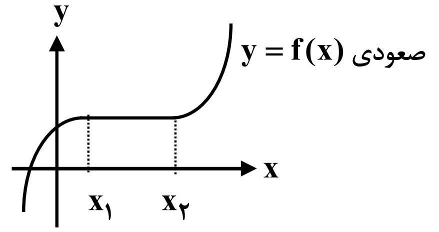
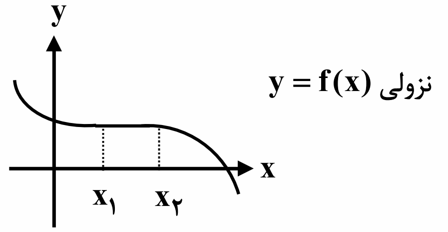
توابع صعودی و نزولی

مربوط به دوازدهم برای امتحان نهایی سؤال دارد.

اگر با افزایش x ، مقادیر y افزایش یافته و یا تغییر نکند، تابع صعودی و اگر با افزایش x مقادیر y کاهش یافته و یا تغییر نکند، تابع نزولی است. توابع صعودی یا نزولی را (یکنوا) نیز می‌گویند.

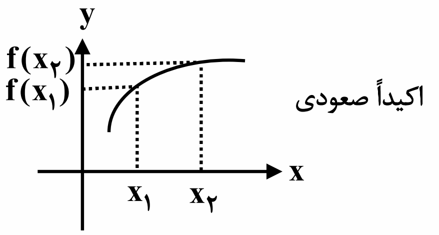


$x_1, x_2 \in D_f : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$

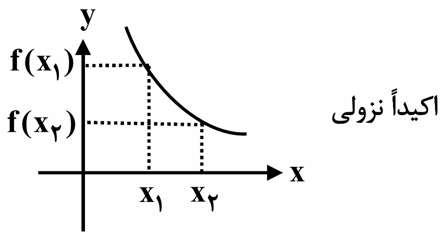


$x_1, x_2 \in D_f : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \ge f(x_2)$

هر تابع اکیداً یکنوا
یکنوا هم هست
ولی
اگر تابعی یکنوا باشد
حتماً نمی‌توان گفت
که اکیداً یکنوا هم هست.



$x_1, x_2 \in D_f : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$



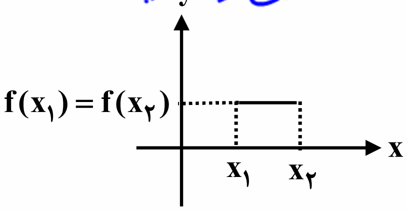
$x_1, x_2 \in D_f : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

۱) تابعی که اکیداً صعودی یا نزولی باشد، اکیداً یکنوا نام دارد.

۲) توابع ثابت هم صعودی و هم نزولی‌اند ولی اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی نیستند.

مثلاً $y = [x]$ و $y = x + |x|$، توابعی صعودی هستند. چون نقطه‌ها هم f (هم‌عرض) دارند.

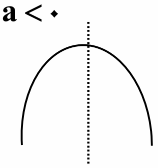
اگر تکه‌ای از تابع، ثابت باشد دیگر تابع اکیداً نیست



$x_1, x_2 \in D_f : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$

۳) توابع درجه دوم $y = ax^2 + bx + c$ در کل روی R نه صعودی است و نه نزولی، اما از راس سهمی به قبل و یا از راس سهمی به بعد اکیداً یکنوا (اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی) هستند.

$a < 0$

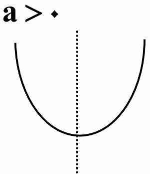


$x = -\frac{b}{2a}$

صعودی اکید: $(-\infty, -\frac{b}{2a}]$

نزولی اکید: $[-\frac{b}{2a}, +\infty)$

$a > 0$



$x = -\frac{b}{2a}$

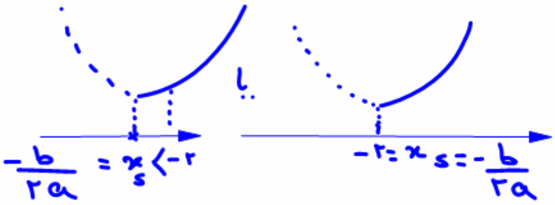
نزولی اکید: $(-\infty, -\frac{b}{2a}]$

صعودی اکید: $[-\frac{b}{2a}, +\infty)$

تمرین: تابع $f(x)=3x^2+kx+3k^2$ در بازهٔ $[-2,+\infty)$ صعودی است. حدود k کدام است؟

۱) $k\geq -12$ ۲) $k\leq -12$ ۳) $k\geq 12$ ۴) $k\leq 12$

سهمی دهانه به بالا

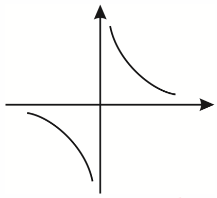


$-\frac{b}{2a}\leq -2$

$\frac{-k}{2(3)}\leq -2$

$\frac{k}{6}\geq 2 \rightsquigarrow k\geq 12$ گزینه ۳

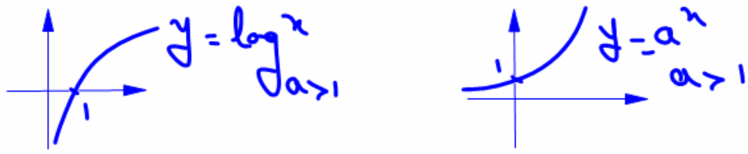
۴) اگر تابع در قسمت‌هایی از دامنه صعودی و در قسمت‌های دیگر نزولی باشد می‌گوییم نه صعودی و نه نزولی است. به این توابع غیریکنوا گفته می‌شود.



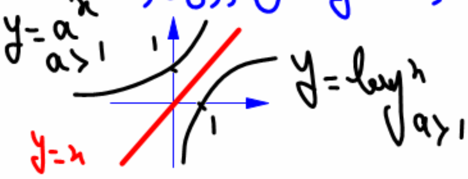
۵) ممکن است یک تابع در دامنه‌اش نه صعودی و نه نزولی باشد ولی در بازه‌هایی از دامنه‌اش صعودی و یا نزولی باشد. مثلاً $y=\frac{1}{x}$ در فاصلهٔ $(0,+\infty)$ و یا در فاصلهٔ $(-\infty,0)$ اکیداً نزولی است ولی روی دامنه‌اش نه صعودی و نه نزولی است.

$y=\frac{1}{x}$ خط $x=0$: ریشه مخرج و مجانب قائم است

۶) توابع $y=a^x$ و $y=\log_a x$ به ازای $a>1$ اکیداً صعودی هستند. این ۲ تابع وارون یکدیگرند و f و f^{-1} از نظر اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی بودن عین یکدیگرند زیرا نسبت به آینه



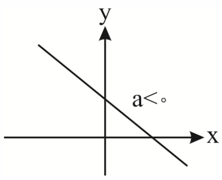
$y=x$ نسبت به آن تقارن محوری دارند



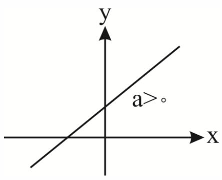
۷) توابع $y=a^x$ و $y=\log_a x$ به ازای $0<a<1$ اکیداً نزولی هستند.

۸) تابع خطی $f(x)=ax+b$ با شرط $a\neq 0$ اکیداً یکنوا است و اگر $a=0$ باشد به صورت یک خط افقی درمی‌آید که هم صعودی و هم نزولی است اما اکیداً صعودی و یا اکیداً نزولی نیست.

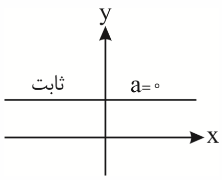
در خصوص دو مورد قبلی در بخش توابع نمایی و لگاریتمی صحبت کرده‌ایم.



اکیداً نزولی



اکیداً صعودی



هم صعودی، هم نزولی

تمرین: اگر $f = \{(-۳,۴)(۰,-۲m+۱)(-۱,m)\}$ نزولی باشد، حدود m کدام است؟

۱) $(-\infty,۴)$ ۲) $(\frac{۱}{۳},۴)$ ۳) $[\frac{۱}{۳},۴]$ ۴) $[\frac{۱}{۳},+\infty)$

در تابع نزولی
جلو می‌ریم پایین میره

x	$-۳ < -۱ < ۰$
y	$۴ > m > -۲m+۱$

$۳m > ۱$

$m > \frac{۱}{۳}$

$m \in (\frac{۱}{۳},۴)$

گزینه ۲

تمرین: تابع با ضابطهٔ $f(x) = x^{۲} - ۲x - ۳$ با دامنهٔ $\{x : |x-۱| < ۲\}$، همواره چگونه است؟ (ریاضی ۹۱)

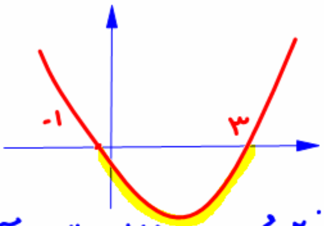
۱) منفی ۲) مثبت ۳) صعودی ۴) نزولی

$a+c=b$

به ریشه $x_1=-۱$ و دیگری $x_2 = -\frac{c}{a} = ۳$

$|x-۱| < ۲$

$-۲ < x-۱ < ۲$



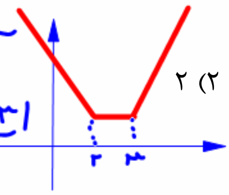
از رسم نمودار می‌بینیم درباره $-۱ < x < ۳$ تابع زیر محور x ها است و منفی است. گزینه ۱

تمرین: در بازه‌ای که تابع با ضابطهٔ $f(x) = |x-۲| + |x-۳|$ اکیداً نزولی است، نمودار آن با نمودار تابع $g(x) = ۲x^{۲} - x - ۱۰$ در چند نقطه مشترک هستند؟ (تجربی داخل ۹۷)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) فاقد نقطهٔ مشترک

$\boxed{x \le ۲}$

$f(x) = |x-۲| + |x-۳|$



$y = -x+۲-x+۳$

$\begin{cases} y = -۲x+۵ \\ y = ۲x^۲-x-۱۰ \end{cases}$

$۲x^۲-x-۱۰ = -۲x+۵$

$۲x^۲+x-۱۵=۰ \xrightarrow{\text{روش } ac} x^۲+x-۳۰ = (x-۵)(x+۶) = ۰$, $x=۵$, $x=-۶$

$x_1 = -\frac{۶}{۲} \rightarrow x_1 = -۳$

$x_2 = \frac{۵}{۲} \rightarrow x_2 = ۲/۵$

$x \le ۲$ جوابی درسته که باشه
$x=-۳$ ساز گار باشه یعنی ۱ جواب داره پس گزینه ۱

اگر $x_1,x_2 \in D_f : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ یعنی f تابعی است اکیداً صعودی و اگر $x_1,x_2 \in D_f : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ یعنی f تابعی است اکیداً نزولی پس اگر مثلاً داشته باشیم $f(x^۲) > f(x)$ و f تابعی اکیداً صعودی باشد نتیجه می‌گیریم که $x^۲ > x$ است و داریم $x^۲ > x \Rightarrow x^۲ - x > ۰ \Rightarrow x < ۰$ یا $x > ۱$ و اگر مثلا داشته باشیم $f(x^۲) > f(x)$ و f تابعی اکیداً نزولی باشد نتیجه می‌گیریم که $x^۲ < x$ است و داریم:

$x^۲ < x \Rightarrow x^۲ - x < ۰ \Rightarrow ۰ < x < ۱$

$x(x-۱) < ۰$

نکته: اگر f اکیداً صعودی باشد f^{-1} هم اکیداً صعودی است و اگر f اکیداً نزولی f^{-1} اکیداً نزولی دارد.

در واقع در تابع اکیداً نزولی با حذف f ها، جهت نامساوی عوض می‌شود و در تابع اکیداً صعودی با حذف f ها جهت نامساوی عوض نمی‌شود.

تمرین: اگر f تابعی نزولی اکید با دامنه‌ی R باشد، دامنه‌ی تعریف $y=\sqrt{f(|x-2|)-f(|2x-1|)}$ کدام است؟

۱) $[1,+\infty)$ ۲) R ۳) $[-1,1]$ ۴) $(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$

مهم

$f(|x-2|)\geq f(|2x-1|)$

حذف f

$|x-2|\leq|2x-1|$

برای حل نامعادله که دو طرف قدرمطلق است طرفین را به توان ۲ برسان:

$(x-2)^2\leq(2x-1)^2 \rightarrow x^2-\cancel{4x}+4\leq 4x^2-\cancel{4x}+1 \rightarrow 0\leq 3x^2-3$

$0\leq 3(x^2-1)$

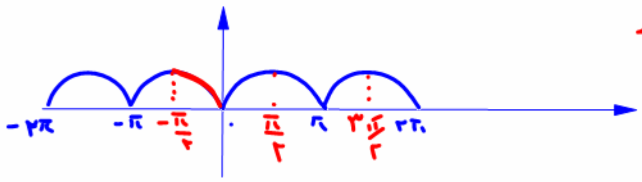
$0\leq x^2-1$

$1\leq x^2 \xrightarrow{\text{جذر}} 1\leq|x| \rightarrow x\leq -1$ یا $x\geq 1$

گزینه ۴

تمرین: تابع $f(x)=|\sin x|$ مفروض است. در کدام‌یک از بازه‌های زیر، برای هر x_1 و x_2 عضو این بازه، رابطهٔ $x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$ برقرار است؟ تعریف اکیداً نزولی است که با توجه به رسم گزینه ۳ درست است.

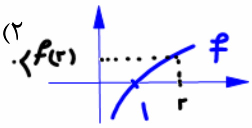
۱) $(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})$ ابتدا نزولی سپس صعودی ۲) $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ ابتدا نزولی سپس صعودی ۳) $[-\frac{\pi}{2},0]$ اکیداً نزولی ۴) $[0,\frac{\pi}{2}]$ اکیداً صعودی



$y=|\sin x|$ کلاً غیریکنواست.

تمرین: اگر تابع f اکیداً صعودی و $f(1)=0$ باشد، آن‌گاه دامنهٔ $\sqrt{(x^3-x)f(x)}$ برابر با $\mathbb{R}-(a,b)$ است. حاصل $a+b$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) صفر ۳) -1 ۴) ۲



$(x^3-x)f(x)\geq 0$

$x(x^2-1)f(x)\geq 0$

$(x+1)x(x-1)f(x)\geq 0$

x	$-\infty$	-1		0		1	مثلاً ۲	$+\infty$
		ریشه		ریشه		مضاعف		
$(x^3-x)f(x)$	+	۰	−	۰	+	۰	+	
	جواب				جواب		جواب	

$x=1$ $x=1$

$x=1$ مضاعف است هم f و هم x^3-x را صفر می‌کند.

$x\in\mathbb{R}-(-1,0)$ جواب

$a+b=-1$ گزینه ۳

تمرین: کدام‌یک از توابع زیر یک‌به‌یک است؟

ص = ص + ص

۱) $y=x^2+2\sqrt{x}$ ۲) $y=x-x\sqrt{x}$ ۳) $y=x+\frac{1}{x}$ ۴) $y=2x^2-|x|$

$x\geq 0$ [illegible] $x\geq 0$

پاسخ: گزینهٔ «۱» ـ تابع $y=2\sqrt{x}$ با شرط $x\geq 0$ اکیداً صعودی است، به علاوه x^2 هم در این فاصله اکیداً صعودی است. پس $y=x^2+2\sqrt{x}$ اکیداً صعودی خواهد بود و در نتیجه یک‌به‌یک است.

گزینهٔ (۲): یک‌به‌یک نیست.

$$y=x(1-\sqrt{x})\ ,\ y=0 \Rightarrow \begin{cases}x=0\\x=1\end{cases}$$

نکته: اگر تابع اکیداً یکنوا باشد یک‌به‌یک است و وارون‌پذیر.

جمع ۲ تا اکیداً صعودی، اکیداً صعودی. جمع ۲ تا اکیداً نزولی، اکیداً نزولی. جمع یک تابع اکیداً صعودی با یک اکیداً نزولی یا برعکس معلوم نیست.

گزینهٔ (۳): $y=x+\frac{۱}{x}=\frac{x^{۲}+۱}{x}\ ,\ y=۳ \Rightarrow \frac{x^{۲}+۱}{x}=۳ \Rightarrow x^{۲}-۳x+۱=۰ \Rightarrow \Delta>۰$

به ازای دو مقدار از x مقدار تابع ۳ می‌شود پس تابع یک‌به‌یک نیست.

گزینهٔ (۴): $y=۲x^{۲}-|x|=|x|(۲|x|-۱)\ ,\ y=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۰ \\ x=\pm\frac{۱}{۲} \end{cases}$

به ازای سه مقدار از x مقدار تابع صفر می‌شود و یک‌به‌یک نیست.

تمرین: اگر $f(x)=\frac{x^{۴}-۱}{\sqrt{x-۲}}$ و $g(x)=\frac{\sqrt{x-۲}}{x^{۲}-۱}$، آن‌گاه نمودار تابع $y=(f.g)(x)$ چگونه است؟

۱) صعودی ۲) نزولی ۳) ابتدا صعودی، سپس نزولی ۴) ابتا نزولی، سپس صعودی

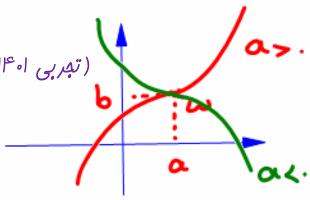
پاسخ: گزینهٔ «۱» ـ ابتدا دامنهٔ تابع $y=(f.g)(x)$ را می‌یابیم:

$$\left.\begin{array}{l} D_{f.g}=D_f \cap D_g \\ D_f: x-۲>۰ \Rightarrow x\in(۲,+\infty) \\ D_g: \begin{cases} x-۲\ge ۰ \\ x^{۲}-۱\ne ۰ \end{cases} \Rightarrow x\in[۲,+\infty) \end{array}\right\} \Rightarrow D_{f.g}=(۲,+\infty)$$

$$y=(f.g)(x)=f(x)\times g(x)=\frac{x^{۴}-۱}{\sqrt{x-۲}}\times\frac{\sqrt{x-۲}}{x^{۲}-۱}=\frac{x^{۴}-۱}{x^{۲}-۱}=\frac{(x^{۲}-۱)(x^{۲}+۱)}{x^{۲}-۱} \Rightarrow y=(f.g)(x)=x^{۲}+۱$$

این تابع در بازهٔ $(۲,+\infty)$ صعودی است.

تمرین: تابع $f(x)=(-۹+k^{۲})x^{۳}+۵$ اکیداً نزولی است. مجموع مقادیر صحیح k چقدر است؟ (تجربی ۱۴۰۱)



۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۶ ۴) صفر

درجه ۳ وقتی اکیداً نزولیه که ضریب $x^۳$ منفی باشه:

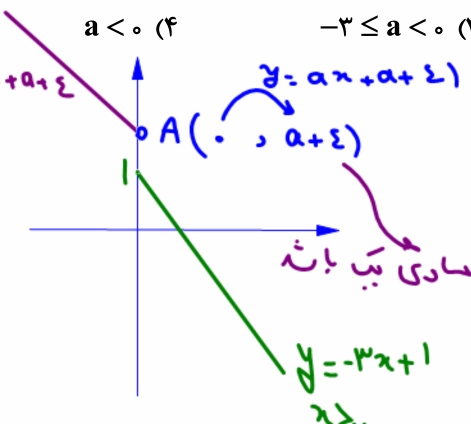
$y=a(x-b)^۳+c$ درجه ۳ با مرکز تقارن (b,c) باشه. که $a>۰$ اکیداً صعودی و با $a<۰$ اکیداً نزولی

$-۹+k^۲<۰$ ، $k^۲<۹ \to |k|<۳$ ، $-۳<k<۳$

جواب های صحیح k: $\{\pm۲,\pm۱,۰\}$ که مجموعشان صفر

تمرین: اگر تابع $f(x)=\begin{cases} -۳x+۱ & x\ge ۰ \\ ax+a+۴ & x<۰ \end{cases}$ در تمام دامنه‌اش نزولی اکید باشد، مجموعهٔ تمام مقادیر ممکن برای a کدام است؟ دو ضابطه‌ای ها را بکش.

۱) $a\le ۰$ ۲) $-۳\le a\le ۰$ ۳) $-۳\le a<۰$ ۴) $a<۰$



$y=ax+a+۴$

نیم خط باید نزولی باشه و شیب منفی داشته باشه

$a<۰$ (الف)

شرط بعدی باید عرض نقطه A بالاتر یا مساوی یک باشه

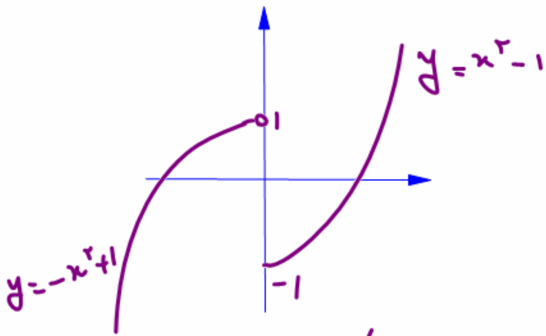
$a+۴\ge۱$

$a\ge-۳$ (ب)

(الف)∩(ب)= $[-۳,۰)$ گزینه ۳

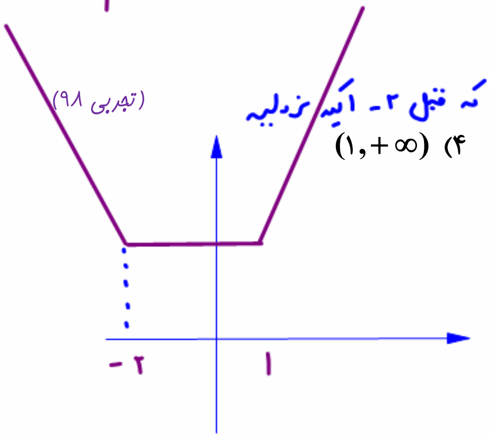
تمرین: تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases} x^{2}-1 & x\geq 0 \\ 1-x^{2} & x<0 \end{cases}$، بر روی مجموعه اعداد حقیقی چگونه است؟ دو ضابطه‌ای ها را بکش (سراسری – ۸۹)

۱) یکنوا ـ یک به یک ۲) غیریکنوا ـ یک به یک ۳) یکنوا ـ غیر یک به یک ۴) غیریکنوا ـ غیر یک به یک



تمرین: تابع با ضابطهٔ $f(x)=|x+2|+|x-1|$ در کدام بازه اکیداً نزولی است؟ کلاً و نه که قبل ۲- اکیداً نزولیه (تجربی ۹۸)

۱) $(-\infty,-2)$ ۲) $(-\infty,1)$ ۳) $(-2,1)$ ۴) $(1,+\infty)$



$x<-2$: اکیداً نزولی
$x<1$: نزولی
$x>-2$: صعودی
$x>1$: اکیداً صعودی

نامعادلات نمایی و لگاریتمی

با توجه به مفهوم یکنوایی توابع $y=a^{x}$ و $y=\log_a x$ می‌توان نکات زیر را برای حل نامعادلات نمایی و لگاریتمی نتیجه گرفت:

نامعادلات نمایی: در حل نامعادلات توابع نمایی از روابط زیر استفاده می‌کنیم:

۱) $a^{x}>a^{y} \xleftrightarrow{a>1} x>y$ ۲) $a^{x}>a^{y} \xleftrightarrow{0<a<1} x<y$

یعنی در حل نامعادلات نمایی، اگر پایه بین صفر و یک باشد، جهت نامساوی عوض می‌شود. (حتماً می‌دانید که دلیل این تغییر جهت آن است که تابع $y=a^{x}$ با شرط $0<a<1$ اکیداً نزولی است.)

نامعادلات لگاریتمی: در حل نامعادلات لگاریتمی از روابط زیر استفاده می‌کنیم:

۱) $\log_a x>y \xleftrightarrow{a>1} x>a^{y}$ ۲) $\log_a x>y \xleftrightarrow{0<a<1} x<a^{y}$

۳) $\log_a x>\log_a y \xleftrightarrow{a>1} x>y$ ۴) $\log_a x>\log_a y \xleftrightarrow{0<a<1} x<y$

مهم

تمرین: مجموعه جواب نامعادلهٔ $(\frac{\sqrt{2}}{2})^{x^2} \geq (\frac{\sqrt{2}}{2})^x$ به کدام صورت است؟

۱) $[0,+\infty)$ ۲) $\mathbb{R}-(0,1)$ ۳) $[0,1]$ ۴) $(-\infty,1]$

$0/7<1$ ، $\frac{\sqrt{2}=1/4}{2}=0/7$. اعداد بین صفر و یک به توان بزرگتر برسند کمتر می‌شوند. حتما $x^2 \leq x$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$x^2-x\leq 0$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$x(x-1)\leq 0$

جواب
$0\leq x\leq 1$

تمرین: مجموعه جواب نامعادلهٔ $\log_{0/1}(x-3)\geq \log_{0/1}(5-x)$ شامل چند عدد طبیعی است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

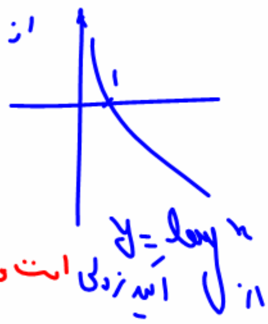
شرط الف: $x-3>0$ ، $\boxed{x>3}$

شرط ب: $5-x>0$ ، $\boxed{5>x}$

از طرفی جلوی لگاریتم باید بزرگتر از صفر باشند:

$\log_{0/1}^{x-3} \geq \log_{0/1}^{5-x}$

$x-3\leq 5-x$



اکیدا نزولی است و باعث می‌شود از ۲ طرف نامساوی جهت برعکس گردد.

$2x\leq 8$

$\boxed{x\leq 4}$ شرط ج

3، 4، 5

اشتراک جواب‌ها:

$3<x\leq 4$

فقط یه عدد طبیعی در بازه جواب هست.

گزینه ۱

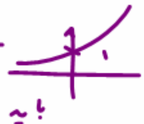
تمرین: اگر $f(x)=3-2^x$ باشد، دامنهٔ تابع $g(x)=\sqrt{xf^{-1}(x)}$ کدام است؟

۱) $[0,2]$ ۲) $[0,3)$ ۳) $[2,3)$ ۴) $[1,3)$

تمرین: بزرگ‌ترین بازه برای k که در آن تابع نمایی $y=(\frac{5-k}{1-3k})^x$ همواره اکیداً صعودی باشد، کدام است؟

۱) $(-1,\frac{1}{3})$ ۲) $(-2,\frac{1}{3})$ ۳) $(-3,\frac{1}{3})$ ۴) $(-4,\frac{1}{3})$

$y=a^x$



$a>1$

$\frac{5-k}{1-3k}>1$

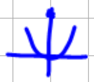
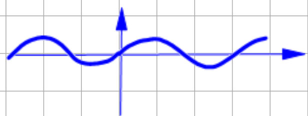
$\frac{5-k}{1-3k}-1=\frac{5-k-1+3k}{1-3k}=\frac{2k+4}{1-3k}>0$

	-2		$\frac{1}{3}$	
$-$	0	$+$	ت.ن	$-$

جواب $(-2,\frac{1}{3})$

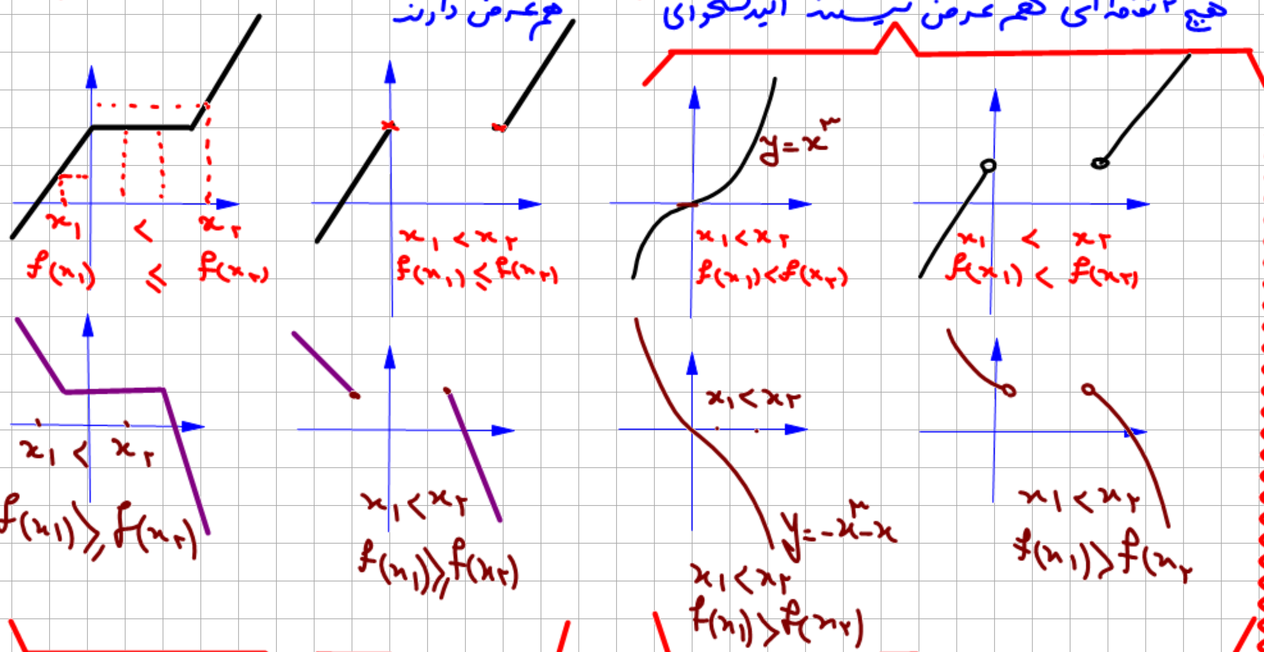
تمرین: تابع $f(x)=\begin{cases} a-\log_{\frac{1}{3}} x & x\geq 3 \\ 2x+1 & x<3 \end{cases}$ به ازای چه حدودی از a همواره در شرط $x_2>x_1 \Rightarrow f(x_2)\geq f(x_1)$ صدق می‌کند؟

۱) $a\leq 6$ ۲) $a\geq 6$ ۳) هیچ مقدار a ۴) فقط $a=6$

تابع یکنوا: رفتارش عوض نمی‌شود یا صعودیه یا نزولیه مثلاً $y=x^2$  که ابتدا نزولی و پس صعودیه غیر یکنوا است و یا مثلاً $y=\sin x$  غیر یکنوا است.

جهت حرکت ما در بررسی شکل از چپ به راست است.

صعودی (یکنوا) — حداقل ۲ نقطه هم عرض دارند — هیچ ۲ نقطه‌ای هم عرض نیستند اکیداً صعودی



حداقل ۲ نقطه هم عرض دارند — نزولی — هیچ ۲ نقطه‌ای هم عرض نیستند اکیداً نزولی

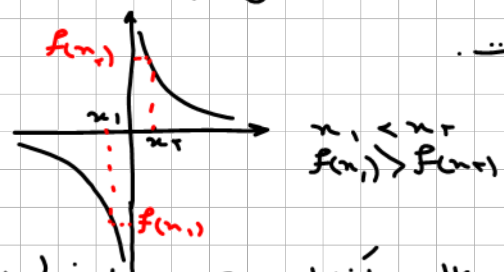
$\begin{cases} x_1 < x_2 \\ f(x_1) < f(x_2) \end{cases}$ f اکیداً صعودیه

$\begin{cases} x_1 < x_2 \\ f(x_1) > f(x_2) \end{cases}$ f اکیداً نزولیه

دقت کنید: اگر از طرفین یک نامساوی f صعودی اکید (نزولی اکید) بگیریم جهت نامساوی عوض نمی‌شود (می‌شود)

نکته: از آنجا که در تابع ثابت از $x_1<x_2$ نتیجه میشه $f(x_1)=f(x_2)$ یعنی تابع ثابت هم در تعریف تابع صعودی صادقه هم تابع نزولی لذا تابع ثابت هم صعودی هم نزولی است.

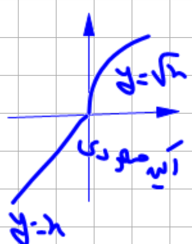
نکته: تابع $y=\frac{1}{x}$ با این که هر شاخه‌اش اکیداً نزولی است کلاً روی $\mathbb{R}$ به خاطر مجانب قائم $x=0$ اکیداً نزولی نیست و کلاً غیر یکنوا است.



$x_1 < x_2$
$f(x_1) > f(x_2)$

نکته: در تابع دو ضابطه‌ای علاوه بر کنترل صعودی یا نزولی بودن هر ضابطه باید عرض نقطه تغییر ضابطه را نیز کنترل کرد.

$$f(x)=\begin{cases} x & x\le 0 \\ \sqrt{x} & x>0 \end{cases}$$



$$f(x)=\begin{cases} x+5 & x<0 \\ \sqrt{x} & x\ge 0 \end{cases}$$

غیر یکنوا است