



آموزش آنلاین

ریاضی جامع کنکور

(دهم – یازدهم – دوازدهم)

به روش انحصاری

I.P.P.P & P.B.L

مدرس: دکتر سامان سلامیان

بانک تست مبتنی + درس + نکته + تست + امتحان نهایی

به نام خردمند خردآفرین

مجموعه حاضر برای کلاس‌های آنلاین سالانه کنکور تجربی و حسابان رشته ریاضی دوره متوسطه دوم، گردآوری و تنظیم شده است. هدف این مجموعه؛ نجات مخاطب از یادداشت‌برداری و نوشتن جزوه در طول کلاس است. مطالب مفهومی و تکمیلی و نکات کنکوری سال‌های دهم و یازدهم و دوازدهم به صورت مبحثی و فصل به فصل آورده شده است. در کلاس آنلاین فرصتی برای گفتن و نوشتن جزوه نداریم. البته برای حل مثال‌های سر کلاس و مقایسه میزان یادگیری دانش‌آموزان برای حل مسئله‌ها به طور آنلاین زمانی در کلاس خواهیم گذاشت ولی فرصت نوشتن تمیز و با وسواس نخواهیم داد. پس این جزوه؛ گزارش اتفاقات هر جلسه درس خواهد بود. با توجه به اهمیت یافتن امتحان نهایی و نمره تشریحی درس ریاضی؛ به کمک جلسات ویژه امتحان نهایی و درسنامه‌های همراه با تمرین‌های تشریحی امتحانات کشوری؛ بدنه اصلی درس برای آمادگی امتحانات تشریحی مدرسه و نهایی ارائه می‌شود که دانش‌آموزان دوازدهم قدرت و توان برگه نویسی موثر برای امتحان مدرسه و تسلط بر کتاب وزارتخانه آموزش و پرورش را کسب کنند و سپس با حل تمرین‌ها و تست‌های متنوع؛ نکات کنکوری و جالبی که در کنکورهای آزمایشی استاندارد طرح می‌شود؛ آموزش داده می‌شود. روش تدریس در کلاس منطبق بر آخرین تغییرات کتاب درسی وزارتخانه آموزش و پرورش و بخشنامه‌های سازمان سنجش آموزش کشور است. با توجه به سابقه ربع قرن تدریس ریاضیات کنکور «روش مفهومی» و «حل مسئله به کمک حل مسئله» در این مجموعه به کار گرفته شده است که در تمام این سال‌ها موفق بوده است. تکلیف (Homework) در انتهای هر درس تست‌ها و تمرین‌های متعددی همراه با پاسخ تشریحی بسیار گویا و دقیق گذاشته شده که خارج از کلاس و به صورت خودآموز هم می‌توانند راهگشای حل مسئله‌ها و حل تست‌های جدید باشند. سعی شده است که دانش‌آموز با کار کردن کامل این مجموعه به «هیچ» سوال جدیدی از نظر محتوا در مدرسه و امتحان و کنکور آزمایشی و سراسری برخورد نکند و پوشش کامل بر نکات داخل کتاب و حاشیه امن خارج از کتاب داشته باشد. اگر قصد دارید در ابتدای شروع کلاس‌ها به خودتان قول دهید که «امسال ریاضی را «می‌خوانم» با من همراه نشوید؛ زیرا اصلاً ریاضی خواندنی نیست؛ بلکه نوشتنی و مسئله حل‌کردنی و توضیح‌دانی است. ریاضی را به این نیت یاد بگیرید که قرار است به کسی درس بدهید. مهمترین ابزار موفقیت در ریاضی؛ تمرین کردن و حل مسئله به کمک نوشتن در چرکنویس؛ توضیح دادن به خود یا یک شاگرد خیالی و حل مسئله‌های جدید است. سوالات مجموعه؛ سوالات رایج امتحانات مدارس برتر تهران؛ سوالات و تست‌های تالیفی؛ تست‌های کنکور سراسری و آزمون‌های آزمایشی استاندارد است؛ به طوری که با سلیقه طراحان مختلف در تمام کشور آشنا خواهید شد. همراهی آنلاین و بدون غیبت در کلاس آنلاین؛ حضور پر رنگ و شرکت فعال در بحث‌های کلاس و گروه رفع اشکال؛ حل همه تکالیف و مقایسه و تحلیل جواب‌ها با پاسخنامه؛ تنها راه گرفتن نمره کامل «بیست» در آزمون و درصد خوب در آزمونهای تستی است. اگر در ریاضی به مرحله‌ای رسیدید که؛ حل یک مسئله شما را شاد کرد و ذوق زده شدید و یا با خواندن و حل یک تست به طراح آن تست «آفرین» گفتید که با چه روش جالبی؛ فلان موضوع را پنهان کرده است یا مورد سوال قرار داده؛ یعنی اینکه دارید؛ مسیر یادگیری ریاضی را درست می‌پیمایید. تکرار می‌کنم پیشرفت در ریاضی فقط با «حل مسئله» و «تکرار و تمرین» امکان‌پذیر است. بدون کاغذ چرکنویس و تمام کردن خودکارهای متعدد؛ ریاضی شما رشد نمی‌کند. تدریس به خود یا شاگرد واقعی یا حتی خیالی با صدای بلند نیز در رشد مهارت‌های ریاضی شما موثر است. سعی کنید؛ تکالیف (Homework) پاسخنامه‌دار آخر هر درس هر فصل را؛ خودتان حتماً حتماً حل کنید و به کمک پاسخنامه نمره یا درصد برای خود حساب کنید. مثل قد و وزن خود که آن را می‌دانید؛ دانستن درصد یادگیری ریاضی خودتان در هر لحظه شما را به پیشرفت علاقه‌مندتر خواهد ساخت. در هر قسمت از درس ابتدا قسمت‌های مشترک هر دو رشته تدریس می‌شود و قسمت‌های محدود مرتبط با رشته ریاضی و حسابان جداگانه تدریس می‌شود. دانش‌آموزان رشته ریاضی مطالب هندسه تالس و تشابه و آمار و شمارش و احتمال را می‌توانند با این مجموعه دوره کنند و به صورت مهمان سر کلاس باشند البته که این مطالب را در کلاس هندسه و جبر و احتمال و گسسته خود کامل‌تر خواهند خواند. البته می‌توانند در جلساتی که این مباحث تدریس می‌شوند به‌عنوان میهمان سر کلاس باشند.

این مجموعه برای راهنمای تدریس معلمان ریاضی سراسر کشور و دانشجویان دانشگاه فرهنگیان گرایش دبیری ریاضی توصیه می‌شود. استفاده از این مجموعه با ذکر منبع بلامانع است و در غیر این صورت ایراد شرعی و اخلاقی دارد.

بهر روز باشید.**دکتر سامان سلامیان**

فهرست مندرجات

عنوان	صفحه
فصل صفر	
معرفی دستگاه مختصات و مختصات یک نقطه	۱
تابع	
زوج مرتب	۴۹
تابع گویا	۸۰
تابع رادیکالی	۹۷
جزء صحیح	۱۰۶
تابع مرکب	۱۲۰
قدر مطلق	۱۴۱
تبدیل نمودار توابع	۱۷۷
توابع چند جمله‌ای	۲۱۳
توابع صعودی و نزولی	۲۴۵
معادله درجه دو، سهمی، معادله گویا و گنگ	
معادله درجه دوم	۲۹۹
رابطه بین ریشه‌های یک معادله درجه دوم	۳۰۹
معادله دو مجذوری (درجه چهار)	۳۳۴
نامعادله‌ها - تعیین علامت	۳۴۸
نمودار تابع درجه دوم	۳۵۸
تقسیم و روابط آن	۳۹۲
مثلثات	
نسبت‌های مثلثاتی	۳۹۹
جهت مثلثاتی	۴۱۵
واحدهای کمان و زاویه	۴۳۰
نسبت‌های مثلثاتی α و $-\alpha$ (قرینه)	۴۳۶
روابط بین نسبت‌های مثلثاتی	۴۵۲
نسبت‌های مثلثاتی $\alpha \pm \beta$ (ویژه حسابان)	۴۶۵
فرمول‌های کمان 2α	۴۸۴
معادلات مثلثاتی	۵۰۷
دوره تناوب	۵۵۱
تانژانت	۵۹۱
حد و پیوستگی	
حد	۶۲۱
حالت صفر صفرم	۶۴۴
حد بی‌نهایت	۶۹۶

عنوان	صفحه
حد در بی نهایت.....	۷۲۸
پیوستگی.....	۷۵۹
پیوستگی در بازه.....	۷۶۸
همسایگی.....	۷۷۳
همسایگی چپ و راست.....	۸۱۲
مشتق	
آشنایی با مفهوم مشتق.....	۸۲۲
محاسبه مشتق.....	۸۳۶
ساده سازی و سپس مشتق گیری.....	۸۵۷
مشتق توابع شامل قدرمطلق.....	۸۹۲
مشتق پذیری و پیوستگی.....	۹۱۴
آهنگ تغییر.....	۹۷۸
کاربرد مشتق	
توابع صعودی و نزولی - بررسی جهت تغییرات تابع.....	۱۰۲۱
نقاط بحرانی.....	۱۰۳۱
اکسترمم مطلق.....	۱۰۵۵
اکسترمم نسبی.....	۱۰۸۰
بررسی نمودارها.....	۱۱۱۰
بهینه سازی.....	۱۱۳۵
عطف و تقعر (ویژه رشته ریاضی).....	۱۱۶۸
هندسه	
تفکر تجسمی و آشنایی با مقاطع مخروطی.....	۱۲۶۲
بیضی.....	۱۲۹۵
دایره.....	۱۳۱۶
وضعیت یک نقطه و دایره نسبت به هم.....	۱۳۳۳
احتمال کل دوازدهم.....	۱۳۹۵
شمارش بدون شمردن.....	۱۴۱۸
فاکتوریل.....	۱۴۲۵
جایگشت.....	۱۴۲۹
ترکیب.....	۱۴۴۱
احتمال.....	۱۴۵۹
احتمال شرطی.....	۱۴۸۴
پیشامد مستقل.....	۱۵۰۴
آمار.....	۱۵۲۱
تابع نمایی و لگاریتمی.....	۱۵۴۴
تالس و تشابه.....	۱۵۵۰
الگو و دنباله.....	۱۵۸۰

ریاضیات پایه دوازدهم

فصل صفر

صفحه دکارت

معرفی دستگاه مختصات و مختصات یک نقطه:

نقطه $A(x, y)$ (دولفه اول)

(ایگرگ، ایکس) A

(عرض، طول) A

طیفه (.....,)

A (.....,)

بالا یا پایین \leftarrow جلوی یا عقب روی محور انقی روی محور قائم

چهارم	سوم	دوم	اول	ناحیه یا ربع
+	-	-	+	x
-	-	+	+	y

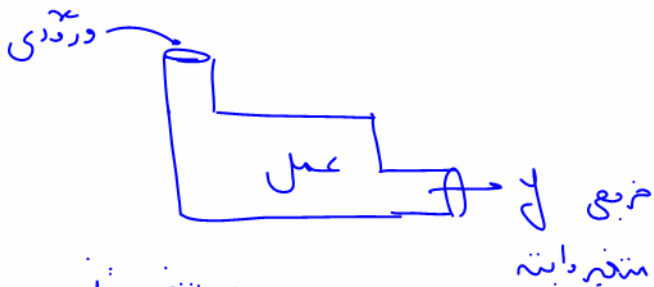
تمرین: اگر نقطه $A(m+2, 2m-1)$ در ناحیه چهارم دستگاه مختصات باشد و $m \in (a, b)$ بیشترین مقدار $b-a$ کدام است؟

$m \in \emptyset$ (۴) $\frac{5}{2}$ (۳) $\frac{3}{2}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۱)

$A \left\{ \begin{array}{l} x = m + 2 > 0 \quad m > -2 \quad \text{(الف)} \\ y = 2m - 1 < 0 \quad m < \frac{1}{2} \quad \text{(ب)} \end{array} \right.$

$(-2, \frac{1}{2})$ $b-a = \frac{1}{2} - (-2) = \frac{5}{2}$

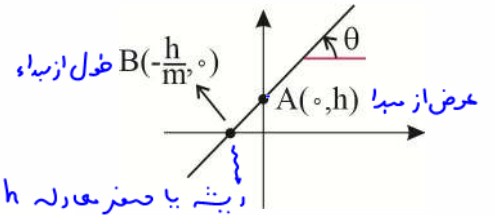
تابع $y = f(x)$ چیست؟ \leftarrow تابعی از x است \leftarrow پیرو و دنباله روی x است.



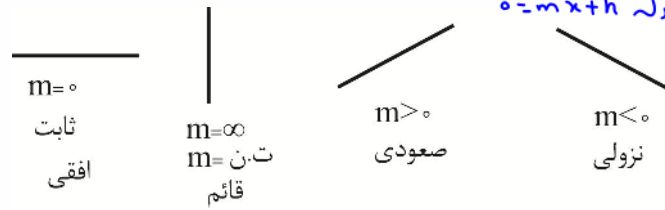
x متغیر مثل
 \leftarrow دیزودن ایکه، اول ایسی جنبه دنبالش
 \leftarrow عوض متغیر وی جنبه

جهت نگاه کردن به نمودار
چپ به راست

معادله خط راست یا تابع خطی:

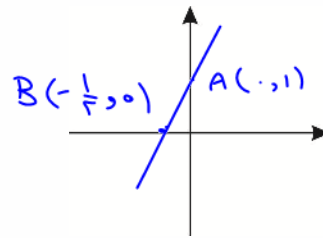


عرض از مبدأ
 $y = f(x) = mx + h$
شیب یا ضریب زاویه = $\tan \theta$

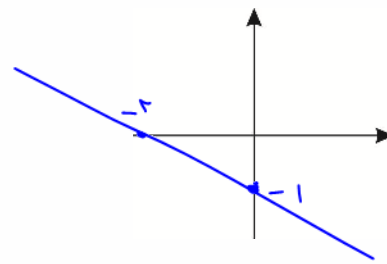


رسم خط: با ۲ نقطه

x	صفر	$-\frac{1}{2}$
$y = 2x + 1$	$y = 1$ A(0, 1)	صفر B(-1/2, 0)

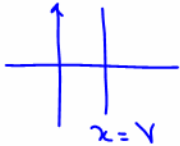


x	صفر	-2
$y = -\frac{x}{2} - 1$	-1	صفر



شکل تابع: هر خط دوازدهم محورهای

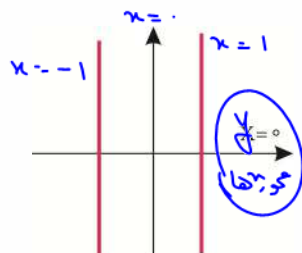
تابع را حد التشریک جابجایی کنه



$x = 2$

تابعیت در این خط تمام

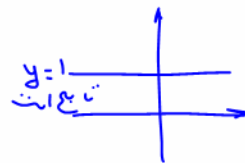
شکل را در بی نهایت جابجایی کنه



خط قائم $x = k$

موازی محور y ها

تابع نیست

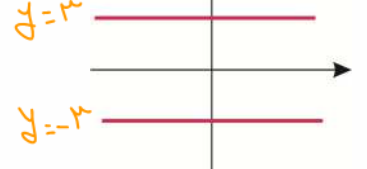


$y = 1$

تابع است

خطهای خاص:

محورهای $x = 0$



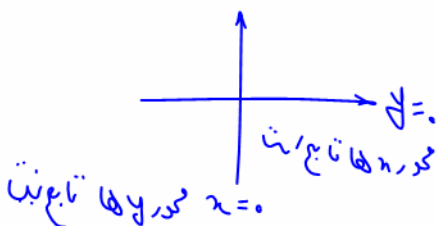
$y = 3$

$y = -2$

خط افقی $y = k$

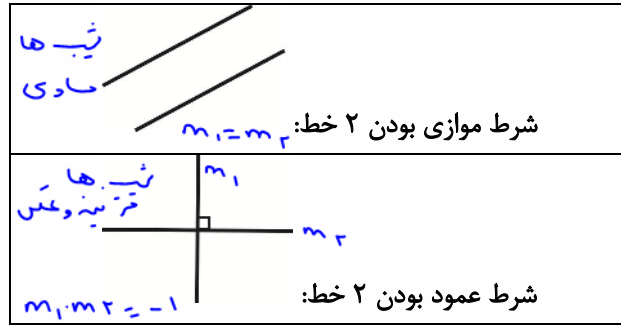
موازی محور x ها

تابع است



محورهای $x = 0$

توجه: دو خط $y = m_1x + h_1$ و $y = m_2x + h_2$ را در نظر بگیرید:



$$\begin{cases} y = 2x + 1 \\ 3y + 7x + 9 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x + 1 \\ 3y = -7x - 9 \\ y = -\frac{7}{3}x - 3 \end{cases}$$

دو خط موازیند.

موازی

$$\begin{cases} y = 2x + 1 \\ y = 2x - 7 \end{cases}$$

عمود

$$\begin{cases} y = 2x + 1 \\ y = -\frac{1}{2}x + 8 \end{cases}$$

$$m_1 = -\frac{1}{m_2}$$

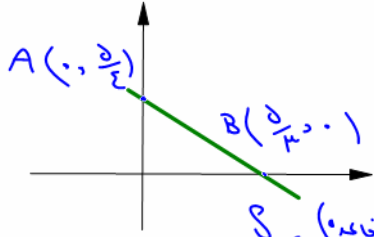
صورت دیگر معادله خط:

$$ax + by + c = 0$$

$$by = -ax - c \Rightarrow y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

گیرانند. حصر شده

تمرین: مساحت محصور بین خط $3x + 4y = 5$ و محورهای مختصات کدام است؟



$$\frac{12}{25} \quad (4)$$

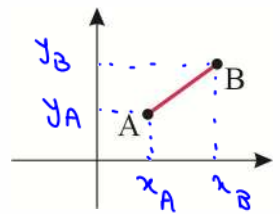
$$\frac{25}{12} \quad (3)$$

$$\frac{24}{25} \quad (2)$$

$$\frac{25}{24} \quad (1)$$

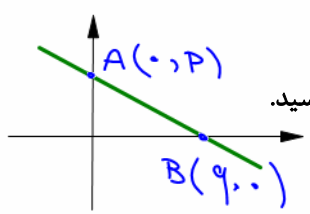
$$S_{\Delta} = \frac{(ارتفاع)(طول)}{2} = \frac{(\frac{5}{4})(\frac{5}{3})}{2} = \frac{25}{24}$$

شیب خط بین دو نقطه:



نوشتن معادله خط با داشتن دو نقطه $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$:

$$y - y_A = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} (x - x_A)$$



تمرین: معادله خط عبوری از نقاط $A(0, p)$ و $B(q, 0)$ را بنویسید.

جائدهای

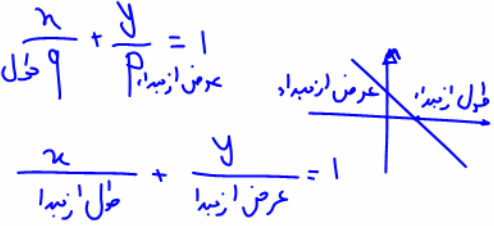
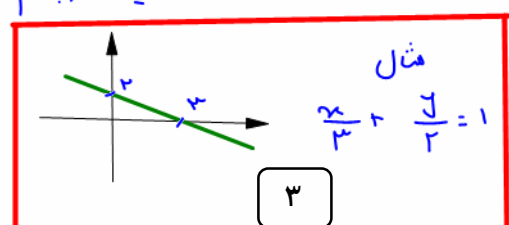
$$y - p = \frac{0 - p}{q - 0} (x - 0)$$

$$y = -\frac{p}{q}x + p$$

جواب سؤال که بهتر است آن را شیب بنویسیم 😊

$$9y = -px + pq \Rightarrow px + 9y = pq$$

طرفین ضرب در ۹



نوشتن معادله خط با داشتن یک نقطه و شیب:

$$y - y_A = m(x - x_A)$$

تمرین: معادله خط عبوری از $A(2, -1)$ که عمود بر خط $3x + 4y = 1$ می باشد، کدام است؟

جانمایی

$$-1 - (-1) = \frac{4}{3} (2 - 2)$$

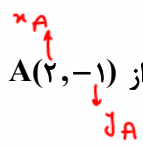
$$-1 + 1 = \frac{4}{3}x - \frac{1}{3}$$

$$-1 = \frac{4}{3}x - \frac{1}{3} - 1 = \frac{4}{3}x - \frac{11}{3}$$

$$-2 = \frac{4}{3}x - \frac{11}{3} \implies 4x - 3y = 11$$

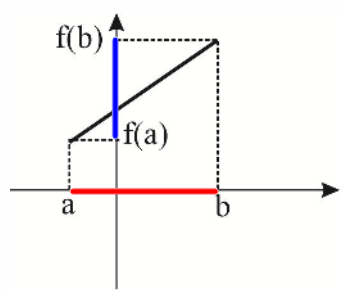
$$m' = \frac{4}{3}$$

تقسیم بر ۴
 $4y = -3x + 1$
 $y = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{4}$
 عکس دقربینه

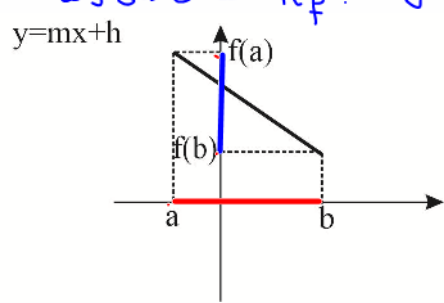


دامنه و برد خط $y = mx + h$

Domain دامنه: محدوده تغییرات x
 Range برد: محدوده تغییرات y



$m > 0$ صعودی



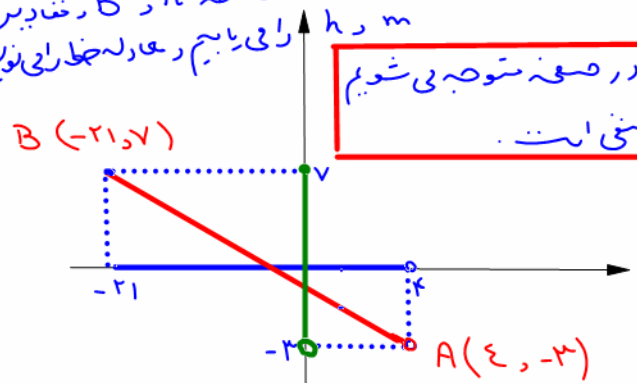
$m < 0$ نزولی

دامنه $D_f : [a, b]$
 برد $R_f : [f(a), f(b)]$

دامنه $D_f : [a, b]$
 برد $R_f : [f(b), f(a)]$

نقطه نزولی یا صعودی
 تمرین: یک تابع خطی با دامنه $[-21, 4]$ و برد $[-3, 7]$ مفروض است، حاصل $[3f(1)]$ کدام است؟ (نماد $[]$ جزء صحیح است). عدله خط را

$y = mx + h$ فرض می کنیم با داشتن مختصات دو نقطه A و B در تقاطع h و m را می یابیم و عدله خط را می نویسیم



بجای گذاشتن A و B در معده متوجه می شویم که خط نزولی با شیب منفی است.

نقطه نزولی یا صعودی
 تمرین: یک تابع خطی با دامنه $[-21, 4]$ و برد $[-3, 7]$ مفروض است، حاصل $[3f(1)]$ کدام است؟ (نماد $[]$ جزء صحیح است). عدله خط را

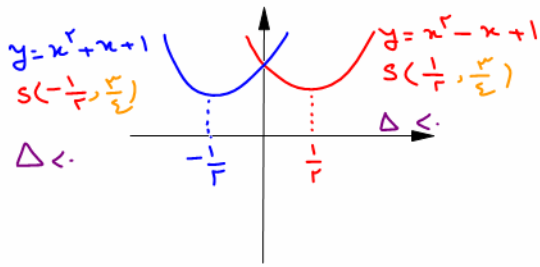
نقطه $A(4, -3)$
 نقطه $B(-21, 7)$

تابع خطی $y = mx + h$
 نقطه $A \implies -3 = 4m + h$
 نقطه $B \implies 7 = -21m + h$

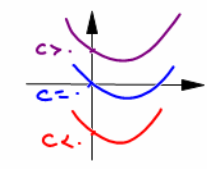
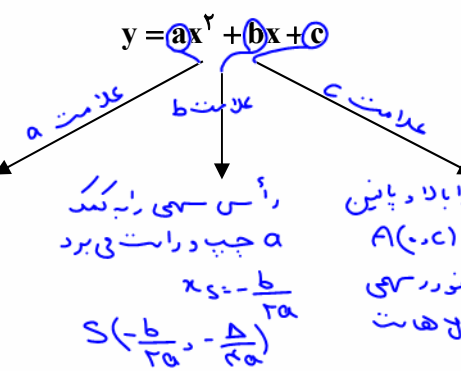
ضرب در منفی ۱
 $3 = -4m - h$
 $+ \quad 7 = -21m + h$
 $10 = -25m \implies m = -\frac{2}{5}$

$f(x) = -\frac{2}{5}x - \frac{7}{5}$
 $f(1) = -\frac{2}{5} - \frac{7}{5} = -\frac{9}{5}$
 $[3f(1)] = [-\frac{27}{5}] = -5$

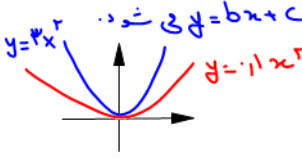
$h = -3 + \frac{1}{5} = -\frac{14}{5}$



معرفی تابع درجه دوم یا ۳ جمله‌ای درجه ۲ یا سهمی: $f(x) = ax^2 + bx + c$



با زوایه کردن دهانه سهمی است هر چه |a| بیشتر باشد دهانه بسته تر است. $a < 0$ و $a > 0$
 و $a = 0$ تبدیل به خط $y = bx + c$ می شود.



نکات مهم:

$\Delta = b^2 - 4ac$ مبین یا بی تاثیر تعداد ریشه‌هاست. $\Delta > 0$ ریشه ۲، $\Delta = 0$ یک ریشه مضرب، $\Delta < 0$ ریشه حقیقی ندارد.

یک معادله درجه دو حداکثر ۲ ریشه دارد.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac = \Delta}}{2a} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$$

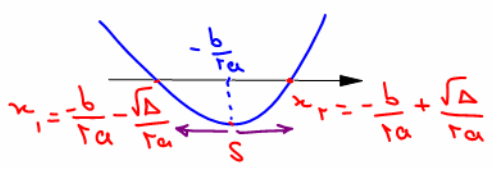
ریشه یا صفر معادله در صورت وجود: به صورت متقابل است.

جمع ریشه‌ها در صورت وجود: $S = -\frac{b}{a}$

ضرب ریشه‌ها در صورت وجود: $P = \frac{c}{a}$

معادله محور تقارن: $x_s = -\frac{b}{2a}$

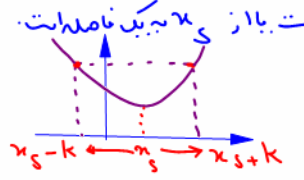
مختصات رأس: $S(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a})$



$$f(-\frac{b}{2a}) = a(-\frac{b}{2a})^2 + b(-\frac{b}{2a}) + c = -\frac{\Delta}{4a}$$

اکسترمم: مینیمم یا ماکزیمم و منظر عرض یا y آن است. $\frac{4ac - b^2}{4a} = y_s = -\frac{\Delta}{4a}$

ویژگی مهم: هر دو نقطه هم عرض روی سهمی طول هایشان نسبت به $x_s = -\frac{b}{2a}$ قرین است. باز x_s به یک نامدهات دامنه: $D_f = \mathbb{R}$



برد: از $y \leq -\frac{\Delta}{4a}$ به بالا یا به پایین $y \geq -\frac{\Delta}{4a}$ برد $y > -\frac{\Delta}{4a}$

حالات کلی: شش مدل سهمی داریم:

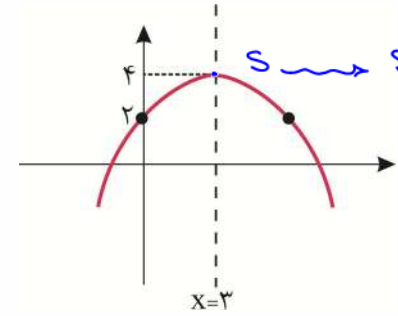
احالات (۳ مدل Δ) \times (۲ مدل a) = ۶ مورد

--	--	--	--	--	--

نوشتن معادله سهمی با داشتن رأس و یک نقطه:

$$y = a(x - x_s)^2 + y_s$$

تمرین: معادله سهمی مقابل را بنویسید. کافی است در فرمول تن جایگذاری کنیم.



رأس $S(3, 4)$
 یک نقطه $A(0, 2)$
 نقطه A روی تابع است.

$$y = a(x - x_s)^2 + y_s$$

$$y = a(x - 3)^2 + 4$$

$$2 = a(0 - 3)^2 + 4$$

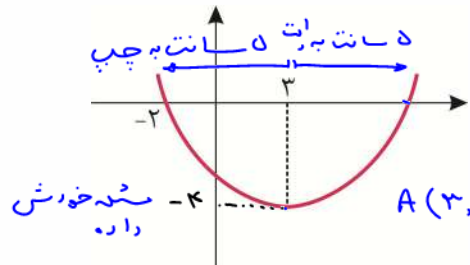
$$-2 = 9a$$

$$a = -\frac{2}{9}$$

جواب: $y = -\frac{2}{9}(x - 3)^2 + 4$

نوشتن معادله سهمی با داشتن دو ریشه:

ریشه اول ریشه دوم
 $y = a(x - x_1)(x - x_2)$



تمرین: اگر معادله شکل مقابل $y = ax^2 + bx + c$ باشد، $f(-1)$ کدام است؟

دو ریشه: $x_1 = 3 - 5 = -2$ $x_2 = 3 + 5 = 8$

نقطه $S(3, -4)$ روی سهمی است:

$y = a(x - x_1)(x - x_2)$
 $A(3, -4) \in y = a(x - (-2))(x - 8)$
 $-4 = a(3 + 2)(3 - 8)$
 $-4 = -25a$

$\frac{4}{25} = a$ $f(x) = \frac{4}{25}(x + 2)(x - 8) \rightarrow f(-1) = \frac{4}{25}(-9) = -\frac{36}{25}$

نوشتن معادله سهمی با داشتن ۳ نقطه:

یک راه طولانی این است که $y = ax^2 + bx + c$ را در نظر گرفته و با صدق دادن مختصات سه نقطه و حل سه معادله سه مجهول a و b و c را پیدا می‌کنیم. اما راه ساده‌تر:

راه اول: معادله ۳ مجهول

$f(x) = ax^2 + bx + c$

$f(2) = 4a + 2b + c = 4$

$f(0) = 0 + 0 + c = 3$ $c = 3$

$f(-1) = a - b + c = 2$

$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + 3$

بین ۲ از نقطه‌ها به رابعه صحیح بنویس (کارده خط با نقطه بنویس)

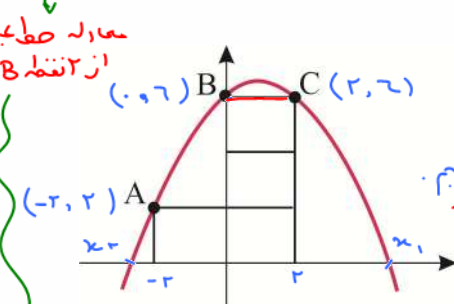
تمرین: معادله یک سهمی بنویسید که از نقاط $A(2, 4)$ و $B(0, 3)$ و $C(-1, 2)$ بگذرد.

$$\begin{cases} 4a + 2b + c = 4 \\ a - b + c = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4a + 2b + 3 = 4 \\ a - b + 3 = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4a + 2b = 1 \\ a - b = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4a + 2b = 1 \\ a = b - 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4(b - 1) + 2b = 1 \\ 6b - 4 = 1 \\ 6b = 5 \\ b = \frac{5}{6} \end{cases} \rightarrow a = \frac{5}{6} - 1 = -\frac{1}{6}$$

روش دیگر نوشتن معادله سهمی: بین ۳ نقطه A, B, C را در نظر بگیرید

تمرین: چهار مربع به ضلع ۲ مانند شکل کنار یکدیگر قرار دارند. یک سهمی از نقاط A, B و C عبور کرده و محور x ها را در دو نقطه قطع می‌کند. فاصله نقاط تقاطع چند است؟ (نزال برصد اول السید ریاضی ۱۴۰۰)



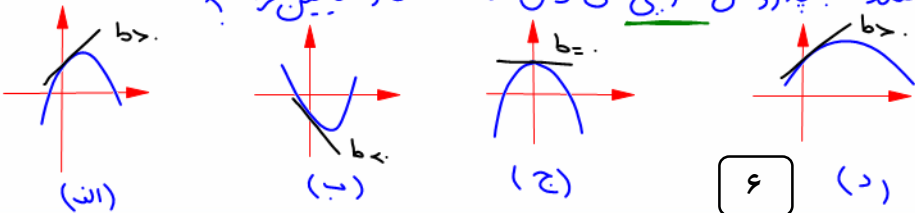
ابتدا با داشتن سه نقطه $A(-2, 2), B(0, 2), C(2, 2)$ معادله سهمی را می‌نویسیم. فاصله بین ریشه‌ها $D = |x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$

$A(-2, 2) \in$ سهمی $\rightarrow 2 = 7 + a(-2)(-2 - 2) \rightarrow a = -\frac{1}{4}$

$y = -\frac{1}{4}x(x - 2) + 7 = -\frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} + 7 \rightarrow |x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \frac{\sqrt{13}}{|-\frac{1}{4}|} = 4\sqrt{13}$

- ۱ (۱)
- ۲ (۲) $2\sqrt{13}$ ✓
- ۳ (۳) $5\sqrt{2}$
- ۴ (۴) $3\sqrt{7}$
- ۵ (۵) ۸

پیش از آنکه یادمان نرود، $y = ax^2 + bx + c$ را به هم می‌زنیم می‌توانیم علامت a و b را تعیین کرد.





$[2] = 2$ $[2,3] = 2$
 کسند یا مادی

معرفی تابع جزء صحیح: بزرگترین عدد صحیح نایبتر از x

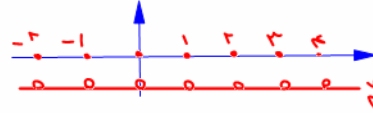
if $n \in \mathbb{Z}$, $n \leq x < n+1 \rightarrow [x] = n$

$-4 < x < -3 \rightarrow [x] = -4$
 $-3 \leq x < -2 \rightarrow [x] = -3$
 $-2 < x < -1 \rightarrow [x] = -2$
 $-1 < x < 0 \rightarrow [x] = -1$
 $0 \leq x < 1 \rightarrow [x] = 0$
 $1 \leq x < 2 \rightarrow [x] = 1$
 $2 \leq x < 3 \rightarrow [x] = 2$
 $3 \leq x < 4 \rightarrow [x] = 3$

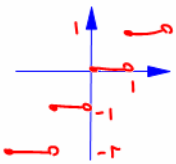
$[-x] = \begin{cases} -[x] & x \in \mathbb{Z} \\ -[x] - 1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$

جزء صحیح
 $x = [x] + \text{Partial}$
 هر عدد x
 $2,3 = 2 + 0,3$ $7 = 7 + 0$ $-2,3 = -3 + 0,7$
 P اعداد حسی: کسب حسی اعداد P اعداد مثبت: اعداد P

$y = [x] + [-x] = \begin{cases} x & x \in \mathbb{Z} \\ -1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$



$D_f: (-\infty, +\infty)$ $T = 1$
 $R_f: \{0, -1\}$ دوره تناوب

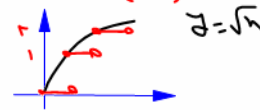


سؤال ۷: دامنه و برد $y = [x]$ و $y = [x]$ همه اعداد حقیقی را می‌تند. $x \in (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$ دامنه
 خروجی یا برد $[x]$ اعداد صحیح است.
 $y \in \mathbb{Z}: \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$

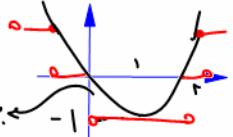
سؤال ۸: دامنه و برد $y = [x]$ ؟ تابع از x است یعنی نوی U اینس را بایم. دامنه تابع همان دامنه U است و برآنت دامنه را کج من نمی‌کنه ولی برد $[U]$ زیر مجموعه ای از اعداد صحیح است.

$y = [1/x]$ $D_f: \mathbb{R} - \{0\}$ $R_f: \mathbb{Z}$

$y = [\sqrt{x}]$ $D_f: [0, +\infty)$ $R_f: \{0, 1, 2, \dots\} = \mathbb{N}$



$y = [x^2 - 2x]$ $D_f: \mathbb{R}$ $R_f: \{-1, 0, 1, 2, \dots\}$



$[x+k] = [x] + k \quad (k \in \mathbb{Z})$

$[x+0,1] \neq [x] + 0,1$ $[x+1] = [x] + 1$ $[x-5] = [x] - 5$

$[x + [x]] = [x] + [x] = 2[x]$

$[x - [x]] = [x] - [x] = 0$

$[a+b] = \begin{cases} [a] + [b] & \text{مجموع اعداد } a, b > 1 \\ [a] + [b] + 1 & \text{مجموع اعداد } a, b < 1 \end{cases}$

$[2,7] + [3,8] = 5,5 = [5,5] = [5] + [0,5] = 5 + 0 = 5$ $0,7 + 0,8 < 1$
 $[2,7] + [3,8] = 5,5 \neq [2,7] + [3,8] = 5 + 11 = 16$ $0,7 + 0,8 > 1$

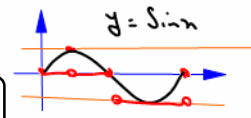
مثال: $[-2,7] + [-3,8] = -7,5 = -7 = [-2,7] + [-3,8] = -2 - 5 = -7$

$x = [x] + P$
 $-2,7 = [-2,7] + P = -2 + 0,7$
 $-3,8 = [-3,8] + P = -3 + 0,8$

$f(x) = x - [x]$
 تابع جزء اعشاری

$0 \leq x < 1 \rightarrow y = x$
 $1 \leq x < 2 \rightarrow y = x - 1$
 $2 \leq x < 3 \rightarrow y = x - 2$
 $3 \leq x < 4 \rightarrow y = x - 3$
 $T = 1$ متناوب است

طرز رسم $y = [x]$ با داشتن U : اگر یک خط‌های متوالی U را بکشیم خط‌ها خود را را $y = k+1$ که $k \in \mathbb{Z}$ را رسم کن برجا U به این خط‌ها خود را را نقطه پر شده. سایه قرمز بین خط‌ها را ردی خط‌ها بین تر کشیم زیر هر نقطه پر یک نقطه توخالی است.



$y = [\sin(x)]$

$$|u| = \begin{cases} u & u \geq 0 \\ -u & u < 0 \end{cases}$$

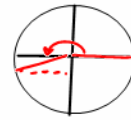
$$|-5| = -(-5) = 5$$

$$\left| \sqrt{2} - \sqrt{3} \right| = -(\sqrt{2} - \sqrt{3}) = \sqrt{3} - \sqrt{2}$$

۱,۴-۱,۷<۰

$$\left| \sqrt{2} - 194 \right| = -\sqrt{2} + 194$$

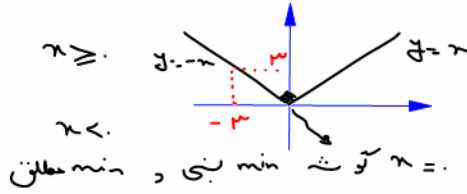
عدد منفی



معرفی تابع قدر مطلق:

خرد جی قدر مطلق نامنتی است (مثبت یا صفر).

$$f = |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$



$x =$ گوشه \min نبی و \min مطلق

نماد مهم

$$\begin{cases} u^2 < a^2 \rightarrow |u| < a \xrightarrow{a>} -a < u < a \\ u^2 = a^2 \rightarrow |u| = a \xrightarrow{a>} u = \pm a \\ u^2 > a^2 \rightarrow |u| > a \xrightarrow{a>} u < -a \text{ یا } u > a \end{cases}$$

مثال

$$|2x+1| < 1 \rightarrow -1 < 2x+1 < 1 \rightarrow -1 < x < 0$$

$$|x^2-1| = 2 \rightarrow \begin{cases} x^2-1=2 & x^2=3 & x = \pm\sqrt{3} \\ x^2-1=-2 & x^2=-1 & \text{غلق} \end{cases}$$

$$|2x+1| > 3 \rightarrow \begin{cases} 2x+1 > 3 & x > 1 \\ 2x+1 < -3 & x < -2 \end{cases}$$

$$|a+b| \leq |a| + |b|$$

$$|-10+2| = |-8| = 8 < |-10| + |2| = 12$$

$$|(-2)+(-7)| = |-9| = 9 = |-2| + |-7| = 9$$

حالت تارک برای هر دو هم علامت است



نماد مهمی

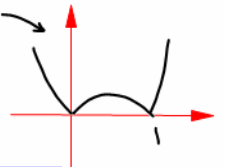
$$|a-b| \geq |a| - |b|$$

قضیه چهارم (خرد) در هر مثلث یک ضلع ($\vec{a}+\vec{b}$) از مجموع دو ضلع دیگر کوچکتر است.

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$$

$$y = |x||x-1| = |x(x-1)| = |x^2-x|$$

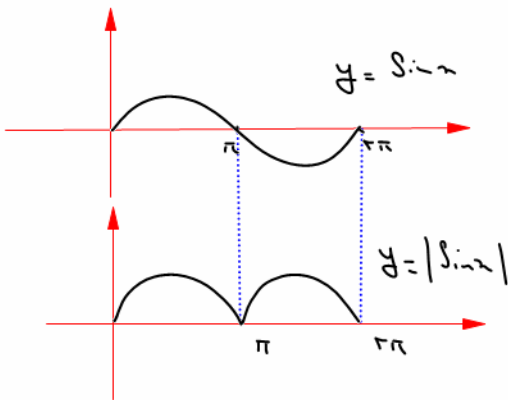
$$y = x^2 - x = x(x-1)$$



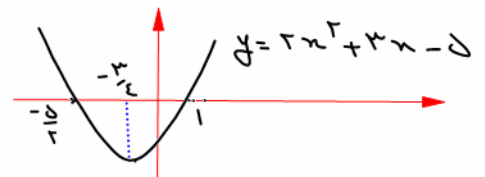
$$\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$$

رسم $y = |u|$ با داشتن u : ابتدا $u = x$ را می کشیم، سپس بخش هایی از u را که زیر محور هستند را پاک می کنیم

و قرینه قسمتهای پاک شده را عمود بالای محور x های کشیم.



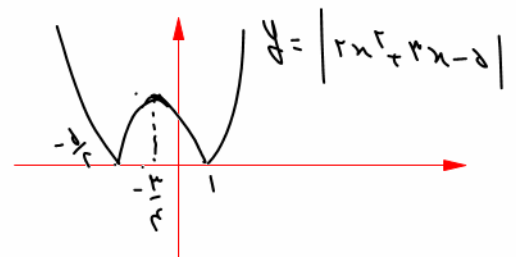
$$y = |2x^2 + 3x - 5|$$

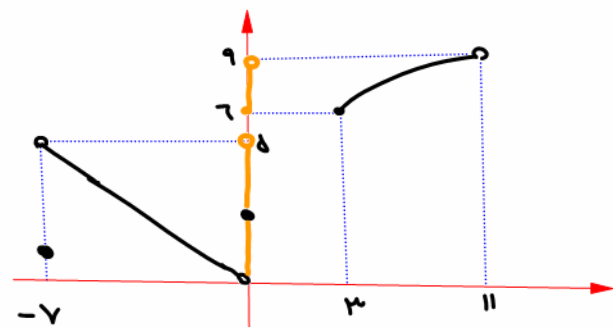
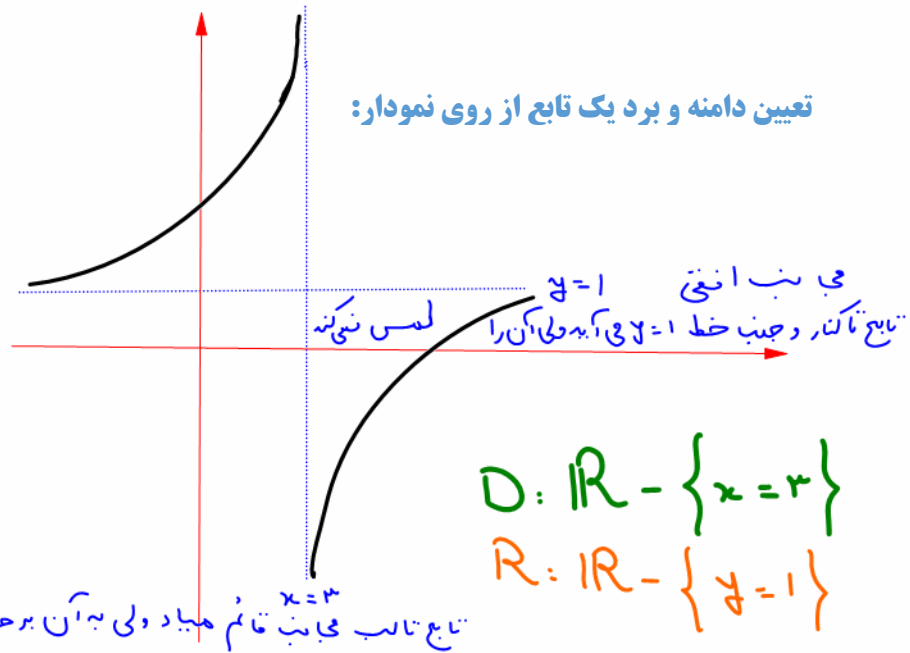
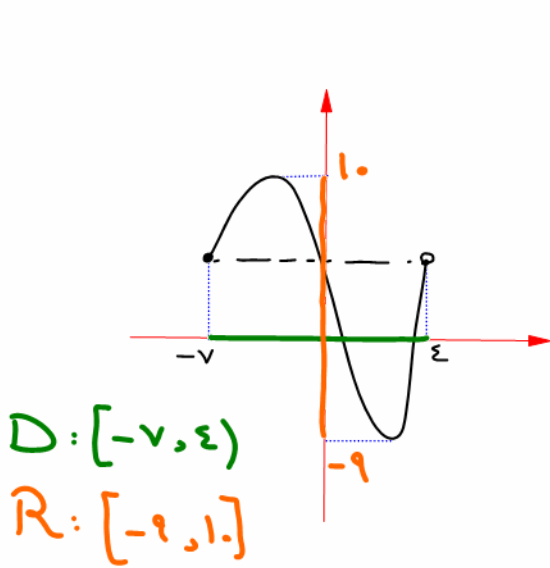


$$y = 2x^2 + 3x - 5$$

جمع ضرایب صفر

$$x_1 = 1 \quad x_2 = \frac{c}{a} = -\frac{5}{2}$$





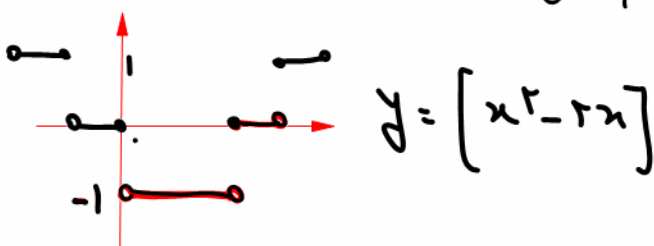
$D: [-7, 0] \cup [3, 11)$

$R: (0, 5) \cup [6, 9)$

D: Domain R: Range

گاهی است باید پرس آنکه یک بار شکل را روی محور x ها و یک بار روی محور y ها پرس کنیم
محدوده تغییرات x دامنه و محدوده تغییرات y برد خواهد بود.

برد تابع $y = [x^2 - 2x]$ را بیابید. $y = x^2 - 2x = x(x-2)$ $x=2, x=0$ دو ریشه است.
سهی اعداد بالاتر مساوی ۱- را تحویل برآنت می‌دهد و برآنت Z های بالاتر مساوی ۱- را به ما می‌دهد: $\{ -1, 0, 1, 2, \dots \}$
برد خود سهی $y \geq -1$

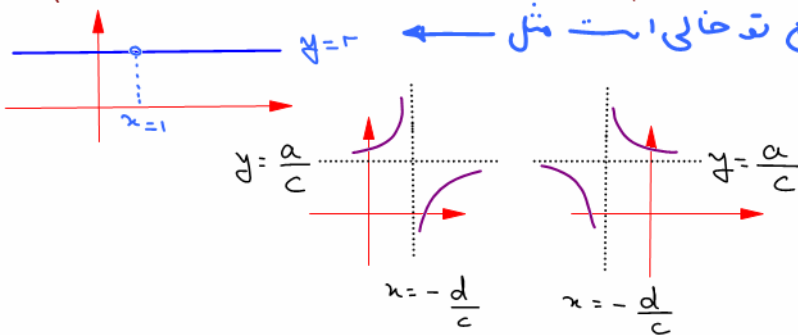


روش‌های حل تست:

- ۱- روش کلاسیک
- ۲- حذف حالات نامطلوب (ردّ گزینه)
- ۳- کنترل گزینه‌ها و عددگذاری
- ۴- روش ترسیم

معرفی و رسم تابع $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ در صورتیکه $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ تابع هذرات است به شرطی که $\frac{a}{c} \neq \frac{b}{d}$ شد اگر $y = \frac{2x-2}{x-1}$ در صورتیکه

تابع ثابت $y=2$ است که در $x=1$ توخالیه $y = \frac{2x-2}{x-1} = \frac{2(x-1)}{x-1} = 2$ هذرات است به شرطی که $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ باشد تابع ثابت است مثل $\frac{2}{1} = \frac{-2}{-1}$ هذرات است به شرطی که



رسم تابع $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ در ۵ ثانیه:

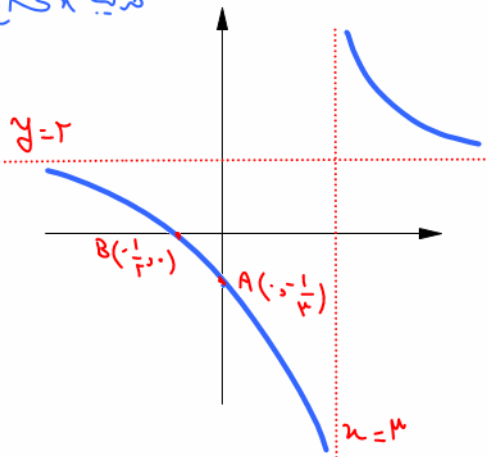
یک ثانیه: جانب قائم = ریشه خارج $x =$

یک ثانیه: جانب افقی = ضریب صورت $y =$ ضریب مخرج

یک ثانیه: $A(0, y)$ یا $B(x, 0)$ عمل بر محور در با محورهای مختصات

یک ثانیه: رسم دستگاه و یک ثانیه رسم شانه

$y = \frac{2x+1}{x-3}$
 $x=3$ جانب قائم
 $y = \frac{1}{2}$ جانب افقی
 ضریب صورت / ضریب مخرج



$y = \frac{x}{2x-3} = 0$
 $x=3/2$ جانب قائم
 $y = 1/2$ جانب افقی
 $A(0, 0)$

$y = \frac{-2x+1}{3x-5}$
 $x=5/3$ جانب قائم
 $y = -2/3$ جانب افقی
 $A(0, -1/5)$

تمرین: مجموعه جواب نامعادله $-1 < \frac{3x+1}{x-3} < 3$ به کدام صورت است؟ **تست را با (۳) روش حل می‌کنیم:** (تجربی ۹۶)

- (۱) $x < \frac{1}{2}$ (۲) $x < 3$ (۳) $-\frac{1}{2} < x < 3$ (۴) $\frac{1}{2} < x < 3$

راه کلاسیک: حل ناعدی‌های توامان و اشتراک‌بین جواب‌ها:

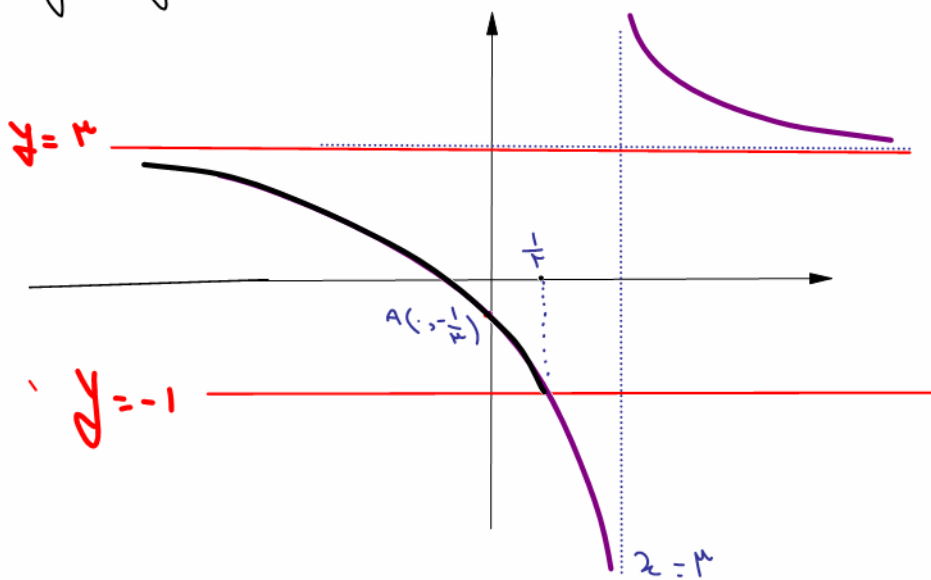
(الف) $x < 3$ $x-3 < 0$ باید $\frac{3x+1-3x+9}{x-3} = \frac{10}{x-3} < 0$

(ب) اشتراک‌بین $\frac{3x+1}{x-3} < 3$ و $\frac{3x+1}{x-3} > -1$

نقطه‌ها: $\frac{1}{2}, 3$

نشان می‌دهد $x < \frac{1}{2}$ گزینه یک درسته

راه نهم: بی‌خواهیم بینگر همدگر باشیم در نام $y = \frac{3x+1}{x-3}$ ها پس از خط انتی $y=3$ و $y=-1$ است؟



$y = 3$

$y = -1$

$\frac{3x+1}{x-3} = 3 \Rightarrow 3x+1 = 3x-9 \Rightarrow 10=0$ (no solution)

$\frac{3x+1}{x-3} = -1 \Rightarrow 3x+1 = -x+3 \Rightarrow 4x = 2 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

روش کنترل گزینه: $x=0$ ناعدی را به صورت $-1 < \frac{3(0)+1}{0-3} = -\frac{1}{3} < 3$ در می‌آورده درست است $x=0$ باید در مجموع جواب باشد لذا $x=0$ را ندارد غلط

عدد $x=1$ ناعدی را $-2 < \frac{3(1)+1}{1-3} = -2 < -2$ غلطی کنه لذا $x=1$ نباید در مجموع جواب باشد لذا ازگ او را $x=1$ فقط گزینه (۱) درسته شامل $x=1$ هست

تمرین: معادله $\sqrt{x-2} + \sqrt{4-2x} = 5$ چند ریشه دارد؟

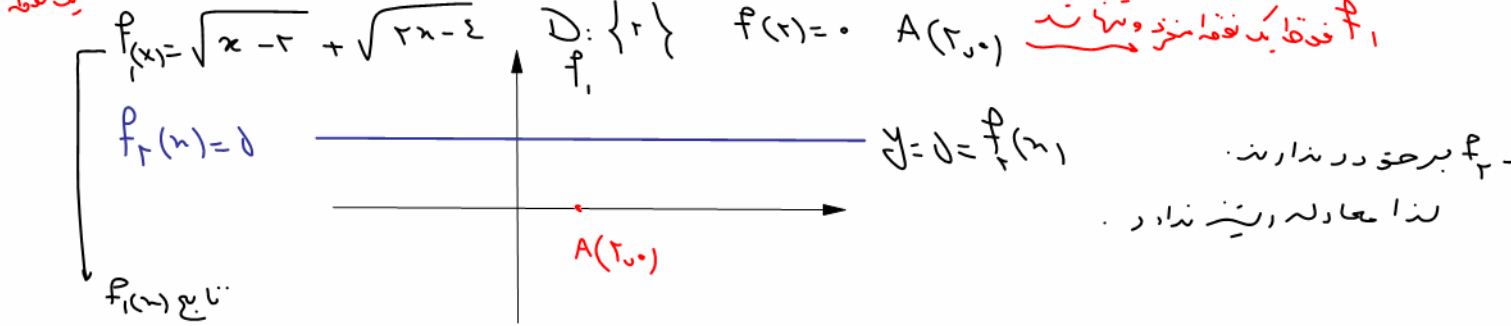
- (۱) یک ریشه مثبت دارد.
- (۲) یک ریشه منفی دارد.
- (۳) دو ریشه مختلف علامه دارد.
- (۴) ریشه ندارد.

$$\begin{aligned} x-2 &\geq 0 & 4-2x &\geq 0 \\ x &\geq 2 & 2 &\geq x \\ (الف) & & (ب) & \\ x &= 2 & & \end{aligned}$$

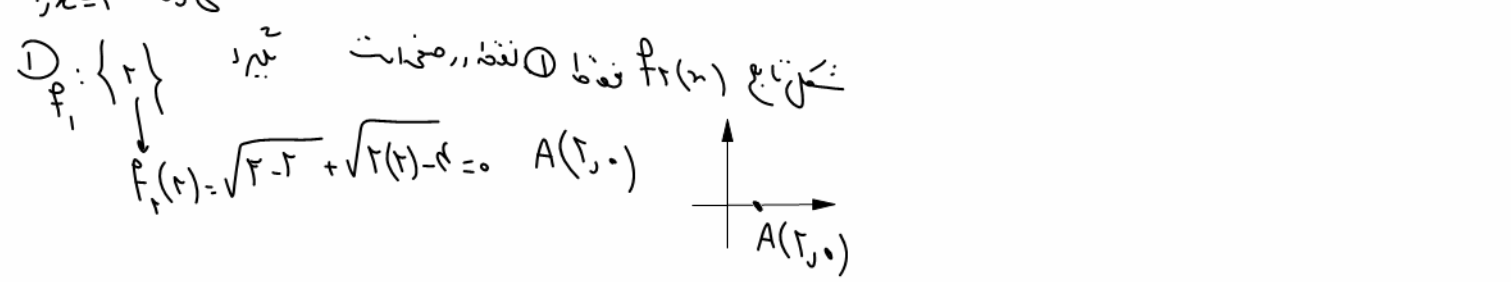
فقط $x=2$ می توان در معادله نه اثبات که آن هم معادله را برقرار نمی کند $5 \neq 0+0$ و معادله جواب ندارد پس گزینه ۴ درسته. طرف چپ تابعی از $x \in \mathbb{R}$ فقط $x=2$ را می برد که صدق نمی گوید و هم از زیر ابر $\textcircled{5}$ نمی شود.

روش حل معادله به کمک ترکیب: معادله را به تابع قابل رسم تبدیل می کنیم و هر ۲ را در یک دست.

مختصات می کنیم نقاط تلاقی نقاط را در دست. تابع ثابت موازی محور x $f_2(x) = 5$ $f_1(x) = \sqrt{x-2} + \sqrt{2x-4}$



فقط یک نقطه مشترک دارند. f_1 و f_2 برخورد ندارند. لذا معادله ریشه ندارد.



ریشه‌های $x=1$ و $x=3$ فقط کوشه هستند که ثابت نمودار عوض می‌شود.

تعریف: اگر x در دامنه $f(x) = |x-1| + |x-3|$ تغییر کند، در چه بازه‌ای تغییر می‌کند؟ سوال برد تابع f را می‌خواهد.

$y \geq -2$ (4) $-1 \leq y \leq 3$ (3) $y \geq 2$ (2) $1 \leq y \leq 3$ (1)

دامنه تابع $f(x) = |x-1| + |x-3|$ کندان است.

دامنه تابع $x \in \mathbb{R}$ است

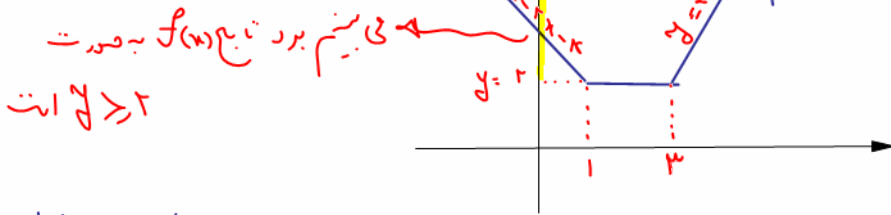
x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
$x-1$	-	0	+	+
$x-3$	-	-	0	+

تابع ثابت

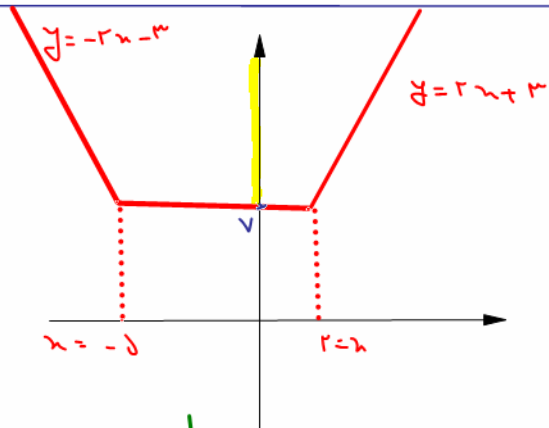
$x < 1$: $y = -x + 1 - x + 3 = -2x + 4$

$1 < x < 3$: $y = x - 1 - x + 3 = 2$

$x > 3$: $y = x - 1 + x - 3 = 2x - 4$



را کنترل کنیم: اول جمع 2 تا قدر مطلق نامنفی است و کمترین 3 و 1 که شامل مقادیر منفی است نقطه عدد دگانه از \mathbb{R} مثل $x=6$ به تابع می‌دهیم $f(6) = 9+7=16$ لذا y بین 1 و 3 محدود نیست. کمترین 1 هم نقطه ندارد درستی.



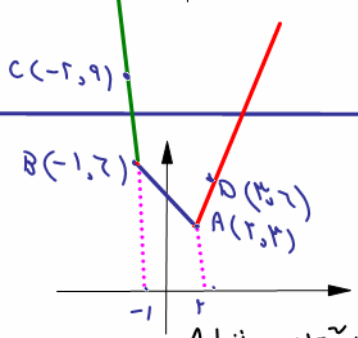
$y = |x+5| + |x-2|$

$x = -5$ $x = 2$

$f(-5) = 7 = f(2)$

$D_f: \mathbb{R}$
 $R_f: [7, \infty)$

حلویت رسم



اگر x داخل قدرها صریح داشت مثل $y = |2x-4| + |x+1|$ ریشه قدرها را به تابع به نقطه A و B رسانیدن $A(2,2)$ و $B(-1,2)$ به بدترین $x=1$ و به بدترین $x=-1$ ریشه $x=2$ و $x=-1$ به تابع $C(-2,9)$ و نقاط C و D را به این دو نقطه را به ترتیب از x کوچک به بزرگ وصل کن

$A(2,2)$ $B(-1,2)$

$D(3,6)$ $C(-2,9)$

x نقطه D به ازای بزرگتر از x نقطه A نقطه C تیل از یکگن از x نقطه B است

گوشه و شیب نمودار محض می‌باشد

تمرین: خط $y = \sqrt{2}$ نمودار هندسی تابع $y = |x-1| - |x+1|$ را در چند نقطه قطع می‌کند؟

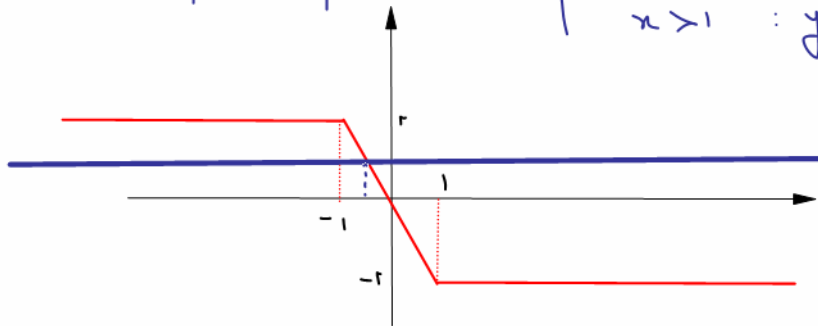
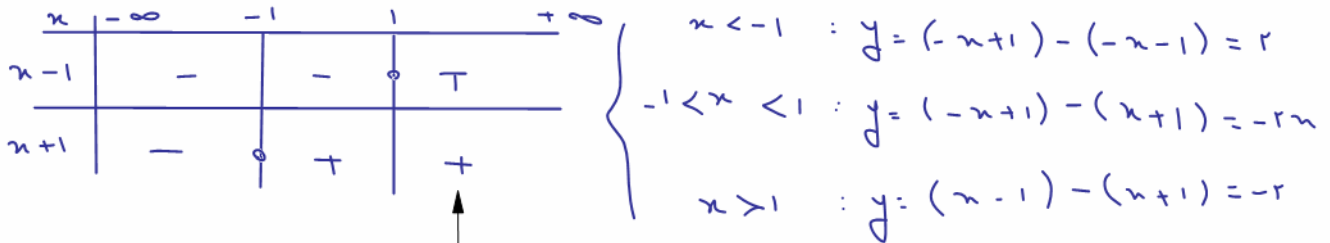
(۴ بی‌شمار

(۳ هیچ

(۲

(۱

حل به روش تریبیم:

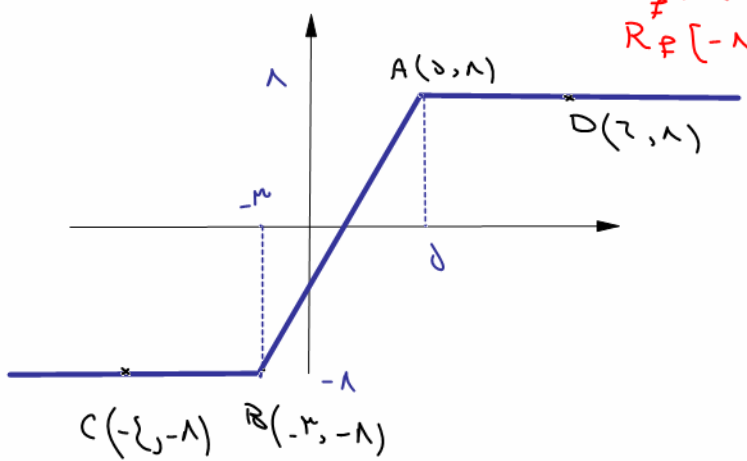


تعداد
تایید
تابع
 $y = \sqrt{2} = 1,4$

مثال: تابع $y = |x+3| - |x-5|$ را رسم کنید.

مثال: تابع

$D_f: \mathbb{R}$
 $R_f: [-1, 8]$

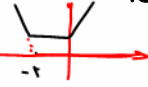
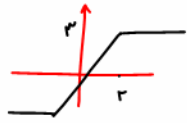
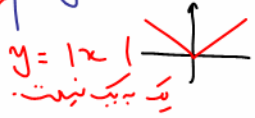


ذات: به طوری برای رسم جمع و تفریق
حد مطلق بی که دانش درجه یک
است. ریشه شدت قدرها را به کل
تابع داده نقاط را می‌یابیم. به عدد قبل
کمترین این عدد یک عدد بعد از بزرگترین
ریشه به تابع می‌دهیم. نقاط را به هم وصل
می‌کنیم.

توینت تابع بودن: یک n بایک n در ارتباط باشد، هر خط موازی محور x ها شکل را n اکثر یک جا قطع کند.

تخریب تابع یک به یک: یک n بایک n در ارتباط باشد، هر خط موازی محور x ها شکل را حداکثر یک جا قطع کند. شکل را n اکثر یک جا قطع کند. $y = x^3$ شکل n اکثر یک جا قطع کند.

تعریف: کدام تابع زیر یک به یک است؟

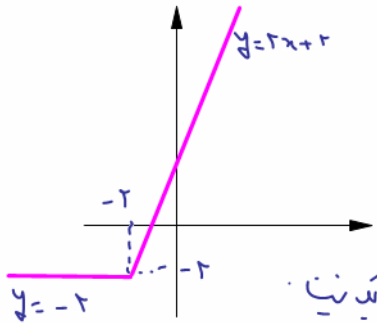


کدام تابع زیر یک به یک است؟
 (۱) $y = |x+2| + |x|$
 جواب (۳) $y = |x+2| + 4x$

تخریب یک به یک دو نقطه در $x = -2$ چون نگه تابع ثابت دارند یک به یک نیستند.

$x = -2$

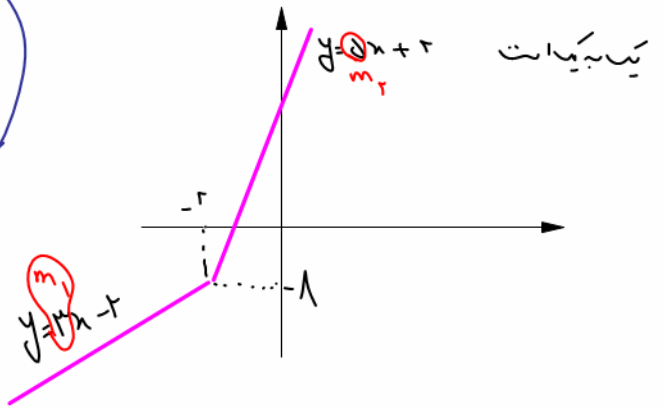
$$y = \begin{cases} x \leq -2 & y = -x - 2 + 4x = 3x - 2 \\ x > -2 & y = x + 2 + 4x = 5x + 2 \end{cases}$$



ریشه داخل نه در مطلق $x = -2$

$$y = \begin{cases} x < -2 & y = -x - 2 + x = -2 \\ x > -2 & y = x + 2 + x = 2x + 2 \end{cases}$$

چون بخشی از تابع ما تابع ثابت است یک به یک نیست.



دکته: تابعی مثل x^3 نیست که آینه صعودی است یک به یک است. اگر تابعی آینه صعودی یا آینه نزولی باشد آن یک به یک است.

تداومی مثل $y = x^{2n}$ یا $y = |x|$ یا $y = ax^2 + bx + c$ یا $y = \sqrt{x}$ یا ثابت باشد یا متناوب باشد

که محور تقارن قائم دارد $x = -\frac{b}{2a}$

مثل $y = \sin x$ یا $y = \cos x$

یک به یک نیستند. ولی یک تابع آینه صعودی مثل $y = x^{2n+1}$ یا آینه نزولی مثل $y = -x^{2n+1}$ یک به یک هستند.

تعریف: اگر $y = \sqrt[4]{\frac{2}{x^2} - \frac{9}{2}} + \sqrt{2x - x^2}$ باشد، دامنه کدام است؟ یا تابع برای کدام x ها تعریف شده است؟

(۱) $[-\frac{2}{3}, 2]$ (۲) $[-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}]$ (۳) $[-\frac{2}{3}, 0) \cup (0, 2]$ (۴) $[-\frac{2}{3}, 0) \cup (0, \frac{2}{3}]$

روش کنترل گزینه: $x=0$ خارج $\frac{2}{x^2}$ را صفری کند لذا گزینه اول و دوم را حذف می‌کنیم. برای $x=2$ داریم $2 - \frac{9}{2} < \frac{2}{x^2} - \frac{9}{2}$ لذا گزینه ۳ هم غلط و ۴ درست است.

نکته: دامنه $g \pm f$ اشتراك دامنه‌های f و g است در حالت $\frac{f}{g}$ از اشتراك دامنه f و g ، بینه‌های $g=0$ را حذف می‌کنیم.

نکته: بعضی اعمال ریاضی دامنه f را عوض نمی‌کنند: مثل دامنه چندجمله‌ای $2x^2 - 2x + 1 = f(x) \neq \mathbb{R}$ است با دامنه تابع $y = \sqrt[3]{f} = \sqrt[3]{2x^2 - 2x + 1}$ یکی است در همان \mathbb{R} است.

$D = D = D = D = D = D = D = D = D = D = D$
 $f \quad |f| \quad [f] \quad \sqrt[n]{f} \quad af+b \quad \sin f \quad \ln f \quad f^{n \in \mathbb{N}} \quad \frac{1}{f}$

حل کلاس: دامنه $\sqrt{2x-x^2}$ برابر \mathbb{R} است با دامنه اشتراك می‌گیریم:

$$\left(\begin{aligned} x^2 &\leq \frac{2}{9} \implies x^2 \leq \frac{2}{9} \implies \frac{2}{9} \leq x^2 \implies \frac{2}{9} \geq \frac{2}{x^2} \implies \frac{2}{x^2} - \frac{9}{2} \geq 0 \end{aligned} \right)$$

با این حال $\frac{2}{x^2} - \frac{9}{2} \geq 0$ را باید حل کنیم. $D = [-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}] - \{x=0\}$ است. \mathbb{R} است با اینهمه همگام کنیم می‌شود.

در $y = \frac{1}{u}$ با $u \neq 0$

در $y = \frac{u}{b}$ با $u > 0$ و $b > 0$ و $b \neq 1$

در $y = \sqrt[n]{u}$ با $u \geq 0$

زیرا مسائل درجه زوج در حلوی تعریف نیاید معنی شود. حلوی تعریف و معنی آن نباید معنی با صفر شود. همچنین اگر هم تعریف نباشد معنی می‌شود.

معرفی لگاریتم، تابع لگاریتمی، تابع نمایی:

تقریباً داریم: $b^y = x \iff \log_b x = y$
 مبنای لگاریتم ۱۰ است. $b = \text{base} =$ پایه

$\log_7 49 = 2$ یا $\log_{10} 100 = 2$

$\log_{10} 0.01 = -2$ یا $\log_7 49 = 2$

۸ ج توانی از ۲ است ۳ $\iff \log_2 8 = 3$
 به عنوان

$\log_{10} 10 = 1$ $\log_2 4 = 2$ $\log_{10} 1000 = 3$ $\log_2 1 = -1$

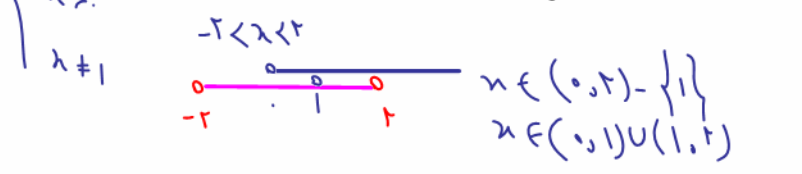
$\log_2 8 = 3$ $\log_3 27 = 3$ $\log_5 5 = \log_{10} 10 = 1$ $\log_2 4 = 2$

$\log_a ab = \log_a a + \log_a b$ $\log_a \frac{a}{b} = \log_a a - \log_a b$ $\log_a a^b = b \log_a a$

تقریباً داریم: $y = \log_b x$ $b > 0$ و $x > 0$ و $b \neq 1$

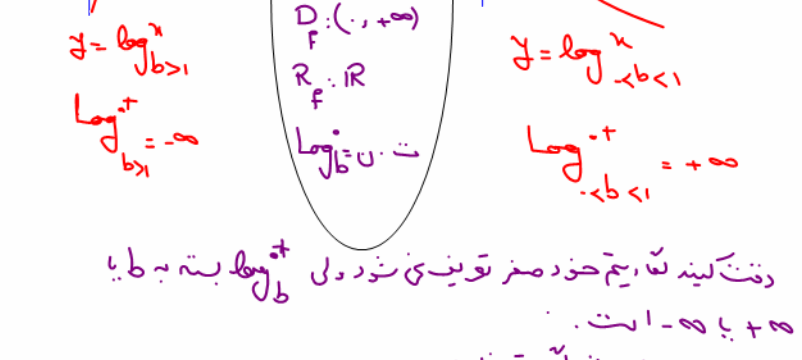
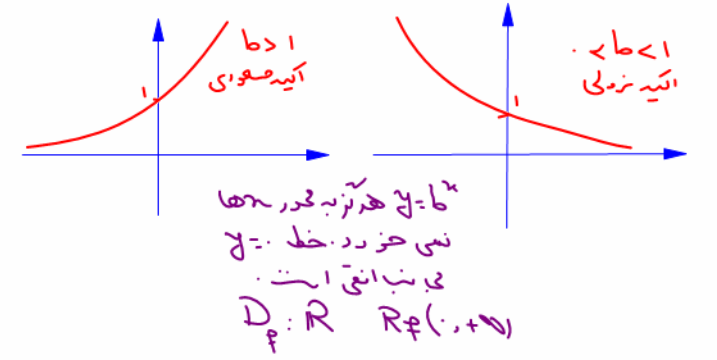
مثال: دامنه $y = \log_2(x^2 - 2)$
 $\begin{cases} x^2 - 2 > 0 \\ x^2 > 2 \\ -2 < x^2 < 2 \\ x \neq 0 \end{cases}$

عضوی شود: $f(x) = \sqrt{\log_2(x-2)}$
 دامنه $\{x \mid x > 2\}$
 $\log_2(x-2) \geq 0 \iff x-2 \geq 1 \iff x \geq 3$
 دامنه: $[3, \infty)$



نمودار $y = b^x$ $b > 0$ تابع نمایی وارون تابع
 تقریباً داریم: $y = \log_b x$ نسبت به نمودار اولیه
 با همان خط $y = x$ است.

نمودار $y = \log_b x$
 $b < 1$ $b > 1$
 مشترک:
 $\log_b 1 = 0$
 $\log_b b = 1$
 $x = 0$ محاسبه نمی شود
 $D_f: (0, +\infty)$
 $R_f: \mathbb{R}$
 $T = \mathbb{N}$ $\log_b a = n$

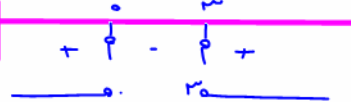


دامنه $y = b^x$ همان دامنه $y = \sqrt{x}$ است. $D_f: \mathbb{R}$
 دامنه $y = \log_b x$ $D_f: (0, +\infty)$ است.

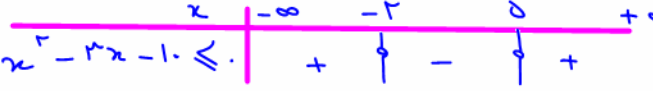
وقت کمید تقریباً خود من تقریباً خودی شودی $\log_b a = n$ به طای
 $+\infty$ یا $-\infty$ است.
 عدد منفرجه اعداد منفی تقریباً ندارند.
 جلوی \log_b نباید منفی شودی جواب تقریباً می تواند منفی باشد. مثال:
 اعداد وقتی بیشتر می شوند تقریباً آنها زیاد می شود به شرطی که مبنای آن از ۱ باشد.

تمرین: اگر $f(x) = \sqrt{1 - \log(x^2 - 3x)}$ باشد، دامنه کدام است؟ راهنمایی: $\log_b a = c \iff a = b^c$

- (۱) $[-2, 0) \cup (3, 5]$ (۲) $[-2, 3)$ (۳) $[-2, 0) \cup (3, 5)$ (۴) $(0, 5]$

راه کلاسیک: $x^2 - 3x = x(x-3) > 0$  انت

شرط $\sqrt{\quad}$: $1 - \log(x^2 - 3x) \geq 0 \iff \log(x^2 - 3x) \leq 1$
 $(10)^1 = 10 \geq x^2 - 3x$
 $\geq x^2 - 3x - 10$

$x^2 - 3x - 10 \leq 0$  اشتقاق: $D_f: [-2, 0) \cup (3, 5]$

راه حذف گزینه: $x=0$ جوابی نداریم راضی کننده لذا $x=0$ نباید در جواب باشد پس گزینه ۲ مردود است.

$x=10$ جوابی نداریم راضی کننده لذا گزینه ۴ که $x=10$ دارد مردود است.

$x=5$ برای تابع شکی درست نمیکنه ر $f(5) = \sqrt{1-0} = 1$ لذا $x=5$ باید در جواب باشد نه این سه گزینه بیک درست است.

تمرین: مجموعه جواب $|x^2 + 1| > |x - 2| + 2x + 1$ کدام است؟

(۴) (۱, ۲)

(۳) (-۱, ۲)

(۲) (-۱, ۱)

(۱) (-۲, ۱)

راه کلاسیک که طرازیه: $x^2 + 1$ مثبت است از داخل قدر ببردن بارورینه داخل $x - 2 = 0$ برابر $x = 2$ است و داریم:

فرض $x \geq 2$

$$x^2 + 1 > |x - 2| + 2x + 1 \Rightarrow x^2 + 1 > (x - 2) + 2x + 1 \Rightarrow x^2 + 1 > 3x - 1 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 > 0$$

فرض $x < 2$

$$x^2 + 1 > |x - 2| + 2x + 1 \Rightarrow x^2 + 1 > -(x - 2) + 2x + 1 \Rightarrow x^2 + 1 > x + 1 \Rightarrow x^2 - x > 0 \Rightarrow x(x - 1) > 0$$

اجتماع: $x \geq 2$ یا $x < 1$ و $x < 2$ و $x > 1$ و $x < 2$

جواب: (۱, ۲)

باید $x \geq 2$ یا $x < 2$ حل کرده دین جواب در فرض $x \geq 2$ و $x < 2$ اشتراک می گیریم در آخرین در جواب اجتماع می گیریم.

راه کنترل تقریبی: $x = 0$ نامعادیه را به صورت $1 > 1 - درمی آید که غلط است لذا آزمونیه های شامل $x = 0$ مردودند فقط آزمونیه $x = 1$ درست است.$

برای حل نامعادیه شامل قدر مطلق (مثل بالا) ریشه داخل قدر مطلق $(x = 2)$ را یافته قدر مطلق را تقسیم علامت می کنیم در هر سمت (مثلاً $x > 2$ یا $x < 2$) نامعادیه را حل کرده بین جواب هر قسمت در فرض اشتراک می گیریم در آخرین جواب های نهایی اجتماع می گیریم.

دقتی قراره بین اشتراک و "بگذاریم اشتراک" می گیریم اما اگر اشتراک "یا" بگذاریم اجتماع \cup می گیریم \cap اشتراک = \cap یا = اجتماع = \cup

تعریف: حاصل $[\frac{x^2+2}{x^2+1}] + [\sqrt{x^2+1}]$ کدام است؟ (x عدد صحیح مثبت) مفهوم $[x]$: بزرگترین عدد صحیح نابینتر از x یعنی اگر

اوش عددنداری : $x+1$ (1) x (2) $x+2$ (3) 2 (4)

x صحیح بود خودش

دائر x غیر صحیح بود عدد صحیح قبل آن را بگو.

مثلاً x را بگیر:

$$x=2 \rightarrow \left[\frac{2+2}{2+1} = \frac{4}{3} = 1,3 \right] + [\sqrt{2+1} = 5 = 2, \dots] = 1+2 = 3$$

تنها گزینه‌ای که به ازای $x=2$ برابر عدد 3 هست گزینه یک است.

تمرین: اگر $\frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} = \frac{x}{(x^2-2x+1)}$ باشد، $A+B$ کدام است؟

۴ (۴)
۳ (۳)
۲ (۲) ✓
۱ (۱)

راه سریع: عددگذاری: $x=2 \rightarrow \frac{A}{2-1=1} + \frac{B}{(2-1)^2=1} = \frac{2}{2-2+1=1} \rightarrow A+B=2$

راه کلاسیک:

$$\frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} = \frac{A(x-1)+B}{(x-1)^2} = \frac{x}{x^2-2x+1=(x-1)^2}$$

$$A(x-1)+B = x$$

$$Ax - A + B = x \rightarrow \text{ضریب جملات هم درجه را برابر قرار می دهیم.}$$

دو طرف تساوی برابرند پس اگر ضریب x طرف راست یک است ضریب x طرف چپ هم باید یک باشد

لذا $A=1$ طرف راست تساوی عدد ثابت ندارد لذا طرف چپ تساوی هم نباید x داشته باشد

راشته باشد پس

$A+B=2$ پس $B=A=1$ و $B=A$ و $-A+B=0$

تمرین: اگر $2x - \frac{1}{x} = A$ باشد، حاصل $x^3 - \frac{1}{8x^3}$ کدام است؟

راه عددتزاری: $A^2 - \frac{3}{2}$ (۴) $\frac{A^2 + 6A}{8}$ (۳) $\frac{A^2 + 2A}{4}$ (۲) $A^2 + \frac{3}{2}$ (۱)

حاصل $x^3 - \frac{1}{8x^3}$ $\rightarrow A = 1 = 1 - 1 = 2 \rightarrow 2x - \frac{1}{x} = A$ فرض $x = 1$

حاصل خواسته شده با x برابر $\frac{7}{8}$ است و x عدل $A = 1$ است.
 گزینه ای درست که اگر $x = 1$ باشد حاصل $\frac{7}{8}$ در بیاید
 می دانیم که با $x = 1$ خواهیم داشت $A = 1$ پس در
 گزینه ها $A = 1$ می آید این که گزینه ۳ درست است

$\frac{1}{2}$	$1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$
$\frac{3}{2}$	$\frac{1+3}{2} = 1$
$\frac{5}{2}$	$\frac{1+7}{2} = \frac{7}{2}$ ✓
$\frac{7}{2}$	$1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}$

$x = 1 \quad A = 1$

راه کلاسیک: چون صحبت از $x^3 - \frac{1}{8x^3}$ است و به توان ۳ رسانیم، آنرا متعجب جمع ۲ جمله

$$(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$$

$$* (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b)$$

$$2x - \frac{1}{x} = A \rightarrow x^3 - \frac{1}{8x^3} = ?$$

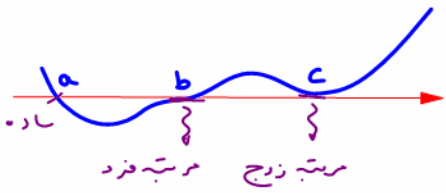
$\div 2 \rightarrow x - \frac{1}{2x} = \frac{A}{2}$

هرضین رابه توان ۳ برسول طبق *

$$\left(x - \frac{1}{2x}\right)^3 = \left(\frac{A}{2}\right)^3 \rightarrow x^3 - \frac{1}{8x^3} - 3x \left(\frac{1}{2x}\right) \left(x - \frac{1}{2x}\right) = x^3 - \frac{1}{8x^3} - \frac{3}{2}A = \frac{A^3}{8}$$

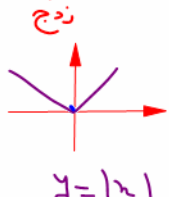
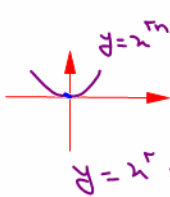
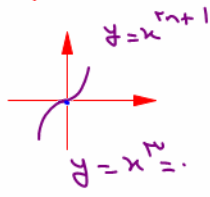
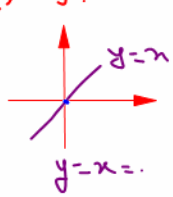
$$x^3 - \frac{1}{8x^3} = \frac{A^3}{8} + \frac{3}{2}A = \frac{A^3 + 12A}{8}$$

تعیین علامت به روش سریع



نام ریشه در عبارات جبری: $y = (x-a)(x-b)(x-c) = 0$
 $x = a$: ریشه ساده $\rightarrow x = a$
 $(x-b)^3$: ریشه مکرر مرتبه ۳ $\rightarrow x = b$
 (معنا) دوبار $x = c$ ریشه مکرر مرتبه ۲ $\rightarrow x = c$

هرچه n اشکال به y هائیکتر



توابع در ریشه های ساده و مکرر مرتبه فرد

تغییر علامت می دهند

در ریشه معنادار و مکرر مرتبه زوج

در ریشه داخل نه مطلق تغییر علامت

نمی دهند

در ریشه تغییر علامت ندارد در ریشه تغییر علامت دارد

① $ax + b = 0 \rightarrow x = -\frac{b}{a}$

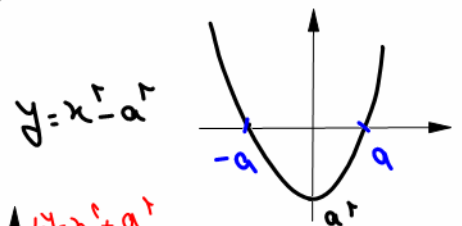
② $ax^2 + bx + c = 0 \rightarrow \Delta = b^2 - 4ac$

- $\Delta > 0$: ریشه ساده، ۲
- $\Delta = 0$: ریشه معنادار، ۱
- $\Delta < 0$: ریشه ندارد

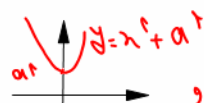
③ $(x-a)^{2n} = 0 \rightarrow x = a$ ریشه مکرر مرتبه زوج

④ $(x-a)^{2n+1} = 0 \rightarrow x = a$ ریشه مکرر مرتبه فرد

⑤ $x^2 - a^2 = 0 \rightarrow \Delta = 4a^2 > 0 \rightarrow x = \pm a$ ریشه ساده، ۲
 ریشه ها: $x = a$ و $x = -a$



$x^2 + a^2 = 0 \rightarrow x^2 = -a^2$ ریشه ندارد $y = x^2 + a^2$



امثال به محور x هائیک خوررو ریشه ندارد $\Delta = b^2 - 4ac = 0 - 4(1)(a^2) = -4a^2 < 0$ ریشه ندارد

ادش تعیین علامت سریع: صورت و مخرج را به ضرب عوامل تجزیه می‌کنیم. ریشه‌های صورت و مخرج را یافته نام آن‌ها را می‌نویسیم. به ترتیب کوچک به بزرگ در جدول تعیین علامت می‌گذاریم. عددی بزرگتر از بزرگترین ریشه در نظر گرفته به کلی عبارت داده علامت آن را در اولین خانه سمت راست زیر $+\infty$ می‌نویسیم علامت هر خانه از خانه سمت چپ خود علوم می‌شود. عبارات جبری در ریشه ساده و مزد تغییر علامت می‌دهند ولی در ریشه مضارب، مرتبه زوج و ریشه داخله را طلق تغییر علامت نمی‌دهند.

$$P(x) = \frac{(x^2+5)|x|(x+2)(x-3)^2(x-4)^3}{(x-5)^4}$$

فازدهانه

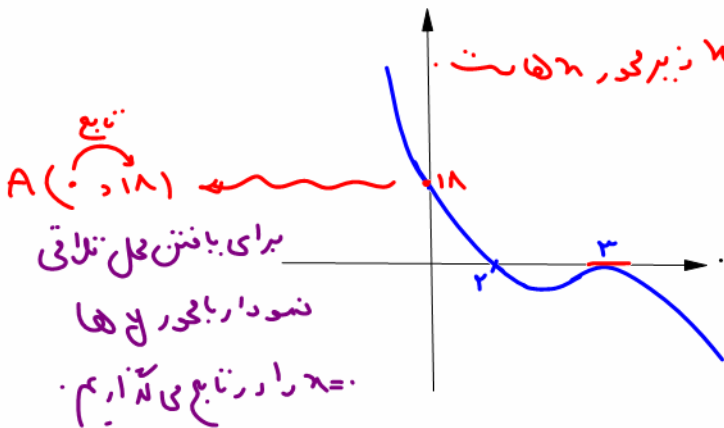
چهار → $(x-5)^4$

تابع در بازه $(-\infty, -2) \cup (4, 5) \cup (5, +\infty)$ بالایی محور x هاست. بالایی خط $y=0$ مثبت است.

سوال: تابع $y = \ominus(x-2)(x^2-7x+9)$ در کدام بازه زیر خط $y=0$ است؟ زیر محور x ها

$$y = \ominus(x-2)(x-3)^2 < 0$$

تابع در بازه $(2, 3) \cup (3, +\infty)$ زیر محور x هاست.



نام ریشه انواع برخورد تابع را با محور x هاست حفصی کنه

برای یافتن محل تلاقی با محور x ها y را صفر می‌گذاریم. در این حالت ریشه یا صفری را به دست می‌آید.

$$0 = -(x-2)(x-3)^2 \rightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=3 \end{cases}$$

محل تلاقی با محور x ها $B(2, 0)$ $C(3, 0)$

Homework (1)

۱ مساحت ناحیه محدود به نمودارهای دو تابع $y = \frac{1}{p}x + 2$ و $y = \sqrt{x^2 - 4x + 4}$ ، کدام است؟

۹ (۲)

۸ (۱)

۱۲ (۴)

۱۰ (۳)

جاهای خالی داده شده را با عبارت مناسب کامل نمایید.

۲ نقاط برخورد نمودار تابع با محور را صفرهای تابع می‌نامیم.

۳ اگر سه نقطه $A(a, 2a + 1)$ ، $B(3, -1)$ و $C(2, 4)$ روی یک خط راست قرار گیرند، مقدار a کدام است؟

 $\frac{7}{12}$ (۲) $\frac{7}{13}$ (۱) $\frac{12}{7}$ (۴) $\frac{13}{7}$ (۳)

۴ مثلث ABC با مختصات رئوس $A(3, 2)$ ، $B(-1, 3)$ و $C(1, 0)$ مفروض است. نوع مثلث ABC کدام است؟

قائم‌الزاویه (۲)

متساوی‌الاضلاع (۱)

هیچ‌کدام (۴)

متساوی‌الساقین (۳)

۵ اگر نقطه $A(6 - x, x + 2)$ در ناحیه اول قرار داشته باشد، چند مقدار طبیعی برای x یافت می‌شود؟

۶ (۲)

۵ (۱)

۸ (۴)

۷ (۳)

۶ اگر فاصله $A(m, -1)$ و $B(4, 7)$ برابر ۸ باشد، فاصله دو نقطه $C(m, 7)$ و $D(1, m - 1)$ چقدر است؟

۳ (۲)

۵ (۱)

۴ (۴)

۶ (۳)

۷ اگر دو ضلع مجاور یک مربع خطوط $L : 3x + my = 0$ و $L' : 2x + (m - 5)y = \frac{13}{2}$ باشند، مختصات نقطه برخورد L و L' کدام است؟

- (۱) $(1, -\frac{3}{2})$
 (۲) $(\frac{3}{2}, -1)$
 (۳) $(-1, \frac{3}{2})$
 (۴) $(-\frac{3}{2}, -1)$

۸ اگر $A(2, 5)$ ، $B(2, 3)$ و $C(-1, 5)$ سه رأس مثلثی باشند، نوع مثلث کدام است؟

- (۱) متساوی الاضلاع
 (۲) متساوی الساقین
 (۳) قائم الزاویه
 (۴) متساوی الساقین قائم الزاویه

۹ فاصله نقطه تلاقی دو خط $y = 2x + 2$ و $y = 3x - 3$ ، از مبدأ مختصات کدام است؟

- (۱) $2\sqrt{2}$
 (۲) $3\sqrt{2}$
 (۳) ۱۲
 (۴) ۱۳

۱۰ اگر $A(2, 5)$ ، $B(2, 3)$ و $C(-1, 5)$ سه رأس مثلثی باشند، آن مثلث چه نام دارد؟

- (۱) متساوی الساقین
 (۲) قائم الزاویه
 (۳) متساوی الاضلاع
 (۴) متساوی الساقین قائم الزاویه

۱۱ اگر x نقطه‌ای روی محور x ها باشد به طوری که فاصله‌اش از نقطه $\sqrt{2}$ کمتر از $\sqrt{8}$ باشد، حدود x کدام است؟

- (۱) $0 < x < 4\sqrt{2}$
 (۲) $0 < x < 3\sqrt{2}$
 (۳) $-\sqrt{2} < x < 3\sqrt{2}$
 (۴) $-\sqrt{2} < x < 4\sqrt{2}$

۱۲ شیب خطی که محور x ها را با طول -4 و محور y ها را با عرض 2 قطع می‌کند، کدام است؟

- (۱) -2
 (۲) $\frac{1}{2}$
 (۳) $-\frac{1}{2}$
 (۴) 2

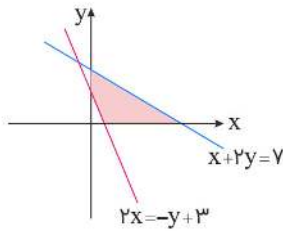
۱۳ دو نقطه روی نیمساز ربع اول و سوم وجود دارد که فاصله آن تا نقطه $A(2, 0)$ برابر $\sqrt{10}$ می‌باشد. مجموع عرض‌های دو نقطه مورد نظر کدام است؟

- (۱) ۳
 (۲) ۲
 (۳) ۴
 (۴) -۱

۱۴ اگر شیب خط گذرا از دو نقطه $A(k, k + 1)$ و $B(2, k)$ منفی باشد، حدود k کدام است؟

- (۱) $k > 2$
 (۲) $k < 2$
 (۳) $k > -2$
 (۴) $k < 3$

۱۵ باتوجه به شکل زیر، مساحت قسمت رنگی کدام است؟



(۱) ۱۰

(۲) ۱۵

(۳) ۲۰

(۴) ۵

۱۶ مجموع مقادیر a کدام باشد تا فاصله نقطه $A(a, 1)$ از $B(3, 2)$ برابر $\sqrt{2}$ شود؟

(۲) ۸

(۱) ۶

(۴) ۲

(۳) ۴

۱۷ اگر $A(3, 2)$ و $B(-1, -1)$ رئوس غیرمجاور یک مربع باشند و این مربع داخل یک دایره محاط شده باشد، در این صورت مساحت فضای بین دایره و مربع کدام است؟ ($\pi \approx 3$)

(۲) $5/25$

(۱) ۵

(۴) $6/25$

(۳) ۶

۱۸ مساحت مثلث ABC با مختصات رئوس $A(3, 1)$ ، $B(-2, 0)$ و $C(-1, 2)$ کدام است؟

(۲) ۱۰

(۱) ۵

(۴) $4/5$

(۳) $5/5$

۱۹ اگر مختصات دو سر قطر یک دایره $A(3, 2)$ و $B(-2, 4)$ باشد، مساحت دایره کدام است؟

(۲) $7/5\pi$

(۱) 7π

(۴) $7/75\pi$

(۳) $7/25\pi$

۲۰ به ازای کدام مقدار m ، سه نقطه $A(4, m)$ ، $B(3, -2)$ و $C(m+4, 4)$ روی یک خط راست قرار می‌گیرند؟

(۲) ۱

(۱) -۴

(۴) هیچ مقدار

(۳) ۱ و -۴

۲۱ مقدار m چقدر باشد تا خط به معادله $2y + x = 3$ از نقطه $A(m, m-1)$ عبور کند؟

(۲) $5/3$

(۱) $4/3$

(۴) $2/3$

(۳) $1/3$

۲۲ اگر نقطه $A(2m+1, m-1)$ در ناحیه اول و بالای خط $y = x$ قرار گیرد، حدود m کدام است؟

(۲) $m > 0$

(۱) $m > 1$

(۴) $m \in \emptyset$

(۳) $m > 2$

۲۳ خط d دایره‌ای به مرکز (a, b) را در دو نقطه $(0, 4)$ و $(-2, 2)$ قطع کرده است. اگر فاصله مرکز دایره تا خط d ، 3 باشد، حاصل $a + b$ کدام است؟

- (۱) 3
 (۲) 2
 (۳) 1
 (۴) -2

۲۴ اگر A و B دو نقطه با مختصات $(2, n + 3)$ و $(4, 5)$ باشند و $AB = 3$ باشد، آنگاه حاصل جمع حالت‌های ممکن برای n چند است؟

- (۱) 2
 (۲) 4
 (۳) 8
 (۴) 5

۲۵ رئوس مثلث متساوی‌الاضلاع ABC روی دایره‌ای به مرکز $(-4, 3)$ قرار دارد. اگر $A(3, -2)$ و $C(x, y)$ باشد، x کدام می‌تواند باشد؟ (فاصله محل برخورد میانه‌ها از رئوس مثلث برابرند)

- (۱) $3 + \sqrt{3}$
 (۲) $-2 \pm \sqrt{3}$
 (۳) $2\sqrt{3}$
 (۴) $\pm\sqrt{3}$

پاسخ (1) Homework

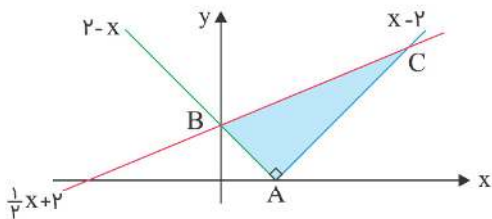
گزینه ۴

۱

$$y_1 = \sqrt{x^2 - 4x + 4} = \sqrt{(x-2)^2} = |x-2|$$

$$y_2 = \frac{1}{2}x + 2$$

$$|x-2| = \begin{cases} x-2 & ; x \geq 2 \\ -x+2 & ; x < 2 \end{cases}$$



$$\begin{cases} A = (2, 0) \\ x-2 = \frac{1}{2}x + 2 \Rightarrow \frac{1}{2}x = 4 \Rightarrow x = 8 \Rightarrow C = (8, 4) \\ 2-x = \frac{1}{2}x + 2 \Rightarrow \frac{3}{2}x = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow B = (0, 2) \end{cases}$$

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(0-2)^2 + (2-0)^2} = 2\sqrt{2}$$

$$AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(8-2)^2 + (4-0)^2} = 6\sqrt{2}$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{AB \times AC}{2} = \frac{2\sqrt{2} \times 6\sqrt{2}}{2} = 12$$

ها x

۲

گزینه ۳

۳

$$m_{AB} = m_{BC} \Rightarrow \frac{2a+1+1}{a-3} = \frac{4+1}{2-3} \Rightarrow \frac{2a+2}{a-3} = -5$$

$$\Rightarrow -5a + 15 = 2a + 2 \Rightarrow 7a = 13 \Rightarrow a = \frac{13}{7}$$

گزینه ۴

۴

$$\left. \begin{aligned} AB &= \sqrt{(3+1)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{16+1} = \sqrt{17} \\ AC &= \sqrt{(3-1)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} \\ BC &= \sqrt{(1+1)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{مختلف الاضلاع}$$

$$AB^2 \neq AC^2 + BC^2 \Rightarrow \text{قائم الزاویه نیست}$$

گزینه ۱

۵

$$\begin{cases} 6-x > 0 \Rightarrow x < 6 \\ x+2 > 0 \Rightarrow x > -2 \end{cases} \xrightarrow{\cap} -2 < x < 6$$

اعداد طبیعی موجود در این بازه ۵ تا است.

گزینه ۱

۶

$$|AB| = \lambda \Rightarrow \sqrt{(m-4)^2 + (-1-7)^2} = \lambda \Rightarrow (m-4)^2 = 0 \Rightarrow m = 4$$

$$m = 4 \Rightarrow C(4, 7), D(1, 3)$$

$$|CD| = \sqrt{(4-1)^2 + (7-3)^2} = 5$$

گزینه ۱

۷

دو ضلع مجاور مربع بر هم عمودند، پس ضرب شیبهای دو خط L و L' برابر -1 است.

$$\frac{-3}{m} \times \frac{-2}{m-5} = -1 \Rightarrow m(m-5) = -6 \Rightarrow m^2 - 5m + 6 = 0 \Rightarrow m = 2, 3$$

اگر $m = 2$ باشد:

$$3 \times \begin{cases} 3x + 2y = 0 \\ 2x - 3y = \frac{13}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9x + 6y = 0 \\ 4x - 6y = 13 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{+} 13x = 13 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = -\frac{3}{2}$$

مختصات نقطه برخورد دو خط L و L' برابر $(1, -\frac{3}{2})$ است.به ازای $m = 3$ مختصات نقطه برخورد به صورت $(\frac{13}{8}, \frac{-13}{8})$ است که در گزینه‌ها وجود ندارد.

گزینه ۳

۸

$$AB = \sqrt{(2-2)^2 + (3-5)^2} = 2$$

$$AC = \sqrt{(-1-2)^2 + (5-5)^2} = 3$$

$$BC = \sqrt{(-1-2)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{13}$$

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 \Rightarrow 13 = 9 + 4 \text{ مثلث قائم‌الزاویه}$$

گزینه ۴

۹

$$y_1 = y_2 \Rightarrow 3x - 3 = 2x + 2 \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 12 \end{cases}$$

نقطه تلاقی دو خط: $A(5, 12)$

$$OA = \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow OA = \sqrt{25 + 144} = 13$$

گزینه ۲

۱۰

$$AB = \sqrt{(2-2)^2 + (3-5)^2} = 2$$

$$AC = \sqrt{(-1-2)^2 + (5-5)^2} = 3$$

$$BC = \sqrt{(-1-2)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{13}$$

مثلث قائم‌الزاویه:

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 \Rightarrow 13 = 9 + 4$$

گزینه ۳

۱۱

$$|x - \sqrt{2}| < \sqrt{\lambda} \Rightarrow -\sqrt{\lambda} < x - \sqrt{2} < \sqrt{\lambda}$$

$$\xrightarrow{+\sqrt{2}} -\sqrt{\lambda} + \sqrt{2} < x < \sqrt{\lambda} + \sqrt{2} \Rightarrow -\sqrt{2} < x < 3\sqrt{2}$$

گزینه ۲

۱۲

خط محور x ها را با طول -4 قطع می‌کند، در نتیجه نقطه $(-4, 0)$ رو خط قرار دارد.
خط محور y ها را با عرض 2 قطع می‌کند، در نتیجه نقطه $(0, 2)$ رو خط قرار دارد.

$$\Rightarrow \text{شیب: } m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2 - 0}{0 - (-4)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

گزینه ۳

۱۳

نقاطی را که روی خط $y = x$ قرار می‌گیرند، به صورت $M(a, a)$ در نظر می‌گیریم:

$$|AM| = \sqrt{10} \Rightarrow \sqrt{(a-2)^2 + (a-0)^2} = \sqrt{10} \Rightarrow a^2 - 4a + 4 + a^2 = 10$$

$$\Rightarrow 2a^2 - 4a - 6 = 0 \xrightarrow{:2} a^2 - 2a - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ a = 3 \end{cases}$$

پس نقاط مورد نظر $M_1(-1, -1)$ و $M_2(3, 3)$ می‌باشند. مجموع عرض‌ها برابر ۲ خواهد بود.

گزینه ۲

۱۴

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{k - (k+1)}{2 - k} < 0 \Rightarrow \frac{1}{k-2} < 0 \Rightarrow k-2 < 0 \Rightarrow k < 2$$

گزینه ۱

۱۵

$$x + 2y = 7 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = \frac{7}{2} \\ y = 0 \Rightarrow x = 7 \end{cases}$$

$$2x = -y + 3 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 3 \\ y = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2} \end{cases}$$

مساحت رنگی:

$$\left(\frac{7}{2} \times 7\right) - \left(\frac{3}{2} \times \frac{3}{2}\right) = \frac{49}{2} - \frac{9}{4} = 10$$

گزینه ۱

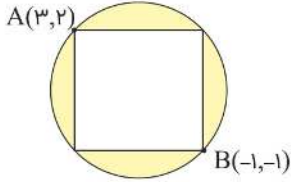
۱۶

$$\sqrt{(a-3)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{a^2 - 6a + 10} = \sqrt{2} \Rightarrow a^2 - 6a + 10 = 2$$

$$\Rightarrow a^2 - 6a + 8 = 0 \Rightarrow (a-2)(a-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ a = 4 \end{cases} \Rightarrow 2 + 4 = 6$$

گزینه ۴

۱۷



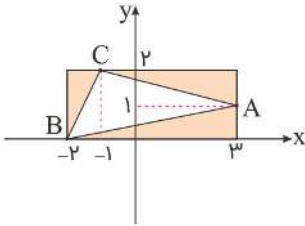
$$AB = \sqrt{(3+1)^2 + (2+1)^2} = \sqrt{16+9} = 5$$

$$\left. \begin{aligned} S_{\text{مربع}} &= \frac{(AB)^2}{2} = \frac{25}{2} \\ S_{\text{دایره}} &= \pi \left(\frac{AB}{2}\right)^2 = 3\left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{75}{4} \end{aligned} \right\} \Rightarrow S_{\text{رنگی}} = \frac{75}{4} - \frac{25}{2} = 6\frac{1}{4}$$

گزینه ۴

۱۸

مثلث را رسم می‌کنیم:



$$S_{\triangle ABC} = \text{مساحت رنگی} - \text{مساحت مستطیل}$$

$$= (5 \times 2) - (1 + 2 + 2/5) = 10 - 5/5 = 4/5$$

گزینه ۳

۱۹

$$AB = \sqrt{(3+2)^2 + (2-4)^2} = \sqrt{25+4} = \sqrt{29}$$

$$r = \frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{29}}{2} \Rightarrow S_{\text{دایره}} = \pi r^2 = \pi \times \left(\frac{\sqrt{29}}{2}\right)^2 = \frac{29\pi}{4} = 7\frac{1}{4}\pi$$

گزینه ۳

۲۰

$$m_{AB} = m_{AC} \Rightarrow \frac{m+2}{4-3} = \frac{m-4}{4-m-4} \Rightarrow \frac{m+2}{1} = \frac{m-4}{-m}$$

$$\Rightarrow m^2 + 3m - 4 = 0 \Rightarrow (m-1)(m+4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m=1 \\ m=-4 \end{cases}$$

گزینه ۲

۲۱

$$2(m-1) + m = 3 \Rightarrow 3m = 5 \Rightarrow m = \frac{5}{3}$$

گزینه ۴

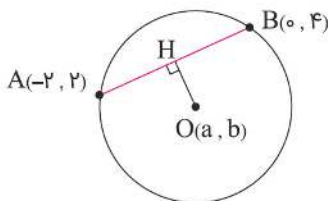
۲۲

چون A در ناحیه اول است، پس طول و عرض آن مثبت می‌باشد و از طرفی بالای خط $y = x$ قرار دارد، در نتیجه عرض آن بیشتر از طول آن است.

$$m-1 > 2m+1 > 0 \Rightarrow \begin{cases} m-1 > 2m+1 \Rightarrow m < -2 \\ 2m+1 > 0 \Rightarrow m > -\frac{1}{2} \end{cases} \xrightarrow{n} \emptyset$$

گزینه ۲

۲۳



نقطه H وسط پاره‌خط AB است:

$$H = \frac{A+B}{2} = (-1, 3)$$

$$AH = \sqrt{(-2+1)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{2}, \quad OH = 3$$

قضیه فیثاغورس $\rightarrow OA = \sqrt{2+9} = \sqrt{11}$

$$OH = \sqrt{(a+1)^2 + (b-3)^2} = 3 \Rightarrow a^2 + 2a + 1 + b^2 - 6b + 9 = 9$$

$$\Rightarrow a^2 + 2a + b^2 - 6b = -1 \quad (1)$$

$$OA = \sqrt{(a+2)^2 + (b-2)^2} = \sqrt{11} \Rightarrow a^2 + 4a + 4 + b^2 - 4b + 4 = 11$$

$$\Rightarrow a^2 + 4a + b^2 - 4b = 3 \quad (2)$$

جایگذاری $\rightarrow 2a + 2b = 4 \Rightarrow a + b = 2$

گزینه ۲

۲۴

با داشتن نقاط A و B، پاره خط AB را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$\vec{AB} = B - A = (5, 4) - (n + 3, 2) = (2 - n, 2)$$

حال طول پاره خط AB را توسط فرمول زیر به دست می‌آوریم و برابر ۳ قرار می‌دهیم:

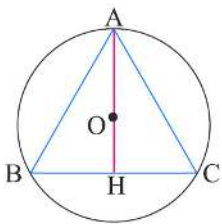
$$|\vec{AB}| = \sqrt{(2-n)^2 + (2)^2} = 3 \Rightarrow (2-n)^2 + 2^2 = 9 \Rightarrow n^2 - 4n - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \Delta = 16 + 4 = 20 \Rightarrow n = \frac{4 \pm \sqrt{20}}{2}$$

حاصل جمع حالت‌های ممکن برای n برابر است با ۴.

گزینه ۱

۲۵



$$OA = \sqrt{(3-3)^2 + (-2+4)^2} = 2$$

$$\xrightarrow{OA=OC} OC = \sqrt{(x-3)^2 + (y+4)^2} = 2 \quad (1)$$

مرکز دایره همان محل برخورد میانه‌های مثلث است، بنابراین:

$$AH = \frac{3}{2}OA = \frac{3}{2} \times 2 = 3$$

اگر طول ضلع مثلث را a در نظر بگیریم، طبق قضیه فیثاغورس داریم:

$$AC^2 = HC^2 + AH^2 \Rightarrow a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = 9 \Rightarrow a = \sqrt{12}$$

$$\Rightarrow AC = \sqrt{(x-3)^2 + (y+2)^2} = \sqrt{12} \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(2), (1)} (x-3)^2 + (y+2)^2 = (x-3)^2 + (y+4)^2 + 8$$

$$\Rightarrow y = -5 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3} + 3$$

Homework (2)

۱ مقدار m چقدر باشد تا عبارت $x^2 + 4mx + 16$ مربع کامل شود؟

(۱) ± 4

(۲) ± 2

(۳) $\pm\sqrt{20}$

(۴) -1

۲ اگر کمترین مقدار تابع $y = 5x^2 - bx + 7$ برابر ۲ باشد، آنگاه b کدام است؟

(۱) $-10, 10$

(۲) 3

(۳) -3

(۴) $5, -5$

۳ مجموع ضرایب معادله درجه دومی صفر است، یکی از جوابهای معادله کدام است؟

(۱) -1

(۲) صفر

(۳) $\frac{1}{2}$

(۴) 1

۴ کدامیک از معادلههای زیر ریشه مضاعف دارد؟

(۱) $4x^2 - 12x + 9 = 0$

(۲) $3x^2 + 4x - 2 = 0$

(۳) $x^2 - 2x + 3 = 0$

(۴) $x^2 + 3x - 2 = 0$

۵ محور تقارن سهمی به معادله $y = -2x^2 - 5x + 7$ کدام است؟

(۱) $x = \frac{5}{2}$

(۲) $x = -\frac{5}{2}$

(۳) $x = -\frac{5}{4}$

(۴) $x = \frac{5}{4}$

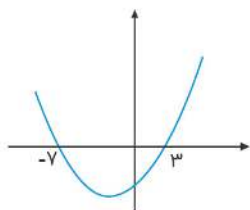
۶ در شکل زیر معادله محور تقارن کدام است؟

(۱) $x = -2$

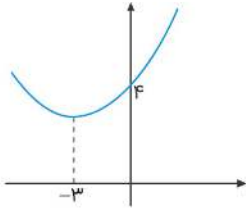
(۲) $x = -4$

(۳) $y = -2$

(۴) $y = -4$



۷ اگر شکل زیر نمایش از سهمی $y = 2x^2 + bx + c$ باشد، حاصل $b + c$ کدام است؟



۴ (۱)

۱۲ (۲)

۱۶ (۳)

۲۰ (۴)

۸ قدرمطلق تفاضل ریشه‌های معادله $-6x^2 - 5x - 1 = 0$ کدام است؟

$\frac{5}{6}$ (۲)

$\frac{1}{6}$ (۴)

$\frac{1}{5}$ (۱)

$\frac{2}{5}$ (۳)

۹ اگر در معادله درجه دوم $8x^2 - bx + 2 = 0$ تفاضل دو ریشه برابر صفر باشد، آنگاه b کدام است؟ ($b > 0$)

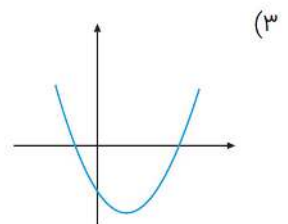
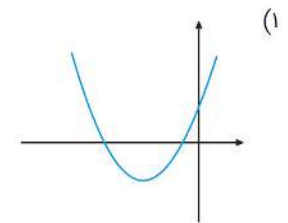
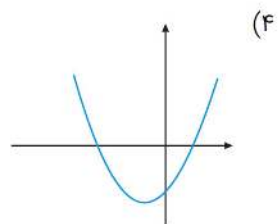
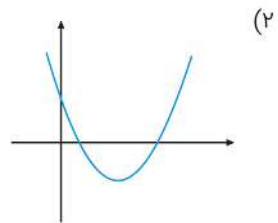
۸ (۲)

۶ (۴)

۴ (۱)

۲ (۳)

۱۰ نمودار تابع $y = 2x^2 + 4x - 1$ کدام است؟



پاسخ (2) Homework

گزینه ۲

۱

عبارت درجه دوم وقتی مربع کامل می‌شود که دلتای آن مساوی صفر باشد، پس:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (4m)^2 - 4(1)(16) = 16m^2 - 64 = 0$$

$$m^2 = 4 \Rightarrow m = \pm 2$$

گزینه ۱

۲

اگر در معادله سهمی $a > 0$ باشد، سهمی در نقطه رأس خود دارای کمترین مقدار است.

طول رأس سهمی : $x = -\frac{b}{2a} \Rightarrow x = -\frac{-b}{10} = \frac{b}{10}$

در معادله جاگذاری می‌کنیم $\rightarrow 2 = 5\left(\frac{b}{10}\right)^2 - b\left(\frac{b}{10}\right) + 7 \Rightarrow 2 = \frac{b^2}{20} - \frac{b^2}{10} + 7$

$$\Rightarrow \frac{b^2}{20} - \frac{b^2}{10} = -5 \Rightarrow \frac{b^2(1-2)}{20} = -5 \Rightarrow \frac{-b^2}{20} = -5 \Rightarrow b^2 = 100 \Rightarrow b = \pm 10$$

گزینه ۴

۳

اگر مجموع ضرایب یک عبارت درجه دوم برابر با صفر باشند، یکی از ریشه‌ها $x = 1$ است.

یکی از ریشه‌ها : $x = 1 \xrightarrow{a+b+c=0} ax^2 + bx + c = 0$

گزینه ۱

۴

وقتی $\Delta = 0$ شود، معادله ریشه مضاعف خواهد داشت:

$$1) \Delta = 144 - 4(4)(9) = 144 - 144 = 0$$

$$2) \Delta = 16 - 4(3)(-2) = 16 + 24 = 40 > 0 \text{ دو جواب}$$

$$3) \Delta = 4 - 4(1)(3) = 4 - 12 = -8 < 0 \text{ جواب ندارد}$$

$$4) \Delta = 9 - 4(1)(-2) = 9 + 8 = 17 > 0 \text{ دو جواب}$$

گزینه ۳

۵

در سهمی به معادله $y = ax^2 + bx + c$ نقطه‌ای به طول $x = -\frac{b}{2a}$ رأس سهمی است. خطی که از رأس سهمی به موازات محور عرض‌ها رسم می‌شود، محور تقارن سهمی است.

$$y = -2x^2 - 5x + 7 \Rightarrow x = -\frac{b}{2a} \Rightarrow x = -\frac{(-5)}{2(-2)} = -\frac{5}{4}$$

گزینه ۱

۶

می‌دانیم سهمی متقارن است و طول رأس سهمی در وسط ریشه‌ها قرار دارد و محور تقارن نیز از رأس می‌گذرد:

$$s(x, y) \Rightarrow x = \frac{-7 + 3}{2} = -\frac{4}{2} = -2 \Rightarrow x = -2$$

گزینه ۳

۷

باتوجه به نقطه رأس و $(0, 4)$ داریم:

$$\left. \begin{array}{l} y = 2x^2 + bx + c \xrightarrow{(0,4)} 4 = 0 + 0 + c \Rightarrow c = 4 \\ \text{طول رأس: } \frac{-b}{2a} = \frac{-b}{4} = -3 \Rightarrow -b = -12 \Rightarrow b = 12 \end{array} \right\} \Rightarrow b + c = 16$$

گزینه ۴

۸

با استفاده از روش کلی حل معادله درجه دوم (روش Δ) داریم:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4(-6)(-1) = 25 - 24 = 1$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x_1 = \frac{5 + \sqrt{1}}{2(-6)} = \frac{6}{-12} = -\frac{1}{2}$$

$$x_2 = \frac{5 - \sqrt{1}}{2(-6)} = \frac{4}{-12} = -\frac{1}{3} \Rightarrow |x_1 - x_2| = \left| -\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{3}\right) \right| = \frac{1}{6}$$

روش تستی: در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ ، قدرمطلق تفاضل ریشه‌ها از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\text{قدرمطلق تفاضل ریشه‌ها} = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \frac{1}{6}$$

گزینه ۲

۹

اگر تفاضل ریشه‌ها صفر باشد، آنگاه معادله دارای ریشه مضاعف است، پس Δ صفر می‌باشد. در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ برابر است با:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$8x^2 - bx + 2 = 0$$

$$\Delta = (-b)^2 - 4(8)(2) = 0 \Rightarrow b^2 - 64 = 0 \Rightarrow b^2 = 64 \Rightarrow b = \pm 8$$

طبق سؤال: $b = 8$

گزینه ۴

۱۰

در سهمی داده‌شده، $y = 2x^2 + 4x - 1$ ، مختصات رأس سهمی عبارت است از:

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2(2)} = -1$$

$$y = 2(-1)^2 + 4(-1) - 1 = -3$$

مختصات رأس سهمی: $(-1, -3)$

چون طول رأس سهمی برابر $x = -1$ می‌باشد، بنابراین گزینه‌های "۲" و "۳" حذف می‌شوند. گزینه "۱" نیز حذف می‌شود، زیرا محل تقاطع سهمی با محور y ، برابر -1 می‌باشد و عددی منفی است، بنابراین پاسخ صحیح گزینه "۴" می‌باشد.

Homework (3)

ریاضی

۱ دامنه تابع $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{[x]-4}$ کدام است؟

(۲) $[1, +\infty) - \{4\}$

(۱) $\mathbb{R} - [4, 5)$

(۴) $[1, 4) \cup [5, +\infty)$

(۳) $[1, 4] \cup [6, +\infty)$

حسابان

۲ مجموع ریشه‌های معادله $||x-1|-2|=1$ کدام است؟

(۲) ۴

(۱) ۲

(۴) ۸

(۳) ۶

ریاضی

۳ حاصل $A = \frac{[-2/7] + [\frac{1}{4}] - [\sqrt{1}]}{[9] - [-0/3] + [0/8]}$ کدام است؟

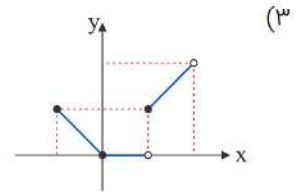
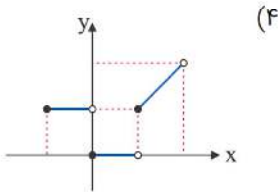
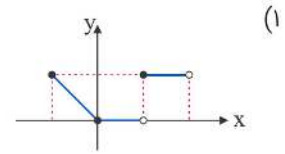
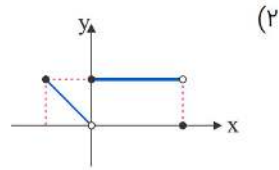
(۲) $-\frac{3}{10}$

(۱) $-\frac{1}{2}$

(۴) $\frac{1}{2}$

(۳) $\frac{3}{10}$

۴ نمودار $f(x) = x \cdot [x]$ در بازه $[-1, 2]$ کدام است؟



۵ معادله $[x + 4] + [x - 7] = 9$ دارای مجموعه جواب $[a, b]$ می‌باشد. حداکثر مقدار $b + a$ کدام است؟

(۱) ۱۳

(۲) ۱۴

(۳) ۱۵

(۴) ۱۲

۶ مجموعه جواب معادله $[2x + 3] + [2x - 9] = 0$ به صورت $[a, b]$ می‌باشد، بیشترین مقدار $b - a$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{2}$

(۲) ۱

(۳) $\frac{3}{2}$

(۴) ۲

حسابان

۷ جواب نامعادله $|\frac{2x-1}{x-3}| > 1$ کدام است؟

(۲) $\mathbb{R} - (-2, \frac{4}{3}), x \neq 3$

(۱) $\mathbb{R} - [-2, \frac{4}{3}], x \neq 3$

(۴) $(-\infty, \frac{4}{3}]$

(۳) $[-2, 3)$

۸ در مجموعه جواب نامعادله $(x - 4) \cdot |x + 1| < 3x - 9$ چند عدد طبیعی وجود دارد؟

(۱) ۲

(۲) ۳

(۳) ۵

(۴) بی‌شمار

۹ تعداد ریشه‌های معادله $|x^2 - 2x| = 2$ کدام است؟

(۱) یک ریشه

(۲) دو ریشه

(۳) سه ریشه

(۴) بدون ریشه

۱۰ در مجموعه جواب نامعادله $2 < |2x - 1| < 5$ چند عدد صحیح وجود دارد؟

- (۱) ۲
 (۲) ۱
 (۳) ۳
 (۴) بدون عدد صحیح

۱۱ به ازای هر $x < -1$ ، حاصل $\sqrt{x^2 + 2x + 1} - \sqrt{x^2 - 4x + 4}$ کدام است؟

- (۱) ۳
 (۲) $2x - 1$
 (۳) -3
 (۴) $-2x + 1$

۱۲ نسبت حاصل ضرب ریشه‌های معادله $||x - 2| - 3| = 2$ به مجموع ریشه‌ها کدام است؟

- (۱) $\frac{-48}{7}$
 (۲) $\frac{-63}{8}$
 (۳) $\frac{63}{8}$
 (۴) $\frac{48}{7}$

پاسخ (3) Homework

ریاضی

گزینه ۴

۱

$$\left. \begin{array}{l} x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1 \\ [x]-4=0 \Rightarrow [x]=4 \Rightarrow 4 \leq x < 5 \end{array} \right\} \Rightarrow D_f = [1, 4) \cup [5, +\infty)$$

ریشه‌های مخرج

حسابان

گزینه ۲

۲

$$\left\{ \begin{array}{l} |x-1| - 2 = 1 \Rightarrow |x-1| = 3 \Rightarrow \begin{cases} x-1 = 3 \Rightarrow x = 4 \\ x-1 = -3 \Rightarrow x = -2 \end{cases} \\ |x-1| - 2 = -1 \Rightarrow |x-1| = 1 \Rightarrow \begin{cases} x-1 = 1 \Rightarrow x = 2 \\ x-1 = -1 \Rightarrow x = 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

$$\text{مجموع ریشه‌ها} = 4 + (-2) + 2 + 0 = 4$$

ریاضی

گزینه ۱

۳

تابعی را که به هر عدد صحیح k خود همان عدد و به تمام اعداد میان دو عدد صحیح متوالی k و $k+1$ ، عدد صحیح k را نسبت می‌دهد، تابع جزء صحیح می‌نامند که با $f(x) = [x]$ نمایش می‌دهند.

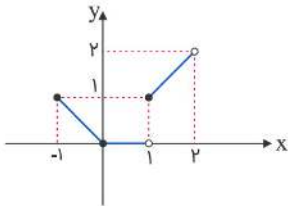
$$\left\{ \begin{array}{l} -3 \leq -2/7 < -2 \Rightarrow [-2/7] = -3 \\ 0 \leq 1/4 < 1 \Rightarrow [1/4] = 0 \\ 2 \leq \sqrt{8} < 3 \Rightarrow [\sqrt{8}] = 2 \\ -1 \leq -0/3 < 0 \Rightarrow [-0/3] = -1 \\ 0 \leq 0/8 < 1 \Rightarrow [0/8] = 0 \end{array} \right. \Rightarrow A = \frac{-3 + 0 - 2}{9 - (-1) + 0} = \frac{-5}{10} = -\frac{1}{2}$$

گزینه ۳

۴

$$-1 \leq x < 2 \Rightarrow \begin{cases} -1 \leq x < 0 \Rightarrow [x] = -1 : f(x) = -x \\ 0 \leq x < 1 \Rightarrow [x] = 0 : f(x) = 0 \\ 1 \leq x < 2 \Rightarrow [x] = 1 : f(x) = x \end{cases}$$

$$(-1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 2)$$



گزینه ۱

۵

$$[x] + 4 + [x] - 7 = 9 \Rightarrow 2[x] - 3 = 9$$

$$\Rightarrow 2[x] = 12 \Rightarrow [x] = 6$$

$$\Rightarrow 6 \leq x < 7 \Rightarrow x \in [6, 7)$$

$$b + a = 7 + 6 = 13$$

گزینه ۱

۶

$$[2x] + 3 + [2x] - 9 = 0$$

$$2[2x] = 6 \Rightarrow [2x] = 3 \Rightarrow 3 \leq 2x < 4$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2} \leq x < 2 \Rightarrow x \in \left[\frac{3}{2}, 2\right)$$

$$b - a = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$

حسابان

گزینه ۱

۷

$$\frac{|2x-1|}{|x-3|} > 1 \xrightarrow{x \neq 3} |2x-1| > |x-3|$$

به توان ۲ برسانید:

$$(2x-1)^2 > (x-3)^2 \quad (I)$$

$$4x^2 - 4x + 1 > x^2 - 6x + 9$$

$$\Rightarrow 3x^2 + 2x - 8 > 0 \Rightarrow x < -2 \cup x > \frac{4}{3} \quad (II)$$

x	-2	3/4	
3x ² +2x-8	+	-	+
	ع	ع	

$$\xrightarrow{(I) \cap (II)} (-\infty, -2) \cup \left(\frac{4}{3}, +\infty\right) - \{3\} \text{ یا } \mathbb{R} - \left[-2, \frac{4}{3}\right], x \neq 3$$

گزینه ۲

۸

چون منظور سؤال اعداد طبیعی نامعادله هستند، پس باید محدوده $x > 0$ را در نظر بگیرید، در نتیجه عبارت داخل قدر مطلق مثبت خواهد شد و قدر مطلق برداشته می‌شود:

x	1	5	
x ² -6x+5	+	-	+
	ع	ع	

$$(x-4) \cdot (x+1) < 3x-9 \Rightarrow x^2 - 3x - 4 < 3x - 9$$

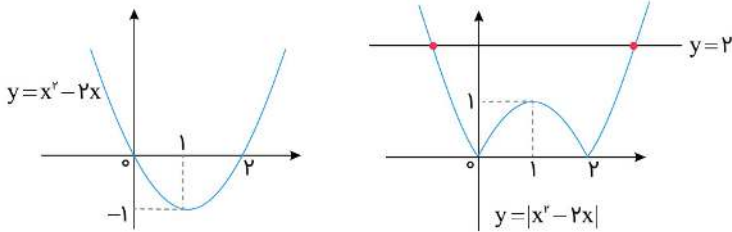
$$x^2 - 6x + 5 < 0$$

$$(1, 5) \Rightarrow \text{اعداد طبیعی} = \{2, 3, 4\}$$

گزینه ۲

۹

روش هندسی:



$|x^2 - 2x| = 2 \Rightarrow$ دو ریشه دارد.

گزینه ۱

۱۰

$$2 < |2x - 1| < 5 \Rightarrow \begin{cases} 2 < 2x - 1 < 5 \Rightarrow \frac{3}{2} < x < 3 \\ \text{یا} \\ -5 < 2x - 1 < -2 \Rightarrow -2 < x < -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{مجموعه جواب} = (-2, -\frac{1}{2}) \cup (\frac{3}{2}, 3)$$

اعداد صحیح در جواب نامعادله: $\{-1, 2\}$

گزینه ۳

۱۱

$$A = \sqrt{(x+1)^2} - \sqrt{(x-2)^2}$$

$$A = |x+1| - |x-2| \xrightarrow[\text{تعیین علامت}]{x < -1} A = -(x+1) + (x-2)$$

$$A = -x - 1 + x - 2 = -3$$

گزینه ۲

۱۲

$$|x - 2| - 3 = 2 \Rightarrow |x - 2| = 5 \Rightarrow \begin{cases} x - 2 = 5 \Rightarrow x_1 = 7 \\ x - 2 = -5 \Rightarrow x_2 = -3 \end{cases}$$

$$|x - 2| - 3 = -2 \Rightarrow |x - 2| = 1 \Rightarrow \begin{cases} x - 2 = 1 \Rightarrow x_3 = 3 \\ x - 2 = -1 \Rightarrow x_4 = 1 \end{cases}$$

$$\text{حاصل ضرب ریشه‌ها} = 7(-3)(3)(1) = -63$$

$$\text{حاصل جمع ریشه‌ها} = 7 + (-3) + (3) + 1 = 8$$

$$\text{نسبت} = \frac{-63}{8}$$

تابع

زوج مرتب

زوج مرتب به دوتایی (a, b) گفته می‌شود که a را مؤلفه اول و b را مؤلفه دوم می‌نامیم. دقت کنید که در زوج مرتب، ترتیب مؤلفه‌ها مهم است، یعنی زوج مرتب (a, b) با زوج مرتب (b, a) فرق دارد.

هر زوج مرتب، یک نقطه را در صفحه مشخص می‌کند و دو زوج مرتب، وقتی با هم برابرند که مؤلفه‌های اولشان با هم و مؤلفه‌های دومشان نیز با هم برابر باشند.

$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c, b = d$$

تمرین: اگر دو زوج مرتب $(x-y, 1)$ و $(3, 2x+3y)$ یک نقطه را در صفحه مشخص کنند، حاصل $3x+2y$ کدام است؟

۹ (۴)

۶ (۳)

۵ (۲)

۴ (۱)

$$\begin{cases} x-y=3 \\ 2x+3y=1 \end{cases} \rightarrow \begin{array}{r} x-y=3 \\ + \quad 2x+3y=1 \\ \hline 3x+2y=4 \end{array}$$

تمرین: زوج مرتب (a^2, b^2) با کدام زوج مرتب نمی‌تواند برابر باشد؟

(a, b) (۴) $(4-2a^2, -1-3b^2)$ ✓

(b^2, a^2) (۲)

$(-a^2, -b^2)$ (۱)

$a=b=1$

$a=b=1$ یا -1

$a=b=.$

$(a^2, b^2) = (1, 1)$

$(a^2, b^2) = (1, 1)$

$(a^2, b^2) = (0, 0)$

$(a, b) = (1, 1)$

$(b^2, a^2) = (1, 1)$

$(-a^2, -b^2) = (0, 0)$

رابطه

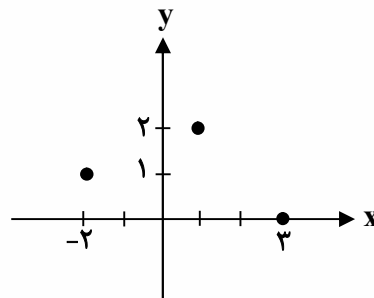
برای نشان دادن ارتباط و وابستگی بین دو مجموعه از رابطه استفاده می‌شود و آن را معمولاً با حرف R نشان می‌دهند. رابطه‌ها را می‌توان به

شکل زوج مرتب، جدول، نمودار ون و نمودار دکارتی نشان داد.

$R = \{(1, 2), (3, 0), (-2, 1)\}$ (زوج مرتب)

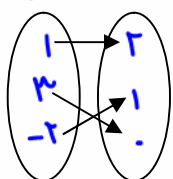
جدول

(مؤلفه اول)	۱	۳	-۲
(مؤلفه دوم)	۲	۰	۱



(نمودار دکارتی یا نمایش هندسی)

نمودار ون



(مؤلفه اول) (مؤلفه دوم)

تعریف: اگر $R = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{N}, xy = 10\}$ باشد، رابطه R چند عضو دارد؟

- ۳ (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴)

میزب: دو عدد طبیعی ده شده :

$$R = \{(1, 10), (10, 1), (2, 5), (5, 2)\}$$

۴ عضوی است

تعریف: رابطه‌ی $R = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{N}, 2x + y \leq 7\}$ ، دارای چند زوج مرتب است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور ۸۸) منظم فکر کنید:

- ۵ (۱) ۶ (۲) ۸ (۳) ۹ (۴)

$$R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 1), (2, 2), (3, 1)\}$$

۹ عضو
۳ مرتبه ۲

تابع

گفتیم که رابطه‌ها را می‌توان به شکل‌های مختلف مثل زوج مرتب، نمودار ون و ... نشان داد. بدانید که تابع را هم می‌توانیم به همان شکل‌ها نشان دهیم. با هم ببینیم:

تعریف تابع از نظر زوج‌های مرتب

تابع مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب است که در آن مؤلفه‌های اول متمایز باشند، پس اگر دو زوج مرتب پیدا شوند که مؤلفه‌های اول مساوی داشتند، آن رابطه تابع نیست، مگر این‌که مؤلفه‌های دوم آن زوج مرتب‌ها نیز برابر باشند:

اگر $(x, y_1) \in f, (x, y_2) \in f \Rightarrow y_1 = y_2$

ریشه دوم ۹ برابر ۳ یا -۳ است ولی $\sqrt{9} = 3$

$f_1 = \{(0, 1), (-2, 3), (4, 2)\}$

$f_3 = \{(2, 3), (1, -4), (2, \sqrt{9})\}$

$f_5 = \{\} = \emptyset$

$f_2 = \{(1, 2), (3, 4), (1, 2)\}$

$f_4 = \{(-1, 2)\}$

$f_6 = \{(1, 2), (2, 2), (1, 5)\}$

مثال ۶: کدام یک از رابطه‌های زیر تابع نیست؟ فقط f_6

در مجموعه تکرار اعضا مهم نیست
یک نقطه تابع است

زیرا هر خط موازی لایها تابع را باید حد اکثر
بب نقطه قطع کند یعنی یک نقطه یا هیچ نقطه

تعریف: اگر رابطه $\{(a-1, 2), (5, a-2), (a-2, b+3), (3, 5), (5, 3)\}$ تابع باشد $b+a$ چه قدر است؟

- ۷ (۳) ۵ (۲) ۲ (۱)



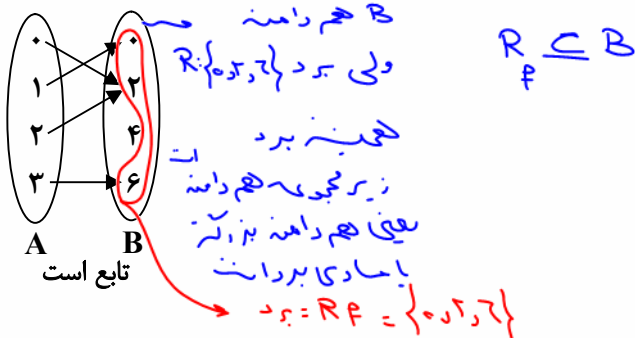
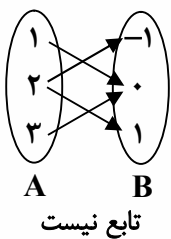
تعریف: رابطه $\{(3, m^2), (2, 1), (-2, m), (3, m+2), (m, 4)\}$ به ازای کدام مقدار m ، یک تابع است؟ (سراسری تجربی خارج ۸۵)

$$\begin{aligned}
 & \underbrace{2 \quad 3 \quad -1 \quad 2}_{-2 \quad 1} \\
 & m^2 = m + 2 \rightarrow m^2 - m - 2 = 0 \\
 & m = -1 \quad m = 2
 \end{aligned}$$

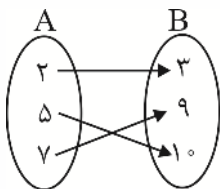
با $m=2$ داریم $(2, 4)$ و $(2, 1)$ یعنی نقطه -1 را

تعریف تابع از نظر نمودار ون

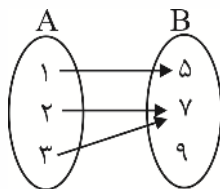
یک رابطه بین مجموعه A و مجموعه B که با نمودار ون نمایش داده می‌شود، وقتی تابع است که از هر مؤلفه مجموعه A (مؤلفه اول) فقط و فقط یک فلش خارج شود نه بیشتر و همه اعضای A به بازی گرفته شوند و هیچ عضوی از A نباشد که از آن فلش خارج نشود A همان دامنه‌ی تابع است.



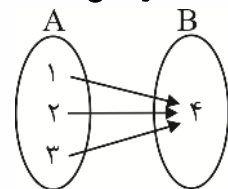
در نمودار پیکانی یک تابع، مجموعه‌ی همه‌ی عضوهای مجموعه‌ی اول، دامنه‌ی تابع و مجموعه‌ی همه‌ی عضوهایی از مجموعه‌ی دوم که پیکان به آن‌ها وارد شده، برد تابع است.



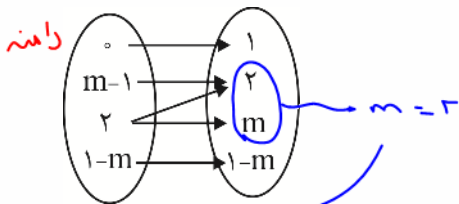
دامنه‌ی تابع $= \{2, 5, 7\}$
 برد تابع $= \{3, 9, 10\} = B$ هم دامنه



دامنه‌ی تابع $= \{1, 2, 3\}$
 برد تابع $= \{5, 7, 9\}$
 هم دامنه $= \{5, 7, 9\}$



دامنه‌ی تابع $= \{1, 2, 3\}$
 برد تابع $= \{4\}$



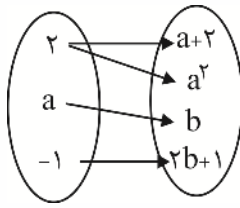
تعریف: با توجه به تابع مربوط به نمودار مقابل، کوچک‌ترین عضو دامنه کدام است؟

- (۲) صفر
- (۴) ۲

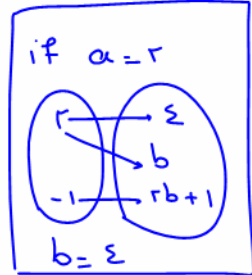
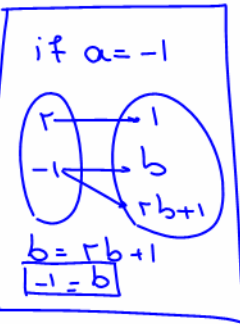
- (۱) -۱
- (۳) ۱



تعریف: اگر نمودار مقابل نمایش یک تابع باشد، مقدار $a+b$ کدام می تواند باشد؟



$$a^2 = a+2 \rightarrow a^2 - a - 2 = 0 \rightarrow a = -1 \quad a = 2$$



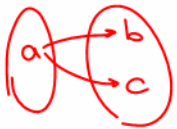
(1) صفر

(2) -1

(3) 2

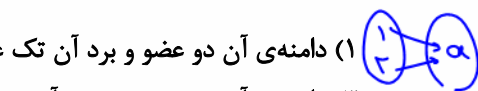
(4) -2

تعریف: در کدام یک از گزینه های زیر، یک تابع با دامنه و برد داده شده وجود ندارد؟



(1) دامنه ای آن دو عضو و برد آن تک عضوی باشد.

(2) دامنه ای آن تک عضوی و برد آن دو عضوی باشد.

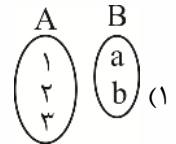
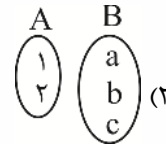
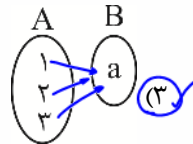
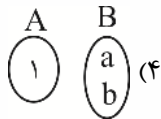


(3) دامنه ای آن دو عضوی و برد آن تک عضوی باشد.

(4) دامنه ای آن تک عضوی و برد آن دو عضوی باشد.



تعریف: در گزینه های زیر اگر از تمام اعضای A به اعضای B پیکان رسم کنیم، کدام گزینه همیشه نشان دهنده ی یک تابع است؟



تابع ثابت

$f: A \rightarrow B$ تعداد توابع = n^m

n = تعداد اعضای B
 m = تعداد اعضای A

تعریف: از مجموعه $A = \{1, 2, 3, 4\}$ چند تابع به مجموعه $B = \{1, 2, 3\}$ می توانیم تعریف کنیم به شرطی که $f(1) = 1$ باشد؟

۸۱ (4)

۲۷ (3) **جواب**

۶۴ (2) **معضور**

۱۶ (1)

نکته: اگر از مجموعه A که m عضوی است به مجموعه B که n عضوی است تعداد کل توابع ممکن را بخواهیم بنویسیم n^m حالت خواهیم داشت اما در این حالت $f(1) = 1$ است پس:

آرگومنت نداشته و تلفظ بود $f(1) = 1$

مثلاً به دو تابع از A به B

$f_1 = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,1)\}$

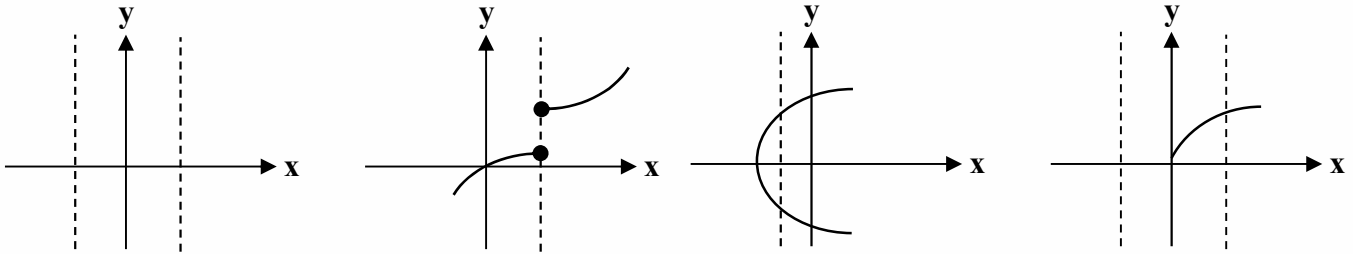
$f_2 = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,2)\}$

حالت ۳ × حالت ۳ × حالت ۳ × حالت ۳ = ۸۱



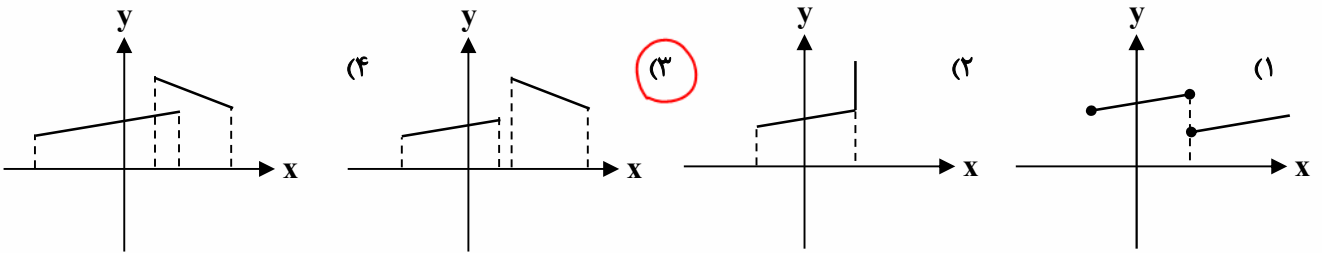
تعریف تابع از نظر نمودار دکارتی (هندسی)

نمودار دکارتی وقتی نشان‌دهنده یک تابع است که هر خط عمودی (موازی محور y ها) نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کند، نه بیشتر.

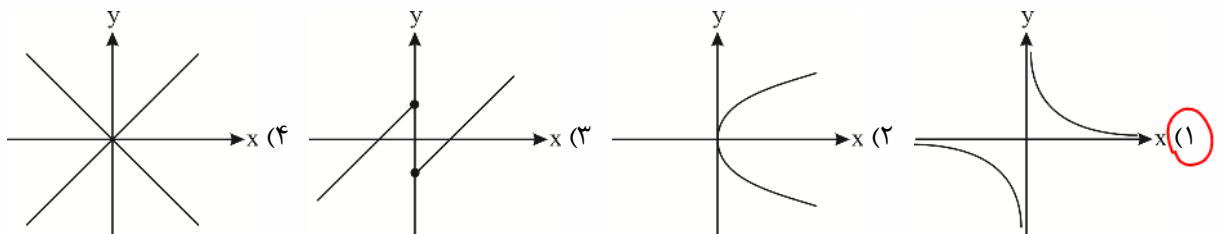


<p>تابع است (تهی) چون هر خطی به موازات محور y ها، در هیچ جا چیزی را قطع نمی‌کند. تهی یک تابع است.</p>	<p>تابع نیست. چون خطی به موازات محور y در بیش از یک نقطه نمودار را قطع می‌کند.</p>	<p>تابع نیست. چون خطی به موازات محور y در بیش از یک نقطه، نمودار را قطع می‌کند.</p>	<p>تابع است. چون هر خط به موازات محور y، حداکثر در یک نقطه نمودار را قطع می‌کند.</p>
----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-----------------------------------------------------------------------------------------------------	------------------------------------------------------------------------------------------------------	-------------------------------------------------------------------------------------------------------

تمرین: کدام شکل نمودار یک تابع است؟



تمرین: کدام یک از نمودارهای زیر یک تابع را نشان می‌دهد؟



۴) تعریف تابع از نظر ضابطه

ضابطه $y = f(x)$ وقتی نشان‌دهنده‌ی یک تابع است که به ازای هر x حداکثر یک y به دست آید.



توی این مدل از سوال‌ها x ای رو انتخاب کن به ازای اون مشکوک به تولید چند تا y بشی. در واقع برای اثبات تابع نبودن از مثال نقض استفاده می‌کنیم.

۱- اگر عبارت y دار توی قدرمطلق و یا درون پرانتز توان زوج بود کاری کن عبارت قدرمطلق و یا توان زوج با یک عدد مثبت برابر بشه:

الف) $|2y-1| + x - 2 = 0$
 مثلاً $x=0$
 $|2y-1| = 2 \rightarrow \begin{cases} 2y-1=2 \rightarrow y = \frac{3}{2} \\ 2y-1=-2 \rightarrow y = -\frac{1}{2} \end{cases}$
 یک x ش $x=0$ دو تا y دار تابع نیست

ب) $(y-1)^2 + x^2 = 1$

مثلاً $x=0$
 $(y-1)^2 = 1 \rightarrow \begin{cases} y-1=1 \rightarrow y=2 \\ y-1=-1 \rightarrow y=0 \end{cases}$
 یک x دو تا y دار تابع نیست

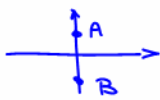
۲- وقتی چند y با توان‌های فرد و مختلف کنار هم هستند، x ای را انتخاب کنید که سمت راست تساوی صفر بشه:

پ) $y^3 - y = 2x - 1$
 مثلاً $x = \frac{1}{2}$
 $y^3 - y = 0 \rightarrow y(y^2 - 1) = 0 \rightarrow y = 0, \pm 1$
 یک x سه تا y دار تابع نیست

۳- اگر جمع چند عبارت نامنفی برابر صفر بشه، باید تک‌تک آن‌ها را برابر صفر قرار دهیم.

ت) $(y-1)^2 + x^2 = 0$
 $y-1=0$ و $x=0$
 $A(0,1)$
 مثبت یا صفر
 نامنفی‌های محور :
 یک نقطه تابع است

ث) $(y^2-1)^2 + x^2 = 0$



$y^2-1=0$ $x^2=0$
 $y=1$ یا -1 $x=0$
 $A(0,1)$ $B(0,-1)$
 یک x دو تا y دار تابع نیست



ج) $x^2 + y^4 + 2y^2 + y^2 + 4x + 4 = 0$

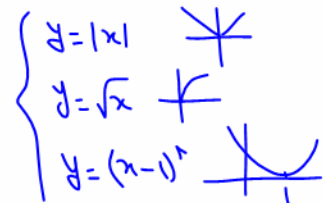
$(x^2 + 4x + 4) + (y^4 + 2y^2 + y^2) = 0$

$(x+2)^2 + y^2(y^2 + 2y + 1) = (x+2)^2 + y^2(y+1)^2 = 0$

$x = -2$ $A(-2, 0)$

$y = 0$ $B(-2, -1)$

یک x دو تا y دار تابع نیست



معمولاً روابطی که در آن‌ها $|y|$ یا y^{2n} یا y یا $\sin y$ ، $\cos y$ ، $\tan y$ و یا $\cot y$ دیده می‌شه تابع نیستند.

چ) $x = \sin y$

مثلاً $x=0$ اگر

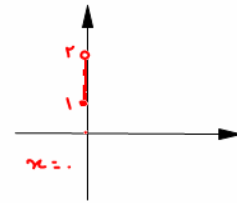
$\sin y = 0$



$y = 0$ و $\pm \pi$ و $\pm 2\pi$ و $\pm 3\pi$ و ...

یک x بی شمار y دار تابع نیست

ح) $[y] + x^2 - 1 = 0$ مثلاً $x=0$ \rightarrow $[y] = 1$ \rightarrow $y \in [1, 2)$



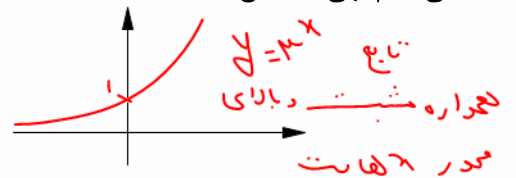
یک بی شمار داده تابع نیست.

۴- اگر جمع چند عبارت نامنفی و یا چند عبارت همواره مثبت برابر یک عدد منفی بشه به رابطه‌ای برخورد کردیم که بیانگر تهی است و می‌دانیم تهی یک تابع است.

خ) $|y| + 3^x = -1$

جمع دو عبارت مثبت با ناسمی هرگز برابر عدد منفی نمی‌شود و هیچ زوج مرتب (x, y) در رابطه صدق نمی‌کنه. مجموعه جواب \emptyset است و \emptyset تابع است.

د) $\sqrt{x-1} + y^2 = -1$



تمرین: کدام رابطه یک تابع است؟

۱) $y^2 - 3y^2 + x = 0$ ۲) $y + y^2 = x^2 + 1$ ۳) $|y-1| + x = 0$ ۴) $xy^2 - x = 1$

گزینه‌های ۱ و ۳ و ۴ رو تحلیل می‌کنیم و ثابت می‌کنیم که به ازای یک x بیش از یک مقدار واسه y بدست میاد پس تابع نیستن.

۱) $y^2 - 3y^2 + x = 0 \xrightarrow{x=0} y^2 - 3y^2 = 0 \Rightarrow y^2(y-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} y^2 = 0 \Rightarrow y = 0 \\ y-3 = 0 \Rightarrow y = 3 \end{cases}$

۳) $|y-1| + x = 0 \xrightarrow{x=-1} |y-1| - 1 = 0 \Rightarrow |y-1| = 1 \Rightarrow y-1 = \pm 1 \Rightarrow y = 2, y = 0$

۴) $xy^2 - x = 1 \xrightarrow{x=1} y^2 - 1 = 1 \Rightarrow y^2 = 2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{2}$

Homework

۱ حداقل چند عضو از مجموعه $f = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{Z}, x = \frac{y^2}{y^2 - 1}\}$ حذف شود تا f یک تابع باشد؟

بسیار مهم

- ۲ (۱)
- ۳ (۲)
- ۴ (۳)
- ۵ (۴)

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۲ حداقل چند عضو از مجموعه $f = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{Z}, x = \frac{30}{1+|y|}\}$ حذف شود تا f یک تابع باشد؟

بسیار مهم

$|y| = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30$
 $y = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5, \pm 6, \pm 7, \pm 8, \pm 9, \pm 10, \pm 11, \pm 12, \pm 13, \pm 14, \pm 15, \pm 16, \pm 17, \pm 18, \pm 19, \pm 20, \pm 21, \pm 22, \pm 23, \pm 24, \pm 25, \pm 26, \pm 27, \pm 28, \pm 29, \pm 30$
 $f = \{(30, 0), (15, \pm 1), (10, \pm 2), (7.5, \pm 3), (6, \pm 4), (5, \pm 5), (3, \pm 9), (2, \pm 14), (1, \pm 29)\}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

- ۱ (۷)
- ۲ (۶)
- ۳ (۵)
- ۴ (۴)
- ۵ (۳)

۳ رابطه $f = \{(a, x+y), (b, m^x)(a, m^x - 1)(b, x-y)(a, 4)\}$ یک تابع است. مقدار $x^2 + y^2$ کدام است؟

- ۱ (۲/۵)
- ۲ (۵/۲)
- ۳ (۴/۲)
- ۴ (۵/۴)

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۴۰۲

۴ فرض کنید رابطه f به صورت $f = \{(a, a^2); a = 0, 1, 2\} \cup \{(a, a+b) | a, b \in \{0, 1, 2\}\}$ توصیف شده باشد، تعداد عناصر f کدام است؟ (با تغییر)

- ۱ (۸)
- ۲ (۹)
- ۳ (۱۰)
- ۴ (۱۲)

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۴۰۰

۵ اگر $f = \{(1, x-2y), (2, 3), (9, 5), (1, -7), (9, x+y)\}$ یک تابع باشد، مقدار $x^2 + y^2$ چند برابر $-x - 4y$ است؟

- ۱ (۲)
- ۲ (۱)
- ۳ (-۱)
- ۴ (-۲)

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۴۰۱

۶ اگر رابطه $\{(3, a + 2b), (5, 4), (7, 2), (3, 7), (5, 2a - b)\}$ یک تابع باشد، $a^2 - b^2$ کدام است؟

۴ (۲)

۳ (۱)

۶ (۴)

۵ (۳)

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۳۹۸

۷ رابطه $A = \{(3, m^2), (2, 1), (-3, m), (-2, m), (3, m + 2), (m, 4)\}$ به ازای کدام مقدار m یک تابع است؟

-۱ (۲)

-۲ (۱)

هیچ مقدار m (۴)

۲ (۳)

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۵

پاسخ Homework

گزینه ۲

۱

چون x عدد صحیح است پس $7x$ باید بر $1 - y^2$ بخش پذیر باشد از طرفی y هم باید عدد صحیح باشد:

$$y^2 = 0, 4, 9, 25 \Rightarrow y = 0, \pm 2, \pm 3, \pm 5$$

$$\Rightarrow f = \{(-7, 0), (7, 2), (7, -2), (9, 3), (9, -3), (3, 5), (3, -5)\}$$

با حذف حداقل ۳ عضو تابع خواهیم داشت.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

گزینه ۱

۲

$$x = \frac{3}{1+|y|}$$

برای اینکه x عددی صحیح باشد باید 3^0 بر $1+|y|$ بخش پذیر باشد و y هم عددی صحیح باشد:

$$1+|y| = 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30$$

$$\Rightarrow |y| = 0, 1, 2, 4, 5, 9, 14, 29$$

$$\Rightarrow y = \pm 0, \pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 5, \pm 9, \pm 14, \pm 29$$

$$f = \{(30, 0), (15, \pm 1), (10, \pm 2), (6, \pm 4), (5, \pm 5), (3, \pm 9), (2, \pm 14), (1, \pm 29)\}$$

برای اینکه f تابع باشد، باید حداقل ۷ عضو از f را حذف کنیم.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

گزینه ۲

۳

$$(a, F) (a, x+y) (a, m^y - 1) \Rightarrow x+y = m^y - 1, F = x+y, m^y - 1 = F \Rightarrow m^y = 5$$

$$(b, m^y), (b, x-y) \Rightarrow x-y = m^y$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-y = 5 \\ x+y = F \end{cases} \Rightarrow 2x = 9 \Rightarrow x = \frac{9}{2}, y = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow x^y + y^y = \frac{81}{4} + \frac{1}{4} = \frac{82}{4} = 20.5$$

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۴۰۲

گزینه ۲

۴

$$f = \{(0, 0), (1, 1), (2, 4)\} \cup \{(0, 0+0), (0, 0+1), (0, 0+2), (1, 1+0), (1, 1+1), (1, 1+2), (2, 2+0), (2, 2+1), (2, 2+2)\}$$

$$f = \{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (2, 4)\}$$

 f دارای ۹ عضو است.

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۴۰۰

گزینه ۳

۵

زوج مرتب‌های $(1, x - 2y)$ و $(1, -y)$ دارای مؤلفه‌های اول یکسان هستند، پس برای تابع بودن این رابطه، باید مؤلفه‌های دوم هم برابر باشند:

$$x - 2y = -y$$

به همین ترتیب برای $(9, x + y)$ و $(9, 5)$ داریم:

$$x + y = 5$$

از حل دو معادله دو مجهول فوق داریم:

$$\left. \begin{array}{l} x - 2y = -y \\ x + y = 5 \end{array} \right\} \Rightarrow -3y = -12 \Rightarrow y = 4 \Rightarrow x = 1$$

خواسته سؤال را می‌یابیم:

$$\frac{x^2 + y^2}{-x - 4y} = \frac{1 + 16}{-1 - 16} = \frac{17}{-17} = -1$$

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۴۰۱

گزینه ۳

۶

$$\left\{ \begin{array}{l} (3, a + 2b) \in f \\ (3, 7) \in f \end{array} \right. \xrightarrow{\text{تابع است}} a + 2b = 7$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (5, 4) \in f \\ (5, 2a - b) \in f \end{array} \right. \xrightarrow{\text{تابع است}} 2a - b = 4$$

حال برای به دست آوردن a و b ، دستگاه $\begin{cases} a + 2b = 7 \\ 2a - b = 4 \end{cases}$ را حل می‌کنیم:

$$\times (-2) \left\{ \begin{array}{l} a + 2b = 7 \\ 2a - b = 4 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -2a - 4b = -14 \\ 2a - b = 4 \end{array} \right. \\ \hline -5b = -10 \Rightarrow b = 2$$

$$a + 2b = 7 \xrightarrow{b=2} a + 4 = 7 \Rightarrow a = 3 \\ \Rightarrow a^2 - b^2 = 9 - 4 = 5$$

کنکور سراسری علوم انسانی داخل ۱۳۹۸

گزینه ۲

۷

شرط تابع بودن یک رابطه این است که هیچ دو زوج مرتب متمایزی نباید مؤلفه اول برابر داشته باشند و اگر مؤلفه اول آنها باهم برابر بود مؤلفه‌های دوم هم باهم برابر باشند.

$$A = \{(3, m^2), (2, 1), (-3, m), (-2, m), (3, m + 2), (m, 4)\}$$

$$(3, m^2), (3, m + 2) \in A \xrightarrow{\text{شرط تابع بودن}} m^2 = m + 2 \Rightarrow m^2 - m - 2 = 0$$

$$\Rightarrow (m - 2)(m + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = -1 \end{cases}$$

مقادیر به‌دست‌آمده برای m را بررسی می‌کنیم تا مطمئن شویم رابطه به تابع تبدیل شده است.

$$m = 2 \Rightarrow A = \{(3, 4), (2, 1), (-3, 2), (-2, 2), (3, 4), (2, 4)\}$$

به ازای $m = 2$ دو زوج مرتب $(2, 1)$ و $(2, 4)$ در رابطه وجود دارد، پس تابع نیست.

$$m = -1 \Rightarrow A = \{(3, 1), (2, 1), (-3, -1), (-2, -1), (3, 1), (-1, 4)\}$$

شرایط تابع بودن برقرار است، پس $m = -1$ تنها مقدار قابل قبول برای m است.

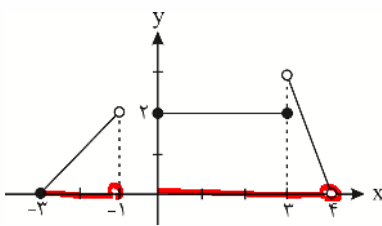
کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۵

دامنه و برد توابع

- **دامنه:** مجموعه همه‌ی مؤلفه‌های اول زوج‌های مرتب تشکیل‌دهنده‌ی هر تابع را **دامنه** آن تابع می‌نامند.
مثلاً اگر $f = \{(1,2), (0,1), (2,3)\}$ باشد، دامنه‌ی f که آن را با D_f نمایش می‌دهند برابر مجموعه‌ی $\{0,1,2\}$ است.
- **برد:** مجموعه همه‌ی مؤلفه‌های دوم زوج‌های مرتب تشکیل‌دهنده‌ی هر تابع را **برد** آن تابع می‌نامند.
مثلاً اگر $f = \{(1,2), (0,1), (2,3)\}$ باشد، برد f که آن را با R_f نمایش می‌دهند برابر مجموعه‌ی $\{1,2,3\}$ است.

نکته: تعداد اعضای دامنه با تعداد اعضای برد برابر یا از آن بیشتر است.

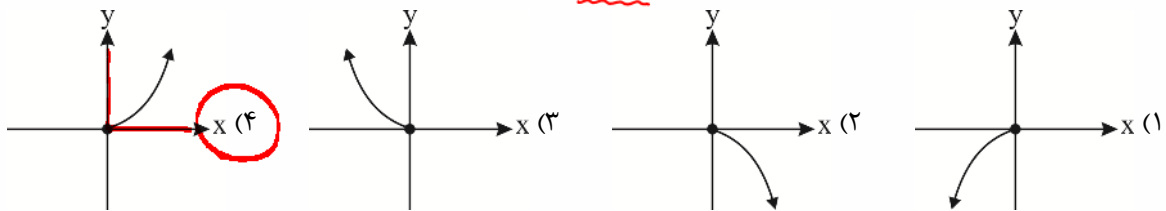
تمرین: اگر نمودار مقابل مربوط به تابع $y = f(x)$ باشد، آن‌گاه دامنه‌ی تابع کدام است؟



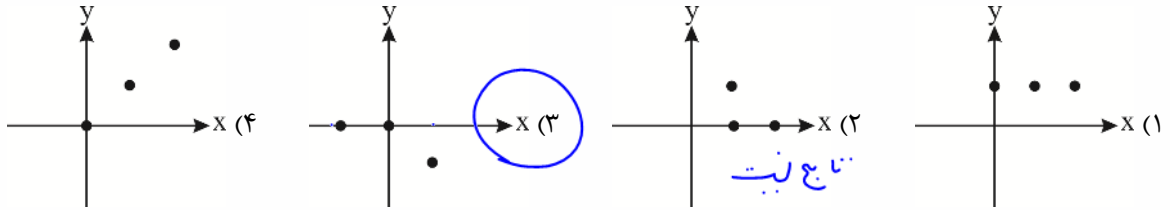
- (۱) $[0, 3)$
- (۲) $[-3, -1) \cup [0, 4)$ ✓
- (۳) $[-3, -1) \cup [0, 3]$
- (۴) $[-3, 6)$

مشبت یا منفی

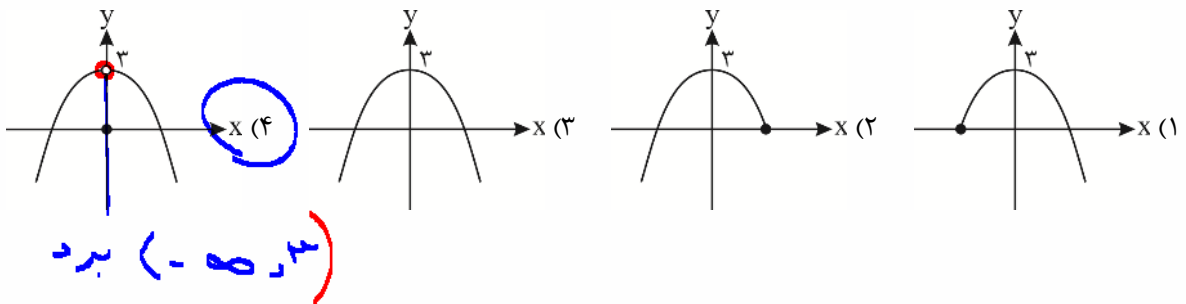
تمرین: در کدام تابع زیر، دامنه و برد، هر دو اعداد حقیقی نامنفی‌اند؟



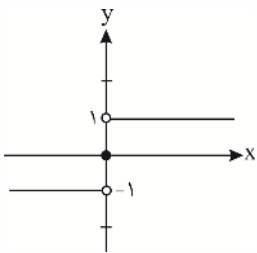
تمرین: در کدام نمودار زیر، تابع داده شده با دامنه‌ی ۳ عضوی و برد ۲ عضوی است؟



تمرین: برد کدام تابع زیر، بازه‌ی $(-\infty, 3]$ نیست؟



تمرین: اگر نمودار $y = f(x)$ به صورت مقابل باشد، برد آن کدام است؟



(۱) $[-1, 1]$

(۲) $(-1, 1)$

(۳) $\{-1, 0, 1\}$

(۴) $\{-1, 1\}$

تمرین: برای تابع بالا یک ضابطه پیشنهادی بنویسید.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

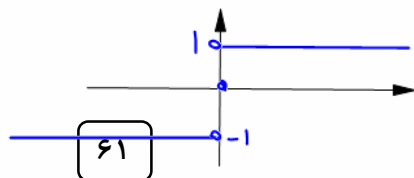
$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} = \frac{x}{|x|} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$D_f = \mathbb{R}$
 $R_f = \{-1, 0, 1\}$
 بردی سه‌عضویه دارد.

امضاء کردن، نشان دادن، علامت گذاشتن: $\text{Sign}(\text{verb})$

$$f(x) = \text{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

تابع علامت



عوامل بی تأثیر در دامنه تابع f : $D_f = D_{|f|} = D_{[f]} = D_{\sin f} = D_{\cos f} = D_{a f + b} = D_{\sqrt[n]{f}} = D_{f^n} = D_{a^f}$

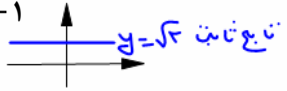
مثلاً دامنه $y = \sin^{-1}(\cos[f])$ همان دامنه f است.

$n \in \mathbb{N}$ که عدد a^f که عدد

قواعد تعیین دامنه

(الف) توابع چند جمله‌ای: دامنه این توابع برابر با \mathbb{R} است. مثال ۲۳:

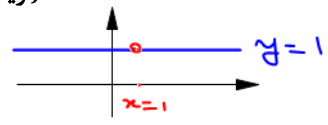
$f(x) = x^2 - 5x + 6$
 $f(x) = x + 1$
 $f(x) = \sqrt{x}$
 $f(x) = x^3 + 4x + 10$



(ب) توابع کسری: اگر ضابطه f کسری باشد (تابع گویا)، x هایی که مخرج را صفر می کنند، قابل قبول نیستند.

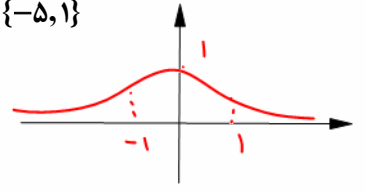
$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ $D_f = \mathbb{R} - \{x | h(x) = 0\} = \mathbb{R} - \{\text{ریشه های مخرج}\}$

۱) $f(x) = \frac{x-1}{x-1} \Rightarrow x-1=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{1\}$



۲) $f(x) = \frac{x+5}{x^2-1} \Rightarrow x^2-1=0 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1 \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$

۳) $f(x) = \frac{1}{x^2+4x-5} \Rightarrow x^2+4x-5=0 \xrightarrow{a+b+c} x=1, x=-5 \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{-5, 1\}$



۴) $f(x) = \frac{1}{x^2+1} \Rightarrow x^2+1=0 \Rightarrow x^2=-1 \Rightarrow \text{غ.ق.ق. ندارد} \Rightarrow D_f = \mathbb{R}$

۵) $f(x) = \frac{1}{x^2+x+1} \Rightarrow x^2+x+1=0 \Rightarrow \Delta < 0 \Rightarrow \text{مخرج ریشه ندارد} \Rightarrow D_f = \mathbb{R}$

۶) $f(x) = \frac{x+1}{[2x-3]}$ $[2x]-3=0 \Rightarrow [2x]=3 \Rightarrow 3 \leq 2x < 4 \Rightarrow \frac{3}{2} \leq x < 2$
 ریشه های مخرج $[2x]-3=0$ عدد صحیح از برآنت خارج می باشد
 $\Rightarrow D_f = \mathbb{R} - [\frac{3}{2}, 2) = (-\infty, \frac{3}{2}) \cup [2, +\infty)$

۷) $f(x) = \frac{1}{[x]-\frac{1}{2}}$ $[x]-\frac{1}{2}=0 \Rightarrow [x]=\frac{1}{2} \Rightarrow 0.5$
 $\mathbb{R}: D_f$ جواب ندارد

قبل از تعیین دامنه، حق ساده کردن عبارت را ندارید!

۸) $g(x) = \frac{1}{\frac{x-1}{3x} - 1}$ $D_g = \mathbb{R} - \{0, 1, 2\}$

- $\mathbb{R} - (a, b) = (-\infty, a] \cup [b, +\infty)$
- $\mathbb{R} - [a, b) = (-\infty, a] \cup (b, +\infty)$
- $\mathbb{R} - (a, b] = (-\infty, a) \cup [b, +\infty)$
- $\mathbb{R} - [a, b] = (-\infty, a) \cup (b, +\infty)$

ج) توابع رادیکالی با فرجه زوج: در این توابع باید عبارت زیر رادیکال را بزرگتر یا مساوی صفر قرار دهیم:

$f(x) = \sqrt[k]{g(x)}$ $D_f = \{x \mid g(x) \geq 0\}$ $y = \sqrt{-x} \rightarrow -x \geq 0 \rightarrow x \leq 0$ $D_f = (-\infty, 0]$

اگر کل مخرج زیر $\sqrt{\quad}$ فرجه زوج باشد، باید زیر رادیکال را فقط بزرگتر از صفر قرار دهیم:

$y = \sqrt{x^2 - x}$ $x^2 - x \geq 0 \Rightarrow x(x-1) \geq 0 \Rightarrow x \leq 0 \text{ یا } x \geq 1$ $D_f = (-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$

۹) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow x > 0 \Rightarrow D_f = (0, +\infty)$

۱۰) $f(x) = \frac{\sqrt{9-x^2}}{\sqrt{x^2-1}}$ $9-x^2 \geq 0 \Rightarrow -3 \leq x \leq 3$ $x^2-1 > 0 \Rightarrow x < -1 \text{ یا } x > 1$ $D_f = [-3, -1) \cup (1, 3]$

برای دامنه f و g بین دامنه f و g اشتراک بگیر اما برای دامنه $\frac{f}{g}$ از اشتراک دامنه f و g ریشه‌های مخرج را حذف کن.

۱۱) $f(x) = \sqrt{\frac{x-2}{x+4}} \Rightarrow \frac{x-2}{x+4} \geq 0$

$D_f = (-\infty, -2) \cup [2, +\infty)$

د) توابع رادیکالی با فرجه فرد: برای تعیین دامنه توابع رادیکالی با فرجه فرد، رادیکال را نادیده می‌گیریم:

$f(x) = \sqrt[k+1]{g(x)}$ $D_f = D_g$

۱۲) $f(x) = \sqrt{\frac{5}{x^2+x-12}}$ $D_f = \mathbb{R} - \{-4, 3\}$

۱۳) $f(x) = \sqrt[3]{5x^2-7} \Rightarrow D_f = \mathbb{R}$

۱۴) $f(x) = \sqrt{\frac{1}{x-1}} \Rightarrow x-1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1 \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{1\}$

۱۵) $f(x) = \frac{1-x}{\sqrt[3]{x}}$ $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$

در تعیین دامنه توابع $f(x) = [g(x)]$, $f(x) = |g(x)|$ قدرمطلق و براکت را نادیده می‌گیریم یعنی $D_f = D_g$ است:

۱۶) $f(x) = [\sqrt{x}] \Rightarrow D_f = x \geq 0$

۱۷) $f(x) = [\frac{1}{x}] \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{0\}$

۱۸) $f(x) = \frac{1}{[x]} \Rightarrow [x] \neq 0 \Rightarrow 0 \leq x < 1 \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - [0, 1) = (-\infty, 0) \cup [1, +\infty)$

۱۹) $f(x) = \frac{\sqrt{9-x^2}}{|x-1|}$ \Rightarrow $9 \geq x^2 \Rightarrow 3 \geq |x| \Rightarrow -3 \leq x \leq 3$ حذف $x=1$

$D_f: [-3, 3] - \{+1\} =$
 $D_f: [-3, +1) \cup (1, 3]$

تمرین: دامنه تابع با ضابطه $f(x) = \frac{1}{x^2 - (a+1)x - b}$ به صورت $\mathbb{R} - \{-1, 6\}$ است. مقدار $a+b$ کدام است؟

۱۲ (۴)

۱۰ (۳)

۸ (۲)

۶ (۱)

$(x+1)(x-2) = x^2 - 5x - 2$
 مقایسه ضرایب:

$a+1=5 \Rightarrow a=4$
 $b=-2$

$a+b=1$

ایشه های مخنه جند بس مخنه رانی توان $(x+1)(x-2)$ نوشت

تمرین: اگر دامنه تابع $f(x) = \frac{x}{2x^2 + ax + b}$ برابر $\mathbb{R} - \{-2\}$ باشد، $b+a$ چه قدر است؟

۴ (۴)

۲۰ (۳)

۱۶ (۲)

۸ (۱)

$x = -2$ ریشه مخنه کسرت مخنه یک ریشه مخنه مفاد دارد پس در

مخنه عبارت $(x+2)^2 = x^2 + 4x + 4$ را داریم اما برای تولید $2x^2 + ax + b$ باید

مخنه به شکل قابل باشد: $2(x+2)^2 = 2(x^2 + 4x + 4) = 2x^2 + 8x + 8$
 مقایسه $\rightarrow a=b=8 \rightarrow a+b=16$

تمرین: دامنه تابع $y = \sqrt{-x^2(x^2-4)^2}$ چند عضو دارد؟

۴ بی شمار

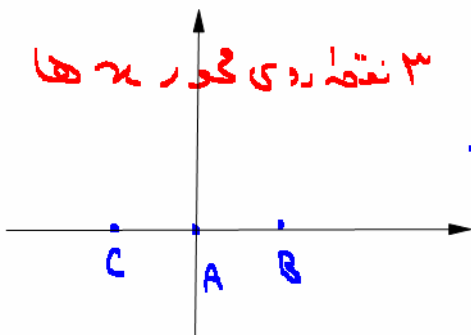
۳ (۳)

۱ (۲)

صفر (۱)

$-x^2(x^2-4)^2 \geq 0$ \rightarrow $x^2(x^2-4)^2 \leq 0$ \rightarrow $x=0$ یا $x=\pm 2$
 اجتماع: $D_f: x \in \{0, \pm 2\}$ دامنه ۳ عضو دارد.

۳ نقطه روی محور x ها

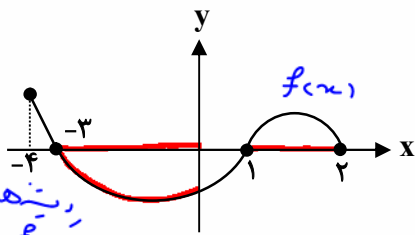


سؤال اضافه: نمودار تابع فوق در معنی مختصات چه چیزی را نشان می دهد؟

$f(x) = \sqrt{-x^2(x^2-4)^2}$ بردی تند معناره دارد
 $D_f = \{0, \pm 2\}$ $f(0, \pm 2) = 0$
 $A(0, 0)$
 $B(2, 0)$
 $C(-2, 0)$

(سراسری ریاضی ۹۲)

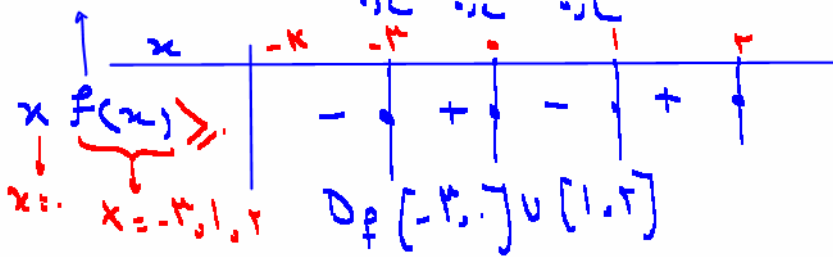
تعین: شکل روبه‌رو نمودار تابع $y = f(x)$ است. دامنه‌ی تابع $\sqrt{xf(x)}$ ، کدام است؟



باید $f(x) \geq 0$ باشد پس
 x در $f(x)$ باید علامت باشد
 $f(x)$ را نگاه کن و جاهایی را که از آن نشانی
 که در $f(x)$ علامتند؟ x

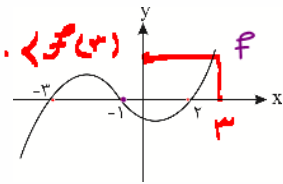
- (۱) $[0, 2]$
- (۲) $[-3, 2]$
- (۳) $[-4, -3] \cup [1, 2]$
- (۴) $[-3, 0] \cup [1, 2]$ ✓

راه دوم:

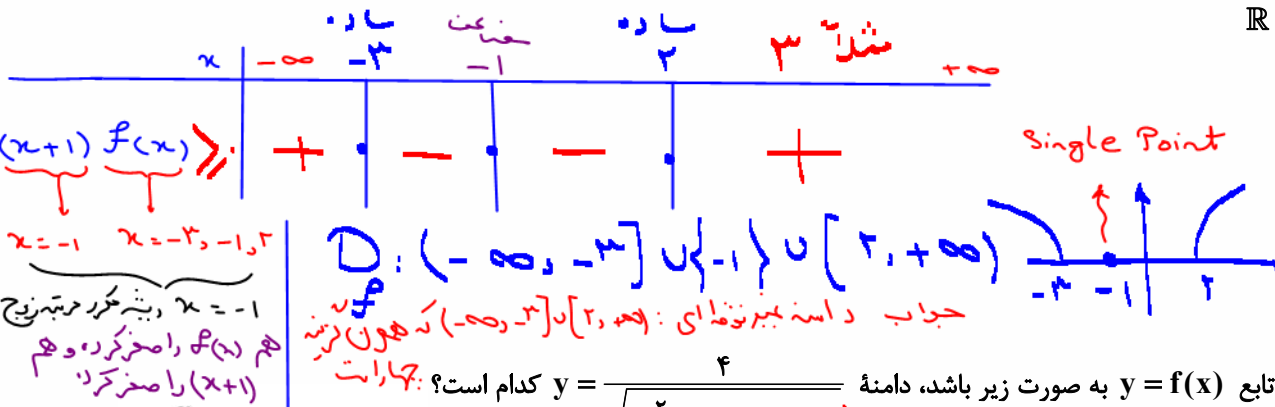


(فارج ریاضی ۹۷)

تعین: شکل زیر، نمودار تابع با ضابطه $y = f(x)$ است. دامنه‌ی تابع غیرنقطه‌ای $\sqrt{(x+1)f(x)}$ کدام است؟



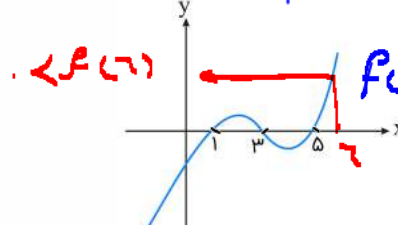
- (۱) $[-3, 2]$
- (۲) $[-1, +\infty)$
- (۳) $(-\infty, -1]$
- (۴) $\mathbb{R} - (-3, 2)$ ✓



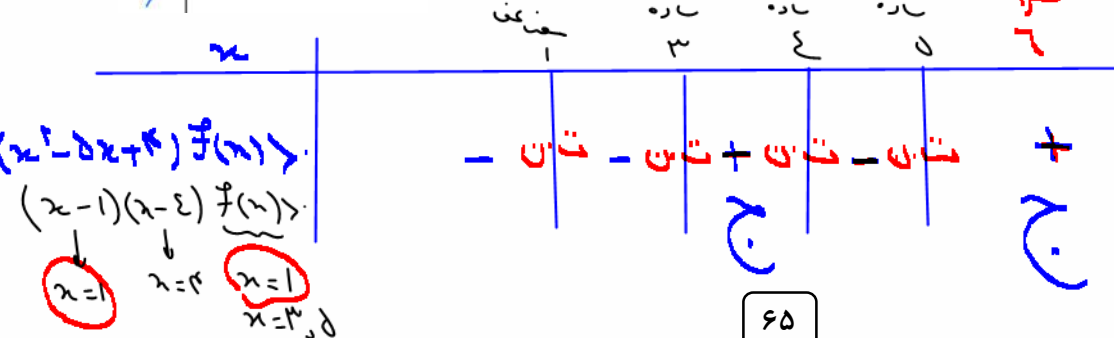
$x = -1$ ریشه تکرار مرتبه زوج هم $f(x)$ را مخرج کرده و هم $(x+1)$ را مخرج کرده

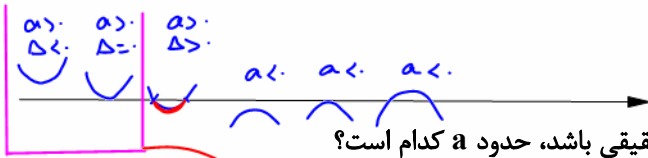
جواب: دامنه غیرنقطه‌ای: $(-\infty, -3] \cup \{-1\} \cup [2, +\infty)$ که هون لرنه چهارت

تعین: اگر نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت زیر باشد، دامنه $y = \frac{4}{\sqrt{(x^2 - 5x + 4)f(x)}}$ کدام است؟



- (۱) $(4, +\infty)$
- (۲) $(-\infty, 1)$
- (۳) $(1, 3) \cup (5, +\infty)$
- (۴) $(3, 4) \cup (5, +\infty)$ ✓





تمرین: اگر دامنه $f(x) = \sqrt{(2a-3)x^2 + 4ax + 2a-3}$ مجموعه اعداد حقیقی باشد، حدود a کدام است؟

$a \geq \frac{3}{2}$ (۴) $\{3\}$ (۳) $a \in \mathbb{R}$ (۲) $0 \leq a < \frac{3}{2}$ (۱)

پاسخ: گزینه «۳» - برای این که دامنه \mathbb{R} باشد، باید زیر رادیکال همواره نامنفی باشد.

$(2a-3)x^2 + 4ax + 2a-3 \geq 0$

برای آن که نامعادله درجه دو نامنفی باشد، باید ضریب x^2 مثبت و دلتای عبارت درجه دو منفی یا صفر باشد.

دهانه به بالا

$2a-3 > 0 \Rightarrow a > \frac{3}{2}$ (۱)

ریشه سارو منته

$\Delta \leq 0 \Rightarrow (4a)^2 - 4(2a-3)(2a-3) \leq 0 \Rightarrow 16a^2 - 4(4a^2 - 12a + 9) \leq 0 \Rightarrow -4(-12a + 9) \leq 0 \Rightarrow a \leq \frac{3}{4}$ (۲)

$(1) \cap (2) = \emptyset$

تمرین: اگر دامنه تابع $f(x) = \frac{1}{(4a-3)x^2 + 2ax + 1}$ شامل همه اعداد حقیقی به غیر از یک عدد حقیقی باشد، چند مقدار برای a وجود دارد؟

یعنی خارج به ریشه دارد.

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

۳۷ اگر خارج درجه یک باشد یعنی ضریب x میشود یک ریشه خواهد داشت: $\alpha = \frac{3}{4}$

ب) اگر خارج درجه دو باشد باید Δ دلتای آن صفر و خارج یک ریشه باشد:

$\Delta = b^2 - 4ac = (2a)^2 - 4(\frac{3}{4}a - 3)(1) = 0$
 $4a^2 - 4(\frac{3}{4}a - 3) = 0$
 $a^2 - \frac{3}{4}a + 3 = 0$

$a = 1$ و 3



تمرین: اگر دامنه تابع $f(x) = \sqrt{(a+2)x^2 + ax + b}$ به صورت $(-\infty, 3]$ باشد، مقدار b کدام است؟

۴ (۴)

۶ (۳)

-۳ (۲)

-۲ (۱)

می دانیم که باید $(a+2)x^2 + ax + b \geq 0$ باشد.

زیر رادیکال یک ریشه ساده $x=3$ دارد
 اگر بجزاهد ریشه ۲ باشد درجه ۲ یک ریشه ساده دارد

یا ۲ ریشه سارو منته یا ۰ ریشه منته یا ۲ ریشه ساده

پس زیر رادیکال ریشه یک است و ضریب x منفی

$a+2=0$
 $a=-2$

$f(x) = \sqrt{-2x + b} \rightarrow -2(3) + b = 0 \Rightarrow b = 6$

۶۶