دوره تناوب

f متناوب است اگر با افزودن یک مقدار ناصفر به x عرض (y) تابع عوض نشود و دو شرط زیر داشته باشد:

به ازای هر

۱) $\forall x \in D_f \Rightarrow x+T \in D_f$ ۲) $f(x+T)=f(x) \quad T \neq 0$

مثلاً $\sin\frac{\pi}{6}$ با $\sin(2\pi+\frac{\pi}{6})$ برابر و هر دو $\frac{1}{2}$ هستند. در حالی که به x ، $۶/۲۸\ldots = 2\pi$ افزوده‌ایم.

هر مضربی از دوره‌ی تناوب، خود دوره‌ی تناوب است که کوچک‌ترین مقدار مثبت دوره تناوب را، دوره تناوب اصلی می‌گوییم.

تذکر: تابع ثابت، متناوب است و دوره تناوبش هر عدد حقیقی است ولی چون کوچک‌ترین عدد حقیقی وجود ندارد، کوچک‌ترین دوره تناوب ندارد.

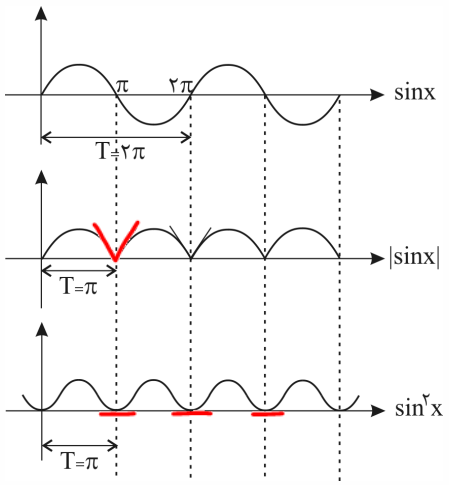
۱) دوره تناوب $f(x)$ اگر T باشد، آن‌گاه دوره‌ی تناوب $af(x+b)+k$ نیز همان T هست.

۲) تابع متناوب، یک به یک و معکوس‌پذیر نیست.

۳) دوره تناوب $\sin^{2k+1} ax$ و $\cos^{2k+1} ax$ برابر است با: $T=\frac{2\pi}{|a|}$

دوره تناوب $\tan ax$ و $\cot ax$ به هر توان (چه زوج، چه فرد) و $|\tan ax|$ و $|\cot ax|$ به هر توان $T=\frac{\pi}{|a|}$ است.

- $\sin^{2k} ax$
- $\cos^{2k} ax$
- $|\sin ax|$ (توان چه زوج و چه فرد باشد)
- $|\cos ax|$ (توان چه زوج و چه فرد باشد)



تمرین: اگر دورهٔ تناوب تابع $f(x)=2\cos(mx+\frac{m}{2})$ برابر $\frac{4}{3}$ باشد، مقدار $f(0)$ کدام است؟ $(m>0)$

۱) $-\sqrt{3}$ ۲) $\sqrt{3}$ ۳) $\sqrt{2}$ ۴) $-\sqrt{2}$

$f(x)=2\cos\left(\frac{3\pi}{2}x+\frac{3\pi}{4}\right)$

$f(0)=2\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)$

$=2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\sqrt{2}$

$\frac{2\pi}{|m|}=\frac{4}{3}$

$\frac{2\pi}{3}=\frac{4}{2} \rightarrow m=3\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{3\pi}{2}$

تمرین: دورهٔ تناوب تابع $f(x)=\frac{\cos 2x\cos 4x}{\tan x+\cot x}$ کدام است؟

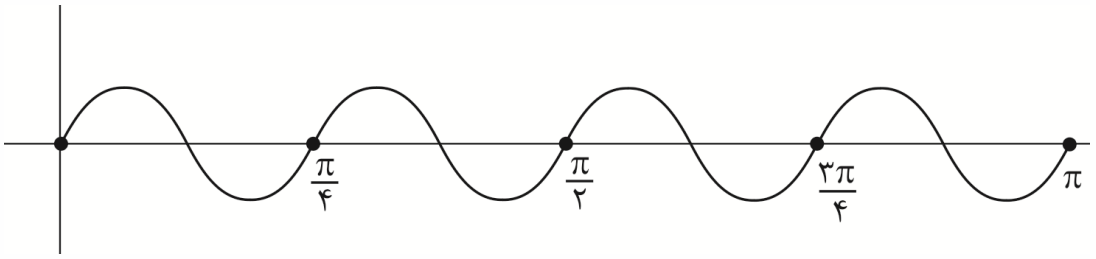
۱) π ۲) $\frac{\pi}{2}$ ۳) $\frac{\pi}{4}$ ۴) $\frac{\pi}{8}$

پاسخ:

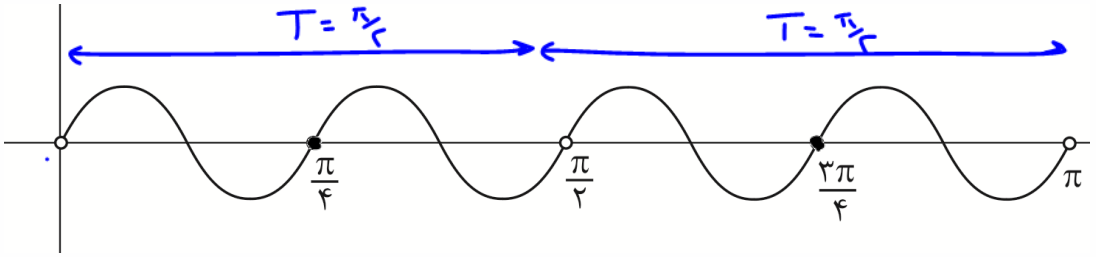
$$f(x)=\frac{\cos 2x\cos 4x}{\frac{2}{\sin 2x}}=\frac{\sin 2x\cos 2x\cos 4x}{2}=\frac{\frac{1}{2}\sin 4x\cos 4x}{2}=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\sin 8x}{2}=\frac{1}{8}\sin 8x$$

در حالت معمول $T=\frac{2\pi}{8}=\frac{\pi}{4}$

بنابراین به این شکل می‌رسیم:



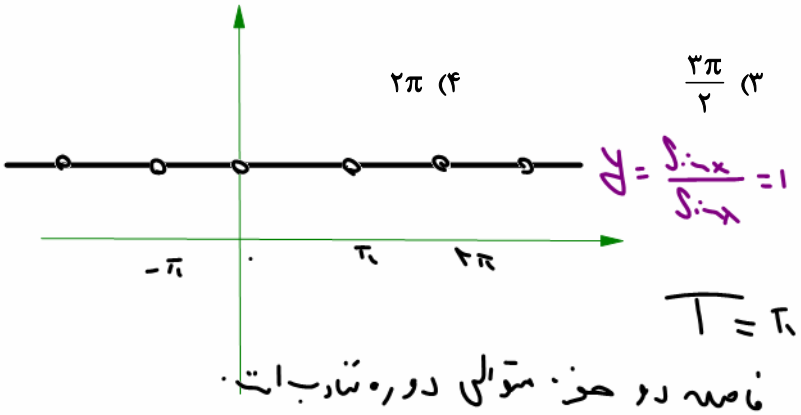
ولی باید توجه کنید که به علت حضور $\tan x$ و $\cot x$ در مخرج کسر $x\neq\frac{k\pi}{2}$ می‌باشد. پس باید این نقاط توخالی باشند:



اکنون از شکل مشخص است که $T=\frac{\pi}{2}$ است نه $\frac{\pi}{4}$. جالب این است که در خود آزمون، این سوال به اشتباه پاسخ داده شده است. گزینهٔ (۲) صحیح است.

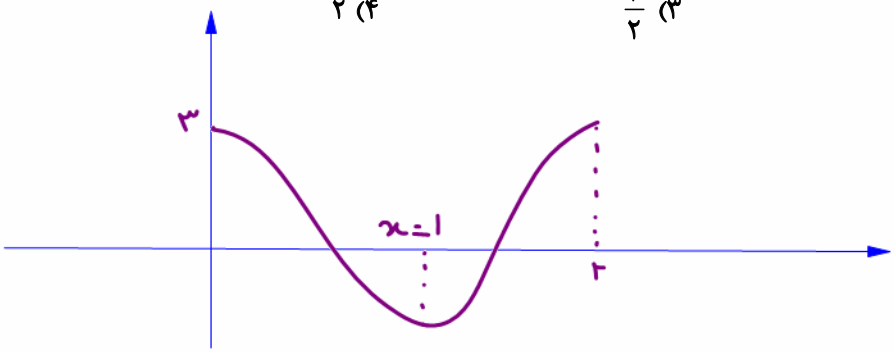
تمرین: دورهٔ تناوب $f(x)=\frac{\sin x}{\sin x}$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{2}$ ۲) π ۳) $\frac{3\pi}{2}$ ۴) 2π



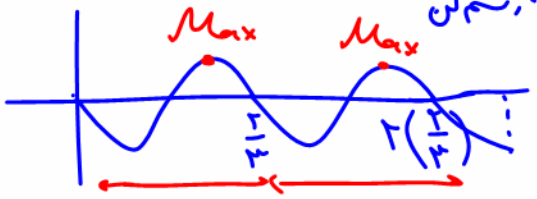
تمرین: اگر دورهٔ تناوب تابع $y = ۳\cos ax$ برابر ۲ باشد، اولین نقطه **min** این تابع با طول مثبت کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) ۲

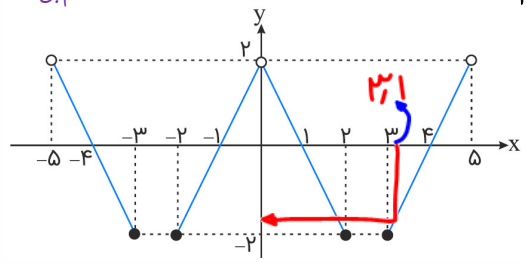


تمرین: تابع $y = -\frac{۱}{۲}\sin(۳\pi x)$ در بازهٔ $[-\frac{۱}{۲}, ۱]$ چند بار بیشترین مقدار را دارد؟ (قلم‌چی ۹۸)

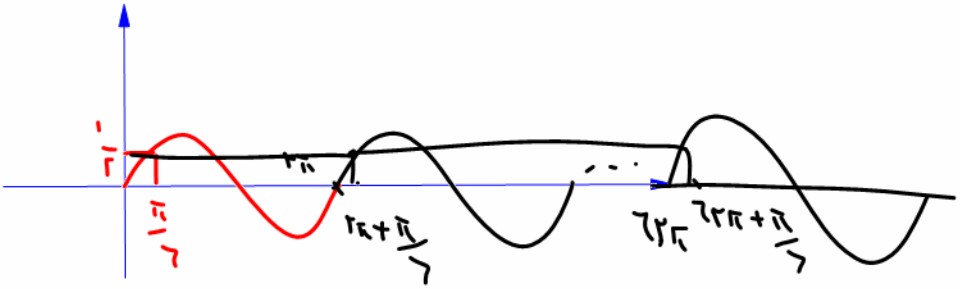
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴



تمرین: قسمتی از نمودار تابع متناوب $y = f(x)$ به شکل زیر است. $f(۱۲۸/۱)$ کدام است؟ (قلم‌چی ۹۸)



۱) ۱/۸
۲) −۱/۸
۳) −۰/۲
۴) تعریف‌نشده



تمرین: دورهٔ تناوب تابع با ضابطهٔ $f(x)=\tan(\pi x)-\cot(\pi x)$ کدام است؟ (خارج ریاضی ۹۸)

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۱ ۳) $-\frac{۱}{۲}$ ۴) -۱

برای محاسبه دوره تناوب تانژانت و کتانژانت تابع را ده کنید.

$\cot\theta-\tan\theta=۲\cot۲\theta$ ← $f(x)=-(\cot(\pi x)-\tan(\pi x))=-۲\cot(۲\pi x)$

$T=\frac{T_۱}{۲\pi}=\frac{۱}{۲}$ جواب

$\begin{cases}y=\tan(bx)\ ;\ y=\cot(bx)\\ T=\frac{\pi}{|b|}\end{cases}$

تمرین: دورهٔ تناوب تابع $y=\sin x\sqrt{۱+\cos ۲x}$ کدام است؟ (قلم‌چی ریاضی ۹۹)

۱) π ۲) $\frac{\pi}{۲}$ ۳) $\frac{۳\pi}{۲}$ ۴) ۲π

پاسخ:

$$f(x)=\sin x\sqrt{۲\cos^۲ x}=\sqrt{۲}\sin x|\cos x|$$

گزینهٔ (۱): $f(x+\pi)=-\sqrt{۲}\sin x|\cos x|\neq f(x)$

گزینهٔ (۲): $f(x+\frac{\pi}{۲})=\sqrt{۲}\cos x|\sin x|\neq f(x)$

گزینهٔ (۳): $f(x+\frac{۳\pi}{۲})=-\sqrt{۲}\cos x|\sin x|\neq f(x)$

گزینهٔ (۴): $f(x+۲\pi)=\sqrt{۲}\sin x|\cos x|=f(x)$

توابع مثلثاتی

$$\boxed{y=\sin x}$$

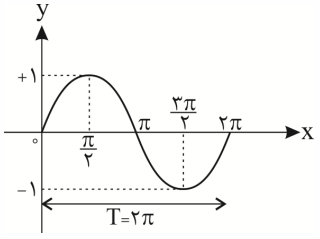
۱) دامنه‌ی این تابع $\mathbb{R}$ است. ($\sin x$ به ازای هر $x\in\mathbb{R}$ جواب دارد.)

۲) برد این تابع $[-۱,۱]$ است. (چون $-۱\le\sin x\le ۱$)

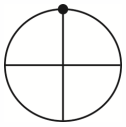
۳) از آن‌جایی که کمان $(\underbrace{۲k\pi}_{\text{مضارب زوج }\pi}+\alpha)$ از لحاظ موقعیت در دایره‌ی مثلثاتی با کمان α تفاوتی ندارد، رفتار تابع $y=\sin x$ را در $[۰,۲\pi]$ یعنی یک دور از دایره‌ی مثلثاتی بررسی و نمودار آن را رسم کرده، سپس ۲π تا ۲π تا تکرارش می‌کنیم.

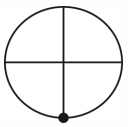
نمودار $y=\sin x$ در $[۰,۲\pi]$ به کمک جدول زیر به صورتی که مشاهده می‌شود رسم می‌گردد:

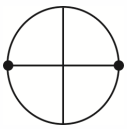
x	۰	$\frac{\pi}{۲}$	π	$\frac{۳\pi}{۲}$	۲π
y	۰	۱	۰	-۱	۰



(دوره‌ی تناوب اصلی این تابع $T=۲\pi$ می‌باشد.)

۴) ماکزیمم (بیشینه) مقدار تابع $y=\sin x$ برابر ۱ است که در  یعنی کمان $x=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}, k\in\mathbb{Z}$ (مثل $\frac{\pi}{۲}$، $\frac{۵\pi}{۲}$، $\frac{۹\pi}{۲}$ یا $\frac{-۳\pi}{۲}$، $\frac{-۷\pi}{۲}$ و ...) رخ می‌دهد.

۵) مینیمم (کمینه) مقدار تابع $y=\sin x$ برابر -۱ است که در  یعنی کمان $x=۲k\pi-\frac{\pi}{۲}, k\in\mathbb{Z}$ (مثل $\frac{-\pi}{۲}$، $\frac{-۵\pi}{۲}$ و ...) رخ می‌دهد.

۶) تابع $y=\sin x$ در  یعنی کمان $x=k\pi, k\in\mathbb{Z}$ (مثل ۰، $\pm\pi$، $\pm۲\pi$ و ...) با محور طول‌ها برخورد می‌کند، یعنی مقدار آن صفر می‌شود.

در حالت کلی، در تابع $y=a\sin(bx+c)+d$:

۱) مقدار ماکزیمم تابع برابر $|a|+d$ و مقدار مینیمم آن $-|a|+d$ می‌باشد.

۲) برای یافتن نقطه‌ی برخورد نمودار با محور yها، در ضابطه‌ی تابع $x=۰$ قرار می‌دهیم و y را به دست می‌آوریم. برای یافتن نقاط برخورد نمودار با محور xها نیز در ضابطه‌ی تابع $y=۰$ قرار می‌دهیم و معادله‌ی مثلثاتی حاصل را حل می‌کنیم.

۳) دوره‌ی تناوب برابر $T=\frac{۲\pi}{|b|}$ است.

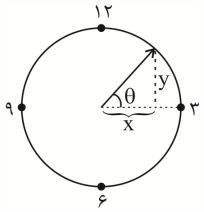
تمرین: اگر بیشترین مقدار تابع $y=۲\sin ۵x-۳c$ برابر (-۷) باشد، c کدام است؟

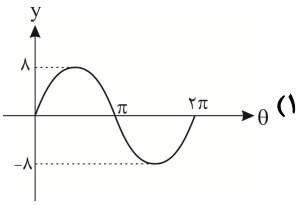
۱) ۳ ۲) -۲ ۳) -۵ ۴) ۱

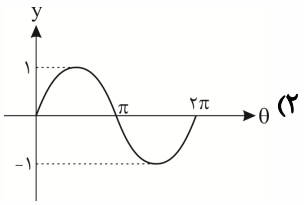
پاسخ: گزینه‌ی «۱»

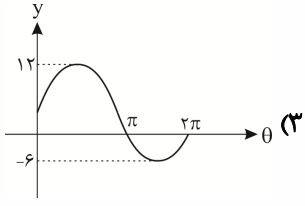
$$y_{max}=۲-۳c=-۷ \Rightarrow -۳c=-۹ \Rightarrow c=۳$$

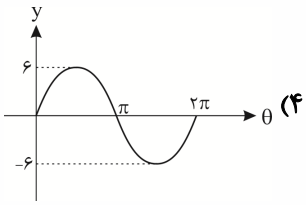
تمرین: طول عقربه‌ی دقیقه‌شمار یک ساعت ۸ سانتی‌متر است و این عقربه با جهت مثبت محور افقی زاویه‌ی θ می‌سازد. با توجه به شکل زیر، نمودار تابع y برحسب θ کدام است؟ (θ برحسب رادیان است.)



۱) 

۲) 

۳) 

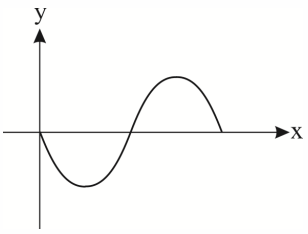
۴) 

پاسخ: گزینه‌ی «۱» ـ طبق تعریف نسبت مثلثاتی سینوس در مثلث قائم‌الزاویه‌ی موجود داریم:

$$\sin\theta=\frac{y}{r}\Rightarrow \sin\theta=\frac{y}{8}\Rightarrow y=8\sin\theta\Rightarrow \begin{cases}T=2\pi\\ y_{max}=8\\ y_{min}=-8\end{cases}$$

مشخصه که بیشترین مقدار (max) تابع $y=8\sin\theta$ برابر ۸ و کم‌ترین مقدار این تابع ۸- و دوره‌ی تناوبش هم $T=2\pi$ هست. پس گزینه‌ی «۱» درسته.

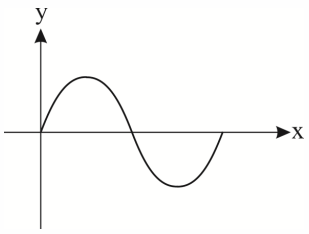
حالت ۲



$y=a\sin bx$

$a\times b<0$

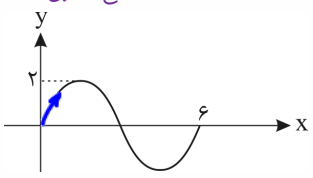
حالت ۱



$y=a\sin bx$

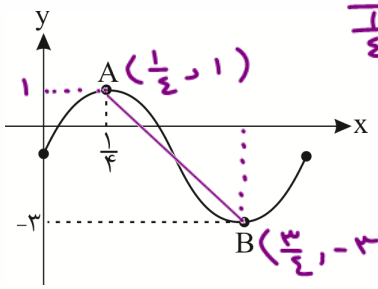
$a\times b>0$

تمرین: شکل روبه‌رو قسمتی از نمودار تابع $y=a\sin(b\pi x)$ است. $a+b$ کدام است؟ (خارج تجربی ۹۳)



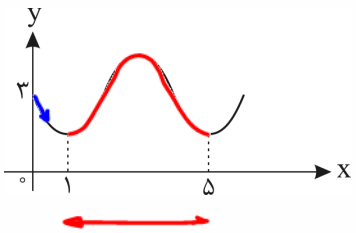
۱) $\frac{4}{3}$ ۲) $\frac{5}{3}$ ۳) $\frac{7}{3}$ ۴) $\frac{8}{3}$

تمرین: قسمتی از نمودار تابع $f(x)=2\sin b\pi x+c$ به صورت زیر رسم شده است. طول پاره‌خط AB کدام است؟



۱) $\frac{\sqrt{17}}{2}$ ۲) $\frac{\sqrt{65}}{2}$ ۳) $\frac{\sqrt{17}}{4}$ ۴) $\frac{\sqrt{65}}{4}$

تمرین: شکل روبه‌رو قسمتی از نمودار تابع $y = a + \sin(b\pi x)$ است. مقدار y در نقطه‌ی $x = \frac{۲۵}{۳}$، کدام است؟ (تجربی ۹۳)



۱) ۲

۲) ۲/۵

۳) ۳

۴) ۳/۵

$f(۰) = ۳ \Rightarrow a + ۰ = ۳ \Rightarrow a = ۳$

$T = ۵ - ۱ = ۴ = \frac{۲\pi}{|b\pi|} = \frac{۲}{|b|} \Rightarrow |b| = \frac{۲}{۴} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow b = -\frac{۱}{۲}$ یا $\frac{۱}{۲}$

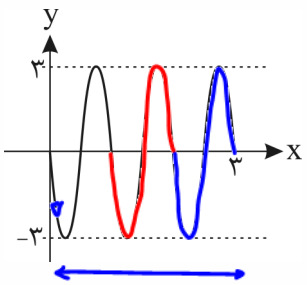
می‌بینم شکل در محل برخورد با yها نزولیه لذا $\sin(b\pi x)$ ①

$(۱)(b) < ۰ \Rightarrow b < ۰$

$y = ۳ + \sin(-\frac{۱}{۲}\pi x)$

$f(\frac{۲۵}{۳}) = ۳ + \sin(-\frac{۲۵}{۶}\pi) = ۳ - \sin(\frac{۲۴\pi}{۶} + \frac{\pi}{۶} = \frac{۴\pi}{۱} + \frac{\pi}{۶}) = ۳ - \sin\frac{\pi}{۶} = ۳ - \frac{۱}{۲} = ۳ - ۰/۵ = ۲/۵$ گزینه ۲

تمرین: شکل روبه‌رو، قسمتی از نمودار تابع $y = a\sin(b\pi x)$ است. $a.b$ کدام است؟ (خارج ریاضی ۹۲)



۱) ۶-

۲) ۳-

۳) ۴/۵

۴) ۶

a . b < ۰

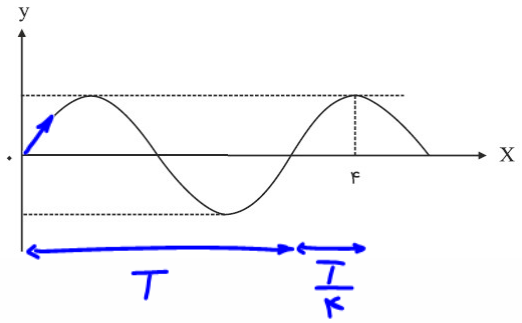
می‌بینم در محل برخورد با yها شکل نزولیه لذا $ab < ۰$

$۳T = ۳$

$T = ۱ = \frac{۲\pi}{|b\pi|} = \frac{۲}{|b|} \Rightarrow |b| = ۲ \Rightarrow b = ۲$ یا -۲ $\quad a = ۳$

$ab = ۳(-۲) = -۶$ گزینه ①

تمرین: قسمتی از نمودار تابع $y = a\cos((\frac{۳}{۲} + bx)\pi)$ به صورت زیر است. آن‌گاه کدام گزینه صحیح است؟ (قلم‌چی ۹۴)



۱) $a < ۰, b = \frac{۵}{۸}$

۲) $a < ۰, b = -\frac{۵}{۸}$

۳) $a > ۰, b = \frac{۵}{۱۶}$

۴) $a > ۰, b = -\frac{۵}{۱۶}$

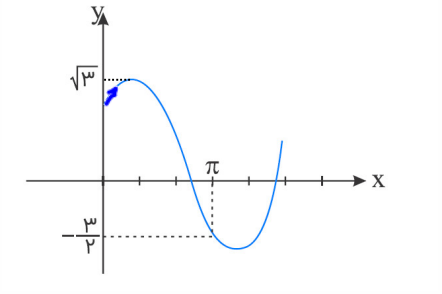
$y = a\cos(\frac{۳\pi}{۲} + b\pi x) = a\sin(b\pi x)$

می‌بینم شکل در محل برخورد با yها صعودیه لذا $ab > ۰$

$T + \frac{T}{۴} = \frac{۵T}{۴} = ۴ \Rightarrow T = \frac{۱۶}{۵} = \frac{۲\pi}{|b\pi|} = \frac{۲}{|b|} \Rightarrow |b| = \frac{۲}{\frac{۱۶}{۵}} = \frac{۱۰}{۱۶} = \frac{۵}{۸}$

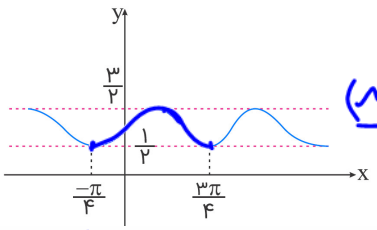
$b = -\frac{۵}{۸}$ یا $\frac{۵}{۸}$ فقط گزینه ۲ درست است.

تمرین: شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع $y = a + b\sin(x + \frac{\pi}{3})$ است. b کدام است؟ (تجربی ۹۸)



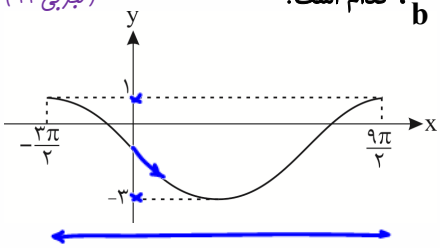
۱) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
۲) $\frac{3}{2}$
۳) $\sqrt{3}$
۴) ۲

تمرین: شکل زیر، نمودار تابع $y = ۱ + a\sin bx\cos bx$ است. $a + b$ کدام است؟ (ریاضی ۹۸)



۱) ۱
۲) $\frac{3}{2}$
۳) ۲
۴) ۳

تمرین: شکل زیر، نمودار تابع $y = a\sin(bx) + c$ را در یک بازهٔ تناوب، نشان می‌دهد. نسبت $\frac{a}{b}$، کدام است؟ (تجربی ۹۹)



۱) -۲
۲) -۳
۳) -۴
۴) -۶

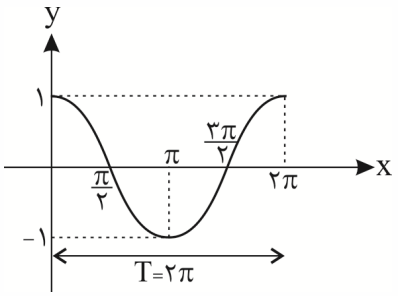
$y = \cos x$

۱) دامنه‌ی این تابع $\mathbb{R}$ است ($\cos x$ به ازای هر $x \in \mathbb{R}$ جواب دارد).

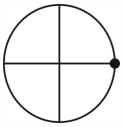
۲) برد این تابع $[-1,1]$ است (چون $-1 \le \cos x \le 1$).

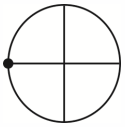
۳) نمودار $y = \cos x$ را نیز مانند $y = \sin x$ در $[0,2\pi]$ به کمک جدول زیر رسم کرده، سپس با توجه به همان خاصیت کمان $(2k\pi + \alpha)$ و این که در واقع دوره‌ی تناوب اصلی $y = \cos x$ هم $T = 2\pi$ است، 2π تا 2π تا تکرارش می‌کنیم.

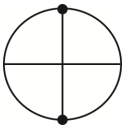
مضارب زوج π



x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
y	1	0	-1	0	1

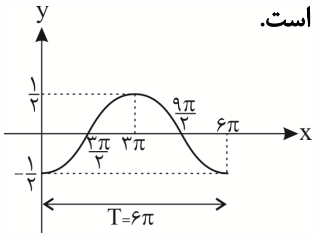
۴) ماکزیمم (بیشینه) مقدار تابع $y = \cos x$ برابر ۱ است که در $x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ یعنی کمان  (مثل ۰ ، $\pm 2\pi$، $\pm 4\pi$ و ...) رخ می‌دهد.

۵) مینیمم (کمینه) مقدار تابع $y = \cos x$ برابر -1 است که در $x = (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}$ یعنی کمان  (مثل $\pm\pi$، $\pm 3\pi$ و ...) رخ می‌دهد.

۶) تابع $y = \cos x$ در $x = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ یعنی کمان  (مثل $\pm\frac{\pi}{2}$، $\pm\frac{3\pi}{2}$ و ...) با محور طول‌ها برخورد می‌کند، یعنی مقدار آن صفر می‌شود.

قوانین انتقال (مشابه آن‌چه در قسمت الف) گفته شد) در مورد $y = \cos x$ نیز برقرار است.

تابع $y = a\cos bx$ دارای دوره‌ی تناوب اصلی $T = \frac{2\pi}{|b|}$، مقدار ماکزیمم $|a|$ و مقدار مینیمم $-|a|$ می‌باشد. مثلاً در $y = -\frac{1}{2}\cos(-\frac{x}{3})$ دوره‌ی تناوب اصلی $\frac{2\pi}{|-\frac{1}{3}|} = 6\pi$، ماکزیمم تابع برابر $\frac{1}{2}$ و مینیمم تابع برابر $-\frac{1}{2}$ است.



(از آن‌جایی که $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$، $y = -\frac{1}{2}\cos(-\frac{x}{3})$ همان $y = -\frac{1}{2}\cos\frac{x}{3}$ می‌باشد.)

تذکر: در واقع در رسم $y = a\cos bx$، نمودار $y = \cos x$ با ضریب $\frac{1}{|b|}$ دچار انقباض یا انبساط طولی (افقی) و با ضریب a دچار انبساط یا انقباض عرضی (عمودی) می‌شود. (علامت b تأثیری روی رسم نمودار تابع کسینوس ندارد، چون کسینوس منفی‌خور است.)

حالت کلی، در تابع $y = a\cos(bx+c)+d$

۱) مقدار ماکزیمم تابع برابر $|a|+d$ و مقدار مینیمم آن $-|a|+d$ است.

۲) برای یافتن نقطه‌ی برخورد نمودار با محور yها، در ضابطه‌ی تابع $x=0$ قرار می‌دهیم و y را به دست می‌آوریم. برای یافتن نقاط برخورد نمودار با محور xها نیز در ضابطه‌ی تابع $y=0$ را قرار می‌دهیم و معادله‌ی مثلثاتی حاصل را حل می‌کنیم.

۳) دوره‌ی تناوب برابر $T=\frac{2\pi}{|b|}$ است.

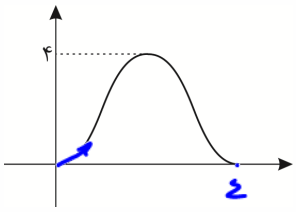
تمرین: اگر کم‌ترین مقدار تابع $h(x)=-a\cos\frac{\pi x}{3}+1$ برابر $\frac{2}{3}$ باشد، مقدار a کدام می‌تواند باشد؟

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $-\frac{3}{2}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $-\frac{1}{3}$

پاسخ: گزینه‌ی «۴»

$-|-a|+1=\frac{2}{3} \Rightarrow -|a|=\frac{2}{3}-1 \Rightarrow -|a|=-\frac{1}{3} \Rightarrow |a|=\frac{1}{3} \Rightarrow a=\pm\frac{1}{3}$ (در میان گزینه‌ها $(-\frac{1}{3})$ وجود دارد.)

تمرین: شکل زیر نمودار تابع $y=a+b\cos(\frac{\pi}{2}x)$، در بازه‌ی $(0,4)$ است. b کدام است؟ (ریاضی ۹۷)



۱) -2
۲) -1
۳) ۱
۴) ۲

$|b| = \frac{Max-Min}{2} = \frac{4-0}{2} = 2 \longrightarrow b = 2$ یا -2

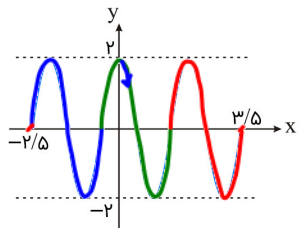
می‌بینم در محل برخورد با y‌ها صعودیه $\Rightarrow b<0$ ، $b=-2$ گزینه ①

$a>0$ ی داریم

$y=a\cos bx$

$a<0$

تمرین: شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع $y=a\sin\pi(\frac{1}{2}+bx)$ است. $a.b$ کدام است؟ (ریاضی ۹۲، قلم‌چی ۹۸)



۱) ۲
۲) ۲/۵
۳) ۳
۴) ۳/۵

$y=a\sin(\frac{\pi}{2}+b\pi x)$

$y=a\cos(b\pi x)$

$3T = 3.5-(-2.5)=6 \longrightarrow T=2=\frac{2\pi}{|b\pi|}=\frac{2}{|b|} \longrightarrow |b|=1 \longrightarrow b=1$ یا -1

هر دو می‌تواند درست باشد

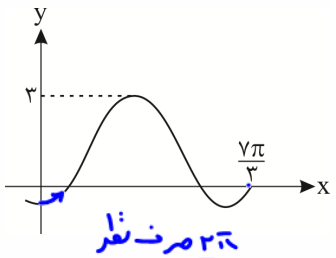
$|a| = \frac{Max-Min}{2} = \frac{2-(-2)}{2}=2 \longrightarrow a=2$ یا -2

چون شکل در محل برخورد با y‌ها نزولیه $a<0$ ، $a=-2$

$ab=-2(\pm1)=\mp2 \longrightarrow$ گزینه ①

جواب ۲ هم درسته

تمرین: شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع با ضابطهٔ $y = a + b\sin(\frac{\pi}{2} + x)$ است. مقدار b کدام است؟ (تجربی ۹۹)



۱) ۲
۲) ۱
۳) −۱
۴) −۲

$y = a + b\cos x$

$Max = a + |b| = 3$

می‌بینیم در محل برخورد با y ها ضخامت به اندازه ۱ بک

$a - b = 3$

می‌بینیم $A(\frac{7\pi}{3}, 0)$ در ضابطه صادق است:

$a + b\cos(\frac{7\pi}{3} = \frac{6\pi}{3} + \frac{\pi}{3}) = 0$

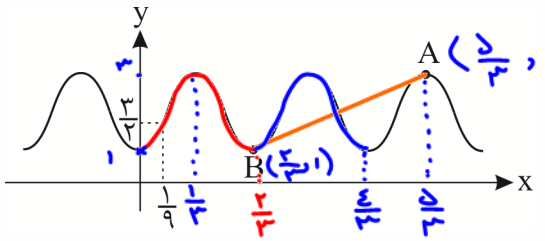
$a + \frac{b}{2} = 0 \rightarrow a = -\frac{b}{2}$

$-\frac{b}{2} - b = 3$

$-\frac{3}{2}b = 3$

$b = -2$ گزینه ۴

تمرین: اگر نمودار تابع $f(x) = 1 + a\sin^2(\frac{3\pi}{2}x)$ به صورت زیر باشد، شیب خط گذرنده از نقاط A و B کدام است؟



۱) ۱
۲) $\frac{3}{2}$
۳) ۲
۴) $\frac{5}{2}$

$f(\frac{1}{3}) = 1 + 2\sin^2(\frac{3\pi}{2}(\frac{1}{3}) = \frac{\pi}{2}) = 3$

نکته دوره تناوب $y = \sin^2(bx)$ برابر $T = \frac{\pi}{|b|}$ است.

$y = \cos^2(bx)$

$f(x) = 1 + a\sin^2(\frac{3\pi}{2}x)$

$T = \frac{\pi}{\frac{3\pi}{2}} = \frac{2}{3}$

می‌بینیم $A(\frac{1}{9}, \frac{3}{2})$ در ضابطه صادق پس:

$f(\frac{1}{9}) = 1 + a\sin^2(\frac{3\pi}{2}(\frac{1}{9}) = \frac{\pi}{6}) = 1 + \frac{a}{4} = \frac{3}{2}$

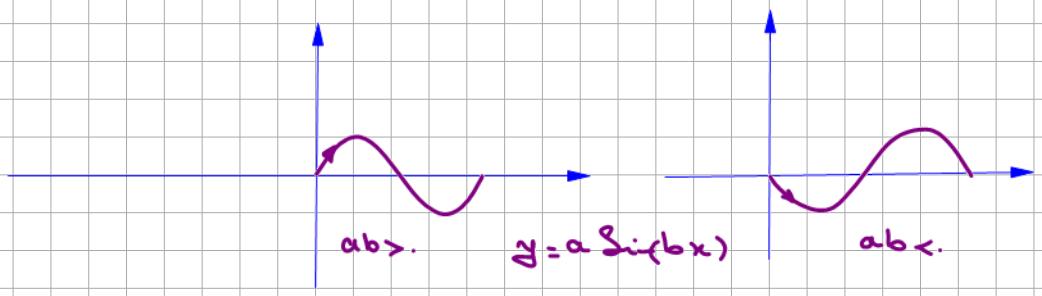
$f(x) = 1 + 2\sin^2(\frac{3\pi}{2}x)$

$\frac{a}{4} = \frac{1}{2} \rightarrow a = 2$

$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{2}{\frac{5}{3} - \frac{2}{3} = \frac{3}{3} = 1} = 2$ گزینه ۳

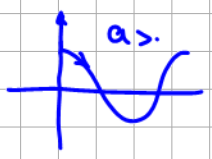
راه سریع‌تر:

$m_{AB} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{Max - Min = 2}{\frac{5}{3} - \frac{2}{3} = \frac{3}{3} = 1} = 2$



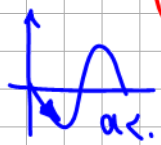
$$min = -|a| + d \leq y = a\,Sin(bx+c) + d \leq |a| + d = Max$$

$$T = \frac{2\pi}{|b|} \qquad d = \frac{Max + min}{2} \;,\; |a| = \frac{Max - min}{2}$$



$$min = -|a| + d \leq y = a\,Cos(bx+c) + d \leq |a| + d = Max$$

$y = a\,Cos(bx)$ طبق قرارداد مثبت یا منفی باشه چون کسینوس منفی میشه

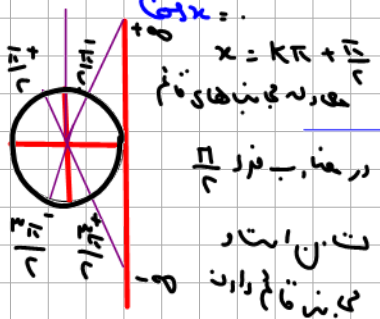


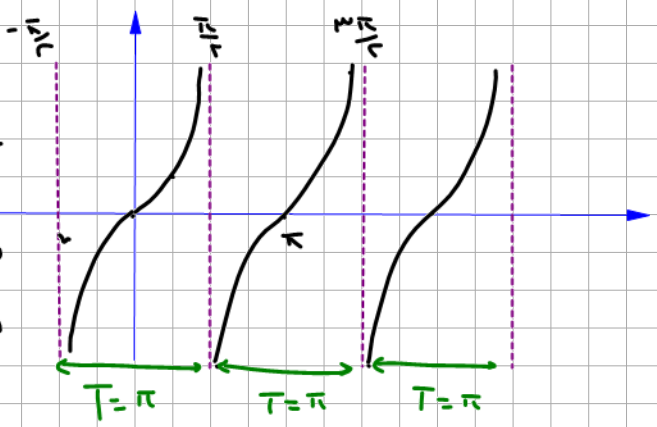
$$T = \frac{2\pi}{|b|} \qquad d = \frac{Max + min}{2} \qquad |a| = \frac{Max - Min}{2}$$

$$y = \tan x = \frac{Sin x}{Cos x} \neq 0$$

$x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ طول نقاطی که در مخرج کسر صفر میشود

در نقاط $\frac{\pi}{2}$ فرد تابع تعریف نشده و نقاط مجانب قائم دارد





$$y = a\tan(bx) \qquad T = \frac{\pi}{|b|}$$

$$y = Cot\,x = \frac{Cos x}{Sin x} \neq 0 \quad x = k\pi$$

نقاطی که در مخرج کسر صفر میشود و نقاط مجانب قائم دارند

$$\begin{cases} y = a\,Cot(bx) \\ T = \dfrac{\pi}{|b|} \end{cases}$$