تمرین: برای کدام a تابع $f(x)=[x]^2-3[x]$ در $x=a$ حد دارد؟ $(a\in\mathbb{Z})$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

$$x\to a,\ a\in\mathbb{Z}\begin{cases} x\to a^+ & a^2-3a=L_1\\ x\to a^- & (a-1)^2-3(a-1)=L_2\end{cases}$$

$L_1=L_2$

$a^2-3a=(a-1)^2-3(a-1)$

$a^2-3a=a^2-2a+1-3a+3$

$0=-2a+1+3$

$2a=4$

$a=2$

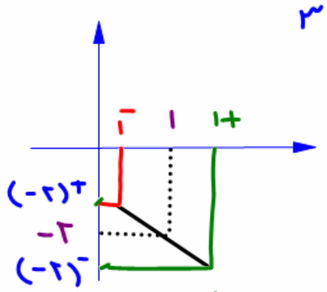
۲ ✓

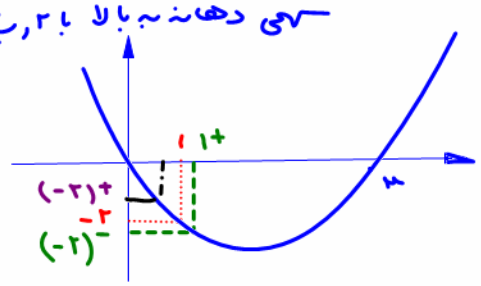
تمرین: حاصل $\lim\limits_{x\to 1}[x^2-3x]$ کدام است؟

۱) صفر ۲) -2 ۳) -3 ۴) حد ندارد.

$y=x^2-3x=x(x-3)$

سهمی دهانه به بالا با ریشه ۰ و ۳





$$\begin{cases} x\to 1^+ & [(-2)^-]=-3\\ x\to 1^- & [(-2)^+]=-2\end{cases}$$

حد ندارد.

$y=x^2-3x$

$y'=2x-3$

$y'(1)=2-3=-1<0$

نزولی

تمرین: در تابع $y=[\frac{1}{x}]$ وقتی $x\to-\frac{1}{10}$ حد چپ کدام است؟

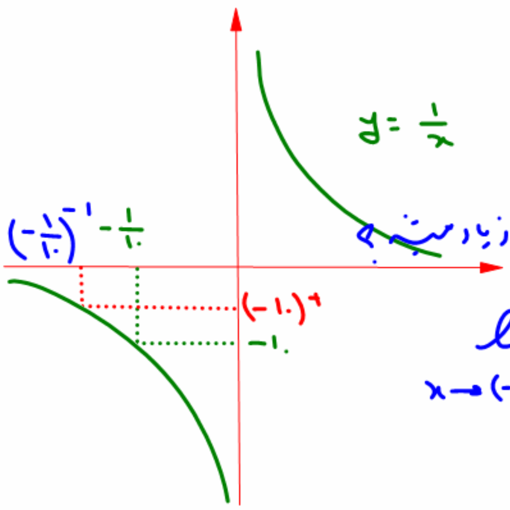
۱) ۱۱ ۲) -9 ۳) -10 ۴) -11

در این موارد اگه نتونستی تابع داخل براکت رابکشی

در غیر این صورت با مشتق گرفتن و دادن عددی به

درون حدی که میخواهیم معلوم کنیم تابع توی براکت

صعودیه یا نزولی که معلوم بشه جلو یا عقب‌تر بریم کم یا زیاد میشه

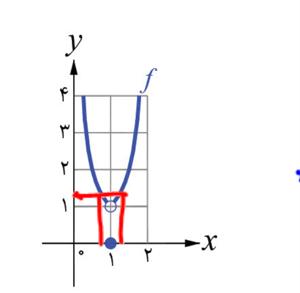


$$\lim_{x\to(-\frac{1}{10})^-}\left[\frac{1}{x}\right]=\left[(-10)^+=-10+\varepsilon\right]=-10$$

-10 -9

۳ ✓

تمرین: با توجه به شکل، حاصل $\lim\limits_{x\to 1}[\frac{2}{f(x)}]$ برابر کدام است؟

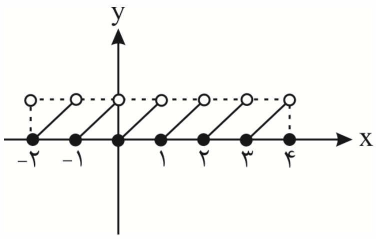


۱) ۱ ✓
۲) ۲
۳) صفر
۴) وجود ندارد.

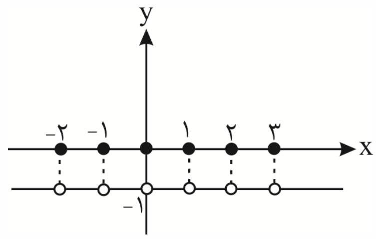
$\lim\limits_{x\to 1}\left[\frac{2}{1^+} = 2^-\right] = 1$

دو تابع مهم

با دو تابع از این تابع‌ها خیلی سروکار دارید:



(۱) $f(x) = x - [x]$



(۲) $f(x) = [x] + [-x] = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Z} \\ -1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$

حالا به نمودار $f(x) = [x] + [-x]$ نگاه کنید. از روی نمودار معلوم است که در تمام نقاط $\mathbb{R}$، حد تابع برابر (-1) است.

تمرین: حاصل $\lim\limits_{x\to 1}[x - [x]]$ کدام است؟

۱) -1
۲) صفر
۳) ۱
۴) حد ندارد.

$\lim\limits_{x\to 1}\left[x - \underbrace{[x]}_{\in \mathbb{Z}}\right] = [x] - [x] = 0$

ت۱ : ① ۰،۱ر

ت۲ : ② ۰،۱ر

$\lim\limits_{x\to 1}\left[\underbrace{x - [x]}_{0 \le x < 1}\right] = 0$

هرگاه درون براکت صحیح شود و تابع داخل براکت **max** یا **min** نشود حد ندارد. مثلاً $y=[x]$ در $x=-۲,-۱,۰,...$ حد ندارد ولی در $x=-\sqrt{۲},\frac{-۱}{۲},\frac{۱}{۲}$ حد دارد.

$y=[۲x]$ در $x=-\frac{۱}{۲}$ و $x=۱$ حد ندارد اما در $x=\frac{۱}{۳}$ حد دارد.

$y=[\sqrt{x}]$ در $x=۱$ حد ندارد ولی در $x=۲$ حد دارد.

$y=[\sin x]$ در $x=\frac{\pi}{۶}$ حد دارد اما در $x=\pi$ حد ندارد.

اگر درون براکت در نقطه‌ای صحیح شود و تابعِ درون براکت در آن نقطه **max** و یا **min** شود، تابع در آن‌جا حد دارد. مثلاً $[\sin x]$ در نقاط $x=\frac{\pi}{۲}$ و $x=\frac{۳\pi}{۲}$ حد دارد و یا $[x^۲]$ در نقطهٔ $x=۰$ حد دارد.

تمرین: حاصل $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۲}}[\sin ۳x][\cos ۴x]$ کدام است؟

۱) ۱　　۲) −۱　　۳) صفر ✓　　۴) وجود ندارد.

$$x\to\frac{\pi}{2}^+ \quad [\underbrace{\sin(\tfrac{3\pi}{2})^+}_{(-1)^+}][\cos 4(\tfrac{\pi}{2})^+=\cos(2\pi)^+=1^-]=(-1)(\text{صفر})=0$$

$$x\to\frac{\pi}{2}^- \quad \left([\sin(\tfrac{3\pi}{2})^-=(-1)^+]=-1\right)\left([\cos 4(\tfrac{\pi}{2})^-=\cos 2\pi^-=1^-]=0\right)=\text{صفر}$$

$\frac{3\pi}{2}^-$

تمرین: حاصل $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۲}}[\sin ۲x]$ کدام است؟

۱) −۱　　۲) صفر　　۳) ۱　　۴) حد ندارد. ✓

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}[\sin 2x]=\begin{cases} x\to\frac{\pi}{2}^- & [\sin 2(\frac{\pi}{2})^-=\sin\pi^-=0^+]=0 \\ x\to\frac{\pi}{2}^+ & [\sin 2(\frac{\pi}{2})^+=\sin\pi^+=0^-]=-1\end{cases}$$

حد ندارد

تمرین: حاصل $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}} [\frac{۱}{\sin ۳x}]$ کدام است؟

۱) صفر ۲) -۱ ۳) -۲ ۴) حد ندارد.

$x \to \frac{\pi}{۲}^-$ $\left[\frac{۱}{\sin\left(\frac{۳\pi}{۲}\right)^-} = (-۱)+\varepsilon \overset{\text{مثلا}}{=} -\frac{۹}{۱۰}\right] = -\left(\frac{۱۰}{۹} = ۱/...\right) = -۱/... \Big] = -۲$

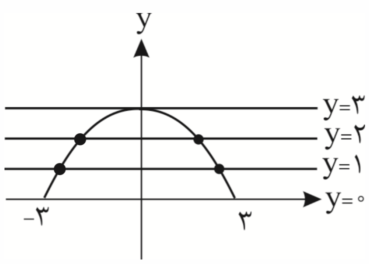
$x \to \frac{\pi}{۲}^+$ $\left[\frac{۱}{\sin\left(\frac{۳\pi}{۲}\right)^+} = (-۱)+\varepsilon \overset{\text{مثلا}}{=} -\frac{۹}{۱۰}\right] = -\left(\frac{۱۰}{۹} = ۱/...\right) = -۱/... \Big] = -۲$

ε: به صورت ریز مثبت

تمرین: تابع $y = [\sqrt{۹ - x^۲}]$ در چند نقطه از دامنه‌اش حد ندارد؟

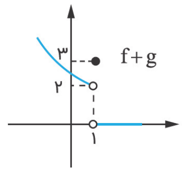
۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

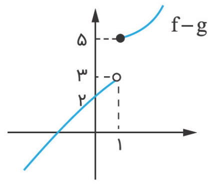
پاسخ: گزینه‌ی «۴» ـ به دنبال نقاطی هستیم که داخل براکت صحیح باشد و چون فقط به دنبال تعداد نقاط هستیم بهتر است نمودار عبارت داخل براکت را رسم کنیم. نمودار تابع $f(x) = \sqrt{۹ - x^۲}$ به صورت یک نیم‌دایره به مرکز مبدأ مختصات و شعاع ۳ است. در $x = \pm ۳$ که در یک همسایگی تعریف نشده حد ندارد. $x = ۰$ طول ماکزیمم نسبی است پس در آن حد دارد. در ۴ نقطه‌ی دیگر که داخل براکت صحیح می‌شود هم حد ندارد.



Homework (1)

۱ شکل‌های زیر، نمودار توابع $f+g$ و $f-g$ هستند. مقدار $\lim\limits_{x\to ۱} f(x)$ کدام است؟





۱) حد ندارد.

۲) ۲/۲۵

۳) ۲/۵

۴) ۲/۷۵

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

۲ اگر $f(x)=\begin{cases} ax-۱ & ;x<۱ \\ x^{۲}+۲a & ;x\geq ۱\end{cases}$ و $\lim\limits_{x\to ۱^{+}} f(x)-\lim\limits_{x\to ۱^{-}} f(x)=-۱$، مقدار a کدام است؟

۱) -۴ ۲) -۳

۳) -۲ ۴) -۱

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۶

۳ در تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases} \sqrt{۱-x} & ;x>۰ \\ -\sqrt{۱+x} & ;x\leq ۰\end{cases}$، حاصل $\lim\limits_{x\to ۰^{-}} f(x^{۳}-x)$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) ۱

۳) صفر ۴) موجود نیست.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۹

۴ به ازای کدام مجموعه مقادیر a، تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases} (x+a)^{۲} & ;x\geq -۱ \\ ۲x+۱ & ;x<-۱\end{cases}$ در نقطهٔ $x=-۱$ حد دارد؟

۱) $\{۰\}$ ۲) $\{۲\}$

۳) $\varnothing$ ۴) $\mathbb{R}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۰

۵ حاصل $\lim\limits_{x\to -۱^{+}} \dfrac{|x+۱|+[x]}{x-[-x]}$ کدام است؟

۱) $-\infty$ ۲) صفر

۳) $\dfrac{۱}{۲}$ ۴) ۱

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

۶ حد عبارت $[\tan^{۲}x] + [\sin(x - \frac{\pi}{۳})] \cos ۳x$، وقتی $x \to \frac{\pi}{۳}$ کدام است؟ (نماد [ ] به مفهوم جزء صحیح است.)

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) حد ندارد.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۵

۷ مقدار $\lim\limits_{x \to (\frac{\pi}{۶})^-} [۲\sin x - ۱]$ ، کدام است؟ ([ ] نماد جزءصحیح است)

۱) -۱
۲) صفر
۳) ۱
۴) وجود ندارد.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

۸ حد عبارت $\sin\frac{x}{۲}[\cos\frac{x}{۲}] - \cos x[\sin ۲x]$، وقتی $x \to \pi$، کدام است؟ (نماد [ ] به مفهوم جزء صحیح است)

۱) -۱
۲) صفر
۳) ۱
۴) حد ندارد.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۵

پاسخ Homework (1)

۱ گزینه ۳

$$(f+g)+(f-g)=۲f \Rightarrow f=\frac{۱}{۲}((f+g)+(f-g))$$

$$\lim_{x\to ۱^+} f(x)=\frac{\lim\limits_{x\to ۱^+}(f+g)+\lim\limits_{x\to ۱^+}(f-g)}{۲}=\frac{۰+۵}{۲}=\frac{۵}{۲}$$

$$\lim_{x\to ۱^-} f(x)=\frac{\lim\limits_{x\to ۱^-}(f+g)+\lim\limits_{x\to ۱^-}(f-g)}{۲}=\frac{۲+۳}{۲}=\frac{۵}{۲}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to ۱} f(x)=\frac{۵}{۲}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

۲ گزینه ۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۶

گام اول

الف) برای به دست آوردن $\lim\limits_{x\to ۱^+} f(x)$ از ضابطهٔ پایین که در آن $x \geq ۱$ است، استفاده می‌کنیم.

ب) برای به دست آوردن $\lim\limits_{x\to ۱^-} f(x)$ از ضابطهٔ بالا که $x < ۱$ است، بهره می‌بریم.

گام دوم

$$\lim_{x\to ۱^+} f(x)=\lim_{x\to ۱^+} x^۲+۲a=(۱)^۲+۲a=۲a+۱$$
$$\lim_{x\to ۱^-} f(x)=\lim_{x\to ۱^-} ax-۱=a(۱)-۱=a-۱$$
$$\lim_{x\to ۱^+} f(x)-\lim_{x\to ۱^-} f(x)=۲a+۱-(a-۱)=-۱$$
$$\Rightarrow ۲a+۱-a+۱=-۱ \Rightarrow a+۲=-۱ \Rightarrow a=-۳$$

۳

گزینه ۲

ابتدا باید تعیین کنیم وقتی $x \to ٠^-$ عبارت $x^٣ - x$ به سمت ٠^+ میل می‌کند یا ٠^-. برای این کار از تغییر متغیر $x^٣ - x = t$ استفاده می‌کنیم. با تعیین محدودهٔ t حاصل حد آن را با استفاده از ضابطه‌های داده‌شده به دست می‌آوریم.

$$x \to ٠^- \Rightarrow -١ < x < ٠ \Rightarrow x^٣ > x \Rightarrow x^٣ - x > ٠ \xrightarrow{x^٣ - x = t} t > ٠ \Rightarrow t \to ٠^+$$

بنابراین برای به دست آوردن حاصل حد $\lim\limits_{x \to ٠^-} f(x^٣ - x)$ یا همان $\lim\limits_{t \to ٠^+} f(t)$ باید از ضابطهٔ بالا که مربوط به xهای مثبت است، استفاده کنیم:

$$t \to ٠^+ \Rightarrow t > ٠ \Rightarrow f(t) = \sqrt{١ - t}$$
$$\lim_{t \to ٠^+} f(t) = \lim_{t \to ٠^+} \sqrt{١ - t} = \sqrt{١ - ٠} = ١$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۹

۴

گزینه ۳

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۰

گام اول

تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x = -١$ دارای حد است درصورتی‌که:

$$\lim_{x \to (-١)^-} f(x) = \lim_{x \to (-١)^+} f(x)$$

گام دوم

ابتدا حد چپ و راست تابع $f(x)$ را در نقطهٔ $x = -١$ به دست می‌آوریم:

$$\lim_{x \to (-١)^+} f(x) = \lim_{x \to (-١)^+} (x + a)^٢ = (-١ + a)^٢$$

$$\lim_{x \to (-١)^-} f(x) = \lim_{x \to (-١)^-} (٢x + ١) = -٢ + ١ = -١$$

باتوجه‌به گام اول در صورتی حد تابع در نقطهٔ $x = -١$ موجود است که تساوی $(-١ + a)^٢ = -١$ برقرار باشد اما این تساوی هیچ‌گاه برقرار نیست؛ بنابراین مجموعه مقادیر a برابر $\varnothing$ می‌شود.

۵ گزینه ۴

$$x \to -1^+ \Rightarrow [x] = -1\ ,\ [-x] = 0\ ,\ x+1 > 0 \Rightarrow |x+1| = x+1$$

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{|x+1| + [x]}{x - [-x]} = \lim_{x\to -1^+} \frac{x+1+(-1)}{x-0} = \lim_{x\to -1^+} \frac{x}{x} = 1$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۱

۶ گزینه ۳

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۵

گام اول

تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x = a$ حد دارد، درصورتی‌که $\lim_{x\to a^+} f(x)$ و $\lim_{x\to a^-} f(x)$ موجود و باهم برابر باشند.

گام دوم

حد عبارت داده‌شده را در دو حالت $x \to \frac{\pi}{3}^+$ و $x \to \frac{\pi}{3}^-$ محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{cases} \lim_{x\to \frac{\pi}{3}^+} \left[\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)\right] \cos 3x + [\tan^2 x] = [\sin(0^+)] \cos\pi + \left[\left(\sqrt{3^+}\right)^2\right] \\ = [0^+] \cos\pi + [3^+] = (0)(-1) + 3 = 3 \\ \\ \lim_{x\to \frac{\pi}{3}^-} \left[\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)\right] \cos 3x + [\tan^2 x] = [\sin(0^-)] \cos\pi + \left[\left(\sqrt{3^-}\right)^2\right] \\ = [0^-] \cos\pi + [3^-] = (-1)(-1) + 2 = 3 \end{cases}$$

حد راست و چپ تابع در نقطهٔ $x = \frac{\pi}{3}$ موجود و برابر است، بنابراین حد تابع برابر ۳ است.

۷ گزینه ۱

$$\lim_{x\to (\frac{\pi}{6})^-} [2\sin x - 1] = [2(\frac{1}{2})^-] - 1 = -1$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

۸

گزینه ۱

$$\lim_{x\to\pi^+} f(x) = \sin\frac{\pi}{۲}[\cos(\frac{\pi}{۲})^+] - \cos\pi[\sin(۲\pi)^+]$$
$$= ۱\times[۰^-] - (-۱)[۰^+] = ۱\times(-۱) - ۰ = -۱$$
$$\lim_{x\to\pi^-} f(x) = \sin\frac{\pi}{۲}[\cos(\frac{\pi}{۲})^-] - \cos\pi[\sin(۲\pi)^-]$$
$$= ۱\times[۰^+] - (-۱)[۰^-] = ۰ + (-۱) = -۱ \Rightarrow \lim_{x\to\pi} f(x) = -۱$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۵

Homework (2)

۱ حاصل $\lim\limits_{x\to\pi^+}\dfrac{[\sin x]}{[\cos x]}$ کدام است؟

۱) -۱
۲) ۱
۳) صفر
۴) ۲

علوی علوم تجربی یازدهم آزمون شماره ۸ ۱۴۰۱

۲ کدام گزینه درست است؟

۱) اگر $f+g$ در $x=a$ حد داشته باشد، هر دو تابع f و g در $x=a$ حد دارند.

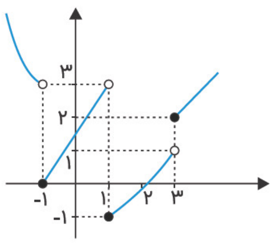
۲) اگر f و g هر دو در $x=a$ حد نداشته باشند، آنگاه $f+g$ در $x=a$ حد ندارد.

۳) اگر f در $x=a$ حد داشته باشد ولی g در $x=a$ حد نداشته باشد، آنگاه $f+g$ در $x=a$ حد ندارد.

۴) اگر $f+g$ در $x=a$ حد نداشته باشد، هر دو تابع f و g در $x=a$ حد ندارند.

علوی علوم تجربی یازدهم آزمون شماره ۸ ۱۴۰۰

۳ نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. مقدار عبارت $f(f(1))+\lim\limits_{x\to 1^-}f(f(x))-\lim\limits_{x\to 1^+}f(f(x))$ را بیابید.



علوی علوم تجربی یازدهم آزمون شماره ۶ ۱۳۹۹

۴ مقدار $\lim\limits_{x\to 1/2}(\sin\pi[x]+[\sin x])$ چقدر است؟

۱) ۱
۲) صفر
۳) -۱
۴) -۲

علوی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۴ ۱۴۰۱

حاصل حدهای زیر را بیابید.

علوی علوم تجربی یازدهم آزمون شماره ۶ ۱۳۹۹

۵
$$\lim_{x\to\pi^+}\frac{۳-[\cos ۲x]}{[\cos x]}$$

۶
$$\lim_{x\to ۴}\frac{\sqrt{x}-۲}{x^۲-۳x-۴}$$

۷
$$\lim_{x\to ۳}\frac{x^۳-۲۷}{۲x^۲-۵x-۳}$$

۸
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}(\sin x-۱)\tan^۲ x$$

۹
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}\frac{\cos x}{\sqrt{۱+\cot x}-\sqrt{۱-\cot x}}$$

۱۰ اگر $f(x)=\begin{cases}۲ & ;x\in\mathbb{Z}\\ -۱ & ;x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$ باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to\sqrt{۲}}f(x)+\lim\limits_{x\to ۲}f(x)$ کدام است؟

۱) -۱

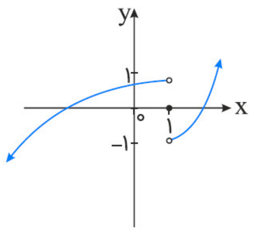
۲) ۴

۳) -۲

۴) ۱

علوی علوم تجربی یازدهم آزمون شماره ۸ ۱۴۰۰

۱۱ باتوجه‌به نمودار تابع f، حاصل $\lim\limits_{x\to ۱^+}f\left(\frac{۱}{۲x-۱}\right)$ کدام است؟



۱) صفر

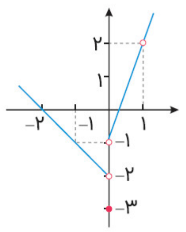
۲) ۱

۳) -۱

۴) موجود نیست.

علوی علوم تجربی یازدهم آزمون شماره ۸ ۱۴۰۰

۱۲ باتوجه‌به نمودار تابع f، حاصل $\lim\limits_{x\to ۰^-}\left(f(|x-۱|)+f([-x])+[f(x+۱)]\right)$ کدام است؟



۱) ۱

۲) ۲

۳) ۳

۴) صفر

علوی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۴ ۱۳۹۹

پاسخ Homework (2)

۱

گزینه ۲

$$\lim_{x\to\pi^+}\frac{[\sin x]}{[\cos x]}=\frac{[\sin\pi^+]}{[\cos\pi^+]}=\frac{[\circ^-]}{[(-۱)^+]}=\frac{-۱}{-۱}=۱$$

علوی علوم تجربی یازدهم آزمون شماره ۸ ۱۴۰۱

۲

گزینه ۳

اگر f و g در $x=a$ حد داشته باشند، دراین‌صورت $f+g$ در $x=a$ حد دارد.

اگر f در $x=a$ حد داشته باشد ولی g در $x=a$ حد نداشته باشد، دراین‌صورت $f+g$ در $x=a$ حد ندارد.

اگر f و g هر دو در $x=a$ حد نداشته باشند، دراین‌صورت $f+g$ ممکن است در $x=a$ حد داشته باشد و ممکن است حد نداشته باشد.

علوی علوم تجربی یازدهم آزمون شماره ۸ ۱۴۰۰

۳

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to ۱^+}f(f(x))=\lim\limits_{t\to(-۱)^+}f(t)=\circ\\ \lim\limits_{x\to ۱^-}f(f(x))=\lim\limits_{t\to ۳^-}f(t)=۱\\ f(f(۱))=f(-۱)=\circ\end{array}\right\}\Rightarrow\ \circ-۱+\circ=-۱$$

علوی علوم تجربی یازدهم آزمون شماره ۶ ۱۳۹۹

۴

گزینه ۲

$$A=\lim_{x\to ۱/۲}(\sin\pi[x]+[\sin x])=\sin\pi(۱)+[\sin ۱/۲]$$

توجه داشته باشید که ۱/۲ رادیان در ناحیهٔ اول مثلثاتی قرار دارد و $۱ > \sin ۱/۲ > \circ$ خواهد بود، پس جواب حد برابر است با:

$$A=\sin\pi+[\circ]=\circ+\circ=\circ$$

علوی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۴ ۱۴۰۱

پاسخ سؤالات ۵ تا ۹

علوی علوم تجربی یازدهم آزمون شماره ۶ ۱۳۹۹

۵

$$\lim_{x\to\pi^+}\frac{۳-[\cos ۲x]}{[\cos x]}=\frac{۳-[\cos ۲\pi^+]}{[\cos \pi^+]}=\frac{۳-۰}{-۱}=-۳$$

$$(*):[\cos\pi^+]=[-۱^+]=-۱$$

۶

$$\lim_{x\to ۴}\frac{\sqrt{x}-۲}{x^۲-۳x-۴}=\lim_{x\to ۴}\frac{\sqrt{x}-۲}{(x-۴)(x+۱)}\times\frac{\sqrt{x}+۲}{\sqrt{x}+۲}$$

$$=\lim_{x\to ۴}\frac{x-۴}{(x-۴)(x+۱)(\sqrt{x}+۲)}=\lim_{x\to ۴}\frac{۱}{(x+۱)(\sqrt{x}+۲)}$$

$$=\frac{۱}{(۴+۱)(\sqrt{۴}+۲)}=\frac{۱}{۲۰}$$

۷

$$\lim_{x\to ۳}\frac{x^۳-۲۷}{۲x^۲-۵x-۳}=\lim_{x\to ۳}\frac{\cancel{(x-۳)}(x^۲+۳x+۹)}{\cancel{(x-۳)}(۲x+۱)}$$

$$=\lim_{x\to ۳}\frac{x^۲+۳x+۹}{۲x+۱}=\frac{۲۷}{۷}$$

۸

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}\frac{(\sin x-۱)\times\sin^۲x}{\cos^۲x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}\frac{(\sin x-۱)\times\sin^۲x}{۱-\sin^۲x}$$

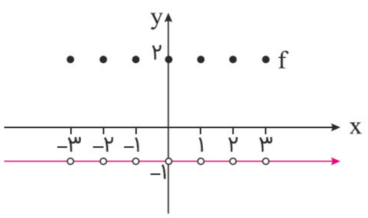
$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}\frac{\overset{-۱}{\cancel{(\sin x-۱)}}\times\sin^۲x}{\cancel{(۱-\sin x)}(۱+\sin x)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}\frac{-\sin^۲x}{۱+\sin x}=\frac{-(۱)^۲}{۱+۱}=-\frac{۱}{۲}$$

۹

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}\frac{\cos x(\sqrt{۱+\cot x}+\sqrt{۱-\cot x})}{۱+\cot x-۱+\cot x}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}\frac{\cancel{\cos x}(\sqrt{۱+\cot x}+\sqrt{۱-\cot x})}{\frac{۲\cancel{\cos x}}{\sin x}}=\frac{۱+۱}{\frac{۲}{۱}}=۱$$

۱۰ گزینه ۳



$$\begin{cases}\lim_{x\to ۲}f(x)=-۱\\ \lim_{x\to\sqrt{۲}}f(x)=-۱\end{cases}\Rightarrow\lim_{x\to ۲}f(x)+\lim_{x\to\sqrt{۲}}f(x)=-۲$$

۱۱

گزینه ۲

$$(x \to 1^+) \Rightarrow (\frac{1}{2x-1} \to 1^-)$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(\frac{1}{2x-1}) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = 1$$

علوی علوم تجربی یازدهم آزمون شماره ۸ ۱۴۰۰

۱۲

گزینه ۴

$$\lim_{x\to 0^-} f(|x-1|) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = 2$$

$$\lim_{x\to 0^-} f([-x]) = f([-0^-]) = f([0^+]) = f(0) = -3$$

$$\lim_{x\to 0^-} [f(x+1)] = [f(0^- + 1)] = [f(1^-)] = [2^-] = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^-} (f(|x-1|) + f([-x]) + [f(x+1)]) = 0$$

علوی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۴ ۱۳۹۹

حالت $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$:

به حالت‌هایی که در شرایط مشابه، جواب‌های مختلف یا هر عددی از آن‌ها به دست می‌آید، اصطلاحاً مبهم گفته می‌شود. مثلاً

$\lim_{x\to ۰} y = \frac{x}{x} = \frac{۰}{۰} = ۱$ یا $\lim_{x\to ۱} y = \frac{۲x-۲}{x-۱} = \frac{۰}{۰} = \frac{۲(x-۱)}{x-۱} = ۲$.

$\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ برابر هر عددی می‌تواند باشد، زیرا اگر (هر عدد $= \frac{۰}{۰}$) را طرفین وسطین کنیم، (صفر = هر عدد × صفر) است. به یافتن جواب کسر $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ عمل رفع ابهام گفته می‌شود.

رفع ابهام حالت $\frac{۰}{۰}$:

در ابتدا باید بدانیم هر $\frac{۰}{۰}$ مبهم نیست و تنها $\frac{\text{صفرنسبی(حدی)}}{\text{صفرنسبی(حدی)}}$ مبهم است و باید رفع ابهام شود. در این‌جا اشاره می‌کنیم که صفر نسبی (حدی) با صفر مطلق (خود صفر) فرق دارد. مثلاً در تابع $f(x) = x-۱$ وقتی مقدار تابع به ازای $x = ۱$ را می‌یابیم جواب صفر مطلق می‌شود، اما حد تابع وقتی $x \to ۱$ برابر صفر نسبی است. چرا که $x \neq ۱$:

$$\lim_{x\to ۱} x-۱ \begin{cases} x \to ۱^+ & ۱^+ - ۱ = ۰^+ \\ x \to ۱^- & ۱^- - ۱ = ۰^- \end{cases}$$

$f(x) = x-۱ \xrightarrow{x=۱} f(۱) = ۱-۱ = ۰$ صفر مطلق

توجه: $(۱^-)^۲ = ۱^-$ $\qquad$ $(۰^-)^۲ = ۰^+$

$$\lim_{x\to ۰} [x^۲] \begin{cases} x \to ۰^+ & [۰^+] = ۰ = \text{صفرمطلق} \\ x \to ۰^- & [(۰^-)^۲ = ۰^+] = ۰ = \text{صفرمطلق} \end{cases}$$

انواع $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$:

اگر مخرج صفر مطلق بود، حاصل تعریف نشده است و جواب وجود ندارد.

۱) $\frac{\text{صفرنسبی}}{\text{صفرنسبی}} =$ مبهم است $\to$ رفع ابهام $\to$ مثال: $\lim_{x\to ۰} \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}} = ۱$

۲) $\frac{\text{صفرمطلق}}{\text{صفرنسبی}} =$ صفر $\to$ مبهم نیست $\to$ مثال: $\lim_{x\to ۰^+} \frac{[x]}{x} = \frac{[۰^+]}{۰^+} = \frac{۰}{۰^+} = ۰$

۳) $\frac{\text{صفرمطلق}}{\text{صفرمطلق}} =$ تعریف نشده (وجود ندارد) $\to$ مثال: $\lim_{x\to ۰^+} \frac{[x]}{[x]} = \frac{[۰^+]}{[۰^+]} = \frac{\text{خودصفر}}{\text{خودصفر}} =$ تعریف‌نشده

۴) $\frac{\text{صفرنسبی}}{\text{صفرمطلق}} =$ تعریف نشده (وجود ندارد) $\to$ مثال: $\lim_{x\to ۰^+} \frac{x}{[x]} = \frac{\text{صفرنسبی}}{\text{صفرمطلق}} =$ تعریف‌نشده

رفع ابهام $\frac{0}{0}$ در توابع جبری:

با توجه به توضیحات درس‌نامه در این قسمت یاد می‌گیریم که با ابهام‌های $\frac{0}{0}$ چگونه برخورد و آن‌ها را رفع ابهام کنیم.

در ابتدای بخش با روش‌های رفع ابهام $\frac{0}{0}$ در توابع جبری آشنا می‌شویم که در زیر آمده است. فقط برای تأکید هم که شده، دوباره به شیپور زیر توجه کنید.

در محاسبه‌ی حد توابع شامل قدرمطلق و جزء صحیح، اول باید قدرمطلق را با تعیین علامت و جزء صحیح را با تعیین مقدار، حذف کنیم و سپس حد را محاسبه کنیم.

الف) حذف عامل صفرشونده: در این حالت با استفاده از تجزیه، فاکتورگیری یا اتحادهای مناسب، عامل صفرشونده‌ی یکسان از صورت و مخرج را حذف می‌کنیم و سپس مقدار حد را در آن نقطه می‌یابیم.

تمرین: $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-4} = \frac{0}{0} = \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x\neq 2}}\frac{\cancel{(x-2)}(x-3)}{\cancel{(x-2)}(x+2)} = \frac{2-3=-1}{2+2=4} = -0.25$

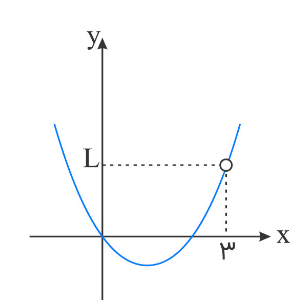
$x-2$ عامل صفر

$$\lim_{x\to -4}\frac{x^2+3x-4}{\underbrace{x^3+4x^2}+\underbrace{x+4}} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to -4}\frac{(x-1)\cancel{(x+4)}}{(x^2+1)\cancel{(x+4)}} = \frac{-4-1=-5}{(-4)^2+1=17} = -\frac{5}{17}$$

$x+4$ $\qquad x^2(x+4)+(x+4)$

نکته: کسرهایی که ریشه مخرج توابع می‌شوند به ۳ صورت در ریشه مخرج حد می‌گیریم با جواب حد شکل معلوم می‌شود: الف) مجانب قائم $y=\frac{1}{x}$ ب) حفره: شکل $y=\frac{x}{x}$ ج) جهش $y=\frac{x}{|x|}=\begin{cases}1 & x>0\\ -1 & x<0\end{cases}$

تمرین: اگر نمودار تابع $f(x)=\frac{x^3+nx^2+6x}{x-3}$ به صورت شکل زیر باشد، مقدار $n+L$ کدام است؟



۱) ۳
۲) ‎-۲
۳) ‎-۵
۴) ۲

حتماً $x=3$ ریشه صورت هم هست:

$(3)^3+n(3)^2+6(3)=0$

$27+9n+18=0 \quad) \div 3$

$9+3n+6=0$

$3n=-15$

$\boxed{n=-5}$

طول حفره ریشه مشترک صورت و مخرج است یعنی این نقطه توخالی هم صورت هم مخرج کسر را صفر می‌کند.

عرض حفره جواب حد در این حفره است.

$\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^3-5x^2+6x}{x-3} = \lim\limits_{x\to 3}\frac{\cancel{(x-3)}(x^2-2x)}{\cancel{(x-3)}} = L \to L=3$

$x-3$

$n+L=-2$
گزینه ۲

$$\begin{array}{l|l} x^3-5x^2+6x & x-3 \\ \underline{-(x^3-3x^2)} & \overline{x^2-2x} \\ -2x^2+6x & \\ \underline{-2x^2+6x} & \end{array}$$

تمرین: حاصل $\lim\limits_{x\to ۲^+}\dfrac{x^۲[x]-۸}{x^۲-۲x}$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) صفر ۳) وجود ندارد. ۴) ۲

پاسخ: گزینه‌ی «۱» ـ اول جزء صحیح را تعیین مقدار می‌کنیم:

$$x\to ۲^+ \Rightarrow [x]=۲ \Rightarrow \text{حد}=\lim_{x\to ۲^+}\frac{(x^۲)(۲)-۸}{x^۲-۲x}=\lim_{x\to ۲^+}\frac{۲x^۲-۸}{x^۲-۲x}$$

این حد ابهام $\frac{۰}{۰}$ دارد. برای رفع ابهام باید با استفاده از اتحادها و یا تجزیه، عامل صفرشونده را از صورت و مخرج حذف کنیم (دقت کنید، با توجه به این که $x\to ۲^+$، عامل صفرشونده $(x-۲)$ است که باید از صورت و مخرج حذف شود):

$$\text{حد}=\lim_{x\to ۲^+}\frac{۲(x^۲-۴)}{x^۲-۲x}=\lim_{x\to ۲^+}\frac{۲(x-۲)(x+۲)}{x(x-۲)}=\lim_{x\to ۲^+}\frac{۲(x+۲)}{x}=\frac{۲(۲+۲)}{۲}=۴$$

تمرین: حاصل $\lim\limits_{x\to ۲^+}\dfrac{x^۲-۴}{x^۳-[x^۳]}$ کدام است؟ (تجربی ۱۴۰۱)

براکتو بر می داریم به جاش عددی ذاریم.

۱) صفر ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) ۱ ۴) $+\infty$

$$\lim_{x\to ۲^+}\frac{x^۲-۴}{x^۳-[(۲^+)^۳=۸^+]}=\frac{x^۲-۴}{x^۳-۸}=\lim_{x\to ۲}\frac{\cancel{(x-۲)}(x+۲)}{\cancel{(x-۲)}(x^۲+۲x+۴)}=\frac{۴}{۴+۴+۴}=\frac{۴}{۱۲}=\frac{۱}{۳}$$

ب) گویا کردن: گاهی در محاسبه‌ی حد توابع شامل رادیکال، برای رفع ابهام می‌توانیم از گویا کردن صورت یا مخرج کسر (یا هر دو) استفاده کنیم.

تمرین: حاصل $\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{۱-x}{۱-\sqrt{x}}$ را بیابید.

پاسخ: حد داده‌شده دارای ابهام $\frac{۰}{۰}$ است. برای رفع ابهام از گویاکردن استفاده می‌کنیم.

$$\lim_{x\to ۱}\left(\frac{۱-x}{۱-\sqrt{x}}\times\frac{۱+\sqrt{x}}{۱+\sqrt{x}}\right)=\lim_{x\to ۱}\frac{(۱-x)(۱+\sqrt{x})}{۱-x}=\lim_{x\to ۱}۱+\sqrt{x}=۱+۱=۲$$

تمرین: حاصل $\lim\limits_{x\to ۴}\dfrac{۳-\sqrt{۲x+۱}}{۲-\sqrt{x}}$ کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۴}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

$$\frac{0}{0} = \lim_{x\to ۴}\frac{(۳-\sqrt{۲x+۱})}{(۲-\sqrt{x})}\cdot\frac{(۳+\sqrt{۲x+۱})}{(۳+\sqrt{۲x+۱})}\cdot\frac{(۲+\sqrt{x})}{(۲+\sqrt{x})} = \frac{\overset{(۸-۲x)}{(۹-۲x-۱)}(۲+\sqrt{۴})}{(۴-x)(۳+\sqrt{۸+۱})} = \frac{۲\cancel{(۴-x)}(۴)}{\cancel{(۴-x)}(۶)}$$

مزدوج $۴-x$

$$= \frac{۲(۴)}{۶} = \frac{۸}{۶} = \frac{۴}{۳}$$

(۵) توابع شامل قدرمطلق

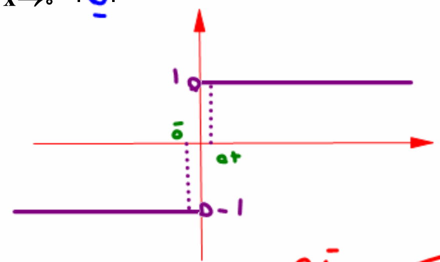
در محاسبه‌ی حد توابعی که شامل قدرمطلق هستند، اگر داخل قدرمطلق صفر شده و حاصل حد به صورت مبهم $\frac{0}{0}$ دربیاید، باید حد چپ و راست را جداگانه بررسی کنیم.

برای این کار ابتدا عبارت داخل قدرمطلق را تعیین علامت می‌کنیم. سپس عبارت‌ها را از قدرمطلق خارج کرده و حد تابع را می‌یابیم.

تمرین:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{|x|} = \begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{|x|} = \dfrac{x}{x} = ۱\\[2ex] \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x}{|x|} = \dfrac{x}{-x} = -۱\end{cases}$$

حد ندارد.



تمرین: حد عبارت $\dfrac{|x^{۲}-x-۲|}{۲x-\sqrt{x^{۲}+۱۲}}$ وقتی $x\to ۲^-$ کدام است؟ (ریاضی ۹۰)

$\overbrace{(x+۱)(x-۲)}^{-}$

x		-۱		۲	
$(x+۱)(x-۲)$	$+$	0	$-$	0	$+$

منفی

۱) -۳ ۲) -۲ ۳) ۲ ۴) ۳

$$\frac{0}{0} = \lim_{\substack{x\to ۲^-\\ x-۲}}\frac{|x^{۲}-x-۲|}{(۲x-\sqrt{x^{۲}+۱۲})}\cdot\frac{(۲x+\sqrt{x^{۲}+۱۲})}{(۲x+\sqrt{x^{۲}+۱۲})} = \frac{-(x^{۲}-x-۲) = -(x+۱)\cancel{(x-۲)}(۲x+\sqrt{x^{۲}+۱۲}) = -(۳)\overset{۲}{\cancel{(۴+۴)}}}{۴x^{۲}-x^{۲}-۱۲ = ۳x^{۲}-۱۲ = ۳(x^{۲}-۴) = ۳\cancel{(x-۲)}(x+۲) = \underbrace{}_{\cancel{۳}\,\cancel{(۴)}}}$$

مزدوج

تزنیه $-۲ =$ جواب

$x \to 3^-$

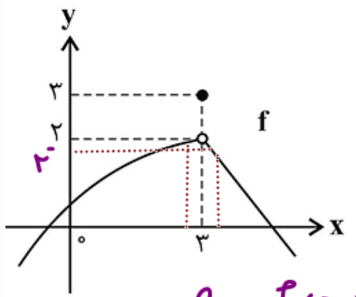
تمرین: حد چپ تابع $f(x)=\frac{(3-[x])\sqrt{x^2-6x+9}}{x-3}$ در نقطه‌ی $x=3$ کدام است؟

۱) صفر ۲) -1 ✓ ۳) ۱ ۴) موجود نیست.

$$\lim_{x\to 3^-} \frac{(3-[3^-])\sqrt{(x-3)^2}}{x-3} = \frac{(3-2)\,|\overset{\ominus}{x-3}|}{x-3} = \frac{-(x-3)}{x-3} = -1$$

تمرین: با توجه به نمودار تابع f، حاصل $\lim\limits_{x\to 3}\frac{f^3(x)-8}{|f(x)-2|}$ کدام است؟

منفی



۱) ۱۲ ۲) -4 ۳) -12 ✓ ۴) ۴

$$\lim_{x\to 3^-} \frac{(\cancel{f(x)-2})(f^2(x)+2f(x)+4)}{|\underbrace{f(x)}_{2^-}-2| = -(\cancel{f(x)-2})} = \frac{(2^2+2(2)+4)}{-1}$$

منفی

$\lim_{x\to 3^-} f(x)=2$

یعنی f حوالی $x=3$ از ۲ کمتره

$f(\text{۳ خود})=3 \leftarrow$ مقدار تابع

$f(\text{۳ بس})=2 \leftarrow$ حد

ج) تغییر متغیر: در این‌جا با کمک تغییر متغیر مناسب، حد را به نقطه‌ی صفر منتقل می‌کنیم. پس برای محاسبه‌ی $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ با فرض $x-a=t$ (با توجه به این که $x\to a$ بنابراین $x-a\to 0$ و در نتیجه $t\to 0$):

$$\begin{cases} x=a+t \\ x\to a \Rightarrow t\to 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t\to 0}\frac{f(a+t)}{g(a+t)}$$

تمرین: حاصل $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{2\sqrt{x-1}+x-1}{\sqrt{x-1}}$ را بیابید.

پاسخ: حد داده‌شده دارای ابهام $\frac{0}{0}$ است. بنابراین از تغییر متغیر برای محاسبه‌ی حد کمک می‌گیریم:

$$\begin{cases} x-1=t \Rightarrow x=t+1 \\ x\to 1^+ \Rightarrow t\to 0^+ \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to 1^+}\frac{2\sqrt{x-1}+x-1}{\sqrt{x-1}} = \lim_{t\to 0^+}\frac{2\sqrt{t}+t}{\sqrt{t}} = \frac{0}{0} = \frac{\sqrt{t}(2+\sqrt{t})}{\sqrt{t}} = \underset{t\to 0}{2+\sqrt{t}} = 2$$

حالا برای رفع ابهام از $\sqrt{t}$ در صورت فاکتور می‌گیریم و از حذف عامل صفرشونده استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{2\sqrt{t}+t}{\sqrt{t}}=\lim_{t\to 0^+}\frac{\sqrt{t}(2+\sqrt{t})}{\sqrt{t}}=\lim_{t\to 0^+}(2+\sqrt{t})=2+0=2$$

د) استفاده از هم‌ارزی: حد یک چندجمله‌ای وقتی $x\to 0$ برابر حد جمله‌ی با کم‌ترین توان آن چندجمله‌ای است.

برای مثال $-3x^2 \underset{x\to 0}{\sim} x^3-3x^2$ (علامت ~ به معنای هم‌ارز بودن است.)

تمرین: حاصل $\lim_{x\to 0}\frac{x^3+3x^2-x}{x^2+2x}$ را بیابید.

پاسخ: چون حد داده‌شده ابهام $\frac{0}{0}$ دارد، برای رفع ابهام از هم‌ارزی استفاده می‌کنیم. (دقت کنید که $x\to 0$) کم توان

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3+3x^2-x}{x^2+2x}=\lim_{x\to 0}\frac{-x}{2x}=-\frac{1}{2}$$

تمرین: حاصل حد روبه‌رو را بیابید.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x+\sqrt{\sqrt[3]{x}+2x^2}}{\sqrt{\sqrt[3]{8x}+x^3}}=\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{8x}}=\sqrt[3]{\frac{x}{8x}}=\sqrt[3]{\frac{1}{8}}=\frac{1}{2}$$

تمرین: در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x} & x>0\\ -\sqrt{1+x} & x\le 0\end{cases}$، حاصل $\lim_{x\to 0^-}f(x^3-x)$ کدام است؟ (ریاضی ۸۹)

۱) ۱-　　۲) ۱　　۳) ۳　　۴) موجود نیست.

ضابطه اول

$$\lim_{x\to 0^-} f(\underbrace{x^3-x}_{\text{چندجمله‌ای هم‌ارز کم‌توان}}) \quad \underset{x\to 0^-}{\longrightarrow} \quad -x=-(0^-)=0^+)=f(0^+)=\sqrt{1-x}=\sqrt{1-0}=1$$

گزینه ۲

روش هوپیتال

اگر توابع f و g در نقطه‌ی x_0 مشتق‌پذیر باشند و $f(x_0)=0$ و $g(x_0)=0$ آن‌گاه:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

در مبهم $\frac{0}{0}$ و $\frac{\infty}{\infty}$ (اگر f و g در نقطه‌ی x_0 یا وقتی x به $\pm\infty$ می‌رود، مشتق‌پذیر باشند) می‌توان از این روش استفاده کرد.

پس تسلط بر تمام فرمول‌های مشتق‌گیری برای استفاده از روش هوپیتال ضروری است.

در مبهم $\frac{0}{0}$ و $\frac{\infty}{\infty}$: از صورت و مخرج جداگانه مشتق می‌گیریم و سپس حد را حساب می‌کنیم. اگر باز هم مبهم بود به عمل مشتق‌گیری مستقل ادامه می‌دهیم.

چند قاعدهٔ مشتق‌گیری:

تابع	مشتق	مثال
$y=ax+b$	$y'=a$	$y=\frac{x}{2}-\sqrt{2} \to y'=\frac{1}{2}$
$y=$ عدد	$y'=0$	$y=\frac{\sqrt{3}}{2} \to y'=0$
$y=kx^n$	$y'=knx^{n-1}$	$y=\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}} \to y'=\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ $y=\frac{1}{x}=x^{-1} \to y'=-x^{-2}=-\frac{1}{x^2}$
$y=u^n$ توی u ایکس داری	$y'=nu'u^{n-1}$	$y=(x^3-4x)^7 \to y'=7(3x^2-4x)(x^3-4x)^6$
$y=\frac{k}{u}$	$y'=\frac{-ku'}{u^2}$	$y=\frac{7}{x^3+4x+2} \to y'=\frac{7(3x^2+4+0)}{(x^3+4x+2)^2}$
$y=\sqrt{u}$	$y'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$y=\sqrt{x^3+2x-7} \to y'=\frac{3x^2+2}{2\sqrt{x^3+2x-7}}$
$y=\sqrt[3]{u}$	$y'=\frac{u'}{3\sqrt[3]{u^2}}$	$y=\sqrt[3]{x^2+4x} \to y'=\frac{2x+4}{3\sqrt[3]{(x^2+4x)^2}}$

تمرین: حاصل حدهای زیر را به دست آورید.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt[n]{x}-1} = \frac{0}{0} \xrightarrow{Hop} \lim_{x\to 1}\frac{1-0}{\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}-0}=\frac{1}{\frac{1}{n}}=n$$

$x^{\frac{1}{n}}$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}=2 \qquad \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1}=3$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[4]{x}-1}{x-1}=\frac{1}{4} \qquad \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}=\frac{1}{3}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt[3]{x}-1)} = \boxed{\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}}\ \boxed{\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1}} = 2(3)=6$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x+x^2+x^3+x^4+\cdots+x^n-n}{x-1}$$

$\overbrace{1+1+\cdots\cdots+\cdots+1}^{n\ \text{تا}}-n$ عدد

$$=\frac{n-n}{1-1}=\frac{0}{0}\xrightarrow{Hop}\lim_{x\to 1}\frac{1+2x+3x^2+4x^3+\cdots+nx^{n-1}-0}{1}$$

$=1+2+3+4+\dots n=$ جمع اعداد طبیعی $=\frac{n(n+1)}{2}$

نکات به درد بخور:

جمع اعداد فرد از ۱ تا $2n-1$ $=n^2$

جمع اعداد زوج ۲ تا $2n$ $=n(n+1)$

جمع مربعات اعداد طبیعی $=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

جمع مکعبات اعداد طبیعی $=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

تمرین: اگر $\lim \frac{ax+۳a}{۱-\sqrt{۵x+۱۶}}$ وقتی $x \to -۳$ برابر ۲ باشد، آن‌گاه a کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۳ ۳) -۳ ۴) -۵

$$\lim_{x\to -۳} \frac{ax+۳a}{۱-\sqrt{۵x+۱۶}} = ۲$$

$\frac{۰}{۰}$ مبهم $\xrightarrow{Hop} \lim_{x\to -۳} \frac{a}{۰-\frac{۵}{۲\sqrt{۵x+۱۶}}} = \frac{a}{-\frac{۵}{۲}} = ۲ \longrightarrow a = ۲\left(-\frac{۵}{۲}\right) = -۵$ گ۴

$\sqrt{\underset{u}{۵x+۱۶}} \xrightarrow{مشتق} \frac{۵}{۲\sqrt{۵x+۱۶}}$

تمرین: اگر $\lim_{x\to ۴} \frac{\sqrt{ax+۱}-۳}{\sqrt{x}-۲} = b$، ab کدام است؟

۱) $\frac{۴}{۳}$ ۲) $\frac{۸}{۳}$ ۳) $\frac{۴}{۵}$ ۴) $\frac{۸}{۵}$

اول $x \to ۴$: $b = \frac{\sqrt{۴a+۱}-۳}{۲-۲} = \frac{?}{۰}$ مخرج صفره صورت هم باید صفر باشه که کسر $\frac{۰}{۰}$ بشه

و جواب حد بشه عدد b : لذا

$\sqrt{۴a+۱}=۳$: پس $\sqrt{۴a+۱}-۳=۰$

$۴a+۱=۹ \longrightarrow a=۲$

$$\lim_{x\to ۴} \frac{\sqrt{۲x+۱}-۳}{\sqrt{x}-۲} = \frac{۳-۳}{۲-۲} = \frac{۰}{۰} \xrightarrow[x\to ۴]{Hop} \frac{\frac{\cancel{۲}}{\cancel{۲}\sqrt{۲x+۱}}-۰}{\frac{۱}{۲\sqrt{x}}-۰} = \frac{\frac{۱}{۳}}{\frac{۱}{۴}} = \frac{۴}{۳}$$ گ۱

$\sqrt{u} \xrightarrow{مشتق} \frac{u'}{۲\sqrt{u}}$

تمرین: اگر $\lim_{x\to ۱} \frac{x^۲-۳x+۲}{ax^۲+۲x+b} = ۲$ باشد، آن‌گاه $a-b$ کدام است؟ (b متناهی است.)

b عدده ∞ نیست

۱) -۱ ۲) ۱ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $-\frac{۱}{۲}$

چون صورت صفره مخرج هم باید صفر باشه که کسر $\frac{۰}{۰}$ بشه

و جواب حد بشه برابر ۲ بشه :

$$\lim_{x\to ۱} \frac{۱-۳+۲=۰}{a+۲+b=۰} = ۲$$

$a+b=-۲$

$\frac{۰}{۰}$ مبهم $\xrightarrow{Hop} \lim_{x\to ۱} \frac{۲x-۳}{۲ax+۲} = \frac{۲-۳=-۱}{۲a+۲} = ۲ \longrightarrow -۱ = ۲(۲a+۲)$

$۱ = ۴a+۴$

$-۳ = ۴a$

$-\frac{۳}{۴} = a$ $\quad a+b=-۲$

$b = -۲-a = -۲+\frac{۳}{۴} = -\frac{۵}{۴}$

$a-b = -\frac{۳}{۴} - \left(-\frac{۵}{۴}\right) = -\frac{۳}{۴}+\frac{۵}{۴} = \frac{۲}{۴} = \frac{۱}{۲}$

تمرین: حدّ عبارت $\frac{x^2+10x+16}{12+6\sqrt[3]{x}}$، وقتی $x\to -8$، کدام است؟ (تجربی ۹۸)

۱) ۲۴- ۲) ۱۸- ۳) ۱۲- ۴) ۶-

$\frac{0}{0} \xrightarrow[x\to -8]{Hop} \frac{2x+10+0}{0+6\left(\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\right)} = \frac{2(-8)+10=-6}{2\left(\frac{1}{\sqrt[3]{(-8)^2}}=\frac14\right)=\frac12} = -12$ ۳ درست

$\sqrt[3]{u} \xrightarrow{مشتق} \frac{u'}{3\sqrt[3]{u^2}}$ $\sqrt[3]{x} \xrightarrow{مشتق} \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

تمرین: حاصل $\lim_{x\to1}\frac{2x-7\sqrt{x}+5}{2x-\sqrt{3x+1}}$، کدام است؟ (ریاضی ۹۹)

۱) ۱/۵- ۲) ۱/۲- ۳) ۰/۸- ۴) ۰/۶-

$\frac{0}{0} \xrightarrow[x\to1]{Hop} \frac{2-7\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)+0}{2-\frac{3}{2\sqrt{3x+1}}} = \frac{2-\frac72=-\frac32}{2-\frac{3}{2(2)}=\frac54} = -\frac{4(3)}{2(5)} = -\frac{12}{10} = -1.2$ ۲ درست

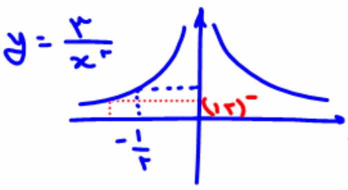
$\frac{\text{عدد غیرصفر}}{\text{صفر حدی}} = +\infty$ یا $-\infty$ $\frac{2}{0^-}=-\infty$ $\frac{2}{0^+}=+\infty$ $\frac{-2}{0^+}=-\infty$ $\frac{-2}{0^-}=+\infty$

تمرین: مقدار $\lim_{x\to(-\frac12)^-}\frac{10x-5+[\frac{3}{x^2}]}{16x-[\frac{-2}{x^2}]}$، کدام است؟ (ریاضی ۱۴۰۰)

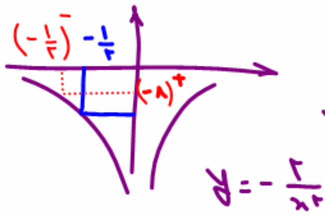
با دقت که براکت برای داریم به جاش عدد می ذاریم.

تست قشنگ و مهم

۱) $-\infty$ ۲) صفر ۳) $\frac{5}{8}$ ۴) $+\infty$

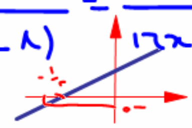


$\lim_{x\to(-\frac12)^-}\left[\frac{3}{x^2}=\frac{3}{\frac14}=12^-\right]=11$ طبق نمودار



$\lim_{x\to(-\frac12)^-}\left[\frac{-2}{x^2}=\frac{-2}{\frac14}=(-8)^+\right]=-8$

$\lim_{x\to(-\frac12)^-}\frac{10x-5+11}{16x-(-8)}=\frac{10x+6}{16x+8}=\frac{1}{0^-}=-\infty$



جواب گزینه یک

x	$-\frac12$	
$16x+8$	$-$ 0	$+$

این که میگم $y=16x+8$ وقتی $(-\frac12)^-$ هستیم 0^- است با رسم خط یا تعیین علامت

استفاده از یک هم‌ارزی (برنولی)

$u \to 0 : (1+u)^n \sim 1+nu$

$u \to 0 : \sqrt[n]{1+u} \sim 1+\frac{u}{n}$

$(1/001)^3 = 1+3(0/001) = 1/003$

$\sqrt[3]{1/001} = 1+\frac{\frac{1}{1000}}{3} = 1+\frac{1}{3000}$

تمرین: حاصل $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{2x+1}-1}{x}$ برابر کدام است؟

۱) ۱ ۲) صفر ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{1}{2}$

$\sqrt[3]{1+2x} \underset{x\to 0}{\sim} 1+\frac{2x}{3}$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt[3]{1+2x} \underset{x\to 0}{\sim} 1+\frac{2x}{3}\right)-1=\frac{2}{3}x}{x}=\frac{2}{3}$

چند سؤال مهم، چند ایدهٔ مهم:

تمرین: حاصل $\lim\limits_{x\to -3}\sqrt{\frac{x^2-4x-21}{2x^2+7x+3}}$ برابر کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\sqrt{2}$ ۴) $\sqrt{3}$

$\lim\limits_{x\to -3}\sqrt{\frac{0}{0} \xrightarrow{Hop} \frac{2x-4}{4x+7}=\frac{-10}{-5}}=\sqrt{2}$

تمرین: حاصل $\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x^3+x+1)(x^4-3x+2)}{(x^2-\sqrt{x})\sqrt{5x-1}}$ برابر کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

Hop

$\lim\limits_{x\to 1}\frac{(1+1+1)(x^4-3x+2)}{(x^2-\sqrt{x})(\sqrt{5-1}=2)}=\frac{3}{2}\lim\limits_{x\to 1}\frac{4x^3-3}{2x-\frac{1}{2\sqrt{x}}}=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}\right)=1$

تمرین: حاصل $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\sqrt{x^2-1}+x-1}{\sqrt{4x-4}+x^2-1}$ برابر کدام است؟

۱) $\dfrac{1}{2}$ ۲) $-\dfrac{1}{2}$ ۳) $\sqrt{2}$ ۴) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

هم ارزی کم توان

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{(x+1)(x-1)}+(x-1)}{\sqrt{4(x-1)}+\underbrace{(x+1)}_{1+1}(x-1)}=\frac{\sqrt{2t}+t}{2\sqrt{t}+2t}=\frac{0}{0}=\frac{\sqrt{2t}}{2\sqrt{t}}=\frac{\sqrt{2}\sqrt{t}}{2\sqrt{t}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\begin{cases} x\to 1\\ x-1=t\\ t\to 0\end{cases}$

$t\to 0$ حوالی صفر جمله کم توان حاکم است

گ ۴

تمرین: حاصل $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{|\overset{+}{x+1}|-|\overset{-}{x-1}|}{\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}}$ برابر کدام است؟

۱) $\sqrt{2}$ ۲) $2\sqrt{2}$ ۳) $-\sqrt{2}$ ۴) $-2\sqrt{2}$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{x+1-(-x+1)=x+1+x-1=2x}{\sqrt{1-\sqrt{1\underbrace{-x^2}_{u\to 0}}}\overset{\text{برنولی}}{\sim}1-\left(1+\frac{-x^2}{2}\right)=\sqrt{\frac{x^2}{2}}=\frac{|x|}{\sqrt{2}}=\frac{-x}{\sqrt{2}}}=-2\sqrt{2}$$

$x\to 0^-$

$\sqrt{1+u}\sim 1+\dfrac{u}{2}$ $u\to 0$ برنولی

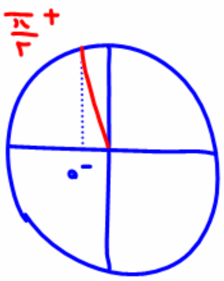
گ ۴

حالت $\dfrac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ در حدهای مثلثاتی

تمرین: حاصل $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^+}\dfrac{\sin x+[\cos x]}{\cos^2 x}$ کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

اول براکتو تعیین عدد کن:

۱) $-\dfrac{1}{2}$ ۲) $\dfrac{1}{2}$ ۳) -1 ۴) حد وجود ندارد.



$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\frac{\sin x+\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)^+=0^-\right]}{\cos^2 x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\frac{\sin x-1=-(\cancel{1-\sin x})}{1-\sin^2 x=(\cancel{1-\sin x})(1+\sin x)}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\frac{-1}{1+\sin x}=\frac{-1}{1+1}=-\frac{1}{2}$$

گزینه یک

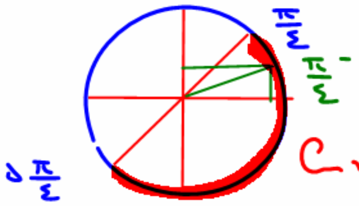
تمرین: حاصل $\lim\limits_{x\to \frac{3\pi}{4}^-} \frac{1+\cot x}{1+\tan x}$ کدام است؟

۱) -1 ۲) صفر ۳) 1 ۴) $+\infty$

$\tan x = t$

$$\frac{1+\frac{1}{t}}{1+t} = \frac{\frac{t+1}{t}}{1+t} = \frac{1}{t} = \frac{1}{\tan x} = \frac{1}{\tan\frac{3\pi}{4}} = \frac{1}{-1} = -1$$

گزینه ۱



$\cos x > \sin x$

تمرین: حاصل $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}^-} \frac{|\sin x-\cos x|}{\tan x-1}$ کدام است؟

۱) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۳) $\sqrt{2}$ ۴) $-\sqrt{2}$

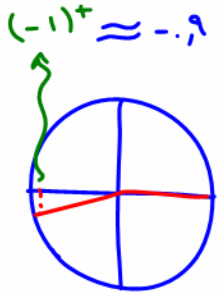
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}^-} \frac{|\overbrace{\sin x-\cos x}^{-}| = -(\cancel{\sin x-\cos x})}{\frac{\sin x}{\cos x}-1 = \frac{\cancel{\sin x-\cos x}}{\cos x}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}^-} -\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

گزینه ۱

تمرین: حاصل $\lim\limits_{x\to \pi^+} \frac{|1+\cos x|}{\sin^2 x}$ کدام است؟

۱) $-\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) 1 ۴) -1

$(-1)^+ \approx -0.9$



π^+

$$\lim_{x\to\pi^+} \frac{|\overbrace{1+\cos x}^{+}| = \cancel{1+\cos x}}{\sin^2 x = 1-\cos^2 x = (\cancel{1+\cos x})(1-\cos x)} = \lim_{x\to\pi^+}\frac{1}{1-\cos x} = \frac{1}{1-(-1)} = \frac{1}{2}$$

گزینه ۲

تمرین: حاصل $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{1-\sin^3 x}{1-\sin^2 x}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) صفر

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cancel{(1-\sin x)}(1+\sin x+\sin^2 x)}{\cancel{(1-\sin x)}(1+\sin x)} = \frac{1+1+1}{1+1} = \frac{3}{2}$$

گ۲

تمرین: حد چپ $\dfrac{\sqrt{1-\sin 2x}}{\sin x-\cos x}$ در $x=\frac{\pi}{4}$:

۱) ۱ ۲) -1 ۳) $\sqrt{2}$ ۴) $-\sqrt{2}$

یک مربع کامل معروف

$1-\sin 2x = (\sin x-\cos x)^2$

$\frac{\pi}{4}^-$

دایره مثلثات

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}^-} \frac{\sqrt{(\sin x-\cos x)^2}}{\sin x-\cos x} = \frac{|\overbrace{\sin x-\cos x}^{-}|}{\sin x-\cos x} = \frac{-(\sin x-\cos x)}{\sin x-\cos x} = -1$$

تمرین: حاصل $\lim\limits_{x\to\pi^-} \dfrac{\sqrt{1+\cos x}}{\sin x}$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۲) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $-\frac{1}{2}$

$\frac{\pi}{2}^-$

$$\lim_{x\to\pi^-} \frac{\sqrt{2\cos^2\frac{x}{2}} = \sqrt{2}\,\left|\cos\frac{x}{2}\right|^{+}}{\sin x} = \lim_{x\to\pi^-}\frac{\sqrt{2}\,\cancel{\cos\frac{x}{2}}}{2\sin\frac{x}{2}\,\cancel{\cos\frac{x}{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{2(\sin\frac{\pi}{2}=1)} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

گ۱

تمرین: حاصل $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{1-\cos 2x}{\sin x\tan x}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) −۲ ۳) ۱ ۴) −۱

$$\lim_{x\to\pi} \frac{1-\cos 2x = 2\sin^2 x}{\sin x\,\dfrac{\sin x}{\cos x=\cos\pi=-1} = -\sin^2 x} = -2$$

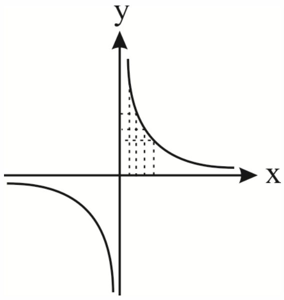
گزینه ۲

حد بی‌نهایت و حد در بی‌نهایت مال کتاب دوازدهمه و در امتحان نهایی سوال داره.

حد بی‌نهایت

اگر با نزدیک شدن x به عدد a مقادیر تابع دائماً در حال افزایش باشد می‌گوییم حد تابع نامتناهی و $+\infty$ است و اگر دائماً در حال کـاهش باشد می‌گوییم حد تابع نامتناهی و $-\infty$ است.

به عنوان مثال به تابع $y=\frac{1}{x}$ توجه کنید. وقتی که x از سمت راست به صفر میل می‌کند، مخرج تابع از راست به صفر نزدیک می‌شود. یعنی مقدار مخرج دائماً در حال کم‌ترشدن است و از آن‌جا که صورت تابع عدد ثابت یک است، مقدار کسر زیاد می‌شود و می‌توانیم بنویسیم:



$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty$$

در توابع کسری اگر حد صورت کسر مخالف صفر باشد و مخرج کسر به صفر میل کند کسر به سمت بی‌نهایت میل می‌کند:

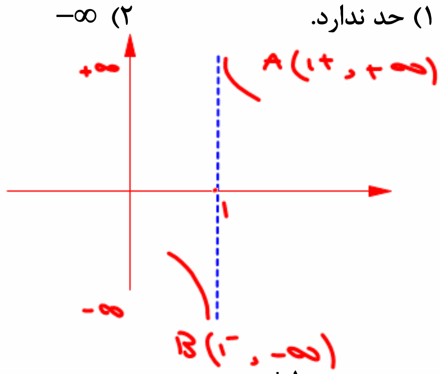
$$\frac{\text{عدد}>0}{0^+}=+\infty \qquad \frac{\text{عدد}<0}{0^-}=+\infty \qquad \frac{\text{عدد}>0}{0^-}=-\infty \qquad \frac{\text{عدد}<0}{0^+}=-\infty$$

تعریف نشده $= \frac{\text{عدد}}{\text{صفر مطلق}}$

(۶) در محاسبه حد در توابع کسری اگر صورت کسر برابر یک عدد و مخرجش صفر شود، باید حد چپ و راست را جداگانه حساب کنیم.

تمرین: حاصل $\lim_{x\to 1}\frac{x+1}{x-1}$ کدام است؟

۱) حد ندارد. ۲) $-\infty$ ۳) $+\infty$ ۴) صفر



$$\begin{cases} x\to 1^- \\ x\to 1^+ \end{cases}$$

$l_1: \frac{x+1=1+1}{1^- -1=0^-}=\frac{2}{0^-}=-\infty=l_1$

حد ندارد.

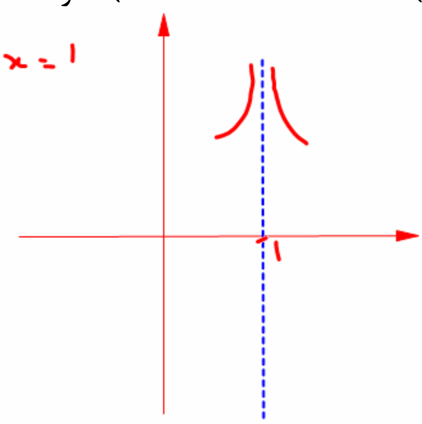
$l_2: \frac{x+1=1+1=2}{1^+ -1=0^+}=+\infty=l_2$

$x=1$ مجانب قائم است.

تمرین: حاصل $\lim_{x\to 1}\frac{x+1}{(x-1)^2}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) صفر ۳) $-\infty$ ۴) $+\infty$

$x=1$ مجانب قائم است.



$$\begin{cases} x\to 1^- \\ x\to 1^+ \end{cases}$$

$y: \frac{1+1=2}{(1^- -1=0^-)^2=0^+}=+\infty$

حد ندارد

زیرا حد چپ و راست متناهی (عدد) نیست

$y=\frac{1+1}{(1^+ -1=0^+)^2=0^+}=+\infty$