SPECIALIZED SCHOOL OF MATHEMATICS

Salamian

آموزش آنلاین

ریاضی جامع کنکور

(دهم ــ یازدهم ــ دوازدهم)

به روش انحصاری

I.P.P.P & P.B.L

مدرس: دکتر سامان سلامیان

بانک تست مبحثی + درس + نکته + تست + امتحان نهایی

مقدمه:

به نام خردمند خردآفرین

مجموعه حاضر برای کلاس‌های آنلاین سالانه کنکور تجربی و حسابان رشته ریاضی دوره متوسطه دوم، گردآوری و تنظیم شده است. هدف این مجموعه ؛ نجات مخاطب از یادداشت‌برداری و نوشتن جزوه در طول کلاس است. مطالب مفهومی و تکمیلی و نکات کنکوری سال‌های دهم و یازدهم و دوازدهم به صورت مبحثی و فصل به فصل آورده شده است. در کلاس آنلاین فرصتی برای گفتن و نوشتن جزوه نداریم. البته برای حل مثال‌های سر کلاس و مقایسه میزان یادگیری دانش‌آموزان برای حل مسئله‌ها به طور آنلاین زمانی در کلاس خواهیم گذاشت ولی فرصت نوشتن تمیز و با وسواس نخواهیم داد . پس این جزوه ؛ گزارش اتفاقات هر جلسه درس خواهد بود. با توجه به اهمیت یافتن امتحان نهایی و نمره تشریحی درس ریاضی؛ به کمک جلسات ویژه امتحان نهایی و درسنامه‌های همراه با تمرین‌های تشریحی امتحانات کشوری؛ بدنه اصلی درس برای آمادگی امتحانات تشریحی مدرسه و نهایی ارائه می‌شود که دانش‌آموزان دوازدهم قدرت و توان برگه نویسی موثر برای امتحان مدرسه و تسلط بر کتاب وزارتخانه آموزش و پرورش را کسب کنند و سپس با حل تمرین‌ها و تست‌های متنوع ؛ نکات کنکوری و جالبی که در کنکورهای آزمایشی استاندارد طرح می‌شود؛ آموزش داده می‌شود. روش تدریس در کلاس منطبق بر آخرین تغییرات کتاب درسی وزارتخانه آموزش و پرورش و بخشنامه‌های سازمان سنجش آموزش کشور است . با توجه به سابقه ربع قرن تدریس ریاضیات کنکور «روش مفهومی» و «حل مسئله به کمک حل مسئله» در این مجموعه به‌کار گرفته شده است که در تمام این سال‌ها موفق بوده است. تکلیف: (Homework) در انتهای هر درس تست‌ها و تمرین‌های متعددی همراه با پاسخ تشریحی بسیار گویا و دقیق گذاشته شده که خارج از کلاس و به صورت خودآموز هم می‌توانند راهگشای حل مسئله‌ها و حل تست‌های جدید باشند. سعی شده است که دانش‌آموز با کار کردن کامل این مجموعه به "هیچ" سوال جدیدی از نظر محتوا در مدرسه و امتحان و کنکورآزمایشی و سراسری برخورد نکند و پوشش کامل بر نکات داخل کتاب و حاشیه امن خارج از کتاب داشته باشد. اگر قصد دارید در ابتدای شروع کلاس‌ها به خودتان قول دهید که "امسال" ریاضی را «می‌خوانم» با من همراه نشوید ؛ زیرا اصلا ریاضی خواندنی نیست؛ بلکه نوشتنی و مسئله حل‌کردنی و توضیح‌دادنی است. ریاضی را به این نیت یاد بگیرید که قرار است به کسی درس بدهید .مهمترین ابزار موفقیت در ریاضی ؛ تمرین کردن وحل مسئله به کمک نوشتن در چرکنویس؛ توضیح دادن به خود یا یک شاگرد خیالی و حل مسئله‌های جدید است. سوالات مجموعه؛ سوالات رایج امتحانات مدارس برتر تهران؛ سوالات و تست‌های تالیفی ؛ تست‌های کنکور سراسری و آزمون‌های آزمایشی استاندارد است؛ به‌طوری که با سلیقه طراحان مختلف در تمام کشور آشنا خواهید شد .همراهی آنلاین و بدون غیبت در کلاس آنلاین ؛ حضور پر رنگ و شرکت فعال در بحث‌های کلاس و گروه رفع‌اشکال؛ حل همه تکالیف و مقایسه و تحلیل جواب‌ها با پاسخنامه ؛ تنها راه گرفتن نمره کامل «بیست» در آزمون و درصد خوب در آزمونهای تستی است. اگر در ریاضی به مرحله‌ای رسیدید که؛ حل یک مسئله شما را شاد کرد و ذوق زده شدید و یا با خواندن و حل یک تست به طراح آن تست «آفرین» گفتید که با چه روش جالبی ؛ فلان موضوع را پنهان کرده است یا مورد سوال قرار داده ؛ یعنی اینکه دارید؛ مسیر یادگیری ریاضی را درست می‌پیمایید .تکرار می‌کنم پیشرفت در ریاضی فقط با «حل مسئله» و «تکرار و تمرین» امکان‌پذیر است. بدون کاغذ چرکنویس و تمام‌کردن خودکارهای متعدد؛ ریاضی شما رشد نمی‌کند.تدریس به خود یا شاگرد واقعی یا حتی خیالی با صدای بلند نیز در رشد مهارت‌های ریاضی شما موثر است. سعی کنید ؛ تکالیف (Homework)پاسخنامه‌دار آخر هر درس هر فصل را ؛ خودتان حتما حتما حل کنید و به کمک پاسخ‌نامه نمره یا درصد برای خود حساب کنید. مثل قد و وزن خود که آن را می‌دانید؛ دانستن درصد یادگیری ریاضی خودتان در هر لحظه شما را به پیشرفت علاقه‌مندتر خواهد ساخت. در هر قسمت از درس ابتدا قسمت‌های مشترک هر دو رشته تدریس می‌شود و قسمتهای محدود مرتبط با رشته ریاضی و حسابان جداگانه تدریس می‌شود . دانش‌آموزان رشته ریاضی مطالب هندسه تالس و تشابه و آمار و شمارش و احتمال را می‌توانند با این مجموعه دوره کنند و به صورت مهمان سر کلاس باشند البته که این مطالب را در کلاس هندسه و جبر و احتمال و گسسته خود کامل‌تر خواهند خواند. البته می‌توانند در جلساتی که این مباحث تدریس می‌شوند به‌عنوان میهمان سر کلاس باشند.

این مجموعه برای راهنمای تدریس معلمان ریاضی سراسر کشور و دانشجویان دانشگاه فرهنگیان گرایش دبیری ریاضی توصیه می‌شود. استفاده از این مجموعه با ذکر منبع بلامانع است و در غیر این‌صورت ایراد شرعی و اخلاقی دارد.

بهروز باشید.

دکترسامان سلامیان

فهرست مندرجات

عنوان — صفحه

فصل صفر

معرفی دستگاه مختصات و مختصات یک نقطه ۱

تابع

زوج مرتب ۴۹

تابع گویا ۸۰

تابع رادیکالی ۹۷

جزء صحیح ۱۰۶

تابع مرکب ۱۲۰

قدرمطلق ۱۴۱

تبدیل نمودار توابع ۱۷۷

توابع چندجمله‌ای ۲۱۳

توابع صعودی و نزولی ۲۴۵

معادله درجه دو، سهمی، معادله گویا و گنگ

معادله درجه دوم ۲۹۹

رابطه بین ریشه‌های یک معادله درجه دوم ۳۰۹

معادله دو مجذوری (درجه چهار) ۳۳۴

نامعادله‌ها ـ تعیین علامت ۳۴۸

نمودار تابع درجه دوم ۳۵۸

تقسیم و روابط آن ۳۹۲

مثلثات

نسبت‌های مثلثاتی ۳۹۹

جهت مثلثاتی ۴۱۵

واحدهای کمان و زاویه ۴۳۰

نسبت‌های مثلثاتی α و $-\alpha$ (قرینه) ۴۳۶

روابط بین نسبت‌های مثلثاتی ۴۵۲

نسبت‌های مثلثاتی $\alpha \pm \beta$ (ویژه حسابان) ۴۶۵

فرمول‌های کمان 2α ۴۸۴

معادلات مثلثاتی ۵۰۷

دوره تناوب ۵۵۱

تانژانت ۵۹۱

حد و پیوستگی

حد ۶۲۱

حالت صفر صفرم ۶۴۴

حد بی‌نهایت ۶۹۶

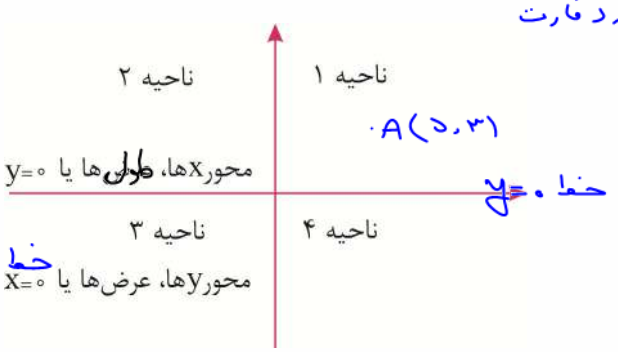
عنوان | صفحه

حد در بی‌نهایت ۷۲۸
پیوستگی ۷۵۹
پیوستگی در بازه ۷۶۸
همسایگی ۷۷۳
همسایگی چپ و راست ۸۱۲
مشتق
آشنایی با مفهوم مشتق ۸۲۲
محاسبه مشتق ۸۳۶
ساده‌سازی و سپس مشتق‌گیری ۸۵۷
مشتق توابع شامل قدرمطلق ۸۹۲
مشتق‌پذیری و پیوستگی ۹۱۴
آهنگ تغییر ۹۷۸
کاربرد مشتق
توابع صعودی و نزولی ـ بررسی جهت تغییرات تابع ۱۰۲۱
نقاط بحرانی ۱۰۳۱
اکسترمم مطلق ۱۰۵۵
اکسترمم نسبی ۱۰۸۰
بررسی نمودارها ۱۱۱۰
بهینه‌سازی ۱۱۳۵
عطف و تقعر (ویژه رشته ریاضی) ۱۱۶۸
هندسه
تفکر تجسمی و آشنایی با مقاطع مخروطی ۱۲۶۲
بیضی ۱۲۹۵
دایره ۱۳۱۶
وضعیت یک نقطه و دایره نسبت به هم ۱۳۳۳
احتمال کل دوازدهم ۱۳۹۵
شمارش بدون شمردن ۱۴۱۸
فاکتوریل ۱۴۲۵
جایگشت ۱۴۲۹
ترکیب ۱۴۴۱
احتمال ۱۴۵۹
احتمال شرطی ۱۴۸۴
پیشامد مستقل ۱۵۰۴
آمار ۱۵۲۱
تابع نمایی و لگاریتمی ۱۵۴۴
تالس و تشابه ۱۵۵۰
الگو و دنباله ۱۵۸۰

ریاضیات پایه دوازدهم

فصل صفر

معرفی دستگاه مختصات و مختصات یک نقطه:



نقطه $A(x,y)$

(ایگرگ ,ایکس)A

(عرض ,طول)A

(..... , ...)A

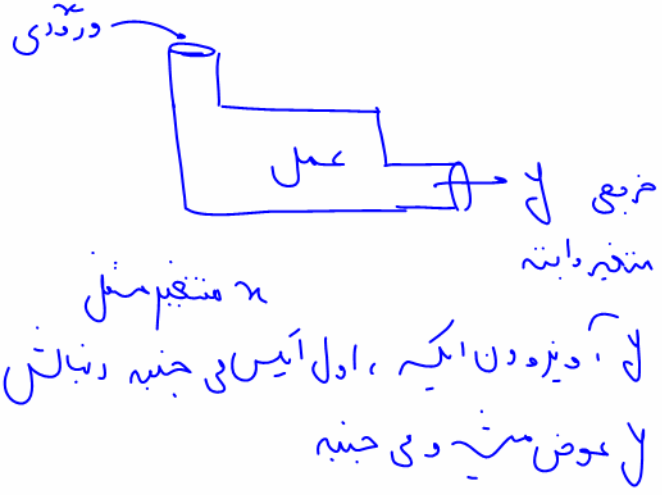
(..... , ...)A

ناحیه یا ربع	اول	دوم	سوم	چهارم
x	+	−	−	+
y	+	+	−	−

تمرین: اگر نقطه $A(m+2,2m-1)$ در ناحیه چهارم دستگاه مختصات باشد و $m \in (a,b)$ بیشترین مقدار $b-a$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) $\frac{5}{2}$ ۴) $m \in \varnothing$

تابع $y=f(x)$ **چیست؟**



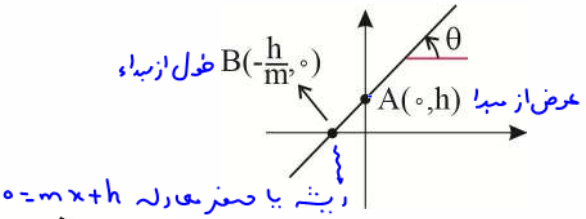
جهت نگه کردن به نمودار ← چپ به راست

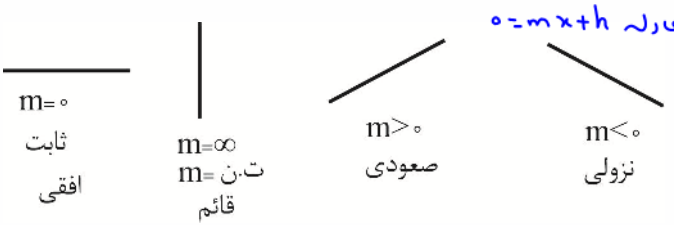
معادله خط راست یا تابع خطی:

عرض از مبدأ

$$y = f(x) = mx + h$$

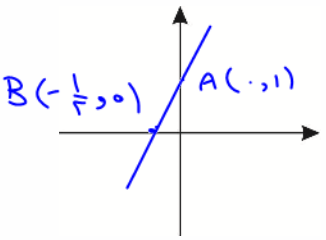
m = شیب یا ضریب زاویه $= \tan\theta$



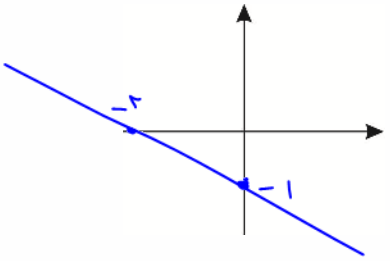


رسم خط: با ۲ نقطه

x	صفر	$-\frac{1}{2}$
$y = 2x + 1$	$y=1$	صفر
	$A(0,1)$	$B(-\frac{1}{2},0)$

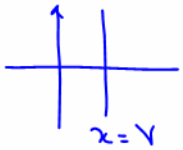


x	صفر	-۲
$y = -\frac{x}{2} - 1$	-۱	صفر

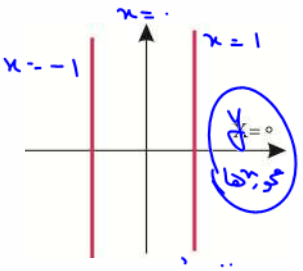


خط‌های خاص:

شکل تابع: هر خط موازی محور y ها تابع را حداکثر یک جا قطع می‌کند



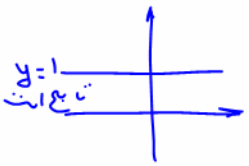
تابع ثابت و خط قائم شکل را در بی‌نهایت جا قطع کرد

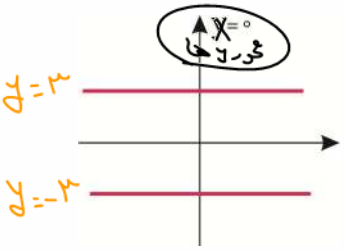


خط ..... $x = k$

موازی محور ..... y ها

تابع ..... نیست

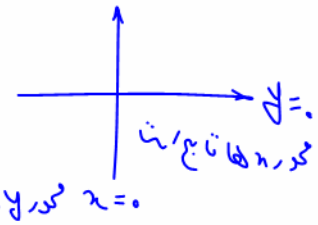




خط ..... $y = k$

موازی محور ..... x ها

تابع .....



توجه: دو خط $y = m_1x + h_1$ و $y = m_2x + h_2$ را در نظر بگیرید:

شرط موازی بودن ۲ خط: $m_1 = m_2$	شیب‌ها مساوی
شرط عمود بودن ۲ خط: $m_1 \cdot m_2 = -1$	شیب‌ها قرینه و عکس

موازی: $y = 2x + 1$ و $y = 2x - 7$

عمود: $y = 2x + 1$ و $y = -\frac{1}{2}x + 8$

$y = -1$ ، $y = (-2)x + 3$ ، $3y = -6x + 9$ ، $y + 2x + 1 = 0$ ، $3y + 6x + 9 = 0$ دو خط موازیند.

$m_1 = \frac{-1}{m_2}$

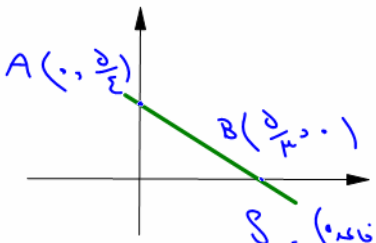
صورت دیگر معادله خط:

$ax + by + c = 0$

$by = -ax - c \Rightarrow y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$

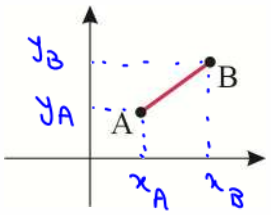
تمرین: مساحت محصور بین خط $3x + 4y = 5$ و محورهای مختصات کدام است؟ (گیرافتاده حصرشده)

۱) $\frac{25}{24}$ ۲) $\frac{24}{25}$ ۳) $\frac{25}{12}$ ۴) $\frac{12}{25}$



$S_\Delta = \frac{(\text{قاعده})(\text{ارتفاع})}{2} = \frac{(\frac{5}{3})(\frac{5}{4})}{2} = \frac{25}{24}$

شیب خط بین دو نقطه:

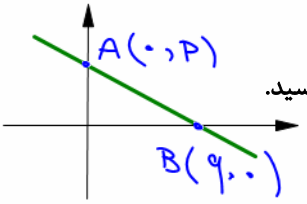


$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

نوشتن معادله خط با داشتن دو نقطه $B(x_B, y_B)$ و $A(x_A, y_A)$:

$$y - y_A = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}(x - x_A)$$

تمرین: معادله خط عبوری از نقاط $B(q, 0)$ و $A(0, p)$ را بنویسید.

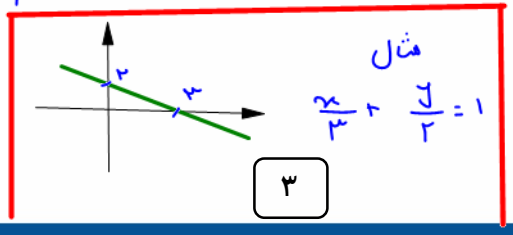


جایگذاری: $y - p = \frac{0 - p}{q - 0}(x - 0)$

$y = -\frac{p}{q}x + p$ ، $qy = -px + pq$ ، $px + qy = pq$ (طرفین ضربدر q، طرفین تقسیم بر pq)

$\frac{x}{q} + \frac{y}{p} = 1$ (طول از مبدأ / عرض از مبدأ)

جواب مثال که بهتر است آن را شکیل بنویسیم



$\frac{x}{\text{طول از مبدأ}} + \frac{y}{\text{عرض از مبدأ}} = 1$

نوشتن معادله خط با داشتن یک نقطه و شیب:

$$y - y_A = m(x - x_A)$$

تعریف: معادله خط عبوری از $A(2,-1)$ که عمود بر خط $3x+4y=1$ می‌باشد، کدام است؟

$y-(-1)=\frac{4}{3}(x-2)$

$y+1=\frac{4}{3}x-\frac{8}{3}$

$y=\frac{4}{3}x-\frac{8}{3}-1=\frac{4}{3}x-\frac{11}{3}$

$3y=4x-11$

$4x-3y=11$

$4y=-3x+1$ ← تقسیم بر ۴

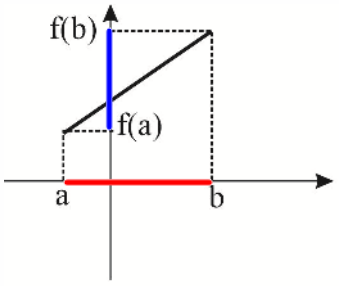
$y=-\frac{3}{4}x+\frac{1}{4}$ ← عکس و قرینه

$m'=\frac{4}{3}$

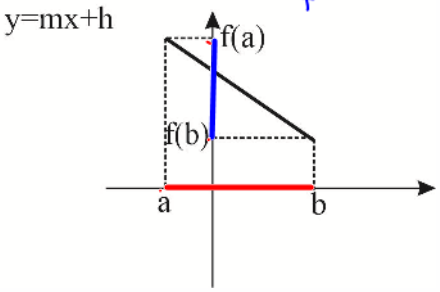
دامنه و برد خط $y=mx+h$

دامنه Domain: مجموعه تغییرات x : D_f پرس روی x

برد Range: مجموعه تغییرات y : R_f عکس روی yها



صعودی $m>0$



نزولی $m<0$

دامنه $D_f:[a,b]$

برد $R_f:[f(a),f(b)]$

دامنه $D_f:[a,b]$

برد $R_f:[f(b),f(a)]$

تعریف: یک تابع خطی با دامنه $(-21,4]$ و برد $[-3,7)$ مفروض است، حاصل $[3f(1)]$ کدام است؟ (نماد [ ] جزء صحیح است.)

۱) ۴- ۲) ۵- ۳) ۶- ۴) ۷-

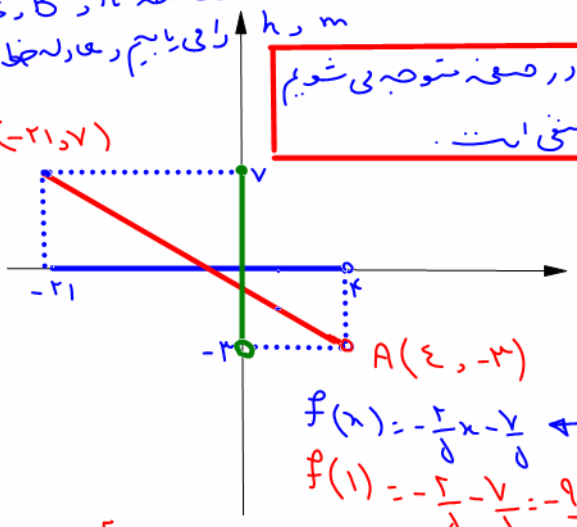
نقطه توخالی با حفره به خاطر باز بودن بازه

$A(4,-3)$

$B(-21,7)$ نقطه پُر به خاطر بسته بودن بازه

معادله خطرا $y=mx+h$ فرض می‌کنیم با داشتن مختصات دو نقطه A و B و قرار دادن m و h را پیدا و معادله خط را می‌نویسیم

بعد از گذاشتن A و B در صفحه متوجه می‌شویم که خط نزولی با شیب منفی است.



تابع خطی $y=mx+h$

نقطه A ← $-3=4m+h$

نقطه B ← $7=-21m+h$

قرینه بر سفید

$3=-4m-h$

$+\quad 7=-21m+h$

$10=-25m$

$m=-\frac{2}{5}$

$y=-\frac{2}{5}x+h$

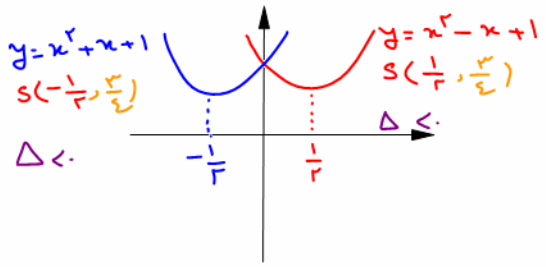
$-3=-\frac{2}{5}(4)+h$

$h=-3+\frac{8}{5}=-\frac{7}{5}$

$f(x)=-\frac{2}{5}x-\frac{7}{5}$

$f(1)=-\frac{2}{5}-\frac{7}{5}=-\frac{9}{5}$

$[3f(1)=-\frac{27}{5}=-5,\dots]=-6$

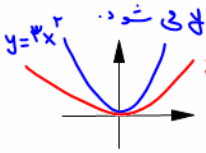


معرفی تابع درجه دوم یا ۳ جمله‌ای درجه ۲ یا سهمی: $f(x)=ax^2+bx+c$

$y=ax^2+bx+c$

- علامت a: سهمی را بالا و پایین می‌برد. $A(0,c)$ محل برخورد سهمی با محور yها است
- علامت b: رأس سهمی را به کمک a چپ و راست می‌برد $x_S=-\frac{b}{2a}$ $S(-\frac{b}{2a},-\frac{\Delta}{4a})$
- علامت c: $c>0$ $c=0$ $c<0$

بازو پهن کردن دهانه سهمی است. هرچه $|a|$ بیشتر باشد، دهانه پهن‌تر است. $a<0$ و $a>0$



نکات مهم:

$\Delta: b^2-4ac$ مثبت یا بیانگر تعداد ریشه‌ها است. $\Delta>0$ ۲ ریشه، $\Delta=0$ یک ریشه حقیقی، $\Delta<0$ ریشه حقیقی ندارد.

یک معادله درجه دو حداکثر ۲ ریشه دارد.

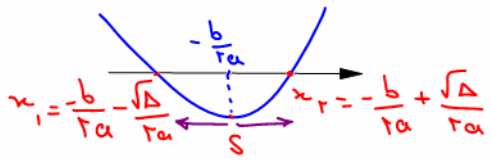
ریشه یا صفر معادله در صورت وجود: $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-b}{2a}\pm\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$ به صورت متقابل است.

جمع ریشه‌ها در صورت وجود: $S=-\frac{b}{a}$

ضرب ریشه‌ها در صورت وجود: $P=\frac{c}{a}$

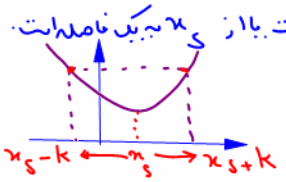
معادله محور تقارن: $x_S=-\frac{b}{2a}$

مختصات رأس: $f(-\frac{b}{2a})=ax^2+bx+c$ $S(-\frac{b}{2a},-\frac{\Delta}{4a})$



اکسترمم: مینیمم یا ماکزیمم و منظور عرض یا y آن است. $y_S=-\frac{\Delta}{4a}=\frac{4ac-b^2}{4a}$

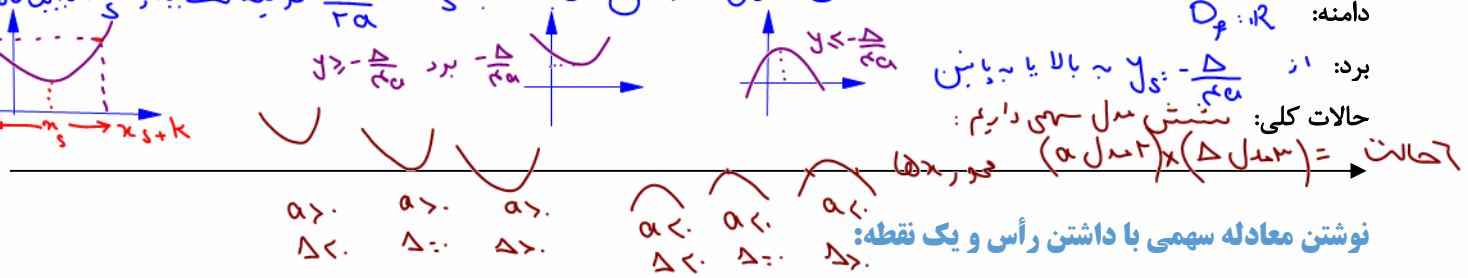
ویژگی مهم: هر دو نقطه هم عرض روی سهمی، طول‌هایشان نسبت به $x_S=-\frac{b}{2a}$ قرینه است با از x_S به یک اندازه است.



دامنه: $D_f=\mathbb{R}$

برد: از $y_S=-\frac{\Delta}{4a}$ به بالا یا به پایین

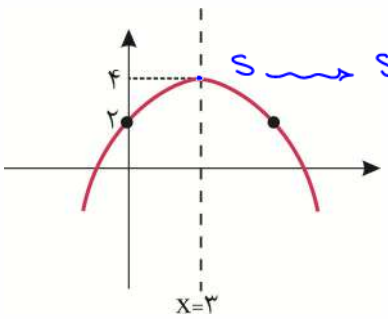
حالات کلی: شش مدل سهمی داریم: حالات = (a مدل ۲) × (Δ مدل ۳)



نوشتن معادله سهمی با داشتن رأس و یک نقطه:

$y=a(x-x_S)^2+y_S$

تمرین: معادله سهمی مقابل را بنویسید.



x_S y_S

رأس $S(3,4)$

یک نقطه $A(0,2)$

نقطه A روی تابع است.

$y=a(x-x_S)^2+y_S$

$y=a(x-3)^2+4$

$2=a(0-3)^2+4$

$-2=9a$

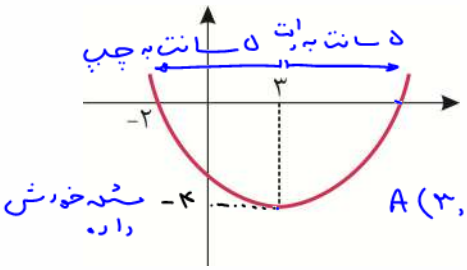
$a=-\frac{2}{9}$

$y=-\frac{2}{9}(x-3)^2+4$ جواب:

نوشتن معادله سهمی با داشتن دو ریشه:

$$y = a(x - x_1)(x - x_2)$$ ریشه اول، ریشه دوم

تمرین: اگر معادله شکل مقابل $y = ax^2 + bx + c$ باشد، $f(-1)$ کدام است؟



دو ریشه: $x_1 = 3-5 = -2$ $\quad x_2 = 3+5 = 8$

نقطه $S(3,-4)$ روی سهمی است:

$y = a(x-x_1)(x-x_2)$

$A(3,-4) \in y = a(x-(-2))(x-8)$

$-4 = a(3+2)(3-8)$

$-4 = -25a$

$\frac{4}{25} = a$ $\quad f(x) = \frac{4}{25}(x+2)(x-8) \longrightarrow f(-1) = \frac{4}{25}(-9) = -\frac{36}{25}$

نوشتن معادله سهمی با داشتن ۳ نقطه:

یک راه طولانی این است که $y = ax^2 + bx + c$ را در نظر گرفته و با صدق دادن مختصات سه نقطه و حل سه معادله سه مجهول a و b و c را پیدا می‌کنیم. اما راه ساده‌تر: بین ۳ تا از نقطه‌ها یک رابطه خطی بنویس (معادله خط با ۲ نقطه بنویس)

تمرین: معادله یک سهمی بنویسید که از نقاط $A(2,4)$ و $B(0,3)$ و $C(-1,2)$ بگذرد.

راه اول: ۳ معادله ۳ مجهول

$f(x) = ax^2 + bx + c$

$f(2) = 4a + 2b + c = 4$

$f(0) = 0 + 0 + c = 3$

$f(-1) = a - b + c = 2$

$\begin{cases} 4a+2b+3=4 \\ a-b+3=2 \end{cases} \quad \begin{cases} 4a+2b=1 \\ a=b-1 \end{cases}$

$4(b-1)+2b=1$

$4b-4+2b=1$

$6b=5 \quad b=\frac{5}{6} \quad a=\frac{5}{6}-1=-\frac{1}{6}$

$f(x) = -\frac{1}{6}x^2 + \frac{5}{6}x + 3$

$y = (x+3) + a(x-0)(x+1)$

$4 = (2+3) + 2a \longrightarrow a = -\frac{1}{6}$

$y = -\frac{1}{6}x(x+1) + x + 3 = -\frac{1}{6}x^2 + \frac{5}{6}x + 3$

$y = (C,B \text{ خطی}) + a(x-x_B)(x-x_C)$ ← روش دیگر نوشتن معادله سهمی بین ۳ نقطه A, B, C

تمرین: چهار مربع به ضلع ۲ مانند شکل کنار یکدیگر قرار دارند. یک سهمی از نقاط A، B و C عبور کرده و محور xها را در دو نقطه قطع می‌کند. فاصله نقاط تقاطع چند است؟ (سؤال مرحله اول المپیاد ریاضی ۱۴۰۰)

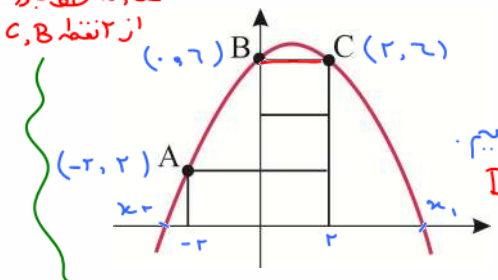
۱) ۷

۲) $2\sqrt{13}$ ✓

۳) $5\sqrt{2}$

۴) $3\sqrt{7}$

۵) ۸



ابتدا با داشتن سه نقطه $A(-2,2), B(0,6), C(2,6)$ معادله سهمی را می‌نویسیم سپس نقاط تقاطع با محور xها یعنی D را می‌یابیم.

فاصله بین ۲ نقطه همان تفاضل ریشه‌هاست $D = |x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$

معادله خط افقی از ۲ نقطه C, B

$y = 6 + a(x-0)(x-2)$ $\quad A(-2,2) \in$ سهمی $\longrightarrow 2 = 6 + a(-2)(-2-2) \longrightarrow a = -\frac{1}{2}$

$y = -\frac{1}{2}x(x-2) + 6 = -\frac{x^2}{2} + x + 6$ $\quad |x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \frac{\sqrt{13}}{|-\frac{1}{2}|} = 2\sqrt{13}$

پرسش: آرمان دار $y = ax^2 + bx + c$ را بدهند، به چه روش سریعی می‌توان علامت a را تعیین کرد؟

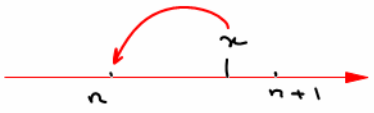
(الف) $b>0$ (ب) $b<0$ (ج) $b=0$ (د) $b>0$

آموزش رایگان دبیران برند ایران تجربه کنید

$[2]=2 \quad [2,3]=2$

کمتر یا مساوی

معرفی تابع جزء صحیح: بزرگترین عدد صحیح نابیشتر از x



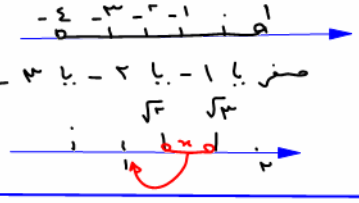
if $n\in\mathbb{Z}$, $n\le x<n+1 \longrightarrow [x]=n$

$-4<x<-3 \longrightarrow [x]=-4$

$-4\le x<-3 \longrightarrow [x]=-4$

$-4<x<1 \longrightarrow [x]=$ صفر یا -1 یا -2 یا -3 یا -4

$\sqrt{2}<x<\sqrt{3} \longrightarrow [x]=$ یک



$$[-x]=\begin{cases}-[x] & x\in\mathbb{Z}\\ -[x]-1 & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$$

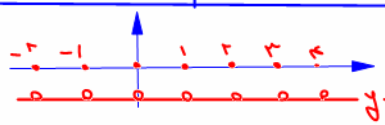
حفظی

Partial $[x]$ = جزء اعشاری + جزء صحیح = هر عدد x

$-2,3=-3+0,7$ $\quad 7=7+0$ $\quad 2,3=2+0,3$

P اعداد صحیح: یک حرفی از اعداد $\quad P$ اعداد مثبت: اعشار عدد

$y=[x]+[-x]=\begin{cases}0 & x\in\mathbb{Z}\\ -1 & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$

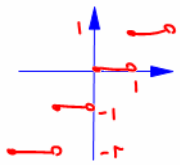


$D_f:(-\infty,+\infty) \quad T=1$ دوره تناوب

$R_f:\{0,-1\}$

سؤال: دامنه و برد $y=[x]+[-x]$ هم اعداد حقیقی را می‌برد: $x\in(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$ دامنه

$y\in\mathbb{Z}:\{\dots,-1,0,1,\dots\}$ برد

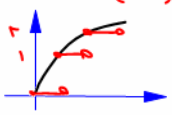


خروجی یا برد $[x]$ اعداد صحیح است.

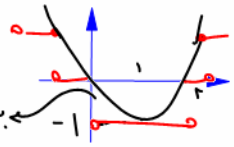
سؤال: دامنه و برد $y=[\sqrt{x}]$ ؟ $\sqrt{x}$ تابعی از x است یعنی توی $\sqrt{}$ ، x داریم. دامنه تابع همان دامنه $\sqrt{}$ است و برآیند دامنه را خدشه نمی‌کند ولی برد $[\sqrt{}]$ زیرمجموعه‌ای از اعداد صحیح است.

$y=\left[\frac{1}{x}\right] \quad D_f:\mathbb{R}-\{0\} \quad R_f:\mathbb{Z}$

$y=[\sqrt{x}] \quad D_f:[0,+\infty) \quad R_f:\{0,1,2,\dots\}=\mathbb{W}$



$y=[x^2-2x] \quad D_f:\mathbb{R} \quad R_f:\{-1,0,1,2,\dots\}$



برد سهمی $y=x^2-2x$ به صورت $y\ge -1$

$[x+k]=[x]+k \quad (k\in\mathbb{Z})$

$[x+0,1]\neq[x]+0,1 \quad [x+1]=[x]+1 \quad [x-5]=[x]-5$

$[x+[x]]=[x]+[x]=2[x] \quad [x-[x]]=[x]-[x]=0$

$[x]\in\mathbb{Z}$ $\quad [x]\in\mathbb{Z}$

$$[a+b]=\begin{cases}[a]+[b] & \text{مجموع اعشار } a \text{ و } b<1\\ [a]+[b]+1 & \text{مجموع اعشار } a \text{ و } b\ge 1\end{cases}$$

$0,2+0,1<1 \quad [3,2]+[2,1]=5=[5,3]=[2,1+3,2]$

$0,8+0,7>1 \quad [3,8]+[2,7]=5\neq[6,5]=[2,7+3,8]$

$[-2,7]+[-3,8]=-3-4=-7$ دقت: اعشار $-2,7$ برابر $0,3$ و اعشار $-3,8$ برابر $0,2$ است

$0,2+0,3<1 \longrightarrow [-2,7-3,8]=[-6,5]=-7$

$x=[x]+P$

$-2,7=[-2,7]+P=-3+0,3$

$-3,8=[-3,8]+P=-4+0,2$

$f(x)=x-[x]$ تابع جزء اعشاری

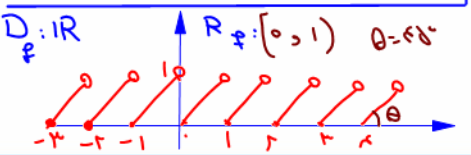
$0\le x<1 \longrightarrow y=x$

$1\le x<2 \longrightarrow y=x-1$

$2\le x<3 \longrightarrow y=x-2$

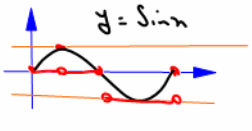
$3\le x<4 \longrightarrow y=x-3$

$T=1$ متناوب است



$D_f:\mathbb{R} \quad R_f:[0,1) \quad \theta=45^\circ$

طرز رسم $y=[u]$ با دانستن u: u را با خط‌های متوالی $y=k$ و $y=k+1$ که $k\in\mathbb{Z}$ را رسم کن سپس u به این خط‌ها ضربه زد را نقطه‌پرتاب. سایه قسمت‌های بین ۲ خط را روی خط پایین ترکیب. زیر هر نقطه پر یک نقطه توخالی است.



$y=[\sin x]$

آموزش را با دبیران برند ایران تجربه کنید

$|\sqrt{2}-\sqrt{3}| = -(\sqrt{2}-\sqrt{3}) = \sqrt{3}-\sqrt{2}$

$|\underbrace{\sin 194^\circ}_{\text{عدد منفی}}| = -\sin 194^\circ$ ، 194°

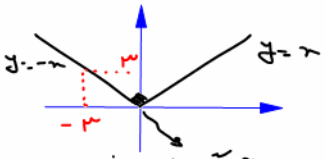
$|-5| = -(-5) = 5$

$|U| = \begin{cases} U & U \geq 0 \\ -U & U < 0 \end{cases}$

معرفی تابع قدرمطلق:

خروجی قدرمطلق نامنفی است (مثبت یا صفر).

$y = |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$



$x=0$ نقطه min نسبی و min مطلق

نمادی هم

$U^2 < a^2 \rightarrow |U| < a \xrightarrow{a>0} -a < U < a$

$U^2 = a^2 \rightarrow |U| = a \xrightarrow{a>0} U = \pm a$

$U^2 > a^2 \rightarrow |U| > a \xrightarrow{a>0} U < -a \ \text{یا} \ U > a$

مثال

$|2x+1| < 1 \rightarrow -1 < 2x+1 < 1 \quad -1 < x < 0$

$|x^2-1| = 2 \rightarrow x^2-1=2 \ \ x^2=3 \rightarrow x = \pm\sqrt{3}$
$x^2-1=-2 \ \ x^2=-1$ غ ق ق

$|2x+1| > 3 \begin{cases} 2x+1 > 3 & x > 1 \\ 2x+1 < -3 & x < -2 \end{cases}$

$|a+b| \leq |a|+|b|$ $\quad |-10+2| = 8 < |-10|+|2| = 12$

حالت تساوی برای a و b هم علامت است $\quad |(-2)+(-7)| = 9 = |-2|+|-7| = 9$

$|a-b| \geq |a|-|b|$

نمادی مثلثی

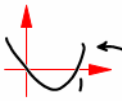
قضیه حمار (خر) در هر مثلث یک ضلع $(\overrightarrow{a+b})$ از مجموع دو ضلع دیگر کوچکتر است.

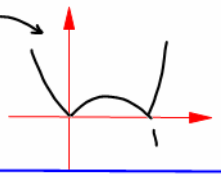
$|a.b| = |a|.|b|$

$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$

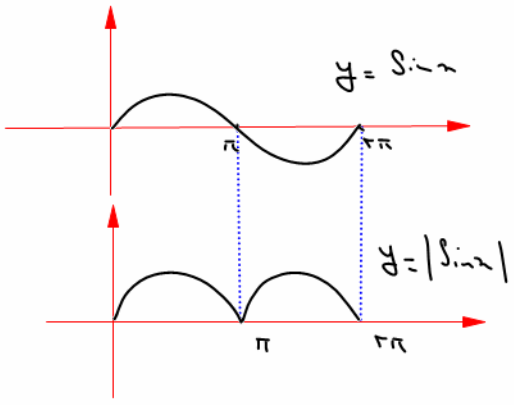
$y = |x||x-1| = |x(x-1)| = |\underbrace{x^2-x}_{\text{سهمی}}|$

$y = x^2 - x = x(x-1)$





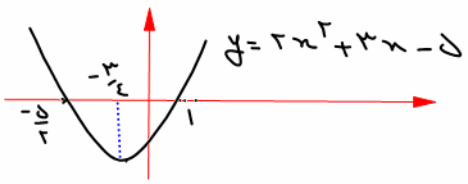
رسم $y=|U|$ با داشتن U: ابتدا $U=y$ را رسم کنیم، سپس بخش هایی از U را که زیر محور x هست را پاک می‌کنیم و قرینه قسمتهای پاک شده را نسبت به بالای محور x ها می‌کنیم.

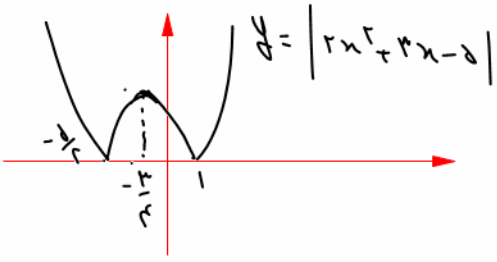


$y = |2x^2+3x-5|$

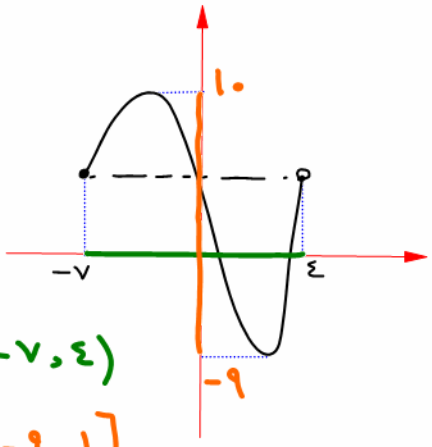
$y = \underbrace{2x^2+3x-5}_{\text{مجموع ضرایب صفر}}$

$x_1 = 1 \quad x_2 = \frac{c}{a} = -\frac{5}{2}$



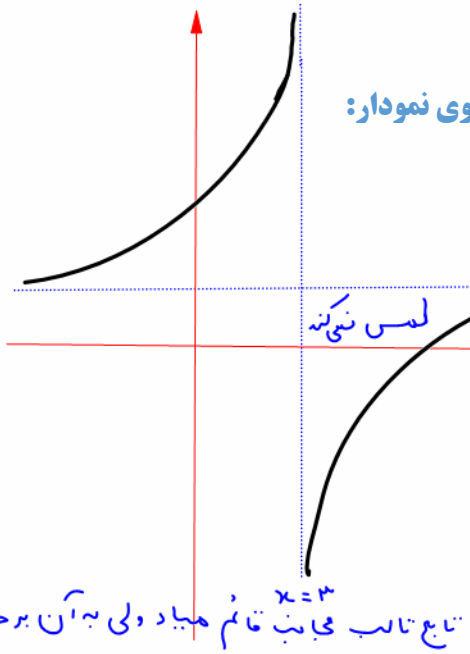


تعیین دامنه و برد یک تابع از روی نمودار:



$D:[-7,4)$

$R:[-9,10]$

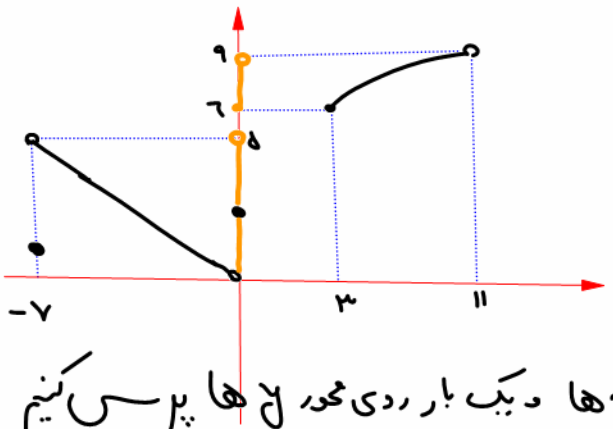


مجانب افقی $y=1$ تابع تا کنار و جنب خط $y=1$ می‌آید ولی آن را لمس نمی‌کند

$D: \mathbb{R}-\{x=3\}$

$R: \mathbb{R}-\{y=1\}$

تابع تا لب مجانب $x=3$ قائم میاد ولی به آن برخورد نمی‌کند



$D:[-7,0]\cup[3,11)$

$R:(0,5)\cup[6,9)$

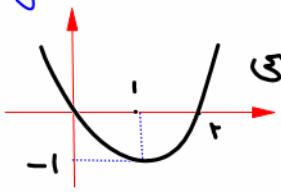
D: Domain R: Range

کافی است با یک پرس ۲ نکته یک بار شکل را روی محور xها و یک بار روی محور yها پرس کنیم

محدوده تغییرات x دامنه و محدوده تغییرات y برد خواهد بود.

برد تابع $y=[x^2-2x]$ را بیابید.

$y=x^2-2x=x(x-2)=0$ سهمی با دو ریشه $x=2, x=0$

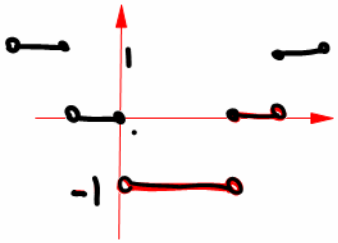


برد خود سهمی $y\geq -1$

$x^2-2x \geq -1$

سهمی اعداد بالاترمساوی ۱- را تقریبا برابر می‌دهد و برابر zهای بالاترمساوی ۱- را به‌مانی‌دهد:

برد $y\in\{-1,0,1,2,\dots\}$



$y=[x^2-2x]$

روش‌های حل تست:

۱- روش کلاسیک

۲- حذف حالات نامطلوب (ردّ گزینه)

۳- کنترل گزینه‌ها و عددگذاری

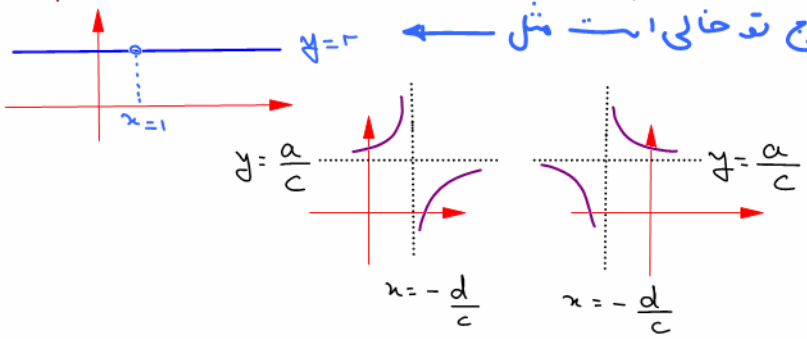
۴- روش ترسیم

معرفی و رسم تابع $y=\frac{ax+b}{cx+d}$

درجه یک / درجه یک = y تابع هموگرافیک است به شرطی که $\frac{a}{c}\neq\frac{b}{d}$ مثلاً اگر $y=\frac{2x-2}{x-1}$

تابع ثابت $y=2$ است که در $x=1$ توخالی $\frac{2x-2}{x-1}=\frac{2(x-1)}{x-1}=2$ هموگرافیک نیست $\leftarrow \frac{2}{1}=\frac{-2}{-1}$

اگر $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$ باشه تابع ثابت است که در ریشه مخرج توخالی است مثل $y=2$ ←



رسم تابع $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ در ۵ ثانیه:

یک ثانیه: مجانب قائم = ریشه مخرج = x

یک ثانیه: مجانب افقی = $y=\frac{\text{ضریب } x \text{ صورت}}{\text{ضریب } x \text{ مخرج}}$

یک ثانیه: $A(0,y)$ با $B(x,0)$

محل برخورد با محورهای مختصات

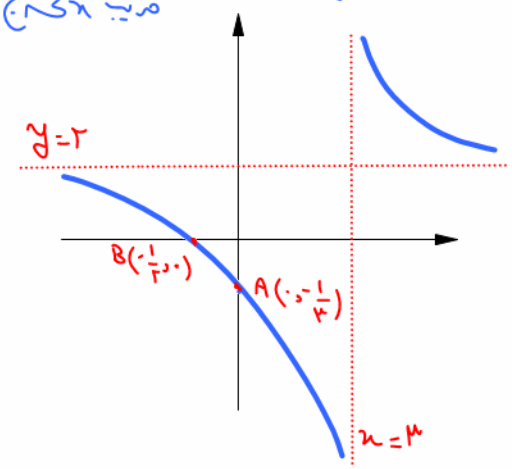
یک ثانیه: رسم و سقلمه و یک ثانیه رسم شاخه

$y=\frac{2x+1}{x-3}=0$

$x=3$ مجانب قائم

$y=\frac{2}{1}=2$ مجانب افقی

$\frac{\text{ضریب } x \text{ صورت}}{\text{ضریب } x \text{ مخرج}}$

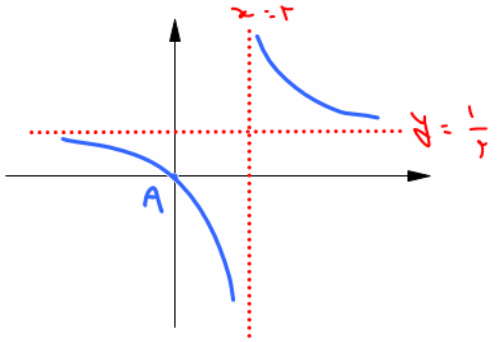


$y=\frac{x}{2x-4}=0$

$x=2$ مجانب قائم

$y=\frac{1}{2}$ مجانب افقی

$A(0,0)$

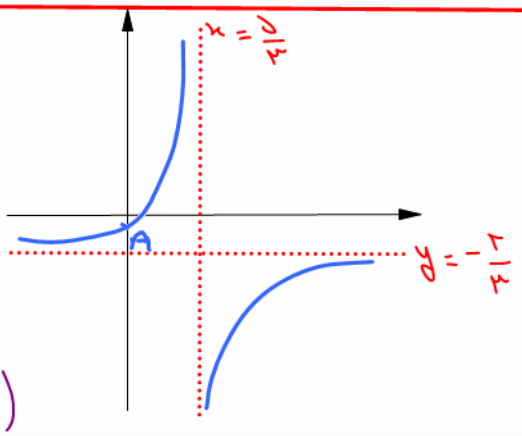


$y=\frac{-2x+1}{3x-5}$

$x=\frac{5}{3}$ مجانب قائم

$y=\frac{-2}{3}$ مجانب افقی

$A(0,-\frac{1}{5})$



آموزش رایا دبیران برند ایران تجربه کنید

تمرین: مجموعه جواب نامعادلهٔ $-1 < \frac{3x+1}{x-3} < 3$ به کدام صورت است؟ (تجربی ۹۶)

۱) $x < \frac{1}{2}$ ۲) $x < 3$ ۳) $-\frac{1}{2} < x < 3$ ۴) $\frac{1}{2} < x < 3$

تست را با ۳ روش حل می‌کنیم:

راه کلاسیک: حل نامعادله‌ها و اشتراک بین جواب‌ها:

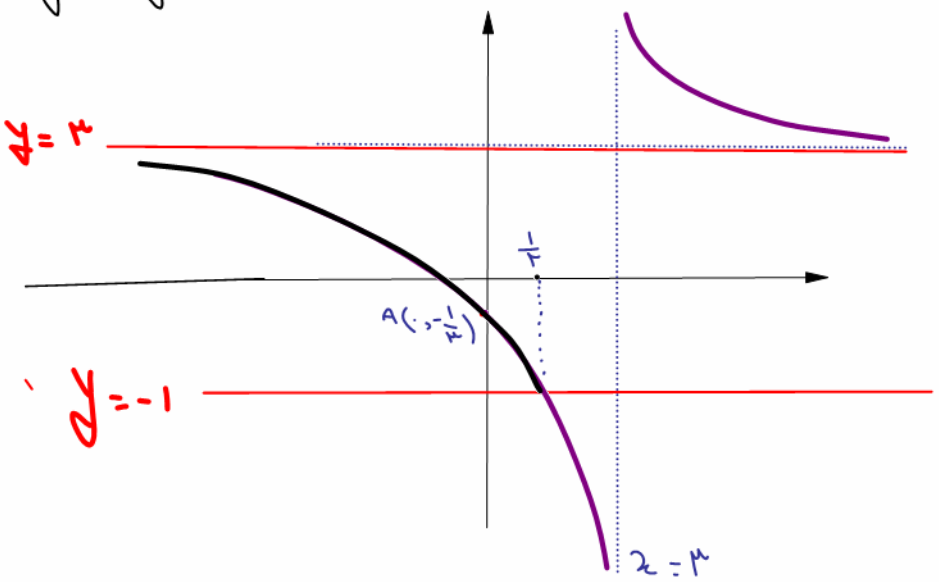
$\frac{3x+1}{x-3} < 3 \Leftarrow \frac{3x+1}{x-3} - 3 < 0 \Leftarrow \frac{3x+1-3x+9}{x-3} = \frac{10}{x-3} < 0$ باید $x - 3 < 0 \Leftarrow x < 3$ (الف)

$-1 < \frac{3x+1}{x-3} \Leftarrow \frac{3x+1}{x-3} + 1 > 0 \Leftarrow \frac{3x+1+x-3}{x-3} = \frac{4x-2}{x-3} > 0$ (ب)

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		3	
$4x-2$	−	−	۰	+		+
$x-3$	−			−	۰	+
$\frac{4x-2}{x-3}$	+	ت‌ن	۰	−	ت‌ن	+

اشتراک: $x < 3$ و $x < \frac{1}{2}$ کوچکتر یکی در نتیجه

راه ترسیم: می‌خواهیم ببینیم که هذلولی $y = \frac{3x+1}{x-3}$ در کدام xها بین ۲ خط افقی $y=3$ و $y=-1$ است؟



$-1 < \frac{3x+1}{x-3} < 3$

$\frac{3x+1}{x-3} = -1 \Rightarrow 3x+1 = -x+3 \Rightarrow 4x = 2 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$ محل برخورد هذلولی با $y=-1$

روش کنترل گزینه: $x = 0$ نامعادله را به صورت $-1 < \frac{3(0)+1}{0-3} = -\frac{1}{3} < 3$ درست می‌کند

درست است $x=0$ باید در مجموعه جواب باشد لذا گزینه‌ای که $x=0$ را ندارد غلط

عدد $x=1$ نامعادله را $-1 < \frac{3(1)+1}{1-3} = -2 < 3$ درست می‌کند لذا $x=1$ نباید در مجموعه جواب باشد لذا گزینه ۱ و ۲ و ۳ غلط

گزینه ۴ درست است که شامل $x=1$ هست.

تمرین: معادلهٔ $\sqrt{x-2}+\sqrt{4-2x}=5$ چند ریشه دارد؟

۱) یک ریشهٔ مثبت دارد.
۲) یک ریشهٔ منفی دارد.
۳) دو ریشهٔ مختلف‌العلامه دارد.
۴) ریشه ندارد.

$x-2\geq 0$ $\quad 4-2x\geq 0$

$x\geq 2$ $\quad 2\geq x$

$x\in\{2\}$: (ب) ∩ (الف)

$x=2$

فقط $x=2$ را می‌توان در معادله گذاشت که آن هم معادله را برقرار نمی‌کند $0+0\neq 5$ و معادله جواب ندارد.

پس گزینه ۴ درست: طرف چپ تساوی از به ازای $x\in\mathbb{R}$ فقط $x=2$ را برای برابر صفر می‌کند و هرگز برابر ۵ نمی‌شود.

روش حل معادله به کمک ترسیم:

معادله را به تساوی ۲ تابع قابل رسم تبدیل می‌کنیم و هر ۲ را در یک دستگاه مختصات می‌کشیم. تعداد نقاط تلاقی تعداد ریشه‌هاست.

$\sqrt{x-2}+\sqrt{2x-4}=5=f_2(x)$ ← تابع ثابت موازی محور xها

$f_1(x)=\sqrt{x-2}+\sqrt{2x-4}$ $\quad D_{f_1}:\{2\}$ $\quad f(2)=0$ $\quad A(2,0)$

f_1 فقط یک نقطه مشترک دارند

$f_2(x)=5$ $\quad y=5=f_2(x)$

f_1 و f_2 برخورد ندارند.

لذا معادله ریشه ندارد.

$A(2,0)$

$f_1(x)$ تابع

از تمام xهایی که حذف آفزایند، یعنی $\mathbb{R}$ فقط $x=2$ را می‌توانند بپذیرند

① $D_{f_1}:\{2\}$

$f_1(2)=\sqrt{2-2}+\sqrt{2(2)-4}=0$ $\quad A(2,0)$

شکل تابع $f_2(x)$ فقط ① نقطه مشترک

$A(2,0)$

ریشه‌های $x=3$ و $x=1$ نقاط گوشه هستند که نیمه نمودار عوض می‌شود.

تمرین: اگر x در دامنهٔ $|x-3|+|x-1|=f(x)$ تغییر کند، $f(x)$ در چه بازه‌ای تغییر می‌کند؟ سوال برد تابع f را می‌خواهد.

۱) $1\le y\le 3$ ۲) $y\ge 2$ ۳) $-1\le y\le 3$ ۴) $y\ge -2$

دامنه تابع $x\in\mathbb{R}$ است

$f(x)=|x-1|+|x-3|$ تابعی است.

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$x-1$	$-$	0	$+$		$+$		
$x-3$	$-$		$-$	0	$+$		

$x<1$: $y=-x+1-x+3=-2x+4$

$1\le x\le 3$: $y=x-1-x+3=2$ تابع ثابت

$x>3$: $y=x-1+x-3=2x-4$

حالا می‌خواهیم برد تابع $f(x)$ به صورت $y\ge 2$ است

راه کنترل گزینه: اول که جمع ۲ تا فقط ملاق نامساوات و گزینه ۳ و ۴ که شامل مقادیر منفی است نقطه عدد دلخواهی از $D_f:\mathbb{R}$ مثل $x=10$ به تابع می‌دهیم $f(10)=9+7=16$ لذا y بین ۳ و ۱ نمی‌تواند گزینه ① هم غلط لذا گزینه ② درست است.

حالا وقت دسم

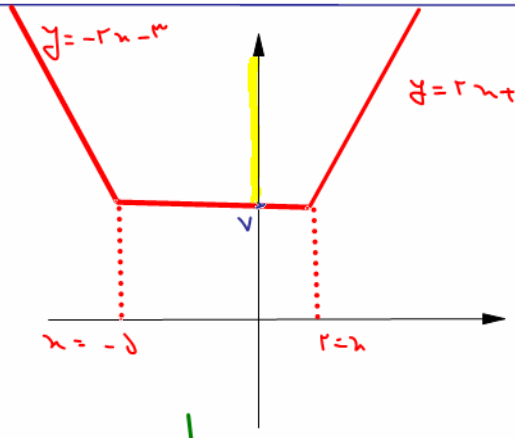
$y=|x+5|+|x-2|$

$x=-5$ $x=2$

$f(-5)=7=f(2)$

$D_f:\mathbb{R}$

$R_f=[7,\infty)$

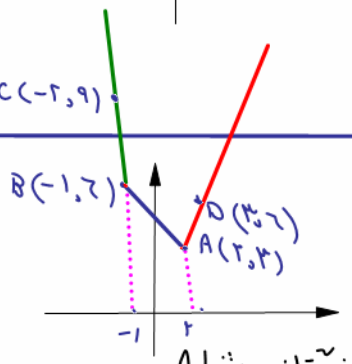


نکته: اگر x داخل قدرها ضریب داشت مثلاً $y=|2x-4|+|x+1|$ ریشه‌ها $x=2$ و $x=-1$

ریشه قدرها را به تابع بده نقطه A و B را پیدا کن

به ترتیب $x=-1$ و $x=2$ به تابع بده $C(-2,9)$ $B(-1,6)$ $A(2,3)$ $D(3,7)$

و نقطه C و D را پیدا کن و نقاط را به ترتیب از x کوچک به بزرگ وصل کن



هر نقطه D بعد از بزرگتر از A هر نقطه قبل از کمتر از B است.

گوشه و شیب نمودار عوض میشه

تمرین: خط $y=\sqrt{2}$ نمودار هندسی تابع $y=|x-1|-|x+1|$ را در چند نقطه قطع می‌کند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) هیچ ۴) بی‌شمار

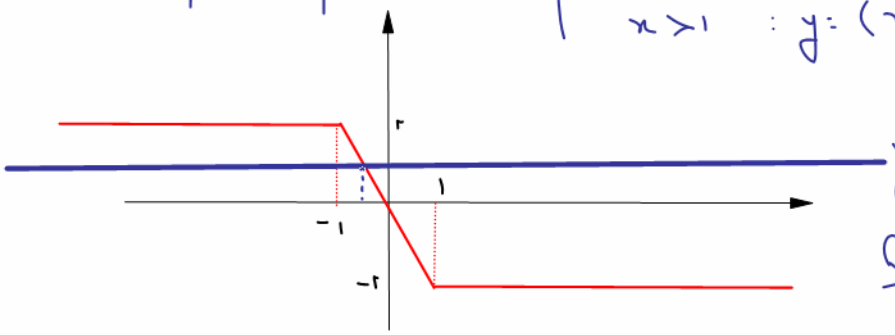
حل به روش تربیعی:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	

$x<-1$: $y=(-x+1)-(-x-1)=2$

$-1<x<1$: $y=(-x+1)-(x+1)=-2x$

$x>1$: $y=(x-1)-(x+1)=-2$



یک بار $y=\sqrt{2}=1,4$ تابع را قطع می‌کند

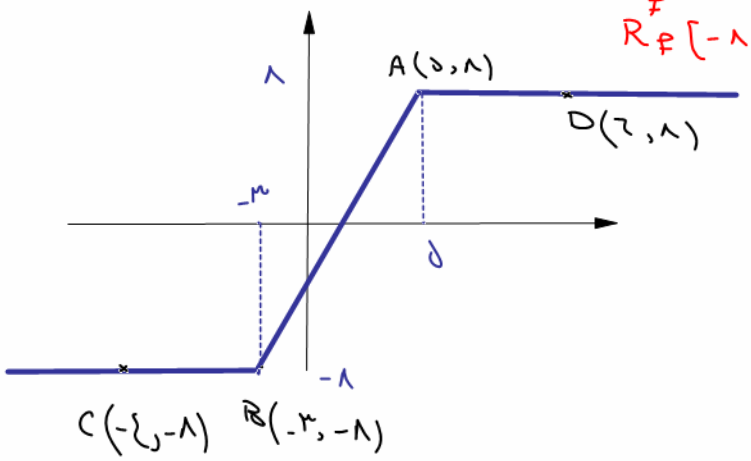
دقت: به طور کلی برای رسم جمع و تفریق چند ضابطه‌ای که داخلشان دهه‌ی است، نقاط تک تک قدرها را به کل تابع داده نقاط را پیدا می‌کنیم به عدد قبل کمترین و بیشترین و یک عدد بعد از بزرگترین را به تابع می‌دهیم نقاط را به هم وصل می‌کنیم.

مثال: تابع $y=|x+3|-|x-5|$ را رسم کنید.

$x=-3$ $x=5$

$D_f:\mathbb{R}$

$R_f=[-8,8]$



تعریف تابع یک‌به‌یک بودن: یک تابع با یک تابع را در رابطه‌ای باشد، هر خط موازی محورهای مختصات را حداکثر یک جا قطع کند.

تعریف تابع یک‌به‌یک: یک تابع با یک تابع را در رابطه‌ای باشد و هر خط موازی محورها شکل را حداکثر یک جا قطع کند.

تابع ثابت (خط افقی) یک‌به‌یک نیست.

$y=x^3$ شکل

$y=|x|$ یک‌به‌یک نیست.

تمرین: کدام تابع زیر یک‌به‌یک است؟

۱) $y=|x+2|+|x|$ گذرد

۲) $y=|x+1|-|x-2|$

۳) $y=|x+2|+4x$ جواب

۴) $y=|x+2|+x$

گزینه یک و دو: چون نمودار تابع ثابت دارند یک‌به‌یک نیستند.

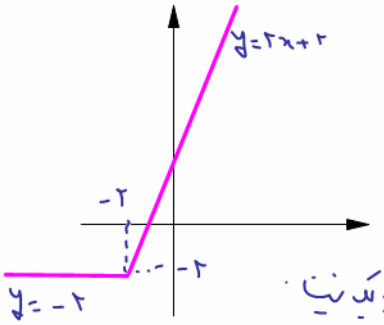
گزینه ۳: $x=-2$ ریشه

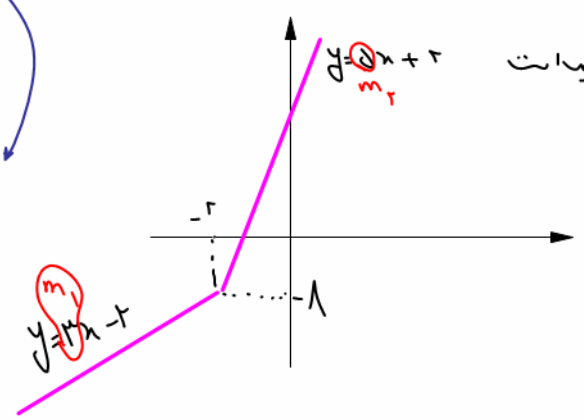
$$y=\begin{cases} x\le -2 & y=-x-2+4x=3x-2 \\ x>-2 & y=x+2+4x=5x+2 \end{cases}$$

گزینه ۴: $x=-2$ ریشه داخل قدر مطلق

$$y=\begin{cases} x\le -2 & y=-x-2+x=-2 \\ x>-2 & y=x+2+x=2x+2 \end{cases}$$

چون بخشی از تابع ما تابع ثابت است یک‌به‌یک نیست.

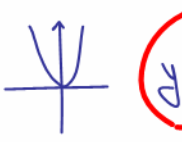




نکته: تابعی مثل گزینه ۳ که ابتدا صعودی است یک‌به‌یک است.

اگر تابعی ابتدا صعودی یا ابتدا نزولی باشد آن‌گاه یک‌به‌یک است.

توابعی مثل $y=x^{2n}$ با $y=|x|$ که محور تقارن ثابت دارند:



$y=ax^2+bx+c$ یا سهمی

یا مستقیم باشد $y=\sqrt{2}$ و یا ثابت باشد.

مثل $y=\sin x$ با $y=\cos x$

$y=x^{2n+1}$ ولی یک تابع ابتدا صعودی مثل $y=-x^{2n+1}$ با ابتدا نزولی مثل

یک‌به‌یک نیستند.

یک‌به‌یک هستند.

تمرین: اگر $y=\sqrt[4]{\frac{2}{x^2}-\frac{9}{2}}+\sqrt[3]{2x-x^2}$ باشد، دامنه کدام است؟ با تابع برای کدام x ها تعریف شده است؟

۱) $[-\frac{2}{3},2]$ ۲) $[-\frac{2}{3},\frac{2}{3}]$ ۳) $[-\frac{2}{3},0)\cup(0,2]$ ۴) $[-\frac{2}{3},0)\cup(0,\frac{2}{3}]$

روش کنترل گزینه: $x=0$ مخرج $\frac{2}{x^2}$ را صفر می‌کند لذا گزینه ۱ و ۲ که صفر دارند غلطند. برای $x=3$ داریم $\sqrt[4]{\frac{2}{9}-\frac{9}{2}}<0$ لذا گزینه ۳ هم غلط و ۴ درست.

نکته: دامنه $f\pm g$ اشتراک دامنه‌های f و g است در حالت $\frac{f}{g}$ از اشتراک دامنه $f.g$ ریشه‌های $g=0$ را حذف می‌کنیم.

نکته: بعضی اعمال ریاضی دامنه f را عوض نمی‌کنند: مثل دامنه چندجمله‌ای $f(x)=2x-x^2$ که $\mathbb{R}$ است با دامنه تابع $y=\sqrt[3]{f}=\sqrt[3]{2x-x^2}$ یکی است و همان $\mathbb{R}$ است.

$D_{f^2}=D_{|f|}=D_{[f]}=D_{\sqrt[2n+1]{f}}=D_{af+b}=D_{\sin f}=D_{\cos f}=D_{f^{n\in\mathbb{N}}}=D_{a^f}$

حل کلاسیک: دامنه $\sqrt[3]{2x-x^2}$ برابر $\mathbb{R}$ است با دامنه $\sqrt[4]{\quad}\geq 0$ استثنا می‌گیریم:

$\frac{2}{x^2}-\frac{9}{2}\geq 0 \Rightarrow \frac{2}{x^2}\geq\frac{9}{2} \xrightarrow{x\neq 0} \frac{x^2}{2}\leq\frac{2}{9} \Rightarrow x^2\leq\frac{4}{9}$

جذر $|x|\leq\frac{2}{3}$

$-\frac{2}{3}\leq x\leq\frac{2}{3}$ اما باید $x\neq 0$ لذا $D_f=[-\frac{2}{3},\frac{2}{3}]-\{0\}$ که آن با $\mathbb{R}$ اشتراک بگیریم همان گزینه ۴ می‌شود.

در $y=\frac{1}{u}$ باید $u\neq 0$

در $y=\log_b^u$ باید $u>0$ و $b>0$ ، $b\neq 1$

در $y=\sqrt[2n]{u}$ باید $u\geq 0$

زیر رادیکال درجه زوج و حلوی لگاریتم نباید منفی شود. حلوی لگاریتم و مبنای آن نباید منفی یا صفر شود.

مخرج کسر هرگز نباید صفر شود.

معرفی لگاریتم، تابع لگاریتمی، تابع نمایی:

۸ چه توانی از ۲ است؟ ۳

$2^3=8 \longleftrightarrow \log_2^8=3$ (به توان)

$\log_{10}^{10}=1 \quad \log_2^{100}=2 \quad \log_{10}^{1000}=3 \quad \log^{0.1}=-1$

$\log 2 \simeq 0.3 \quad \log 3 \simeq 0.4 \quad \log 5=\log\frac{10}{2}=\log 10-\log 2=1-0.3=0.7$

$\log_c^{ab}=\log_c^a+\log_c^b \quad \log_c^{\frac{a}{b}}=\log_c^a-\log_c^b \quad \log_b^{a^n}=n\log_b^a$

تعریف لگاریتم:

$\log_b^x=y \longleftrightarrow b^y=x$ (به توان)

$b=base=$ پایه

همیشه اگر ننوشتند ۱۰ است.

$\log_6^{36}=2$ یا $\log_{10}^{100}=2$

$\log_{10}^{0.01}=-2$ یا $\log_7^{49}=2$

دامنه تابع لگاریتمی: $y=\log_b^x$ با به $b>0$ و $b\neq 1$ و $x>0$

مثال: دامنه $y=\log_x^{4-x^2}$

$\begin{cases} 4-x^2>0 \\ x>0 \\ x\neq 1 \end{cases}$

$4>x^2$

$2>|x|$

$-2<x<2$

$x\in(0,2)-\{1\}$

$x\in(0,1)\cup(1,2)$

نکته: تعریف لگاریتم را در حالت نامساوی هم می‌توان به کار برد فقط وقتی همنا بین صفر و یک باشد جهت نامساوی عوض می‌شود.

مثال: دامنه $f(x)=\sqrt{\log_{0.2}^{4-x}}$

الف) $4-x>0$ شرط: $x<4$

ب) شرط: $\log_{0.2}^{4-x}\geq 0$ یعنی $4-x\leq(0.2)^0=1$ یعنی $x\geq 3$

$D_f:[3,4)$ (ب) $\cap$ (الف)

نمودار $y=\log_b^x$

$x>0$ نمودار کلا سمت راست y هاست.

مشترک: $\log_b^1=0$, $\log_b^b=1$, $x=0$ مجانب قائم, $D_f:(0,+\infty)$, $R_f:\mathbb{R}$, $\log_b^0=-\infty$

$b>1$ اکیدصعودی: $y=\log_{b>1}^x$, $\log_{b>1}^{0^+}=-\infty$

$0<b<1$ اکیدنزولی: $y=\log_{0<b<1}^x$, $\log_{0<b<1}^{0^+}=+\infty$

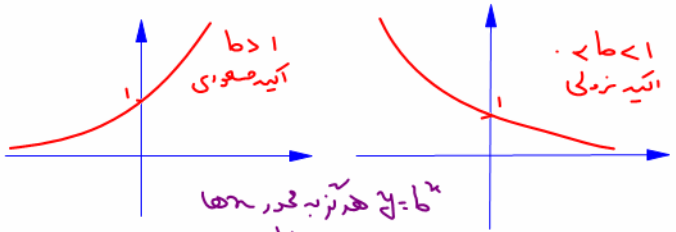
وقتی کلمه لگاریتم خود صفر تعریف می‌شود ولی $\log_b^{0^+}$ بسته به b یا $+\infty$ یا $-\infty$ است.

عدد صفر و اعداد منفی لگاریتم ندارند.

جلوی $\log$ نباید منفی شود ولی جواب لگاریتم می‌تواند منفی باشد مثل: $\log_{10}^{0.1}=-1$

اعداد وقتی بیشتر می‌شوند لگاریتم آنها زیاد می‌شود به شرطی که مبنا بیشتر از یک باشد.

نمودار $y=b^x$ تابع نمایی وارون تابع لگاریتمی است پس قرینه $y=\log_b^x$ نسبت به نیمساز ناحیه اول و سوم یعنی خط $y=x$ است.



$y=b^x$ هرگز به محور xها نمی‌خورد. خط $y=0$ مجانب افقی است.

$D_f:\mathbb{R} \quad R_f:(0,+\infty)$

دامنه $y=b^U$ همان دامنه U است. مثلاً در $y=7^{\sqrt{x}}$ دامنه $D_f:[0,+\infty)$ است.

تمرین: اگر $f(x)=\sqrt{1-\log(x^2-3x)}$ باشد، دامنه کدام است؟ راهنمایی: $\log_b a = c$ یعنی $b^c = a$

۱) $[-2,0)\cup(3,5]$ ۲) $[-2,3)$ ۳) $[-2,0)\cup(3,5)$ ۴) $(0,5]$

راه کلاسیک:

شرط Log: $x^2-3x=x(x-3)>0$

	$-\infty$		0		3		$+\infty$
x		+	۰	-	۰	+	

یعنی

شرط $\sqrt{\ }$: $1-\log(x^2-3x)\geq 0 \rightsquigarrow 1\geq \log_{10}(x^2-3x)$

$10^1=10\geq x^2-3x$

$\Rightarrow x^2-3x-10\leq 0$

	$-\infty$		-2		5		$+\infty$
$x^2-3x-10\leq 0$		+	۰	-	۰	+	

اشتراک (الف) $x\leq 0$ یا $x\geq 3$ ، (ب) $-2\leq x\leq 5$

گزینه ۱ $D_f=[-2,0)\cup(3,5]$

راه حذف گزینه: $x=0$ جلوی لگاریتم را صفر می‌کند لذا $x=0$ نباید در جواب باشد پس گزینه ۲ مردود است.

$x=3$ جلوی لگاریتم را صفر می‌کند لذا گزینه ۴ که $x=3$ دارد مردود است.

$x=5$ برای تابع شکل درست می‌کند و $f(5)=\sqrt{1-1}=0$ لذا $x=5$ باید در جواب باشد لذا بین ۳ و ۵ گزینه یک درست است.

تمرین: مجموعه جواب $|x^2+1|>|x-2|-2x+1$ کدام است؟

۱) $(-2,1)$ ۲) $(-1,1)$ ۳) $(-1,2)$ ۴) $(1,2)$

راه کلاسیک که طولانیه: x^2+1 مثبت است از داخل قدرمطلق میاد و رفته داخل. $x-2$ برابر $x=2$ است و داریم:

فرض $x-2\geq 0 \Rightarrow x\geq 2$: $2x+1-(x-2)>x^2+1$ $\Rightarrow x^2-x-2<0$ $\Rightarrow -1<x<2$ ← جواب

اشتراک: $2\leq x<2$ (فرض $x\geq 2$ و جواب $-1<x<2$)

فرض $x-2<0 \Rightarrow x<2$: $2x+1-(-x+2)>x^2+1$ $\Rightarrow x^2-3x+2<0$ $\Rightarrow 1<x<2$ ← جواب

اشتراک: $1<x<2$ (فرض $x<2$ و جواب $1<x<2$)

اجتماع: $1<x<2$ یا $2\leq x<2$

جواب: $(1,2)$

یک بار $x\geq 2$ یک بار $x<2$ حل کرده و بین جواب و فرض $x\geq 2$ و $x<2$ اشتراک می‌گیریم در آخر بین دو جواب اجتماع می‌گیریم.

راه کنترل گزینه: $x=0$ نامساوی را به صورت $1<1$ درمی‌آورد که غلط است لذا گزینه‌های شامل $x=0$ حذف و فقط گزینه ۲ درست است.

برای حل نامعادله شامل قدرمطلق (مثل بالا) ریشه داخل قدرمطلق ($x=2$) را یافته قدرمطلق را تعیین علامت می‌کنیم. در هر قسمت (که $x\geq 2$ یا $x<2$) نامساوی حاصل کرده بین جواب هر قسمت و فرض اشتراک می‌گیریم. در آخر بین جواب‌های نهایی اجتماع می‌گیریم.

وقتی قراره بین ۲ شرط "و" بگذاریم اشتراک $\cap$ می‌گیریم اما اگر قرار است "یا" بگذاریم اجتماع $\cup$ می‌گیریم.

و = اشتراک = $\cap$ یا = اجتماع = $\cup$

تمرین: حاصل $[\sqrt{x^2+1}]+[\frac{x^2+2}{x^2+1}]$ کدام است؟ (x عدد صحیح مثبت) مفهوم $[x]$: بزرگترین عدد صحیح نابیشتر از x یعنی اگر x صحیح بود خودش و اگر x غیر صحیح بود عدد صحیح قبل آن را بگو.

۱) $x+1$ ۲) x ۳) $x+2$ ۴) ۲

روش عددگذاری:

شلاً x را بگیر:

$x=2 \rightarrow [\frac{4+2}{4+1}=\frac{6}{5}=1,2]+[\sqrt{4+1=5}=2,...]=1+2=3$ مثلاً

تنها گزینه‌ای که به ازای $x=2$ برابر عدد ۳ هست گزینه یک است.

تمرین: اگر $\frac{x}{(x^2-2x+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}$ باشد، $A+B$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

راه سریع: عددگذاری: $x=2 \rightarrow \frac{A}{2-1}+\frac{B}{(2-1)^2}=\frac{2}{4-4+1} \rightarrow A+B=2$

راه کلاسیک:

$$\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}=\frac{A(x-1)+B}{(x-1)^2}=\frac{x}{x^2-2x+1=(x-1)^2}$$

$$A(x-1)+B=x$$

$$Ax-A+B=1x$$ ← ضریب جملات هم درجه را برابر قرار می دهیم.

دو طرف تساوی برابرند پس اگر ضریب x طرف راست یک است ضریب x طرف چپ هم باید یک باشد

لذا $A=1$ طرف راست تساوی عدد ثابت ندارد لذا طرف چپ تساوی هم نباید عدد ثابت داشته باشد پس

$-A+B=0$ ، $B=A$ و $A+B=2$ پس $B=A=1$

تمرین: اگر $2x-\frac{1}{x}=A$ باشد، حاصل $x^3-\frac{1}{8x^3}$ کدام است؟

۱) $A^2+\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{A^2+3A}{4}$ ۳) $\frac{A^2+6A}{8}$ ۴) $A^2-\frac{3}{2}$

راه حد گذاری:

فرض $x=1 \longrightarrow 2x-\frac{1}{x}=A \rightsquigarrow 2-1=1=A$ حاصل $x^3-\frac{1}{8x^3}$

حاصل خواسته شده با $x=1$ برابر $\frac{7}{8}$ است و $x=1$ معادل $A=1$ است.

گزینه‌ای درست است که اگر $x=1$ باشد حاصل $\frac{7}{8}$ دربیاید

می‌دانیم که با $x=1$ خواهیم داشت $A=1$ پس در

گزینه‌ها $A=1$ می‌گذاریم که گزینه ۳ درست است

۱) $\frac{5}{2}$ ۲) $\frac{4}{4}=1$ ۳) $\frac{7}{8}$ ✓ ۴) $-\frac{1}{2}$

$x=1 \quad A=1$

راه کلاسیک: چون صحبت از $x^3-\frac{1}{8x^3}$ است و به توان ۳ رسانده

اتحاد مکعب جمع ۲ جمله

$(a+b)^3=a^3+b^3+3a^2b+3ab^2=a^3+b^3+3ab(a+b)$

$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=a^3-b^3-3ab(a-b)$

$2x-\frac{1}{x}=A \longrightarrow x^3-\frac{1}{8x^3}=?$

$\div 2 \downarrow$

$x-\frac{1}{2x}=\frac{A}{2}$

طرفین را به توان ۳ برسون طبق

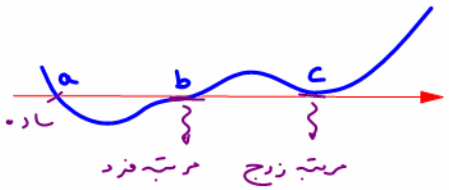
$\left(x-\frac{1}{2x}\right)^3=\left(\frac{A}{2}\right)^3 \rightarrow x^3-\frac{1}{8x^3}-3x\left(\frac{1}{2x}\right)\left(x-\frac{1}{2x}\right)=x^3-\frac{1}{8x^3}-\frac{3}{4}A=\frac{A^3}{8}$

$a \quad b$

$x^3-\frac{1}{8x^3}=\frac{A^3}{8}+\frac{3}{4}A=\frac{A^3+6A}{8}$

تعیین علامت به روش سریع

نام ریشه در عبارات جبری:



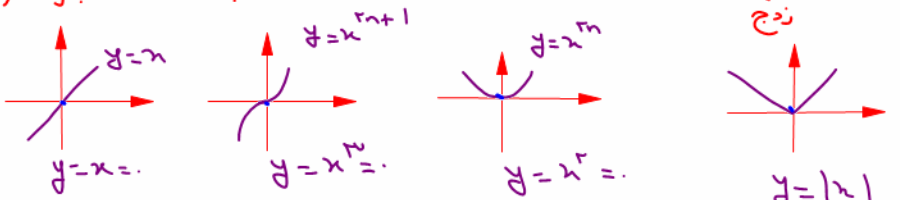
$y=(x-a)^{1}(x-b)^{3}(x-c)^{2}=0$

$x-a=0$ ریشه ساده $\longrightarrow x=a$

$(x-b)^{3}=0$ ریشه مکرر مرتبه ۳ (فرد) $\longrightarrow$ سه بار $x=b$

$(x-c)^{2}=0$ ریشه مکرر مرتبه ۲ (زوج) $\longrightarrow$ دو بار (مضاعف) $x=c$

هرچه n آشناتر به $y=x$ هانزدیکتر

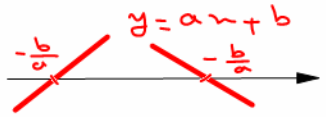


در ریشه‌های ساده و مکرر مرتبه فرد تغییر علامت می‌دهند ولی

در ریشه مضاعف و مکرر مرتبه زوج در ریشه داخل قدرمطلق تغییر علامت نمی‌دهند.

در ریشه تغییر علامت ندارم — در ریشه تغییر علامت داره

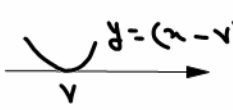
① $ax+b=0 \longrightarrow x=-\frac{b}{a}$ ساده



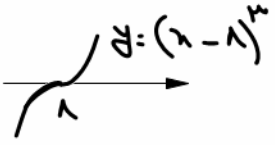
② $ax^2+bx+c=0$, $\Delta=b^2-4ac$

- $\Delta>0$ ۲ ریشه ساده
- $\Delta=0$ ۱ ریشه مضاعف
- $\Delta<0$ ریشه ندارد

③ $(x-a)^{2n}=0 \longrightarrow$ ریشه مکرر مرتبه زوج $x=a$

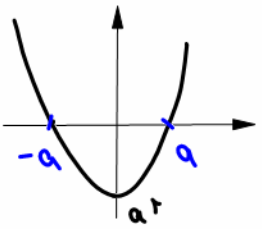


④ $(x-a)^{2n+1}=0 \longrightarrow$ ریشه مکرر مرتبه فرد $x=a$



⑤ $x^2-a^2=0 \xrightarrow{b=0} \Delta=b^2-4ac \xrightarrow{\Delta=4a^2>0} x=\pm a$ ۲ ریشه ساده

اتحاد مزدوج $(x-a)^{1}(x+a)^{1}=0$ $x=a$ یا $x=-a$ دو ریشه ساده



$x^2+a^2=0 \Rightarrow x^2=-a^2$ ریشه ندارد $y=x^2+a^2$

اصلاً به محور x ها نمی‌خوره ریشه ندارد

$\Delta=b^2-4ac=0-4(1)(a^2)=-4a^2<0$ ریشه ندارد.

روش تعیین علامت سریع: صورت و مخرج را به ضرب عوامل تجزیه می‌کنیم. ریشه‌های صورت و مخرج را با فاصله نام آن‌ها را می‌نویسیم. به ترتیب کوچک به بزرگ در جدول تعیین علامت می‌آوریم. عددی بزرگ‌تر از بزرگترین ریشه در نظر گرفته به کل عبارت داده و علامت آن را در اولین خانه سمت راست زیر $+\infty$ می‌نویسیم. علامت هر خانه از خانه سمت چپ خود معلوم می‌شود. عبارات جبری در ریشه ساده و فرد تغییر علامت می‌دهند ولی در ریشه مضاعف (مرتبه زوج) در ریشه داخل قدر مطلق تغییر علامت نمی‌دهند.

$$P(x)=\frac{(x^2+5)|x|(x+2)(x-3)^2(x-4)^3}{(x-5)^4}$$

(قدر مطلق ← فاقد ریشه، چهار ← مرتبه)

x	$-\infty$	-2	0	3	4	5	6	$+\infty$
		ساده	زوج	زوج	فرد	زوج	شدنی	
$P(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	$+$
						ت ن		

تابع در بازه $(-\infty,-2)\cup(4,5)\cup(5,+\infty)$ یعنی $x\in(-\infty,-2)\cup(4,5)\cup(5,+\infty)$ بالای محور x هاست. بالای خط $y=0$ و مثبت است.

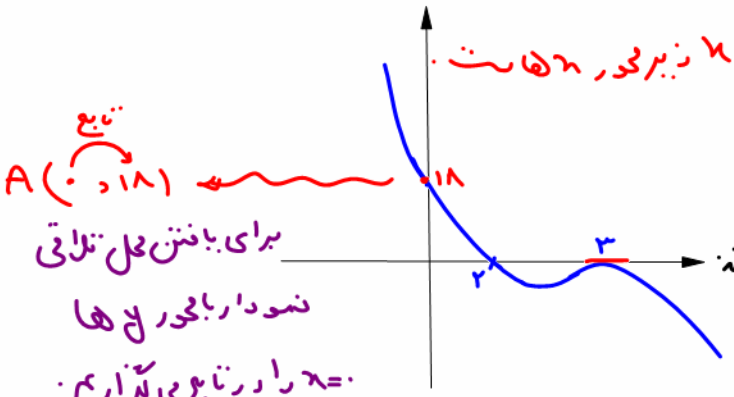
سؤال: تابع $y=5(x-2)(x^2-6x+9)$ در کدام بازه زیر خط $y=0$ است؟ (زیر محور xها)

$y=5(x-2)(x-3)^2$

x	$-\infty$	2	3	4	$+\infty$
		ساده	زوج	مثلاً ۴	
y	$+$	0	$-$	0	$-$

$y<0$

تابع در بازه $(-\infty,2)\cup(3,+\infty)$ یعنی $x\in(2,3)\cup(3,+\infty)$ زیر محور xهاست.



تابع

برای یافتن محل تلاقی نمودار با محور yها $x=0$ را در تابع می‌گذاریم.

نام ریشه، نوع برخورد تابع را با محور xها مشخص می‌کند.

برای یافتن محل تلاقی با محور xها y را صفر می‌گذاریم. در این حالت ریشه یا صفرهای رابطه به دست می‌آید.

$y=-(x-2)(x-3)^2 \rightarrow \begin{cases} x=2 & \text{ساده} \\ x=3 & \text{مضاعف} \end{cases}$

محل تلاقی با محور xها $\begin{matrix} B(2,0) \\ C(3,0) \end{matrix}$

Homework (1)

۱ مساحت ناحیهٔ محدود به نمودارهای دو تابع $y = \sqrt{x^۲ - ۴x + ۴}$ و $y = \frac{۱}{۲}x + ۲$، کدام است؟

۱) ۸
۲) ۹
۳) ۱۰
۴) ۱۲

جاهای خالی داده‌شده را با عبارت مناسب کامل نمایید.

۲ نقاط برخورد نمودار تابع با محور ..... را صفرهای تابع می‌نامیم.

۳ اگر سه نقطه $A(a\ ,\ ۲a + ۱)$، $B(۳\ ,\ -۱)$ و $C(۲\ ,\ ۴)$ روی یک خط راست قرار گیرند، مقدار a کدام است؟

۱) $\frac{۷}{۱۳}$
۲) $\frac{۷}{۱۲}$
۳) $\frac{۱۳}{۷}$
۴) $\frac{۱۲}{۷}$

۴ مثلث ABC با مختصات رئوس $A(۳\ ,\ ۲)$، $B(-۱\ ,\ ۳)$ و $C(۱\ ,\ ۰)$ مفروض است. نوع مثلث ABC کدام است؟

۱) متساوی‌الاضلاع
۲) قائم‌الزاویه
۳) متساوی‌الساقین
۴) هیچ‌کدام

۵ اگر نقطه $A(۶ - x\ ,\ x + ۲)$ در ناحیه اول قرار داشته باشد، چند مقدار طبیعی برای x یافت می‌شود؟

۱) ۵
۲) ۶
۳) ۷
۴) ۸

۶ اگر فاصله $A(m\ ,\ -۱)$ و $B(۴\ ,\ ۷)$ برابر ۸ باشد، فاصله دو نقطه $C(m\ ,\ ۷)$ و $D(۱\ ,\ m - ۱)$ چقدر است؟

۱) ۵
۲) ۳
۳) ۶
۴) ۴

۷ اگر دو ضلع مجاور یک مربع خطوط $L : ۳x + my = ۰$ و $L' : ۲x + (m - ۵)y = \frac{۱۳}{۲}$ باشند، مختصات نقطه برخورد L و L' کدام است؟

۱) $(۱ , -\frac{۳}{۲})$
۲) $(\frac{۳}{۲} , -۱)$
۳) $(-۱ , \frac{۳}{۲})$
۴) $(-\frac{۳}{۲} , -۱)$

۸ اگر $A(۲ , ۵)$، $B(۲ , ۳)$ و $C(-۱ , ۵)$ سه رأس مثلثی باشند، نوع مثلث کدام است؟

۱) متساوی‌الاضلاع
۲) متساوی‌الساقین
۳) قائم‌الزاویه
۴) متساوی‌الساقین قائم‌الزاویه

۹ فاصلهٔ نقطهٔ تلاقی دو خط $y = ۲x + ۲$ و $y = ۳x - ۳$، از مبدأ مختصات کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۲}$
۲) $۳\sqrt{۲}$
۳) ۱۲
۴) ۱۳

۱۰ اگر $A(۲, ۵)$، $B(۲, ۳)$ و $C(-۱, ۵)$ سه رأس مثلثی باشند، آن مثلث چه نام دارد؟

۱) متساوی‌الساقین
۲) قائم‌الزاویه
۳) متساوی‌الاضلاع
۴) متساوی‌الساقین قائم‌الزاویه

۱۱ اگر x نقطه‌ای روی محور xها باشد به‌طوری‌که فاصله‌اش از نقطهٔ $\sqrt{۲}$ کمتر از $\sqrt{۸}$ باشد، حدود x کدام است؟

۱) $۰ < x < ۴\sqrt{۲}$
۲) $۰ < x < ۳\sqrt{۲}$
۳) $-\sqrt{۲} < x < ۳\sqrt{۲}$
۴) $-\sqrt{۲} < x < ۴\sqrt{۲}$

۱۲ شیب خطی که محور xها را با طول -۴ و محور عرض‌ها را با عرض ۲ قطع می‌کند، کدام است؟

۱) -۲
۲) $\frac{۱}{۲}$
۳) $-\frac{۱}{۲}$
۴) ۲

۱۳ دو نقطه روی نیمساز ربع اول و سوم وجود دارد که فاصلهٔ آن تا نقطهٔ $A(۲ , ۰)$ برابر $\sqrt{۱۰}$ می‌باشد. مجموع عرض‌های دو نقطهٔ موردنظر کدام است؟

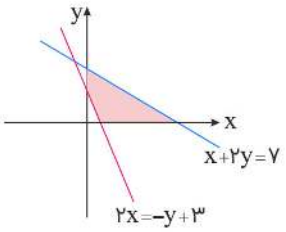
۱) ۳
۲) -۱
۳) ۲
۴) ۴

۱۴ اگر شیب خط گذرا از دو نقطهٔ $A(k , k + ۱)$ و $B(۲ , k)$ منفی باشد، حدود k کدام است؟

۱) $k > ۲$
۲) $k < ۲$
۳) $k > -۲$
۴) $k < ۳$

آموزش را با دبیران برند ایران تجربه کنید

۱۵ باتوجه‌به شکل زیر، مساحت قسمت رنگی کدام است؟



۱) ۱۰
۲) ۱۵
۳) ۲۰
۴) ۵

۱۶ مجموع مقادیر a کدام باشد تا فاصله نقطه $A(a\ ,\ ۱)$ از $B(۳\ ,\ ۲)$ برابر $\sqrt{۲}$ شود؟

۱) ۶
۲) ۸
۳) ۴
۴) ۲

۱۷ اگر $A(۳\ ,\ ۲)$ و $B(-۱\ ,\ -۱)$ رئوس غیرمجاور یک مربع باشند و این مربع داخل یک دایره محاط شده باشد، در این صورت مساحت فضای بین دایره و مربع کدام است؟ $(\pi \simeq ۳)$

۱) ۵
۲) ۵/۲۵
۳) ۶
۴) ۶/۲۵

۱۸ مساحت مثلث ABC با مختصات رئوس $A(۳\ ,\ ۱)$، $B(-۲\ ,\ ۰)$ و $C(-۱\ ,\ ۲)$ کدام است؟

۱) ۵
۲) ۱۰
۳) ۵/۵
۴) ۴/۵

۱۹ اگر مختصات دو سرِ قطر یک دایره $A(۳\ ,\ ۲)$ و $B(-۲\ ,\ ۴)$ باشد، مساحت دایره کدام است؟

۱) ۷π
۲) $۷/۵\pi$
۳) $۷/۲۵\pi$
۴) $۷/۷۵\pi$

۲۰ به ازای کدام مقدار m، سه نقطهٔ $A(۴\ ,\ m)$، $B(۳\ ,\ -۲)$ و $C(m+۴\ ,\ ۴)$ روی یک خط راست قرار می‌گیرند؟

۱) -۴
۲) ۱
۳) ۱ و -۴
۴) هیچ مقدار

۲۱ مقدار m چقدر باشد تا خط به معادلهٔ $۲y + x = ۳$ از نقطهٔ $A(m\ ,\ m-۱)$ عبور کند؟

۱) $\frac{۴}{۳}$
۲) $\frac{۵}{۳}$
۳) $\frac{۱}{۳}$
۴) $\frac{۲}{۳}$

۲۲ اگر نقطهٔ $A(۲m+۱\ ,\ m-۱)$ در ناحیهٔ اول و بالای خط $y = x$ قرار گیرد، حدود m کدام است؟

۱) $m > ۱$
۲) $m > ۰$
۳) $m > ۲$
۴) $m \in \varnothing$

۲۳ خط d دایره‌ای به مرکز (a , b) را در دو نقطه $(۴ , ۰)$ و $(۲ , -۲)$ قطع کرده است. اگر فاصله مرکز دایره تا خط d، ۳ باشد، حاصل $a + b$ کدام است؟

۱) ۳
۲) ۲
۳) ۱
۴) -۲

۲۴ اگر A و B دو نقطه با مختصات $(n + ۳ , ۲)$ و $(۵ , ۴)$ باشند و $AB = ۳$ باشد، آنگاه حاصل‌جمع حالت‌های ممکن برای n چند است؟

۱) ۲
۲) ۴
۳) ۸
۴) ۵

۲۵ رئوس مثلث متساوی‌الاضلاع ABC روی دایره‌ای به مرکز $(-۴ , ۳)$ قرار دارد. اگر $A(۳ , -۲)$ و $C(x , y)$ باشد، x کدام می‌تواند باشد؟ (فاصله محل برخورد میانه‌ها از رئوس مثلث برابرند)

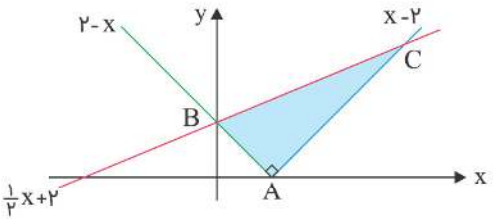
۱) $۳ + \sqrt{۳}$
۲) $-۲ \pm \sqrt{۳}$
۳) $۲\sqrt{۳}$
۴) $\pm\sqrt{۳}$

پاسخ Homework (1)

۱ گزینه ۴

$$y_1 = \sqrt{x^2 - 4x + 4} = \sqrt{(x-2)^2} = |x-2|$$
$$y_2 = \frac{1}{2}x + 2$$

$$|x-2| = \begin{cases} x-2 & ; x \geq 2 \\ -x+2 & ; x < 2 \end{cases}$$



$$\begin{cases} A = (2, 0) \\ x - 2 = \frac{1}{2}x + 2 \Rightarrow \frac{1}{2}x = 4 \Rightarrow x = 8 \Rightarrow C = (8, 6) \\ 2 - x = \frac{1}{2}x + 2 \Rightarrow \frac{3}{2}x = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow B = (0, 2) \end{cases}$$

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(0-2)^2 + (2-0)^2} = 2\sqrt{2}$$
$$AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(8-2)^2 + (6-0)^2} = 6\sqrt{2}$$
$$S_{\overset{\Delta}{ABC}} = \frac{AB \times AC}{2} = \frac{2\sqrt{2} \times 6\sqrt{2}}{2} = 12$$

۲ xها

۳ گزینه ۳

$$m_{AB} = m_{BC} \Rightarrow \frac{2a+1+1}{a-3} = \frac{4+1}{2-3} \Rightarrow \frac{2a+2}{a-3} = -5$$
$$\Rightarrow -5a + 15 = 2a + 2 \Rightarrow 7a = 13 \Rightarrow a = \frac{13}{7}$$

۴ گزینه ۴

$$\left.\begin{aligned} AB &= \sqrt{(۳+۱)^۲ + (۲-۳)^۲} = \sqrt{۱۶+۱} = \sqrt{۱۷} \\ AC &= \sqrt{(۳-۱)^۲ + (۲-۰)^۲} = \sqrt{۴+۴} = \sqrt{۸} \\ BC &= \sqrt{(۱+۱)^۲ + (۰-۳)^۲} = \sqrt{۴+۹} = \sqrt{۱۳} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{مختلف‌الاضلاع}$$

$AB^۲ \neq AC^۲ + BC^۲ \Rightarrow$ (قائم‌الزاویه نیست)

۵ گزینه ۱

$$\begin{cases} ۶-x>۰ \Rightarrow x<۶ \\ x+۲>۰ \Rightarrow x>-۲ \end{cases} \xrightarrow{\cap} -۲<x<۶$$

اعداد طبیعی موجود در این بازه ۵ تا است.

۶ گزینه ۱

$$|AB| = ۸ \Rightarrow \sqrt{(m-۴)^۲ + (-۱-۷)^۲} = ۸ \Rightarrow (m-۴)^۲ = ۰ \Rightarrow m = ۴$$

$$m = ۴ \Rightarrow C(۴, ۷), D(۱, ۳)$$

$$|CD| = \sqrt{(۴-۱)^۲ + (۷-۳)^۲} = ۵$$

۷ گزینه ۱

دو ضلع مجاور مربع بر هم عمودند، پس ضرب شیب‌های دو خط L و L' برابر ۱- است.

$$\frac{-۳}{m} \times \frac{-۲}{m-۵} = -۱ \Rightarrow m(m-۵) = -۶ \Rightarrow m^۲ - ۵m + ۶ = ۰ \Rightarrow m = ۲, ۳$$

اگر $m = ۲$ باشد:

$$\begin{matrix} ۳\times \\ ۲\times \end{matrix} \begin{cases} ۳x+۲y=۰ \\ ۲x-۳y=\frac{۱۳}{۲} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۹x+۶y=۰ \\ ۴x-۶y=۱۳ \end{cases}$$

$$\xrightarrow{+} ۱۳x = ۱۳ \Rightarrow x = ۱ \Rightarrow y = -\frac{۳}{۲}$$

مختصات نقطه برخورد دو خط L و L' برابر $(۱, -\frac{۳}{۲})$ است.

به ازای $m = ۳$ مختصات نقطهٔ برخورد به‌صورت $(\frac{۱۳}{۸}, \frac{-۱۳}{۸})$ است که در گزینه‌ها وجود ندارد.

۸ گزینه ۳

$$AB = \sqrt{(۲-۲)^۲ + (۳-۵)^۲} = ۲$$

$$AC = \sqrt{(-۱-۲)^۲ + (۵-۵)^۲} = ۳$$

$$BC = \sqrt{(-۱-۲)^۲ + (۵-۳)^۲} = \sqrt{۱۳}$$

$$BC^۲ = AC^۲ + AB^۲ \Rightarrow ۱۳ = ۹ + ۴$$ مثلث قائم‌الزاویه

۹ گزینه ۴

$$y_۱ = y_۲ \Rightarrow ۳x - ۳ = ۲x + ۲ \Rightarrow \begin{cases} x = ۵ \\ y = ۱۲ \end{cases}$$

نقطهٔ تلاقی دو خط: $A(۵\ ,\ ۱۲)$

$$OA = \sqrt{x^۲ + y^۲} \Rightarrow OA = \sqrt{۲۵ + ۱۴۴} = ۱۳$$

۱۰ گزینه ۲

$$AB = \sqrt{(۲-۲)^۲ + (۳-۵)^۲} = ۲$$

$$AC = \sqrt{(-۱-۲)^۲ + (۵-۵)^۲} = ۳$$

$$BC = \sqrt{(-۱-۲)^۲ + (۵-۳)^۲} = \sqrt{۱۳}$$

مثلث قائم‌الزاویه:

$$BC^۲ = AC^۲ + AB^۲ \Rightarrow ۱۳ = ۹ + ۴$$

۱۱ گزینه ۳

$$|x - \sqrt{۲}| < \sqrt{۸} \Rightarrow -\sqrt{۸} < x - \sqrt{۲} < \sqrt{۸}$$

$$\xrightarrow{+\sqrt{۲}} -\sqrt{۸} + \sqrt{۲} < x < \sqrt{۸} + \sqrt{۲} \Rightarrow -\sqrt{۲} < x < ۳\sqrt{۲}$$

۱۲ گزینه ۲

خط محور xها را با طول -۴ قطع می‌کند، درنتیجه نقطهٔ $(-۴, ۰)$ رو خط قرار دارد.
خط محور yها را با عرض ۲ قطع می‌کند، درنتیجه نقطهٔ $(۰, ۲)$ رو خط قرار دارد.

$$\Rightarrow \text{شیب}: m = \frac{y_۲ - y_۱}{x_۲ - x_۱} = \frac{۲ - ۰}{۰ - (-۴)} = \frac{۲}{۴} = \frac{۱}{۲}$$

۱۳ گزینه ۳

نقاطی را که روی خط $y = x$ قرار می‌گیرند، به صورت $M(a\ ,\ a)$ در نظر می‌گیریم:

$$|AM| = \sqrt{۱۰} \Rightarrow \sqrt{(a-۲)^۲ + (a-۰)^۲} = \sqrt{۱۰} \Rightarrow a^۲ - ۴a + ۴ + a^۲ = ۱۰$$

$$\Rightarrow ۲a^۲ - ۴a - ۶ = ۰ \xrightarrow{\div ۲} a^۲ - ۲a - ۳ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} a = -۱ \\ a = ۳ \end{cases}$$

پس نقاط موردنظر $M_۱(-۱\ ,\ -۱)$ و $M_۲(۳\ ,\ ۳)$ می‌باشند. مجموع عرض‌ها برابر ۲ خواهد بود.

۱۴ گزینه ۲

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{k - (k+۱)}{۲ - k} < ۰ \Rightarrow \frac{۱}{k-۲} < ۰ \Rightarrow k - ۲ < ۰ \Rightarrow k < ۲$$

۱۵ گزینه ۱

$$x + ۲y = ۷ \Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \Rightarrow y = \frac{۷}{۲} \\ y = ۰ \Rightarrow x = ۷ \end{cases}$$

$$۲x = -y + ۳ \Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \Rightarrow y = ۳ \\ y = ۰ \Rightarrow x = \frac{۳}{۲} \end{cases}$$

مساحت رنگی:

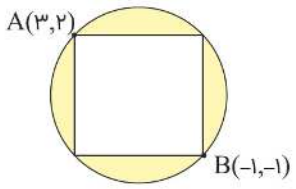
$$(\frac{\frac{۷}{۲} \times ۷}{۲}) - (\frac{۳ \times \frac{۳}{۲}}{۲}) = \frac{۴۹}{۴} - \frac{۹}{۴} = ۱۰$$

۱۶ گزینه ۱

$$\sqrt{(a-۳)^۲ + (۱-۲)^۲} = \sqrt{۲} \Rightarrow \sqrt{a^۲ - ۶a + ۱۰} = \sqrt{۲} \Rightarrow a^۲ - ۶a + ۱۰ = ۲$$

$$\Rightarrow a^۲ - ۶a + ۸ = ۰ \Rightarrow (a-۲)(a-۴) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} a = ۲ \\ a = ۴ \end{cases} \Rightarrow ۲ + ۴ = ۶$$

۱۷ گزینه ۴

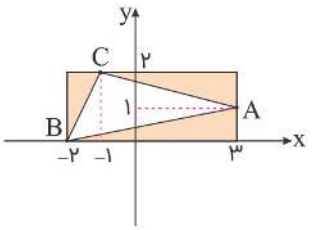


$$AB = \sqrt{(۳+۱)^۲ + (۲+۱)^۲} = \sqrt{۱۶+۹} = ۵$$

$$\left.\begin{array}{l} S_{\text{مربع}} = \dfrac{(AB)^۲}{۲} = \dfrac{۲۵}{۲} \\ S_{\text{دایره}} = \pi(\dfrac{AB}{۲})^۲ = ۳(\dfrac{۵}{۲})^۲ = \dfrac{۷۵}{۴} \end{array}\right\} \Rightarrow S_{\text{رنگی}} = \frac{۷۵}{۴} - \frac{۲۵}{۲} = ۶/۲۵$$

۱۸ گزینه ۴

مثلث را رسم می‌کنیم:



$$S_{\hat{ABC}} = \text{مساحت رنگی} - \text{مساحت مستطیل}$$

$$= (۵ \times ۲) - (۱ + ۲ + ۲/۵) = ۱۰ - ۵/۵ = ۴/۵$$

۱۹ گزینه ۳

$$AB = \sqrt{(۳+۲)^۲ + (۲-۴)^۲} = \sqrt{۲۵+۴} = \sqrt{۲۹}$$

$$r = \frac{AB}{۲} = \frac{\sqrt{۲۹}}{۲} \Rightarrow S_{\text{دایره}} = \pi r^۲ = \pi \times (\frac{\sqrt{۲۹}}{۲})^۲ = \frac{۲۹\pi}{۴} = ۷/۲۵\pi$$

۲۰ گزینه ۳

$$m_{AB} = m_{AC} \Rightarrow \frac{m+۲}{۴-۳} = \frac{m-۴}{۴-m-۴} \Rightarrow \frac{m+۲}{۱} = \frac{m-۴}{-m}$$

$$\Rightarrow m^۲ + ۳m - ۴ = ۰ \Rightarrow (m-۱)(m+۴) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} m = ۱ \\ m = -۴ \end{cases}$$

۲۱ گزینه ۲

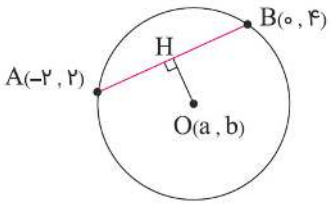
$$۲(m-۱) + m = ۳ \Rightarrow ۳m = ۵ \Rightarrow m = \frac{۵}{۳}$$

۲۲ گزینه ۴

چون A در ناحیهٔ اول است، پس طول و عرض آن مثبت می‌باشد و ازطرفی بالای خط $y = x$ قرار دارد، درنتیجه عرض آن بیشتر از طول آن است.

$$m-۱ > ۲m+۱ > ۰ \Rightarrow \begin{cases} m-۱ > ۲m+۱ \Rightarrow m < -۲ \\ ۲m+۱ > ۰ \Rightarrow m > -\frac{۱}{۲} \end{cases} \xrightarrow{\cap} \varnothing$$

۲۳ گزینه ۲



نقطه H وسط پاره‌خط AB است:

$$H = \frac{A+B}{۲} = (-۱ , ۳)$$

$$AH = \sqrt{(-۲+۱)^۲ + (۳-۲)^۲} = \sqrt{۲} , \ OH = ۳$$

$$\xrightarrow{\text{قضیه فیثاغورس}} OA = \sqrt{۲+۹} = \sqrt{۱۱}$$

$$OH = \sqrt{(a+۱)^۲ + (b-۳)^۲} = ۳ \Rightarrow a^۲ + ۲a + ۱ + b^۲ - ۶b + ۹ = ۹$$

$$\Rightarrow a^۲ + ۲a + b^۲ - ۶b = -۱ \quad (۱)$$

$$OA = \sqrt{(a+۲)^۲ + (b-۲)^۲} = \sqrt{۱۱} \Rightarrow a^۲ + ۴a + ۴ + b^۲ - ۴b + ۴ = ۱۱$$

$$\Rightarrow a^۲ + ۴a + b^۲ - ۴b = ۳ \quad (۲)$$

$$\xrightarrow{\text{جایگذاری ۱ در ۲}} ۲a + ۲b = ۴ \Rightarrow a + b = ۲$$

۲۴ گزینه ۲

با داشتن نقاط A و B، پاره‌خط AB را به‌صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (۵\,,\,۴) - (n+۳\,,\,۲) = (۲-n\,,\,۲)$$

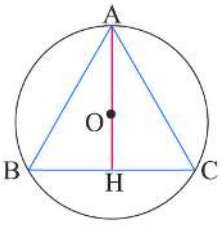
حال طول پاره‌خط AB را توسط فرمول زیر به دست می‌آوریم و برابر ۳ قرار می‌دهیم:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(۲-n)^۲ + (۲)^۲} = ۳ \Rightarrow (۲-n)^۲ + ۲^۲ = ۹ \Rightarrow n^۲ - ۴n - ۱ = ۰$$

$$\Rightarrow \Delta = ۱۶ + ۴ = ۲۰ \Rightarrow n = \frac{۴ \pm \sqrt{۲۰}}{۲}$$

حاصل‌جمع حالت‌های ممکن برای n برابر است با ۴.

۲۵ گزینه ۱



$$OA = \sqrt{(۳-۳)^۲ + (-۲+۴)^۲} = ۲$$

$$\xrightarrow{OA=OC} OC = \sqrt{(x-۳)^۲ + (y+۴)^۲} = ۲ \quad (۱)$$

مرکز دایره همان محل برخورد میانه‌های مثلث است، بنابراین:

$$AH = \frac{۳}{۲}OA = \frac{۳}{۲} \times ۲ = ۳$$

اگر طول ضلع مثلث را a درنظر بگیریم، طبق قضیه فیثاغورس داریم:

$$AC^۲ = HC^۲ + AH^۲ \Rightarrow a^۲ - (\frac{a}{۲})^۲ = ۹ \Rightarrow a = \sqrt{۱۲}$$

$$\Rightarrow AC = \sqrt{(x-۳)^۲ + (y+۲)^۲} = \sqrt{۱۲} \quad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۲)\,,\,(۱)} (x-۳)^۲ + (y+۲)^۲ = (x-۳)^۲ + (y+۴)^۲ + ۸$$

$$\Rightarrow y = -۵ \Rightarrow x = \pm\sqrt{۳} + ۳$$

Homework (2)

۱ مقدار m چقدر باشد تا عبارت $x^۲ + ۴mx + ۱۶$ مربع کامل شود؟

۱) ± ۴ ۲) ± ۲

۳) $\pm \sqrt{۲۰}$ ۴) -۱

۲ اگر کمترین مقدار تابع $y = ۵x^۲ - bx + ۷$ برابر ۲ باشد، آنگاه b کدام است؟

۱) $۱۰ , -۱۰$ ۲) ۳

۳) -۳ ۴) $۵ , -۵$

۳ مجموع ضرایب معادلهٔ درجه دومی صفر است، یکی از جواب‌های معادله کدام است؟

۱) -۱ ۲) صفر

۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) ۱

۴ کدام‌یک از معادله‌های زیر ریشهٔ مضاعف دارد؟

۱) $۴x^۲ - ۱۲x + ۹ = ۰$ ۲) $۳x^۲ + ۴x - ۲ = ۰$

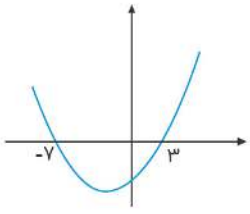
۳) $x^۲ - ۲x + ۳ = ۰$ ۴) $x^۲ + ۳x - ۲ = ۰$

۵ محور تقارن سهمی به معادلهٔ $y = -۲x^۲ - ۵x + ۷$ کدام است؟

۱) $x = \frac{۵}{۲}$ ۲) $x = -\frac{۵}{۲}$

۳) $x = -\frac{۵}{۴}$ ۴) $x = \frac{۵}{۴}$

۶ در شکل زیر معادلهٔ محور تقارن کدام است؟



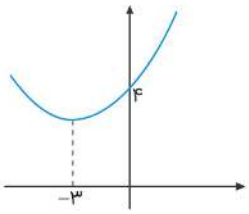
۱) $x = -۲$

۲) $x = -۴$

۳) $y = -۲$

۴) $y = -۴$

۷ اگر شکل زیر نمایش از سهمی $y = ۲x^۲ + bx + c$ باشد، حاصل $b + c$ کدام است؟



۱) ۴
۲) ۱۲
۳) ۱۶
۴) ۲۰

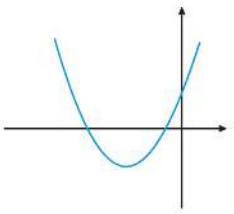
۸ قدرمطلق تفاضل ریشه‌های معادلهٔ $-۶x^۲ - ۵x - ۱ = ۰$ کدام است؟

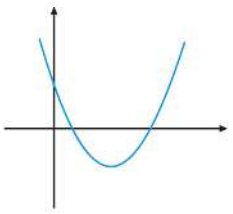
۱) $\frac{۱}{۵}$
۲) $\frac{۵}{۶}$
۳) $\frac{۲}{۵}$
۴) $\frac{۱}{۶}$

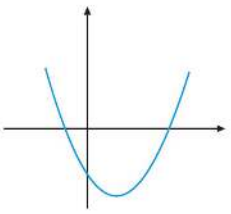
۹ اگر در معادلهٔ درجهٔ دوم $۸x^۲ - bx + ۲ = ۰$ تفاضل دو ریشه برابر صفر باشد، آنگاه b کدام است؟ $(b > ۰)$

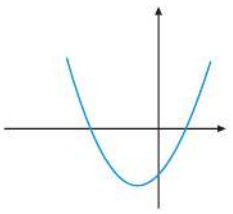
۱) ۴
۲) ۸
۳) ۲
۴) ۶

۱۰ نمودار تابع $y = ۲x^۲ + ۴x - ۱$ کدام است؟

۱)


۲)


۳)


۴)


پاسخ Homework (2)

۱ گزینه ۲

عبارت درجه دوم وقتی مربع کامل می‌شود که دلتای آن مساوی صفر باشد، پس:

$$\Delta = b^۲ - ۴ac = (۴m)^۲ - ۴(۱)(۱۶) = ۱۶m^۲ - ۶۴ = ۰$$
$$m^۲ = ۴ \Rightarrow m = \pm ۲$$

۲ گزینه ۱

اگر در معادلهٔ سهمی $a > ۰$ باشد، سهمی در نقطهٔ رأس خود دارای کمترین مقدار است.

$$\text{طول رأس سهمی} : x = -\frac{b}{۲a} \Rightarrow x = -\frac{-b}{۱۰} = \frac{b}{۱۰}$$
$$\xrightarrow[\text{می‌کنیم}]{\text{در معادله جاگذاری}} ۲ = ۵(\frac{b}{۱۰})^۲ - b(\frac{b}{۱۰}) + ۷ \Rightarrow ۲ = \frac{b^۲}{۲۰} - \frac{b^۲}{۱۰} + ۷$$
$$\Rightarrow \frac{b^۲}{۲۰} - \frac{b^۲}{۱۰} = -۵ \Rightarrow \frac{b^۲(۱-۲)}{۲۰} = -۵ \Rightarrow \frac{-b^۲}{۲۰} = -۵ \Rightarrow b^۲ = ۱۰۰ \Rightarrow b = \pm ۱۰$$

۳ گزینه ۴

اگر مجموع ضرایب یک عبارت درجه دوم برابر با صفر باشند، یکی از ریشه‌ها $x = ۱$ است.

$$ax^۲ + bx + c = ۰ \xrightarrow{a+b+c=۰} x = ۱ : \text{یکی از ریشه‌ها}$$

۴ گزینه ۱

وقتی $\Delta = ۰$ شود، معادله ریشهٔ مضاعف خواهد داشت:

$$۱) \Delta = ۱۴۴ - ۴(۴)(۹) = ۱۴۴ - ۱۴۴ = ۰$$
$$۲) \Delta = ۱۶ - ۴(۳)(-۲) = ۱۶ + ۲۴ = ۴۰ > ۰ \quad \text{دو جواب}$$
$$۳) \Delta = ۴ - ۴(۱)(۳) = ۴ - ۱۲ = -۸ < ۰ \quad \text{جواب ندارد}$$
$$۴) \Delta = ۹ - ۴(۱)(-۲) = ۹ + ۸ = ۱۷ > ۰ \quad \text{دو جواب}$$

۵ گزینه ۳

در سهمی به معادلهٔ $y = ax^۲ + bx + c$ نقطه‌ای به طول $x = -\frac{b}{۲a}$ رأس سهمی است. خطی که از رأس سهمی به موازات محور عرض‌ها رسم می‌شود، محور تقارن سهمی است.

$$y = -۲x^۲ - ۵x + ۷ \Rightarrow x = -\frac{b}{۲a} \Rightarrow x = -\frac{(-۵)}{۲(-۲)} = -\frac{۵}{۴}$$

۶ گزینه ۱

می‌دانیم سهمی متقارن است و طول رأس سهمی در وسط ریشه‌ها قرار دارد و محور تقارن نیز از رأس می‌گذرد:

$$s(x, y) \Rightarrow x = \frac{-۷ + ۳}{۲} = -\frac{۴}{۲} = -۲ \Rightarrow x = -۲$$

۷ گزینه ۳

باتوجه‌به نقطهٔ رأس و $(۰, ۴)$ داریم:

$$\left.\begin{array}{l} y = ۲x^۲ + bx + c \xrightarrow{(۰,۴)} ۴ = ۰ + ۰ + c \Rightarrow c = ۴ \\ \text{طول رأس} : \frac{-b}{۲a} = \frac{-b}{۴} = -۳ \Rightarrow -b = -۱۲ \Rightarrow b = ۱۲ \end{array}\right\} \Rightarrow b + c = ۱۶$$

۸ گزینه ۴

بااستفاده‌از روش کلی حل معادلهٔ درجه دوم (روش Δ) داریم:

$$\Delta = b^۲ - ۴ac = (-۵)^۲ - ۴(-۶)(-۱) = ۲۵ - ۲۴ = ۱$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{۲a} \Rightarrow x_۱ = \frac{۵ + \sqrt{۱}}{۲(-۶)} = \frac{۶}{-۱۲} = -\frac{۱}{۲}$$

$$x_۲ = \frac{۵ - \sqrt{۱}}{۲(-۶)} = \frac{۴}{-۱۲} = -\frac{۱}{۳} \Rightarrow |x_۱ - x_۲| = |-\frac{۱}{۲} - (-\frac{۱}{۳})| = \frac{۱}{۶}$$

روش تستی: در معادلهٔ درجه دوم $ax^۲ + bx + c = ۰$، قدرمطلق تفاضل ریشه‌ها از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$\text{قدرمطلق تفاضل ریشه‌ها} = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \frac{۱}{۶}$$

۹ گزینه ۲

اگر تفاضل ریشه‌ها صفر باشد، آنگاه معادله دارای ریشهٔ مضاعف است، پس Δ صفر می‌باشد. در معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^۲ + bx + c = ۰$، Δ برابر است با:

$$\Delta = b^۲ - ۴ac$$

$$۸x^۲ - bx + ۲ = ۰$$

$$\Delta = (-b)^۲ - ۴(۸)(۲) = ۰ \Rightarrow b^۲ - ۶۴ = ۰ \Rightarrow b^۲ = ۶۴ \Rightarrow b = \pm ۸$$

طبق سؤال: $b = ۸$

۱۰ گزینه ۴

در سهمی داده‌شده، $y = ۲x^۲ + ۴x - ۱$، مختصات رأس سهمی عبارت است از:

$$x = -\frac{b}{۲a} = -\frac{۴}{۲(۲)} = -۱$$
$$y = ۲(-۱)^۲ + ۴(-۱) - ۱ = -۳$$

مختصات رأس سهمی : $(-۱, -۳)$

چون طول رأس سهمی برابر $x = -۱$ می‌باشد، بنابراین گزینه‌های "۲" و "۳" حذف می‌شوند. گزینهٔ "۱" نیز حذف می‌شود، زیرا محل تقاطع سهمی با محور yها، برابر -۱ می‌باشد و عددی منفی است، بنابراین پاسخ صحیح گزینهٔ "۴" می‌باشد.

Homework (3)

ریاضی

۱ دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{\sqrt{x-1}}{[x]-4}$ کدام است؟

۱) $\mathbb{R}-[4,5)$
۲) $[1,+\infty)-\{4\}$
۳) $[1,4]\cup[6,+\infty)$
۴) $[1,4)\cup[5,+\infty)$

حسابان

۲ مجموع ریشه‌های معادلهٔ $||x-1|-2|=1$ کدام است؟

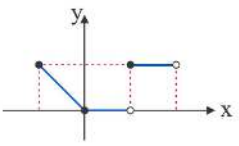
۱) ۲
۲) ۴
۳) ۶
۴) ۸

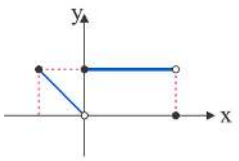
ریاضی

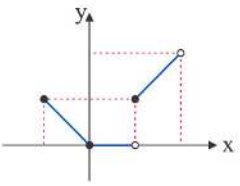
۳ حاصل $A=\frac{[-2/7]+[\frac{1}{4}]-[\sqrt{8}]}{[9]-[-0/3]+[0/8]}$ کدام است؟

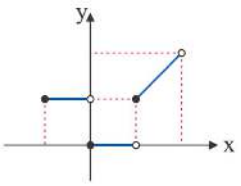
۱) $-\frac{1}{2}$
۲) $-\frac{3}{10}$
۳) $\frac{3}{10}$
۴) $\frac{1}{2}$

۴ نمودار $f(x) = x.[x]$ در بازهٔ $[-۱ , ۲)$ کدام است؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۵ معادلهٔ $[x - ۷] + [x + ۴] = ۹$ دارای مجموعه جواب $[a , b)$ می‌باشد. حداکثر مقدار $a + b$ کدام است؟

۱) ۱۳
۲) ۱۴
۳) ۱۵
۴) ۱۲

۶ مجموعهٔ جواب معادلهٔ $[۲x - ۹] + [۲x + ۳] = ۰$ به‌صورت $[a , b)$ می‌باشد، بیشترین مقدار $b - a$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$
۲) ۱
۳) $\frac{۳}{۲}$
۴) ۲

حسابان

۷ جواب نامعادله $|\frac{۲x - ۱}{x - ۳}| > ۱$ کدام است؟

۱) $\mathbb{R} - [-۲, \frac{۴}{۳}], x \neq ۳$
۲) $\mathbb{R} - (-۲, \frac{۴}{۳}), x \neq ۳$
۳) $[-۲, ۳)$
۴) $(-\infty, \frac{۴}{۳}]$

۸ در مجموعه جواب نامعادله $|x + ۱| < ۳x - ۹$ چند عدد طبیعی وجود دارد؟ $(x - ۴) \cdot$

۱) ۲
۲) ۳
۳) ۵
۴) بی‌شمار

۹ تعداد ریشه‌های معادلهٔ $|x^۲ - ۲x| = ۲$ کدام است؟

۱) یک ریشه
۲) دو ریشه
۳) سه ریشه
۴) بدون ریشه

۱۰ در مجموعه جواب نامعادلهٔ $۲ < |۲x - ۱| < ۵$ چند عدد صحیح وجود دارد؟

۱) ۲
۲) ۱
۳) ۳
۴) بدون عدد صحیح

۱۱ به ازای هر $x < -۱$، حاصل $\sqrt{x^۲ + ۲x + ۱} - \sqrt{x^۲ - ۴x + ۴}$ کدام است؟

۱) ۳
۲) $۲x - ۱$
۳) -۳
۴) $-۲x + ۱$

۱۲ نسبت حاصل‌ضرب ریشه‌های معادله $||x - ۲| - ۳| = ۲$ به مجموع ریشه‌ها کدام است؟

۱) $\frac{-۴۸}{۷}$
۲) $\frac{-۶۳}{۸}$
۳) $\frac{۶۳}{۸}$
۴) $\frac{۴۸}{۷}$

پاسخ Homework (3)

ریاضی

۱ گزینه ۴

$$\left.\begin{array}{l} x-1\geq 0 \Rightarrow x\geq 1 \\ [x]-4=0 \Rightarrow [x]=4 \Rightarrow 4\leq x<5 \quad \text{ریشه‌های مخرج} \end{array}\right\} \Rightarrow D_f=[1\,,\,4)\cup[5\,,\,+\infty)$$

حسابان

۲ گزینه ۲

$$\begin{cases} |x-1|-2=1 \Rightarrow |x-1|=3 \Rightarrow \begin{cases} x-1=3 \Rightarrow x=4 \\ x-1=-3 \Rightarrow x=-2 \end{cases} \\ |x-1|-2=-1 \Rightarrow |x-1|=1 \Rightarrow \begin{cases} x-1=1 \Rightarrow x=2 \\ x-1=-1 \Rightarrow x=0 \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{مجموع ریشه‌ها} = 4+(-2)+2+0=4$$

ریاضی

۳ گزینه ۱

تابعی را که به هر عدد صحیح k خود همان عدد و به تمام اعداد میان دو عدد صحیح متوالی k و $k+1$، عدد صحیح k را نسبت می‌دهد، تابع جزء صحیح می‌نامند که با $f(x)=[x]$ نمایش می‌دهند.

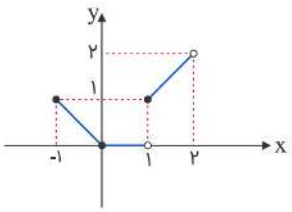
$$\begin{cases} -3\leq -2/7<-2 \Rightarrow [-2/7]=-3 \\ 0\leq \frac{1}{4}<1 \Rightarrow [\frac{1}{4}]=0 \\ 2\leq \sqrt{8}<3 \Rightarrow [\sqrt{8}]=2 \\ -1\leq -0/3<0 \Rightarrow [-0/3]=-1 \\ 0\leq 0/8<1 \Rightarrow [0/8]=0 \end{cases} \Rightarrow A=\frac{-3+0-2}{9-(-1)+0}=\frac{-5}{10}=-\frac{1}{2}$$

آموزش را با دبیران برند ایران تجربه کنید

۴ گزینه ۳

$$-۱ \le x < ۲ \Rightarrow \begin{cases} -۱ \le x < ۰ \Rightarrow [x] = -۱ : f(x) = -x \\ ۰ \le x < ۱ \Rightarrow [x] = ۰ : f(x) = ۰ \\ ۱ \le x < ۲ \Rightarrow [x] = ۱ : f(x) = x \end{cases}$$

$(-۱, ۱), (۰, ۰), (۱, ۱), (۲, ۲)$



۵ گزینه ۱

$$[x] + ۴ + [x] - ۷ = ۹ \Rightarrow ۲[x] - ۳ = ۹$$
$$\Rightarrow ۲[x] = ۱۲ \Rightarrow [x] = ۶$$
$$\Rightarrow ۶ \le x < ۷ \Rightarrow x \in [۶ , ۷)$$

$$b + a = ۷ + ۶ = ۱۳$$

۶ گزینه ۱

$$[۲x] + ۳ + [۲x] - ۹ = ۰$$

$$۲[۲x] = ۶ \Rightarrow [۲x] = ۳ \Rightarrow ۳ \le ۲x < ۴$$
$$\Rightarrow \frac{۳}{۲} \le x < ۲ \Rightarrow x \in [\frac{۳}{۲} , ۲)$$

$$b - a = ۲ - \frac{۳}{۲} = \frac{۱}{۲}$$

حسابان

۷ گزینه ۱

$$\frac{|۲x-۱|}{|x-۳|} > ۱ \xrightarrow{x\neq ۳} |۲x-۱| > |x-۳|$$

به توان ۲ برسانید:

$$(۲x-۱)^۲ > (x-۳)^۲ \quad (I)$$

$$۴x^۲ - ۴x + ۱ > x^۲ - ۶x + ۹$$

$$\Rightarrow ۳x^۲ + ۲x - ۸ > ۰ \Rightarrow x < -۲ \cup x > \frac{۴}{۳} \quad (II)$$

x		-۲		$\frac{۴}{۳}$	
$۳x^۲+۲x-۸$	+	۰	−	۰	+
		ج			ج

$$\xrightarrow{(I)\cap(II)} (-\infty,-۲) \cup (\frac{۴}{۳},+\infty) - \{۳\} \text{ یا } \mathbb{R} - [-۲,\frac{۴}{۳}] \ , x\neq ۳$$

۸ گزینه ۲

چون منظور سؤال اعداد طبیعی نامعادله هستند، پس باید محدوده $x > ۰$ را در نظر بگیرید، درنتیجه عبارت داخل قدر مطلق مثبت خواهد شد و قدر مطلق برداشته می‌شود:

x		۱		۵	
$x^۲-۶x+۵$	+	۰	−	۰	+
			ج		

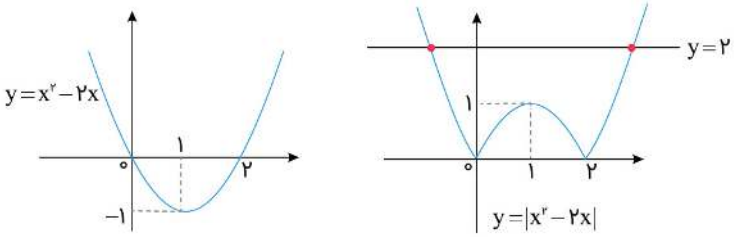
$$(x-۴)\cdot(x+۱) < ۳x-۹ \Rightarrow x^۲ - ۳x - ۴ < ۳x - ۹$$

$$x^۲ - ۶x + ۵ < ۰$$

$$(۱,۵) \Rightarrow \text{اعداد طبیعی} = \{۲,۳,۴\}$$

۹ گزینه ۲

روش هندسی:



$|x^2 - 2x| = 2 \Rightarrow$ دو ریشه دارد.

۱۰ گزینه ۱

$$2 < |2x - 1| < 5 \Rightarrow \begin{cases} 2 < 2x - 1 < 5 \Rightarrow \frac{3}{2} < x < 3 \\ \text{یا} \\ -5 < 2x - 1 < -2 \Rightarrow -2 < x < -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{مجموعه جواب} = (-2 , -\frac{1}{2}) \cup (\frac{3}{2} , 3)$$

اعداد صحیح در جواب نامعادله: $\{-1 , 2\}$

۱۱ گزینه ۳

$$A = \sqrt{(x+1)^2} - \sqrt{(x-2)^2}$$

$$A = |x+1| - |x-2| \xrightarrow[\text{تعیین علامت}]{x<-1} A = -(x+1) + (x-2)$$

$$A = -x - 1 + x - 2 = -3$$

۱۲ گزینه ۲

$$|x-۲|-۳=۲ \Rightarrow |x-۲|=۵ \Rightarrow \begin{cases} x-۲=۵ \Rightarrow x_۱=۷ \\ x-۲=-۵ \Rightarrow x_۲=-۳ \end{cases}$$

$$|x-۲|-۳=-۲ \Rightarrow |x-۲|=۱ \Rightarrow \begin{cases} x-۲=۱ \Rightarrow x_۳=۳ \\ x-۲=-۱ \Rightarrow x_۴=۱ \end{cases}$$

حاصل‌ضرب ریشه‌ها $= ۷(-۳)(۳)(۱) = -۶۳$

حاصل‌جمع ریشه‌ها $= ۷+(-۳)+(۳)+۱ = ۸$

نسبت $= \frac{-۶۳}{۸}$

تابع

زوج مرتب

زوج مرتب به دوتایی (a,b) گفته می‌شود که a را مؤلفه اول و b را مؤلفه دوم می‌نامیم. دقت کنید که در زوج مرتب، ترتیب مؤلفه‌ها مهم است، یعنی زوج مرتب (a,b) با زوج مرتب (b,a) فرق دارد.

هر زوج مرتب، یک نقطه را در صفحه مشخص می‌کند و دو زوج مرتب، وقتی با هم برابرند که مؤلفه‌های اولشان با هم و مؤلفه‌های دومشان نیز با هم برابر باشند.

$$(a,b)=(c,d) \Leftrightarrow a=c\,,\,b=d$$

تمرین: اگر دو زوج مرتب $(\overbrace{x-y}^{\sim},1)$ و $(3,2x+3y)$ یک نقطه را در صفحه مشخص کنند، حاصل $3x+2y$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۹

$$\begin{cases} x-y=3 \\ 2x+3y=1 \end{cases} \xrightarrow{+} 3x+2y=4$$ گزینه ۱

تمرین: زوج مرتب (a^2,b^2) با کدام زوج مرتب نمی‌تواند برابر باشد؟

۱) $(-a^2,-b^2)$ ۲) (b^2,a^2) ۳) $(4-2a^2,-1-3b^2)$ ۴) (a,b)

$a=b=0$ ، $(a^2,b^2)=(0,0)$ ، $(-a^2,-b^2)=(0,0)$

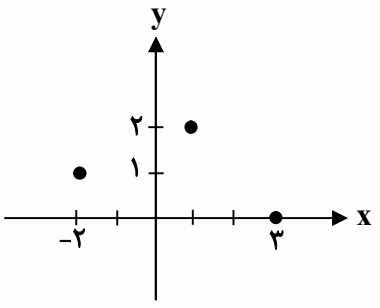
$a=b=1$ یا -1 ، $(a^2,b^2)=(1,1)$ ، $(b^2,a^2)=(1,1)$

$a=b=1$ ، $(a^2,b^2)=(1,1)$ ، $(a,b)=(1,1)$

رابطه

برای نشان دادن ارتباط و وابستگی بین دو مجموعه از رابطه استفاده می‌شود و آن را معمولاً با حرف R نشان می‌دهند. رابطه‌ها را می‌توان به شکل زوج مرتب، جدول، نمودار ون و نمودار دکارتی نشان داد.

(زوج مرتب) $R=\{(1,2),(3,0),(-2,1)\}$

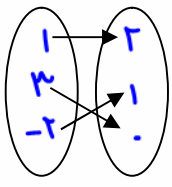


(نمودار دکارتی یا نمایش هندسی)

جدول

(مؤلفه اول)	۱	۳	-۲
(مؤلفه دوم)	۲	۰	۱

نمودار ون



(مؤلفه اول) (مؤلفه دوم)

آموزش رایگان دبیران برند ایران تجربه کنید

تمرین: اگر $R=\{(x,y)\mid x,y\in N, xy=10\}$ باشد، رابطه R چند عضو دارد؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

ضرب دو عدد طبیعی ده شده :

$R=\{(1,10),(10,1),(2,5),(5,2)\}$ ۴ عضوی

تمرین: رابطه‌ی $R=\{(x,y)\mid x,y\in N, 2x+y\le 7\}$ ، دارای چند زوج مرتب است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور ۸۸)

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۹

منظم مرتب کنید :

$R=\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1)\}$

۵ ۳ ۱

۹ عضو
۳ مؤلفه

تابع

گفتیم که رابطه‌ها را می‌توان به شکل‌های مختلف مثل زوج مرتب، نمودار ون و ... نشان داد. بدانید که تابع را هم می‌توانیم به همان شکل‌ها نشان دهیم. با هم ببینیم:

تعریف تابع از نظر زوج‌های مرتب

تابع مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب است که در آن مؤلفه‌های اول متمایز باشند، پس اگر دو زوج مرتب پیدا شوند که مؤلفه‌های اول مساوی داشتند، آن رابطه تابع نیست، مگر این‌که مؤلفه‌های دوم آن زوج مرتب‌ها نیز برابر باشند:

اگر $(x,y_1)\in f, (x,y_2)\in f \Rightarrow y_1=y_2$

مثال ۶: کدام‌یک از رابطه‌های زیر تابع نیست؟ فقط f_6

$f_1=\{(0,1),(-2,3),(4,2)\}$

$f_2=\{(1,2),(3,4),(1,2)\}$ در مجموعه تکرار اعضا مهم نیست

$f_3=\{(2,3),(1,-4),(2,\sqrt{9})\}$ $\sqrt{9}=3$

$f_4=\{(-1,2)\}$ یک نقطه تابع است

$f_5=\{\}=\emptyset$ تابع است

$f_6=\{(1,2),(2,2),(1,5)\}$ یک عضو با ۲ تا ل رل زده

A(-1,2)

زیر هم خط موازی y ها تابع را بیشترین بار قطع کند یعنی یک نقطه یا هیچ نقطه

تمرین: اگر رابطه $\{(a-1,2),(5,a-2),(a-2,b+3)(3,5),(5,3)\}$ تابع باشد $b+a$ چه‌قدر است؟

۱) ۲ ۲) ۵ ۳) ۷ ۴) ۱۰