقطه‌ی M تا (نقاط) دایره $|OM - r| = MA$

این فرمول‌ها، هیچ ربطی به جای M ندارند! یعنی M می‌تونه بیرون یا درون، یا حتی روی دایره باشد.

تعرین: بیشترین و کم‌ترین فاصله‌ی نقاط دایره‌ی $x^2 + y^2 - 6x + 5 = 0$ از نقطه‌ی $(6, 4)$ کدام است؟

(۱) ۶ و ۲ (۲) ۷ و ۳ (۳) ۵ و ۱ (۴) ۸ و ۴

پاسخ: گزینه‌ی «۲»

$$x^2 + y^2 - 6x + 5 = 0 \xrightarrow{\text{مرکز}} O = (3, 0) \begin{cases} \text{شعاع} \rightarrow r = \sqrt{9 + 0 - 5} = 2 \\ \text{فاصله‌ی مرکز تا نقطه } M=(6, 4) \rightarrow OM = \sqrt{(3-6)^2 + (0-4)^2} = 5 \end{cases}$$

$\xrightarrow{\text{بیشترین و کم‌ترین فاصله}} |OM \pm r| = |5 \pm 2| = 7, 3$

خط و دایره در یک جدول

(۱) فاصله‌ی مرکز دایره تا اون خط رو پیدا کن، اسمش رو می‌ذاریم OH .

(۲) خب حالا برو سراغ جدول:

خط، دایره را قطع نمی‌کند.	خط بر دایره مماس است.	خط و دایره متقاطع‌اند.
<p>$OH > r$</p>	<p>$OH = r$</p>	<p>$OH < r$</p>

(تجربی فارچ ۹۱)

تمرین: به ازای کدام مقادیر m خط به معادله $y = mx + 2$ بر دایره به معادله $x^2 + y^2 - 2x = 3$ مماس است؟

- (۱) $-\frac{4}{3}$ و صفر (۲) $\frac{4}{3}$ و صفر (۳) $-\frac{2}{3}$ و ۱ (۴) $\frac{2}{3}$ و ۱

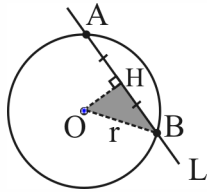
پاسخ: گزینه‌ی «۲»

$y = mx + 2 \xrightarrow{\text{همه، یک طرف باشند!}} mx - y + 2 = 0 \xrightarrow{O(1,0)} OH = \frac{|m - 0 + 2|}{\sqrt{m^2 + 1}} = 2$

$r = \sqrt{1 + 0 + 3} = 2$ شعاع = فاصله‌ی مرکز تا مماس

$\xrightarrow{\text{توان ۲}} \frac{m^2 + 4m + 4}{m^2 + 1} = 4 \xrightarrow{\text{ساده}} 3m^2 - 4m = 0 \Rightarrow m = 0 \text{ یا } \frac{4}{3}$

طول وتر



(مشابه فارچ تجربی ۹۱)

اگر خطی مثل L ، دایره‌ای را قطع کند، روی دایره وتر پیدا می‌کند، به نام AB . برای پیدا کردن طول AB ، فاصله‌ی مرکز را تا خط حساب کن (یعنی OH). شعاع دایره هم که معلوم شد، حالا

$AB = 2\sqrt{r^2 - OH^2}$

طبق فیثاغورس خواهی داشت: $x^2 + y^2 - 2x - 8y - 8 = 0$

تمرین: طول پاره‌خطی که دایره‌ی $x^2 + y^2 - 2x - 8y = 8$ از خط $5x + 12y = 14$ جدا می‌کند، کدام است؟

$d = \frac{|5(1) + 12(4) - 14|}{\sqrt{5^2 + 12^2}} = \frac{39}{13} = 3$ $R = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - 4c} = 5$

پاسخ: گزینه‌ی «۳»

$x^2 + y^2 - 2x - 8y - 8 = 0 \xrightarrow{\text{مرکز}} O = (1, 4) \xrightarrow{\text{شعاع}} r = \sqrt{1 + 16 + 8} = 5$

$\frac{5x + 12y - 14 = 0}{\text{فاصله‌ی مرکز تا خط}} \rightarrow OH = \frac{|5(1) + 12(4) - 14|}{\sqrt{25 + 144}} = \frac{39}{13} = 3 \xrightarrow{\text{فرمول وتر}} 2\sqrt{r^2 - OH^2} = 2\sqrt{5^2 - 3^2} = 2 \times 4 = 8$

دایره‌ی مماس بر محورهای مختصات

اگر $O(\alpha, \beta)$ مرکز دایره و r شعاع آن باشد، در این صورت داریم:

مماس بر هر دو محور x ها و y ها	مماس بر محور x ها	مماس بر محور y ها
$ \alpha = \beta = r$	$ \beta = r$	$ \alpha = r$

شگرد برداشتن قدرمطلق

اگر دایره‌ای بر محورهای مماس بود، از روی مختصات نقطه‌ای که دایره از آن می‌گذرد، علامت α و β رو بفهمید. اصلاً علامت x و y اون نقطه، هر طور که بود به ترتیب علامت α و β خواهد بود. مثلاً وقتی نقطه‌ی تست $(-2, 4)$ است، می‌فهمی $\alpha < 0$ و $\beta > 0$ بوده پس قدرمطلقها رو به طور مناسب این‌جوری برمی‌داری: $-\alpha = \beta = r$.

وضعیت دو دایره، نسبت به همدیگر **۱۰۰٪** **انتقال با فلشور**

☑ دو تا دایره، نسبت به هم دارای ۵ وضعیت مختلف هستند. باری تشخیص وضعیت اونا، باید سریع مرکز و شعاع دو دایره را به دست بیاری: O, O', r, r' . بعد اینا رو تبدیل کنی به ۳ عدد کلیدی: $(1) (r+r')$ $(2) (|r-r'|)$ $(3) d$ ، که فاصله‌ی دو تا مرکزها از همدیگه هستش. همون خط‌المرکزین! خب حالا ببین:

تعداد مماس مشترک‌های خارجی	تعداد مماس مشترک‌های داخلی	شرط	شکل	
۲	۲	$d > r + r'$		متخارج
۲	۱	$d = r + r'$		مماس خارج
۲	صفر	$ r - r' < d < r + r'$		متقاطع
۱	صفر	$d = r - r' $		مماس داخل
صفر	صفر	$d < r - r' $		متداخل

تعرین: دو دایره به معادلات $x^2 + y^2 - 4x + 4y = 1$ و $x^2 + y^2 - 4x + 8y + 19 = 0$ نسبت به یکدیگر چگونه‌اند؟

- (۱) مماس خارج
- (۲) مماس داخل
- (۳) متقاطع در دو نقطه
- (۴) یکی خارج دیگری

پاسخ: گزینه‌ی «۲»

$$\left. \begin{aligned} x^2 + y^2 - 4x + 4y - 1 = 0 &\xrightarrow{\text{مرکز}} O = (2, -2) \\ x^2 + y^2 - 4x + 8y + 19 = 0 &\xrightarrow{\text{مرکز}} O' = (2, -4) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \text{شعاع} \rightarrow r &= \sqrt{4 + 4 + 1} = 3 \\ \text{شعاع} \rightarrow r' &= \sqrt{4 + 16 - 19} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} d = OO' = \sqrt{0 + 4} = 2 \\ r + r' = 4, |r - r'| = 2 \end{cases}$$

پس $d = |r - r'|$ درست است و این یعنی دایره‌ها مماس داخلی‌اند.

تمرین: به ازای کدام مقدار b ، دو دایره به معادلات $x^2 + y^2 + 2x - 2y = 0$ و $x^2 + y^2 - 4y + b = 0$ مماس داخلی‌اند؟ (سراسری ریاضی)

$\begin{matrix} -5 & (1) \\ -4 & (2) \\ -3 & (3) \\ -2 & (4) \end{matrix}$

پاسخ: گزینه‌ی «۲»


$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x - 2y = 0 \xrightarrow{\text{مرکز}} O = (-1, 1) \\ x^2 + y^2 - 4y + b = 0 \xrightarrow{\text{مرکز}} O' = (0, 2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{شعاع} \rightarrow r = \sqrt{1+1-0} = \sqrt{2} \\ \text{شعاع} \rightarrow r' = \sqrt{0+4-b} = \sqrt{4-b} \\ OO' \rightarrow d = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \end{cases}$$

مماس داخلی‌اند $\rightarrow d = |r - r'| \rightarrow \sqrt{2} = |\sqrt{2} - \sqrt{4-b}| \Rightarrow \sqrt{2} = \sqrt{4-b} - \sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{4-b} = 2\sqrt{2}$

توان $\rightarrow 4 - b = 8 \Rightarrow b = -4$

تمرین: دایره C بر دایره به معادله $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$ مماس خارج است. هر خط قائم بر دایره C از نقطه $(8, 7)$ می‌گذرد، شعاع دایره C کدام است؟ (تقریبی قارچ ۹۶)

$\begin{matrix} 9 & (4) & & 8 & (3) & & 7 & (2) & & 6 & (1) \end{matrix}$

$O'(1, 7)$  $O(2, -1)$ مرکز

$OO' = d = R + R'$ $R = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 - 4c} = \frac{1}{2} \sqrt{16 + 4 + 16} = 3$

$OO' = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{(1-2)^2 + (7-(-1))^2} = 10$

$OO' = d = R + R'$
 $10 = 3 + R'$
 گزینه ۲ $R' = 7$

Homework

۱ خط $3y + 2x = 9$ در نقطه $(0, 3)$ بر دایره $x^2 + y^2 + 3x + ay = c$ مماس است. مقدار a کدام است؟

- (۱) $3/5$ (۲) $-3/5$
(۳) $1/5$ (۴) $-1/5$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

۲ خطی به معادله $y + 2x = 0$ عمودمنصف خط‌المركزین دو دایره است که شعاع یکی نصف شعاع دیگری است. اگر معادله دایره بزرگ‌تر به صورت $x^2 + y^2 + 6x - 2y = a$ و خط مفروض بر دایره کوچک‌تر مماس باشد، مجموع طول نقاط برخورد دو دایره کدام است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{15}}{2}$ (۲) $-\frac{\sqrt{15}}{2}$
(۳) 1 (۴) -1

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۲

۳ طول کوتاه‌ترین وتری که از $(-1, 2/5)$ در دایره $2x^2 + 2y^2 - 6x - 10y + 1 = 0$ رسم می‌شود، کدام است؟

- (۱) $\sqrt{5}$ (۲) $\sqrt{7}$
(۳) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ (۴) $\frac{\sqrt{7}}{2}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۴ نقطه‌های M و N به ترتیب روی دو دایره متخارج $x^2 + y^2 - 2x + 2y = a$ و $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 6a = 0$ قرار دارند. اگر بیشترین فاصله M و N برابر ۸ باشد، مقدار a کدام است؟

- (۱) $2/5$ (۲) 2
(۳) $1/5$ (۴) 1

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

۵ خط d به معادله $y - x = 0$ عمودمنصف خط‌المركزین دو دایره است که شعاع یکی ۲ برابر دیگری است. اگر خط d بر دایره کوچک‌تر به معادله $x^2 + y^2 + 6x - 2y = r$ مماس باشد، حاصل‌ضرب طول نقاط برخورد دو دایره کدام است؟

- (۱) $\frac{5}{2}$ (۲) $\frac{5}{4}$
(۳) $\frac{65}{32}$ (۴) $\frac{65}{64}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۲

۶ دایره $x^2 + y^2 + 2y = 3$ مفروض است. معادله دایره‌ای که با دایره قبلی مماس داخل بوده و از نقطه $(0, -3)$ گذشته و قطر آن با شعاع دایره اصلی برابر باشد، کدام است؟ (با تغییر)

$$\begin{aligned} (1) \quad x^2 + y^2 - 4x = 3 \\ (2) \quad x^2 + y^2 - 4y + 3 = 0 \\ (3) \quad x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0 \\ (4) \quad x^2 + y^2 + 4y + 3 = 0 \end{aligned}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

۷ به ازای کدام مقدار a ، دو دایره به معادلات $x^2 + y^2 + 4x = 0$ و $x^2 + y^2 - 2x + 8y + a = 0$ مماس خارج یکدیگرند؟

$$\begin{aligned} (1) \quad 5 \\ (2) \quad 6 \\ (3) \quad 7 \\ (4) \quad 8 \end{aligned}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۰

۸ مربع $ABCD$ به ضلع ۴ واحد، مفروض است. شعاع دایره گذرا بر دو رأس A و B و مماس بر ضلع CD کدام است؟

$$\begin{aligned} (1) \quad 2/25 \\ (2) \quad 2/5 \\ (3) \quad 2\sqrt{2} \\ (4) \quad 3 \end{aligned}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۵

۹ دایره C بر دایره به معادله $x^2 + y^2 - 4x + 2y = 4$ مماس خارج است. هر خط قائم بر دایره C از نقطه $(8, 7)$ می‌گذرد. شعاع دایره C کدام است؟

$$\begin{aligned} (1) \quad 6 \\ (2) \quad 7 \\ (3) \quad 8 \\ (4) \quad 9 \end{aligned}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۶

۱۰ دو دایره به معادله‌های $x^2 + y^2 - 4x + 4y = 1$ و $x^2 + y^2 - 4x + 8y + 19 = 0$ ، نسبت به یکدیگر چگونه‌اند؟

$$\begin{aligned} (1) \quad \text{مماس خارجی} \\ (2) \quad \text{مماس داخلی} \\ (3) \quad \text{مقاطع در دو نقطه} \\ (4) \quad \text{یکی خارج دیگری} \end{aligned}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۰

۱۱ دو دایره به معادلات $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 13$ و $x^2 + y^2 + 2x = 1$ نسبت به هم کدام وضع را دارند؟

$$\begin{aligned} (1) \quad \text{مماس داخل} \\ (2) \quad \text{مماس خارج} \\ (3) \quad \text{مقاطع} \\ (4) \quad \text{متداخل} \end{aligned}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۳

۱۲ دو دایره $x^2 + y^2 + 2y - 4x = 0$ و $x^2 + y^2 - 2y = 2$ نسبت به هم کدام وضعیت را دارند؟

- (۱) مماس بیرون
(۲) متقاطع
(۳) متخارج
(۴) متداخل

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

۱۳ شعاع دایره‌ی گذرا بر سه نقطه $(0, 0)$ ، $(2, 1)$ و $(1, -2)$ ، برابر کدام است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{10}}{2}$
(۲) $\sqrt{3}$
(۳) $\sqrt{5}$
(۴) $\frac{\sqrt{13}}{2}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۳

۱۴ دایره‌ای، محور x ها را در دو نقطه به طول‌های ۱ و ۳ قطع کرده و مرکز آن، بر روی نیمساز ربع اول است. شعاع این دایره کدام است؟

- (۱) $\sqrt{3}$
(۲) ۲
(۳) $\sqrt{5}$
(۴) ۳

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

۱۵ طول شعاع دایره‌ای که از سه نقطه $A(-1, 0)$ ، $B(3, 0)$ و $C(0, -3)$ می‌گذرد، کدام است؟

- (۱) $\sqrt{3}$
(۲) ۲
(۳) $\sqrt{5}$
(۴) ۳

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۲

۱۶ به ازای کدام مجموعه مقادیر a ، منحنی به معادله $2x^2 + (a^2 - 7)y^2 + 4y + a = 0$ یک دایره است؟

- (۱) $\{-3\}$
(۲) $\{3\}$
(۳) $\{-3, 3\}$
(۴) \emptyset

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۵

۱۷ طول وتری از دایره $x^2 + y^2 - 4x + 2y = 1$ که روی خط $2y + x = a$ قرار دارد، برابر ۳ است. اختلاف مقادیر a چقدر است؟

- (۱) $\sqrt{35}$
(۲) $\sqrt{38}$
(۳) $3\sqrt{6}$
(۴) $5\sqrt{3}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۱۸ طول خط‌المركزين دو دایره مماس درونی $\frac{3}{5}$ سانتی‌متر و مساحت ناحیه محدود بین آنها 21π سانتی‌متر مربع است. شعاع دایره کوچک‌تر، چند سانتی‌متر است؟

- (۱) $\frac{1}{25}$ (۲) $\frac{1}{75}$
(۳) $\frac{2}{25}$ (۴) $\frac{2}{75}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۱

۱۹ دایره‌ای به مرکز $(-1, 2)$ و مماس بر خط به معادله $x - y = 1$ ، محور x ها را با کدام طول، قطع می‌کند؟

- (۱) ۱ و ۳ (۲) ۱ و ۴
(۳) ۲ و ۳ (۴) ۱/۵ و ۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

۲۰ دو دایره C و C' در نقطه $(0, 1)$ مماس برون‌ی هم هستند. اگر قائم‌های بر دایره C همواره از نقطه $(-3, 2)$ بگذرد، مرکز دایره C' با شعاع $\sqrt{5}$ کدام است؟

- (۱) $(-1, 3)$ (۲) $(-1, 2)$
(۳) $(1, -2)$ (۴) $(1, -1)$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۴

۲۱ معادله دایره‌ای که بر دو دایره $x^2 - 8x + y^2 + 15 = 0$ و $x^2 - 2x + y^2 = 0$ مماس خارج است و مرکزش روی یکی از محورهای قرار دارد، کدام است؟

- (۱) $x^2 + y^2 + 5x + 6 = 0$ (۲) $x^2 + y^2 - 5x + 6 = 0$
(۳) $4x^2 + 4y^2 - 20x + 25 = 0$ (۴) $4x^2 + 4y^2 + 20x + 25 = 0$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۱

۲۲ به‌ازای هر m ، معادله $(m-2)x + (m+1)y = 6$ ، معادله قطری از دایره C است. اگر نقطه $A(-1, 1)$ روی دایره C باشد، محیط دایره C کدام است؟

- (۱) $2\sqrt{2}\pi$ (۲) 2π
(۳) 3π (۴) $2\sqrt{3}\pi$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۱

۲۳ دایره گذرا بر مبدأ مختصات، بر دو خط به معادلات $y = 2x + 10$ و $y = 2x$ مماس است. مختصات مرکز این دایره کدام است؟

- (۱) $(-3, 2)$ (۲) $(-3, 1)$
(۳) $(-2, 1)$ (۴) $(-1, 2)$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۵

۲۴ دو دایره گذرا بر نقطه $(2, -9)$ بر هر دو محورهای مختصات مماس است. شعاع دایره بزرگتر، کدام است؟

- (۱) ۱۴
(۲) ۱۵
(۳) ۱۷
(۴) ۱۹

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۵

۲۵ نقطه $M(2\sqrt{5}, b)$ مرکز دایره‌ای است که بر دو خط به معادلات $y = 2x$ و $x = 2y$ مماس است. شعاع دایره کوچکتر کدام است؟

- (۱) ۱
(۲) $1/5$
(۳) ۲
(۴) $2/5$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۲

۲۶ دایره گذرا بر نقطه $(1, -2)$ ، بر هر دو محور مختصات مماس است. شعاع آن کدام است؟

- (۱) ۱ و ۴
(۲) ۱ و ۵
(۳) ۲ و ۴
(۴) ۲ و ۵

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۷

۲۷ فاصله نقطه $M(x, y)$ از نقطه $A(3, 6)$ ، دو برابر فاصله آن از مبدأ مختصات است. بزرگ‌ترین وتر از مکان نقاط M کدام است؟

- (۱) $2\sqrt{3}$
(۲) $2\sqrt{5}$
(۳) $4\sqrt{3}$
(۴) $4\sqrt{5}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۷

۲۸ فاصله نزدیک‌ترین نقاط دایره به معادله $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 4$ از خط به معادله $3x + 4y = 15$ ، کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$
(۲) ۱
(۳) $\frac{3}{2}$
(۴) ۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۰

۲۹ دایره‌های $x^2 + y^2 + 2y = 3$ و $x^2 + y^2 + 2x = 3$ متقاطع‌اند. معادله وتر مشترک این دو دایره کدام است؟

- (۱) $x = y$
(۲) $x = 1 + y$
(۳) $x = -y$
(۴) $x = 1 - y$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

۳۰ فرض کنید خطوط $x + y = 1$ و $x - y = 3$ قطرهای یک دایره و خط $4x + 3y + 5 = 0$ مماس بر آن باشد. نزدیکترین فاصله نقطه $M(4, -2)$ از دایره، کدام است؟

- (۱) $\sqrt{3} - 1$
 (۲) $\sqrt{3} - \sqrt{2}$
 (۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
 (۴) $\sqrt{5} - 2$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۰

۳۱ دایره‌ای بر محور x ها و خط به معادله $3x + 4y = 0$ مماس است. اگر مرکز این دایره در ناحیه اول و شعاع آن ۳ واحد باشد، نقطه مشترک آن با محور x ها با کدام طول است؟

- (۱) ۱
 (۲) $1/5$
 (۳) ۲
 (۴) $2/5$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۴

۳۲ به ازای کدام مقدار a ، زاویه بین خط مماس بر دایره $x^2 + y^2 - 2x + y = 1$ و خط به معادله $3x + 2y = a$ که از مرکز دایره می‌گذرد، در نقطه تلاقی آن‌ها ۹۰ درجه است؟ (با تغییر)

- (۱) ۲
 (۲) ۳
 (۳) ۴
 (۴) ۵

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۶

۳۳ کوچک‌ترین دایره گذرا بر دو نقطه $A(2, 5)$ و $B(-4, 1)$ ، محور x ها را با کدام طول، قطع می‌کند؟

- (۱) $1, -3$
 (۲) $0, -3$
 (۳) $2, -1$
 (۴) $3, -2$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۹

۳۴ دایره‌ای به مرکز $(1, 3)$ بر روی خط راست $5x + 12y = 15$ ، وتری به طول $2\sqrt{21}$ ، جدا می‌کند. این دایره بر روی محور x ها، وتری با کدام اندازه جدا می‌کند؟

- (۱) $2\sqrt{6}$
 (۲) ۶
 (۳) $2\sqrt{15}$
 (۴) ۸

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۹

۳۵ به ازای کدام مقدار a دایره به معادله $x^2 + y^2 - 2x + 4y + a = 0$ بر خط به معادله $x + 3y = 0$ مماس است؟

- (۱) $\frac{3}{2}$
 (۲) $\frac{5}{2}$
 (۳) ۳
 (۴) ۵

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۵

۳۶ دایره به مرکز $(2, 0)$ و مماس بر نیمساز ربع اول، خط به معادله $y = 1$ را با کدام طولها قطع می‌کند؟

- (۱) ۱ و ۳
(۲) ۰ و ۴
(۳) $\frac{1}{2}$ و $\frac{5}{2}$
(۴) $2 - \sqrt{2}$ و $2 + \sqrt{2}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۶

۳۷ شعاع دایره‌ای که از دو نقطه $(0, 0)$ و $(3, 1)$ گذشته و مرکز آن روی خط به معادله $y = 2x$ باشد، کدام است؟

- (۱) $2\sqrt{2}$
(۲) $\sqrt{5}$
(۳) $\sqrt{10}$
(۴) $\sqrt{13}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۶

۳۸ دو دایره به معادلات $x^2 + y^2 - 2x + 6y = 8$ و $x^2 + y^2 + 8x - 4y + 12 = 0$ نسبت به هم کدام وضع را دارند؟

- (۱) مماس خارج
(۲) مماس داخل
(۳) متقاطع
(۴) متخارج

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۷

۳۹ دایره‌ای از دو نقطه $(2, 0)$ و $(-2, 0)$ گذشته و بر خط به معادله $y = 1$ مماس است. شعاع این دایره کدام می‌باشد؟

- (۱) $\frac{3}{2}$
(۲) $\sqrt{5}$
(۳) $\frac{5}{2}$
(۴) ۳

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۸

۴۰ هر خط قائم بر یک دایره، از نقطه $(-2, 1)$ می‌گذرد. این دایره بر خط به معادله $y = x - 1$ مماس است. شعاع دایره کدام می‌باشد؟

- (۱) ۲
(۲) $2\sqrt{2}$
(۳) ۳
(۴) $3\sqrt{2}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۸

۴۱ دایره‌ای از نقطه $(-1, 2)$ گذشته و بر هر دو محور مختصات مماس است. قطر دایره بزرگتر کدام می‌باشد؟

- (۱) ۸
(۲) ۱۰
(۳) ۱۲
(۴) ۱۵

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۰

۴۲ به ازای کدام مقدار m ، خط به معادله $y = mx + 2$ بر دایره $x^2 + y^2 - 2x = 3$ مماس است؟

- (۱) 0 و $-\frac{4}{3}$
 (۲) 0 و $\frac{4}{3}$
 (۳) 1 و $-\frac{4}{3}$
 (۴) 1 و $\frac{4}{3}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۱

۴۳ شعاع دایره‌ای که از سه نقطه با مختصات $(2, 1)$ و $(-2, 4)$ و $(0, 0)$ می‌گذرد، کدام است؟

- (۱) ۲
 (۲) $\frac{2}{5}$
 (۳) ۳
 (۴) $\frac{3}{5}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۱

۴۴ شعاع دایره به مرکز $(-2, 2)$ و مماس خارج بر دایره $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$ ، کدام است؟

- (۱) $2\sqrt{2}$
 (۲) ۳
 (۳) $2\sqrt{3}$
 (۴) ۴

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۳

۴۵ نقطه $A(-1, 4)$ مرکز یک دایره است که بر روی خط $2x - 3y + 1 = 0$ و تری به طول $2\sqrt{7}$ جدا می‌کند. این دایره خط $y = 2$ را با کدام طول، قطع می‌کند؟

- (۱) $3, -5$
 (۲) $2, -4$
 (۳) $-1 \pm \sqrt{2}$
 (۴) $-1 \pm \sqrt{3}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

۴۶ مرکز دایره‌ای بر روی نیمساز ناحیه اول است. اگر این دایره از نقطه $A(6, 3)$ گذشته و بر خط به معادله $y = 2x$ مماس شود، شعاع آن کدام است؟

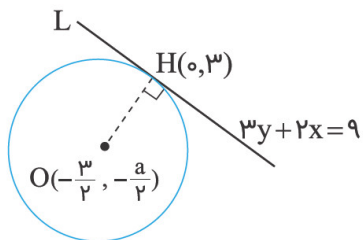
- (۱) $\sqrt{5}$
 (۲) $\sqrt{6}$
 (۳) $2\sqrt{2}$
 (۴) $\sqrt{10}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۲

پاسخ Homework

گزینه ۴

۱



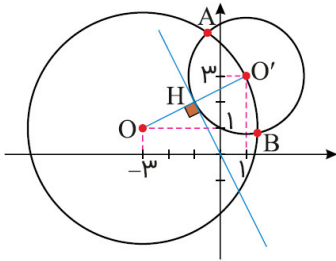
OH بر خط L عمود است.

$$\frac{-\frac{a}{2} - 3}{\frac{3}{2} - 0} \times \frac{-2}{3} = -1$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{a}{2} + 3}{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{a}{2} + 3 = \frac{9}{2} \xrightarrow{\times 2}$$

$$2a + 12 = 9 \Rightarrow a = -\frac{3}{2} = -1/5$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳



$$C(O, r) : O(-3, 1)$$

$$OH = O'H = r' = \frac{|1-6|}{\sqrt{1+4}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} \Rightarrow r = 2\sqrt{5} \quad (*)$$

$$x^2 + y^2 + 6x - 2y = a$$

$$r = \frac{\sqrt{36+4+4a}}{2} = \frac{\sqrt{40+4a}}{2} = \frac{2\sqrt{10+a}}{2} = \sqrt{10+a} \quad (**)$$

$$2\sqrt{5} = \sqrt{10+a} \Rightarrow 10+a = 20 \Rightarrow a = 10$$

$$O(-3, 1) \xrightarrow[\text{محور تقارن}]{y=-2x} O'(1, 3), r' = \sqrt{5}$$

$$\Rightarrow C' : (x-1)^2 + (y-3)^2 = 5$$

معادله دو دایره C و C' را برابر قرار می‌دهیم تا طول نقاط برخورد به دست آید:

$$x^2 + y^2 + 6x - 2y - 10 = (x-1)^2 + (y-3)^2 - 5$$

$$\Rightarrow 8x + 4y = 15 \Rightarrow y = -2x + \frac{15}{4}$$

این رابطه را در معادله دایره C' قرار می‌دهیم:

$$(x-1)^2 + \left(-2x + \frac{15}{4} - 3\right)^2 - 5 = 0$$

$$\Rightarrow 5x^2 - 5x - \frac{55}{16} = 0 \Rightarrow x_A + x_B = -\frac{b}{a} = +\frac{5}{5} = 1$$

گزینه ۲

۳

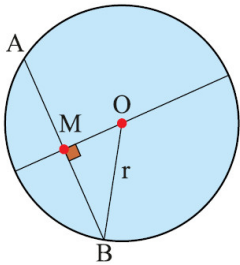
$$x^2 + y^2 - 3x - 5y + \frac{1}{4} = 0$$

نقطه $(-1, \frac{5}{4})$ را در معادله دایره جایگذاری می‌کنیم:

$$(-1)^2 + (\frac{5}{4})^2 - 3(-1) - 5(\frac{5}{4}) + \frac{1}{4} = 1 + \frac{25}{4} + 3 - \frac{25}{4} + \frac{1}{4} = \frac{-7}{4}$$

$$\text{طول کوتاه‌ترین وتر} = 2\sqrt{\frac{7}{4}} = \sqrt{7}$$

برای به دست آوردن طول کوتاه‌ترین وتر از روش دیگری نیز می‌توان استفاده کرد:



$$O(\frac{3}{4}, \frac{5}{4}), M(-1, \frac{5}{4}) \Rightarrow OM = \frac{5}{4}$$

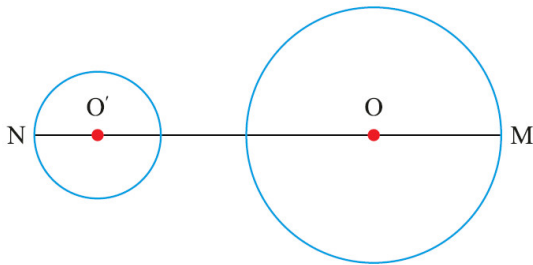
$$r = \frac{1}{4}\sqrt{9 + 25 - 2} = \frac{1}{4}\sqrt{32} \Rightarrow MB = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

$$\Rightarrow AB = 2 \times \frac{\sqrt{7}}{4} = \sqrt{7}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

گزینه ۲

۴



$$x^2 + y^2 - 2x + 2y - a = 0 \Rightarrow O(1, -1), r = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{4 + 4 + 4a} = \sqrt{2 + a}$$

$$x^2 + y^2 + 4x - 6y + 6a = 0$$

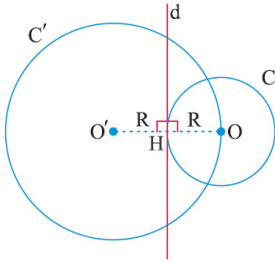
$$\Rightarrow O'(-2, 3), r' = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{16 + 36 - 24a} = \sqrt{13 - 6a}$$

$$OO' = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$$

$$MN = 5 + \sqrt{2 + a} + \sqrt{13 - 6a} = 8 \Rightarrow a = 2$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

دایره کوچک را $C(O, R)$ و دایره بزرگ را $C'(O', 2R)$ می‌نامیم. حال داریم:



$$C: x^2 + y^2 + 6x - 2y - r = 0 \Rightarrow O = (-3, 1), R = \sqrt{9 + 1 + r} = \sqrt{10 + r}$$

چون خط $d: x - y = 0$ بر دایره C مماس است، فاصله مرکز دایره تا خط d ، برابر شعاع دایره است و داریم:

$$R = |OH| = \frac{|-3 - 1|}{\sqrt{1+1}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \Rightarrow C: (x+3)^2 + (y-1)^2 = 8$$

چون خط d (نیمساز ربع اول و سوم) عمودمنصف OO' است، O' بازتاب O نسبت به d (نیمساز ربع اول و سوم) می‌باشد، پس $O' = (1, -3)$ و معادله دایره C' به صورت $(x-1)^2 + (y+3)^2 = 32$ است. حال معادله‌های دو دایره را از هم کم می‌کنیم تا معادله وتر مشترک آن‌ها به دست آید:

$$\left. \begin{array}{l} C: (x+3)^2 + (y-1)^2 = 8 \\ C': (x-1)^2 + (y+3)^2 = 32 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{کم می‌کنیم}} \text{وتر مشترک: } x - y = -3$$

$$\Rightarrow \text{وتر مشترک: } y = x + 3$$

در پایان، محل برخورد وتر مشترک و دایره C را می‌یابیم:

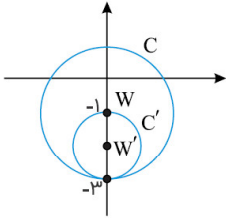
$$\begin{cases} y = x + 3 \\ (x+3)^2 + (y-1)^2 = 8 \end{cases} \Rightarrow (x+3)^2 + (x+2)^2 = 8$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 10x + 5 = 0 \Rightarrow \text{حاصل ضرب ریشه‌ها} = \frac{5}{2}$$

گزینه ۴

۶

$$C : x^2 + y^2 + 2y - 3 = 0 \Rightarrow W(0, -1), r = 2$$



درواقع چون دایره C از $(0, -3)$ عبور می‌کند، اگر دایره جدید بخواند با دایره قبلی مماس داخل باشد و از این نقطه نیز بگذرد تنها حالت آن است که نقطه تماس همین نقطه باشد. در نتیجه $W'(0, -2)$ و $r' = 1$ خواهد بود.

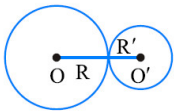
$$C' : (x - 0)^2 + (y + 2)^2 = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 + 4y + 3 = 0$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

گزینه ۴

۷

دو دایره با مرکزهای O و O' و شعاع‌های R و R' مماس بیرون‌اند اگر و تنها اگر داشته باشیم $|OO'| = R + R'$. در آغاز با دسته‌بندی معادله‌ها، مرکز و شعاع هر دایره را می‌یابیم:



$$x^2 + y^2 + 4x = 0 \Rightarrow (x + 2)^2 - 4 + y^2 = 0 \Rightarrow (x + 2)^2 + y^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} O = (-2, 0) \\ R = \sqrt{4} = 2 \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y + a = 0 \Rightarrow (x - 1)^2 - 1 + (y + 2)^2 - 4 + a = 0$$

$$\Rightarrow (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 5 - a \Rightarrow \begin{cases} O' = (1, -2) \\ R' = \sqrt{5 - a} \end{cases}$$

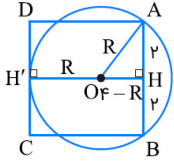
$$\Rightarrow \begin{cases} |OO'| = \sqrt{(-2 - 1)^2 + (0 + 2)^2} = 5 \\ R + R' = 2 + \sqrt{5 - a} \end{cases} \xrightarrow{|OO'| = R + R'} \omega = 2 + \sqrt{5 - a}$$

$$\Rightarrow \sqrt{5 - a} = 3 \Rightarrow 5 - a = 9 \Rightarrow a = -4$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۰

گزینه ۲

۸



باتوجه به شکل، $OH = 4 - R$ است. داریم:

$$\begin{aligned} \triangle OAH : OA^2 &= AH^2 + OH^2 \Rightarrow R^2 = 2^2 + (4 - R)^2 \Rightarrow R^2 = 4 + 16 - 8R + R^2 \\ \Rightarrow 8R &= 20 \Rightarrow R = 2/5 \end{aligned}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۵

گزینه ۲

۹

شعاع و مرکز دایره به معادله $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$ عبارت‌اند از:

$$x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0 \Rightarrow (x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 9$$

مرکز : $O'(2, -1)$ ، شعاع : $R' = 3$

نقطه‌ای که تمامی خطوط قائم بر دایره C از آن عبور می‌کنند، مرکز این دایره است، پس $O(1, 7)$ مرکز دایره C است.

$$d = OO' = \sqrt{(2 - 1)^2 + (-1 - 7)^2} = 10$$

چون دو دایره مماس خارج هستند، پس داریم:

$$d = R + R' \Rightarrow 10 = R + 3 \Rightarrow R = 7$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۶

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۰

گام اول

در یک دایره به معادله $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ ، مختصات مرکز دایره $(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2})$ می‌باشد و شعاع این دایره برابر است با:

$$R = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$$

گام دوم

برای مشخص کردن وضعیت دو دایره نسبت به هم، فاصله میان مرکز دو دایره (طول خط‌المركزین) را با دو مقدار $R_1 + R_2$ و $|R_1 - R_2|$ مقایسه می‌کنیم، بنابراین لازم است ابتدا مختصات مرکز دو دایره و شعاع آن‌ها را به دست آوریم.

$$x^2 + y^2 - 4x + 4y = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 - 4x + 4y - 1 = 0$$

$$\text{مرکز دایره: } O_1\left(-\frac{-4}{2}, -\frac{4}{2}\right) \Rightarrow O_1(2, -2)$$

$$\text{شعاع دایره: } R_1 = \sqrt{\left(-\frac{4}{2}\right)^2 + \left(\frac{4}{2}\right)^2 - (-1)} = \sqrt{4 + 4 + 1} = 3$$

$$x^2 + y^2 - 4x + 8y + 19 = 0$$

$$\text{مرکز دایره: } O_2\left(-\frac{-4}{2}, -\frac{8}{2}\right) \Rightarrow O_2(2, -4)$$

$$\text{شعاع دایره: } R_2 = \sqrt{\left(-\frac{4}{2}\right)^2 + \left(\frac{8}{2}\right)^2 - 19} = \sqrt{4 + 16 - 19} = 1$$

طول خط‌المركزین دو دایره برابر است با:

$$O_1O_2 = \sqrt{(2-2)^2 + (-4+2)^2} = \sqrt{0 + (-2)^2} = \sqrt{4} = 2$$

همچنین داریم:

$$|R_1 - R_2| = |3 - 1| = 2$$

بنابراین $O_1O_2 = |R_1 - R_2|$ است، پس دو دایره مماس داخل هستند.

گزینه ۱

۱۱

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۳

گام اول

در یک دایره به معادله $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ ، نقطه $(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2})$ مرکز دایره می‌باشد و شعاع این دایره برابر است با:

$$R = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$$

گام دوم

برای مشخص کردن وضعیت دو دایره نسبت به هم، مختصات مرکز دو دایره و شعاع آن‌ها را به دست می‌آوریم. سپس فاصله میان مرکز دو دایره (طول خط‌المركزین) را با دو مقدار $|R_1 - R_2|$ و $R_1 + R_2$ مقایسه می‌کنیم.

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y = 13 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2x + 4y - 13 = 0$$

$$\text{مرکز دایره : } O_1\left(-\frac{-2}{1}, -\frac{4}{1}\right) \Rightarrow O_1(1, -2)$$

$$\text{شعاع دایره : } R_1 = \sqrt{\left(-\frac{2}{1}\right)^2 + \left(\frac{4}{1}\right)^2 + 13} = \sqrt{1 + 4 + 13} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$x^2 + y^2 + 2x = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 + 2x - 1 = 0$$

$$\text{مرکز دایره : } O_2\left(-\frac{2}{1}, -\frac{0}{1}\right) \Rightarrow O_2(-1, 0)$$

$$\text{شعاع دایره : } R_2 = \sqrt{\left(\frac{2}{1}\right)^2 + 0 + 1} = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$$

بنابراین داریم:

$$O_1O_2 = \sqrt{(-1-1)^2 + (0+2)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$R_1 + R_2 = 3\sqrt{2} + \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$$

$$|R_1 - R_2| = |3\sqrt{2} - \sqrt{2}| = 2\sqrt{2}$$

بنابراین $O_1O_2 = |R_1 - R_2|$ است و دو دایره نسبت به هم مماس داخل هستند.

گزینه ۲

۱۲

دایره اول:

$$x^2 + y^2 + 2y - 4x = 0 \Rightarrow (x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 5$$

$$O_1(2, -1), \quad r_1 = \sqrt{5}$$

دایره دوم:

$$x^2 + y^2 - 2y = 2 \Rightarrow x^2 + (y - 1)^2 = 3$$

$$O_2(0, 1), \quad r_2 = \sqrt{3}$$

$$O_1O_2 = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2} \Rightarrow O_1O_2 \simeq 2/8$$

$$r_1 + r_2 \simeq 3/9$$

$$|r_1 - r_2| = 0/5$$

$$\Rightarrow 0/5 < O_1O_2 < 3/9$$

پس دو دایره متقاطع‌اند.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

گزینه ۱

۱۳

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

$$\xrightarrow{\text{را صدق می‌دهیم}} (0,0) \rightarrow c = 0$$

$$\xrightarrow{\text{را صدق می‌دهیم}} (2,1) \rightarrow 4 + 1 + 2a + b = 0$$

$$\xrightarrow{\text{را صدق می‌دهیم}} (1,-2) \rightarrow 1 + 4 + a - 2b = 0$$

اکنون با معلوم بودن مقادیر a, b و c شعاع دایره برابر است با:

$$\xrightarrow{\times 2} \begin{cases} 4a + 2b = -10 \\ a - 2b = -5 \end{cases} \Rightarrow 5a = -15 \Rightarrow a = -3, b = 1$$

$$R = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 - 4c} = \frac{1}{2} \sqrt{(-3)^2 + (1)^2 - 4(0)} = \frac{1}{2} \sqrt{10}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۳

گزینه ۳

۱۴

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

گام اول

الف) دایره محور x ها را در دو نقطه به طول $x = 1$ و $x = 3$ قطع می‌کند؛ بنابراین نقاط $A(1, 0)$ و $B(3, 0)$ روی دایره مورد نظر قرار دارند.

ب) مرکز دایره روی نیمساز ربع اول (خط $y = x$) است؛ بنابراین مرکز دایره را به صورت $O(\alpha, \alpha)$ در نظر می‌گیریم.

گام دوم

چون نقاط A و B روی دایره قرار دارند پس فاصله آن‌ها تا مرکز دایره باهم برابر و برابر شعاع دایره است.

$$OA = OB = R \Rightarrow \sqrt{(\alpha - 1)^2 + \alpha^2} = \sqrt{(\alpha - 3)^2 + \alpha^2}$$

$$\xrightarrow{\text{به توان } 2} (\alpha - 1)^2 + \alpha^2 = (\alpha - 3)^2 + \alpha^2$$

$$\Rightarrow \alpha^2 - 2\alpha + 1 = \alpha^2 - 6\alpha + 9 \Rightarrow 4\alpha = 8 \Rightarrow \alpha = 2$$

بنابراین مرکز دایره نقطه $O(2, 2)$ می‌شود و شعاع دایره برابر است با:

$$R = OA = \sqrt{(2 - 1)^2 + 2^2} = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۲

گام اول

معادله گسترده یک دایره به صورت $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ است. در این صورت شعاع دایره برابر است با:

$$R = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$$

گام دوم

سه نقطه A، B و C روی دایره قرار دارد، پس مختصات این نقاط در معادله دایره صدق می‌کند.

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

$$\xrightarrow{A(-1, 0)} (-1)^2 + 0^2 + a(-1) + b(0) + c = 0 \Rightarrow 1 - a + c = 0 \Rightarrow a - c = 1 \quad (\text{I})$$

$$\xrightarrow{B(3, 0)} 3^2 + 0^2 + a(3) + b(0) + c = 0 \Rightarrow 9 + 3a + c = 0 \Rightarrow 3a + c = -9 \quad (\text{II})$$

$$\xrightarrow{C(0, -3)} 0^2 + (-3)^2 + a(0) + b(-3) + c = 0 \Rightarrow 9 - 3b + c = 0 \Rightarrow c - 3b = -9 \quad (\text{III})$$

بنابراین سه معادله و سه مجهول داریم. با کمی دقت متوجه می‌شویم که دو معادله I و II فقط شامل دو مجهول a و c است، پس با حل یک دستگاه دو معادله و دو مجهول مقدار a و c را حساب می‌کنیم.

$$\begin{cases} a - c = 1 \\ 3a + c = -9 \end{cases} \xrightarrow{+} 4a = -8 \Rightarrow a = -2$$

$$a - c = 1 \xrightarrow{a=-2} c = -2 - 1 = -3$$

با جایگذاری $c = -3$ در معادله (III) مقدار b را هم حساب می‌کنیم.

$$c - 3b = -9 \xrightarrow{c=-3} -3 - 3b = -9 \Rightarrow 3b = 6 \Rightarrow b = 2$$

اکنون باتوجه به گام اول، شعاع دایره را به دست می‌آوریم.

$$R = \sqrt{\left(\frac{-2}{2}\right)^2 + \left(\frac{2}{2}\right)^2 + 3} = \sqrt{1 + 1 + 3} = \sqrt{5}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۵

گام اول

الف) معادله استاندارد یک دایره به مرکز (α, β) و شعاع R به صورت $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2$ است.
 ب) معادله گسترده یک دایره به صورت $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ است.

گام دوم

باتوجه به معادله گسترده نوشته شده در گام اول، ضریب x^2 و y^2 باید با هم برابر و برابر با یک باشد، بنابراین مقادیر a را به گونه ای می یابیم که ضریب x^2 و y^2 با هم برابر شوند؛ در نتیجه:

$$a^2 - 7 = 2 \Rightarrow a^2 = 9 \Rightarrow a = \pm 3$$

از طرفی معادله این دایره را باید بتوان به صورت استاندارد نوشت، بنابراین دو مقدار $a = +3$ و $a = -3$ را در معادله دایره جایگذاری می کنیم تا مقدار صحیح را تشخیص دهیم.

$$a = 3 : 2x^2 + (9 - 7)y^2 + 4y + 3 = 0 \Rightarrow 2x^2 + 2y^2 + 4y + 3 = 0 \\ \Rightarrow 2(x - 0)^2 + 2(y^2 + 2y + 1) + 1 = 0 \Rightarrow 2(x - 0)^2 + 2(y + 1)^2 + 1 = 0$$

$$\xrightarrow{\div 2} (x - 0)^2 + (y + 1)^2 + \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow (x - 0)^2 + (y + 1)^2 = -\frac{1}{2} \quad \text{غقق}$$

رابطه به دست آمده همواره نادرست است؛ زیرا عبارت سمت چپ تساوی همواره نامنفی می باشد ولی مساوی با یک عدد منفی شده است.

$$a = -3 : 2x^2 + (9 - 7)y^2 + 4y - 3 = 0 \Rightarrow 2x^2 + 2y^2 + 4y - 3 = 0 \\ \Rightarrow 2(x - 0)^2 + 2(y^2 + 2y + 1) - 5 = 0 \Rightarrow 2(x - 0)^2 + 2(y + 1)^2 - 5 = 0$$

$$\xrightarrow{\div 2} (x - 0)^2 + (y + 1)^2 - \frac{5}{2} = 0 \Rightarrow (x - 0)^2 + (y + 1)^2 = \frac{5}{2}$$

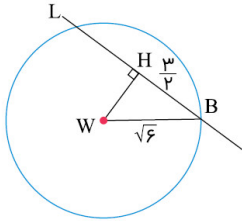
به ازای $a = -3$ ، معادله دایره ای به مرکز $(0, -1)$ و شعاع $R = \sqrt{\frac{5}{2}}$ داریم.

گزینه ۴

۱۷

مرکز و شعاع دایره را حساب می‌کنیم:

$$W(2, -1) \quad , \quad r = \sqrt{4 + 1 + 1} = \sqrt{6}$$



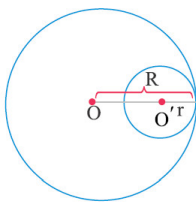
$$|WH| = \frac{|-2 + 2 - a|}{\sqrt{1 + 4}} = \frac{|a|}{\sqrt{5}}$$

$$\Delta WHB : 6 = \frac{9}{4} + \frac{a^2}{5} \Rightarrow \frac{a^2}{5} = \frac{15}{4} \Rightarrow a^2 = \frac{75}{4} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = \frac{5\sqrt{3}}{2} \\ a_2 = -\frac{5\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow |a_1 - a_2| = 5\sqrt{3}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

گزینه ۱

۱۸



شعاع دایره بزرگ را R و شعاع دایره کوچک را r فرض می‌کنیم. چون دایره‌ها مماس داخل‌اند، داریم:

$$\text{طول خط‌المركزين} = R - r \xrightarrow{\text{فرض سوال}} R - r = 3/5 = \frac{3}{5} \quad (*)$$

$$S_{\text{ناحیه بین}} = 21\pi \Rightarrow S_{\text{دایره بزرگ}} - S_{\text{دایره کوچک}} = 21\pi \\ \Rightarrow \pi R^2 - \pi r^2 = 21\pi \Rightarrow R^2 - r^2 = 21 \Rightarrow (R - r)(R + r) = 21$$

$$\xrightarrow{(*)} \frac{3}{5}(R + r) = 21 \Rightarrow R + r = 35 \xrightarrow{(*)} \begin{cases} R + r = 35 \\ R - r = 3/5 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{کم می‌کنیم}} 2r = 2/5 \Rightarrow r = 1/25$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۱

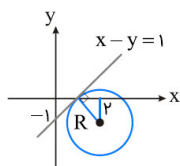
۱۳۶۰

فاصله مرکز دایره از خط مماس بر دایره برابر با شعاع دایره است. فاصله یک نقطه با مختصات (x_0, y_0) از خط به معادله $ax + by + c = 0$ برابر است با:

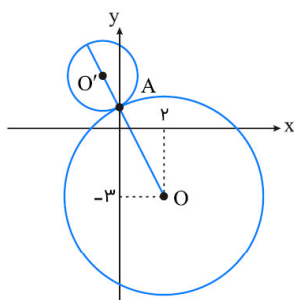
$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

بنابراین شعاع دایره برابر است با:

$$R = \frac{|2 + 1 - 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \sqrt{2}$$



$$\text{معادله دایره: } (x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 2 \xrightarrow{y=0} (x - 2)^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} x - 2 = 1 \Rightarrow x = 3 \\ x - 2 = -1 \Rightarrow x = 1 \end{cases}$$



مطابق شکل، مراکز دو دایره مماس خارج و محل تماس دو دایره، روی یک خط راست قرار دارند و مرکز دایره O' در ناحیه دوم دستگاه مختصات است. می‌دانیم قائم‌های رسم‌شده بر یک دایره از مرکز آن دایره عبور می‌کنند، پس با فرض $O = (2, -3)$ و $A = (0, 1)$ داریم:

$$m_{OA} = \frac{1 - (-3)}{0 - 2} = -2$$

$$OA \text{ خط : معادله } y - 1 = -2(x - 0) \Rightarrow y = -2x + 1$$

در بین گزینه‌ها، تنها نقطه $(-1, 3)$ در ناحیه دوم دستگاه مختصات است و در معادله خط OA صدق می‌کند. با فرض $O' = (-1, 3)$ داریم:

$$O'A = \sqrt{(0 + 1)^2 + (1 - 3)^2} = \sqrt{5}$$

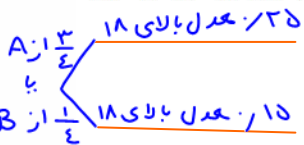
احتمال کل دوازدهم

$P(A) + P(B) = 1 \rightarrow 3P(B) + P(B) = 1 \rightarrow P(B) = \frac{1}{4} \rightarrow P(A) = \frac{3}{4}$ Homework

۱ مدرسه A سه برابر مدرسه B دانش آموز دارد. ۲۵ درصد دانش آموزان مدرسه A و ۱۵ درصد دانش آموزان مدرسه B معدلی بالای ۱۸ دارند. اگر همه دانش آموزان هر دو مدرسه در یک محوطه حاضر باشند و به تصادف یکی از آن‌ها را انتخاب کنیم:

کتاب درسی علوم تجربی دوازدهم ریاضی تمرین $P(A \sim 18) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{16}$ $P(B \sim 18) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$

یا : + جمع
و : x ضرب



الف با چه احتمالی فرد انتخابی از مدرسه A و با چه احتمالی از مدرسه B است؟

الف

ب با چه احتمالی فرد انتخابی معدلی بالای ۱۸ دارد؟

ب

$P(\text{معدلی بالای ۱۸}) = \frac{3}{4}(\frac{1}{4}) + (\frac{1}{4})(\frac{1}{4}) = \frac{9}{16}$

۲ مینا در انتخاب رشته خود برای تحصیل در دبیرستان بین سه رشته ریاضی، تجربی و انسانی مردد است. اگر او رشته ریاضی را انتخاب کند، به احتمال ۰/۴۵، اگر تجربی را انتخاب کند به احتمال ۰/۱ و اگر انسانی را انتخاب کند به احتمال ۰/۳ در آزمون ورودی دانشگاه پذیرفته خواهد شد. اگر احتمال اینکه او رشته ریاضی را انتخاب کند ۰/۱، احتمال اینکه رشته تجربی را انتخاب کند ۰/۶ و احتمال اینکه رشته انسانی را انتخاب کند ۰/۳ باشد، با چه احتمالی در دانشگاه پذیرفته خواهد شد؟

کتاب درسی علوم تجربی دوازدهم ریاضی تمرین $P(\text{تجویز}) = (\frac{1}{10})(\frac{45}{100}) + (\frac{6}{10})(\frac{1}{10}) + (\frac{3}{10})(\frac{3}{10}) = \frac{195}{1000} = 0.195$

معین $\frac{3}{10} = \frac{1}{10}$

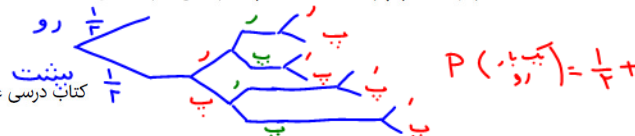
۳ دو جعبه داریم. درون یکی از آن‌ها ۱۲ لامپ قرار دارد که ۶ تا از آن‌ها معیوب است و درون جعبه دیگر ۹۶ لامپ قرار دارد که ۴ تا از آن‌ها معیوب است. به تصادف جعبه‌ای انتخاب کرده، یک لامپ از آن بیرون می‌آوریم. چقدر احتمال دارد لامپ مورد نظر معیوب باشد؟ احتمال انتخاب هر جعبه $\frac{1}{2}$ است

کتاب درسی علوم تجربی دوازدهم ریاضی تمرین $P(\text{معیوب}) = (\frac{1}{2})(\frac{6}{12}) + (\frac{1}{2})(\frac{4}{96}) = \frac{13}{24}$

۴ در یک جعبه ۵ ساعت دیواری از نوع A، ۲ تا از نوع B و ۱۵ تا از نوع C وجود دارد و احتمال اینکه عمر آن‌ها از ۱۰ سال بیشتر باشد، برای نوع A، $\frac{4}{5}$ ، برای نوع B، $\frac{9}{10}$ و برای نوع C، $\frac{1}{2}$ است. به تصادف یک ساعت از کارتن بیرون می‌آوریم. با چه احتمالی عمر این ساعت بیش از ۱۰ سال است؟

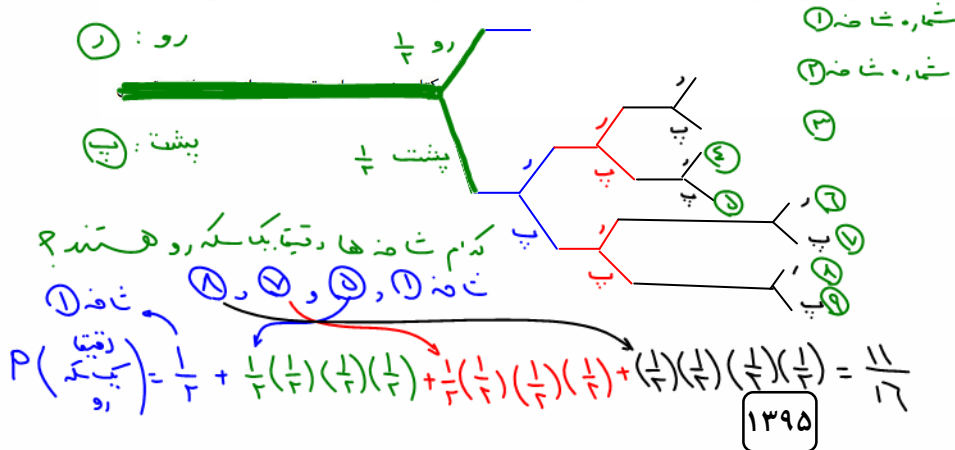
کتاب درسی علوم تجربی دوازدهم ریاضی تمرین $P(\text{عمر از ۱۰ سال بیشتر}) = (\frac{5}{22})(\frac{4}{5}) + (\frac{2}{22})(\frac{9}{10}) + (\frac{15}{22})(\frac{1}{2}) = \frac{133}{220}$

۵ یک سکه را پرتاب می‌کنیم و اگر پشت بیاید ۳ سکه دیگر را باهم پرتاب می‌کنیم. در این آزمایش احتمال اینکه دقیقاً یک سکه رو ظاهر شود چقدر است؟



کتاب درسی علوم تجربی دوازدهم ریاضی تمرین

۶ فرض کنید جمعیت یک کشور متشکل از ۲۰ درصد کودک و نوجوان، ۵۰ درصد میانسال و ۳۰ درصد سالمند باشند و شیوع یک بیماری خاص در این دسته‌ها به ترتیب ۳ درصد، ۵ درصد و ۱ درصد باشد. اگر فردی به تصادف از این جامعه انتخاب شود، با چه احتمالی به بیماری مورد نظر مبتلا است؟



جواب $\frac{3}{100}$
 $P(\text{بیماری}) = (\frac{20}{100} \times \frac{3}{100}) + (\frac{50}{100} \times \frac{5}{100}) + (\frac{30}{100} \times \frac{1}{100}) = \frac{3}{100}$



یکای ۷
 $(3+3=6)+1=7$

درون جعبه A چهار مهره زرد و سه مهره قرمز و درون جعبه B سه مهره زرد و سه مهره قرمز قرار دارد. از جعبه A مهره‌ای را برداشته و در جعبه B قرار می‌دهیم، سپس از جعبه B مهره‌ای انتخاب می‌کنیم. اگر دو مهره هم‌رنگ باشند، با چه احتمالی هر دو زرداند؟

۷ نم برای انتخاب مجدد

دو مهره
 $P(\text{هر دو زرد یا هر دو قرمز}) = \left(\frac{4}{7} \times \frac{4}{7}\right) + \left(\frac{3}{7} \times \frac{3}{7}\right) = \frac{28}{49} \rightarrow \frac{4}{7}$ (۲✓)
 (۳) $\frac{3}{5}$
 (۴) $\frac{4}{5}$

- (۱) $\frac{4}{5}$
- (۳) $\frac{3}{5}$

علوی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۱۴۰۱۱

قرمز ۲
 $3+2=5=7$

۵ قرمز
 $4+5=9=7$

درون کیسه A، ۵ مهره قرمز و دو مهره آبی و درون کیسه B، ۲ مهره قرمز و ۵ مهره آبی قرار دارد. ۳ مهره از کیسه A و دو مهره از کیسه B را انتخاب و در طرف C می‌ریزیم، سپس مهره‌ای از ظرف C انتخاب می‌کنیم. با چه احتمالی این مهره قرمز است؟

۸

نویس C پنج مهره داریم ۳ تا از A و ۲ تا از B

- (۲) $\frac{17}{35}$
- (۴) $\frac{17}{36}$

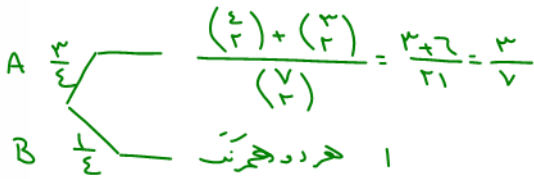
- (۱) $\frac{19}{36}$
- (۳✓) $\frac{19}{35}$

$P(\text{قرمز}) = \left(\frac{2}{5} \times \frac{5}{7}\right) + \left(\frac{3}{5} \times \frac{2}{7}\right) = \frac{10}{35} + \frac{6}{35} = \frac{16}{35}$

علوی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۱۴۰۱۲

درون جعبه A، ۴ مهره قرمز و ۳ مهره آبی و درون جعبه B، ۸ مهره قرمز وجود دارد. اگر احتمال انتخاب جعبه A سه برابر احتمال انتخاب جعبه B باشد و با چشمان بسته جعبه‌ای را انتخاب و از درون آن دو مهره هم‌زمان انتخاب کنیم، با چه احتمالی دو مهره هم‌رنگ است؟

۹



- (۲) $\frac{5}{7}$
- (۴) $\frac{3}{7}$

- (۱) $\frac{6}{7}$
- (۳✓) $\frac{4}{7}$

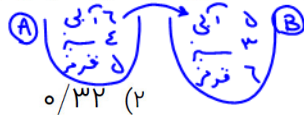
$P(\text{دو مهره آبی}) = \left(\frac{3}{4} \times \frac{3}{7}\right) + \left(\frac{1}{4}\right)(1) = \frac{9}{28} + \frac{7}{28} = \frac{16}{28} = \frac{4}{7}$

علوی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۱۴۰۱۰

جعبه A شامل ۶ مهره آبی، ۴ مهره سبز و ۵ مهره قرمز است و جعبه B شامل ۵ مهره آبی، ۳ مهره سبز و ۶ مهره قرمز است. از جعبه A به تصادف یک مهره انتخاب کرده، در جعبه B قرار می‌دهیم. سپس یک مهره از جعبه B انتخاب می‌کنیم. با کدام

۱۰

نسبت: روش سریع می‌باید:
 $P(n, k) = \frac{n!}{k!(n-k)!}$



احتمال مهره خارج شده از جعبه B آبی است؟
 ۰/۳۶ (۱)
 ۰/۲۸ (۳)
 ۰/۲۴ (۴)

$P(\text{آبی}) = \left(\frac{4}{10}\right)\left(\frac{5+1}{14+1}\right) + \left(\frac{5}{10}\right)\left(\frac{4}{14+1}\right) = \frac{36}{154} + \frac{20}{154} = \frac{56}{154} = \frac{4}{11}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

در ظرف اول ۳ مهره آبی و ۶ مهره قرمز و در ظرف دوم ۴ مهره آبی و ۵ مهره قرمز دارند. دو تاس پرتاب می‌کنیم. اگر مجموع اعداد رو شده ۷ یا ۱۰ باشد، به تصادف یک مهره از ظرف اول خارج کرده و در ظرف دوم می‌اندازیم. در غیر این صورت از ظرف دوم یک مهره برداشته و به ظرف اول اضافه می‌کنیم. اکنون یک مهره از ظرف با مهره بیشتر انتخاب می‌کنیم. احتمال این که مهره آبی باشد، کدام است؟

۱۱

۹. نامعزف: $(1, 2), (2, 1), (3, 4), (4, 3), (2, 5), (5, 2), (4, 6), (6, 4), (5, 5)$

مجموع تاس ۷ یا ۱۰: $\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$

- (۲) $\frac{11}{30}$
- (۴) $\frac{11}{18}$

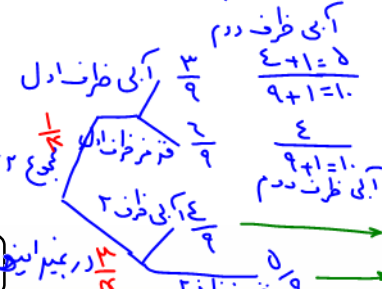
- (۱) $\frac{7}{18}$
- (۳) $\frac{19}{30}$

مجموع تاس غیر از ۷ یا ۱۰: $1 - \frac{4}{36} = \frac{32}{36} = \frac{8}{9}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۰

$P(\text{سند}) = \frac{1}{4} \left(\left(\frac{3}{9} \times \frac{1}{10}\right) + \left(\frac{7}{9} \times \frac{4}{10}\right) \right) + \frac{3}{4} \left(\left(\frac{4}{9} \times \frac{4}{10}\right) + \left(\frac{5}{9} \times \frac{3}{10}\right) \right) = \frac{11}{30}$

در غیر این صورت ۱۳۹۶



آبی اول: $\frac{3+1}{9+1} = \frac{4}{10}$
 آبی اول: $\frac{4}{9+1} = \frac{4}{10}$

۱۲

در یک روستا ۵۴ درصد جمعیت را مردان و ۴۶ درصد را زنان تشکیل می‌دهند. اگر ۶۰ درصد مردان و ۷۵ درصد زنان دفترچه سلامت داشته باشند، با کدام احتمال یک فرد انتخابی به تصادف از بین آن‌ها دفترچه سلامت دارد؟

(۱) ۰/۶۵۸

(۲) ۰/۶۶۹

(۳) ۰/۶۸۵

(۴) ۰/۶۹۶

زن و دختر پیدا، با مرد و دفترچه داره

$$P(\text{دفترچه داشتن}) = \left(\frac{46}{100} \times \frac{75}{100}\right) + \left(\frac{54}{100} \times \frac{60}{100}\right) = 0.685$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۰

۱۳

احتمال انتقال بیماری مسری به افرادی که واکسن زده‌اند ۰/۲۵ و احتمال انتقال به افراد دیگر ۰/۲ است. کارگران یک کارگاه واکسن زده‌اند. اگر فرد حامل بیماری با یکی از کارگران ملاقات کند، با کدام احتمال، این بیماری منتقل می‌شود؟

(۱) ۰/۱۳ ✓

(۲) ۰/۱۴

(۳) ۰/۱۵

(۴) ۰/۱۶

$$0.25 \times \frac{2}{5} = 0.1$$

$$0.2 \times \frac{3}{5} = 0.12$$

$$P(\text{بیماری منتقل شود}) = \left(\frac{2}{5} \times \frac{25}{100}\right) + \left(\frac{3}{5} \times \frac{20}{100}\right) = 0.13$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۹

۱۴

انتقال نوعی بیماری ارثی از والدین به فرزند پسر ۱۰ درصد و به فرزند دختر ۶ درصد است. با کدام احتمال فرزندی که به دنیا می‌آید این نوع بیماری را ندارد؟

(۱) ۹۱%

(۲) ۹۲%

(۳) ۹۳%

(۴) ۹۴%



$$P(\text{بیماری نداشتن}) = P(\text{پسر نداشتن}) = \left(\frac{1}{4} \times \frac{9}{10}\right) + \left(\frac{1}{4} \times \frac{94}{100}\right) = 92\%$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۳

۱۵

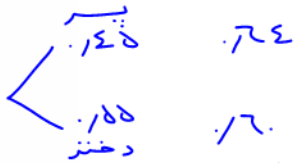
۵۵ درصد دانشجویان سال اول دختر و بقیه پسر هستند. ۶۰ درصد دختران و ۶۴ درصد پسران تمام واحدهای درسی خود را گذرانده‌اند. چند درصد کل دانشجویان، تمام واحدهای درسی خود را گذرانده‌اند؟

(۱) ۶۱/۴

(۲) ۶۱/۸ ✓

(۳) ۶۲/۴

(۴) ۶۲/۸



$$P(\text{پاس کرده}) = \left(\frac{55}{100} \times \frac{60}{100}\right) + \left(\frac{45}{100} \times \frac{64}{100}\right) = 0.618 \rightarrow \frac{61.8}{100}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۸

۱۶

احتمال اینکه امیر برای قبولی در رشته پزشکی، یکی از سه دانشگاه A، B و C را انتخاب کند، به ترتیب، ۰/۴، ۰/۳۵ و ۰/۲۵ است. اگر او یکی از دانشگاه‌های A، B و C را انتخاب کند، به ترتیب، با احتمال ۰/۲۵، ۰/۳ و ۰/۳۵ در آن دانشگاه پذیرفته می‌شود. چند درصد احتمال دارد که امیر در رشته پزشکی قبول شود؟

(۱) ۲۰/۵۵

(۲) ۲۹/۵۵

(۳) ۲۰/۲۵

(۴) ۲۹/۲۵

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

$$P(\text{قبولی امیر}) = (0.25 \times 0.4) + (0.35 \times 0.3) + (0.35 \times 0.35) = 0.2925$$

تقریباً ۲۹,۲۵٪

۱۳۹۷

۵, ۱, ۲, ۴, ۵, ۷

گزینه ۴

۲

کل اعداد سه رقمی بدون تکرار ارقام که فرد باشد و مضرب ۵ نباشد، برابر است با:

$$\frac{۴}{\text{به غیر از صفر}} \times \frac{۴}{\text{و رقم یکان}} \times \frac{۲}{\{۱ یا ۷\}} = ۳۲$$

به کار برده شده

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۴۰۳

گزینه ۲

۳

حالت‌های زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\text{حالت اول: } \frac{۵}{\text{ورود A}} \times \frac{۴}{\text{خروج A}} \times \frac{۳}{\text{ورود B از جایی غیر از خروج A}} \times \frac{۳}{\text{خروج B}} = ۱۸۰$$

$$\text{حالت دوم: } \frac{۵}{\text{ورود A}} \times \frac{۴}{\text{خروج A}} \times \frac{۱}{\text{ورود B از خروج A}} \times \frac{۴}{\text{خروج B}} = ۸۰$$

$$\Rightarrow ۱۸۰ + ۸۰ = ۲۶۰$$

کنکور سراسری علوم انسانی خارج از کشور ۱۴۰۲

۷ حاصل $\frac{10!}{10! + 11!} - \frac{10!}{10! - 11!}$ کدام است؟

$\frac{1}{6}$ (۲)

$\frac{11}{33}$ (۱)

$\frac{11}{60}$ (۴)

$\frac{1}{2}$ (۳)

۸ اگر $\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = 30$ باشد، آن‌گاه حاصل $\frac{n^2 + 5}{n!}$ کدام است؟

۵ (۲)

۴ (۱)

$\frac{1}{5}$ (۴)

$\frac{1}{4}$ (۳)

$$\frac{(n+1)n(n-1)\dots}{(n-1)!} = 30$$

$$\frac{30}{0!} = \frac{30}{1!} = \frac{1}{n}$$

جایگشت

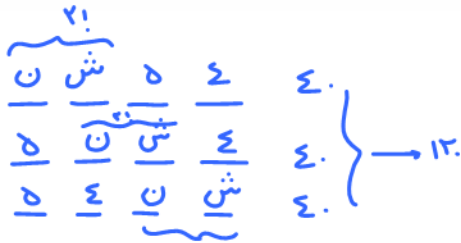
Homework (1)

با حروف کلمه "ساحل شنی" و بدون تکرار حروف:

۷ حرف

۱ چند کلمه ۷ حرفی می‌توان نوشت؟ $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

۲ چند کلمه ۴ حرفی می‌توان نوشت که در آن‌ها دو حرف "ش، ن" کنار هم باشند؟



۳ چند کلمه ۵ حرفی می‌توان نوشت که با کلمه "شن" شروع شود؟ 3 انتخاب از ۵ حرف

۴ چند کلمه ۷ حرفی می‌توان نوشت که کلمه "شن" در آن دیده نشود؟

همه ۷ حرفی‌ها به جز آنهایی که "شن" دارند: $7! - 3! = 5040 - 6 = 5034$

۵ همواره نفر وسط افسر باشد. یک افسر و ۳ سرباز در خط می‌ایستند. افسر وسطی تونه به ۲ حالت عوض بشه پس $2 \cdot 3! = 12$

۶ ابتدا و انتهای صف افسر باشد. از ۴ این ۲ انتخاب کن سربازها رو ۲ هونا جایگشت ۵ ترمانه هم با جایگشت شوند: $\binom{4}{2} \cdot 2! \cdot 5! = 6 \cdot 2 \cdot 120 = 1440$

۷ یکی در میان قرار بگیرند. $2! \cdot 4! = 2 \cdot 24 = 48$

۸ تعداد ترتیب‌های مختلف حروف کدامیک از واژه‌ها متفاوت با واژه‌های دیگر است؟

- ۱) آرمین $5!$ حرفی دارند به جز $3!$ آرمین
- ۲) بهزاد $4!$
- ۳) شروین $5!$
- ۴) بهزاد $4!$

۹ از تساوی $P(n, n-2) = 12$ مقدار n کدام است؟

- ۱) ۳
- ۲) ۴
- ۳) ۵
- ۴) ۶

۱۰ به چند طریق می‌توان ۳ مهره آبی و ۴ مهره زرد را روی یک خط چید به طوری که هیچ دو مهره زردی کنار هم نباشند؟

- ۱) ۷۲ $3! \cdot 4! = 144$
- ۲) ۸۴
- ۳) ۹۶
- ۴) ۱۴۴

۱۱ با حروف کلمه جهان‌گردی و بدون تکرار:

- الف) چند کلمه ۸ حرفی می‌توان ساخت که با ج شروع و به ی ختم شود.
- ب) چند کلمه هشت حرفی می‌توان ساخت که در آن‌ها حروف (د) و (ی) کنار هم باشند.
- پ) چند کلمه ۶ حرفی می‌توان نوشت؟

۱۲ با حروف کلمه "random" و بدون تکرار حروف:

الف چند کلمه ۵ حرفی می‌توان نوشت که در آن، حروف کلمه "ran" کنار هم باشند؟

ب چند کلمه ۶ حرفی می‌توان نوشت که با حرف صدادار شروع شود؟

۱۳ با حروف کلمه "polices" چند کلمه ۷ حرفی می‌توان ساخت که حروف p, l و c کنار هم باشند؟

(۱) ۱۲۰

$$\frac{7!}{3}$$

(۳) $6! \times 2$

(۲) $\frac{7!}{3}$

(۴) ۷۲۰

۱۴ تعداد راه‌های مختلف مرتب کردن حرف‌های واژه "مسلمانان" برابر است با:

(۱) ۹!

(۳) ۷! ✓

(۲) ۸!

(۴) ۶!

۱۵ سه معلم و دو معاون مدرسه‌ای می‌خواهند عکس یادگاری بگیرند. به چند طریق می‌توانند این کار را انجام دهند به طوری که معلمین در کنار هم و معاونین نیز در کنار هم باشند؟

(۱) ۱۲

(۳) ۲۴

(۲) ۱۸

(۴) ۳۶

۱۶ با حروف کلمه "فرزانه" چند کلمه شش حرفی می‌توان نوشت به طوری که دو حرف "ر" و "ز" کنار هم باشند و با حرف "الف" شروع شود؟

(۱) ۹۶

(۳) ۶۴

(۲) ۴۸

(۴) ۳۶

۱۷ با ارقام ۲، ۳، ۴، ۵، ۷ و بدون تکرار:

الف چند عدد پنج رقمی می‌توان نوشت؟

ب چند عدد پنج رقمی زوج می‌توان نوشت؟

پ چند عدد پنج رقمی کوچک‌تر از ۳۰۰۰۰ می‌توان نوشت؟

۱۸ بر روی محیط یک دایره شش نقطه جدا از هم قرار دارند. با این شش نقطه:

الف چند پاره‌خط می‌توان تشکیل داد؟

ب چند بردار می‌توان ساخت؟

پ چند مثلث می‌توان رسم کرد؟

۱۹ در یک کلاس ده نفره چند حالت برای رتبه‌بندی نفرات اول تا سوم وجود دارد؟

۲۰ سه دانش‌آموز کلاس دهم، دو دانش‌آموز کلاس یازدهم و چهار دانش‌آموز کلاس دوازدهم می‌خواهند در یک صف بایستند. به

چند طریق می‌توانند این صف را تشکیل دهند، اگر:

الف دانش‌آموزان سال دهم کنار هم باشند.

۸ حرف داره که ۲ تا فون ۲ تا جیم ۲ تا الف تکرار به

$$\frac{8!}{2! 2! 2!} = \frac{8 \times 7!}{2 \times 2 \times 2} = 7!$$

۲۰ ب دانش‌آموزان هم‌کلاسی کنار هم باشند.

۲۱ با حروف کلمه sportman و بدون تکرار حروف:

الف چند کلمه ۸ حرفی می‌توان نوشت که با کلمه man شروع شود؟

ب چند کلمه ۵ حرفی می‌توان نوشت که در آن حروف کلمه man کنار هم باشند؟

۲۲ از ۱۲ نفر دانش‌آموز به چند طریق می‌توان ۳ نفر را به عنوان نماینده گروه‌ها در نظر گرفت؟

۶۶۰ (۲)

۱۳۲۰ (۱)

۲۲۰ (۴)

۳۳۰ (۳)

$$E E E O O : \frac{5!}{3! 2!} = 10$$

$$E E E O A : \frac{5!}{3!} = 20$$

$$E E O O A : \frac{5!}{2! 2!} = 30$$

$$10 + 20 + 30 = 60$$

۲۳ با حروف کلمه EEEEOA چند کلمه ۵ حرفی می‌توان ساخت؟

۶۰ (۲) ✓

۴۸ (۱)

۳۶ (۴)

۱۰ (۳)

۲۴ تعداد جایگشت‌های حروف کلمه PARROT به طوری که Rها کنار هم نباشند، کدام است؟

۶۰۰ (۲)

۲۴۰ (۱) ✓

۴۸۰ (۴)

۳۶۰ (۳)

تعداد کل جایگشت حرف با ۲ ت R تکراری:

$$\frac{7!}{2!}$$

Rها کنار هم باشند

$$5! = \frac{7!}{2!} - \frac{6!}{1!}$$

پس $240 = 420 - 180 = \left(\frac{7!}{2} - 360\right) - 120 = 240$

Rها کنار هم نباشند

Homework (2)

۱ با حروف کلمه "آهنگری" چند کلمه ۶ حرفی می‌توان نوشت که حروف کلمه "گنه" کنار هم باشند؟

- (۱) ۲۴
(۲) ۷۲
(۳) ۱۴۴
(۴) ۲۱۶

۲ ۴ وزیر هر کدام با یک معاون به چند طریق می‌توانند روی ۸ صندلی در دو ردیف روبه‌روی هم بنشینند به طوری که هر وزیر دقیقاً روبه‌روی معاونش قرار بگیرد؟ (وزیرها در یک ردیف بنشینند) (با تغییر)

- (۱) ۲۴
(۲) ۳۲
(۳) ۴۸
(۴) ۶۴

۳ حروف کلمه LAGRANGE را با جایگشت‌های مختلف کنار هم قرار می‌دهیم. در چند حالت حروف یکسان کنار هم قرار می‌گیرند؟

- (۱) ۳۶۰
(۲) ۵۴۰
(۳) ۷۲۰
(۴) ۱۴۴۰

۴ در یک جلسه آموزشی میز گردی شامل ۴ دانش‌آموز کلاس پایه یازدهم و ۴ دانش‌آموز کلاس پایه دوازدهم تشکیل شده است. به چند حالت دانش‌آموزان در صندلی‌ها بنشینند، به طوری که در کنار هر دانش‌آموزی، دانش‌آموز هم‌پایه قرار نگیرد؟



$$2 \times 2! = 4 \text{ حالت}$$

(۲) ۲۸۸

(۴) ۱۱۵۲

$$6 = 3! = (4-1)!$$

(۱) ۱۴۴

(۳) ۲۷۶

یازدهمی‌ها به صورت دور میزگرد بنشینند و ۴ دوازدهمی‌ها به جابه‌جا شوند.

۵ نفر قرار است در یک جلسه سخنرانی کنند. در چند حالت، دو نفر خاص پشت سر هم سخنرانی می‌کنند؟

- (۱) ۲۴
(۲) ۴۸
(۳) ۷۲
(۴) ۹۶

۶ با جابه‌جایی ارقام عدد ۵۷۶۲۲۲ چند عدد شش رقمی می‌توان تشکیل داد به طوری که رقم‌های ۲، یک‌درمیان قرار بگیرند؟

- (۱) ۹
(۲) ۱۲
(۳) ۱۸
(۴) ۲۴

۷ کتاب متمایز با موضوع ریاضی و ۲ کتاب متمایز با موضوع آمار را به چند طریق می‌توان در یک قفسه کنار هم قرار داد، به طوری که موضوع دو کتاب مجاور هر کتاب (بجز کتاب اول و آخر)، متفاوت باشد؟

$RRAARR$
 $4! \cdot 2! = 48$

۷۲ (۲)

۹۶ (۱)

۲۴ (۴)

۴۸ (۳)

۸ نفر به $(n-1)!$ دور میز گردی نشینند

۸ در یک میز گرد، ۶ نفر به چند طریق می‌توانند قرار گیرند، به طوری که ۲ فرد مورد نظر از آنان، همواره کنار یکدیگر باشند؟

۲ نفر را به هم بچسبونیم به نفر بقیه ۵ نفر بماند
 جایابی ۲ نفر $2!$
 جایابی بقیه ۵ نفر $(5-1)!$

۴۸ (۲) ✓

۳۶ (۱)

۱۲۰ (۴)

۹۶ (۳)

$4! \times 2 = 48$

۹ در یک اتومبیل معمولی، ۵ نفر به چند طریق می‌توانند بنشینند، به طوری که ۳ نفر آن‌ها مجاز به رانندگی باشند؟

جایابی بقیه ۲ نفر $2!$
 از ۳ نفر به نفر راننده $\binom{3}{1} = 3$
 $3 \times 4! = 72$

۷۲ (۲)

۶۰ (۱)

۸۴ (۴)

۷۵ (۳)

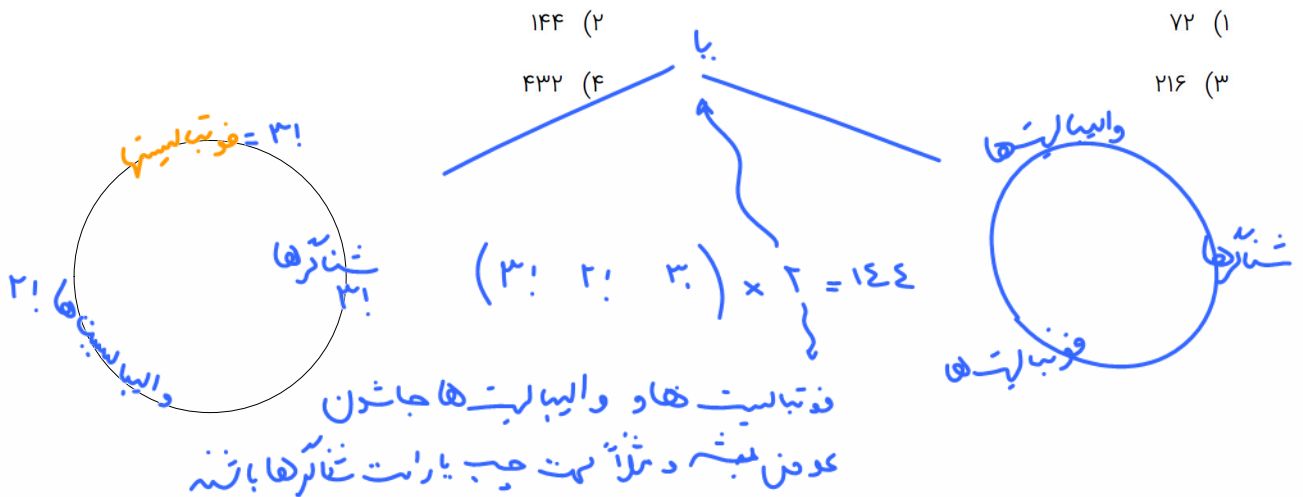
۱۰ به چند طریق ۳ بازیکن فوتبال، ۲ بازیکن والیبال و ۳ شناگر دور یک میز بنشینند، به طوری که افراد هم تیمی کنار هم باشند؟

۱۴۴ (۲)

۷۲ (۱)

۴۳۲ (۴)

۲۱۶ (۳)



در ترتیب اول یادم شدن همه ولی در ترتیب
 ترکیب مهم نیست. مثلاً شماره از ۵ نفر
 ۳ نفر از آنی بگیریم به ادلی ۱۰۰ دلاری و به دومی ۵
 دلاری بگیریم که ۱۰۰ حالت دارد ولی از عدد ۲۰ نفر از آنی بگیریم که همان سه نفر را دیگرین جا به جا کنن ۱۰ حالت داریم

$$P(5, 2) = \frac{5!}{3!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{3 \times 2 \times 1} = 20$$

$$C(5, 2) = \binom{5}{2} = \frac{5!}{2!3!} = \frac{5 \times 4}{1 \times 2} = 10$$

ترکیب

Homework (1)

۱ به چند طریق می توان یک کمیته از میان ۵ دانش آموز و ۴ دانشجو انتخاب کرد، به طوری که در کمیته، ۲ دانش آموز و ۳ دانشجو عضویت داشته باشد؟

$$\binom{5}{2} \times \binom{4}{3} = 10 \times 4 = 40$$

۳۰ (۲)

۲۵ (۱)

۴۰ (۴)

۳۵ (۳)

۲ با ۸ نقطه بر روی یک دایره حداکثر چند مثلث با این نقاط می توان رسم کرد؟

۷۲ (۲)

۱۱۲ (۱)

۲۸ (۴)

۵۶ (۳)

$$\binom{8}{3} = \frac{8 \times 7 \times 6}{1 \times 2 \times 3} = 56$$

۳ سرباز و ۴ افسر به چند طریق می توانند در یک صف قرار بگیرند، به طوری که:

۳ همواره نفر وسط افسر باشد.

۴ ابتدا و انتهای صف افسر باشد.

۵ یکی در میان قرار بگیرند.

۶ به چند طریق می توانیم ۶ نفر را به دو تیم سه نفره تقسیم کنیم؟

۱۲۰ (۲)

۲۰ (۱)

۱۰ (۴)

۱۵ (۳)

از ۶ تا ۳ تا اینی بگیریم به این ترتیب
 از ۳ تا ۳ تا اینی بگیریم به این ترتیب

$$\binom{6}{3} \binom{3}{3} = \frac{6 \times 5 \times 4}{1 \times 2 \times 3} \times 1 = 20$$

۷ در کیسه ای ۳ مهره آبی، ۴ مهره قرمز و ۳ مهره سیاه قرار دارد. به چند طریق می توان ۳ مهره انتخاب کرد، به طوری که حداقل دو مهره سیاه باشد؟

۲۱ (۲)

۲۰ (۱)

۲۴ (۴)

۲۲ (۳)

۸ بر روی محیط یک دایره شش نقطه جدا از هم قرار دارند. با این شش نقطه:

الف چند پاره خط می توان تشکیل داد؟

ب چند مثلث می توان رسم کرد؟

۹ با نقاط شکل زیر چند مثلث می توان رسم کرد؟

باید ۳ نقطه بر یک راست نباشند. به نقطه از بالا و ۲ تا از پایین یا به نقطه از پایین و ۳ نقطه از بالا

$$\binom{7}{2} \times \binom{4}{1} + \binom{7}{1} \times \binom{4}{2} = 96$$

۱۰ در یک آزمون که ۱۲ سؤال دارد، شخصی می‌خواهد به ۶ سؤال پاسخ دهد این کار به چند طریق ممکن است اگر قرار باشد حداقل به ۳ سؤال از ۵ سوال اول پاسخ دهد؟

یا ۳ تا یا ۴ تا یا ۵ تا

(۱) ۴۶۲ ✓
(۲) ۵۷۲
(۳) ۳۴۳
(۴) ۱۹۷

$\binom{5}{3} \binom{7}{3} + \binom{5}{4} \binom{7}{2} + \binom{5}{5} \binom{7}{1} = 462$

سؤال از ۵ تا اول
سؤال از ۷ تا بقیه

۱۱ از بین ۴ گوی سفید، ۲ گوی قرمز و ۵ گوی سبز به چند طریق می‌توان ۳ گوی انتخاب کرد به طوری که در این انتخاب گوی قرمزی وجود نداشته باشد؟

چون قرمز نداریم همه باید ۳ گوی از بقیه انتخاب کرد:

(۱) ۶۲
(۲) ۷۸
(۳) ۸۴
(۴) ۹۶

$\binom{9}{3} = \frac{9 \times 8 \times 7}{1 \times 2 \times 3} = 3 \times 4 \times 7 = 84$

$\binom{5}{4} + \binom{5}{5} = 9$

۱۲ یک اداره دارای ۱۵ عضو است. این اداره دارای ۱ رئیس، ۲ معاون، ۳ کارمند، ۶ کارشناس اداری و ۳ کارشناس حقوقی است. برای تشکیل یک جلسه ۵ نفره که در آن رئیس و دقیقاً یک معاون و یک کارشناس اداری حضور داشته باشند، چند انتخاب وجود دارد؟

(۱) ۱۵۰
(۲) ۱۲۰
(۳) ۱۸۰
(۴) ۹۰

$\binom{2}{1} \binom{2}{1} \binom{3}{1} \binom{6}{1} \binom{3}{1} = 180$

از ۳ تا کارمند
از ۶ تا کارشناس اداری
از ۳ تا کارشناس حقوقی

۱۳ از میان ۸ دهنده سرعت، به چند طریق ممکن است سه نفر مدال‌های طلا، نقره و برنز را کسب کنند؟

(۱) ۵۶
(۲) ۳۳۶
(۳) ۱۰۸
(۴) ۱۶۸

۱۴ از میان ۵ ریاضی‌دان و ۶ فیزیک‌دان و ۳ شیمی‌دان قرار است کمیته‌ای علمی انتخاب شود. به چند طریق می‌توان کمیته‌ای پنج نفره تشکیل داد که از هر رشته حداقل یک عضو در آن باشد؟

(۱) ۴۹۵۰
(۲) ۷۸۰۰
(۳) ۳۵۰۰
(۴) ۴۶۵۰

۱۵ از بین ۴ شیمی‌دان، ۵ ریاضی‌دان و ۶ فیزیک‌دان به چند طریق می‌توان ۶ نفر را انتخاب کرد به طوری که تعداد شیمی‌دانان و ریاضی‌دانان برابر باشد؟

(۱) ۱۵۴۱
(۲) ۲۰۴۱
(۳) ۳۶۸۱
(۴) ۱۲۴۱

۶

در یک مطب ۵ صندلی در یک ردیف قرار دارد. ۷ بیمار هم‌زمان وارد مطب می‌شوند. به چند طریق بیماران می‌توانند روی ۵ صندلی بنشینند، به طوری که دو نفر از آن‌ها نخواهند کنار هم بنشینند؟

- (۱) ۱۵۶۰
(۲) ۱۸۰۰
(۳) ۲۰۴۰
(۴) ۲۲۸۰

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۱

۷

تعداد زیرمجموعه‌های ۴ عضوی مجموعه $\{0, 1, 2, 4, 6, 8, 9\}$ که شامل عدد ۸ باشد، ولی شامل عدد ۴ نباشد، کدام است؟

- (۱) ۱۰
(۲) ۲۰
(۳) ۴۰
(۴) ۵۰

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۴۰۱

۸

در چند زیرمجموعه ۵ عضوی از مجموعه $\{1, 2, 3, \dots, 9\}$ حداقل سه عضو زوج وجود دارد؟

- (۱) ۶۰
(۲) ۵۵
(۳) ۴۵
(۴) ۴۰

کنکور سراسری علوم انسانی خارج از کشور ۱۴۰۱

۹

با ارقام ۱ و ۲ و ۳ و ... و ۹ و ۰ به چند طریق می‌توان یک عدد پنج‌رقمی ساخت به طوری که درست دو رقم آن زوج باشد؟

- (۱) ۶۴۰۰
(۲) ۷۲۰۰
(۳) ۸۴۰۰
(۴) ۹۶۰۰
- فردا ۹ ۷ ۵ ۳ ۱
زوج‌ها ۸ ۶ ۴ ۲*
- جایگاه رقم انتخابی*
- تعداد اعداد ۵ رقمی با ۲ رقم زوج = $\binom{4}{2} \times \binom{5}{3} \times 5! = 6 \times 10 \times 120 = 7200$*
- از ۲ تا ۸
از ۳ تا ۹*

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۴

۱۰

با ارقام متمایز ۱، ۲، ۳، ۴، ...، ۹ می‌توان یک عدد چهاررقمی ساخت، به طوری که فقط یکی از ارقام آن زوج باشد؟

- (۱) ۶۴۰
(۲) ۷۲۰
(۳) ۷۸۰
(۴) ۹۶۰
- جایگاه رقم انتخابی*
- از ۳ تا ۹
انتخاب یک زوج*
- $\binom{4}{1} \times \binom{5}{3} \times 4! = 960$*

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۴ از ۲ تا ۸ و ۳ تا ۹

۱۱

گل‌فروشی از ۸ نوع گل مختلف، به چند طریق می‌تواند دسته گل‌های متمایز درست کند، به طوری که در هر دسته ۴ یا ۵ یا ۶ شاخه مختلف موجود باشد؟

- (۱) ۱۲۶
(۲) ۱۴۰
(۳) ۱۵۴
(۴) ۱۶۸

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

احتمال

{ (پت ۶) (رو ۶) (پت ۴) (رو ۴) (پت ۲) (رو ۲) }

Homework (1)

۱ یک سکه و یک تاس را با هم پرتاب می‌کنیم، تعداد حالت‌هایی که در آن‌ها تاس عدد زوج آمده است، کدام است؟

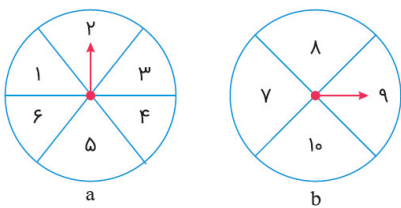
۳ (۲)

۶ (۱) ✓

۱ (۴)

۲ (۳)

۲ تعداد اعضای فضای نمونه چرخاندن دو صفحه عقربه‌دار a و b در شکل زیر کدام است؟



$6 \times 4 = 24$

۴۵ (۱)

۱۲ (۲)

۲۴ (۳)

۱۰ (۴)

۳ خانواده‌ای دارای ۲ فرزند است. تعداد اعضای فضای نمونه‌ای که هر ۲ فرزند در روز شنبه به دنیا آمده باشند، کدام است؟

۴ (۲)

۱۴ (۱)

۴۹ (۴)

۲۱ (۳)

$n(S) = 7 \times 7 = 49$

۴ کدام مورد زیر یک پدیده تصادفی است؟

← نتیجه قبل مشخص باشد

(۱) نتیجه رهاشدن سیب از درخت

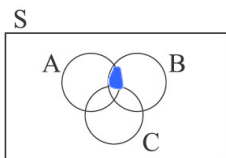
(۲) انتخاب یک مهره از کیسه‌ای حاوی مهره‌های هم‌رنگ

(۳) ✓ جنسیت فرزند اول یک خانواده که هنوز به دنیا نیامده است.

(۴) وجود دانش‌آموزی که سن او بیشتر از ده سال باشد، در کلاس دوازدهم.

۵ برای سه پیشامد A، B و C در فضای S، عبارت مجموعه‌ای پیشامد زیر را نوشته و بر روی نمودار ون با سایه زدن این پیشامد را مشخص کنید.

"پیشامدهای A و B رخ دهند ولی پیشامد C رخ ندهد."



اشتراکات هست

کدام دو پیشامد در پرتاب یک تاس ناسازگارند؟

- (۱) پیشامد فرد آمدن و مربع کامل آمدن
- (۲) پیشامد مربع کامل آمدن و اول آمدن
- (۳) پیشامد زوج آمدن و اول آمدن
- (۴) پیشامد فرد آمدن و اول آمدن

۶

از بین مجموعه اعداد $\{۱۰, ۱۳, ۱۶, ۱۸, ۲۱, ۲۲, ۲۷, ۳۲\}$ سه عدد به تصادف انتخاب می‌کنیم. تعداد اعضای پیشامد اینکه هر سه عدد زوج باشند، کدام است؟

مجموعه از مجموعه A است
انتخاب کنیم

$$A = \{۱۰, ۱۶, ۱۸, ۲۲, ۳۲\}$$

$$n(A) = \binom{۵}{۳} = \frac{۵ \times ۴ \times ۳}{۱ \times ۲ \times ۳} = ۱۰$$

- (۱) ۵
- (۲) ۲۸
- (۳) ۵۶
- (۴) ۱۰

۷

از بین ۴ خودکار قرمز، ۳ خودکار آبی و ۲ خودکار مشکی، ۳ خودکار به تصادف انتخاب می‌کنیم. پیشامد اینکه حداکثر ۲ خودکار قرمز باشد چند عضو دارد؟

$$n(A) = \binom{۵}{۲} \binom{۵}{۱} + \binom{۴}{۱} \binom{۵}{۲} + \binom{۳}{۰} \binom{۵}{۳} = ۱۰ + ۲۰ + ۱۰ = ۴۰$$

- (۱) ۱۶۰
- (۲) ۸۰
- (۳) ۴۵
- (۴) ۷۰

۸

در یک خانواده ۴ فرزندی، احتمال آنکه حداکثر ۲ فرزند، پسر باشند کدام است؟

$$n(S) = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$$

$$n(A) = \binom{۴}{۲} + \binom{۴}{۱} + \binom{۴}{۰} = ۶ + ۴ + ۱ = ۱۱$$

- (۱) $\frac{1}{8}$
- (۲) $\frac{3}{8}$
- (۳) $\frac{11}{16}$
- (۴) $\frac{13}{16}$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{11}{2^4} = \frac{11}{16}$$

۹

از بین تمام کلمات ۵ حرفی متمایز که با حروف کلمه LIKED می‌توان ساخت کلمه‌ای به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال اینکه کلمه KILED انتخاب شده باشد چقدر است؟

- (۱) $\frac{1}{120}$
- (۲) $\frac{5}{120}$
- (۳) $\frac{1}{60}$
- (۴) $\frac{5}{60}$

۱۰

احتمال رخ ندادن پیشامدی $\frac{3}{8}$ و فضای نمونه آن دارای ۶۴ عضو می‌باشد. تعداد اعضای مشاهده شده از وقوع پیشامد چقدر است؟

- (۱) ۶۰
- (۲) ۴۰
- (۳) ۳۰
- (۴) ۵۰

۱۱

از بین رامبد و پوریا و سه نفر از دوستانشان سه نفر را انتخاب می‌کنیم. با چه احتمالی رامبد و پوریا باهم انتخاب نمی‌شوند؟

- (۱) $\frac{3}{5}$
- (۲) $\frac{7}{10}$
- (۳) $\frac{2}{5}$
- (۴) $\frac{1}{2}$

رامبد و پوریا یکی از این دوتا

سه تا از بقیه

$$n(A) = \binom{۲}{۱} \binom{۳}{۲} + \binom{۲}{۰} \binom{۳}{۳} = ۶ + ۱ = ۷$$

$$n(S) = \binom{۵}{۳} = ۱۰$$

$$P(A) = \frac{7}{10}$$

۱۲

هر فرزند به تنهایی می تواند در یکی از ۴ فصل به دنیا بیاید
 احتمال این که هر فرزند در یک فصل به دنیا بیاید
 $n(S) = 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 4^4$
 $P(A) = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ فرزند ها در فصل های مختلف
 خانواده ای دارای ۴ فرزند است. با چه احتمالی حداقل ۲ نفر از آن ها در یک فصل از سال به دنیا آمده اند؟

۲۰

از احتمال متمم می ریم. آنه از کل حالات $\frac{4}{32}$ (۱)
 حالاتی که هر یک تا در یک فصل مختلف $\frac{3}{32}$ (۳)
 هستند را کم کنیم حالات مطلوب شده به دست می آید. $\frac{29}{32}$ (۴)

$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{4 \times 4 \times 4 \times 4} = \frac{3}{32}$ (۲)
 $P(A') = 1 - \frac{3}{32} = \frac{29}{32}$

۲۱ یک جعبه حاوی ۳ مهره قرمز، ۲ مهره سفید و ۴ مهره آبی است. اگر به طور تصادفی ۳ مهره را خارج کنیم، احتمال این که حداکثر ۲ مهره قرمز باشد کدام است؟

۲۲

$\frac{69}{77}$ (۱)
 $\frac{112}{115}$ (۳)
 $\frac{83}{84}$ (۲)
 $\frac{56}{57}$ (۴)

۲۳ ۷ مهره آبی، قرمز، بنفش، سبز، سفید، زرد و سیاه داریم. با چه احتمالی دقیقاً ۳ مهره می توان بین مهره های آبی و قرمز قرار داد؟

۲۴ احتمال رخداد متمم پیشامدی $\frac{3}{7}$ است. اگر این پیشامد دارای ۱۶ عضو باشد، فضای نمونه آن دارای چند عضو است؟

$\frac{1}{7}$ (۱)
 $\frac{5}{7}$ (۳)
 $\frac{3}{7}$ (۲)
 $\frac{2}{7}$ (۴)

۲۵ احتمال این که عدد سه رقمی ساخته شده با ارقام ۲، ۶، ۷، ۳ و ۵ مضرب ۲ نباشد چقدر است؟ (بدون تکرار ارقام)

۲۶ شش کارت داریم که با حروف E, D, A, H, M, R نام گذاری شده اند. با چه احتمالی دقیقاً ۲ کارت می توان بین کارت H و D قرار داد؟

۱۱ (۱)
 ۲۸ (۳)
 ۳۷ (۲)
 ۱۸ (۴)

۲۷ دو تاس را با هم می ریزیم. اگر مجموع آن ها بزرگ تر از ۶ باشد، احتمال آن که فقط یکی از تاس ها زوج باشد کدام است؟

۲۸ احتمال این که عدد سه رقمی ساخته شده با ارقام ۲، ۶، ۷، ۳ و ۵ مضرب ۲ نباشد چقدر است؟ (بدون تکرار ارقام)

$\frac{9}{10}$ (۱)
 $\frac{1}{5}$ (۳)
 $\frac{1}{10}$ (۲)
 $\frac{3}{5}$ (۴)

۲۹ دو تاس را با هم می ریزیم. اگر مجموع آن ها بزرگ تر از ۶ باشد، احتمال آن که فقط یکی از تاس ها زوج باشد کدام است؟

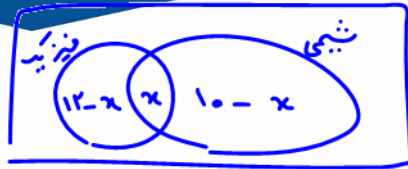
۳۰ شش کارت داریم که با حروف E, D, A, H, M, R نام گذاری شده اند. با چه احتمالی دقیقاً ۲ کارت می توان بین کارت H و D قرار داد؟

$\frac{1}{5}$ (۱)
 $\frac{1}{10}$ (۳)
 $\frac{1}{6}$ (۲)
 $\frac{1}{4}$ (۴)

۳۱ دو تاس را با هم می ریزیم. اگر مجموع آن ها بزرگ تر از ۶ باشد، احتمال آن که فقط یکی از تاس ها زوج باشد کدام است؟

۳۲ احتمال این که عدد سه رقمی ساخته شده با ارقام ۲، ۶، ۷، ۳ و ۵ مضرب ۲ نباشد چقدر است؟ (بدون تکرار ارقام)

$\frac{4}{7}$ (۱)
 $\frac{2}{7}$ (۳)
 $\frac{3}{7}$ (۲)
 $\frac{1}{7}$ (۴)



۲۷

از بین ۱۸ دانش‌آموز یک کلاس که ۱۲ نفر به رشته فیزیک و ۱۰ نفر به رشته شیمی علاقه‌مند هستند، یک نفر به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال اینکه این فرد به هر دو رشته علاقه‌مند باشد کدام است؟

$(12-x) + (x) + (10-x) = 18$
 $x = 2$
 $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{2}{18} = \frac{1}{9}$ (۱)
 $\frac{1}{9}$ (۲)
 $\frac{2}{9}$ (۴) ✓
 $\frac{7}{9}$ (۳)

۲۸

بر روی ۵ کارت یکسان هریک از ارقام ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ نوشته و داخل جعبه قرار داده‌ایم. یک کارت انتخاب و با ثبت شماره آن به داخل جعبه برمی‌گردانیم و دوباره یک کارت دیگر انتخاب می‌کنیم. احتمال اینکه عدد دورقمی حاصل شده مضرب ۵ نباشد، کدام است؟

$n(S) = 5 \times 5 = 25$ کل حالات
 $n(A) = \{15, 25, 35, 45, 55\}$
 $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}$ احتمال مضرب ۵ بودن
 $1 - \frac{5}{25} = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}$ احتمال مضرب ۵ نبودن
 $\frac{6}{25}$ (۲)
 $\frac{7}{25}$ (۴) ✓
 $\frac{17}{25}$ (۱)
 $\frac{20}{25}$ (۳)

۲۹

از جعبه‌ای که شامل ۴ خودکار قرمز و ۳ خودکار آبی است، ۳ خودکار به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال اینکه این ۳ خودکار هم‌رنگ نباشند کدام است؟

$3 + 4 = 7$ خودکار
 $\binom{7}{3} = \frac{7 \times 6 \times 5}{1 \times 2 \times 3} = 35$ کل حالات
 $\binom{4}{3} + \binom{3}{3} = 4 + 1 = 5$ حالات هم‌رنگ بودن
 $1 - \frac{5}{35} = \frac{30}{35} = \frac{6}{7}$ احتمال هم‌رنگ نبودن
 $\frac{1}{9}$ (۱)
 $\frac{1}{7}$ (۲)
 $\frac{1}{9}$ (۳)
 $\frac{6}{7}$ (۴)

۳۰

با جایگشت ارقام عدد ۲۳۴۴۳، اعداد ۵ رقمی نوشته‌ایم، یکی از آن‌ها را انتخاب می‌کنیم، با چه احتمالی ارقام شبیه به هم کنار هم قرار می‌گیرند؟

کل حالات اعداد ۵ رقمی
 $n(S) = \frac{5!}{2!2!} = \frac{120}{4} = 30$
 $n(A) = 3! = 6$
 $P(A) = \frac{6}{30} = \frac{1}{5} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$
 $\frac{1}{5}$ (۱)
 $\frac{1}{3}$ (۲)
 $\frac{1}{10}$ (۳)
 $\frac{1}{5}$ (۴)

احتمال شرطی

Homework (1)

کارخانه‌ای به هنگام نصب دستگاه‌های جدید به احتمال $\frac{4}{5}$ به متخصصین جدید و به احتمال $\frac{3}{5}$ به کارگران جدید و به احتمال $\frac{5}{5}$ به متخصصین جدید یا کارگران جدید نیاز دارد. اگر این کارخانه به متخصصین جدید نیاز داشته باشد با کدام احتمال به کارگران جدید نیاز دارد؟

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$.5 = .4 + .3 - n(A \cap B)$$

$$n(A \cap B) = .2$$

(۲) $\frac{1}{2}$
(۴) $\frac{2}{5}$

به شرط A

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{.2}{.4} = \frac{1}{2}$$

(۱) $\frac{3}{35}$
(۳) $\frac{3}{4}$

اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند، به طوری که $A \subseteq B$ ، $P(A) = \frac{1}{4}$ و $P(B) = \frac{4}{5}$ ، آنگاه $P(B|A')$ کدام است؟

$$P(B|A') = \frac{P(B \cap A')}{P(A')} = \frac{P(B) - P(A)}{1 - P(A)} = \frac{\frac{4}{5} - \frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\frac{16-5}{20}}{\frac{3}{4}} = \frac{11}{15}$$

(۲) $\frac{10}{17}$
(۴) $\frac{7}{15}$

(۱) $\frac{11}{15}$
(۳) $\frac{2}{3}$

در یک خانواده سه فرزندی، یکی از فرزندان پسر است با چه احتمالی دو فرزند دیگر دختر است؟ حالات رضی:

$$\{(D, D, D), (D, D, G), (D, G, D), (D, G, G), (G, D, D), (G, D, G), (G, G, D), (G, G, G)\}$$

(۲) $\frac{3}{7}$
(۴) $\frac{2}{3}$

$n(S)$ کپی شود حالت
رضی صفتی شود
 $n(S_{new}) = n(S) - 1 = 8 - 1 = 7$

(۱) $\frac{3}{8}$
(۳) $\frac{1}{2}$

احتمال باران آمدن در منطقه‌ای $\frac{1}{6}$ و احتمال تصادف در آن جا $\frac{1}{5}$ و احتمال بارش باران و تصادف باهم $\frac{1}{12}$ است. اگر امروز باران بیاید، چقدر احتمال تصادف هست؟

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{6}} = \frac{1}{2}$$

(۲) $\frac{1}{30}$
(۴) $\frac{1}{2}$

(۱) $\frac{1}{12}$
(۳) $\frac{1}{3}$

خانواده‌ای چهار فرزند دارند، احتمال آنکه تعداد پسرها بیشتر از تعداد دخترها باشد، چند برابر احتمال آنکه تعداد پسرها و دخترها برابر باشد، است؟

هر ۴ تا پسر از ۴ بچه ۳ تا پسر

$$P_1 = \frac{\binom{4}{3} + \binom{4}{4}}{2^4} = \frac{4+1}{16} = \frac{5}{16}$$

یک پسر یک دختر یا ۳ پسر یا ۴ پسر

(۲) $\frac{5}{16}$
(۴) $\frac{3}{16}$

(۱) $\frac{6}{15}$
(۳) $\frac{2}{13}$

احتمال پسر دوتو برابر

$$P_2 = \frac{\binom{4}{2}}{2^4} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{\frac{5}{16}}{\frac{3}{8}} = \frac{5}{6}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \rightarrow P(A \cap B) = \dots$$

اگر $P(A) = 0/3$, $P(B) = 0/4$ و $P(A \cup B) = 0/6$ باشد، $P(A|B)$ کدام است؟ $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1/4}{2/4} = \frac{1}{2}$

- (۱) 0/15
- (۲) 0/25 ✓
- (۳) 0/35
- (۴) 0/45

در جعبه‌ای ۶ مهره سفید و ۹ مهره سیاه موجود است. دو مهره به‌طور متوالی و بدون جایگذاری از آن بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال بدون توجه به اولین مهره، دومین مهره خارج شده سفید است؟ **ادبین هر دو نسبت داتی تیری اولت تاردر:**

$$P(A) = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$$

- (۱) $\frac{5}{14}$
- (۲) $\frac{3}{7}$
- (۳) $\frac{2}{5}$
- (۴) $\frac{3}{5}$

فرض کنید A و B دو پیشامد باشند به طوری که $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{3}$ و $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$ آنگاه $P(B|A')$ کدام است؟

$$\frac{P(B \cap A') = P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}}{P(A') = 1 - P(A) = \frac{1}{2}} = \frac{1}{6}$$



- (۱) $\frac{1}{12}$
- (۲) $\frac{1}{6}$
- (۳) $\frac{1}{3}$
- (۴) $\frac{2}{3}$

در پرتاب دو تاس، اگر تفاضل اعداد دو تاس بیشتر از ۳ باشد، چقدر احتمال دارد که یکی از اعداد ۶ باشد؟

مجموعه نتایج: $S = \{(1,5), (1,6), (2,6), (5,1), (6,1), (6,2)\}$

- (۱) $\frac{1}{9}$
- (۲) $\frac{2}{3}$ ✓
- (۳) $\frac{1}{3}$
- (۴) $\frac{2}{9}$

درون جعبه‌ای ۵ مهره آبی و ۴ مهره زرد وجود دارد. مهره‌های داخل جعبه را یکی یکی و بدون جایگذاری خارج می‌کنیم، احتمال آن که اولین مهره زرد خارج شده مهره چهارم باشد، چقدر است؟ **یعنی ۳ مهره اول آبی و مهره چهارم زرد باشد:**

$$P(A) = \frac{5}{9} \times \frac{4}{8} \times \frac{3}{7} \times \frac{4}{6} = \frac{5}{21}$$

- (۱) $\frac{5}{63}$
- (۲) $\frac{4}{63}$
- (۳) $\frac{1}{21}$
- (۴) $\frac{2}{21}$

در پرتاب سه تاس، احتمال آن که اعداد رو شده ۶ نباشد چقدر است؟

تاسها مستقل اند. $P(A) = \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{125}{216}$

- (۱) $\frac{5}{6}$
- (۲) $\frac{125}{216}$
- (۳) $\frac{215}{216}$
- (۴) $\frac{1}{6}$

دومی دختر و اولی دختر = (۲ دختر) $\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$

- (۱) $\frac{1}{4}$
- (۲) $\frac{1}{16}$ ✓
- (۳) $\frac{2}{3}$
- (۴) $\frac{3}{8}$

فرزند دوم خانواده‌ای پسر است. با کدام احتمال فرزند اول و سوم این خانواده دختر هستند؟

۱۳

$$P(A) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

(۱) $\frac{1}{4}$
 (۲) $\frac{1}{2}$
 (۳) $\frac{1}{8}$
 (۴) $\frac{2}{3}$

یک تاس را آنقدر پرتاب می‌کنیم تا برای اولین بار مضرب ۳ ظاهر شود. با کدام احتمال، حداکثر در پرتاب سوم این نتیجه حاصل می‌شود؟

۱۴

$$P = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{19}{27}$$

(۱) $\frac{10}{27}$
 (۲) $\frac{5}{9}$
 (۳) $\frac{16}{27}$
 (۴) $\frac{19}{27}$

احتمال برد تیم A در یک مسابقه برابر $\frac{2}{3}$ است. احتمال اینکه این تیم در ۵ مسابقه دقیقاً ۳ بار پیروز شود، چقدر است؟

۱۵

$$P(A) = \binom{5}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{10}{27}$$

(۱) $\frac{5}{16}$
 (۲) $\frac{20}{81}$
 (۳) $\frac{80}{243}$
 (۴) $\frac{10}{27}$

سه تاس را باهم پرتاب می‌کنیم، با کدام احتمال اعداد رو شده مضرب ۳ هستند؟

۱۶

$$P(A) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{27}$$

(۱) $\frac{8}{9}$
 (۲) $\frac{1}{9}$
 (۳) $\frac{8}{27}$
 (۴) $\frac{1}{27}$

ویدا به احتمال $\frac{7}{10}$ و مریم به احتمال $\frac{8}{10}$ در کنکور قبول می‌شوند. با چه احتمالی فقط یکی از آن‌ها قبول می‌شوند؟

۱۷

$$P(\text{فقط یکی}) = \binom{2}{1} \left(\frac{7}{10}\right) \left(\frac{2}{10}\right) + \binom{2}{1} \left(\frac{2}{10}\right) \left(\frac{8}{10}\right) = 0.14 + 0.28 = 0.42$$

(۱) $\frac{0}{24}$
 (۲) $\frac{0}{38}$
 (۳) $\frac{0}{1}$
 (۴) $\frac{0}{14}$

در خانواده‌ای با ۵ فرزند، با چه احتمالی فقط ۲ فرزند دختر است؟

۱۸

$$\frac{\binom{5}{2}}{2^5} = \frac{10}{32} = \frac{5}{16}$$

(۱) $\frac{3}{16}$
 (۲) $\frac{5}{16}$
 (۳) $\frac{3}{8}$
 (۴) $\frac{5}{8}$

احتمال گل شدن هر ضربه پنالتی توسط یک بازیکن $\frac{8}{10}$ است. اگر او ۴ پنالتی بزند، احتمال اینکه فقط ضربه دوم گل شود، کدام است؟

۱۹

$$0.2 \times 0.8 \times 0.2 \times 0.2 = 0.0128$$

(۱) $\frac{0}{48}$
 (۲) $\frac{0}{16}$
 (۳) $\frac{0}{2}$
 (۴) $\frac{0}{8}$

۲۰ یک تاس را آنقدر پرتاب می‌کنیم تا برای اولین بار مضرب ۳ ظاهر شود. با کدام احتمال، حداکثر در پرتاب سوم این نتیجه حاصل می‌شود؟

$$P = \frac{1}{3} + \left(\frac{2}{3} \times \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3}\right) = \frac{19}{27}$$

اولی مرتبه ۳
 ادبی نه
 ادبی و ادبی نه
 ادبی و ادبی و ادبی نه

- $\frac{5}{9}$ (۲)
- $\frac{19}{27}$ (۴)

$A = \{3, 2\}$
 $P(A) = \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

- $\frac{10}{27}$ (۱)
- $\frac{16}{27}$ (۳)

۲۱ در پرتاب ۵ سکه چقدر احتمال دارد حداقل ۴ بار "پشت" ظاهر شود؟

- $\frac{5}{16}$ (۲)
- $\frac{9}{16}$ (۴)

- $\frac{3}{16}$ (۱) ✓
- $\frac{7}{16}$ (۳)

با ۴ بار پشت یا ۵ بار پشت

$$\frac{\binom{5}{5}}{2^5=32} + \frac{\binom{5}{4}}{2^5=32} = \frac{1}{32} + \frac{5}{32} = \frac{6}{32} = \frac{3}{16}$$

آمار

<p>میانگین: $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$</p> <p>میانه: داده وسطی با Q_2 یا چارک دوم</p> <p>مد (نما): اونی که از بقیه بیشتر تکرار شده و داده‌ای با بیشترین فراوانی</p> <p>دامنه تغییرات: $R = \max - \min$</p> <p>انحراف از میانگین: $x_i - \bar{x}$ و می‌دانیم مجموع انحراف از میانگین‌ها صفر است. $\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) = 0$</p> <p>واریانس یا پراش: میانگین مربعات انحرافات از میانگین است.</p> <p>ضریب تغییرات: $C.V = \frac{\sigma}{\bar{x}}$</p>	<p>شاخص مرکزی: داده‌ها حول چه عددی متمرکز و متجمع هستند</p> <p>شاخص آماری</p> <p>شاخص پراکندگی: برای بررسی میزان تجمع و تمرکز بقیه داده‌ها حول \bar{x} میانگین</p>
---	---

انحراف معیار $\sigma = S = V \Rightarrow$ داده‌ها برابر واریانس ≥ 0 $\sigma^2 = S^2 = V^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}$

تعریف: نمرات یک نفر ۲۰ و ۱۶ شده، میانگین نمرات و تعبیر آن؟

$$\bar{x} = \frac{20 + 16}{2} = \frac{36}{2} = 18$$

میانگین $\bar{x} = 18$ میانگین جایی است که جمع اعداد با کسرات همزه.

تعریف: در یک کلاس، ۳ نفر ۲۰ شده‌اند. میانگین یا معدل نمرات کلاس ۱۹ است. **نرخ چارک دوم چند شده است؟**

$$\sum_{i=1}^4 (x_i - \bar{x}) = 0$$

$$(20 - 19) + (20 - 19) + (20 - 19) + (Q - 19) = 0 \Rightarrow Q = 17$$

میانه: \bar{x} : چارک دوم یا Q_2 :

اگر داده‌ها را به ترتیب از کوچک به بزرگ مرتب کرده و تکراری‌ها را هم بنویسیم داده وسط (در تعداد فرد: وسطی و در تعداد زوج میانگین دوتای وسطی) میانه است که نیمی از داده‌ها بالای آن و نیم دیگر زیر آن هستند. ۵۰٪ بالاتر و ۵۰٪ پایین تر یعنی $\frac{2}{4}$ داده‌ها بالاتر، $\frac{2}{4}$ کم‌تر از چارک دوم‌اند.

تعریف: میانه داده‌های زیر را بیابید.

۱۱, ۱۹, ۱۳, ۲, ۵, ۹, ۱۹, ۱۲, ۱۹, ۲, ۳/۵, ۴

۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۱۱ ۱۳ ۱۷ ۱۹ ۱۹ ۱۹

$Q_1 = \frac{2+3/5}{2} = 2,75$ $Q_3 = \frac{17+19}{2} = 18$

$\tilde{x} = \frac{5+11}{2} = 8$

میانه = چارک دوم = Q_2

تعریف: برای دو دسته (الف) و (ب) از داده‌های زیر واریانس و انحراف معیار را حساب و با هم مقایسه کنید.

الف) ۱, ۲, ۳, ۴, ۵ → $S^2 = 2$

ب) ۲/۵, ۲/۷۵, ۳, ۳/۲۵, ۳/۵ → $S^2 = 2$

مراحل در سبب واریانس:

۱- محاسبه میانگین

۲- محاسبه $x_i - \bar{x}$

۳- محاسبه $(x_i - \bar{x})^2$

۴- $\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}$

نکته: واریانس ۵ عدد سوالی (۵) است
واریانس ۷ عدد سوالی (۷) است

نکته: واریانس در داده‌هایی که به دنباله حسابی است

قدرت حسابی $S^2 = \frac{d^2}{12} (n^2 - 1)$

هرچه واریانس (یا انحراف معیار) کم‌تر باشد یعنی داده‌ها به \bar{x} نزدیک‌تر و فشرده‌ترند.

هرچه واریانس کم‌تر یعنی داده‌ها یکدست‌تر هستند. واریانس صفر حاکی از داده‌های کاملاً یکسان و برابر است.

برای بررسی بهتر بودن گروه‌ها اگر \bar{x} ها برابر باشند (مثل مثال بالا) هر دسته که S^2 یا S کم‌تر بهتر اگر \bar{x} فرق داشتند هر دسته ضریب

تغییراتش کم‌تر بهتر. $\frac{\sigma}{\bar{x}} = C.V$

نکات:

(۱) وقتی داده‌ها به دنباله حسابی (عددی) با قدرنسبت ثابت d هستند اگر تعدادشان فرد باشد، داده وسطی \bar{x} است.

(۲) در داده‌هایی که به دنباله حسابی اند با تعداد n و قدرنسبت d .

$$\bar{x} = \frac{S_n}{n} = \frac{\frac{n}{2}(a_1 + a_n)}{n} = \frac{\frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)}{n}$$

S_n : جمع جملات دنباله حسابی

n : تعداد

a_1 : جمله اول

a_n : جمله آخر

نصف جمع اولی و آخری $\bar{x} = \frac{a_1 + a_n}{2}$ $\bar{x} = \frac{1}{2}(2a_1 + (n-1)d)$

(۳) وقتی داده‌ها دنباله حسابی با قدرنسبت d باشند واریانس از دستور $S^2 = \sigma^2 = V^2 = \frac{d^2}{12}(n^2 - 1)$ به دست می‌آید.

۴) واریانس ۵ داده متوالی (پشت هم با $d = 1$) برابر ۲ و واریانس ۷ داده متوالی برابر ۴ است.
 ۵) در داده‌های برابر میانگین، میانه و سه برابر یکی از داده‌هاست ولی واریانس، انحراف معیار، ضریب تغییرات و دامنه تغییرات صفر است، چون همگی برابرند.
 ۶) واحد واریانس مربع واحد داده‌هاست ولی واحد انحراف معیار همان واحد داده‌هاست.

داده‌های دستکاری شده:

$$x_i \rightarrow ax_i + b$$

$$\bar{x}_{\text{جدید}} = a\bar{x}_{\text{قدیم}} + b$$

هر بلایی سر x_i ها (داده‌ها) بیاوریم سر میانگین و میانه و حد هم می‌آید یعنی:

اما:

$$\begin{cases} R_{\text{جدید}} = aR_{\text{قدیم}} \\ S_{\text{جدید}}^2 = a^2 S_{\text{قدیم}}^2 \\ S_{\text{جدید}} = |a| S_{\text{قدیم}} \end{cases}$$

مثلاً اگر داده‌هایی را در ۲- ضرب و با عدد ۳ جمع کنیم:

$$\bar{x}_{\text{جدید}} = -2\bar{x}_{\text{قدیم}} + 3$$

$$S_{\text{جدید}}^2 = (-2)^2 S_{\text{قدیم}}^2 + 4S_{\text{قدیم}}^2$$

$$S_{\text{جدید}} = |-2| S_{\text{قدیم}} = 2S_{\text{قدیم}}$$

تمرین: در یک کلاس با واریانس ۱۰۰ داده‌ها را دو برابر کرده و از همه ۳ واحد کسر می‌کنیم. واریانس جدید؟

$$\begin{aligned} & \downarrow \\ & 2x_i - 3 \\ & S_{\text{جدید}}^2 = (-2)^2 (100) = 400 \end{aligned}$$

تمرین: در یک کلاس با واریانس نمرات ۱۰۰ به هر نفر ۱/۰ نمره خودش را اضافه می‌کنیم. واریانس جدید؟ **۱۲۱**

$$x_i + 0.1x_i = 1.1x_i$$

$$S_{\text{جدید}}^2 = (1.1)^2 (100) = 121$$

تابع نمایی و لگاریتمی

معرفی تابع نمایی و لگاریتمی

$$\log_b x = y \Leftrightarrow b^y = x$$

=

↙ ↘

به توان

تعریف لگاریتم:

می بینیم که $y = f(x) = \log_b x$ و x را بر حسب y حساب کنیم $x = b^y$ و جای x و y را عوض کنیم، تابع وارون به دست می آید. یعنی:

$$y = b^x = f^{-1}(x)$$

تابع لگاریتمی، تابع نمایی وارون یکدیگرند.

دامنه تابع لگاریتمی: در تابع $y = \log_b u$ باید: جلوی مثبت و زیرش مثبت و زیرش یک نشه‌ها!

$$(u > 0) \cap (b > 0) \cap (b \neq 1) \rightarrow \text{اشتراک}$$

b:base پایه

$$\begin{cases} x - x^2 > 0 \\ x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x > x^2 \\ 2 > 1 \times 1 \end{cases}$$

$$x \in (0, 1) - \{1\} = (0, 1) \cup (1, 2)$$

تمرین: تابع $y = \log_x (4 - x^2)$ برای کدام x ها تعریف شده است؟

تمرین: عدد ۸ چه توانی از ۲ است؟ ۳

$$\log_2 8 = 3 \leftrightarrow 2^3 = 8$$

$$\log_{10} 0.001 = -3 \quad \log_{10} 0.1 = -2 \quad \log_{10} 1 = -1 \quad \log 1 = 0$$

دقت: در لگاریتم پایه ۱۰ نوشته نمی شود.

$$\log 10 = 1 \quad \log 100 = 2 \quad \log 1000 = 3 \quad \log 10000 = 4$$

if $A > 1$ $[\log A] = A$ - تعداد ارقام

نکته:

$$[\log 637] = 3 - 1 = 2$$

۲/...

تمرین:

$$[\log A = 2, 37] = 2 - 1 = 1$$

تعداد ارقام A = ۲ + ۱

تمرین: اگر $\log A = 2/37$ باشد، عدد A چند رقمی است؟ ۳ رقمی

۱- (تعداد صفرهای بعد از ممیز قبل از اولین رقم غیرصفر) $[\log A] = -$ if $0 < A < 1$

نکته:

$[\log 0.00902] = -3 - 1 = -4$

تقرین:

$\log_b b = 1$ $\log_b 1 = 0$

قوانین لگاریتم:

قوانین

مثال‌ها

۱) $\log_k abc = \log_k a + \log_k b + \log_k c$

$\log_3 56 = \log_3 7(8) = \log_3 7 + \log_3 8$

۲) $\log_k \frac{a}{b} = \log_k a - \log_k b$

$\log 5 = \log \frac{10}{2} = \log 10 - \log 2 = 1 - \log 2 = 0.7$

۴) $\log_b a^n = n \log_b a$

$\log_2 128 = \log_2 2^7 = 7 \log_2 2 = 7$

۵) $\log_{b^m} a^n = \frac{n}{m} \log_b a$

$\log_{\frac{1}{10.24}} 512 = \log_{10.24} 512 = -\frac{9}{10} \log_{10} 2 = -\frac{9}{10}$

$\log_b a = \log_{b^r} a^r = \log_{\sqrt{b}} \sqrt{a} = \log_{\frac{1}{b}} \frac{1}{a}$

۶) $\log_b b = 1$

$\log_3 81 = \log_3 3^4 = 4(\log_3 3) = 4$

۷) $\log_b 1 = 0$

$\log(\tan 1^\circ \times \tan 2^\circ \times \dots \times \tan 45^\circ \times \dots \times \frac{\tan 88^\circ}{\cot 2^\circ} \times \frac{\tan 89^\circ}{\cot 1^\circ}) = \log 1 = 0$

۸) $a^{\log_b x} = x^{\log_b a}$

$\log_6 3 = 3 \log_6 5$

۹) $b^{\log_b x} = x^{\log_b b} = x$

$\log_5 3 = 3 \log_5 5 = 3$

تغییر مبنای ۱۰) $\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$

$\log_b a \times \log_a b = \frac{\log_{10} a}{\log_{10} b} \times \frac{\log_{10} b}{\log_{10} a} = 1 \Rightarrow \log_b a = \frac{1}{\log_a b}$

سؤال: اگر $a = \log_2 5 > 1$ ، $a + \frac{1}{a} = M$ ؟ M صحیح است. $M = \log_2 5 + \log_2 \frac{1}{5}$

چون $a > 1$ ، $a + \frac{1}{a} > 2$ پس $M = \log_2 5 + \log_2 \frac{1}{5} > 2$ ، عبارت $M \neq 2$ زیرا $\log_2 5 \neq 1$

سؤال: اگر $a = \log_2 5 > 1$ ، $a + \frac{1}{a} < 2$ ؟ $M = \log_2 5 + \log_2 \frac{1}{5} < 2$ ، $M \neq 2$ ، $a = \log_2 5 \neq 1$

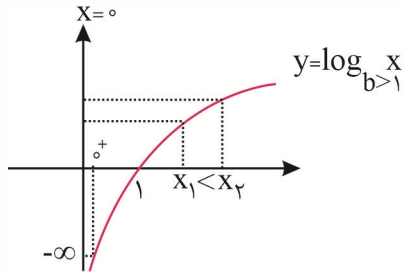
۱۵۴۵

نمودار $y = \log_b x$

دامنه: $x > 0$ باید $b > 0, b \neq 1$ یا $0 < b < 1$

$\log_b 1 = 0$ خط $x = 0$ مجانب قائم

ت.ن = صفر \log هر دو تابع در $x > 0$ رسم می‌شوند.



$\log_{>1}^+ = -\infty$

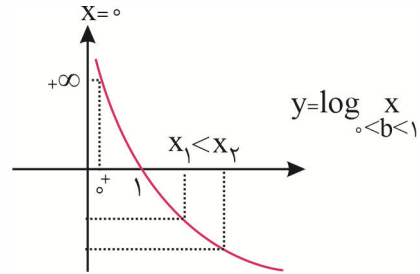
اکید صعودی

$x_1 < x_2$

$\log_b x_1 < \log_b x_2$

$\log_6 5 > 0$

$\log_{6/5} 5 < 0$



$\log_{<1}^+ = +\infty$

اکید نزولی

$x_1 < x_2$

$\log_b x_1 > \log_b x_2$

$\log_{1/6} 5 < 0$

$\log_{1/6} 5/2 > 0$

نکته: در $\log_{\circ} \circ$ اگر هر دو \circ بیشتر از یک یا هر دو \circ بین صفر و یک باشند، حاصل مثبت است:

$\log_6 5 > 0$

$\log_{6/5} 5 > 0$

$\log_{1/6} 5 < 0$

$\log_{6/5} 5 < 0$

اما اگر یکی از \circ ها بیشتر از یک و دیگری بین صفر و یک باشند، حاصل منفی است:

تعریف: اگر $A = \log_{|\cos x|} 1$ باشد، آن‌گاه:

$A \leq 0$ (۴)

$A < 0$ (۳)

$A > 0$ (۲)

$A \geq 0$ (۱)

بی دایم: $-1 \leq \cos x \leq 1$

$0 \leq |\cos x| \leq 1$

$\frac{1}{|\cos x|} \geq 1$

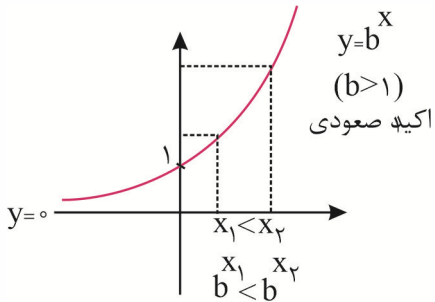
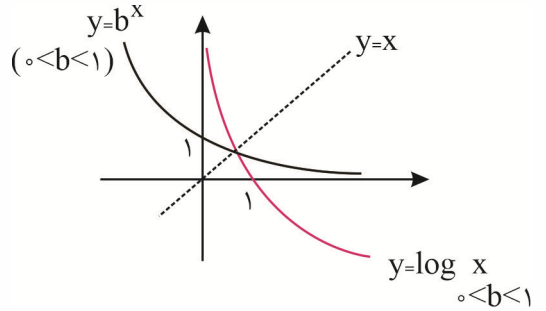
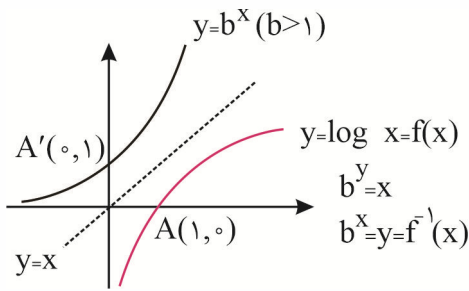
$\log_{|\cos x|} \frac{1}{|\cos x|} \geq 1$

کرنه‌نیک $A \geq 0$

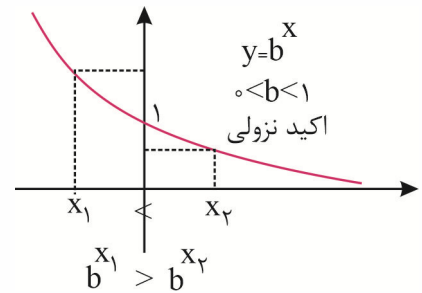
تعریف تابع نمایی: متغیر آن یا x در نما (توان) است. $y = b^x$ باید $b > 0$ و $b \neq 1$ اگر $0 < b < 1$ باشد اکید نزولی و برای $b > 1$ اکید صعودی است.

نمودار تابع نمایی $y = b^x$:

$b \neq 1$ و $b > 0$ پس یا $0 < b < 1$ یا $b > 1$ است زیرا $y = (b=1)^x = 1$ و تابع ثابت است. می‌دانیم تابع نمایی وارون تابع لگاریتمی است پس باید قرینه آن نسبت به نیمساز ناحیه او لو سوم یعنی خط $y = x$ باشد:



خط $y = 0$ مجانب افقی
 $f(0) = b^0 = 1$
 ارزش تابع مثبت و بالای محور x هاست
 برد هر دو تابع $y > 0$



(ریاضی خارج ۱۴۰۰)

تمرین: اگر $[a, b]$ برد تابع $f(x) = 2 - \sqrt{5 \sin^2 x - 1}$ باشد، $a + b$ کدام است؟

$\frac{5}{4}$ (۴)

$\frac{3}{4}$ (۳)

$\frac{1}{2}$ (۲)

$\frac{1}{4}$ (۱)

بی‌دایره $-1 \leq \sin x \leq 1$

$0 \leq \sin^2 x \leq 1$

$0 \leq 5 \sin^2 x \leq 5$

$-1 \leq 5 \sin^2 x - 1 \leq 4$

ارزیال نه به زوج حد اقل منینه $2 = \sqrt{4} \leq \sqrt{5 \sin^2 x - 1} \leq \sqrt{4} = 2$

$2 \geq -\sqrt{5 \sin^2 x - 1} \geq -2$

$\alpha = 2 - 2 = 0 \leq y = 2 - \sqrt{5 \sin^2 x - 1} \leq 2 = 1 = b$

$a + b = 0 + 2 = 2 = \frac{5}{4}$

نکته:

$$\begin{cases} 0 \leq \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \leq 1 \\ -1 \leq \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \leq 1 \end{cases}$$

(تقریبی داخل ۱۴۰۱)

تعریف: تابع $f(x) = a + b(\frac{1}{r})^x$ از میدا عبور می کند. اگر $f^{-1}(-1) = -1$ باشد، حاصل $a - b$ کدام است؟

۲ (۴) $a - b = 1 - (-1) = 2$
 ۲ (۳) $A'(-1, -1) \in f^{-1}$
 ۲ (۲) $(0, 0) \in f^{-1}$
 ۱ (صفر) $f(0) = a + b(\frac{1}{r})^0 = 0$
 $\alpha + b = 0$
 $\boxed{a = -b}$
 $f(-1) = a + b(\frac{1}{r})^{-1} = -1$
 $\boxed{a + rb = -1}$
 $-b + rb = -1 \rightarrow \boxed{b = -1}$ $a = -b = 1$

تعریف: نمودار تابع $f(x) = A(2)^{Bx}$ و خط به معادله $4y = 5x$ در دو نقطه به طول های ۲ و ۴ متقاطع اند. مقدار $f^{-1}(10)$ کدام است؟

(ریاضی خارج ۹۵)

۸ (۴) $f^{-1}(10, \alpha)$
 $f(\alpha, 10)$
 $f(x) = A(2)^{Bx}$
 $f(x) = \frac{10}{2^{\alpha}}$
 $10 = \frac{10}{2^{\alpha}}$
 $2^{\alpha} = 1 \rightarrow \alpha = 0$
 $2^{\alpha} = 2^{\alpha} \rightarrow x = 7$
 ۶ (۳) $y = \frac{5}{4}x$
 $A(2, \frac{5}{4})$
 $B(4, 5)$
 $f(2) = A(2)^{2B} = \frac{5}{4}$
 $f(4) = A(2)^{4B} = 5$
 $\frac{f(2)}{f(4)} = \frac{2^{2B}}{2^{4B}} = \frac{1}{2} \rightarrow 2^{2B-4B} = \frac{1}{2}$
 $2^{-2B} = 2^{-1} \rightarrow -2B = -1$
 $B = \frac{1}{2}$
 $A(2)^{2B} = \frac{5}{4}$
 $A = \frac{5}{4}$

(تقریبی خارج ۹۷)

تعریف: کدام تابع زیر با $y = \log \frac{x-2}{x}$ برابر است؟

۲ $\log \frac{x^2-4}{x^2+2x}$ (۲)
 ۱ $\log(x-2) - \log x$ (۱)
 دامنه: $(2, +\infty)$
 گزینه ۱: دامنه برابر است. دامنه ها برابر است.
 گزینه ۲: ضابطه برابر است. ضابطه ها برابر است.
 گزینه ۳: ضابطه برابر است. ضابطه ها برابر است.
 گزینه ۴: ضابطه برابر است. ضابطه ها برابر است.
 منفی

$D_f = D_g = (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$
 ضابطه ها برابر نیستند.
 $\frac{1}{r} \log \frac{x-2}{x} = \log \left(\frac{x-2}{x}\right)^{\frac{1}{r}} = \log \sqrt[r]{\frac{x-2}{x}}$

$D: (-\infty, 2) \cup (-2, 0) \cup (2, +\infty)$

(ریاضی خارج ۱۴۰۰ با کمی تغییر)

تمرین: اگر برد $f(x) = \log_2 \left(\frac{1}{12 + \sqrt{|x|} - |x|} \right) - 1$ برابر $\{\log_2 3 + 1\}$ باشد، دامنه f کدام است؟

- (۱) $(0, 2)$ (۲) $(0, 2)$ (۳) $(0, 1)$ (۴) $[0, 1)$

باید جدولی که ریتم \oplus باشد:

$$\sqrt{|x|} - 1 < 0 \rightarrow \sqrt{|x|} < 1 \rightarrow |x| < 1 \rightarrow x < 1$$

$$12 + \sqrt{|x|} - |x| > 0 \rightarrow \sqrt{|x|} - |x| > -12$$

چون $|x|$ می بینیم \oplus دامنه جدولی ریتم بینیم کی جواب $\log_2 3 + 1$ می شود:

$$\begin{aligned} x < 1 &\rightarrow [x] = 0 \rightarrow \log_2 \left(\frac{1}{12 + \sqrt{0} - 0} \right) - 1 = \log_2 \left(\frac{1}{12} \right) - 1 = \log_2 \left(\frac{1}{12} \right) - \log_2 2 = \log_2 \left(\frac{1}{12 \cdot 2} \right) = \log_2 \left(\frac{1}{24} \right) \\ x < 2 &\rightarrow [x] = 1 \rightarrow \log_2 \left(\frac{1}{12 + \sqrt{1} - 1} \right) - 1 = \log_2 \left(\frac{1}{12 + 1 - 1} \right) - 1 = \log_2 \left(\frac{1}{12} \right) - 1 = \log_2 \left(\frac{1}{12} \right) - \log_2 2 = \log_2 \left(\frac{1}{24} \right) \\ x < 3 &\rightarrow [x] = 2 \rightarrow \log_2 \left(\frac{1}{12 + \sqrt{4} - 4} \right) - 1 = \log_2 \left(\frac{1}{12 + 2 - 4} \right) - 1 = \log_2 \left(\frac{1}{10} \right) - 1 = \log_2 \left(\frac{1}{10} \right) - \log_2 2 = \log_2 \left(\frac{1}{20} \right) \end{aligned}$$

تمرین: اگر $\log 2 \approx 0.3$ و $\log 3 \approx 0.4$ باشد، اختلاف ریشه های معادله $(\log \frac{5}{3})x^2 + (\log 9)x - \log 15 = 0$ چه قدر است؟

(تقریبی خارج ۱۴۰۲)

- (۱) $\frac{26}{3}$ (۲) $\frac{14}{3}$ (۳) $\frac{14}{11}$ (۴) $\frac{26}{11}$

$$\log(9=3^2) = 2 \log 3 = 2(0.4) = 0.8$$

$$\log 15 = \log 3(5) = \log 3 + \log 5 = 0.4 + 0.7 = 1.1$$

$$\log \frac{5}{3} = \log 5 - \log 3 = 0.7 - 0.4 = 0.3$$

$$\begin{aligned} (\log \frac{5}{3})x^2 + (\log 9)x - \log 15 &= 0 \\ 0.3x^2 + 0.8x - 1.1 &= 0 \end{aligned}$$

$$x_1 = 1, \quad x_2 = \frac{-0.8 - 1.1}{0.3} = -\frac{1.9}{0.3} = -\frac{19}{3}$$

$$|x_2 - x_1| = \left| -\frac{19}{3} - 1 \right| = \left| -\frac{22}{3} \right| = \frac{22}{3}$$

تمرین: اگر $A = \left\{ \frac{1}{\sqrt{\log_8 x + 4 \log_{x^2} 2}} ; x > 1 \right\}$ باشد، بزرگ ترین عضو مجموعه A کدام است؟

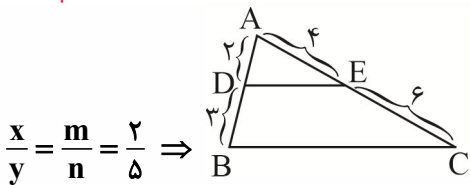
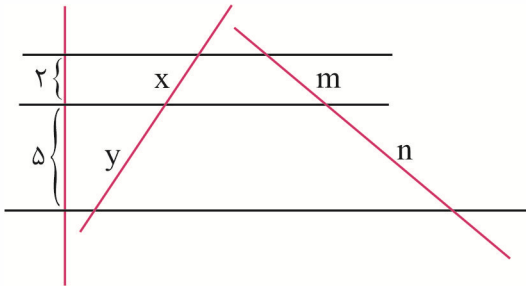
- (۱) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ (۲) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۳) $\sqrt{6}$ (۴) $\sqrt{3}$

$$\log_{x^2} x + \frac{4}{3} \log_{x^2} 2 = \frac{1}{2} \log_{x^2} x + \frac{4}{3} \log_{x^2} 2 = \frac{t}{2} + \frac{4}{3} = \frac{1}{3} \left(\frac{t}{2} + \frac{4}{t} \right) = \frac{1}{3} \left(\frac{t}{2} + \frac{2}{t} \right) = \frac{1}{3} (2) = \frac{2}{3}$$

به عبارت دیگر: $a + \frac{1}{a} \geq 2$ یا 2 یا بیشتر

$$A = \left\{ \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2} \right\}$$

تالس و تشابه

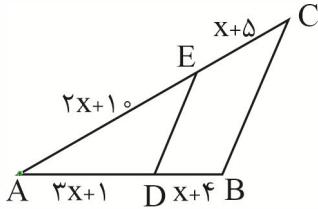


تالس جزء به جزء: $\frac{AD=2}{DB=3} = \frac{AE=4}{EC=6}$

تالس جزء به کل: $\frac{AD=2}{AB=2+3=5} = \frac{AE=4}{AC=4+6=10} = \frac{DE}{BC}$

عکس قضیه تالس هم برقراره، یعنی اگر داشتیم: $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ آن گاه: $DE \parallel BC$

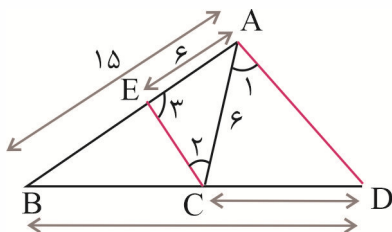
تعریف: در شکل مقابل $DE \parallel BC$ مقدار x کدام است؟



$$\frac{2x+10}{x+5} = \frac{2x+1}{x+4}$$

$$\frac{24}{12} = \frac{12}{6} \quad \rightarrow \quad x=7 \text{ مرتبه}$$

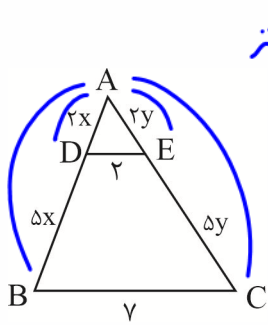
- ۵ (۱)
- ۷ (۲) ✓
- ۳ (۳)
- ۵ (۴)



تعریف: در شکل مقابل $\hat{A} = \hat{2} = \hat{3}$ اگر $AB=15$ و $AC=6$ ، حاصل $\frac{CD}{BD}$ کدام است؟

- $\frac{2}{5}$ (۲)
- $\frac{3}{5}$ (۱)
- $\frac{1}{3}$ (۴)
- $\frac{1}{2}$ (۳)

تعریف: در شکل مقابل پاره خط DE موازی قاعده BC است. اگر محیط مثلث کوچکتر برابر ۱۰ باشد، محیط مثلث بزرگتر برابر ۱۰ باشد،



$$2x + 2y + r = 10$$

$$x + y + 1 = 5$$

$$x + y = 4$$

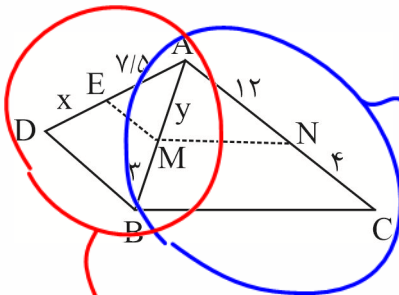
محیط مثلث ABC کدام است؟

- ۳۲ (۱)
- ۳۰ (۲)
- ۴۰ (۳)
- ۳۵ (۴) ✓

$$7 + 7y + 7x = 7 + 7(x+y) = 7 + 7 \cdot 4 = 7 + 28 = 35$$

داستان لاله و لادن: دو مثلث از یک ضلع به هم چسبیده‌اند و در هر کدام از آن‌ها خطی موازی قاعده داریم. هر نسبتی روی یکی از ~~خطی~~ مثلث برقرار باشد، آن نسبت روی همه ساق‌ها برقرار است. در این مسئله‌ها اول از مثلثی شروع می‌کنیم که مجهولات کم‌تری دارد.

تعریف: در شکل مقابل $EM \parallel DB$ و $MN \parallel BC$ ، حاصل $x+y$ کدام است؟



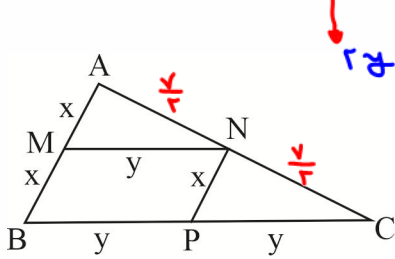
$$\frac{جزء}{جزء} = \frac{12}{4} = \frac{3}{1} \rightarrow 9 = y$$

- ۱۲/۵ (۱)
- ۱۰/۵ (۲)
- ۱۲ (۳)
- ۱۱/۵ (۴) ✓

$$x + y = 11,5$$

$$\frac{7,5}{x} = \frac{9}{3} \rightarrow \frac{7,5}{x} = 3 \rightarrow x = \frac{7,5}{3} = 2,5$$

تعریف: در شکل مقابل M وسط AB از ΔABC است. اگر $AC = 7$ باشد و محیط متوازی الاضلاع MNPB برابر 13 باشد، محیط مثلث ABC کدام است؟



$$2y + 2x = 13$$

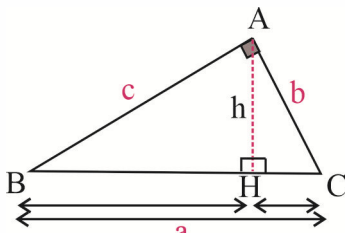
$$x + y = \frac{13}{2} = 6.5$$

$$P_{\Delta ABC} = 2y + 7 + 2x = 7 + 2(x + y) = 20$$

- 1) 13/5
- 2) 20 ✓
- 3) 21
- 4) 20/5

روابط خطی در مثلث قائم الزاویه:

4 چیز مهم در مثلث قائم الزاویه:



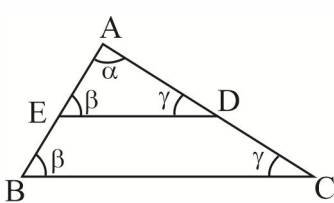
- 1) $a^2 = b^2 + c^2$
- 2) $ah = b \cdot c$
- 3) $\begin{cases} b^2 = a \cdot CH \Rightarrow CH = \frac{b^2}{a} \\ c^2 = a \cdot BH \Rightarrow BH = \frac{c^2}{a} \end{cases}$

پروژه زاویه قائمه واسط هندسی است پس وتر در تصویرش بزرگتر

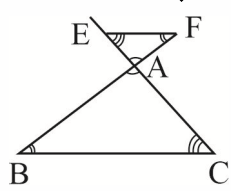
در مثلث قائم الزاویه ارتفاع واسط هندسی است بین 2 نقطه ای که روی وتر جهانی شود

تشابه دو مثلث:

زوایای برابر و اضلاع متناسب



$\Delta ABC \sim \Delta AED$



$\Delta ABC \sim \Delta AEF$

مثلث بزرگ : $\frac{BC}{ED} = \frac{AB}{AE} = \frac{AC}{AD}$

مثلث کوچک

ردیف 1 ردیف 2 ردیف 3

مثلث بزرگ

مثلث کوچک

$\frac{BC}{EF} = \frac{AC}{AE} = \frac{AB}{AF}$

ردیف 1 ردیف 2 ردیف 3

حالات تشابه:

الف) برابری ۲ زاویه از ۲ مثلث

ب) تناسب ۲ ضلع و برابری زاویه بین آنها

ج) تناسب ۳ ضلع از ۲ مثلث

$$\frac{\text{مثلث کوچک}}{\text{مثلث بزرگ}}: \frac{BC}{DE} = \frac{AC}{AD} = \frac{AB}{AE}$$

روبه γ روبه β روبه α

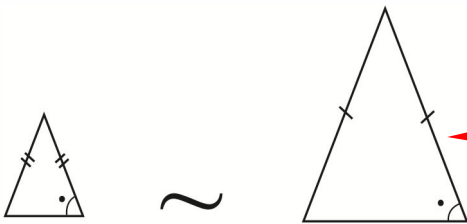
نکته:

✓ دو مثلث قائم‌الزاویه با یک زاویه حاده برابر متشابه‌اند.

✓ دو مثلث متساوی‌الساقین با زاویه رأس برابر متشابه‌اند.

✓ دو مثلث متساوی‌الساقین با یک زاویه مجاور به قاعده برابر متشابه‌اند.

✓ هر دو مثلث متساوی‌الاضلاع دلخواه متشابه‌اند.



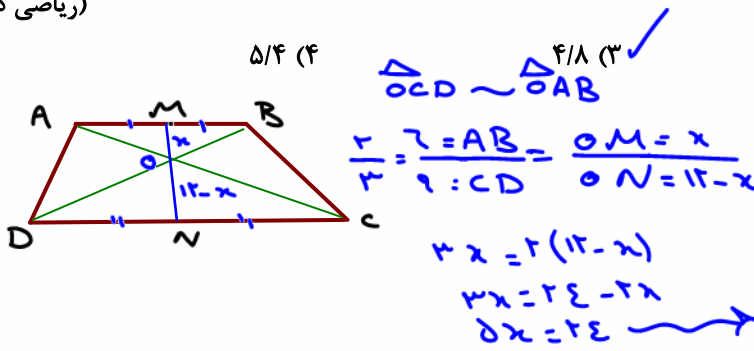
$$ac = b.d$$

$$\frac{a}{d} = \frac{b}{c}$$

تمرین: اندازه دو قاعده یک دوزنقه ۶ و ۹ است. طول پاره‌خطی که اوساط دو ساق را به هم وصل می‌کند، ۱۲ واحد است. فاصله نقطه تلاقی دو قطر از وسط قاعده کوچک‌تر چه قدر است؟

۴/۳ (۲)

۳/۶ (۱)



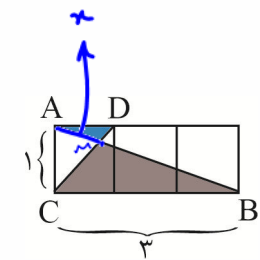
تمرین: در شکل مقابل مربع‌ها به ضلع واحد هستند. AM چند برابر $\sqrt{10}$ است؟

$\frac{1}{4}$ (۲)

$\frac{1}{3}$ (۱)

$\frac{1}{5}$ (۴)

$\frac{2}{9}$ (۳)



$AB = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18}$

$\triangle AMD \sim \triangle CMB$

$\frac{CB=3}{AD=1} = \frac{CM}{DM} = \frac{BM=\sqrt{10}-x}{AM=x}$

$3x = \sqrt{10} - x \quad 4x = \sqrt{10} \quad x = \frac{\sqrt{10}}{4} = AM \quad AM = \frac{1}{4}\sqrt{10}$

ب) $\begin{cases} 2, 4, 6, 8 \\ 2+8=4+6 \end{cases}$

جمع الطرفین برابر جمع الوسطین $a, b, c, d \xrightarrow{\text{دنباله حسابی}} a+d=b+c$

ج) $2, 4, 6, 8, 10$

جمع جملات متساوی الفاصله از وسط برابر: $2+10=4+8=2(6)$

د) $2, 4, 6, 8, 10, 12$

$2+12=4+10=6+8$

تعریف: در یک دنباله عددی $a_{20} = 30$ و $a_{30} = 50$ است. جمله سیزدهم؟ جمله بیست و دوم؟ جمله بیست و نهم؟

$a_{29} = a_r - d$
 $= 50 - 2$
 $a_{29} = 48$

$a_{22} = a_r + rd$
 $= 30 + 2(2)$
 $= 34$

$a_{13} = a_1 + 12d$
 $a_{30} = -8 + 12(2)$
 $a_{13} = 16$

ترجیح $\begin{cases} a_1 + 19d = 30 \\ a_1 + 29d = 50 \end{cases}$
 $\begin{cases} -a_1 - 19d = -30 \\ + a_1 + 29d = 50 \end{cases}$
 $10d = 20 \rightarrow d = 2 \quad a_1 = -8$

$d = \frac{a_m - a_n}{m - n}$

$d = \frac{a_{13} - a_{20}}{13 - 20} = 2$

$d = \frac{a_{30} - a_{20}}{30 - 20} = \frac{50 - 30}{10} = 2$ مثل: $d = \frac{a_m - a_n}{m - n}$ **نکته:**

نکته: در هر دنباله دلخواه داریم: $S_n \cdot S_{n-1} = a_n$

نکته: اگر بین a (اولی) و b (آخری) تعداد m واسطه حسابی درج کنیم: $d = \frac{b-a}{m+1}$

تعریف: بین ۶ و ۶۶ چهار واسطه حسابی درج کرده‌ایم. قدرنسبت کدام است؟

$a_1 = 6$ \xrightarrow{d} \square \xrightarrow{d} \square \xrightarrow{d} \square \xrightarrow{d} \square \xrightarrow{d} $66 = a_n = a_7$

$a_n = a_1 + (n-1)d$
 $66 = 6 + (7-1)d \rightarrow d = \frac{66-6}{7-1} = \frac{60}{6} = 10$ **جواب:**

$6, 16, 26, 36, 46, 56, 66$

$d = \frac{a_n - a_1}{n - 1}$
 $d = \frac{66 - 6}{7 - 1} = 10$

$a_1, a_1q, a_1q^2, \dots, a_1q^{n-1}$
 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$

$a_n = a_1 q^{n-1}$

قدرنسبت $q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$

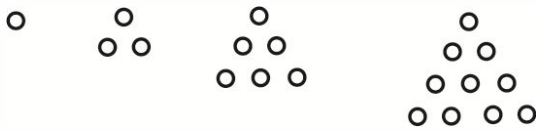
دنباله هندسی:

فردمحل رجب m واسطه بین a, b :

$q = \sqrt[m+1]{\frac{b}{a}}$

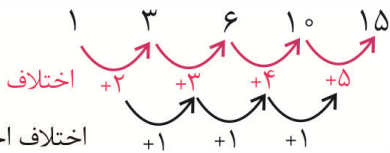
دسته هندسی $b = \sqrt{ac} \rightarrow a \cdot c = b^2$ **نسبت**
 a, b, c \rightarrow $a \cdot c = b^2$
 a, b, c, d \rightarrow $ad = bc$ **نسبت**

معرفی دنباله درجه دوم: $a_n = an^2 + bn + c$



\Rightarrow اعداد مثلثی $1, 3, 6, 10, \dots$ یک دنباله درجه دوم است. $\Rightarrow \frac{n(n+1)}{2}$

شماره	۱	۲	۳	۴	۵	...	n
شکل							
تعداد	۱	۱+۲	۱+۲+۳	۱+۲+۳+۴	۱+۲+۳+۴+۵	...	$1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$
دایره							



اختلاف اختلاف

$$a_n = an^2 + bn + c$$

نکته: در دنباله درجه دوم اختلاف ۲ جمله متوالی یکسان نیست ولی اختلاف اختلافای دو جمله متوالی ثابت است. نصف اختلاف اختلافها ضریب n^2 یا a است.

$$\text{نصف اختلاف اختلافا} = \frac{+1}{2} = a$$

$$a_n = an^2 + bn + c$$

$$a_n = \frac{1}{2}n^2 + bn + c$$

جملات دنباله $1, 3, 6, 10, 15, \dots$

$$a_1=1 \quad a_2=3$$

$$\begin{aligned} \xrightarrow{n=1} a_1 &= \frac{1}{2} + b + c = 1 & \begin{cases} b + c = \frac{1}{2} \\ 2b + c = 1 \end{cases} \\ \xrightarrow{n=2} a_2 &= \frac{1}{2}(2)^2 + 2b + c = 3 & \begin{cases} -b - c = -\frac{1}{2} \\ 2b + c = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} b &= \frac{1}{2} \\ c &= 0 \end{aligned} \right\} b + c = \frac{1}{2}$$

$$a_n = an^2 + bn + c$$

$$\text{دنباله درجه دو } a_n = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n + 0$$

نکته:

$$n \text{ تا } 1 \text{ جمع اعداد طبیعی} = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$2n \text{ تا } 2 \text{ جمع اعداد زوج} = 2 + 4 + 6 + 8 + \dots + 2n = n(n+1)$$

$$2n-1 \text{ تا } 1 \text{ جمع اعداد فرد} = 1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n-1) = n^2 \Rightarrow \text{جواب} = n^2 = 7^2 = 49 : \begin{matrix} 13 \\ \downarrow \\ 2n-1=13 \\ n=7 \end{matrix}$$

$$\text{جمع مربعات اعداد طبیعی} = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\text{جمع مکعبات اعداد طبیعی} = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

معرفی دنباله هندسی:

$$\begin{cases} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_n \\ a_1 & a_1q & a_1q^2 & a_1q^3 & \dots & a_n = a_1q^{n-1} \end{cases}$$

$$q = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \text{قدرنسبت}$$

الف) 2, 4, 8

$$2(8) = (4)^2 \text{ ضرب الطرفین مربع الوسطی}$$

$$a, b, c \xrightarrow{\text{هندسی}} ac = b^2$$

$$\sqrt{ac} = b$$

واسطه هندسی بین a و b

$$\text{واسطه حسابی} = \sqrt{ac} \leq \frac{a+c}{2} \text{ واسطه هندسی}$$

$$a=c$$

ب) 2, 4, 8, 16

$$2(16) = 4(8) \text{ ضرب الطرفین برابر ضرب الوسطین}$$

$$a, b, c, d \xrightarrow{\text{هندسی}} a.d = bc$$

$$\text{قانون اندیس ها (ج)} \quad m+n = p+q$$

$$m+n = 2k$$

$$\begin{cases} \text{دنباله حسابی} \rightarrow \begin{cases} a_m + a_n = a_p + a_q \\ a_m + a_n = 2a_k \end{cases} \\ \text{دنباله هندسی} \rightarrow \begin{cases} a_m a_n = a_p a_q \\ (a_m)(a_n) = (a_k)^2 \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ 2, & 4, & 6, & 8, & 10, & 12 \\ 1+6=3+4 \Rightarrow a_1+a_6 = a_3+a_4 \\ 1+5=2(3) & 2+12=6+8 \\ a_1+a_5 = 2a_3 \end{cases}$$

دنباله حسابی	دنباله هندسی
$13+7 = 12+8$	
$a_{13}+a_7 = a_{12}+a_8 \rightarrow a_{13}(a_7) = a_{12}(a_8)$	
$13+7 = 2(10)$	
$a_{13}+a_7 = 2a_{10} \rightarrow a_{13} \cdot a_7 = (a_{10})^2$	

نکته:

نمون اندیسها:

