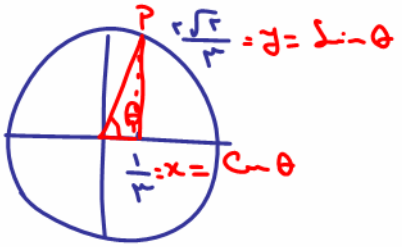
تمرین: اگر زاویه‌ی θ، دایره‌ی مثلثاتی را در نقطه‌ی $P(\frac{۱}{۳},\frac{۲\sqrt{۲}}{۳})$ قطع کند، نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ی θ را بیابید.

پاسخ:



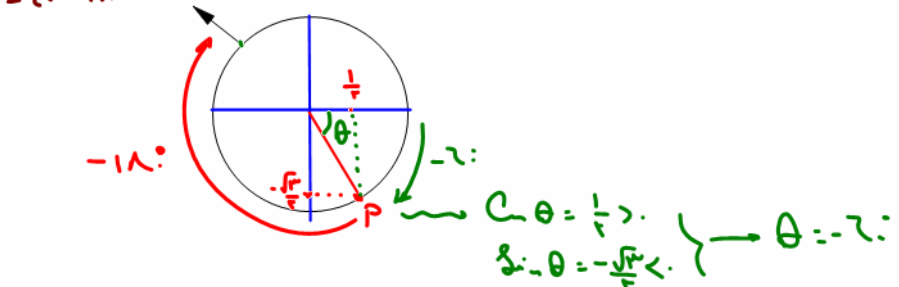
$$P(\frac{۱}{۳},\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}) = P(\cos\theta,\sin\theta)$$

پس: $x=\cos\theta=\frac{۱}{۳}\ ,\ y=\sin\theta=\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}$

از طرفی: $\tan\theta=\frac{y}{x}=۲\sqrt{۲}\ ,\ \cot\theta=\frac{x}{y}=\frac{۱}{۲\sqrt{۲}}$

تمرین: نقطه‌ی $P(\frac{۱}{۲},\frac{-\sqrt{۳}}{۲})$ روی دایره‌ی مثلثاتی را ۱۸۰° در جهت حرکت عقربه‌های ساعت حول مبدأ مختصات دوران می‌دهیم. نقطه‌ی جدید چه زاویه‌ای بر روی دایره‌ی مثلثاتی به وجود می‌آورد؟

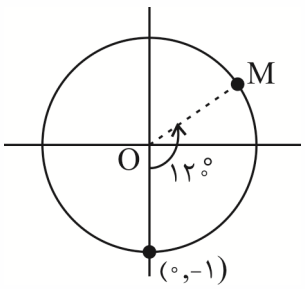
۱) -۲۴۰° ۲) ۲۴۰° ۳) ۱۳۵° ۴) -۱۲۰°



تمرین: نقطه‌ی $(۰,-۱)$ روی دایره‌ی مثلثاتی را حول مبدأ مختصات به اندازه‌ی ۱۲۰° در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت دوران می‌دهیم. مختصات نقطه‌ی جدید کدام است؟

۱) $(\frac{\sqrt{۳}}{۲},\frac{۱}{۲})$ ۲) $(\frac{-\sqrt{۳}}{۲},\frac{-۱}{۲})$ ۳) $(\frac{-\sqrt{۲}}{۲},\frac{۱}{۲})$ ۴) $(\frac{\sqrt{۳}}{۲},\frac{-۱}{۲})$

پاسخ: گزینه‌ی «۱» ـ نقطه‌ی $(۰,-۱)$ روی دایره‌ی مثلثاتی مطابق با شکل زیر است. اگر آن را ۱۲۰° در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت دوران دهیم، به نقطه‌ی M در ناحیه‌ی اول می‌رسیم.

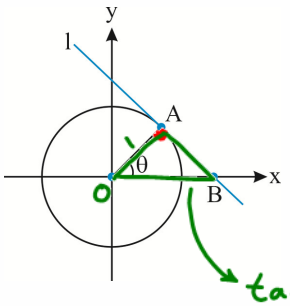


OM با محور طول‌ها، زاویه‌ی ۳۰° می‌سازد، بنابراین:

$$\begin{cases} x_M=\cos\theta \Rightarrow x_M=\cos۳۰^\circ=\frac{\sqrt{۳}}{۲} \\ y_M=\sin\theta \Rightarrow y_M=\sin۳۰^\circ=\frac{۱}{۲} \end{cases}$$

لذا $M(\frac{\sqrt{۳}}{۲},\frac{۱}{۲})$.

تمرین: در دایرهٔ مثلثاتی زیر، اندازهٔ AB کدام است؟ (خط l بر دایره مماس است.)



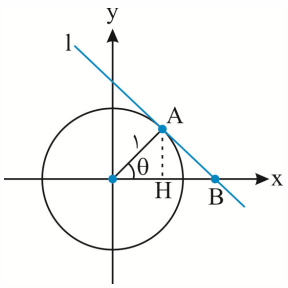
۱) $\cos\theta$

۲) $\frac{۱}{\cos\theta}$

۳) $\tan\theta$

۴) $\frac{۱}{\tan\theta}$

پاسخ: گزینهٔ «۳» ـ خط مماس بر دایره بر شعاع عمود است. حالا اگر از نقطهٔ A عمود بر محور طول‌ها رسم کنیم، طبق روباط طولی در مثلث قائم‌الزاویه داریم:



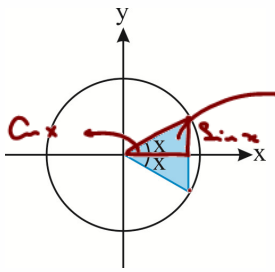
$$(۱)^۲ = OH \times OB \xrightarrow{OH=\cos\theta} ۱ = \cos\theta \times OB \Rightarrow OB = \frac{۱}{\cos\theta}$$

پس طبق قضیهٔ فیثاغورس در مثلث OAB می‌توان نوشت:

$$OB^۲ = (۱)^۲ + AB^۲ \Rightarrow \frac{۱}{\cos^۲\theta} = ۱ + AB^۲$$

$$\Rightarrow AB^۲ = \frac{۱}{\cos^۲\theta} - ۱ = \frac{۱-\cos^۲\theta}{\cos^۲\theta} = \frac{\sin^۲\theta}{\cos^۲\theta} = \tan^۲\theta \Rightarrow AB = \tan\theta$$

تمرین: در دایرهٔ مثلثاتی زیر اگر مساحت ناحیهٔ رنگی برابر با A باشد، $A \times (\tan x + \cot x)$ کدام است؟



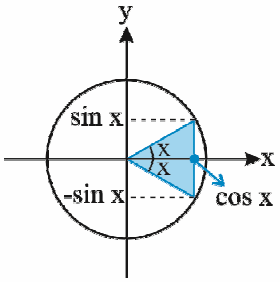
۱) $\frac{۱}{۲}$

۲) $\frac{۱}{۳}$

۳) $\frac{۱}{۴}$

۴) ۱

پاسخ: گزینهٔ «۴» ـ با توجه به شکل زیر، مساحت ناحیهٔ رنگی، مساحت یک مثلث با ارتفاع $\cos x$ و قاعدهٔ $۲\sin x$ است. پس داریم:



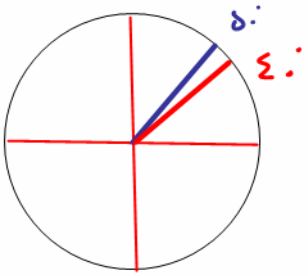
$$A = \frac{۱}{۲} \times (۲\sin x)\cos x = \sin x \cos x$$

در نتیجه برای محاسبهٔ $A(\tan x + \cot x)$ می‌توان نوشت:

$$A(\tan x + \cot x) = \sin x \cos x\left(\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x}\right) = \sin x \cos x\left(\frac{\overbrace{\sin^۲ x + \cos^۲ x}^{۱}}{\sin x \cos x}\right)$$

$$= \sin x \cos x\left(\frac{۱}{\sin x \cos x}\right) = ۱$$

تمرین: کدام یک از نامساوی‌های زیر بین زوایای ۴۰ و ۵۰ درجه برقرار است؟ (سراسری)



۱) $\sin 50^\circ < \sin 40^\circ$

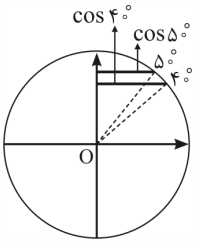
۲) $\cos 50^\circ < \cos 40^\circ$

۳) $\tan 50^\circ < \tan 40^\circ$

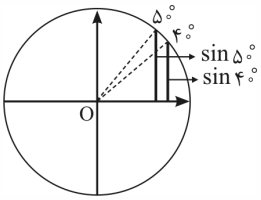
۴) $\cot 40^\circ < \cot 50^\circ$

تمرین: گزینه‌ی «۲»

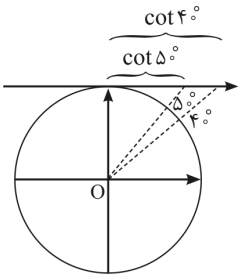
کافی است به دایره‌های مثلثاتی زیر خوب دقّت کنید:



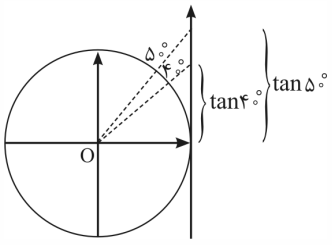
گزینه‌ی (۲) درست $\Rightarrow \cos 50^\circ < \cos 40^\circ$



گزینه‌ی (۱) نادرست $\Rightarrow \sin 50^\circ > \sin 40^\circ$



گزینه‌ی (۴) نادرست $\Rightarrow \cot 40^\circ > \cot 50^\circ$



گزینه‌ی (۳) نادرست $\Rightarrow \tan 50^\circ > \tan 40^\circ$

البته اگر به مفهوم صعود و نزول توابع نیز آشنا باشید، می‌توانید خیلی ساده‌تر پی به درستی گزینه‌ی (۲) ببرید.

$f(x) = \sin x$ در $(0 , \frac{\pi}{2})$ صعودی است. $\Rightarrow 50^\circ > 40^\circ \Rightarrow \sin 50^\circ > \sin 40^\circ$

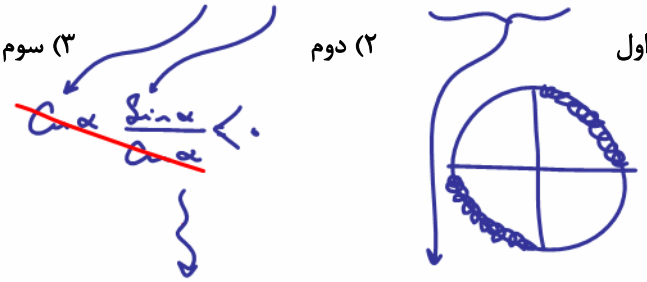
$f(x) = \cos x$ در $(0 , \frac{\pi}{2})$ نزولی است. $\Rightarrow 50^\circ > 40^\circ \Rightarrow \cos 50^\circ < \cos 40^\circ$

$f(x) = \tan x$ در $(0 , \frac{\pi}{2})$ صعودی است. $\Rightarrow 50^\circ > 40^\circ \Rightarrow \tan 50^\circ > \tan 40^\circ$

$f(x) = \cot x$ در $(0 , \frac{\pi}{2})$ نزولی است. $\Rightarrow 50^\circ > 40^\circ \Rightarrow \cot 50^\circ < \cot 40^\circ$

تمرین: اگر $\cos\alpha.\sin\alpha > 0$ و $\cos\alpha.\tan\alpha < 0$ آن‌گاه انتهای کمان α در کدام ناحیه‌ی مثلثاتی است؟

۱) اول ۲) دوم ۳) سوم ۴) چهارم



ناحیه اول یا سوم و $\sin\alpha < 0$ پس α در ناحیه سوم است.

دایره قدرت

تمرین: حاصل عبارت $\frac{|\sin x-\cos x|}{2}+\frac{\sin x+\cos x}{2}$ که در آن $x\in[0,\frac{\pi}{4}]$ کدام است؟ (سراسری)

۱) $\sin x$ ۲) $\cos x$ ۳) $\sin x+\cos x$ ۴) $\cos x-\sin x$

پاسخ: گزینه‌ی «۲»

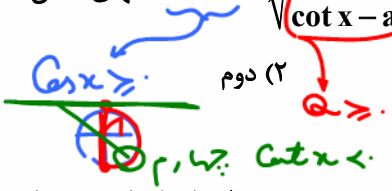
گفتیم در $[0,\frac{\pi}{4}]$ (زیر خط $y=x$)، $\cos x > \sin x$:

$$\frac{|\sin x-\cos x|}{2}+\frac{\sin x+\cos x}{2}=\frac{-(\sin x-\cos x)+(\sin x+\cos x)}{2}=\cos x$$

تمرین: اگر $a\in\mathbb{R}$ و $\cos x=\sqrt{\frac{\cot x}{\cot x-a^2}}$، انتهای کمان x در کدام ناحیه‌ی مثلثاتی است؟

۱) اول ۲) دوم ۳) سوم ۴) چهارم

$P=\sqrt{Q}$
$P\geq 0 \quad Q\geq 0$



پاسخ: گزینه‌ی «۴»

انتهای کمان x در ناحیه‌ی اوّل یا چهارم $\Rightarrow \cos x\geq 0 \Rightarrow \cos x=\sqrt{\frac{\cot x}{\cot x-a^2}}\geq 0$

اما با انتخاب x در ناحیه‌ی اول، $\cot x > 0$ و در نتیجه به ازای مقادیر بزرگ a^2 می‌تواند زیر رادیکال منفی شود ودر نتیجه فرض مسئله که به ازای هر $a\in\mathbb{R}$ ، تساوی برقرار است از بین می‌رود. پس x باید در ناحیه‌ی چهارم باشد که در این صورت همواره زیر رادیکال مثبت خواهد بود:

$$\begin{cases}\cot x\leq 0\\ \cot x-a^2<0\end{cases}\Rightarrow \frac{\cot x}{\cot x-a^2}\geq 0$$

تمرین: کدام نامساوی زیر نادرست است؟

۱) $\sin ۲۰^\circ < \sin ۴۰^\circ < \sin ۱۰۰^\circ$

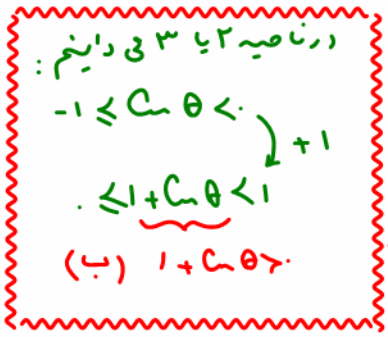
۲) $\cos ۱۰۰^\circ < \cos ۴۰^\circ < \cos ۲۰^\circ$

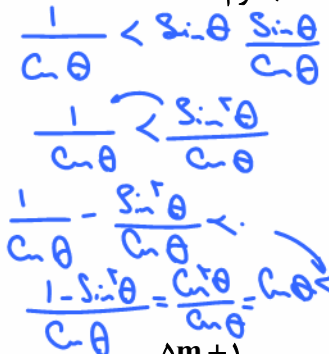
۳) $\sin ۴۰^\circ < \sin ۹۰^\circ < \sin ۱۰۰^\circ$

۴) $\cos ۱۰۰^\circ < \cos ۷۰^\circ < \cos ۴۰^\circ$

تمرین: اگر $\sin\theta + \tan\theta > ۰$ و $\sin\theta \times \tan\theta < \frac{۱}{\cos\theta}$ باشند، انتهای کمان θ در کدام ناحیه قرار دارد؟

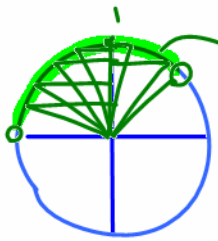
۱) اول ۲) دوم ۳) سوم ۴) چهارم

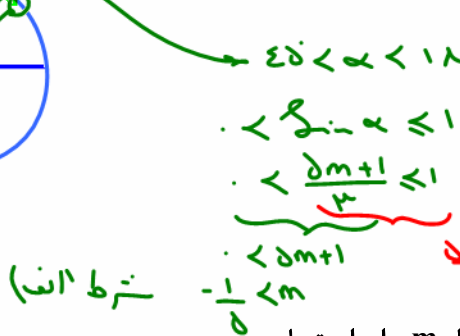




تمرین: اگر $۱۸۰^\circ > \alpha > ۴۵^\circ$ باشد و $\sin\alpha = \frac{۵m+۱}{۳}$، آن‌گاه حدود m کدام است؟

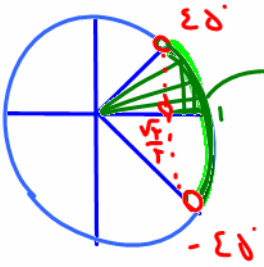
۱) $(-\frac{۱}{۵}, \frac{۲}{۵})$ ۲) $(-\frac{۱}{۵}, \frac{۲}{۵}]$ ۳) $(\frac{۱}{۵}, \frac{۲}{۵})$ ۴) $[۰, \frac{۲}{۵}]$

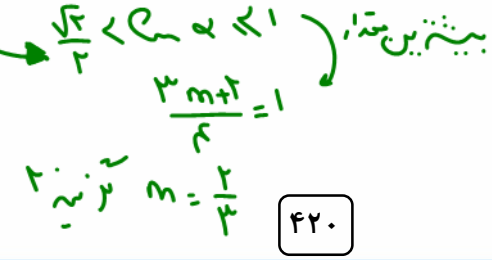




تمرین: اگر $۴۵^\circ > \alpha > -۴۵^\circ$ و $\cos\alpha = \frac{۳m+۲}{۴}$، آن‌گاه بیشترین مقدار m برابر است با:

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{۴}{۳}$





تمرین: مجموع حداقل و حداکثر مقدار عبارت $\frac{\cos\alpha}{2+\cos\alpha}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $-\frac{1}{3}$ ۳) $-\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{2}{3}$

if $\cos\alpha=1 \longrightarrow \frac{1}{2+1}=\frac{1}{3}=Max$

if $\cos\alpha=-1 \longrightarrow \frac{-1}{2-1}=\frac{-1}{1}=-1=min$

$Max+min=-\frac{2}{3}$ ③

$f(x)=a\cos^2x+b\cos x+c$

$f(x)=a\sin^2x+b\sin x+c$

نکته: برای Max , min عبارت درجه دوم برحسب $\cos$, $\sin$ یک بار به جای آن‌ها یک یک بار منهای یک و یک بار $-\frac{b}{2a}$ می‌گذاریم. (باید $-1\le -\frac{b}{2a}\le 1$ آن $-\frac{b}{2a}$ در بازه از ۱- نبود آن را جایگذاری نکن

تمرین: بیشترین مقدار عبارت $\cos^2x+2\cos x+4$ کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۵ ۳) ۴ ۴) ۳

حل تست:

$f(x)=\cos^2x+2\cos x+4$

$a=1$ $b=2$ $c=4$

$\cos x=1 \longrightarrow 1+2+4=7$

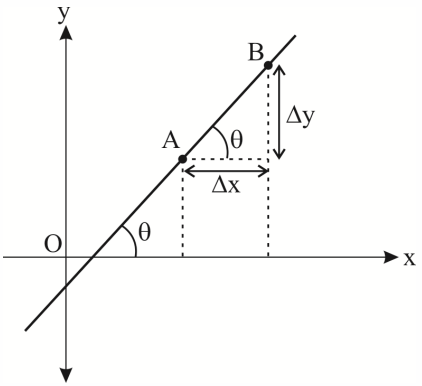
$\cos x=-1 \longrightarrow (-1)^2-2+4=3$

$\cos x=-\frac{b}{2a}=\frac{-2}{2}=-1 \longrightarrow (-1)^2-2+4=3$

$min=3$ $Max=7$

گزینه ۱

رابطهٔ شیب خط با تانژانت اولیه



می‌دانیم که شیب هر خط، برابر نسبت تفاضل عرض‌های دو نقطهٔ واقع بر آن به تفاضل طول‌های همان دو نقطه است. حال اگر این خط محور xها را قطع کند، شیب خط برابر تانژانت زاویه‌ای است که خط با جهت مثبت محور xها می‌سازد، یعنی:

$$\tan\theta=\frac{\text{تفاضل عرض‌ها}}{\text{تفاضل طول‌ها}}=\frac{\Delta y}{\Delta x}=m$$

به طور کلی می‌توان گفت:

الف) اگر خطی موازی با محور xها باشد، شیب آن صفر است.

ب) اگر خطی عمود بر محور xها باشد، شیب آن تعریف نشده است.

معادلهٔ خط

با داشتن یک نقطه از خط، مانند $A(x_0,y_0)$ و شیب خط از معادلهٔ مقابل استفاده می‌کنیم:

$$y-y_0=m(x-x_0)$$

تمرین: معادلهٔ خطی که با قسمت مثبت محور xها زاویهٔ 45° می‌سازد و از نقطهٔ $A(2,3)$ می‌گذرد، کدام است؟

۱) $y=2x-1$ ۲) $y=2x+1$ ۳) $y=x-1$ ۴) $y=x+1$

پاسخ: گزینهٔ «۴» ـ شیب این خط برابر $m=\tan 45^\circ=1$ است، در نتیجه:

$$y-y_0=m(x-x_0) \Rightarrow y-3=1(x-2) \Rightarrow y=x+1$$

تمرین: اگر خط $(5t-3)x-2\sqrt{3}y=10$ با جهت مثبت محور xها زاویهٔ 30° بسازد، t کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ: گزینهٔ «۲»

یادآوری: شیب خط $ax+by=c$ برابر $-\frac{a}{b}$ است.

$$m=\frac{-a}{b}\Rightarrow\begin{cases}a=5t-3\\ b=-2\sqrt{3}\end{cases}\Rightarrow m=\frac{-(5t-3)}{-2\sqrt{3}}=\frac{5t-3}{2\sqrt{3}}$$

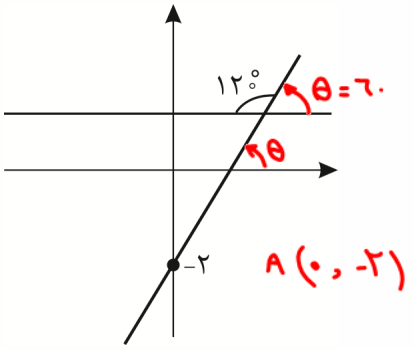
شیب خط داده شده برابر $\frac{5t-3}{2\sqrt{3}}$ است، در نتیجه:

$$\tan 30^\circ=\frac{5t-3}{2\sqrt{3}}\Rightarrow\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{5t-3}{2\sqrt{3}}\Rightarrow 2\sqrt{3}\times\sqrt{3}=3(5t-3)\Rightarrow 6=15t-9\Rightarrow 15t=15\Rightarrow t=1$$

تمرین: خطی که از نقطهٔ $A(2,3)$ عبور کرده و با راستای مثبت محور xها زاویهٔ 45° می‌سازد، محور xها را با چه طولی قطع می‌کند؟

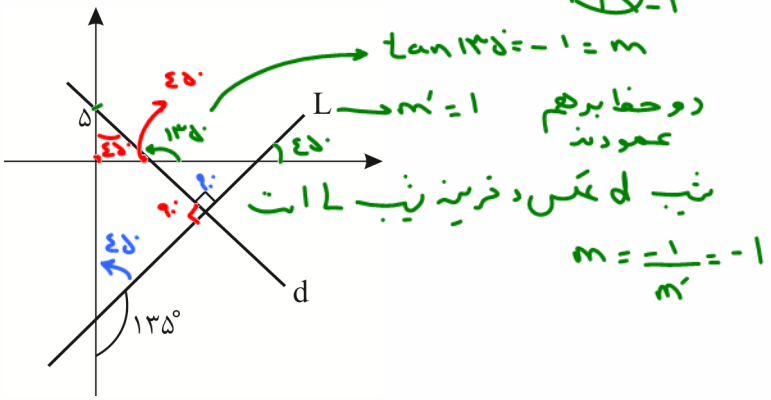
۱) -1 ۲) ۱ ۳) -3 ۴) ۳

تمرین: معادلهٔ خط مقابل کدام است؟



۱) $y+\sqrt{3}x=2$
۲) $y=\sqrt{3}x-2$
۳) $y-\sqrt{3}x-2=0$
۴) $y=-\sqrt{3}x-4$

تمرین: معادلهٔ خط d در شکل مقابل کدام است؟



۱) $y=-x+5$
۲) $y=x+5$
۳) $y=\sqrt{3}x+5$
۴) $y=-\sqrt{3}x+5$

Homework

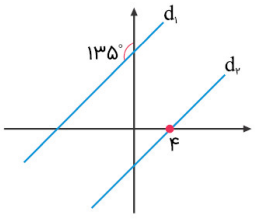
۱ زاویهٔ حادهٔ بین دو خط $d_1 : ۶x - ۶y + ۸ = ۰$ و $d_2 : y - \sqrt{۳}x + ۱ = ۰$ چند درجه است؟

۱) ۱۵°
۲) ۳۰°
۳) ۶۰°
۴) ۷۵°

۲ حدود k برای آنکه معادلهٔ $\sin x = k$ در فاصلهٔ $۶۰^\circ \le x \le ۱۲۰^\circ$ دارای جواب باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲} \le k \le \frac{\sqrt{۲}}{۲}$
۲) $-۱ \le k \le ۱$
۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۲} \le k \le ۱$
۴) $k > \frac{\sqrt{۲}}{۲}$

۳ دو خط d_1 و d_2 باهم موازی می‌باشند. معادلهٔ خط d_2 کدام است؟



۱) $y + x + ۴ = ۰$
۲) $y + x - ۴ = ۰$
۳) $y - x + ۴ = ۰$
۴) $y - x - ۴ = ۰$

۴ در مثلث ABC، طول اضلاع متناسب با اعداد ۶، ۳ و $\sqrt{۲۷}$ است. کسینوس زاویه مقابل به ضلع کوچک‌تر کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۳}$
۲) $+\frac{۱}{۲}$
۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۵}$
۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

۵ کدام‌یک از نامساوی‌های زیر درست است؟

۱) $\sin ۲۰^\circ > \sin ۱۷۰^\circ$
۲) $\cos ۲۰^\circ < \cos ۱۶۰^\circ$
۳) $\tan ۲۰^\circ < \sin ۲۰^\circ$
۴) $\cot ۲۰^\circ < \cos ۲۰^\circ$

۶ اگر $۱۲۰^\circ \le \alpha \le ۱۵۰^\circ$ و $\cos \alpha = ۲m - ۱$ باشد، آنگاه حدود تغییرات m کدام است؟

۱) $-۱ \le m \le ۱$
۲) $\frac{۱}{۲} \le m \le \frac{۱ + \sqrt{۳}}{۲}$
۳) $\frac{۲ - \sqrt{۳}}{۴} \le m \le \frac{۱}{۴}$
۴) $\frac{۱ - \sqrt{۳}}{۴} \le m \le \frac{\sqrt{۳}}{۴}$

۷ به ازای مقادیر دلخواه α، حاصل نسبت بیشترین مقدار به کمترین مقدار عبارت $A = \frac{۴\cos^۲\alpha - ۱}{۳}$ کدام است؟

۱) -۳
۲) ۳
۳) ۱
۴) $-\frac{۱}{۳}$

۸ علامت کدام‌یک از گزینه‌های زیر با سایر گزینه‌ها متفاوت است؟

۱) $\sin ۷۵^\circ$
۲) $\cos ۳۴۵^\circ$
۳) $\tan ۱۹۵^\circ$
۴) $\tan ۱۳۰^\circ$

۹ حداکثر عبارت $۴\sin\theta - ۱$ کدام است؟

۱) ۳
۲) ۵
۳) ۲
۴) صفر

۱۰ در یک چرخ‌وفلک دایره‌ای به شعاع ۱۰ متر، نقطهٔ اوج آن از سطح زمین ۲۵ متر فاصله دارد. اگر شخصی در پایین‌ترین نقطهٔ چرخ‌وفلک سوار شود، پس از طی حداقل چه زاویه‌ای فاصلهٔ او تا سطح زمین به ۲۰ متر می‌رسد؟

۱) ۱۳۵°
۲) ۱۵۰°
۳) ۱۲۰°
۴) ۱۸۰°

۱۱ با زیاد شدن زاویهٔ θ از ۴۵° تا ۱۸۰°، $\sin\theta$ چگونه تغییر می‌کند؟

۱) افزایش می‌یابد
۲) کاهش می‌یابد
۳) ابتدا افزایش سپس کاهش
۴) ابتدا کاهش سپس افزایش

۱۲ اگر $۰ < \tan x < ۱$ باشد، x چند درجه می‌تواند باشد؟

۱) ۸۲°
۲) ۱۷۲°
۳) ۱۹۲°
۴) ۲۵۲°

۱۳ با زیاد شدن θ از ۹۰° تا ۲۷۰°، $\sin\theta$ چگونه تغییر می‌کند؟

۱) همواره افزایش می‌یابد.
۲) همواره کاهش می‌یابد.
۳) ابتدا افزایش و سپس کاهش می‌یابد.
۴) ابتدا کاهش و سپس افزایش می‌یابد.

آموزش را با دبیران برند ایران تجربه کنید

پاسخ Homework

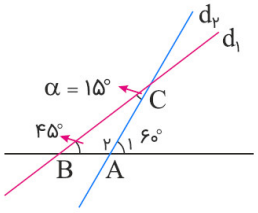
۱ گزینه ۱

$$d_۱ : ۶x - ۶y + ۸ = ۰ \Rightarrow y = x + \frac{۴}{۳} \Rightarrow m_۱ = ۱$$

$$\tan\theta_۱ = ۱ \Rightarrow \theta_۱ = ۴۵^\circ$$

$$d_۲ : y - \sqrt{۳}x + ۱ = ۰ \Rightarrow y = \sqrt{۳}x - ۱ \Rightarrow m_۲ = \sqrt{۳}$$

$$\tan\theta_۲ = \sqrt{۳} \Rightarrow \theta_۲ = ۶۰^\circ$$



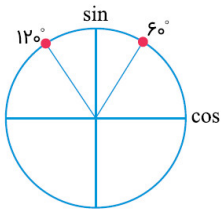
بنابراین طبق شکل:

$$\hat{A}_۱ = ۶۰^\circ \Rightarrow \hat{A}_۲ = ۱۲۰^\circ \ , \ B = ۴۵^\circ$$

$$\hat{A}_۲ + \hat{B} + \hat{C} = ۱۸۰^\circ \Rightarrow ۱۲۰^\circ + ۴۵^\circ + \hat{C} = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{C} = ۱۵^\circ$$

۲ گزینه ۳

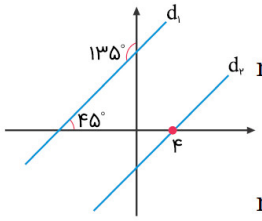
باتوجه‌به شکل:



$$\frac{\sqrt{۳}}{۲} \leq \sin x \leq ۱$$
$$\frac{\sqrt{۳}}{۲} \leq k \leq ۱$$

۳ گزینه ۳

شیب خط $d_۱$ برابر است با:



$$m_۱ = \tan ۴۵^\circ = ۱$$

دو خط $d_۱$ و $d_۲$ باهم موازی هستند، بنابراین شیب آن‌ها برابر است.

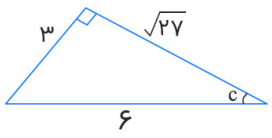
$$m_۱ = m_۲ \Rightarrow m_۲ = ۱$$

خط $d_۲$ از نقطهٔ $A(۴, ۰)$ عبور می‌کند، بنابراین معادلهٔ آن به‌صورت: $y - y_A = m(x - x_A)$ می‌باشد.

$$y - ۰ = ۱(x - ۴) \Rightarrow y = x - ۴ \Rightarrow y - x + ۴ = ۰$$

۴ گزینه ۴

با کمی دقت به مقادیر اضلاع مثلث متوجه می‌شویم که در رابطه فیثاغورس صدق می‌کنند، درنتیجه مثلث ما قائم‌الزاویه است.



$$\cos c = \frac{\sqrt{۲۷}}{۶} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

۵ گزینه ۱

گزینه ۱ درست است، زیرا: $\sin ۱۷۰^\circ = \sin ۱۰^\circ < \sin ۲۰^\circ$

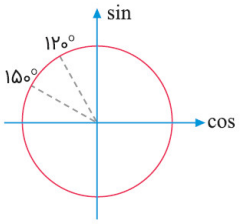
بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه "۲": نادرست است، زیرا: $\cos ۱۶۰^\circ = -\cos ۲۰^\circ$

گزینه "۳": نادرست است، زیرا می‌دانیم برای هر زاویهٔ حاده داریم: $\tan x > \sin x$

گزینه "۴": نادرست است، زیرا می‌دانیم برای هر زاویهٔ حاده داریم: $\cot x > \cos x$

۶ گزینه ۳



$$۱۲۰^\circ \le \alpha \le ۱۵۰^\circ$$

$$\cos ۱۵۰^\circ \le \cos \alpha \le \cos ۱۲۰^\circ \Rightarrow -\frac{\sqrt{۳}}{۲} \le \cos \alpha \le -\frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow -\frac{\sqrt{۳}}{۲} \le ۲m - ۱ \le -\frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{۲-\sqrt{۳}}{۲} \le ۲m \le \frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{۲-\sqrt{۳}}{۴} \le m \le \frac{۱}{۴}$$

۷ گزینه ۱

$$-۱ \le \cos \alpha \le ۱ \xrightarrow{\text{به توان ۲}} ۰ \le \cos^۲ \alpha \le ۱ \xrightarrow{\times ۴} ۰ \le ۴\cos^۲ \alpha \le ۴$$

$$\Rightarrow -۱ \le ۴\cos^۲ \alpha - ۱ \le ۳ \Rightarrow -\frac{۱}{۳} \le \frac{۴\cos^۲ \alpha - ۱}{۳} \le ۱$$

$$\begin{cases} \max = ۱ \\ \min = -\frac{۱}{۳} \end{cases} \Rightarrow \frac{۱}{-\frac{۱}{۳}} = -۳$$

۸ گزینه ۴

باتوجه‌به ناحیهٔ هریک از زوایا و دایرهٔ مثلثاتی، گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینهٔ "۱": $\sin ۷۵^\circ \xrightarrow{\text{ربع اول}} \sin ۷۵^\circ > ۰$

گزینهٔ "۲": $\cos ۳۴۵^\circ \xrightarrow{\text{ربع چهارم}} \cos ۳۴۵^\circ > ۰$

گزینهٔ "۳": $\tan ۱۹۵^\circ \xrightarrow{\text{ربع سوم}} \tan ۱۹۵^\circ > ۰$

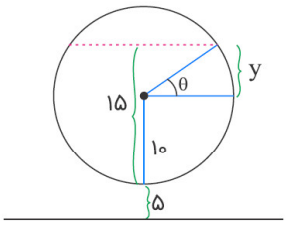
گزینهٔ "۴": $\tan ۱۳۰^\circ \xrightarrow{\text{ربع دوم}} \tan ۱۳۰^\circ < ۰$

۹ گزینه ۱

$$-۱ \le \sin\theta \le ۱ \xrightarrow{\times ۴} -۴ \le ۴\sin\theta \le ۴ \Rightarrow -۵ \le ۴\sin\theta - ۱ \le ۳$$

حداکثر مقدار عبارت برابر ۳ است.

۱۰ گزینه ۳



$$\sin\theta = \frac{y}{۱۰} \Rightarrow y = ۱۰\sin\theta$$

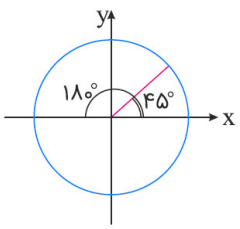
$$۲۰ = ۱۵ + ۱۰\sin\theta$$

$$\sin\theta = \frac{۵}{۱۰} \Rightarrow \sin\theta = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \theta = ۳۰^\circ$$

لذا پس از طی ۱۲۰ درجه به ارتفاع ۲۰ متری می‌رسد.
(دقت کنید چون واژهٔ حداقل به کار برده شده است، حرکت چرخ‌وفلک را پادساعتگرد در نظر گرفتیم.)

۱۱ گزینه ۳

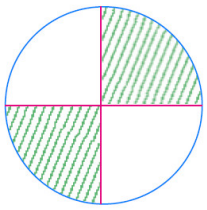
باتوجه‌به دایرهٔ مثلثاتی: در زاویهٔ بین ۴۵° تا ۹۰°، $\sin\theta$ صعودی خواهد بود، این در حالی است که از ۹۰° تا ۱۸۰°، $\sin\theta$ کاهش می‌یابد.



آموزش رایا دبیران برند ایران تجربه کنید

۱۲ گزینه ۳

۱۷۲° در ربع دوم قرار دارد و در این ربع تانژانت منفی است، بنابراین گزینهٔ "۲" نادرست می‌باشد. در ربع اول اگر $۴۵^\circ < x < ۹۰^\circ$ باشد، آنگاه $\sin x > \cos x$ است.



$$۴۵^\circ < x < ۹۰^\circ \Rightarrow \sin x > \cos x$$
$$\xrightarrow[\cos x > ۰]{\div \cos x} \tan x > ۱ \Rightarrow \tan ۸۲^\circ > ۱$$

بنابراین گزینهٔ "۱" نادرست است.

در ربع سوم اگر $۱۸۰^\circ < x < ۲۲۵^\circ$ باشد، $\sin x > \cos x$ است.

$$۱۸۰^\circ < x < ۲۲۵^\circ \Rightarrow \sin x > \cos x$$
$$\xrightarrow[\cos x < ۰]{\div \cos x} \tan x < ۱ \Rightarrow ۰ < \tan ۱۹۲^\circ < ۱$$

توجه شود که در ربع سوم $\tan x > ۰$ است. بنابراین گزینهٔ "۳" صحیح می‌باشد.

در ربع سوم اگر $۲۲۵^\circ < x < ۲۷۰^\circ$ باشد، $\sin x < \cos x$ است.

$$۲۲۵^\circ < x < ۲۷۰^\circ \Rightarrow \sin x < \cos x$$
$$\xrightarrow[\cos x < ۰]{\div \cos x} \tan x > ۱ \Rightarrow \tan ۲۵۲^\circ > ۱$$

بنابراین گزینهٔ "۴" نادرست است.

۱۳ گزینه ۲

روی دایرهٔ مثلثاتی، sin معادل محور yها است. در ربع دوم با افزایش θ، تصویر نقطه روی محور yها کاهش پیدا می‌کند، در ۱۸۰° به کمترین مقدار خود یعنی صفر می‌رسد. $\sin ۱۸۰^\circ = ۰$ و در ربع سوم با افزایش θ، تصویر نقطه روی محور yها کاهش می‌یابد تا در ۲۷۰° به کمترین مقدار خود یعنی ۱- می‌رسد. $\sin ۲۷۰^\circ = -۱$، بنابراین با زیاد شدن زاویهٔ θ از ۹۰° تا ۲۷۰°، sin همواره کاهش پیدا می‌کند.

نکته: یک درجه $\frac{\pi}{180} = 0/017$ رادیان است
نکته: یک رادیان ۵۷٫۳° است

$\frac{\pi}{180}$ درجه = رادیان

۱ درجه $\frac{\pi}{180}$ رادیان $\longrightarrow$ درجه $= \frac{180}{\pi=3/14} = 57/3°$

واحدهای کمان و زاویه

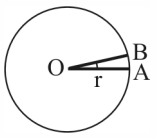
درجه: اگر محیط دایره را به ۳۶۰ قسمت مساوی تقسیم کنیم، هر قسمت کمانی به اندازه‌ی یک درجه است و زاویه‌ی مرکزی مقابل به آن مساوی ۱ درجه است. یعنی:

رادیان	طول دایره (محیط)
2π	$2\pi r$
θ	$?=L$

به دور دایره

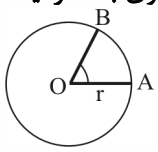
$L = \frac{2\pi r \theta}{2\pi} = r\theta$

$L = r\theta$ (θ برحسب رادیان)



$\overset{\frown}{AB} = \frac{2\pi r}{360}$ $\quad$ $\hat{AOB}$ = ۱ درجه

رادیان: زاویه‌ی مرکزی روبه‌رو به کمانی که طول آن با شعاع دایره مساوی باشد را یک رادیان می‌نامیم. یعنی:



$\overset{\frown}{AB} = r$ $\quad$ $\hat{AOB}$ = ۱ رادیان

و به همین ترتیب ۲ رادیان، زاویه‌ی مرکزی روبه‌رو به کمانی است که طول آن ۲ برابر شعاع دایره باشد و 2π رادیان، زاویه‌ی مرکزی روبه‌رو به کمانی است که طول آن مساوی 2π برابر شعاع دایره (همان محیط دایره) باشد. جالب شد!

پس:

هر دایره با هر شعاعی، ۳۶۰ درجه یا 2π رادیان است.

رابطه‌ی بین رادیان و درجه:

هر وقت خواستی رادیان رو درجه کنی جای π بذار ۱۸۰

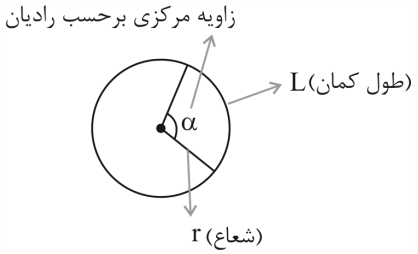
$$\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi}$$

R اندازه‌ی زاویه برحسب رادیان و D اندازه‌ی زاویه برحسب درجه است، مثلاً اگر $R = 1$ فرض شود، داریم:

$$D = \frac{180}{\pi} \xrightarrow{\pi \simeq 3/14} D \simeq 57°$$

هر یک رادیان، تقریباً $57°$ است.

هر درجه ۰/۰۱۷ رادیان است.



اگر طول کمان روبه‌رو به زاویه را با نماد L، شعاع دایره را با r و اندازه‌ی زاویه را با α نشان دهیم، آن‌گاه رابطه‌ی بالا به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\alpha = \frac{L}{r}$$

تمرین: اگر در یک دایره، اندازه‌ی کمان مقابل به زاویه‌ی مرکزی $\theta = 50°$ برابر ۱۰ سانتی‌متر باشد، مساحت این دایره چند برابر محیط آن است؟

$L = 10$ $\quad$ $50 \frac{\pi}{180}$ زاویه برحسب رادیان

۱) $\frac{1}{50}$ $\quad$ ۲) $\frac{1}{10}$ $\quad$ ۳) $\frac{18}{\pi}$ ✓ $\quad$ ۴) $\frac{36}{\pi}$

$L = r\theta$

$10 = r\left(50 \frac{\pi}{180}\right) = r\left(\frac{5\pi}{18}\right)$

$r = \frac{180}{5\pi} = \frac{36}{\pi}$

$\frac{S_{\text{دایره}}}{P_{\text{دایره}}} = \frac{\pi r^2}{2\pi r} = \frac{r}{2} =$ نصف شعاع $= \frac{1}{2}\left(\frac{36}{\pi}\right) = \frac{18}{\pi}$

آموزش رایگان با دبیران برند ایران تجربه کنید

تمرین: دایره‌ای به مساحت 4π مفروض است. قطاعی به محیط $7/14$ از آن جدا کرده‌ایم. زاویه‌ای که توسط این قطاع از دایره جدا می‌شود، چند درجه است؟ $(\pi \simeq 3/14)$

۱) ۱۸۰ ۲) ۹۰ ۳) ۴۵ ۴) ۱۲۰

$S = \pi R^2 \longrightarrow 4\pi = \pi R^2 \longrightarrow R = 2$

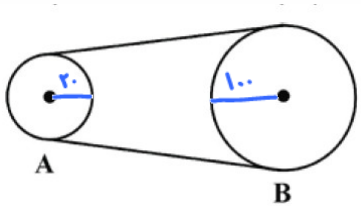
محیط قطاع $= L + 2R = R\theta + 2R$

$7/14 = 2\theta + 2(2)$

$3/14 = 2\theta$

$\theta = \frac{3/14}{2} = \frac{\pi}{2} = 90^\circ$

تمرین: در شکل زیر چرخ‌دنده‌های A و B توسط نواری لاستیکی به هم وصل شده‌اند. شعاع چرخ‌دنده‌ی A، ۲۰ سانتی‌متر و شعاع چرخ‌دنده‌ی B برابر با ۱ متر است. اگر چرخ‌دنده‌ی B به اندازه‌ی $\frac{3\pi}{2}$ رادیان بچرخد، چرخ‌دنده‌ی A چند دور می‌زند؟



۱) ۲/۵
۲) ۵
۳) ۳/۷۵
۴) ۱۰

$L_A = L_B \longrightarrow R_A \cdot \theta_A = R_B \theta_B$

$(20)\theta_A = (100)\left(\frac{3\pi}{2}\right)$

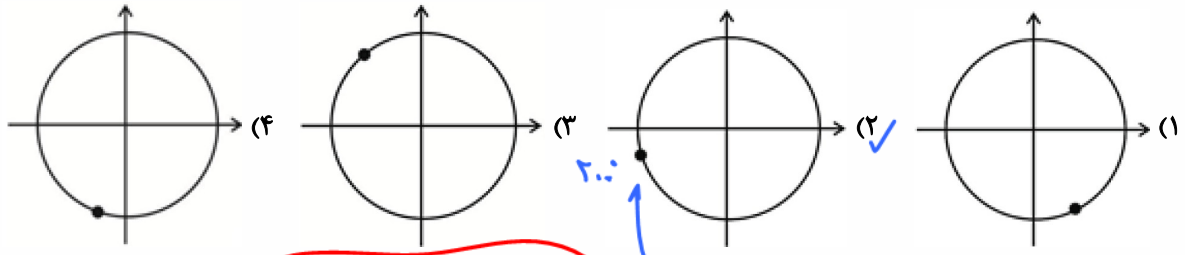
$\theta_A = 5\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \frac{15\pi}{2}$

۱: به دور دایره	2π
؟	$\frac{15\pi}{2}$

$? = \frac{1\left(\frac{15\pi}{2}\right)}{2\pi} = \frac{15}{4} = \frac{12}{4} + \frac{1}{4} = 3 + 0/25 = 3/75$ دور

تمرین: مجموعه دو زاویه 72° و تفاضل آن دو زاویه $\frac{\pi}{15}$ رادیان است. اگر اندازه‌ی زاویه‌ی بزرگ‌تر برابر با x درجه باشد، زاویه‌ی $(5x - 10^\circ)$ به طور تقریبی روی دایره‌ی مثلثاتی کدام است؟

۴) ۳) ۲) ۱)



$\begin{cases} x + y = 72^\circ \\ x - y = \frac{\pi}{15} \end{cases}$ و یا $\begin{cases} x + y = 72^\circ \\ x - y = 12^\circ \end{cases}$

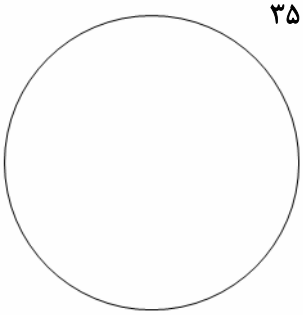
$2x = 72\left(\frac{\pi}{180}\right) + \frac{\pi}{15} \longrightarrow x = \frac{72\pi}{180} + \frac{\pi}{30} = \frac{\pi}{5} + \frac{\pi}{30} = \frac{6\pi + \pi}{30} = \frac{7\pi}{30} = \frac{7(180)}{30} = 42^\circ$

$2x = 84 \longrightarrow x = 42^\circ$

$5x - 10^\circ = 5(42^\circ) - 10^\circ = 200^\circ$

تمرین: چرخ و فلکی دارای ۳۶ کابین است و شما در کابین شماره‌ی پنجم قرار دارید. اگر چرخ و فلک به اندازه‌ی $\frac{11\pi}{3}$ رادیان در جهت مثبت مثلثاتی حرکت کند، در موقعیت اولیه‌ی کدام کابین قرار می‌گیرید؟ (شماره‌گذاری کابین‌ها در جهت مثبت مثلثاتی و فاصله‌ی کابین‌ها یکسان است.)

۱) ۲۵ ۲) ۳۰ ۳) ۳۴ ۴) ۳۵



فاصله بین ۲ کابین $\frac{360^\circ}{36} = 10^\circ$ = کل دایره

کلاً چرخیده ایم $11\left(\frac{\pi}{3}=60^\circ\right) = 660^\circ$

به دور چرخیدیم $660^\circ - 360^\circ = 300^\circ$

سرجای اولمون ۳۰۰ دیگه رفتیم به دور رایگان

کابین ۳۰ $\frac{300}{10} = 30$ کابین بروجلوی ۳۱

نکات ساعت

الف) عقربهٔ دقیقه‌شمار به ازای هر یک دقیقه ۶ درجه طی می‌کند.

ب) عقربهٔ ساعت‌شمار به ازای هر یک ساعت ۳۰ درجه طی می‌کند.

پ) عقربهٔ ساعت‌شمار به ازای هر یک دقیقه ۰/۵ درجه طی می‌کند.

} با استفاده از تناسب به دست می‌آیند.

ت) زاویهٔ بین عقربهٔ ساعت‌شمار و دقیقه‌شمار از دستور زیر پیدا می‌شود:

$$\theta = \left|\frac{11m}{2} - 30h\right| = \left|30h - \frac{11}{2}m\right|$$

تمرین: چه مدت طول می‌کشد تا عقربه‌ی دقیقه‌شمار ساعت به اندازه‌ی $\frac{8\pi}{3}$ رادیان دوران کند؟

۱) یک ساعت ۲) یک ساعت و ۱۰ دقیقه

۳) یک ساعت و ۲۰ دقیقه ۴) یک ساعت و ۳۰ دقیقه

2π	یک ساعت = ۶۰ دقیقه
$\frac{8\pi}{3}$	x

دقیقه شمار یک دور بچرخد

$x = \frac{\frac{8\pi}{3}(60)}{2\pi} = \frac{4(60)}{3} = 80$ دقیقه

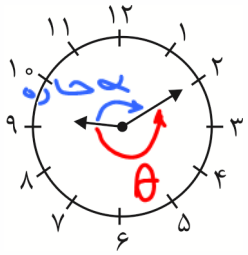
یک ساعت و بیست دقیقه

گزینه ۳

تمرین: زاویه بین عقربه‌های ساعت‌شمار و دقیقه‌شمار در ساعت $9:10'$ چند رادیان است؟

۱) $\frac{9\pi}{5}$ ۲) $\frac{29\pi}{30}$

۳) $\frac{29\pi}{36}$ ۴) $\frac{145\pi}{36}$



θ بیشتر از π و منفرجه است

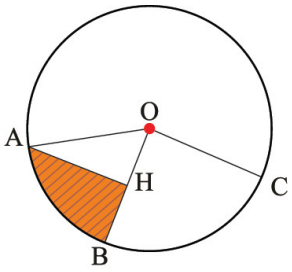
$\theta = \left|30h - \frac{11}{2}m\right| = \left|30(9) - \frac{11}{2}(10)\right| = |270^\circ - 55^\circ| = 215^\circ$

$215^\circ \times \frac{\pi}{180} = \frac{43\pi}{36}$

$\alpha = 2\pi - \theta = 2\pi - \frac{43\pi}{36} = \left(\frac{72-43}{36}\right)\pi = \frac{29\pi}{36}$

Homework

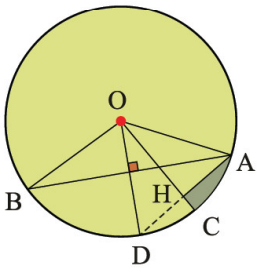
۱ مطابق شکل زیر، دایره به محیط ۲π و AH عمودمنصف OB است. محیط قسمت هاشورخورده چقدر از محیط مثلث $\overset{\frown}{OAH}$ بزرگ‌تر است؟



۱) $\frac{۲\pi - ۱}{۳}$
۲) $\frac{۲\pi - ۳}{۶}$
۳) $\frac{\pi - ۱}{۶}$
۴) $\frac{\pi - ۳}{۳}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

۲ مطابق شکل زیر، در دایره‌ای به مساحت π، $A\widehat{O}B = ۱۲۰^\circ$ و OH عمودمنصف AD است. اختلاف محیط مثلث AOH و محیط قسمت سایه زده شده کدام است؟



۱) $\sqrt{۳} - \frac{\pi}{۶}$
۲) $\sqrt{۲} - \frac{\pi}{۶}$
۳) $\pi - \sqrt{۳}$
۴) $\pi - \sqrt{۲}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۳ در یک مثلث، زاویه بین دو ضلع با اندازه‌های ۵ و ۱۲ برابر α است. اگر مساحت این مثلث ۱۵ باشد، اختلاف بیشترین و کمترین مقدار α کدام است؟

۱) $\frac{۲\pi}{۳}$
۲) $\frac{\pi}{۳}$
۳) $\frac{\pi}{۲}$
۴) $\frac{\pi}{۴}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۲

۴ مثلث ABC، با اضلاع $\sqrt{۳}$، ۶ و α (زاویهٔ بین آن‌ها) قابل رسم است. اگر مساحت این مثلث ۴/۵ باشد، بیشترین مقدار α چندبرابر کمترین مقدار α است؟

۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۵

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۲

پاسخ Homework

۱ گزینه ۴

$$P = ۲\pi r \Rightarrow ۲\pi r = ۲\pi \Rightarrow r = ۱$$

$$OH = \frac{۱}{۲}OA = \frac{۱}{۲} \Rightarrow O\hat{A}H = ۳۰^\circ \Rightarrow A\hat{O}B = ۶۰^\circ$$

$$\Rightarrow AH = \sin ۶۰^\circ = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow |\overset{\frown}{AB}| = \frac{۱}{۶}(۲\pi) = \frac{\pi}{۳}$$

$$(\cancel{AH} + \cancel{BH} + \overset{\frown}{AB}) - (OA + \cancel{AH} + \cancel{OH}) = \frac{\pi}{۳} - ۱ = \frac{\pi - ۳}{۳}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

۲ گزینه ۱

$$\text{مساحت دایره} = \pi r^۲ = \pi \Rightarrow r = ۱$$

$$|OA| = |OB| = ۱\ ,\ |AH| = \frac{۱}{۲}$$

$$OH \text{ ارتفاع } AOD : |OH| = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$A\widehat{O}D = ۶۰^\circ \Rightarrow A\widehat{O}C = ۳۰^\circ \Rightarrow |\overset{\frown}{AC}| = \frac{۲\pi}{۱۲} = \frac{\pi}{۶}$$

$$|HC| = ۱ - |OH| = ۱ - \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$AOH \text{ محیط مثلث} = |OH| + |HA| + |OA| = \frac{\sqrt{۳}}{۲} + \frac{۱}{۲} + ۱ = \frac{۳ + \sqrt{۳}}{۲}$$

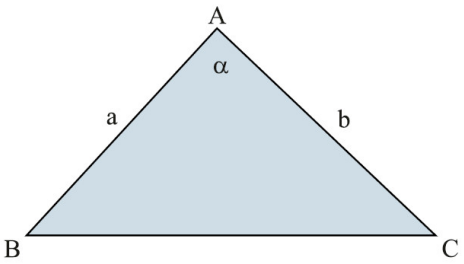
$$\text{محیط قسمت رنگی} : |HC| + |AH| + |\overset{\frown}{AC}| = ۱ - \frac{\sqrt{۳}}{۲} + \frac{۱}{۲} + \frac{\pi}{۶} = \frac{۳ - \sqrt{۳}}{۲} + \frac{\pi}{۶}$$

$$\text{محیط‌ها را از هم کم می‌کنیم} : \sqrt{۳} - \frac{\pi}{۶}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۳ گزینه ۱

نکته: در هر مثلث دلخواه رابطهٔ $S = \frac{۱}{۲}a \times b \times \sin\alpha$ برقرار است:



با استفاده از نکته بالا داریم:

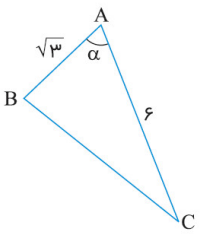
$$S = ۱۵ = \frac{۱}{۲} \times ۵ \times ۱۲ \times \sin\alpha$$

$$\Rightarrow \sin\alpha = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_۱ = ۳۰ \\ \alpha_۲ = ۱۵۰ \end{cases} \Rightarrow \alpha_۲ - \alpha_۱ = ۱۲۰^\circ = \frac{۲\pi}{۳}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۲

۴ گزینه ۱

مثلث ABC را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم:



مساحت مثلث عبارت است از:

$$S = \frac{۱}{۲}\sqrt{۳} \times ۶ \times \sin\alpha \Rightarrow ۴/۵ = ۳\sqrt{۳}\sin\alpha$$

$$\sin\alpha = \frac{۹}{۶\sqrt{۳}} = \frac{۹\sqrt{۳}}{۱۸} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{۲\pi}{۳} \\ \alpha = \frac{\pi}{۳} \end{cases}$$

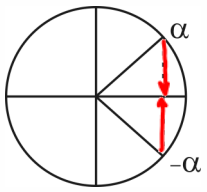
بنابراین:

$$\frac{\alpha_{max}}{\alpha_{min}} = \frac{\frac{۲\pi}{۳}}{\frac{\pi}{۳}} = ۲$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۲

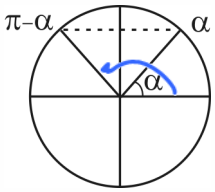
آموزش را با دبیران برند ایران تجربه کنید

نسبت‌های مثلثاتی α و $-\alpha$ (قرینه)



$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$$
$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$$
$$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$$
$$\cot(-\alpha) = -\cot\alpha$$

نسبت‌های مثلثاتی زوایای مکمل $(\alpha, \pi-\alpha)$



$$\sin(\pi-\alpha) = \sin\alpha$$
$$\cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha$$
$$\tan(\pi-\alpha) = -\tan\alpha$$
$$\cot(\pi-\alpha) = -\cot\alpha$$

یادت باشه: دو زاویه‌ای که مکمل هستند (جمع‌شان 180° است) سینوس‌های مساوی دارند، اما کسینوس و تانژانت و کتانژانت قرینه دارند. یعنی به عنوان مثال جمع کسینوس‌های دو زاویه مکمل برابر صفر است. (برای تانژانت و کتانژانت نیز به همین صورت، البته به شرطی که هیچ‌یک از دو زاویه باعث بی‌معنی شدن تانژانت و کتانژانت نشود.)

تمرین:

$\sin 150 = \sin(\pi - 30) =$
$\cos 150 = \cos(\pi - 30) =$
$\tan 150 = \tan(\pi - 30) =$
$\cot 150 = \cot(\pi - 30) =$
$\sin 120 = \sin(\pi - 60) =$
$\cos 120 = \cos(\pi - 60) =$
$\tan 120 = \tan(\pi - 60) =$
$\cot 120 = \cot(\pi - 60) =$

زاویه‌های مکمل

اگر $\alpha + \beta = \pi$ ، پس $\alpha = \pi - \beta$ و در نتیجه:

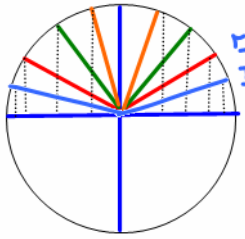
$$\sin\alpha = +\sin\beta \quad ، \quad \cos\alpha = -\cos\beta \quad ، \quad \tan\alpha = -\tan\beta \quad ، \quad \cot\alpha = -\cot\beta$$

بنابراین:

> اگر دو زاویه مکمل باشند، مجموع کسینوس‌های آن، تانژانت‌های آن‌ها و کتانژانت‌های آن‌ها مساوی صفر است.

تمرین: حاصل $\tan\frac{\pi}{7}+\tan\frac{6\pi}{7}+\cos\frac{\pi}{5}+\cos\frac{4\pi}{5}$ مساوی صفر است، زیرا:

$$\frac{\pi}{7}+\frac{6\pi}{7}=\pi \Rightarrow \tan\frac{\pi}{7}+\tan\frac{6\pi}{7}=0 \quad , \quad \frac{\pi}{5}+\frac{4\pi}{5}=\pi \Rightarrow \cos\frac{\pi}{5}+\cos\frac{4\pi}{5}=0$$



تمرین: حاصل عبارت $\cos\frac{\pi}{n}+\cos\frac{2\pi}{n}+\cdots+\cos\frac{n-1}{n}\pi$ با فرض فردبودن n کدام است؟

۱) ۱ ۲) صفر ۳) n ۴) $-n$

پاسخ: گزینه‌ی «۲»

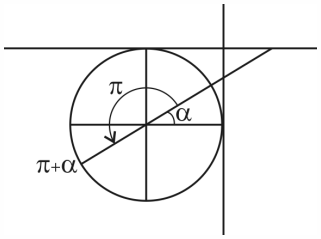
$$\cos\frac{\pi}{n}+\cos\frac{2\pi}{n}+\cdots+\cos\frac{(n-2)\pi}{n}+\cos\frac{(n-1)\pi}{n}$$

توی این مدل از سؤالات اولی و آخری رو با هم بگیرید و به همین ترتیب دومی رو با یکی مونده به آخری و ... . دقت کنید که اگر این زاویه‌ها را با هم جمع کنیم دو به دو جمعشان π می‌شود. یعنی مکمل هم هستند پس جمع کسینوس‌هایشان صفر می‌شود.

$$\frac{\pi}{n}+\frac{(n-1)\pi}{n}=\frac{\pi}{n}+\frac{n\pi-\pi}{n}=\frac{n\pi}{n}=\pi$$
$$\frac{2\pi}{n}+\frac{(n-2)\pi}{n}=\frac{2\pi}{n}+\frac{n\pi-2\pi}{n}=\frac{n\pi}{n}=\pi$$

پس جواب صفر است.

نسبت‌های مثلثاتی $(\alpha,\pi+\alpha)$



$$\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha$$
$$\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha$$
$$\tan(\pi+\alpha)=\tan\alpha$$
$$\cot(\pi+\alpha)=\cot\alpha$$

یادت باشه: اگر به زاویه‌ای π رادیان اضافه شود، سینوس و کسینوس قرینه می‌شود، اما تانژانت و کتانژانت ثابت می‌مانند.

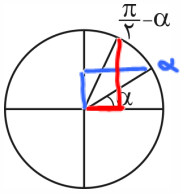
تذکر: در سینوس و کسینوس از مضارب زوج π و در تانژانت و کتانژانت از هر مضارب π چه فرد چه زوج صرف نظر می‌کنیم

$$\begin{cases}\sin(2k\pi+\alpha)=\sin\alpha\\ \cos(2k\pi+\alpha)=\cos\alpha\end{cases} \qquad \begin{cases}\tan(k\pi+\alpha)=\tan\alpha\\ \cot(k\pi+\alpha)=\cot\alpha\end{cases}$$

تمرین:

$$\sin 210^\circ=\sin(\pi+30^\circ)=-\frac{1}{2}$$
$$\cos 210^\circ=\cos(\pi+30^\circ)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\tan 210^\circ=\tan(\pi+30^\circ)=\frac{\sqrt{3}}{3}$$
$$\cot 210^\circ=\cot(\pi+30^\circ)=\sqrt{3}$$

نسبت‌های مثلثاتی دو زاویه متمم (جمع $\frac{\pi}{2}$)



$$\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\cos\alpha$$
$$\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\sin\alpha$$
$$\tan(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\cot\alpha$$
$$\cot(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\tan\alpha$$

یادت باشه: در مضارب فرد $\frac{\pi}{2}$ نام نسبت عوض می‌شود. $\sin \rightleftarrows \cos$ و $\tan \rightleftarrows \cot$

$$\sin(\frac{\pi}{2}+\alpha)=\cos\alpha \qquad \tan(\frac{\pi}{2}+\alpha)=-\cot\alpha$$

یادت باشه:

$$\cos(\frac{\pi}{2}+\alpha)=-\sin\alpha \qquad \cot(\frac{\pi}{2}+\alpha)=-\tan\alpha$$

تذکر: در تمامی حالات فوق، α را زاویه‌ای حادّه در نظر گرفتیم.

یادت باشه: برای شما نحوه‌ی $\cos(\frac{3\pi}{2}+\alpha)$ را توضیح می‌دم و بدانید که تمامی حالات فوق را باید با این روش بررسی کنید و حفظ کردن آن‌ها کار خوبی نیست. α زاویه‌ای حادّه است. $\frac{3\pi}{2}+\alpha$ یعنی در جهت مثبت مثلثاتی (خلاف جهت عقربه‌های ساعت) به اندازه‌ی $\frac{3\pi}{2}$ (۲۷۰ درجه) حرکت کنیم و سپس چون $+\alpha$ داریم یعنی مقداری دیگر نیز در این جهت جلو برویم. پس انتهای کمان، ربع سوم را رد کرد و در ربع چهارم قرار دارد. حالا می‌گوییم که در ربع چهارم، کسینوس مثبت است، پس خروجی حتماً مثبت است و ضمناً به دلیل وجود فرد $\frac{\pi}{2}$ $(\frac{3\pi}{2})$ نام نسبت عوض شده و تبدیل به سینوس می‌شود. پس:

$$\cos(\frac{3\pi}{2}+\alpha)=+\sin\alpha$$

محاسبه‌ی سریع نسبت‌های مثلثاتی $\frac{k\pi}{6}$، $\frac{k\pi}{4}$ و $\frac{k\pi}{3}$

ابتدا با استفاده از زاویه‌ی مربوطه علامت نسبت رو مشخص کرده، بعد k را ندید گرفته و حاصل نسبت $\frac{\pi}{6}$ یا $\frac{\pi}{4}$ یا $\frac{\pi}{3}$ خواسته شده را قرار می‌دهیم. به عنوان مثال ببینید:

$$\sin(\frac{7\pi}{6})=\sin(\underbrace{7\times\frac{\pi}{6}}_{\text{ربع سوم}})=-\sin(\frac{\pi}{6})=-\frac{1}{2}$$

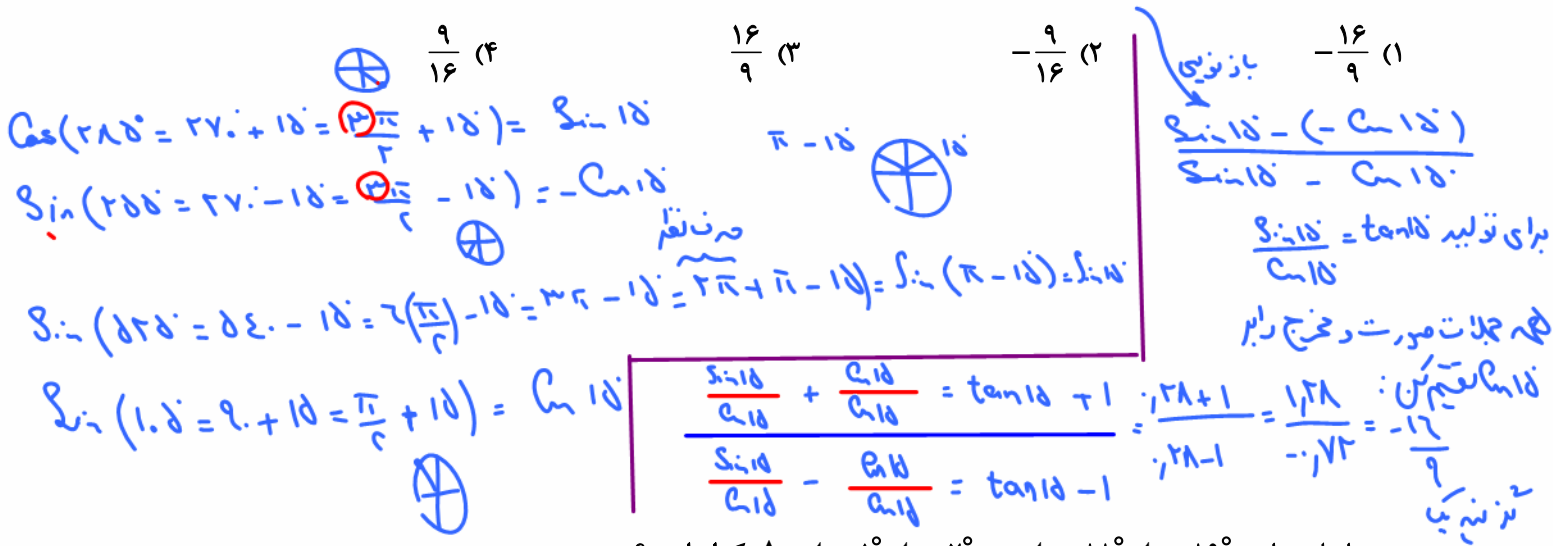
$$\cot(-\frac{5\pi}{3})=-\cot(\underbrace{5\times\frac{\pi}{3}}_{\text{ربع چهارم}})=-\Big(-\cot(\frac{\pi}{3})\Big)=-(-\frac{\sqrt{3}}{3})=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

برای تشخیص ساده‌تر زاویه‌هایی مثل $\frac{7\pi}{6}$ یا $\frac{5\pi}{3}$، توصیه می‌کنم آن‌ها را در ذهنتان به درجه تبدیل کنید، یعنی:

$$7\times\frac{\pi}{6}=7\times30^\circ=210^\circ \qquad \text{یا} \qquad 5\times\frac{\pi}{3}=5\times60^\circ=300^\circ$$

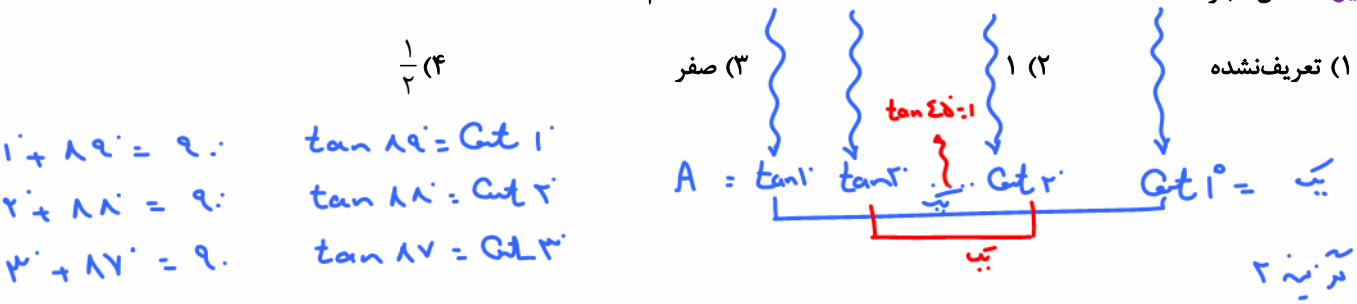
تمرین: حاصل عبارت $\frac{\cos 285^\circ - \sin 255^\circ}{\sin 525^\circ - \sin 105^\circ}$، با فرض $\tan 15^\circ = 0/28$ کدام است؟ (تجربی ۹۴)

۱) $-\frac{16}{9}$ ۲) $-\frac{9}{16}$ ۳) $\frac{16}{9}$ ۴) $\frac{9}{16}$



تمرین: حاصل عبارت $A = \tan 1^\circ . \tan 2^\circ ..... \tan 88^\circ . \tan 89^\circ$ کدام است؟

۱) تعریف‌نشده ۲) ۱ ۳) صفر ۴) $\frac{1}{2}$



چند نتیجه‌ی مهم از این سؤال: ۲ زاویه‌ای که متمم هستند، تانژانت و کتانژانت‌شان برابر است. $\tan\alpha = \cot\beta$ این اتفاق برای سینوس و کسینوس نیز صادق است، یعنی:

$$\alpha+\beta=\frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha=\frac{\pi}{2}-\beta \Rightarrow \begin{cases}\sin\alpha=\cos\beta\\ \cos\alpha=\sin\beta\end{cases}$$

به عنوان مثال: $\sin 15^\circ = \cos 75^\circ$، $\cos 53^\circ = \sin 37^\circ$ و ... ضمناً برای دو زاویه‌ای که متمم هستن، داریم:

$\tan\alpha . \tan\beta = 1$

تمرین: اگر $\tan 15^\circ = a$ باشد، حاصل $\frac{3\cos 165^\circ - 2\sin 285^\circ}{3\sin 345^\circ - 4\cos 255^\circ}$ کدام است؟

۱) $-\frac{1}{a}$ ✓ ۲) $-a$ ۳) $-\frac{2}{a}$ ۴) $-2a$

تمرین: مقدار عبارت $\cos(300^\circ)+\sin(330^\circ)+\cot(750^\circ)+\tan(-840^\circ)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $2\sqrt{3}$ ۳) صفر ۴) $2\frac{\sqrt{3}}{3}$

تمرین: حاصل عبارت $\sin^2\frac{\pi}{8}+\sin^2\frac{3\pi}{8}+\sin^2\frac{5\pi}{8}+\sin^2\frac{7\pi}{8}$ کدام است؟

۱) $\frac{5}{2}$ ۲) ۲ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) ۱

تمرین: حاصل عبارت $\sin(\frac{17\pi}{3})\cos(-\frac{17\pi}{6})+\tan(\frac{19\pi}{4})\sin(-\frac{11\pi}{6})$ کدام است؟

۱) $-\frac{1}{4}$ ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{1}{2}$

تمرین: حاصل عبارت $\sin(1095^\circ)\cos(255^\circ)-\tan(285^\circ)\tan(-165^\circ)$ کدام است؟ (خارج تجربی ۹۹)

۱) $\sin^2(15^\circ)$ ۲) $\cos^2(15^\circ)$ ۳) $-\sin^2(15^\circ)$ ۴) $-\cos^2(15^\circ)$

آموزش رایگان دبیران برند ایران تجربه کنید

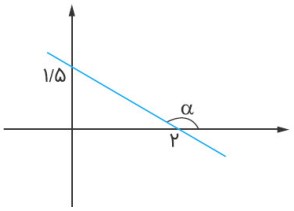
Homework

۱ حاصل عبارت $\frac{۳\cos(۲۴۸^\circ) - ۲\sin(۱۵۸^\circ)}{\sin(۲۰۲^\circ) - \cos(۲۹۲^\circ)}$ کدام است؟

۱) $۰/۵$
۲) $-۰/۵$
۳) $-۲/۵$
۴) $۲/۵$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

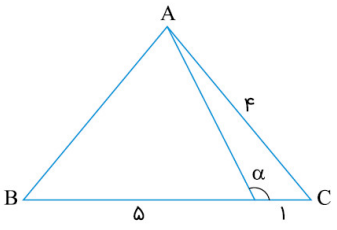
۲ در شکل زیر، زاویهٔ α مشخص شده است. مقدار $\tan(\frac{\pi}{۲} - \alpha)$ کدام است؟



۱) $\frac{۳}{۴}$
۲) $\frac{۴}{۳}$
۳) $-\frac{۳}{۴}$
۴) $-\frac{۴}{۳}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

۳ در شکل زیر، مثلث ABC متساوی‌الساقین است. مقدار $\tan\alpha$ کدام است؟



۱) $-\frac{۲}{۵}$
۲) $\frac{۲}{۵}$
۳) $-\frac{\sqrt{۷}}{۲}$
۴) $\frac{\sqrt{۷}}{۲}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۳

۴ اگر $\tan x + \cot x = -۳$ و $۳\pi < ۴x < ۴\pi$ باشد، حاصل $\frac{۱}{\cos^۳ x + \sin^۳ x}$ کدام است؟

۱) $-۰/۵\sqrt{۶}$
۲) $۰/۷۵\sqrt{۳}$
۳) $-۰/۷۵\sqrt{۳}$
۴) $۰/۵\sqrt{۶}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۵ اگر $\tan x + \cot x = ۴$ و $۵\pi < ۴x < ۶\pi$ باشد، حاصل $\frac{۱}{\sin^۳ x - \cos^۳ x}$ کدام است؟

۱) $-۰/۸\sqrt{۲}$
۲) $۰/۸\sqrt{۲}$
۳) $-\frac{۱/۶}{\sqrt{۳}}$
۴) $\frac{۱/۶}{\sqrt{۳}}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۲

۶ حاصل عبارت $\frac{\sin ۲۵۰^\circ + \sin ۷۰۰^\circ}{\cos ۵۶۰^\circ - \cos ۱۱۰^\circ}$، با فرض $\tan ۲۰^\circ = ۰/۴$، کدام است؟

۱) $-\frac{۳}{۴}$
۲) $\frac{۳}{۴}$
۳) $\frac{۷}{۳}$
۴) $\frac{۵}{۸}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۴

۷ اگر $\tan \theta = ۰/۲$ باشد، مقدار $\frac{\cos(\frac{۳\pi}{۲} + \theta) - \cos(\pi + \theta)}{\sin(\pi - \theta) - \sin(۳\pi + \theta)}$ کدام است؟

۱) -۲
۲) ۱/۲
۳) ۲
۴) ۳

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۱

۸ حاصل عبارت $\frac{\cos ۲۸۵^\circ - \sin ۲۵۵^\circ}{\sin ۵۲۵^\circ - \sin ۱۰۵^\circ}$، با فرض $\tan ۱۵^\circ = ۰/۲۸$، کدام است؟

۱) $-\frac{۱۶}{۹}$
۲) $-\frac{۹}{۱۶}$
۳) $\frac{۹}{۱۶}$
۴) $\frac{۱۶}{۹}$

علوی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۸ ۱۴۰۱
کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۴

۹ حاصل عبارت $\tan(۳۰۰)\cos(۲۱۰) + \tan(۴۸۰)\sin(۸۴۰)$، کدام است؟ (اعداد داده‌شده برحسب درجه هستند)

۱) $-\frac{۱}{۲}$
۲) صفر
۳) ۱
۴) ۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۹
علوی علوم تجربی یازدهم آزمون شماره ۶ ۱۴۰۱
علوی علوم تجربی یازدهم آزمون شماره ۷ ۱۴۰۱

۱۰ فرض کنید زاویهٔ α در ناحیهٔ چهارم مثلثاتی و $\cos(\alpha)=\frac{۲}{۳}$ باشد، حاصل عبارت $\frac{\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{۲}\right)-\sin(\alpha-\pi)}{\left|\tan^{۲}(\alpha)-۱\right|}$، کدام است؟

۱) $\frac{۴\left(۲+\sqrt{۵}\right)}{۳}$
۲) $\frac{۴\left(-۲+\sqrt{۵}\right)}{۳}$
۳) $\frac{۴\left(۲-\sqrt{۵}\right)}{۳}$
۴) $-\frac{۴\left(۲+\sqrt{۵}\right)}{۳}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

۱۱ حاصل عبارت $\cos(۲۵۵)\sin(۱۰۹۵)-\tan(-۱۶۵)\tan(۲۸۵)$، کدام است؟ (اعداد داده‌شده برحسب درجه هستند.)

۱) $\sin^{۲}(۱۵)$
۲) $\cos^{۲}(۱۵)$
۳) $-\sin^{۲}(۱۵)$
۴) $-\cos^{۲}(۱۵)$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

۱۲ حاصل عبارت $\cos\frac{۱۰\pi}{۳}+\sin\frac{۱۱\pi}{۳}\tan\frac{۱۷\pi}{۶}$، کدام است؟

۱) -۱
۲) صفر
۳) ۱
۴) $\sqrt{۳}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۸

۱۳ اگر $\tan\alpha=\frac{۴}{۳}$ و انتهای کمان α در ربع سوم باشد، حاصل عبارت زیر کدام است؟

$$\sin\left(\frac{۹\pi}{۲}+\alpha\right)\cos\left(\frac{۷\pi}{۲}-\alpha\right)-\tan\left(\alpha-\frac{۳\pi}{۲}\right)$$

۱) -۱/۲۳
۲) -۰/۵۲
۳) ۰/۲۷
۴) ۰/۴۸

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

۱۴ اگر $\frac{\pi}{۲}<x<\pi$ باشد، حاصل عبارت $\frac{\tan x}{\sqrt{۱+\tan^{۲}x}}\left(\frac{۱}{\sin x}-\sin x\right)$، کدام است؟

۱) $-\cos^{۲}x$
۲) $-\cos x$
۳) $\cos^{۲}x$
۴) $\cos x$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۸

۱۵ حاصل عبارت $\sin(\frac{۱۷\pi}{۳})\cos(\frac{-۱۷\pi}{۶})+\tan(\frac{۱۹\pi}{۴})\sin(\frac{-۱۱\pi}{۶})$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۴}$
۲) $-\frac{۱}{۲}$
۳) $\frac{۱}{۴}$
۴) $\frac{۱}{۲}$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۱۶ اگر $\pi < x < \frac{۳\pi}{۲}$ باشد، حاصل $\sqrt{۱+\tan^۲ x}(۲\sin^۲\frac{\pi}{۴}-\sin^۲ x)$ کدام است؟

۱) $\sin x$
۲) $\cos x$
۳) $-\sin x$
۴) $-\cos x$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۸

۱۷ حاصل عبارت $\tan\frac{۱۱\pi}{۴}+\sin\frac{۱۵\pi}{۴}\cos\frac{۱۳\pi}{۴}$، کدام است؟

۱) $-\frac{۳}{۲}$
۲) $-\frac{۱}{۲}$
۳) $\frac{۱}{۲}$
۴) $\frac{۳}{۲}$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۸

پاسخ Homework

۱ گزینه ۴

$$\frac{۳\cos(۲۴۸^\circ)-۲\sin(۱۵۸^\circ)}{\sin(۲۰۲^\circ)-\cos(۲۹۲^\circ)}=\frac{۳\cos(۲۷۰^\circ-۲۲^\circ)-۲\sin(۱۸۰^\circ-۲۲^\circ)}{\sin(۱۸۰^\circ+۲۲^\circ)-\cos(۲۷۰^\circ+۲۲^\circ)}$$
$$=\frac{-۳\sin ۲۲^\circ-۲\sin ۲۲^\circ}{-\sin ۲۲^\circ-\sin ۲۲^\circ}=\frac{۵}{۲}$$

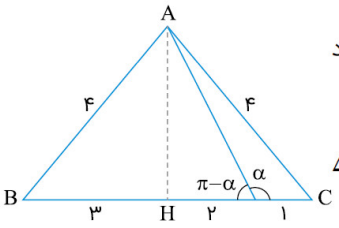
کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

۲ گزینه ۴

$$\tan(\pi-\alpha)=\frac{۱/۵}{۲}\Rightarrow\tan\alpha=-\frac{۳}{۴}$$
$$\tan(\frac{\pi}{۲}-\alpha)=\cot\alpha=\frac{۱}{\tan\alpha}=-\frac{۴}{۳}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۳

۳ گزینه ۳



اگر ارتفاع AH را رسم کنیم چون مثلث متساوی‌الساقین است این ارتفاع میانه نیز خواهد بود پس:

$$\Delta AHC\Rightarrow AH^۲+۹=۱۶\Rightarrow AH^۲=۷\Rightarrow AH=\sqrt{۷}$$

پس:

$$\tan(\pi-\alpha)=\frac{\sqrt{۷}}{۲}\Rightarrow-\tan\alpha=\frac{\sqrt{۷}}{۲}\Rightarrow\tan\alpha=-\frac{\sqrt{۷}}{۲}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۳