صفحه به شدت مهم

مهم برای امتحان نهایی و ترمیم معدل

فرمول‌های کمان 2α دوازدهم تجربی و ریاضی ۳

برای هر ۲ گروه تجربی و ریاضی

۱) $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

مثال : $\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}$, $\sin 6x = 2\sin 3x\cos 3x$

$\sin\theta\cdot\cos\theta = \frac{1}{2}\sin(2\theta)$

۲) $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

الف) $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

ب) $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$

پ) $1+\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha \Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$

ت) $1-\cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha \Rightarrow \sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$

توان شکن

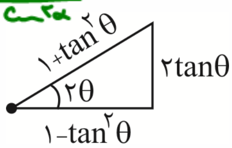
«به شدت مهم»

تقسیم

$\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}}{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}} = \frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$

اثبات ۶

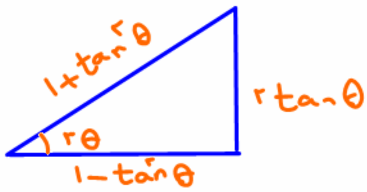
$\tan^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$



مثلث 2θ

۳) $\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} \xrightarrow{\text{اثبات}} \tan(\alpha+\alpha) = \frac{\tan\alpha+\tan\alpha}{1-\tan\alpha\tan\alpha} = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

۴) $\sin 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha} \xrightarrow{\text{اثبات}} \frac{2\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{1+\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = 2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha$



۵) $\cos 2\alpha = \frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha} \xrightarrow{\text{اثبات}} \frac{1-\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{1+\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = \frac{\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{\frac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos 2\alpha$

۶) $\tan^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha} \xrightarrow{\text{اثبات}} \frac{1-\cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha}{1+\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha} = \tan^2\alpha$

۷) $\tan\alpha + \cot\alpha = \frac{2}{\sin 2\alpha} \xrightarrow{\text{اثبات}} \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{1}{\frac{1}{2}\sin 2\alpha} = \frac{2}{\sin 2\alpha}$

۸) $\cot\alpha - \tan\alpha = 2\cot 2\alpha \xrightarrow{\text{اثبات}} \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{\cos 2\alpha}{\frac{1}{2}\sin 2\alpha} = \frac{2\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = 2\cot 2\alpha$

ویژه حسابان

رشته ریاضی

*۹) $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$

*۱۰) $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$

*۱۱) $\sin\alpha\sin(60^\circ-\alpha)\sin(60^\circ+\alpha) = \frac{1}{4}\sin 3\alpha$

*۱۲) $\cos\alpha\cos(60^\circ-\alpha)\cos(60^\circ+\alpha) = \frac{1}{4}\cos 3\alpha$

*۱۳) $\tan\alpha\tan(60^\circ-\alpha)\tan(60^\circ+\alpha) = \tan 3\alpha$

تمرین: حاصل عبارت $\sin(7/5^\circ)\sin(97/5^\circ)\cos(15^\circ)$ چه‌قدر است؟

۱) $-\frac{1}{8}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{8}$ ۴) $-\frac{1}{4}$

$\sin(97/5^\circ = 90^\circ + 7/5^\circ = \frac{\pi}{2} + 7/5^\circ) = \cos 7/5^\circ$ *

$\boxed{\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{2}\sin 2\theta}$

$\sin 7/5^\circ \cos 7/5^\circ$

$\frac{1}{2}\sin(2(7/5^\circ) = 15^\circ)\cos 15^\circ$

$\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2}\sin(2(15^\circ) = 30^\circ) = \frac{1}{8}$

گزینه ۳

تمرین: اگر $f(x) = x - \sqrt{x}$ و $g(x) = \sin^4 x$ باشند، ضابطه‌ی تابع fog کدام است؟ (خارج ۹۲)

۱) $-\frac{1}{4}\sin^2 2x$ ۲) $-\frac{1}{2}\sin^2 2x$ ۳) $\frac{1}{4}\cos^2 2x$ ۴) $\frac{1}{2}\cos^2 2x$

$y = f(g(x)) = g(x) - \sqrt{g(x)} = \sin^4 x - \sqrt{\sin^4 x} = \sin^4 x - |\underbrace{\sin^2 x}_{+}| = \sin^4 x - \sin^2 x$

$y = \sin^2 x(\sin^2 x - 1) = -\sin^2 x(1 - \sin^2 x = \cos^2 x) = -\sin^2 x\cos^2 x = -(\sin x\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x)^2$

جواب $= -\frac{1}{4}\sin^2 2x$ گزینه ۱

تمرین: حاصل عبارت $\cos\frac{\pi}{7}\cdot\cos\frac{2\pi}{7}\cdot\cos\frac{4\pi}{7}$ کدام است؟ بیا در $\sin\frac{\pi}{7}$ ضرب و تقسیم کن

۱) $\frac{1}{8}$ ۲) $-\frac{1}{8}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $-\frac{1}{4}$

$\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{7} \quad \frac{1}{2}\sin\frac{4\pi}{7} \quad \frac{1}{2}\sin\frac{8\pi}{7}$

$\frac{\boxed{\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}}{\sin\frac{\pi}{7}} = \frac{\frac{1}{8}\cancel{\sin\frac{8\pi}{7}}^{-\sin\frac{\pi}{7}}}{\sin\frac{\pi}{7}} = -\frac{1}{8}$ گزینه ۲

$\pi + \frac{\pi}{7} = \frac{8\pi}{7}$

$\frac{\pi}{7}$

تمرین: ساده‌شدهٔ عبارت $\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta} + \frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}$ کدام است؟ (ریاضی خارج ۱۴۰۰)

۱) $\cos\frac{\theta}{2}$ ۲) $\sin\frac{\theta}{2}$ ۳) $2\cot\frac{\theta}{2}$ ۴) $2\tan\frac{\theta}{2}$

$\left(\frac{\sin\theta = \cancel{2}\cancel{\sin\frac{\theta}{2}}\cos\frac{\theta}{2}}{1-\cos\theta = \cancel{2}\sin^2\frac{\theta}{2}} = \cot\frac{\theta}{2}\right) + \left(\frac{1+\cos\theta = \cancel{2}\cos^{\cancel{2}}\frac{\theta}{2}}{\cancel{2}\sin\frac{\theta}{2}\cancel{\cos\frac{\theta}{2}}} = \cot\frac{\theta}{2}\right) = 2\cot\frac{\theta}{2}$ گزینه ۳

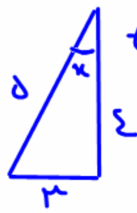
تمرین: اگر انتهای کمان x در ربع سوّم و $\frac{1-\sin x}{1+\sin x}=4$ باشد، مقدار صحیح $\tan\frac{x}{2}$ کدام است؟ (ریاضی خارج ۱۴۰۱)

۱) ۲ ۲) ۲- ۳) ۳ ۴) ۳-

$1-\sin x = 4+4\sin x$

$-3 = 5\sin x$

$-\frac{3}{5} = \sin x$



$\tan x = \frac{3}{4}$

$\tan x > 0$

می دانیم:

$\tan x = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1-\tan^2\frac{x}{2}}$

$\frac{3}{4} = \frac{2t}{1-t^2} \to 3-3t^2 = 8t$

$\Rightarrow 3t^2+8t-3=0 \to t_1=\frac{1}{3} \quad t_2=\frac{-9}{3}=-3$ گزینه ۴

حل به روش ac $\quad t^2+8t-9=0 \to t_1=1 \quad t_2=-9$

تمرین: حاصل $\sin x\cos x(\cos^4 x-\sin^4 x)$ به ازای $x=15^\circ$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{8}$ ۳) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ۴) $\frac{\sqrt{3}}{8}$

پاسخ: گزینهٔ «۴» ـ با استفاده از روابط $2\sin\bigcirc\cos\bigcirc=\sin 2\bigcirc$ و $\cos^2\bigcirc-\sin^2\bigcirc=\cos 2\bigcirc$ می‌توان نوشت:

$$\sin x\cos x(\cos^4 x-\sin^4 x)=\sin x\cos x(\cos^2 x-\sin^2 x)\underbrace{(\cos^2 x+\sin^2 x)}_{1}=\frac{1}{2}\sin 2x\cos 2x=\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\sin(4x))$$

$$=\frac{1}{4}\sin(4x)$$

حالا با جای‌گذاری $x=15^\circ$ خواهیم داشت:

$$\frac{1}{4}\sin(4x)=\frac{1}{4}\sin(60^\circ)=\frac{1}{4}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{8}$$

تمرین: با فرض $\sin\alpha=\frac{1}{4}$، مقدار $\cos 4\alpha$ کدام است؟

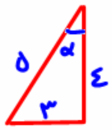
۱) $\frac{17}{64}$ ۲) $\frac{17}{32}$ ۳) $\frac{-17}{64}$ ۴) $\frac{-17}{32}$

پاسخ: گزینهٔ «۲» ـ ابتدا با استفاده از رابطهٔ $\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha$ مقدار $\cos 2\alpha$ را به دست می‌آوریم:

$$\cos 2\alpha=1-2(\frac{1}{16})=1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$$

حالا با استفاده از رابطهٔ $\cos 4\alpha=2\cos^2(2\alpha)-1$ برای محاسبهٔ مقدار $\cos 4\alpha$ می‌توان نوشت:

$$\cos 4\alpha=2(\frac{49}{64})-1=\frac{98}{64}-1=\frac{34}{64}=\frac{17}{32}$$



$\sin\alpha = -\frac{3}{5}$ $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$

علامت به خاطر ناحیه ۳

تمرین: اگر زاویهٔ α در ناحیهٔ سوم مثلثاتی و $\tan\alpha = \frac{3}{4}$ باشد، مقدار $\frac{\cos(2\alpha - \frac{\pi}{2}) + \cos(\alpha + \pi)}{\cot(2\alpha)}$ کدام است؟ (سراسری تجربی ۱۴۰۰)

۱) $-\frac{96}{175}$ ۲) $\frac{1056}{175}$ ۳) $\frac{96}{175}$ ۴) $-\frac{1056}{175}$

$\cos(2\alpha - \frac{\pi}{2}) = \cos(-(\frac{\pi}{2} - 2\alpha)) = \cos(\frac{\pi}{2} - 2\alpha) = \sin 2\alpha$ $\cos(\alpha + \pi)$  $= -\cos\alpha$

عبارت: $\frac{\sin 2\alpha - \cos\alpha}{\cot 2\alpha}$

$\sin 2\alpha - \cos\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha - \cos\alpha = 2(-\frac{3}{5})(-\frac{4}{5}) - (-\frac{4}{5}) = \frac{24}{25} + \frac{20}{25} = \frac{44}{25}$ $= \frac{24(44)}{7(25)} = \frac{1056}{175}$

$\cot 2\alpha = \frac{1}{\tan 2\alpha} = \frac{1}{\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}} = \frac{1-\tan^2\alpha}{2\tan\alpha} = \frac{1-\frac{9}{16}}{2(\frac{3}{4})} = \frac{\frac{7}{16}}{\frac{3}{2}} = \frac{2(7)}{3(16)} = \frac{7}{24}$

تمرین: اگر $\cot x - \tan x = 3$ باشد، حاصل عبارت $M = \frac{2\cot 4x}{2\cot 2x + 3\tan 2x}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{6}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $-\frac{1}{6}$ ۴) $-\frac{5}{6}$

پاسخ: گزینهٔ «۱» ـ می‌دانیم $\cot\bigcirc - \tan\bigcirc = 2\cot 2\bigcirc$ است، پس می‌توان نوشت:

$$2\cot 2x = 3 \Rightarrow \cot 2x = \frac{3}{2} \Rightarrow \tan 2x = \frac{2}{3}$$

از طرفی مطابق فرمول بالا داریم:

$$2\cot 4x = \cot 2x - \tan 2x = \frac{3}{2} - \frac{2}{3} = \frac{9-4}{6} = \frac{5}{6}$$

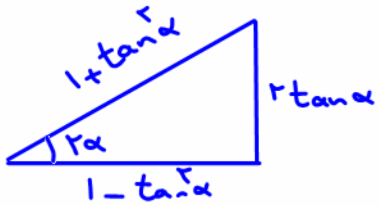
در نهایت با جای‌گذاری مقادیر به‌دست‌آمده در خواستهٔ مسئله، مقدار M به دست می‌آید، یعنی:

$$M = \frac{2\cot 4x}{2\cot 2x + 3\tan 2x} = \frac{\frac{5}{6}}{2(\frac{3}{2}) + 3(\frac{2}{3})} = \frac{\frac{5}{6}}{3+2} = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{1}} = \frac{1}{6}$$

تمرین: اگر $\frac{\tan\alpha(1-\tan^2\alpha)}{(1+\tan^2\alpha)^2} = \frac{1}{8}$، حاصل $\sin 4\alpha$ کدام است؟

از مثلث 2α می دانیم:

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۳) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۴) $\frac{3}{4}$



$\begin{cases} \sin(2\alpha) = \frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha} = \frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}} \\ \cos(2\alpha) = \frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha} = \frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}} \end{cases}$

$= \frac{1}{2}\,\frac{2\tan\alpha}{(1+\tan^2\alpha)}\,\frac{(1-\tan^2\alpha)}{(1+\tan^2\alpha)} = \frac{1}{8}$

$= \frac{1}{2}\ \underbrace{\sin 2\alpha \cdot \cos 2\alpha}$ $=$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sin 4\alpha\right) = \frac{1}{4}\sin 4\alpha = \frac{1}{8} \rightarrow \sin 4\alpha = \frac{1}{2}$

① =

چند تا اتّحاد مهمّ و کاربردی

$$1)\ \cos^4 x - \sin^4 x = \cos 2x$$

اثبات : $(\cos^2 x - \sin^2 x)\underbrace{(\cos^2 x + \sin^2 x)}_{1} = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$

$$2)\ \sin^4 x + \cos^4 x = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos 4x = 1 - 2\sin^2 x\cos^2 x$$

اثبات: $\sin^4 x + \cos^4 x$

$(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x\cos^2 x = 1 - 2\sin^2 x\cos^2 x = 1 - 2(\sin x\cos x)^2 = 1 - 2(\frac{1}{2}\sin 2x)^2$

$= 1 - 2\times\frac{1}{4}\sin^2 2x = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x = 1 - \frac{1}{2}(\frac{1-\cos 4x}{2}) = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cos 4x = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos 4x$

توی اثبات این فرمول از اتحاد $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$ استفاده کردیم که $a = \sin^2 x$ و $b = \cos^2 x$ بود.

$$3)\ \sin^6 x + \cos^6 x = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x = \frac{5}{8} + \frac{3}{8}\cos 4x = 1 - 3\sin^2 x\cos^2 x$$

اثبات: $\sin^6 x + \cos^6 x$

اثبات : $\underbrace{(\sin^2 x + \cos^2 x)}_{1}{}^3 - 3\sin^2 x\cos^2 x\underbrace{(\sin^2 x + \cos^2 x)}_{1} = 1 - 3\sin^2 x\cos^2 x = 1 - 3(\sin x\cos x)^2$

$= 1 - 3(\frac{1}{2}\sin 2x)^2 = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x = 1 - \frac{3}{4}(\frac{1-\cos 4x}{2}) = 1 - \frac{3}{8} + \frac{3}{8}\cos 4x = \frac{5}{8} + \frac{3}{8}\cos 4x$

توی اثبات این فرمول از اتحاد $a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$ استفاده کردیم که $a = \sin^2 x$ و $b = \cos^2 x$ بود.

یادت باشه: فرمول‌های ۲ و ۳ در فصل مشتق کاربرد زیادی خواهند داشت.

$$4)\ (\sin x + \cos x)^2 = 1 + \sin 2x$$
$$(\sin x - \cos x)^2 = 1 - \sin 2x$$

اثبات: $(\sin x \pm \cos x)^2$

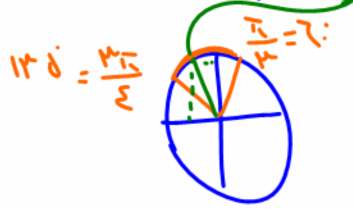
$\underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_{1} \pm \overbrace{2\sin x\cos x}^{\sin 2x} = 1 \pm \sin 2x$

یادت باشه: فرمول شماره ۴ در فصل حد، برای رفع ابهام کاربرد زیادی دارد.

تمرین: حاصل $\sqrt{1+\sin 2x} - \sin x$ وقتی $\frac{\pi}{3} < x < \frac{3\pi}{4}$ باشد، کدام است؟

۱) صفر　　۲) $-2\sin x$　　۳) $\cos x$　　۴) $2\sin x - \cos x$

حاصل $= \sqrt{1 + \sin 2x = (\sin x + \cos x)^2} - \sin x = |\underbrace{\sin x + \cos x}_{+}| - \sin x = \cancel{\sin x} + \cos x - \cancel{\sin x}$



حاصل $= \cos x$

گزینه ۳

تمرین: اگر $\sin\alpha-\cos\alpha=\frac{۱}{۲}$ باشد، مقدار $\cos(\frac{۳\pi}{۲}-۲\alpha)$ کدام است؟ (تجربی ۹۵)

۱) $-\frac{۳}{۴}$ ۲) $-\frac{۳}{۸}$ ۳) $\frac{۳}{۸}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

طرفین به توان ۲

$(\sin\alpha-\cos\alpha)^۲=(\frac{۱}{۲})^۲$

$\underbrace{\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha}_{۱}-\underbrace{۲\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{۱}{۴}$

$۱-\sin ۲\alpha=\frac{۱}{۴}$

$-\sin ۲\alpha=\frac{۱}{۴}-۱=-\frac{۳}{۴}$ *

$\cos(\frac{۳\pi}{۲}-۲\alpha)=-\sin ۲\alpha\overset{*}{=}-\frac{۳}{۴}$

مثلاً: فرض کنید $\mathbf{u}$ یک عبارتِ $\mathbf{x}$دار است.

$$\sin u = \sin\alpha \Rightarrow \begin{cases} u = ۲k\pi + \alpha \\ u = ۲k\pi + \pi - \alpha \end{cases}$$

$$\cos u = \cos\alpha \Rightarrow u = ۲k\pi \pm \alpha$$

$$\tan u = \tan\alpha \Rightarrow u = k\pi + \alpha$$

$$\cot u = \cot\alpha \Rightarrow u = k\pi + \alpha$$

تمرین: معادله‌ی زیر را حل کنید.

۱) $\sin ۳x - \sin x = ۰$

$$\sin ۳x = \sin x \Rightarrow \begin{cases} ۳x = ۲k\pi + x \Rightarrow ۲x = ۲k\pi \Rightarrow x = k\pi \\ ۳x = ۲k\pi + \pi - x \Rightarrow x = \dfrac{k\pi}{۲} + \dfrac{\pi}{۴} \end{cases}$$

تمرین: جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $۱ = \dfrac{\sin ۳x}{\cos(\frac{۳\pi}{۲} + x)}$ $= \sin x$، به کدام صورت است؟ (خارج تجربی ۹۳)

۱) $k\pi + \dfrac{\pi}{۴}$ ۲) $۲k\pi \pm \dfrac{\pi}{۴}$ ۳) $۲k\pi \pm \dfrac{۳\pi}{۴}$ ۴) $\dfrac{k\pi}{۲} + \dfrac{\pi}{۴}$

$$\sin(۳x) = \sin x \longrightarrow \begin{cases} ۳x = ۲k\pi + x \longrightarrow x = k\pi \\ ۳x = ۲k\pi + \pi - x \longrightarrow \boxed{x = \dfrac{k\pi}{۲} + \dfrac{\pi}{۴}} \end{cases}$$

$x = k\pi$ مخرج را صفر می‌کند غ ق ق است لذا

گزینه ۴

تمرین: معادله‌ی زیر را حل کنید.

۲) $\sin ۳x + \sin x = ۰$

$$\sin ۳x = -\sin x$$

قرار شد چپ و راست مساوی یک نسبت همنام داشته باشیم (که این‌جا داریم) و هر دو، پشتشون علامت مثبت داشته باشه. این‌جا برای این که از شرّ منفی خلاص بشیم از خاصیت $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ استفاده می‌کنیم یعنی به جای $-\sin x$ می‌نویسیم $\sin(-x)$ پس:

$$\sin \underbrace{۳x}_{u} = \sin(\underbrace{-x}_{\alpha}) \Rightarrow \begin{cases} ۳x = ۲k\pi + (-x) \\ , \\ ۳x = ۲k\pi + \pi - (-x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۴x = ۲k\pi \Rightarrow \boxed{x = \dfrac{k\pi}{۲}} \\ ۲x = ۲k\pi + \pi \Rightarrow \boxed{x = k\pi + \dfrac{\pi}{۲}} \end{cases}$$

$\sin x$

تمرین: مجموع جواب‌های مثلثاتی $\sin 2x + \boxed{\cos(\frac{\pi}{2}-x)} = 0$، در بازه‌ی $[0,2\pi]$ کدام است؟ *(خارج تجربی ۹۶)*

۱) $\frac{14\pi}{3}$ ۲) 4π ۳) $\frac{9\pi}{2}$ ۴) 5π

$\sin(2x) = -\sin x \longrightarrow \sin(2x) = \sin(-x) \longrightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + (-x) \\ 2x = 2k\pi + \pi - (-x) \end{cases}$

$3x = 2k\pi \longrightarrow x = \frac{2k\pi}{3}$ $\quad \frac{2\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}$

k	0	1	2	3
$x=\frac{2k\pi}{3}$	0	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{6\pi}{3}$

$x = 2k\pi + \pi$

k	0	1
x	π	$\cancel{2\pi+\pi}$

مجموع جواب‌ها $= 4\pi + \pi = 5\pi$ گزینه ۴

تمرین: تعداد جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\cos^2(x) - \sin^2(x)\cos(3x) = 1$ در فاصلهٔ $[0,2\pi]$ کدام است؟ *(سراسری تجربی ۱۴۰۰)*

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۶

$-\sin^2 x \cos(3x) = \underbrace{1-\cos^2 x}_{\sin^2 x} \longrightarrow -\sin^2 x \cos(3x) = \sin^2 x \longrightarrow \sin^2 x + \sin^2 x \cos(3x) = 0$

$\sin^2 x(1+\cos 3x) = 0 \begin{cases} \sin^2 x = 0 \longrightarrow \sin x = 0 \quad x = k\pi \\ 1+\cos 3x = 0 \longrightarrow \cos(3x) = -1 \quad 3x = 2k\pi + \pi \longrightarrow 3x = (2k+1)\pi \longrightarrow x = (2k+1)\frac{\pi}{3} \end{cases}$

$x = 0, \pi, 2\pi$

π $\frac{\pi}{3}$ $\frac{5\pi}{3}$

جواب‌ها: $0, \pi, 2\pi, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$ گزینه ۳

تمرین: مجموع جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\sin(\underbrace{x+\frac{\pi}{8}}_{\alpha}) + \cos(\underbrace{x-\frac{3\pi}{8}}_{\beta}) = 1$، در بازهٔ $[0,2\pi]$ برابر کدام است؟ *(خارج ریاضی ۹۵)*

۱) $\frac{3\pi}{4}$ ۲) $\frac{5\pi}{4}$ ۳) $\frac{3\pi}{2}$ ۴) $\frac{7\pi}{4}$

صورت سوال

$\alpha - \beta = (x+\frac{\pi}{8}) - (x - \frac{3\pi}{8}) = \frac{4\pi}{8}$

$\alpha - \beta = \frac{\pi}{2} \longrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} + \beta \longrightarrow \sin\alpha + \cos\beta = 1 \longrightarrow \sin(\frac{\pi}{2}+\beta) + \cos\beta = 1 \longrightarrow \cos\beta + \cos\beta = 1$

$\cos\beta = \frac{1}{2} \longrightarrow \cos\beta = \cos\frac{\pi}{3} \longrightarrow \beta = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \longrightarrow \boxed{x - \frac{3\pi}{8}} = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \longrightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} + \frac{3\pi}{8}$

$x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} + \frac{3\pi}{8}$

k	0
x	$\frac{\pi}{3}+\frac{3\pi}{8}$

$x = 2k\pi - \frac{\pi}{3} + \frac{3\pi}{8}$

k	0
x	$-\frac{\pi}{3}+\frac{3\pi}{8}$

مجموع جواب‌ها $= \frac{6\pi}{8} = \frac{3\pi}{4}$ گزینه ۱

تمرین: مجموع جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\sin^3 x + \cos^3 x = 1 - \frac{1}{2}\sin 2x$، در بازهٔ $[0,2\pi]$ کدام است؟ *(ریاضی ۹۸)*

چاق و لاغر

۱) $\frac{5\pi}{2}$ ۲) $\frac{7\pi}{2}$ ۳) 2π ۴) 3π

$(\sin x + \cos x)(\cancel{\sin^2 x + \cos^2 x}^{\,1} - \underbrace{\cancel{\sin x \cos x}}_{\frac{1}{2}\sin 2x}) = 1 - \frac{1}{2}\sin 2x \xrightarrow{\text{طرفین تقسیم بر } 1-\frac{1}{2}\sin 2x} \sin x + \cos x = 1$

$\sin x, \cos x$ کجای دایره جمع یک است؟

$\sin x = 1, \cos x = 0 \longrightarrow x = \frac{\pi}{2}$

$\sin x = 0, \cos x = 1 \longrightarrow x = 0, 2\pi$

جمع $= \frac{\pi}{2} + 0 + 2\pi = \frac{5\pi}{2}$ گزینه ۱

$a^4+b^4=(a^2+b^2)^2-2a^2b^2$

تمرین: مجموع جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\sin^4 x+\cos^4 x=\frac{1}{2}$، در بازهٔ $[0,2\pi]$، کدام است؟ (خارج ریاضی ۹۸)

۱) $\frac{5\pi}{2}$ ۲) 3π ۳) $\frac{7\pi}{2}$ ۴) 4π

$(\underbrace{\sin^2 x+\cos^2 x}_{1})^2-2\sin^2 x\cos^2 x=\frac{1}{2} \longrightarrow 1-2(\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x)^2=\frac{1}{2} \longrightarrow 1-2(\frac{1}{4}\sin^2 2x)=\frac{1}{2}$

$1-\frac{1}{2}\sin^2 2x=\frac{1}{2} \longrightarrow \sin^2 2x=1 \longrightarrow \sin 2x=1$ یا $\sin 2x=-1$

$2x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$ $\quad$ $2x=2k\pi-\frac{\pi}{2}$

$x=k\pi+\frac{\pi}{4}$ $\quad$ $x=k\pi-\frac{\pi}{4}$

$4\pi=\frac{7\pi}{4}+\frac{3\pi}{4}+\frac{5\pi}{4}+\frac{\pi}{4}=$ مجموع

۴ ✓

$\frac{\pi}{4}$ $\frac{5\pi}{4}$ $\frac{3\pi}{4}$ $\frac{7\pi}{4}$

تمرین: جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $2\tan x.\cos^2 x=1$ به کدام صورت است؟ (خارج تجربی ۸۶)

۱) $k\pi-\frac{\pi}{4}$ ۲) $k\pi+\frac{\pi}{4}$ ۳) $2k\pi-\frac{\pi}{4}$ ۴) $2k\pi+\frac{\pi}{4}$

$2\frac{\sin x}{\cos x \neq 0}.\cos^2 x=1 \longrightarrow 2\sin x\cos x=1 \longrightarrow \sin 2x=1 \longrightarrow 2x=2k\pi+\frac{\pi}{2} \longrightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{4}$

۲ ✓

تمرین: معادله زیر را حل کنید.

۳) $\cos 3x-\cos x=0$

$$\cos\underbrace{3x}_{u}=\cos\underbrace{x}_{\alpha} \Rightarrow 3x=2k\pi\pm x \Rightarrow \begin{cases} 3x=2k\pi+x \Rightarrow 2x=2k\pi \Rightarrow x=k\pi \\ 3x=2k\pi-x \Rightarrow 4x=2k\pi \Rightarrow x=\frac{k\pi}{2} \end{cases}$$

سینوس منفی ـ ناحیه ۴

تمرین: جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $\sin^2 x-\cos^2 x=\sin(\frac{3\pi}{2}+x)$ به کدام صورت است؟ (تجربی ۹۱)

۱) $\frac{k\pi}{3}$ ۲) $\frac{2k\pi}{3}$ ۳) $2k\pi+\frac{\pi}{3}$ ۴) $2k\pi\pm\frac{2\pi}{3}$

$-(\cos^2 x-\sin^2 x)=-\cos x$

$-\cos 2x=-\cos x$

$\cos 2x=\cos x$

$2x=2k\pi\pm x$

$x=2k\pi$

$x=\frac{2k\pi}{3}$

اجتماع $x=\frac{2k\pi}{3}$

۲ ✓

$\boxed{\cos u=\cos\alpha \quad u=2k\pi\pm\alpha}$

تمرین: معادله زیر را حل کنید.

$۴)\ \cos ۳x + \cos x = ۰$

$\cos ۳x = -\cos x$

الان چی‌کار کنم آقا؟ چطوری از شرّ منفی خلاص بشیم؟ آخه کسینوس که خاصیت $\cos(-\alpha) = -\cos\alpha$ رو نداره ☹ ایرادی نداره از یه خاصیت دیگه می‌توانیم واسش استفاده کنیم. کسینوسه دیگه! همیشه ساز مخالف میزنه. ببینید:

$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$

پس به جای $-\cos\alpha$ بذارید $\cos(\pi-\alpha)$. به همین راحتی ☺

$$\cos ۳x = -\cos x \Rightarrow \cos ۳x = \cos(\pi - x) \Rightarrow ۳x = ۲k\pi \pm (\pi - x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۳x = ۲k\pi + \pi - x \Rightarrow ۴x = ۲k\pi + \pi \Rightarrow \boxed{x = \dfrac{k\pi}{۲} + \dfrac{\pi}{۴}} \\ ۳x = ۲k\pi - \pi + x \Rightarrow ۲x = ۲k\pi - \pi \Rightarrow \boxed{x = k\pi - \dfrac{\pi}{۲}} \end{cases}$$

تمرین: جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $\cos ۳x + \cos x = ۰$ با شرط $\cos x \neq ۰$ کدام است؟ (خارج تجربی ۹۳ و ۹۸)

۱) $\dfrac{k\pi}{۲} + \dfrac{\pi}{۴}$ ۲) $\dfrac{k\pi}{۲} + \dfrac{\pi}{۸}$ ۳) $k\pi - \dfrac{\pi}{۴}$ ۴) $k\pi + \dfrac{\pi}{۴}$

$\cos ۳x = -\cos x \longrightarrow \cos ۳x = \cos(\pi - x) \longrightarrow ۳x = ۲k\pi \pm (\pi - x)$

$۳x = ۲k\pi + \pi - x \longrightarrow x = \frac{k\pi}{۲} + \frac{\pi}{۴}$ ①✓

$۳x = ۲k\pi - \pi + x \longrightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{۲}$ $\cos x = ۰$ با شرط سازگار نیست و غ ق ق

اگر دو طرف هم‌نسبت نباشن ولی توانشون (یک) باشد باید کاری کنیم که هم‌نسبت بشن. فقط کافیه از این روابط استفاده کنیم:

$\sin\alpha = \cos(\frac{\pi}{۲} - \alpha)$

$\cos\alpha = \sin(\frac{\pi}{۲} - \alpha)$

$\tan\alpha = \cot(\frac{\pi}{۲} - \alpha)$

$\cot\alpha = \tan(\frac{\pi}{۲} - \alpha)$

تمرین: معادله زیر را حل کنید.

۵) $\sin ۳x - \cos ۲x = ۰$

$$\sin ۳x = \cos ۲x \Rightarrow \sin \underbrace{۳x}_{u} = \sin\underbrace{(\frac{\pi}{۲} - ۲x)}_{\alpha} \Rightarrow \begin{cases} ۳x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲} - ۲x \Rightarrow ۵x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲} \Rightarrow \boxed{x = \frac{۲k\pi}{۵} + \frac{\pi}{۱۰}} \\ ۳x = ۲k\pi + \pi - (\frac{\pi}{۲} - x) \Rightarrow \boxed{x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲}} \end{cases}$$

تمرین: جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\sin(۲x - \frac{\pi}{۴}) = \cos(x + \frac{\pi}{۴})$ با شرط $x \neq k\pi$ که در آن k یک عدد صحیح است، کدام است؟

(تجربی ۹۹)

$\cos u = \cos \alpha$
$u = ۲k\pi \pm \alpha$

$\cos(\frac{\pi}{۲} - (۲x - \frac{\pi}{۴}))$

۱) $\frac{k\pi}{۳}$ ۲) $\frac{۲k\pi}{۳}$ ۳) $\frac{۲k\pi}{۳} - \frac{\pi}{۶}$ ۴) $\frac{۲k\pi}{۳} + \frac{\pi}{۶}$

$\cos(\frac{\pi}{۲} - ۲x + \frac{\pi}{۴}) = \cos(x + \frac{\pi}{۴})$

$\begin{cases} \frac{\pi}{۲} - ۲x + \cancel{\frac{\pi}{۴}} = ۲k\pi + x + \cancel{\frac{\pi}{۴}} \rightarrow -۲k\pi + \frac{\pi}{۲} = ۳x \\ \frac{\pi}{۲} - ۲x + \cancel{\frac{\pi}{۴}} = -۲k\pi - x - \cancel{\frac{\pi}{۴}} \\ \pi - ۲k\pi = x \rightarrow x = ۲k\pi + \pi \end{cases}$

$۲k\pi + \frac{\pi}{۲} = ۳x$

$\frac{۲k\pi}{۳} + \frac{\pi}{۶} = x$ گزینه چهار

جواب از جنس $x = k\pi$ است که در صورت سوال گفته غ ق ق

هرجا $-۲k\pi$ دیدی با $-k\pi$
دیدی $۲k\pi$ با $k\pi$ بذار

تمرین: معادله زیر را حل کنید.

۶) $\sin ۳x + \cos x = ۰$

این‌طور موقع‌ها که یه دونه از این‌ها منفی داره کاری کن منفی بیاد پشت سینوس. اینطوری راحت‌تر از شرّ منفی خلاص می‌شی. ببین:

$\sin ۳x = -\cos x$

راه طولانی: چون اول باید منفیِ پشت کسینوس رو از بین ببری بعدش کسینوس رو تبدیل به سینوس کنی. $\Rightarrow$

راه خوبتر: $\cos x = -\sin ۳x = \sin(-۳x)$

$$\cos x = \cos(\frac{\pi}{۲} - (-۳x)) \Rightarrow \cos x = \cos(\frac{\pi}{۲} + ۳x) \Rightarrow x = ۲k\pi \pm (\frac{\pi}{۲} + ۳x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲} + ۳x \Rightarrow -۲x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲} \Rightarrow x = -k\pi - \frac{\pi}{۴} \xrightarrow{k\pi \text{ فرقی با } -k\pi \text{ نداره}} \boxed{x = k\pi - \frac{\pi}{۴}} \\ x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۲} - ۳x \Rightarrow ۴x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۲} \Rightarrow \boxed{x = \frac{k\pi}{۲} - \frac{\pi}{۸}} \end{cases}$$

تمرین: جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $۲\cos^۲ x + ۲\sin x \cos x = ۱$، به کدام صورت است؟

(تجربی ۹۴)

۱) $\frac{k\pi}{۲} - \frac{\pi}{۸}$ ۲) $\frac{k\pi}{۲} + \frac{\pi}{۸}$ ۳) $k\pi - \frac{\pi}{۸}$ ۴) $k\pi + \frac{\pi}{۸}$

$\cos^۲ x - \sin^۲ x = \cos ۲x$
$\cos^۲ x - (۱ - \cos^۲ x) = \cos ۲x$
$۲\cos^۲ x - ۱ = \cos ۲x$

$\underbrace{۲\sin x \cos x}_{} = \underbrace{۱ - ۲\cos^۲ x}_{}$

$\sin ۲x = -(۲\cos^۲ x - ۱)$ فرمول
$\sin ۲x = -\cos ۲x$
$-\sin(۲x) = \cos ۲x$
$\sin(-۲x) = \cos ۲x$

داریم: $\sin(-۲x) = \cos(\frac{\pi}{۲} - (-۲x)) = \cos(\frac{\pi}{۲} + ۲x)$

$\sin(-۲x) = \cos ۲x$
$\cos(\frac{\pi}{۲} + ۲x) = \cos ۲x$
$\cos u = \cos \alpha$
$u = ۲k\pi \pm \alpha$

$\begin{cases} \frac{\pi}{۲} + \cancel{۲x} = ۲k\pi + \cancel{۲x} \\ \frac{\pi}{۲} + ۲x = ۲k\pi - ۲x \rightarrow ۴x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۲} \rightarrow x = \frac{k\pi}{۲} - \frac{\pi}{۸} \end{cases}$

۱

معادلات تانژانتی

تمرین: معادله زیر را حل کنید و تعداد جواب‌ها را در فاصلهٔ $[\circ,۲\pi]$ مشخص کنید.

۷) $\tan ۳x - \tan x = \circ$

$$\tan \underbrace{۳x}_{u} = \tan \underbrace{x}_{\alpha} \Rightarrow ۳x = k\pi + x \Rightarrow ۲x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{۲}$$

k	۰	۱	۲	۳	۴
x	۰	$\boxed{\frac{\pi}{۲}}$ ↓ غ.ق.ق	π	$\boxed{\frac{۳\pi}{۲}}$ ↓ غ.ق.ق	۲π

۸) $\tan ۳x + \tan x = \circ \Rightarrow \tan ۳x = -\tan x$

واسه تانژانت هم مثل سینوس می‌تونی از خاصیت $\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$ استفاده کنی:

$$\tan \underbrace{۳x}_{u} = \tan(\underbrace{-x}_{\alpha}) \Rightarrow ۳x = k\pi + (-x) \Rightarrow ۴x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{۴}$$

k	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸
x	۰	$\frac{\pi}{۴}$	$\boxed{\frac{\pi}{۲}}$ ↓ غ.ق.ق	$\frac{۳\pi}{۴}$	π	$\frac{۵\pi}{۴}$	$\boxed{\frac{۳\pi}{۲}}$ ↓ غ.ق.ق	$\frac{۷\pi}{۴}$	۲π

کتانژانت هم دقیقاً مثل تانژانتِ.

تمرین: جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $\tan x \tan ۳x = ۱$، کدام است؟ *(تجربی ۹۷ و ریاضی ۹۹)*

۱) $\frac{k\pi}{۴}$ ۲) $\frac{k\pi}{۲} + \frac{\pi}{۸}$ ۳) $\frac{k\pi}{۲} + \frac{۳\pi}{۸}$ ۴) $\frac{k\pi}{۴} + \frac{\pi}{۸}$

$\tan(\overset{u}{۳x}) = \frac{1}{\tan x} = \cot x = \tan(\overset{\alpha}{\frac{\pi}{۲} - x})$

$\tan u = \tan \alpha \longrightarrow u = k\pi + \alpha$

$۳x = k\pi + \frac{\pi}{۲} - x \longrightarrow ۴x = k\pi + \frac{\pi}{۲} \longrightarrow x = \frac{k\pi}{۴} + \frac{\pi}{۸}$

گ۴

تمرین: معادلات زیر را حل کنید.

۱) $\sin x + \sqrt{۳} \cos x = \circ$

$$\xrightarrow{\div \cos x} \tan x + \sqrt{۳} = \circ \Rightarrow \tan x = -\sqrt{۳} = \tan(-\frac{\pi}{۳}) \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{۳}$$

اگر سینوس و کسینوس توان دو داشتند، می‌تونیم از روش‌های حل معادله درجه ۲ استفاده کنیم.

تمرین: از معادلهٔ $۲\sin^{۲} ۲x - \sin ۲x - ۱ = ۰$ برای x در فاصلهٔ صفر تا ۲π چند جواب به‌دست می‌آید؟

۱) ۶ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

فرض

$\sin 2x = t \longrightarrow 2t^2 - t - 1 = 0 \xrightarrow[\text{جمع ضرایب صفر}]{} \begin{cases} t = 1 = \sin 2x \\ t = -\frac{1}{2} = \sin 2x \end{cases}$

$\sin(-\frac{\pi}{6}) = \sin 2x$

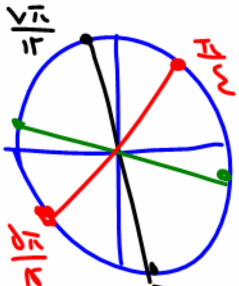
$2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \longrightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4}$

$\begin{cases} 2x = 2k\pi + (-\frac{\pi}{6}) \\ 2x = 2k\pi + \pi - (-\frac{\pi}{6}) \end{cases}$

$\begin{cases} x = k\pi - \frac{\pi}{12} \\ x = k\pi + \frac{7\pi}{12} \end{cases}$

گزینه یک

$\frac{11\pi}{12} = \pi - \frac{\pi}{12}$



$\frac{7\pi}{12}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{4}$

$2\pi - \frac{\pi}{12} = \frac{23\pi}{12}$

$\pi + \frac{7\pi}{12} = \frac{19\pi}{12}$

$$\begin{cases} (1)\ \sin^{2} u = \sin^{2} \alpha \\ (2)\ \cos^{2} u = \cos^{2} \alpha \\ (3)\ \tan^{2} u = \tan^{2} \alpha \\ (4)\ \cot^{2} u = \cot^{2} \alpha \end{cases} \Rightarrow \boxed{u = k\pi \pm \alpha}$$

تمرین: جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $\cos ۲x + ۲\cos^{۲} x = ۰$ کدام است؟ (تجربی ۹۶)

۱) $۲k\pi \pm \frac{\pi}{۳}$ ۲) $۲k\pi \pm \frac{۲\pi}{۳}$ ۳) $k\pi \pm \frac{\pi}{۳}$ ۴) $k\pi \pm \frac{\pi}{۶}$

فرمول

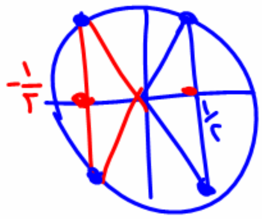
$(\cos^2 x - \sin^2 x) + 2\cos^2 x = 0$

$\cos^2 x - (1 - \cos^2 x) + 2\cos^2 x = 0$

$4\cos^2 x = 1$

$\cos^2 x = \frac{1}{4}$

$\cos x = \pm\frac{1}{2}$



$-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$

$x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ گزینه ۳

یادت باشه: حواست به رادیکال فرجه زوج باشه.

تمرین: تمام جواب‌های معادله‌ی $\sqrt{\sin x} = \sqrt{\cos x}$ کدام است؟

۱) $x = 2k\pi + \frac{\pi}{4}$ ۲) $x = k\pi + \frac{\pi}{4}$ ۳) $x = 2k\pi$ ۴) $x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$

طرفین به توان ۲

$\sin x = \cos x$

جواب: $x = 2k\pi + \frac{\pi}{4}$

گزینه یک

غ.ق.ق زیرا $\sin$, $\cos$ منفی بوده زیر $\sqrt{\ }$ نمی‌توانند بروند.

تمرین: جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $\frac{\sin 3x}{\sin x} = 2\cos^2 x$ کدام است؟ *(سراسری ریاضی ۹۳)*

۱) $\frac{k\pi}{2}$ ۲) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$ ۳) $k\pi - \frac{\pi}{4}$ ۴) $k\pi + \frac{\pi}{4}$

پاسخ: گزینه‌ی «۲»

$$\frac{3\sin x - 4\sin^3 x}{\sin x} = 2\underbrace{\cos^2 x}$$

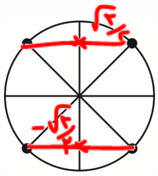
حالا تفکیک:

$$3 - 4\sin^2 x = 2(1 - \sin^2 x)$$

$$3 - 4\sin^2 x = 2 - 2\sin^2 x \Rightarrow -2\sin^2 x = -1 \Rightarrow \sin^2 x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin^2 x = (\frac{\sqrt{2}}{2})^2$$

$$\Rightarrow \sin^2 x = (\sin\frac{\pi}{4})^2 \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{4}$$

یک جواب

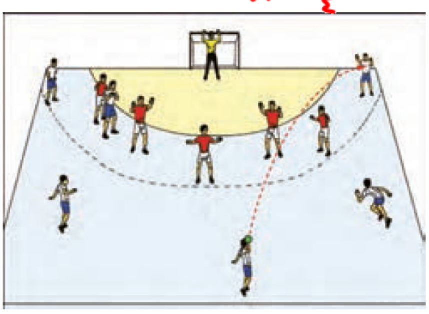


$$\boxed{x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}}$$

طراح جفتش رو توی گزینه‌ها گذاشته، ولی از روی دایره تصمیم می‌گیریم.

چهار نقطه اصلی دایره که $\frac{\pi}{4}$ در جهت مثلثاتی چرخیده

گزینه‌ی «۲» درسته. ضمناً چون این جواب‌ها مخرج کسر اصلی رو صفر نمی‌کنن پس اوکیه!



مثال ۱۳۳: یک بازیکن هندبال توپ را با سرعت $16\ m/s$ برای هم‌تیمی خود که در ۱۲/۸ متری او قرار دارد پرتاب می‌کند. اگر رابطه بین سرعت توپ v (برحسب متر بر ثانیه)، مسافت طی‌شده افقی d (برحسب متر) و زاویه‌ی پرتاب θ به صورت زیر باشد، آن‌گاه زاویه‌ی پرتاب توپ چه‌قدر بوده است؟

$$d = \frac{v^2 \sin 2\theta}{g}$$

$g = 10$

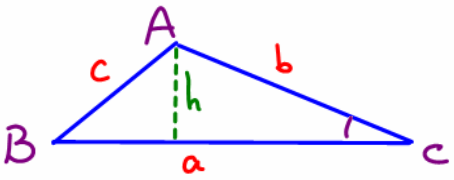
از رابطه‌ی داده‌شده به دست می‌آید:

$$۱۲/۸=\frac{(۱۶)^۲\sin ۲\theta}{۱۰}\Rightarrow \sin ۲\theta=\frac{۱۲/۸\times ۱۰}{۲۵۶}\Rightarrow \sin ۲\theta=\frac{۱}{۲}\Rightarrow \begin{cases} ۲\theta=۲k\pi+\frac{\pi}{۶} & k\in\mathbb{Z}\\ ۲\theta=(۲k+۱)\pi-\frac{\pi}{۶} & k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

با توجه به شکل، جواب $\theta=\frac{\pi}{۱۲},\frac{۵\pi}{۱۲}$ قابل قبول می‌باشد.

مثال ۱۳۴: مثلثی با مساحت ۳ سانتی‌متر مربع مفروض است. اگر اندازه‌ی دو ضلع آن به ترتیب ۲ و ۶ سانتی‌متر باشند، آن‌گاه چند مثلث با این خاصیت‌ها می‌توان ساخت؟ دو تا

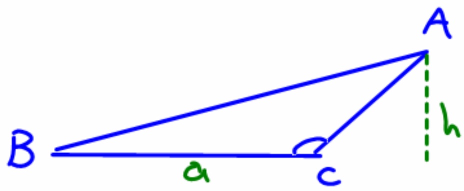
$S=\frac{1}{2}ab\sin\hat{C}\longrightarrow ۳=\frac{1}{2}(۲)(۶)\sin\hat{C}$



$\frac{1}{2}=\sin\hat{C}$

$\sin\hat{C}=\sin\frac{\pi}{۶}$

$C=۳۰^\circ$ یا ۱۵۰



یادت باشه: حواست به ریشه‌ی مخرج باشه.

تمرین: معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$\frac{۱+\sin x}{\underbrace{\cancel{۱+\cos ۲x}}_{۲\cos^۲ x}}=\frac{۱}{۲}$$

$\longrightarrow \frac{1+\sin x}{2\cos^2 x}=\frac{1}{2}\longrightarrow 1+\sin x=\cos^2 x$

$1+\sin x=1-\sin^2 x$

$1+\cancel{\sin x}=(1-\sin x)\cancel{(1+\sin x)}$

$1=1-\sin x$

$\sin x=0\longrightarrow \boxed{x=k\pi}$

$1+\sin x=0$

$\sin x=-1$

مخرج: $x=2k\pi-\frac{\pi}{2}$ غ ق ق

دوره تناوب

به‌ازای هر

f متناوب است اگر با افزودن یک مقدار ناصفر به x عرض (y) تابع عوض نشود و دو شرط زیر داشته باشد:

۱) $\forall x \in D_f \Rightarrow x+T \in D_f$ ‏ ۲) $f(x+T)=f(x) \quad T \neq 0$

مثلاً $\sin\frac{\pi}{6}$ با $\sin(2\pi+\frac{\pi}{6})$ برابر و هر دو $\frac{1}{2}$ هستند. در حالی که به x ، $2\pi = 6/28\ldots$ افزوده‌ایم.

هر مضربی از دوره‌ی تناوب، خود دوره‌ی تناوب است که کوچک‌ترین مقدار مثبت دوره تناوب را، دوره تناوب اصلی می‌گوییم.

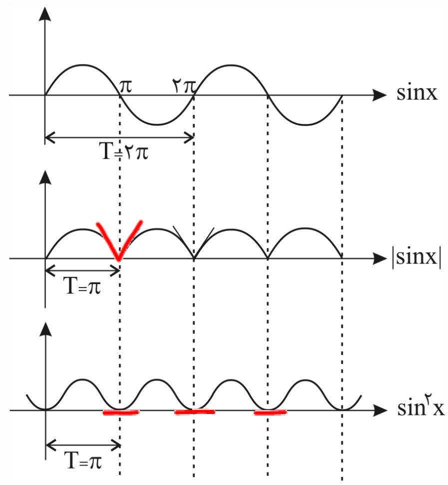
تذکر: تابع ثابت، متناوب است و دوره تناوبش هر عدد حقیقی است ولی چون کوچک‌ترین عدد حقیقی وجود ندارد، کوچک‌ترین دوره تناوب ندارد.

۱) دوره تناوب $f(x)$ اگر T باشد، آن‌گاه دوره‌ی تناوب $af(x+b)+k$ نیز همان T هست.

۲) تابع متناوب، یک به یک و معکوس‌پذیر نیست.

۳) دوره تناوب $\sin^{2k+1} ax$ و $\cos^{2k+1} ax$ برابر است با: $T=\frac{2\pi}{|a|}$

دوره تناوب $\tan ax$ و $\cot ax$ به هر توان (چه زوج، چه فرد) و $|\tan ax|$ و $|\cot ax|$ به هر توان $T=\frac{\pi}{|a|}$ است.



$$\begin{cases} \sin^{2k} ax \\ \cos^{2k} ax \\ |\sin ax| \text{ (توان چه زوج و چه فرد باشد)} \\ |\cos ax| \text{ (توان چه زوج و چه فرد باشد)} \end{cases}$$

تمرین: اگر دورهٔ تناوب تابع $f(x)=2\cos(mx+\frac{m}{2})$ برابر $\frac{4}{3}$ باشد، مقدار $f(0)$ کدام است؟ $(m>0)$

۱) $-\sqrt{3}$ ‏ ۲) $\sqrt{3}$ ‏ ۳) $\sqrt{2}$ ‏ ۴) $-\sqrt{2}$

$\frac{2\pi}{|m|}=\frac{4}{3}$

$\frac{2\pi}{m}=\frac{4}{3} \to m=3\left(\frac{2\pi}{4}\right)=\frac{3\pi}{2}$

$f(x)=2\cos\left(\frac{3\pi}{2}x+\frac{3\pi}{4}\right)$

$f(0)=2\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)$

$=2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\sqrt{2}$ جواب

$\frac{3\pi}{4}$

تمرین: دورهٔ تناوب تابع $f(x)=\dfrac{\cos ۲x\cos ۴x}{\tan x+\cot x}$ کدام است؟

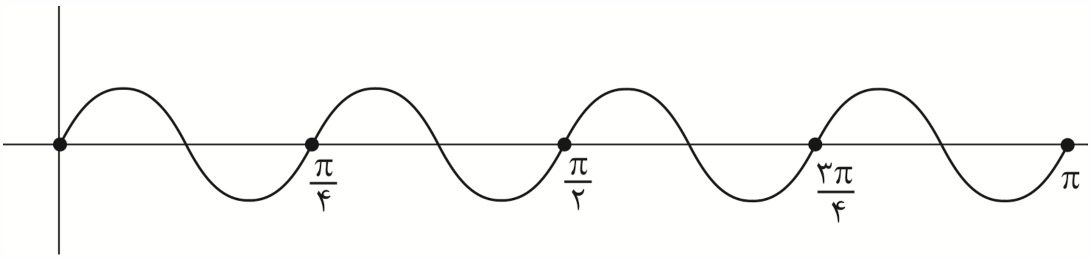
۱) π ۲) $\dfrac{\pi}{۲}$ ۳) $\dfrac{\pi}{۴}$ ۴) $\dfrac{\pi}{۸}$

پاسخ: $f(x)=\dfrac{\cos ۲x\cos ۴x}{\dfrac{۲}{\sin ۲x}}=\dfrac{\sin ۲x\cos ۲x\cos ۴x}{۲}=\dfrac{\dfrac{۱}{۲}\sin ۴x\cos ۴x}{۲}=\dfrac{\dfrac{۱}{۲}\times\dfrac{۱}{۲}\sin ۸x}{۲}=\dfrac{۱}{۸}\sin ۸x$

$\sin ۲x = ۰ : \quad ۲x = k\pi \rightarrow x = \dfrac{k\pi}{۲}$ حذف

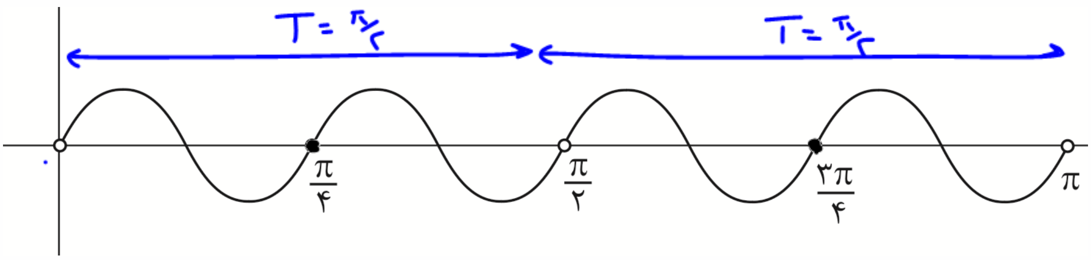
در حالت معمول $T=\dfrac{۲\pi}{۸}=\dfrac{\pi}{۴}$

بنابراین به این شکل می‌رسیم:



ولی باید توجه کنید که به علت حضور $\tan x$ و $\cot x$ در مخرج کسر $x\neq\dfrac{k\pi}{۲}$ می‌باشد. پس باید این نقاط توخالی باشند:

دقت کنید تابع در ریشه‌های مخرج حذف $x=\dfrac{k\pi}{۲}$ ت.ن است

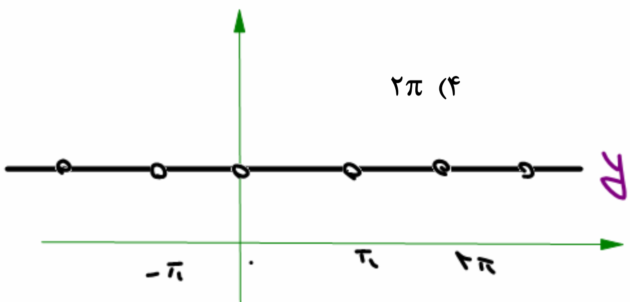


اکنون از شکل مشخص است که $T=\dfrac{\pi}{۲}$ است نه $\dfrac{\pi}{۴}$. جالب این است که در خود آزمون، این سوال به اشتباه پاسخ داده شده است. گزینهٔ (۲) صحیح است.

فاصله ۲ حذف متوالی T است

تمرین: دورهٔ تناوب $f(x)=\dfrac{\sin x}{\sin x}$ کدام است؟

۱) $\dfrac{\pi}{۲}$ ۲) π ۳) $\dfrac{۳\pi}{۲}$ ۴) ۲π



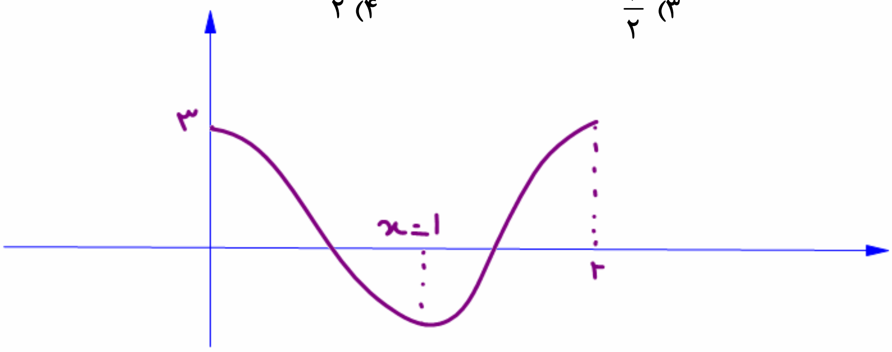
$y=\dfrac{\sin x}{\sin x}=۱$

$T=\pi$

فاصله دو حذف متوالی دوره تناوب است.

تمرین: اگر دورهٔ تناوب تابع $y=3\cos ax$ برابر ۲ باشد، اولین نقطه min این تابع با طول مثبت کدام است؟

۱) ۱   ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) ۲



تمرین: تابع $y=-\frac{1}{2}\sin(3\pi x)$ در بازهٔ $[-\frac{1}{2},1]$ چند بار بیشترین مقدار را دارد؟ (قلم‌چی ۹۸)

۱) ۱   ۲) ۲   ۳) ۳   ۴) ۴

طول بازه = انتها - ابتدا

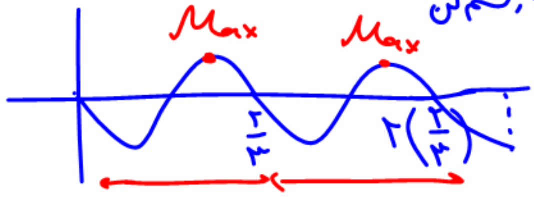
$1-(-\frac{1}{2})=\frac{3}{2}$

$T=\frac{2\pi}{|3\pi|}=\frac{2}{3}$

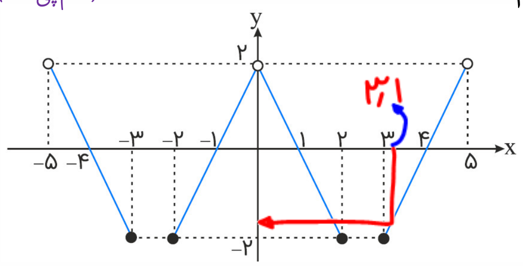
رسم کن

باید دید طول بازه چند برابر $T=\frac{2}{3}$ است؟

$\frac{\frac{3}{2}}{\frac{2}{3}}=\frac{9}{4}=\frac{8}{4}+\frac{1}{4}=2{,}25$



تمرین: قسمتی از نمودار تابع متناوب $y=f(x)$ به شکل زیر است. $f(128/1)$ کدام است؟ (قلم‌چی ۹۸)



۱) ۱/۸

۲) ۱/۸-

۳) ۰/۲-

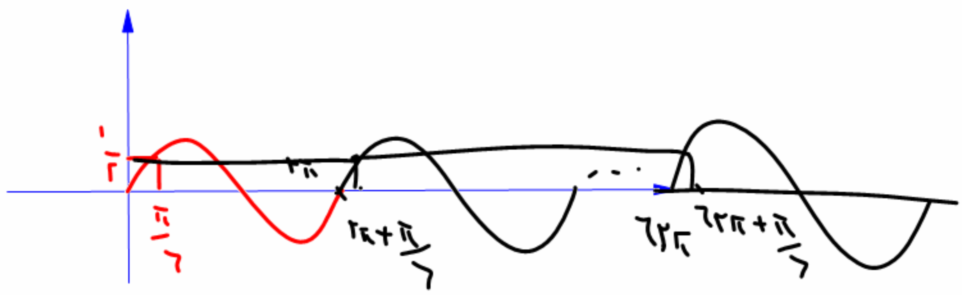
۴) تعریف‌نشده

می‌بینیم $T=5$ است، ۱۲۸٫۱

$128{,}1=\underbrace{25(T=5)}_{125}+3{,}1$

$f(128{,}1)=f(25(5)+3{,}1)=f(3{,}1)=$ عددی کمی بیشتر از ۲- که گزینه ۳ درسته

نکته: $f(x+nT)=f(x)$ ، $n\in\mathbb{N}$



نقاط مهم دایره: $(k\in\mathbb{Z})$

$x=2k\pi$

$x=(2k+1)\pi$

$x=k\pi$

$x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$

$x=2k\pi-\frac{\pi}{2}$

$x=k\pi+\frac{\pi}{2}$

معادلات خاص:

$\begin{cases}\cos u=-1\\ u=2k\pi+\pi\end{cases}$ ، $\begin{cases}\cos u=1\\ u=2k\pi\end{cases}$ ، $\begin{cases}\cos u=0\\ u=k\pi+\frac{\pi}{2}\end{cases}$ ، $\begin{cases}\sin u=-1\\ u=2k\pi-\frac{\pi}{2}\end{cases}$ ، $\begin{cases}\sin u=1\\ u=2k\pi+\frac{\pi}{2}\end{cases}$ ، $\begin{cases}\sin u=0\\ u=k\pi\end{cases}$

(الف) جواب کلی $\sin(3x)=0$ کدام است؟ (ب) در بازه $[0, 2\pi]$ چند جواب دارد؟ (ج) جواب‌های این معادله روی دایره مثلثاتی چه چیزی را نشان می‌دهند؟

$\begin{cases}\sin u=0\\ u=k\pi\end{cases}$

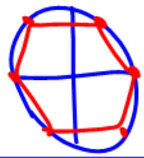
$\sin(3x)=0$

$3x=k\pi \longrightarrow x=\frac{k\pi}{3}$ (الف) جواب کلی

$k\in\mathbb{Z}$	0	1	2	3	4	5	6
$x=\frac{k\pi}{3}$	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{3}=\pi$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{6\pi}{3}=2\pi$

(ب) ۷ جواب در بازه $[0, 2\pi]$

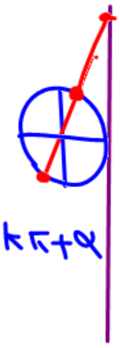
(ج) رئوس یک ۶ ضلعی منتظم (امسال)



---

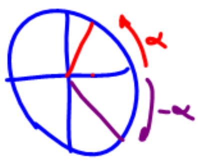
۴ معادله اصلی:

$\tan \underset{}{\overset{\text{این}}{u}}=\tan \overset{\text{اون}}{\alpha}$



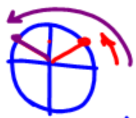
$u=k\pi+\alpha$

$\cos \overset{\text{این}}{u}=\cos \overset{\text{اون}}{\alpha}$



$u=2k\pi\pm\alpha$

$\sin \overset{\text{این}}{u}=\sin \overset{\text{اون}}{\alpha}$



$\overset{\text{این}}{u}=2k\pi+\overset{\text{اون}}{\alpha}$

$\overset{\text{این}}{u}=\underbrace{2k\pi+\pi}-\overset{\text{اون}}{\alpha}$

$(2k+1)\pi-\alpha$

معادلات زیر را حل کنید و جواب های کلی را بنویسید:

ب) $\sin(3x)+\sin x=0$

$\sin(3x)=-\sin x$

$\sin(\underset{\text{این}\ u}{3x})=\sin(\underset{\text{اون}\ \alpha}{-x})$

$\begin{cases}3x=2k\pi+(-x)\\ 3x=2k\pi+\pi-(-x)\end{cases}$

$\begin{cases}x=\frac{k\pi}{2}\\ x=k\pi+\frac{\pi}{2}\end{cases}$ اجتماع $\longrightarrow$

جواب نهایی: $x=\frac{k\pi}{2}$

الف) $\sin(3x)-\sin x=0$

$\sin(\underset{\text{این}\ u}{3x})=\sin(\underset{\text{اون}\ \alpha}{x})$

$\begin{cases}3x=2k\pi+x\\ 3x=2k\pi+\pi-x\end{cases}$

جواب کلی اجتماع $\begin{cases}x=\frac{2k\pi}{2}=k\pi\\ x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\end{cases}$

این ۲ دسته جواب است.

ج) $\cos(3x) - \cos x = 0$

$\cos(3x) = \cos x$

این u اون α

$3x = 2k\pi \pm x$

$$\begin{cases} 3x = 2k\pi + x \\ 2x = 2k\pi \\ 3x = 2k\pi - x \\ 4x = 2k\pi \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = k\pi \\ x = \dfrac{k\pi}{2} \end{cases}$$

اجتماع

$x = \dfrac{k\pi}{2}$ جواب نهایی

د) $\cos(3x) + \cos x = 0$

$\cos(3x) = -\cos x$

$\cos(3x) = \cos(\pi - x)$

$\overset{\text{یا}}{=} \cos(\pi + x)$

$\pi - x$, x, $\pi + x$

فرقی نداره کدوم رو بذاری جواب آخر یکی در می‌آید.

این u اون α

$\cos(3x) = \cos(\pi - x)$

$3x = 2k\pi \pm (\pi - x)$

$$\begin{cases} 3x = 2k\pi + \pi - x \\ 3x = 2k\pi - \pi + x \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x = 2k\pi + \pi \\ 2x = 2k\pi - \pi \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{k\pi}{2} + \dfrac{\pi}{4} \\ x = k\pi - \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

جواب نهایی اجتماع هر ۲ دسته جواب است.

ه) $\tan(2x) = \tan x$

این u اون α

$u = k\pi + \alpha$

$2x = k\pi + x$

$x = k\pi$

دقت کنید که $\tan x$ و $\tan 2x$ ~~کسر~~ مخرجشان نباید صفر شود.

$\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x = 0}$ $x \neq k\pi + \dfrac{\pi}{2}$

$\tan 2x = \dfrac{\sin 2x}{\cos 2x = 0}$ $2x \neq k\pi + \dfrac{\pi}{2}$ $x \neq \dfrac{k\pi}{2} + \dfrac{\pi}{4}$

هیچ کدام از جواب‌های $x = k\pi$ مخرج‌ها را صفر نمی‌کند و $x = k\pi$ جواب است.

و) $\tan(2x) + \tan x = 0$

$\tan(2x) = -\tan x$

$\tan(2x) = \tan(-x)$

این u اون α

$2x = k\pi + (-x)$

$3x = k\pi$

جواب: $x = \dfrac{k\pi}{3}$

ز) $3\cos^2 x - 2\sin x + 2 = 0$

$3(1 - \sin^2 x) - 2\sin x + 2 = 0$

$3 - 3\sin^2 x - 2\sin x + 2 = 0$

$3\sin^2 x + 2\sin x - 5 = 0$

فرض $\sin x = t$

$3t^2 + 2t - 5 = 0$ جمع ضرایب صفر

$$\begin{cases} t = 1 = \sin x \\ t = -\dfrac{5}{3} = \sin x \quad \text{غ ق ق} \end{cases}$$

$\boxed{x = 2k\pi + \dfrac{\pi}{2}}$