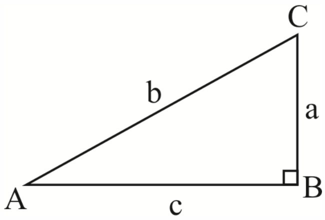
مثلثات

نسبت‌های مثلثاتی

فرض می‌کنیم A یک زاویهٔ حادهٔ معلوم باشد، اگر مثلث قائم‌الزاویه‌ای را در نظر بگیریم که یکی از زاویه‌های غیرقائم آن A است، حاصل هر یک از کسرهای:

۱) $\frac{\text{طول ضلع مقابل به زاویهٔ } A}{\text{طول ضلع مجاور به زاویهٔ } A}$، ۲) $\frac{\text{طول ضلع مجاور به زاویهٔ } A}{\text{طول ضلع مقابل به زاویهٔ } A}$، ۳) $\frac{\text{طول ضلع مقابل به زاویهٔ } A}{\text{وتر}}$ و ۴) $\frac{\text{طول ضلع مجاور به زاویهٔ } A}{\text{وتر}}$

همواره مقداری ثابت می‌باشند؛ یعنی فقط مقدار زاویهٔ A مهم است و اندازهٔ اضلاع مثلث قائم‌الزاویه‌ای که یک زاویه‌اش برابر $\hat{A}$ است تأثیری در این مقادیر ندارد. به دلیل ثابت بودن این مقادیر برای زاویهٔ A، هر یک از آن‌ها را به ترتیب ۱) تانژانت زاویهٔ A، ۲) کتانژانت زاویهٔ A، ۳) سینوس زاویهٔ A و ۴) کسینوس زاویهٔ A می‌نامیم.

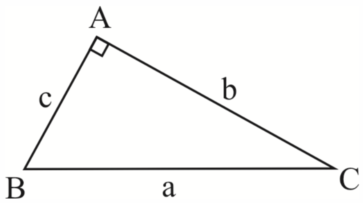


$$\sin\hat{A}=\frac{BC}{AC}=\frac{a}{b} \qquad \cos\hat{A}=\frac{AB}{AC}=\frac{c}{b}$$

$$\tan\hat{A}=\frac{BC}{AB}=\frac{a}{c} \qquad \cot\hat{A}=\frac{AB}{BC}=\frac{c}{a}$$

در یک مثلث قائم‌الزاویه، نسبت‌های سینوس، کسینوس، تانژانت و کتانژانت را نسبت‌های مثلثاتی می‌نامیم.

تمرین: در شکل مقابل $a+c=۱۸$ و $\cos\hat{B}=\frac{۵}{۱۳}$، مقدار $\tan\hat{C}$ کدام است؟



۱) $\frac{۵}{۱۲}$ ۲) $\frac{۱۲}{۵}$

۳) $\frac{۱۳}{۵}$ ۴) $\frac{۵}{۱۳}$

پاسخ: گزینهٔ «۱» ـ با توجه به تعریف کسینوس یک زاویه در مثلث قائم‌الزاویه، می‌توان نوشت:

$$\cos\hat{B}=\frac{c}{a} \Rightarrow \frac{۵}{۱۳}=\frac{c}{a} \xrightarrow{\times a} c=\frac{۵}{۱۳}a$$

از رابطهٔ $a+c=۱۸$ استفاده می‌کنیم:

$$a+c=۱۸ \Rightarrow a+\frac{۵}{۱۳}a=۱۸ \Rightarrow \frac{۱۸}{۱۳}a=۱۸ \Rightarrow a=۱۳ \Rightarrow c=۵$$

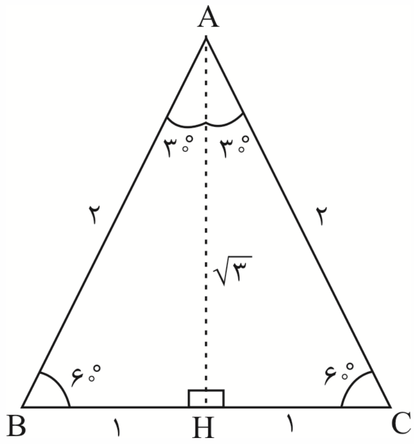
حال به کمک رابطهٔ فیثاغورس اندازهٔ b را محاسبه می‌کنیم:

$$a^۲=b^۲+c^۲ \Rightarrow ۱۳^۲=b^۲+۵^۲ \Rightarrow b^۲=۱۶۹-۲۵=۱۴۴ \xrightarrow{\sqrt{}} b=۱۲$$

می‌دانیم که تانژانت یک زاویه، برابر نسبت ضلع مقابل به ضلع مجاور آن زاویه است.

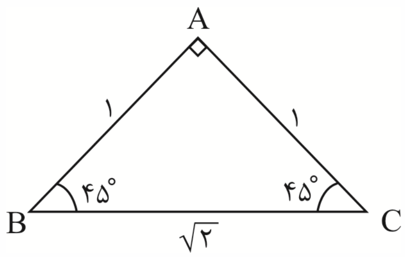
$$\tan\hat{C}=\frac{c}{b} \Rightarrow \tan\hat{C}=\frac{۵}{۱۲}$$

نکته: با در نظر گرفتن مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۲ واحد، می‌توان نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های ۳۰° و ۶۰° را به صورت زیر محاسبه کرد. در مثلث متساوی‌الاضلاع، ارتفاع، میانه، نیمساز و عمودمنصف وارد بر یک ضلع بر هم منطبق‌اند.



$$\overset{\Delta}{ABH}:\begin{cases}\sin ۳۰^\circ=\dfrac{BH}{AB}=\dfrac{۱}{۲}\\ \cos ۳۰^\circ=\dfrac{AH}{AB}=\dfrac{\sqrt{۳}}{۲}\\ \tan ۳۰^\circ=\dfrac{BH}{AH}=\dfrac{۱}{\sqrt{۳}}=\dfrac{\sqrt{۳}}{۳}\\ \cot ۳۰^\circ=\dfrac{AH}{BH}=\sqrt{۳}\end{cases}\quad ,\quad \begin{cases}\sin ۶۰^\circ=\dfrac{AH}{AB}=\dfrac{\sqrt{۳}}{۲}\\ \cos ۶۰^\circ=\dfrac{BH}{AB}=\dfrac{۱}{۲}\\ \tan ۶۰^\circ=\dfrac{AH}{BH}=\sqrt{۳}\\ \cot ۶۰^\circ=\dfrac{BH}{AH}=\dfrac{۱}{\sqrt{۳}}=\dfrac{\sqrt{۳}}{۳}\end{cases}$$

با در نظر گرفتن مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین به اضلاع قائمه ۱ واحد می‌توان نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ ۴۵° (به عنوان مثال **B**) را به صورت زیر محاسبه کرد:



$$\sin ۴۵^\circ=\frac{AC}{BC}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\qquad \cos ۴۵^\circ=\frac{AB}{BC}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\tan ۴۵^\circ=\frac{AC}{AB}=۱\qquad \cot ۴۵^\circ=\frac{AB}{AC}=۱$$

خلاصهٔ نسبت‌های مثلثاتی زوایای معروف $(۶۰^\circ, ۴۵^\circ, ۳۰^\circ)$

مقدار زاویهٔ θ / مقدار نسبت مثلثاتی	۳۰°	۴۵°	۶۰°
$\sin\theta$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$
$\cos\theta$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$
$\tan\theta$	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۱	$\sqrt{۳}$
$\cot\theta$	$\sqrt{۳}$	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$

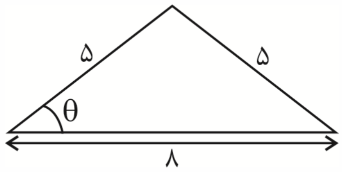
تمرین: مقدار x در تساوی $\dfrac{\sqrt{۳}\tan ۶۰^\circ-۴\sin ۳۰^\circ}{۲\sqrt{۲}\cos ۴۵^\circ+\cot ۴۵^\circ}=x\cos ۶۰^\circ$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$　　۲) $\frac{۲}{۳}$　　۳) ۳　　۴) $\frac{۳}{۲}$

پاسخ: گزینهٔ «۲» ـ کافی است مقدار عددی هر یک از نسبت‌های مثلثاتی زوایای داده‌شده را جای‌گذاری کنیم:

$$x\times\frac{۱}{۲}=\frac{\sqrt{۳}\times\sqrt{۳}-۴\times\frac{۱}{۲}}{۲\sqrt{۲}\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}+۱}\Rightarrow \frac{x}{۲}=\frac{۳-۲}{۲+۱}=\frac{۱}{۳}\xrightarrow{\times ۲}x=\frac{۲}{۳}$$

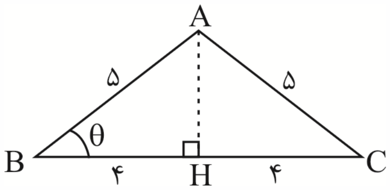
تمرین: در مثلث مقابل، مقدار $۲\cos\theta+\sin\theta$ کدام است؟



۱) $\frac{۸}{۵}$　۲) $\frac{۹}{۵}$

۳) $\frac{۱۱}{۵}$　۴) $\frac{۱۲}{۵}$

پاسخ: گزینهٔ «۳» ـ مثلث رسم‌شده، متساوی‌الساقین است. پس ارتفاع، میانه و نیمساز وارد بر قاعده بر هم منطبق‌اند. ارتفاع وارد بر قاعده را رسم می‌کنیم:



$$\overset{\Delta}{ABH}: AB^۲ = AH^۲ + BH^۲ \Rightarrow ۲۵ = AH^۲ + ۱۶ \Rightarrow AH^۲ = ۹ \xrightarrow{\sqrt{\ }} AH = ۳$$

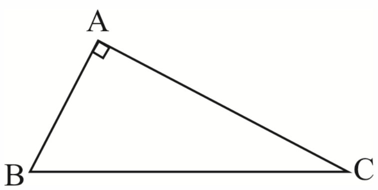
$$\sin\theta = \frac{AH}{AB} = \frac{۳}{۵} \ , \ \cos\theta = \frac{BH}{AB} = \frac{۴}{۵}$$

در نتیجه مقدار خواسته‌شده برابر است با:

$$۲\cos\theta + \sin\theta = \frac{۸}{۵} + \frac{۳}{۵} = \frac{۱۱}{۵}$$

ارتباط بین نسبت‌های مثلثاتی زوایای متمم

اگر دو زاویه متمم هم باشند (مجموعشان ۹۰° باشد)، آن‌گاه سینوس یکی با کسینوس دیگری برابر است و برعکس، تانژانت یکی با کتانژانت دیگری برابر است و برعکس. در شکل زیر داریم:



$$\hat{B} + \hat{C} = ۹۰^\circ$$

$$\sin\hat{B} = \frac{AC}{BC} = \cos\hat{C} \ , \ \sin\hat{C} = \frac{AB}{BC} = \cos\hat{B}$$

$$\tan\hat{B} = \frac{AC}{AB} = \cot\hat{C} \ , \ \tan\hat{C} = \frac{AB}{AC} = \cot\hat{B}$$

تمرین: حاصل عبارت $P = \frac{۵\sin ۲^\circ \times \cot ۸۳^\circ \times \tan ۷۶^\circ}{۸\cot ۱۴^\circ \times \cos ۸۸^\circ \times \tan ۷^\circ}$ کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۸}$　۲) $-\frac{۵}{۸}$　۳) $\frac{۸}{۵}$　۴) $-\frac{۸}{۵}$

پاسخ: گزینهٔ «۱» ـ از روابط نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های متمم استفاده می‌کنیم:

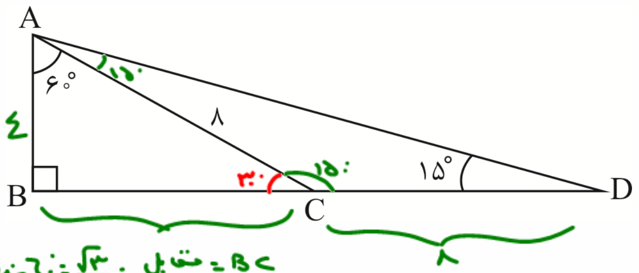
$$۷۶^\circ + ۱۴^\circ = ۹۰^\circ \Rightarrow \tan ۷۶^\circ = \cot ۱۴^\circ$$

$$۸۳^\circ + ۷^\circ = ۹۰^\circ \Rightarrow \cot ۸۳^\circ = \tan ۷^\circ$$

$$۲^\circ + ۸۸^\circ = ۹۰^\circ \Rightarrow \sin ۲^\circ = \cos ۸۸^\circ$$

$$P = \frac{۵\sin ۲^\circ \times \cot ۸۳^\circ \times \tan ۷۶^\circ}{۸\tan ۷۶^\circ \times \sin ۲^\circ \times \cot ۸۳^\circ} = \frac{۵}{۸}$$

تمرین: در شکل مقابل اندازهٔ پاره‌خط BD برابر است با:



۱) $۴\sqrt{۳}+۴$

۲) $۴\sqrt{۳}+۸$

۳) $۴\sqrt{۳}+۱۲$

۴) ۱۶

$\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{BC}{8} \longrightarrow BC = 8\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 4\sqrt{3}$

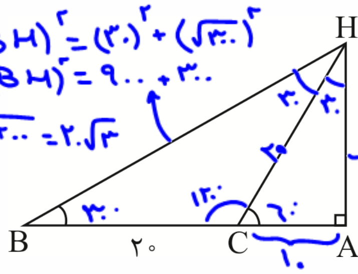
$BD = 4\sqrt{3} + 8$

۲ ✓

در مثلث قائم‌الزاویه ضلع روبه‌رو به زاویه ۳۰° نصف وتر است لذا

$AB = \frac{AC}{2} = \frac{8}{2}$

تمرین: در شکل مقابل اگر $\hat{B}=۳۰°$ و $\hat{C}=۶۰°$، اندازهٔ AH کدام است؟



۱) ۱۰

۲) $۲۰\sqrt{۳}$

۳) $۱۰\sqrt{۳}$

۴) ۲۰

$(BH)^2 = (30)^2 + (\sqrt{300})^2$

$(BH)^2 = 900 + 300$

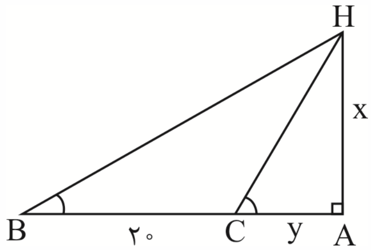
$BH = \sqrt{1200} = 20\sqrt{3}$

$(4)(100)(3)$

$20^2 = (AH)^2 + 10^2$

$AH = \sqrt{300}$

پاسخ: گزینهٔ «۳» ـ اگر فرض کنیم $AH = x$ و $AC = y$، آن‌گاه در شکل مقابل داریم:

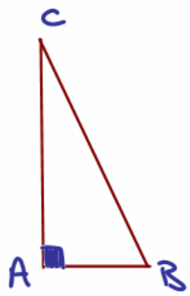


$$\begin{cases} \tan\hat{B} = \dfrac{AH}{AB} = \dfrac{x}{۲۰+y} \Rightarrow \tan ۳۰° = \dfrac{x}{y+۲۰} = \dfrac{\sqrt{۳}}{۳} \quad (*) \\ \tan\hat{C} = \dfrac{AH}{AC} \Rightarrow \tan ۶۰° = \dfrac{x}{y} \Rightarrow \sqrt{۳} = \dfrac{x}{y} \end{cases}$$

$$x = y\sqrt{۳} \xrightarrow{(*)} \frac{y\sqrt{۳}}{y+۲۰} = \frac{\sqrt{۳}}{۳} \Rightarrow ۳y = y+۲۰ \Rightarrow y = ۱۰ \Rightarrow x = ۱۰\sqrt{۳} \Rightarrow AH = ۱۰\sqrt{۳}$$

تمرین: در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC که $\hat{A}=۹۰°$، حاصل $\frac{۱}{۱+\tan\hat{C}}+\frac{۱}{۱+\tan\hat{B}}$ کدام است؟

۱) ۱ ✓   ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) ۲   ۴) ۴



B و C متمم

جمعشان نود لذا $\hat{B}+\hat{C}=90°$

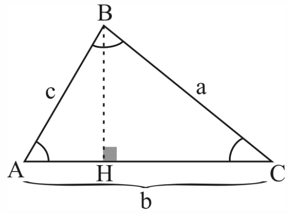
$\tan\hat{C} = \cot\hat{B}$

$\frac{1}{1+\tan\hat{B}} + \frac{1}{1+\cot B} = \left(\frac{1}{1+\frac{\sin B}{\cos B} = \frac{\cos B+\sin B}{\cos B}} = \frac{\cos B}{\sin B+\cos B}\right) + \left(\frac{1}{1+\frac{\cos B}{\sin B} = \frac{\sin B+\cos B}{\sin B}} = \frac{\sin B}{\sin B+\cos B}\right)$

$= \frac{\sin B+\cos B}{\sin B+\cos B} = 1$

حل مثلث و کاربردهای آن

به شکل روبه‌رو و اطلاعات زیر در مورد مثلث توجه کنید.



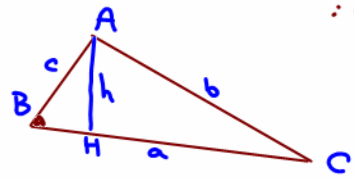
$$۱)\ A+B+C=۱۸۰^\circ$$

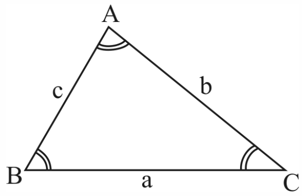
$$۲)\ \text{محیط}=a+b+c$$

منظور از حل مثلث، یافتن همه‌ی زوایا و اضلاع آن است.

۱- مساحت مثلث: اگر دو ضلع یک مثلث و زاویه‌ی بین آن‌ها را داشته باشیم، آن‌گاه مساحت مثلث از رابطه‌ی زیر محاسبه می‌شود:

اثبات:





$$\text{مساحت}=\frac{۱}{۲}ab\sin C=\frac{۱}{۲}bc\sin A=\frac{۱}{۲}ac\sin B$$

ضرب در ۲، تقسیم بر abc

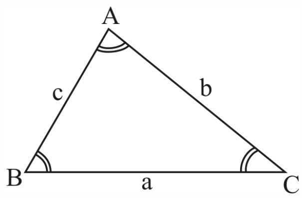
$$\frac{\sin\hat{C}}{c}=\frac{\sin\hat{A}}{a}=\frac{\sin\hat{B}}{b}$$

$$\frac{c}{\sin\hat{C}}=\frac{a}{\sin\hat{A}}=\frac{b}{\sin\hat{B}}$$

$$S=\frac{۱}{۲}(BC=a)(AH=h)=\frac{۱}{۲}ac\sin\hat{B}$$

$$\sin\hat{B}=\frac{h}{c}\rightarrow h=c\sin B$$

۲- قانون سینوس‌ها: می‌دانیم مساحت یک مثلث برابر است با نصف حاصل‌ضرب دو ضلع در سینوس زاویه‌ی بین آن‌ها. پس:



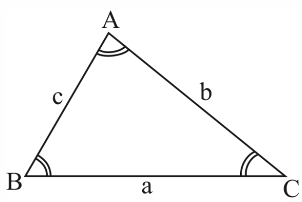
$$S=\frac{۱}{۲}ab\sin C=\frac{۱}{۲}ac\sin B=\frac{۱}{۲}bc\sin A$$

با تقسیم طرفین تساوی‌ها بر $\frac{۱}{۲}abc$ و معکوس کردن آن‌ها، داریم:

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}\quad \text{(قانون سینوس‌ها)}$$

توجه: قانون سینوس‌ها، برای حل مثلث‌هایی که در آن یک ضلع و زاویه‌ی روبه‌روی آن را داریم، بسیار سودمند خواهد بود.

۳- قانون کسینوس‌ها: وقتی دو ضلع یک مثلث و زاویه‌ی بین آن‌ها را داشته باشیم، قانون سینوس‌ها برای یافتن اضلاع و زوایا قابل استفاده نیست. در این حالت از «قانون کسینوس‌ها» استفاده می‌کنیم. تعمیم فیثاغورث

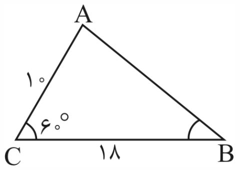


$$۱)\ a^۲=b^۲+c^۲-۲bc\cos A$$

$$۲)\ b^۲=a^۲+c^۲-۲ac\cos B$$

$$۳)\ c^۲=a^۲+b^۲-۲ab\cos C$$

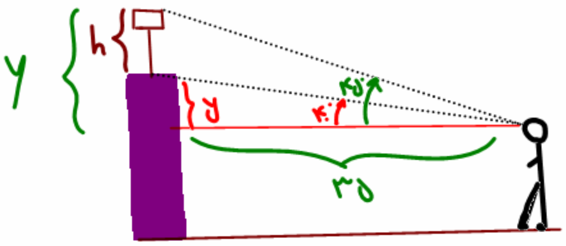
تمرین: در شکل روبه‌رو، طول AB را بیابید.



پاسخ: $AB^2 = 10^2 + 18^2 - 2(10)(18)\cos 60^\circ = 100 + 324 - 360\left(\frac{1}{2}\right) = 244 \Rightarrow AB = \sqrt{244}$

تمرین: ناظری به فاصله‌ی ۳۵ متر از پای ستونی که بر روی آن مجسمه‌ای قرار دارد، ایستاده است. زاویه‌ی رؤیت انتها و ابتدای مجسمه با سطح افق 45° و 40° است. ارتفاع مجسمه کدام است؟ $(\tan 40^\circ = 0/8)$ (خارج ریاضی ۹۴)

۱) ۶ ۲) ۶/۴ ۳) ۷ ۴) ۷/۲



$\tan 45^\circ = 1 = \frac{Y}{35} \longrightarrow Y = 35$

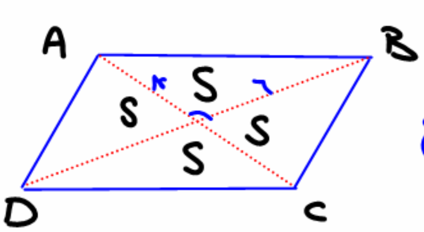
$\tan 40^\circ = 0/8 = \frac{y}{35} \longrightarrow y = 28$

$h = Y - y = 35 - 28 = 7^m$

تمرین: در متوازی‌الاضلاعی اندازه‌ی دو قطر ۱۲ و ۸ واحد و زاویه‌ی بین دو قطر ۱۳۵ درجه است. مساحت متوازی‌الاضلاع چند برابر $\sqrt{2}$ است؟ (تجربی ۹۲ و تجربی خارج ۹۶)

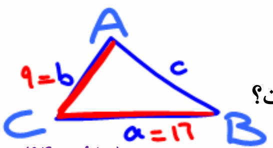
در متوازی‌الاضلاع اقطار منصف یکدیگرند.

۱) ۱۸ ۲) ۲۴ ۳) ۳۲ ۴) ۳۶



$S_{\text{متوازی‌الاضلاع}} = 4S = 4\left(\frac{1}{2}(4)(6)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) = 24\sqrt{2}$ ← $\frac{1}{2}ab\sin 135^\circ$

گزینه ۲



تمرین: مساحت مثلثی با دو ضلع ۱۶ و ۹ واحد برابر $24\sqrt{5}$ واحد مربع است. بزرگ‌ترین ضلع این مثلث کدام است؟ (ریاضی ۹۴)

۱) ۲۱ ۲) ۲۲ ۳) ۲۳ ۴) ۲۴

$S = \frac{1}{2}ab\sin\hat{C} = 24\sqrt{5} \longrightarrow \frac{1}{2}(9)(16)\sin\hat{C} = 24\sqrt{5} \rightarrow \sin\hat{C} = \frac{2(24)\sqrt{5}}{9(16)} = \frac{3(8)\sqrt{5}}{9(8)} = \frac{\sqrt{5}}{3}$

$\sin^2 C + \cos^2 C = 1$

$\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 + \cos^2 C = 1$

$\cos^2 C = 1 - \frac{5}{9} = \frac{4}{9} \rightarrow \cos C = \frac{2}{3}$ یا $-\frac{2}{3}$

با جایگذاری $\cos\hat{C} = -\frac{2}{3}$ مقدار بیشتری برای ضلع c پیدا می‌شود: گزینه ۳

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\hat{C} = (9)^2 + (16)^2 - 2(9)(16)\left(-\frac{2}{3}\right) = 23^2$

بیشترین مقدار باشد

راه اول:

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\hat{A} \longrightarrow (12)^2=(9)^2+(7)^2-2(9)(7)\cos\hat{A} \longrightarrow \cos\hat{A}=\frac{144-81-49}{-2(9)(7)}=-\frac{1}{9}$$

زاویه A منفرجه است < $\cos A$ ولی $\sin A>0$.

$$\sin^2A+\cos^2A=1 \longrightarrow \sin^2A+\left(-\frac{1}{9}\right)^2=1 \longrightarrow \sin^2A=1-\frac{1}{81}=\frac{80}{81} \longrightarrow \sin A=\frac{\sqrt{80}}{9}$$

$$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}(\cancel{9})(7)\frac{\sqrt{80=5(16)}}{\cancel{9}}=14\sqrt{5}$$

تمرین: مساحت مثلث به اضلاع ۷، ۹ و ۱۲ واحد کدام است؟ (ریاضی ۹۳)

۱) $15\sqrt{2}$ ۲) $14\sqrt{3}$ ۳) $12\sqrt{5}$ ۴) $14\sqrt{5}$

راه دوم:

محاسبه مساحت مثلث با داشتن طول سه ضلع: قاعده هرون:

نصف محیط $\frac{a+b+c}{2}=p$

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$\frac{7+9+12}{2}=14=p$$

$$S=\sqrt{14(14-7)(14-12)(14-9)}=\sqrt{14(7)(2)(5)}$$

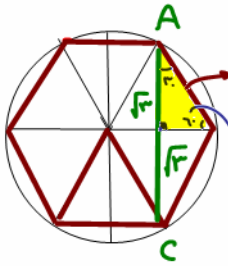
$$S=\sqrt{2(7)(7)(2)(5)}$$

$S=14\sqrt{5}$ گزینه ۴

حواستون به شش‌ضلعی منتظم هم باشه.

تمرین: اگر قطر کوچک یک شش‌ضلعی منتظم برابر با $2\sqrt{3}$ باشد، مساحت شش‌ضلعی منتظم کدام است؟ (قلم‌چی ۹۷)

۱) ۶ ۲) $6\sqrt{3}$ ۳) ۱۲ ۴) $12\sqrt{3}$



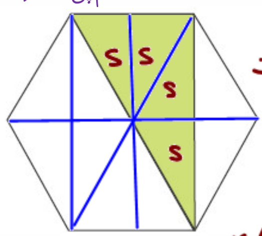
$$S=\text{شش برابر مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع}=6\left(a^2\frac{\sqrt{3}}{4}\right)=6(2)^2\frac{\sqrt{3}}{4}=6\sqrt{3}$$

جواب

$$\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{a} \longrightarrow a=2$$

$$S=\frac{1}{2}ab\sin\hat{C}=\frac{1}{2}aa\left(\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=a^2\frac{\sqrt{3}}{4}$$

تمرین: مساحت شش‌ضلعی منتظم موجود در شکل زیر $18\sqrt{3}$ است. مساحت ناحیهٔ رنگی چه‌قدر است؟ (قلم‌چی ۹۷ و ۹۹)



راه ۲: کاشی‌کاری: کل دوازده تا کاشی ساحتش $18\sqrt{3}$ است

پس مساحت هر کاشی: $S=\frac{18\sqrt{3}}{12}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$

مساحت ناحیه رنگی ۴ تا S است $=4\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)=6\sqrt{3}$

گزینه ۳

راه یک: استفاده از فرمول تست قبل

۱) ۱۲ ۲) ۱۸ ۳) $6\sqrt{3}$ ۴) $9\sqrt{3}$

راه ۳: اگر S بپیچیم باید ازش ۲ تا Δ متساوی‌الاضلاع داریم:

$$6S=\cancel{6}\left(a^2\frac{\sqrt{3}}{4}\right)=18\sqrt{3} \longrightarrow a^2=12$$

$$\text{مساحت رنگی}=2\left(\text{مساحت }\Delta\text{ متساوی‌الاضلاع}\right)=2\left(a^2\frac{\sqrt{3}}{4}\right)=2(12)\frac{\sqrt{3}}{4}=6\sqrt{3}$$

Homework (1)

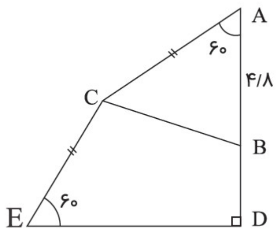
منبع:

۱ ناظری به فاصلهٔ ۳۵ متری از پای ستونی که بر روی آن مجسمه‌ای قرار دارد، ایستاده است. زاویهٔ دید بالا (از D به A) و پایین (از C به A) مجسمه با سطح افق ۴۵° و ۴۰° است. اگر $\tan ۴۰^\circ = ۰/۸$، ارتفاع مجسمه کدام است؟

۱) ۶
۲) ۷
۳) ۶/۴
۴) ۷/۲

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۴

۲ در شکل زیر، مساحت مثلث ABC برابر $۷/۲\sqrt{۳}$ است. فاصلهٔ D از C کدام است؟



۱) $۶\sqrt{۶}$
۲) $۳\sqrt{۶}$
۳) $۲\sqrt{۲}$
۴) $\sqrt{۲}$

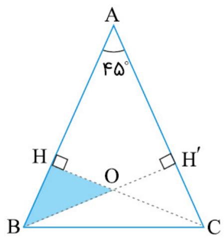
کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

۳ اگر مساحت یک شش ضلعی منتظم برابر $۹\sqrt{۳}$ باشد، اندازهٔ قطر کوچک آن کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۶}$
۲) $۳\sqrt{۲}$
۳) $۲\sqrt{۳}$
۴) ۳

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

۴ در شکل زیر مثلث ABC متساوی‌الساقین و طول ساق AB برابر ۸ واحد است. مساحت مثلث OHB، کدام است؟



۱) $\dfrac{۶}{۲+\sqrt{۳}}$

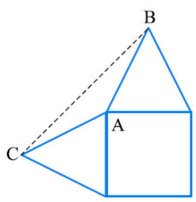
۲) $\dfrac{۸}{۲+\sqrt{۳}}$

۳) $\dfrac{۱۲}{۳+۲\sqrt{۲}}$

۴) $\dfrac{۱۶}{۳+۲\sqrt{۲}}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

۵ بر روی دو ضلع مجاور مربعی به ضلع ۲ واحد، مثلث‌های متساوی‌الاضلاع ساخته شده است. مساحت مثلث ABC، چند واحد مربع است؟



۱) $\sqrt{۳}-۱$

۲) $\frac{۱}{۲}\sqrt{۳}$

۳) ۱

۴) $\sqrt{۳}$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۶

۶ در ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین، با زاویهٔ ۶۰ درجه، قاعدهٔ کوچک‌تر برابر ساق آن است. اگر محیط این ذوزنقه ۳۰ واحد باشد، مساحت آن کدام است؟

۱) $۲۴\sqrt{۳}$ ۲) $۲۷\sqrt{۳}$

۳) ۴۸ ۴) ۵۴

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

۷ اندازهٔ دو قطر از متوازی‌الاضلاع ۱۲ و $۸\sqrt{۳}$ واحد است. این دو قطر با زاویهٔ ۶۰ درجه متقاطع هستند. مساحت این متوازی‌الاضلاع کدام است؟

۱) ۴۸ ۲) ۵۴

۳) ۶۴ ۴) ۷۲

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۶

۸ در داخل یک مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع واحد، بزرگ‌ترین مربع ممکن را می‌سازیم، اندازهٔ ضلع مربع کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۳}-۳$ ۲) $\sqrt{۳}-۱$

۳) $\sqrt{۳}-\frac{۱}{۲}$ ۴) $۲(\sqrt{۳}-۱)$

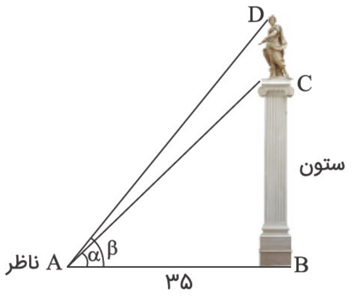
کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۲

پاسخ Homework (1)

۱

گزینه ۲

ابتدا مسئله را به مدل هندسی تبدیل می‌کنیم:



$$\alpha = ۴۰^\circ \quad , \quad \beta = ۴۵^\circ$$

$$\tan\beta = \frac{BD}{۳۵} \xrightarrow{\beta=۴۵^\circ} BD = ۳۵ \times \tan ۴۵^\circ = ۳۵$$

$$\tan\alpha = \frac{BC}{۳۵} \xrightarrow{\alpha=۴۰^\circ} BC = ۳۵ \times \tan ۴۰^\circ = \frac{۸}{۱۰} \times ۳۵ = ۲۸$$

بنابراین:

$$\text{ارتفاع مجسمه} : CD = BD - BC = ۳۵ - ۲۸ = ۷$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۴

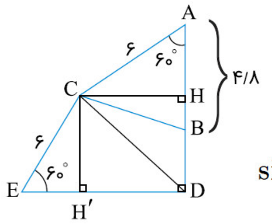
۲

گزینه ۲

$$\frac{۱}{۲} \times AC \times AB \times \sin ۶۰^\circ = ۷/۲ \times \sqrt{۳}$$

$$\frac{۱}{۲} \times AC \times ۴/۸ \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} = ۷/۲ \times \sqrt{۳} \Rightarrow AC = ۶ \Rightarrow EC = ۶$$

در مثلث AHC داریم:



$$\sin ۶۰^\circ = \frac{CH}{۶} \Rightarrow CH = ۳\sqrt{۳}$$

دو مثلث CEH' و ACH هم‌نهشت‌اند، پس درنتیجه $CH' = ۳\sqrt{۳}$. بنابراین چهارضلعی $HCH'D$ مربع است و داریم:

$$DC = ۳\sqrt{۳} \times \sqrt{۲} = ۳\sqrt{۶}$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۲

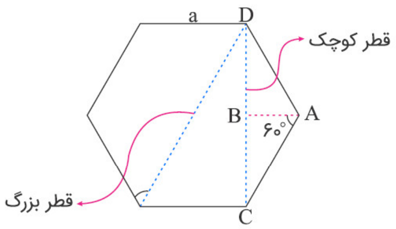
۳

گزینه ۲

شش ضلعی منتظم به ضلع a از شش مثلث متساوی‌الاضلاع به طول ضلع a تشکیل شده است، پس مساحت آن برابر است با:

$$S = ۶ \times \frac{۱}{۲} \times a \times a \times \sin ۶۰^\circ = \frac{۳\sqrt{۳}}{۲}a^۲$$

$$S = \frac{۳\sqrt{۳}}{۲}a^۲ = ۹\sqrt{۳} \Rightarrow a^۲ = ۶ \Rightarrow a = \sqrt{۶}$$



با استفاده از تقارن داریم:

$$DC = ۲BC = ۲AC\sin ۶۰^\circ = ۲\sqrt{۶} \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \sqrt{۱۸} = ۳\sqrt{۲}$$

نکته: در شش ضلعی منتظم به طول ضلع a داریم:

الف) طول قطر کوچک آن $a\sqrt{۳}$ است.

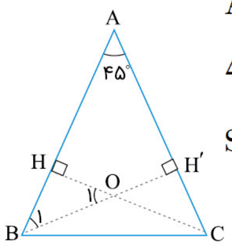
ب) طول قطر بزرگ آن ۲a است.

پ) مساحت آن $\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}a^۲$ است.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

۴

گزینه ۴



$$\hat{A} = ۴۵^\circ \Rightarrow \hat{O}_۱ = \hat{B}_۱ = ۴۵$$

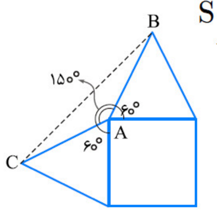
$$\Delta AHC : AH = \frac{AC}{\sqrt{۲}} = \frac{۸}{\sqrt{۲}} = ۴\sqrt{۲} \Rightarrow HB = HO = ۸ - ۴\sqrt{۲}$$

$$S_{OHB} = \frac{۱}{۲}(۸ - ۴\sqrt{۲})^۲ = \frac{۱}{۲} \times ۱۶(۲ - \sqrt{۲})^۲ = ۸(۶ - ۴\sqrt{۲}) = ۱۶(۳ - ۲\sqrt{۲}) = \frac{۱۶}{۳ + ۲\sqrt{۲}}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

۵

گزینه ۳



$$S_{\overset{\triangle}{ABC}} = \frac{۱}{۲} \times ۲ \times ۲ \times \sin ۱۵۰^\circ = \frac{۱}{۲} \times ۲ \times ۲ \times \sin ۳۰^\circ = \frac{۱}{۲} \times ۲ \times ۲ \times \frac{۱}{۲} = ۱$$

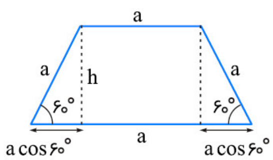
کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۶

۶

گزینه ۲

$$(\text{محیط})\ P = ۳a + ۲a\cos ۶۰^\circ + a \Rightarrow ۳۰ = ۵a \Rightarrow a = ۶$$

$$S = \frac{(a+۲a)h}{۲} = \frac{۳a \times a\sin ۶۰^\circ}{۲} \xrightarrow{a=۶} S = \frac{۳\sqrt{۳} \times ۶^۲}{۴} = ۲۷\sqrt{۳}$$



کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۹۵

۷

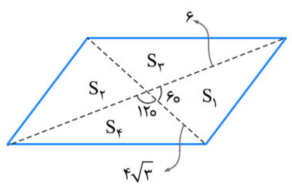
گزینه ۴

نکته: در مثلث ABC با اضلاع a، b و c، اگر زاویهٔ بین اضلاع a و b برابر با α باشد، مساحت مثلث برابر است با:

$$S = \frac{۱}{۲} \times a \times b \times \sin\alpha$$

بااستفاده از نکتهٔ بالا داریم:

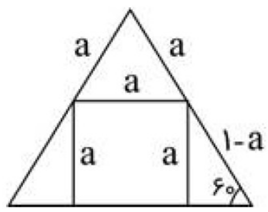
$$S_۱ = S_۲ \Rightarrow \frac{۱}{۲} \times ۶ \times ۴\sqrt{۳} \times \sin ۶۰^\circ = ۱۸$$
$$S_۳ = S_۴ \Rightarrow \frac{۱}{۲} \times ۶ \times ۴\sqrt{۳} \times \sin(۱۲۰^\circ) = ۱۸$$
$$S_۱ + S_۲ + S_۳ + S_۴ = ۴ \times ۱۸ = ۷۲$$



کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۶

۸

گزینه ۱

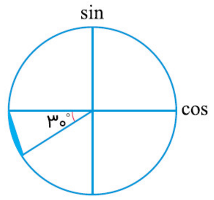


$$\sin ۶۰^\circ = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow \frac{a}{۱-a} = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow ۲a = \sqrt{۳} - \sqrt{۳}a \Rightarrow a = \frac{\sqrt{۳}}{۲+\sqrt{۳}} \Rightarrow a = ۲\sqrt{۳} - ۳$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۲

Homework (2)

۱ در دایرهٔ زیر، به شعاع ۳ واحد، مساحت ناحیهٔ رنگی کدام است؟



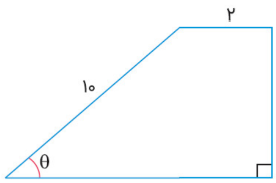
۱) $\frac{۳\pi}{۴}$

۲) $\frac{۳\pi}{۴} - ۱$

۳) $\frac{۳}{۴}(\pi - ۳)$

۴) $\frac{۹}{۴}$

۲ اگر $\sin\theta = \frac{۳}{۵}$ باشد، آنگاه مساحت ذوزنقهٔ زیر کدام است؟



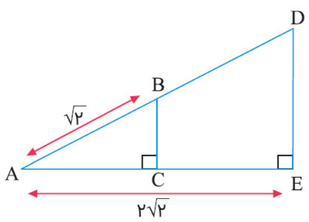
۱) ۱۲

۲) ۲۴

۳) ۳۶

۴) ۱۸

۳ در شکل زیر، X کدام است؟ $(X = AC \times AD)$



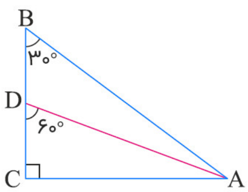
۱) ۲

۲) ۱۶

۳) ۸

۴) ۴

۴ در مثلث ABC شکل زیر، نسبت $\frac{AD}{BC}$ کدام است؟



۱) $\frac{۴\sqrt{۳}}{۳}$

۲) $\frac{۴}{۳}$

۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۴}$

۴) $\frac{۲}{۳}$

۵ به ازای کدام مقدار B تساوی $\tan^{۴}x - ۱ = \frac{B}{\cos^{۲}x} + \frac{۱}{\cos^{۴}x}$ برقرار است؟

۱) ۲ ۲) ۱

۳) ‎-۱ ۴) ‎-۲

پاسخ Homework (2)

۱ گزینه ۳

با محاسبهٔ مساحت این بخش از دایره و کم کردن مساحت مثلث از آن مساحت قسمت رنگی به دست می‌آید:

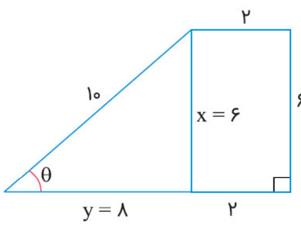
$$\frac{۳۶۰^\circ}{۳۰^\circ} = ۱۲ \Rightarrow \frac{S_{\text{دایره}}}{۱۲} = S_{\text{موردنظر}} = \frac{\pi r^۲}{۱۲} = \frac{۹\pi}{۱۲} = \frac{۳\pi}{۴}$$

$$S_{\text{مثلث}} = \frac{۱}{۲} \times ۳ \times ۳ \times \sin ۳۰ = \frac{۱}{۲} \times ۳ \times ۳ \times \frac{۱}{۲} = \frac{۹}{۴}$$

$$S_{\text{قسمت رنگی}} = \frac{۳\pi}{۴} - \frac{۹}{۴} = \frac{۳}{۴}(\pi - ۳)$$

۲ گزینه ۳

با تقسیم شکل به یک مثلث و یک مستطیل داریم:



$$\sin\theta = \frac{x}{۱۰} = \frac{۳}{۵} \Rightarrow x = ۶$$

$${}^{۶}x^۲ + y^۲ = ۱۰^۲ \Rightarrow ۳۶ + y^۲ = ۱۰۰ \Rightarrow y^۲ = ۶۴ \Rightarrow y = ۸$$

$$S_{\text{ذوزنقه}} = S_{\text{مثلث}} + S_{\text{مستطیل}}$$

$$\Rightarrow S_{\text{ذوزنقه}} = \frac{۱}{۲} \times ۶ \times ۸ + ۲ \times ۶ = ۲۴ + ۱۲ = ۳۶$$

۳ گزینه ۴

$$\cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{AE}{AD} \Rightarrow \frac{AC}{\sqrt{۲}} = \frac{۲\sqrt{۲}}{AD}$$

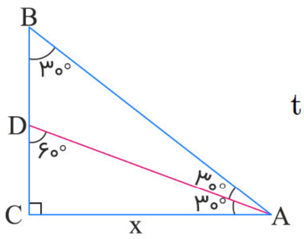
$$\Rightarrow AD \times AC = ۲\sqrt{۲} \times \sqrt{۲} = ۴$$

۴

گزینه ۴

طول پاره‌خط AC را x در نظر می‌گیریم:

در مثلث $\overset{\Delta}{\mathrm{ABC}}$:



$$\tan ۶۰^\circ = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AC}} = \sqrt{۳} \Rightarrow \mathrm{BC} = \mathrm{x}\sqrt{۳}$$

در مثلث $\overset{\Delta}{\mathrm{ACD}}$:

$$\sin ۶۰^\circ = \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AD}} = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow \mathrm{AD} = \frac{۲\sqrt{۳}}{۳}\mathrm{x} \Rightarrow \frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{BC}} = \frac{\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}\mathrm{x}}{\mathrm{x}\sqrt{۳}} = \frac{۲}{۳}$$

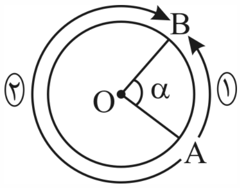
۵

گزینه ۴

به جای xها یک زاویهٔ دلخواه قرار می‌دهیم.

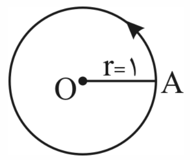
$$\mathrm{x} = ۰ \Rightarrow ۱ + \mathrm{B} = -۱ \Rightarrow \mathrm{B} = -۲$$

تعریف جهت مثلثاتی



شکل مقابل را در نظر بگیرید. اگر بخواهیم از نقطه‌ی A به B برویم، یکی از دو مسیر ۱ یا ۲ را می‌توانیم انتخاب کنیم. در مثلثات جهت شماره‌ی ۱ را که خلاف حرکت عقربه‌های ساعت است (پادساعتگرد)، جهت مثبت و جهت شماره‌ی ۲ را که موافق حرکت عقربه‌های ساعت است (ساعتگرد)، جهت منفی می‌گویند.

تعریف دایره‌ی مثلثاتی



دایره‌ای است به شعاع واحد که در آن، با توجه به شکل، نقطه‌ی A به عنوان مبدأ کمان‌ها در نظر گرفته می‌شود و جهت آن مثبت می‌باشد (پادساعتگرد).

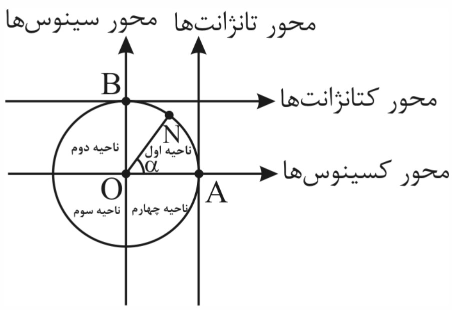
محورهای مثلثاتی

۱- محور کسینوس‌ها: محوری که از مرکز دایره‌ی مثلثاتی و مبدأ کمان‌ها (نقطه‌ی A) می‌گذرد.

۲- محور سینوس‌ها: محوری که در مرکز دایره‌ی مثلثاتی بر محور کسینوس‌ها عمود است.

۳- محور تانژانت‌ها: محوری که در مبدأ کمان‌ها (نقطه‌ی A) بر دایره‌ی مثلثاتی مماس است و موازی محور سینوس‌هاست.

۴- محور کتانژانت‌ها: محوری است که در بالاترین نقطه‌ی دایره بر آن مماس است و با محور کسینوس‌ها موازی و بر محور تانژانت‌ها و سینوس‌ها عمود است.



این چهار محور مثلثاتی را در روبه‌رو می‌بینید:

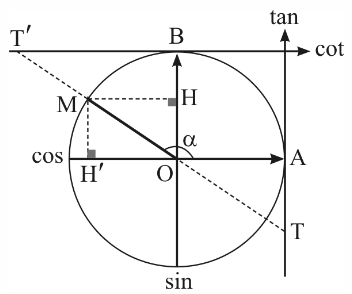
نقطه‌ی N : انتهای کمان روبه‌رو به زاویه‌ی α

نقطه‌ی B : مبدأ محور $\cot$

نقطه‌ی A : مبدأ محور $\tan$

نقطه‌ی O : مبدأ محورهای $\sin$ و $\cos$

روش به دست آوردن مقدار یک نسبت مثلثاتی از روی دایره‌ی مثلثاتی



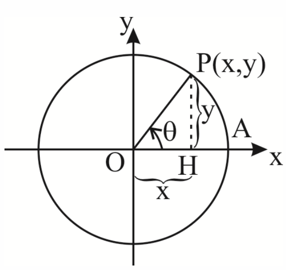
فرض کنید، مطابق شکل روبه‌رو زاویه‌ای به اندازه‌ی α انتخاب کرده‌ایم.

در این صورت از انتهای کمان بر محور $\sin$ و $\cos$ عمود می‌کنیم. داریم:

$$\boxed{OH = \sin\alpha \quad , \quad OH' = -\cos\alpha}$$

حال با امتداد OM به گونه‌ای که محور $\tan$ و $\cot$ قطع شود، داریم:

$$\boxed{AT = -\tan\alpha \quad , \quad BT' = -\cot\alpha}$$

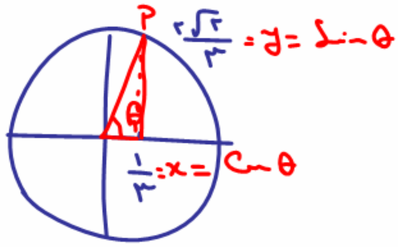


در دایره‌ی مثلثاتی، زاویه‌ی دلخواه θ را در نظر می‌گیریم. با توجه به مثلث قائم‌الزاویه، مختصات نقطه‌ی $P(x,y)$ در این دایره برحسب زاویه‌ی θ برابر است با:

$$P(x,y) = P(\cos\theta, \sin\theta) \Rightarrow \begin{cases} x = \cos\theta \\ y = \sin\theta \end{cases}$$

تمرین: اگر زاویه‌ی θ، دایره‌ی مثلثاتی را در نقطه‌ی $P(\frac{۱}{۳},\frac{۲\sqrt{۲}}{۳})$ قطع کند، نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ی θ را بیابید.

پاسخ:



$$P(\frac{۱}{۳},\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}) = P(\cos\theta,\sin\theta)$$

پس:

$$x=\cos\theta=\frac{۱}{۳}\ ,\ y=\sin\theta=\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}$$

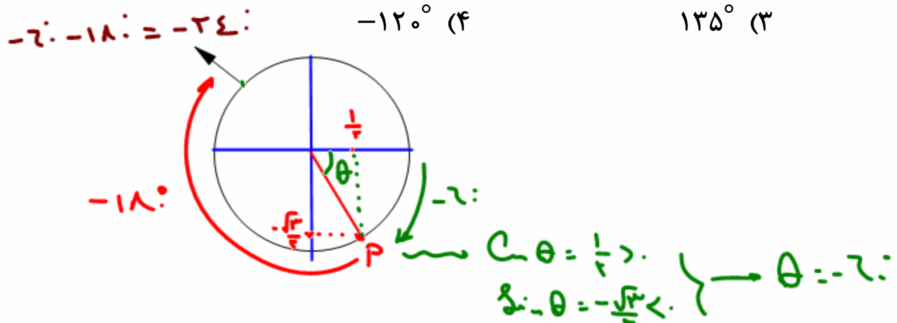
از طرفی:

$$\tan\theta=\frac{y}{x}=۲\sqrt{۲}\ ,\ \cot\theta=\frac{x}{y}=\frac{۱}{۲\sqrt{۲}}$$

تمرین: نقطه‌ی $P(\frac{۱}{۲},\frac{-\sqrt{۳}}{۲})$ روی دایره‌ی مثلثاتی را ۱۸۰° در جهت حرکت عقربه‌های ساعت حول مبدأ مختصات دوران می‌دهیم. نقطه‌ی جدید چه زاویه‌ای بر روی دایره‌ی مثلثاتی به وجود می‌آورد؟

خلاف جهت ⊕ مثلثاتی

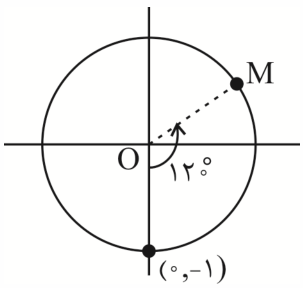
۱) -۲۴۰° ✓ ۲) ۲۴۰° ۳) ۱۳۵° ۴) -۱۲۰°



تمرین: نقطه‌ی $(۰,-۱)$ روی دایره‌ی مثلثاتی را حول مبدأ مختصات به اندازه‌ی ۱۲۰° در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت دوران می‌دهیم. مختصات نقطه‌ی جدید کدام است؟

۱) $(\frac{\sqrt{۳}}{۲},\frac{۱}{۲})$ ۲) $(\frac{-\sqrt{۳}}{۲},\frac{-۱}{۲})$ ۳) $(\frac{-\sqrt{۲}}{۲},\frac{۱}{۲})$ ۴) $(\frac{\sqrt{۳}}{۲},\frac{-۱}{۲})$

پاسخ: گزینه‌ی «۱» ـ نقطه‌ی $(۰,-۱)$ روی دایره‌ی مثلثاتی مطابق با شکل زیر است. اگر آن را ۱۲۰° در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت دوران دهیم، به نقطه‌ی M در ناحیه‌ی اول می‌رسیم.



OM با محور طول‌ها، زاویه‌ی ۳۰° می‌سازد، بنابراین:

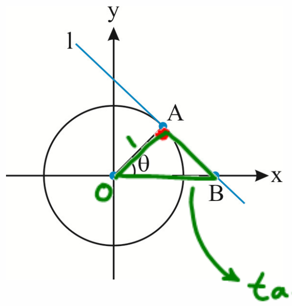
$$\begin{cases} x_M=\cos\theta \Rightarrow x_M=\cos ۳۰^\circ=\frac{\sqrt{۳}}{۲} \\ y_M=\sin\theta \Rightarrow y_M=\sin ۳۰^\circ=\frac{۱}{۲} \end{cases}$$

لذا $M(\frac{\sqrt{۳}}{۲},\frac{۱}{۲})$.

تمرین: در دایرهٔ مثلثاتی زیر، اندازهٔ AB کدام است؟ (خط l بر دایره مماس است.)

خط مماس بر دایره در نقطهٔ تماس بر شعاع عمود است.

کافی است در مثلث قائم‌الزاویه $\hat{OAB}$ که در راس $\hat{A}=90^\circ$ تانژانت θ را بنویسیم،



راه سریع: $\tan\theta = \dfrac{\text{مقابل} = AB}{\text{مجاور} = OA = 1} \rightarrow AB = \tan\theta$

شعاع دایره مثلثاتی برابر یک است

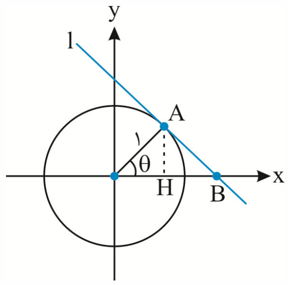
۱) $\cos\theta$

۲) $\dfrac{1}{\cos\theta}$

۳) $\tan\theta$

۴) $\dfrac{1}{\tan\theta}$

پاسخ: گزینهٔ «۳» ـ خط مماس بر دایره بر شعاع عمود است. حالا اگر از نقطهٔ A عمود بر محور طول‌ها رسم کنیم، طبق روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه داریم:



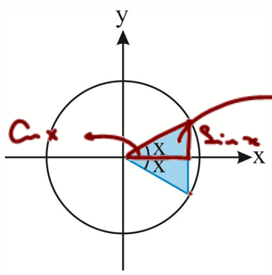
$$(1)^2 = OH \times OB \xrightarrow{OH=\cos\theta} 1 = \cos\theta \times OB \Rightarrow OB = \frac{1}{\cos\theta}$$

پس طبق قضیهٔ فیثاغورس در مثلث OAB می‌توان نوشت:

$$OB^2 = (1)^2 + AB^2 \Rightarrow \frac{1}{\cos^2\theta} = 1 + AB^2$$

$$\Rightarrow AB^2 = \frac{1}{\cos^2\theta} - 1 = \frac{1-\cos^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} = \tan^2\theta \Rightarrow AB = \tan\theta$$

تمرین: در دایرهٔ مثلثاتی زیر اگر مساحت ناحیهٔ رنگی برابر با A باشد، $A\times(\tan x + \cot x)$ کدام است؟



S به دو نیم $= \dfrac{(\overset{\text{قاعده}}{\cos x})(\overset{\text{ارتفاع}}{\sin x})}{2}$

مساحت ناحیه رنگی دو برابر مثلث بالا است $= \sin x \cos x = A$

$A(\tan x + \cot x) = \left(\dfrac{\sin x}{\cos x} + \dfrac{\cos x}{\sin x}\right)(A = \sin x\cos x) = \sin^2 x + \cos^2 x = 1$

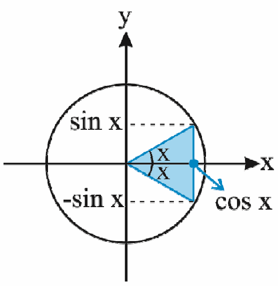
۱) $\dfrac{1}{2}$

۲) $\dfrac{1}{3}$

۳) $\dfrac{1}{4}$

۴) ۱

پاسخ: گزینهٔ «۴» ـ با توجه به شکل زیر، مساحت ناحیهٔ رنگی، مساحت یک مثلث با ارتفاع $\cos x$ و قاعدهٔ $2\sin x$ است. پس داریم:



$$A = \frac{1}{2}\times(2\sin x)\cos x = \sin x\cos x$$

در نتیجه برای محاسبهٔ $A(\tan x + \cot x)$ می‌توان نوشت:

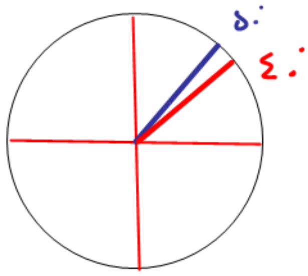
$$A(\tan x + \cot x) = \sin x\cos x\left(\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x}\right) = \sin x\cos x\left(\frac{\overbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}^{1}}{\sin x\cos x}\right)$$

$$= \sin x\cos x\left(\frac{1}{\sin x\cos x}\right) = 1$$

تمرین: کدام یک از نامساوی‌های زیر بین زوایای ۴۰ و ۵۰ درجه برقرار است؟ (سراسری)

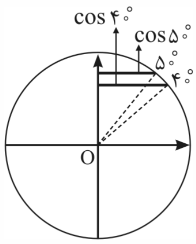
۱) $\sin ۵۰^\circ < \sin ۴۰^\circ$ ۲) $\cos ۵۰^\circ < \cos ۴۰^\circ$

۳) $\tan ۵۰^\circ < \tan ۴۰^\circ$ ۴) $\cot ۴۰^\circ < \cot ۵۰^\circ$

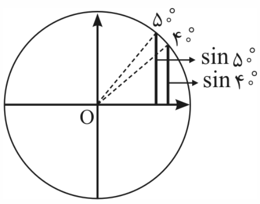


تمرین: گزینه‌ی «۲»

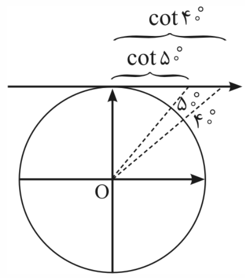
کافی است به دایره‌های مثلثاتی زیر خوب دقّت کنید:



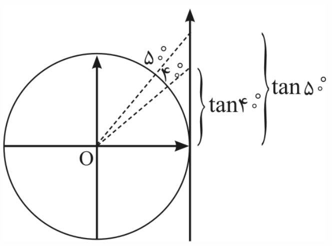
گزینه‌ی (۲) درست $\Rightarrow$ $\cos ۵۰^\circ < \cos ۴۰^\circ$



گزینه‌ی (۱) نادرست $\Rightarrow$ $\sin ۵۰^\circ > \sin ۴۰^\circ$



گزینه‌ی (۴) نادرست $\Rightarrow$ $\cot ۴۰^\circ > \cot ۵۰^\circ$



گزینه‌ی (۳) نادرست $\Rightarrow$ $\tan ۵۰^\circ > \tan ۴۰^\circ$

البته اگر به مفهوم صعود و نزول توابع نیز آشنا باشید، می‌توانید خیلی ساده‌تر پی به درستی گزینه‌ی (۲) ببرید.

$\sin ۵۰^\circ > \sin ۴۰^\circ \Rightarrow ۵۰^\circ > ۴۰^\circ \Rightarrow$ $f(x) = \sin x$ در $(۰ , \frac{\pi}{۲})$ صعودی است.

$\cos ۵۰^\circ < \cos ۴۰^\circ \Rightarrow ۵۰^\circ > ۴۰^\circ \Rightarrow$ $f(x) = \cos x$ در $(۰ , \frac{\pi}{۲})$ نزولی است.

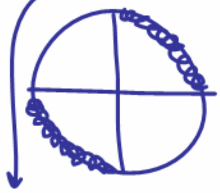
$\tan ۵۰^\circ > \tan ۴۰^\circ \Rightarrow ۵۰^\circ > ۴۰^\circ \Rightarrow$ $f(x) = \tan x$ در $(۰ , \frac{\pi}{۲})$ صعودی است.

$\cot ۵۰^\circ < \cot ۴۰^\circ \Rightarrow ۵۰^\circ > ۴۰^\circ \Rightarrow$ $f(x) = \cot x$ در $(۰ , \frac{\pi}{۲})$ نزولی است.

تمرین: اگر $\cos\alpha . \sin\alpha > ۰$ و $\cos\alpha . \tan\alpha < ۰$ آن‌گاه انتهای کمان α در کدام ناحیه‌ی مثلثاتی است؟

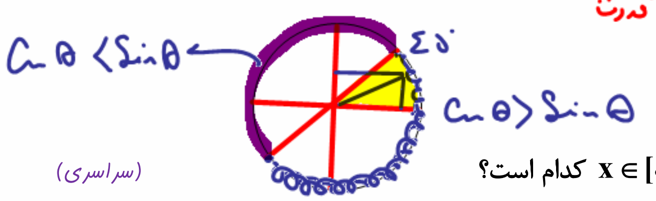
۱) اول　　۲) دوم　　۳) سوم　　۴) چهارم

$\cancel{\cos\alpha}\ \dfrac{\sin\alpha}{\cancel{\cos\alpha}} < ۰$



α ناحیه اول یا سوم و $\sin\alpha < ۰$ پس α در ناحیه سوم است.

دایره قدرت



(سراسری)

تمرین: حاصل عبارت $\dfrac{\sin x + \cos x}{۲} + \dfrac{|\sin x - \cos x|}{۲}$ که در آن $x \in [۰ , \frac{\pi}{۴}]$ کدام است؟

۱) $\sin x$　　۲) $\cos x$　　۳) $\sin x + \cos x$　　۴) $\cos x - \sin x$

پاسخ: گزینه‌ی «۲»

گفتیم در $[۰ , \frac{\pi}{۴}]$ (زیر خط $y = x$)، $\cos x > \sin x$:

$$\frac{|\sin x - \cos x|}{۲} + \frac{\sin x + \cos x}{۲} = \frac{-(\sin x - \cos x) + (\sin x + \cos x)}{۲} = \cos x$$

تمرین: اگر $a \in \mathbb{R}$ و $\cos x = \sqrt{\dfrac{\cot x}{\cot x - a^۲}}$، انتهای کمان x در کدام ناحیه‌ی مثلثاتی است؟

۱) اول　　۲) دوم　　۳) سوم　　۴) چهارم

پاسخ: گزینه‌ی «۴»

$$\cos x = \sqrt{\frac{\cot x}{\cot x - a^۲}} \geq ۰ \quad \Rightarrow \quad \cos x \geq ۰ \quad \Rightarrow$$ انتهای کمان x در ناحیه‌ی اوّل یا چهارم

اما با انتخاب x در ناحیه‌ی اول، $\cot x > ۰$ و در نتیجه به ازای مقادیر بزرگ $a^۲$ می‌تواند زیر رادیکال منفی شود ودر نتیجه فرض مسئله که به ازای هر $a \in \mathbb{R}$ ، تساوی برقرار است از بین می‌رود. پس x باید در ناحیه‌ی چهارم باشد که در این صورت همواره زیر رادیکال مثبت خواهد بود:

$$\begin{cases} \cot x \leq ۰ \\ \cot x - a^۲ < ۰ \end{cases} \Rightarrow \frac{\cot x}{\cot x - a^۲} \geq ۰$$

نسبت های مثلثاتی در مثلث قائم الزاویه:

$\sin\hat{B} = \frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{b}{a}$ $\qquad$ $\sin\hat{C} = \frac{c}{a}$

$\cos\hat{B} = \frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}} = \frac{c}{a}$ $\qquad$ $\cos\hat{C} = \frac{b}{a}$

$\tan\hat{B} = \frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}} = \frac{b}{c}$ $\qquad$ $\tan\hat{C} = \frac{c}{b}$

$\cot\hat{B} = \frac{\text{مجاور}}{\text{مقابل}} = \frac{c}{b}$ $\qquad$ $\cot\hat{C} = \frac{b}{c}$

مقابل بر وتر سینوس باشد   مجاور بر وتر باشد کسینوس

سینوس چو بر روی کسینوس نشیند   تانژانت بدست آید و برعکس کتانژانت

اگر جمع دو زاویه ۹۰° باشد مثل ۳۰° و ۶۰°:

$\sin 30^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$

۲ زاویه جمع ۹۰ به هم میگن:

سینوسم کسینوسته   کسینوسم سینوسته

تانژانتم کتانژانته   کتانژانتم تانژانته

if $\alpha + \beta = 90^\circ = \frac{\pi}{2} \to \sin\alpha = \cos\beta$

$\cos\alpha = \sin\beta$

$\tan\alpha = \cot\beta$

$\cot\alpha = \tan\beta$

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

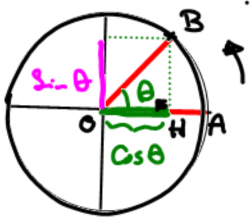
$\div \cos^2\theta$ $\qquad$ $\div \sin^2\theta$

$$\tan^2\theta + 1 = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

$$1 + \cot^2\theta = \frac{1}{\sin^2\theta}$$

$$\cos^2\theta = \frac{1}{1+\tan^2\theta} \quad , \quad \sin^2\theta = \frac{1}{1+\cot^2\theta}$$

نسبت های مثلثاتی روی دایره:



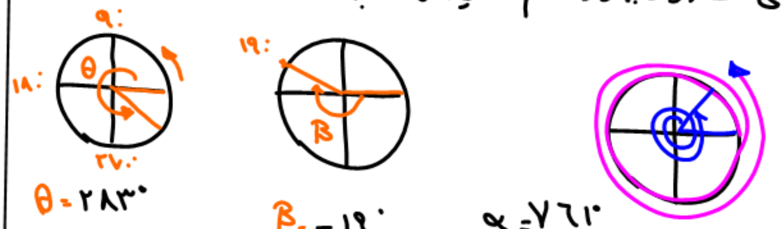
جهت مثبت

محیط دایره مثلثاتی $R = 1$

$\triangle OAB: (BH)^2 + (OH)^2 = (R=1)^2$

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

انتهای هر زاویه در کدام ناحیه است؟

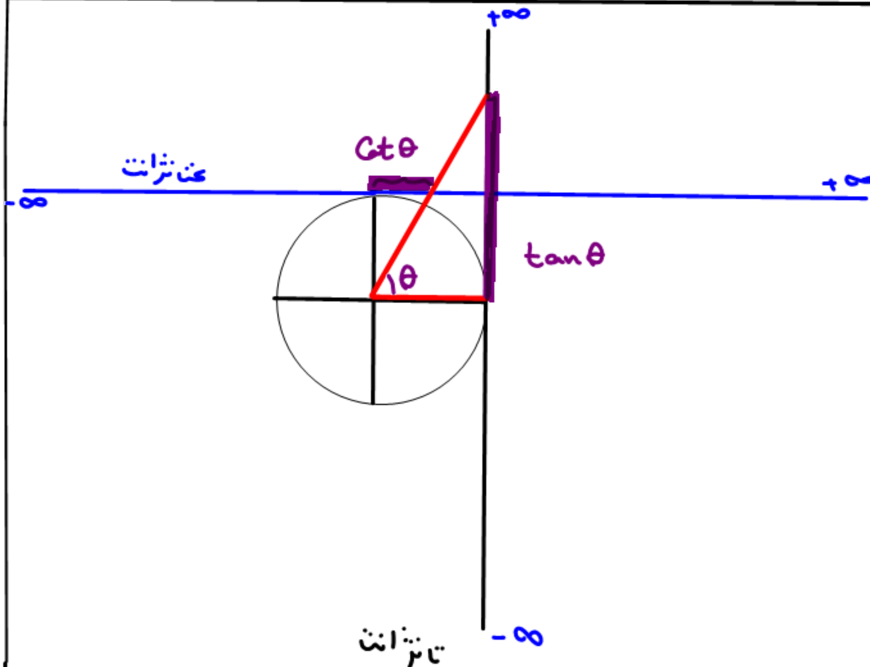


$\theta = 283^\circ$ چهارم

$\beta = -190^\circ$ دوم

$\alpha = 761^\circ$

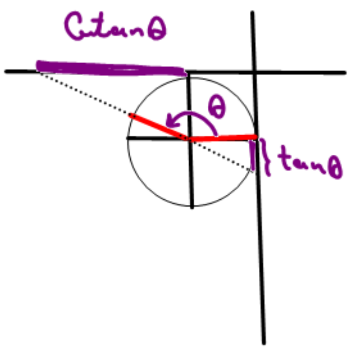
$\alpha = \underbrace{(2(360^\circ) = 720^\circ)}_{\text{دو دور دایره}} + 41$ ناحیه اول



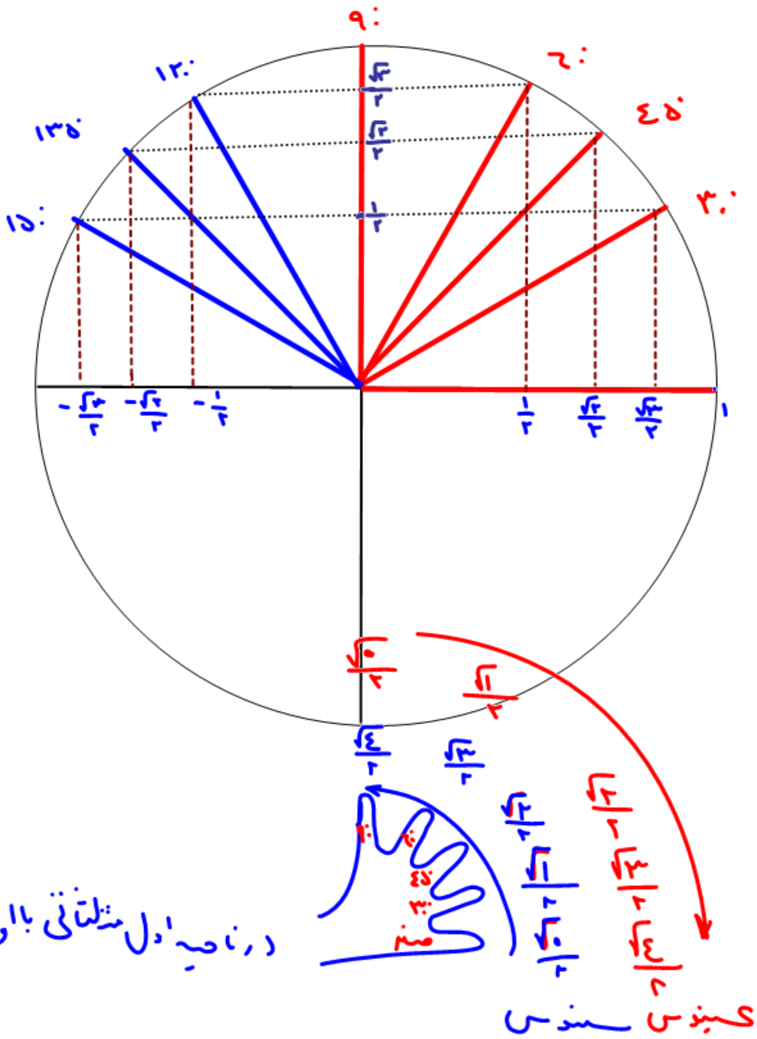
$\tan\theta \cdot \cot\theta = 1$ تانژانت و کتانژانت هم‌علامت و عکس یکدیگرند

کم × زیاد

زیاد × کم



$$\tan\theta = \frac{1}{\cot\theta}$$



$\boxed{\frac{1}{2} = 0.5}$ $\boxed{\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1.4}{2} = 0.7}$ $\boxed{\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1.7}{2} = 0.85}$

در ناحیه اول مثلثاتی با افزایش زاویه سینوس زیاد و کسینوس کم میشه!