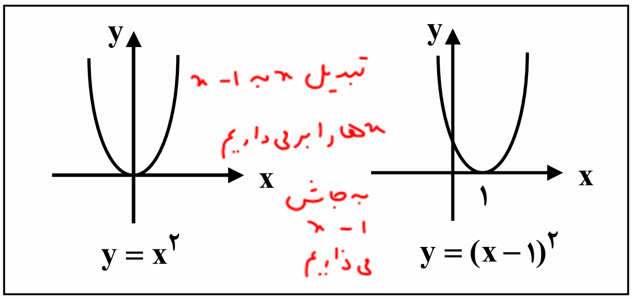
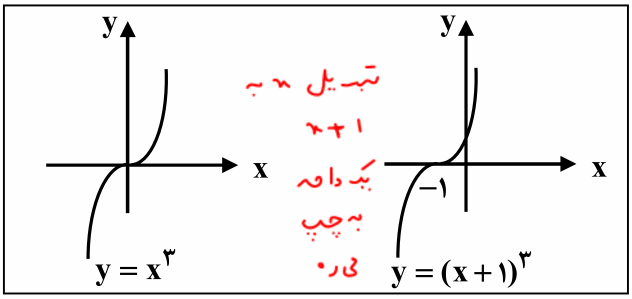
تبدیل نمودار توابع سؤال تعلیمی کنکور دانش‌نهایی

۱- انتقال افقی

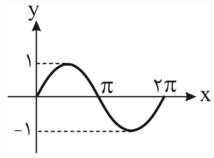
۱) اگر $a>0$ باشد، نمودار $y=f(x-a)$ همان نمودار f است که a واحد به سمت راست انتقال داده شده است. در این حالت به مقادیر x، a واحد اضافه شده است. (دامنه تغییر می‌کند.)

۲) اگر $a>0$ باشد نمودار $y=f(x+a)$ همان نمودار f است که a واحد به چپ انتقال داده شده است. در این حالت از مقادیر x، a واحد کم می‌شود. (دامنه تغییر می‌کند.)

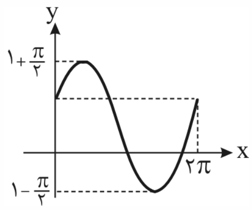


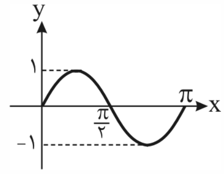


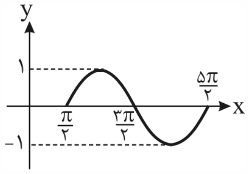
تمرین: نمودار تابع $y=f(x)$ به صورت

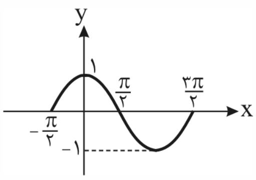


است، نمودار تابع $y=f(x+\frac{\pi}{2})$ کدام است؟ $\frac{\pi}{2}$ به چپ می‌بره گزینه ۴

۱) 

۲) 

۳) 

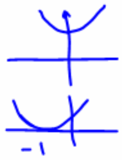
۴) 

تمرین: اگر نقطهٔ $A(3,4)$ روی تابع $f(x)$ قرار گیرد، در این صورت کدام نقطهٔ زیر، روی تابع $y=f(x+m)$ قرار می‌گیرد؟

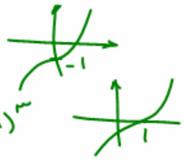
۱) $(3+m,4)$ ۲) $(3-m,4-m)$ ۳) $(3-m,4)$ ۴) $(3+m,4+m)$

عرض نقطه عوض نمیشه طول نقطه به ۳ - m تبدیل میشه گزینه ۳

$\begin{cases} y=-x^2+1 \\ y=-(x+1)^2 \end{cases}$



$\begin{cases} y=x^3-1 \\ y=(x-1)^3 \end{cases}$



۲– انتقال عمودی

۱) اگر $a>0$ باشد نمودار $y=f(x)+a$ همان نمودار f است که a واحد به بالا انتقال داده شده است. در این حالت به مقادیر y (برد) a واحد اضافه می‌شود (برد تغییر می‌کند).

۲) اگر $a<0$ باشد نمدار $y=f(x)+a$ همان نمودار f است که a واحد به پایین انتقال داده شده است. در این حالت از مقادیر y (برد) a واحد کم می‌شود (برد تغییر می‌کند).

مثلاً برای رسم نمودار $y=x^3-3x^2+3x+1$ می‌نویسیم: $y=(x^3-3x^2+3x-1)+2=(x-1)^3+2$ حالا:

$y=x^3-3x^2+3x-1+2$

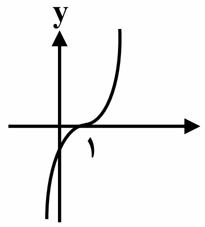
$y=(x-1)^3+2$

$y=a(x-b)^3+c$

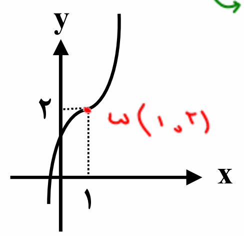
مرکز تقارن

$\omega(b,c)$

$y=(x-1)^3+2$



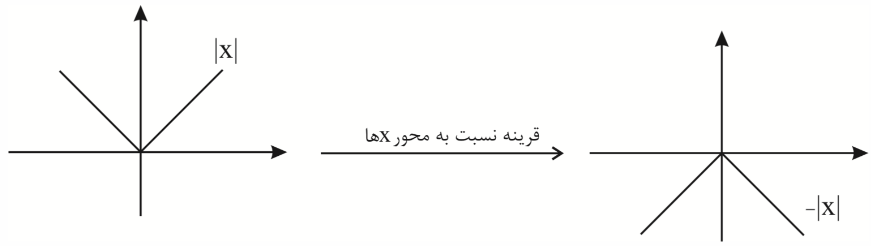
$y=(x-1)^3$



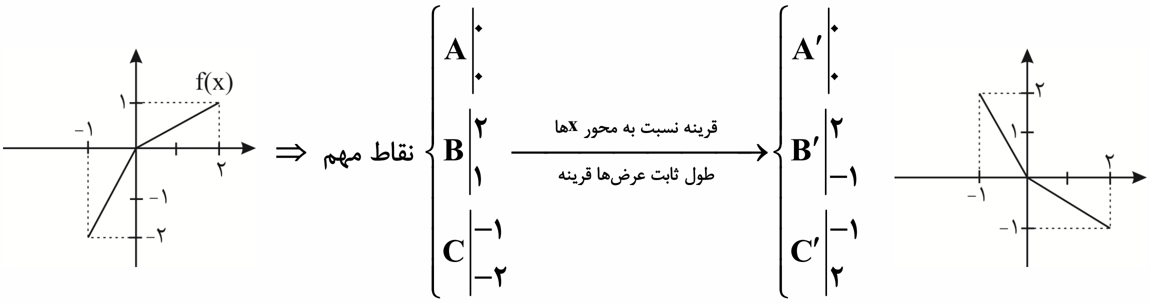
$y=(x-1)^3+2$

۳– رسم $-f(x)$: درهای x ها y ها قرینه می‌شود

برای رسم $-f(x)$ کافی است نمودار f را نسبت به محور xها قرینه کنیم. توجه کنید در این حالت طول نقاط ثابت ولی عرضشان قرینه می‌شود. پس مقادیر دامنه ثابت ولی مقادیر برد قرینه خواهند شد. مثلاً برای رسم تابع $y=-|x|$ داریم:

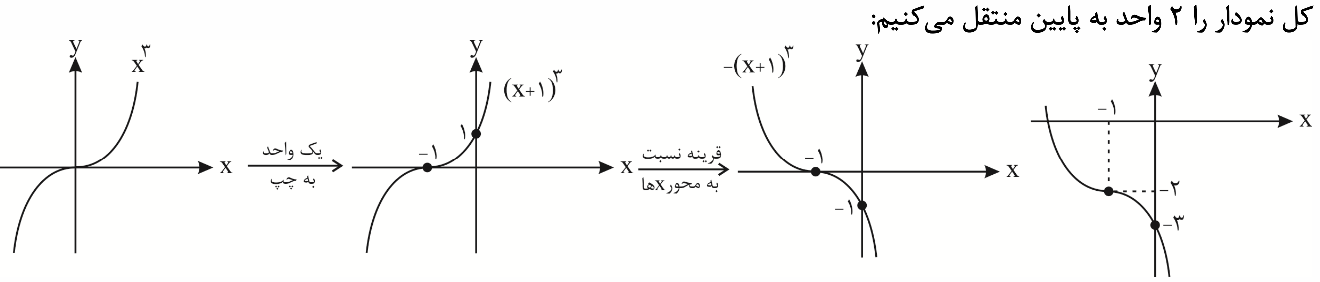


و یا مثلاً اگر $f(x)$ به صورت مقابل باشد داریم:



برای رسم تابع $y=-(x+1)^3-2$، ابتدا x^3 را یک واحد به سمت چپ انتقال داده و سپس نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم و در نهایت کل نمودار را ۲ واحد به پایین منتقل می‌کنیم:

$y=x^{2n+1}$ شبیه x^3 است هرچه n بیشتر شاخه‌های منحنی به محور yها نزدیک‌تر

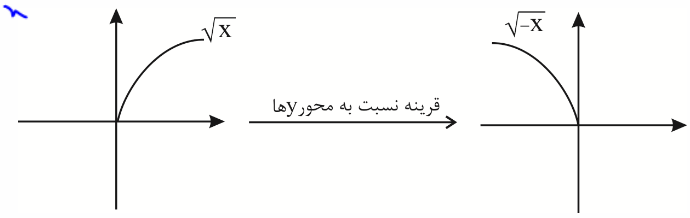


همان‌طور که دیدید اولویت با انتقال افقی، سپس با علامت منفی پشت تابع و در نهایت با انتقال عمودی است.

۴- رسم $f(-x)$:

برای رسم نمودار $f(-x)$ کافی است نمودار f را نسبت به محور yها قرینه کنیم. توجه کنید در این حالت طول نقاط قرینه شده ولی عرضشان ثابت می‌ماند. پس مقادیر دامنه قرینه خواهند شد ولی برد تغییری نمی‌کند. تبدیل x به $-x$ شکل را نسبت به محور yها قرینه می‌کند.

مثلاً برای رسم $y=\sqrt{-x}$ داریم: xها رو برعکس داریم به جاش $-x$ می‌ذاریم.



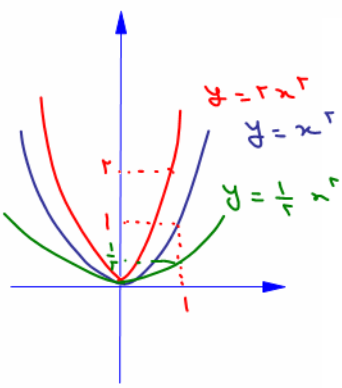
۵- رسم $y=af(x)$

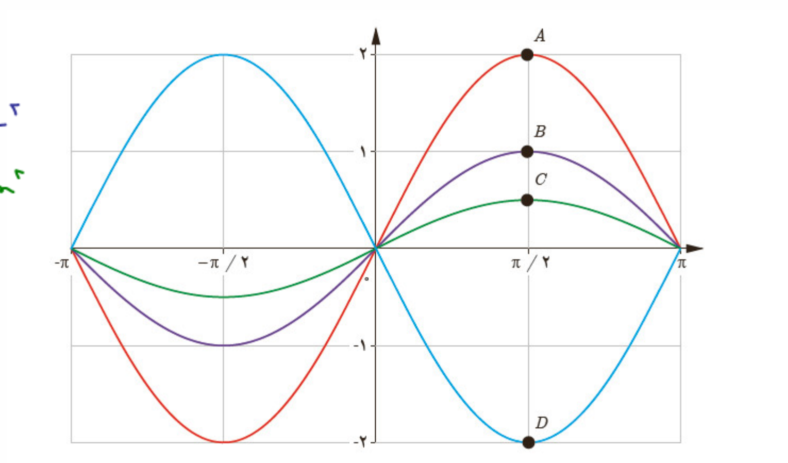
۱) اگر $a>1$ باشد، نمودار $f(x)$ در امتداد محور yها با ضریب a کشیده می‌شود که به آن انبساط عمودی می‌گوییم. در این حالت مقادیر برد (yها)، a برابر می‌شوند.

۲) اگر $0<a<1$ باشد، نمودار $f(x)$ در امتداد محور yها با ضریب a فشرده می‌شود که به آن انقباض عمودی می‌گوییم. در این حالت نیز مقادیر برد (yها)، a برابر می‌شوند.

۳) اگر پشت تابع یک عدد منفی ضرب شده باشد $(a<0)$ ابتدا تابع را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم که از منفی خلاص شویم و سپس عرض‌ها را در عدد مثبت a ضرب می‌کنیم (مثل ۲ حالت بالا).

تمرین: در شکل زیر نمودار توابع با ضابطه‌های $y=\sin x$ و $y=2\sin x$ و $y=-2\sin x$ و $y=\frac{1}{2}\sin x$ در بازه‌ی $[-\pi,\pi]$ رسم شده است. مشخص کنید هر کدام از ضابطه‌ها مربوط به کدام نمودار است. دامنه و برد هر کدام را مشخص کنید.





یادت باشه: در این نوع از توابع ($af(x)$)، عرض نقاط در عدد a ضرب می‌شود اما xها (طول نقاط) ثابت می‌ماند.

۶– رسم $f(ax)$

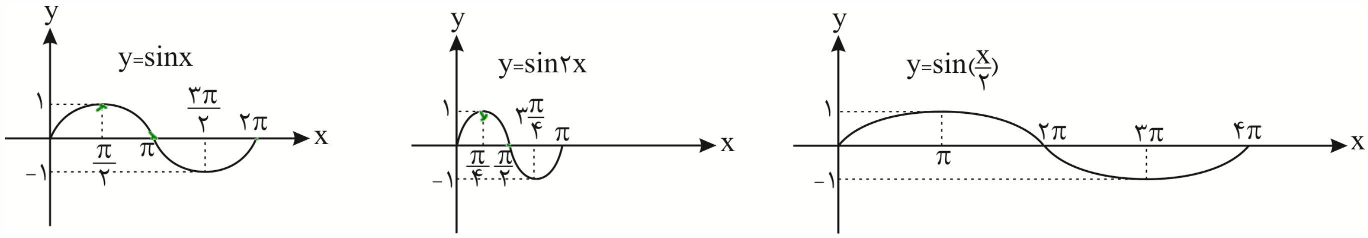
با فرض این که $a > 0$ است، برای رسم $f(ax)$ کافی است طول هر نقطه از نمودار $f(x)$ را $\frac{1}{a}$ برابر کنیم.

۱) اگر $a > 1$ باشد منحنی با ضریب $\frac{1}{a}$ در امتداد محور xها منقبض (فشرده) می‌شود.

۲) اگر $0 < a < 1$ باشد منحنی با ضریب $\frac{1}{a}$ در امتداد محور xها کشیده می‌شود.

در هر دو حالت فوق، مقادیر دامنه $\frac{1}{a}$ برابر می‌شود.

یادت باشه: در این مدل از توابع $(f(ax))$، طول نقاط در عدد $\frac{1}{a}$ ضرب می‌شود اما عرض نقاط ثابت می‌ماند. مثلاً اگر $f(x) = \sin x$ باشد برای رسم $f(\frac{x}{2})$ و $f(2x)$، به ترتیب طول نقاط را در ۲ و $\frac{1}{2}$ ضرب می‌کنیم:



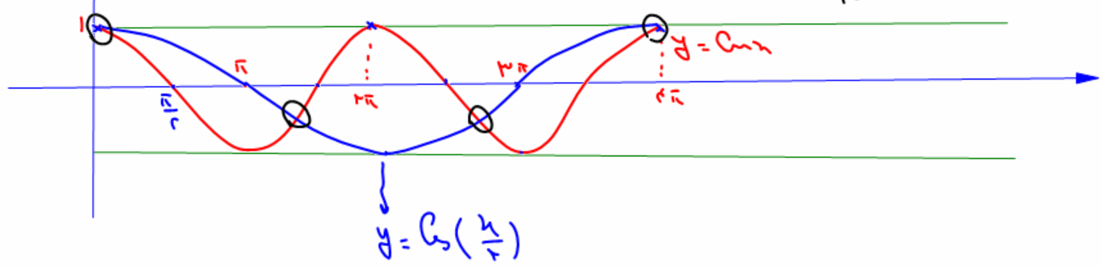
تمرین: اگر $f(x) = \cos x$ باشد، آن‌گاه نمودار دو تابع $y = f(x)$ و $y = f(\frac{x}{2})$ در بازهٔ $[0, 4\pi]$ در چند نقطه مشترک‌اند؟

۱) ۲ ۲) ۵ ۳) ۳ ۴) ۴

$y = \cos x$ $y = \cos(\frac{x}{2})$

با تبدیل x به $\frac{x}{2}$ طول ها ۲ برابر می‌شود ولی عرض نقاط ثابت است

می‌بینیم در ۴ نقطه برخورد دارند و مشترک هستند = ④



۷– رسم $y = Af(bx + c) + D$

بهترین و کامل‌ترین روش رسم، همین مورد است که تمام موارد قبلی را شامل می‌شود.

مراحل رسم:

۱) ابتدا انتقال عدد ثابت c را انجام می‌دهیم.

۲) با توجه به مقدار b نمودار را در راستای افقی یعنی محور xها منبسط یا منقبض می‌کنیم.

۳) اگر b منفی باشد، در پایان، نمودار را نسبت به محور yها قرینه می‌کنیم.

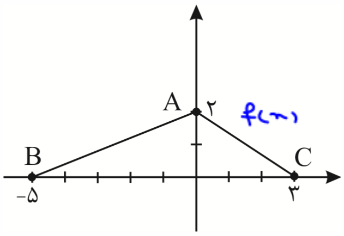
۴) با توجه به مقدار A نمودار در راستای محور yها کشیده و یا فشرده می‌کنیم (عرض نقاط را در A ضرب می‌کنیم).

۵) اگر A منفی باشد پس از آن که عرض نقاط را در عدد مثبت پشت تابع ضرب کردیم، تابع را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم (یعنی با ثابت نگه داشتن xها، عرض نقاط را در منفی ضرب می‌کنیم).

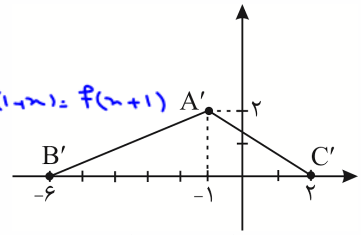
۶) انتقال عمودی عدد D را انجام می‌دهیم.

تمرین: اگر $f(x)$ به صورت زیر باشد، نمودار $y=-2f(1-2x)$ را رسم کنید.

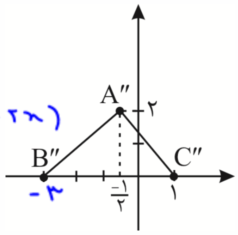
سؤال مهم دو بار ببینم



یک واحد به چپ



xها نصف



$A\left|\begin{matrix}0\\2\end{matrix}\right. \in f(x)$

$A_1\left|\begin{matrix}-1\\2\end{matrix}\right. \in f(x+1)$

$A_2\left|\begin{matrix}-\frac{1}{2}\\2\end{matrix}\right. \in f(2x+1)$

$A_3\left|\begin{matrix}\frac{1}{2}\\2\end{matrix}\right. \in f(-2x+1)$

$A_4\left|\begin{matrix}\frac{1}{2}\\4\end{matrix}\right. \in 2f(-2x+1)$

$A_5\left|\begin{matrix}\frac{1}{2}\\-4\end{matrix}\right. \in -2f(-2x+1)$

در راه نسبتی می‌توان نقاط یک یا ۲ نقطه خاص را منتقل کرد.

$A\left|\begin{matrix}0\\2\end{matrix}\right. \to A'\left|\begin{matrix}-1\\2\end{matrix}\right.$

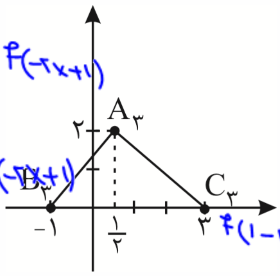
$B\left|\begin{matrix}-5\\0\end{matrix}\right. \to B'\left|\begin{matrix}-6\\0\end{matrix}\right.$

$C\left|\begin{matrix}3\\0\end{matrix}\right. \to C'\left|\begin{matrix}2\\0\end{matrix}\right.$

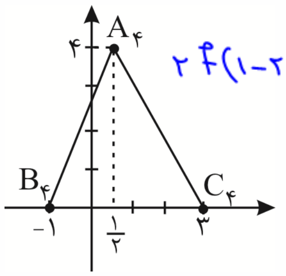
$B'\left|\begin{matrix}-6\\0\end{matrix}\right. \to B''\left|\begin{matrix}-3\\0\end{matrix}\right.$

$C'\left|\begin{matrix}2\\0\end{matrix}\right. \to C''\left|\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right.$

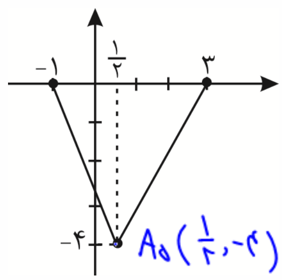
$A'\left|\begin{matrix}-1\\2\end{matrix}\right. \to A''\left|\begin{matrix}-\frac{1}{2}\\2\end{matrix}\right.$



عرض‌ها دو برابر می‌شوند



تقارن عمودی



$B''\left|\begin{matrix}-3\\0\end{matrix}\right. \to B_3\left|\begin{matrix}3\\0\end{matrix}\right.$

$A''\left|\begin{matrix}-\frac{1}{2}\\2\end{matrix}\right. \to A_3\left|\begin{matrix}\frac{1}{2}\\2\end{matrix}\right.$

$C''\left|\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right. \to C_3\left|\begin{matrix}-1\\0\end{matrix}\right.$

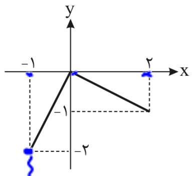
$C_3\left|\begin{matrix}-1\\0\end{matrix}\right. \to C_4\left|\begin{matrix}-1\\0\end{matrix}\right.$

$B_3\left|\begin{matrix}3\\0\end{matrix}\right. \to B_4\left|\begin{matrix}3\\0\end{matrix}\right.$

$A_3\left|\begin{matrix}\frac{1}{2}\\2\end{matrix}\right. \to A_4\left|\begin{matrix}\frac{1}{2}\\4\end{matrix}\right.$

مراحل رسم :
تابع f با بر
یک واحد به چپ
x ها نصف
قرینه نسبت به محور y ها
قرینه نسبت به محور x ها

تمرین: نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت



است، نمودار تابع $y = -f(1-2x)$ کدام است؟

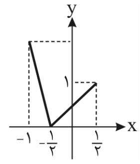
$A\begin{vmatrix}-1\\-2\end{vmatrix} \in f(x)$

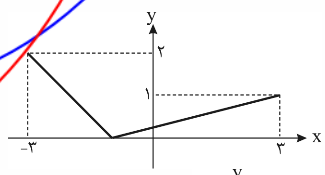
$A_1\begin{vmatrix}-2\\-2\end{vmatrix} \in f(x+1)$

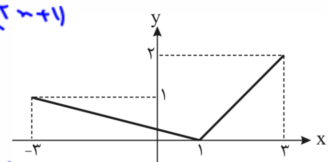
$A_2\begin{vmatrix}-1\\-2\end{vmatrix} \in f(2x+1)$

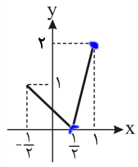
$A_3\begin{vmatrix}1\\-2\end{vmatrix} \in f(-2x+1)$

$A_4\begin{vmatrix}1\\2\end{vmatrix} \in -f(-2x+1)$ فقط روی گزینه ۳ است

۱)


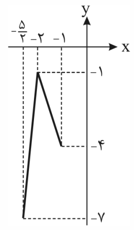
۲)


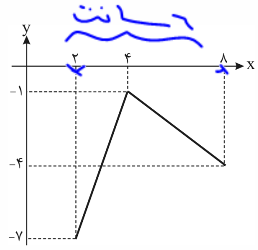
۳)


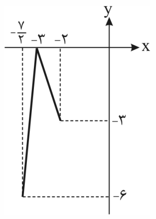
۴)


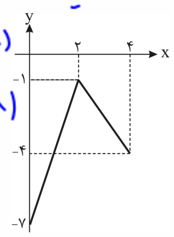
روش تستی : از روی شکل f(x) می بینیم دامنه اش D_f [-1,2] ۳ تا است
برای f(1-2x) ، دامنه باید نصف شود یعنی $\frac{3}{2}$ تا پس حتماً گزینه ۲ و گزینه ۳ با دامنه ۶ تایی غلطه
f(x) در x=0 تیز
$-f(1-2x)$ در $x=\frac{1}{2}$ باید تیز باشه

تمرین: بر اساس نمودار تابع $y = f(x)$ در تست قبلی، نمودار تابع $y = 3f(\frac{x}{2}-2)-1$ کدام است؟

۱)


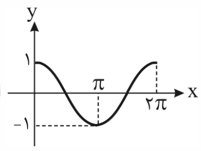
۲)
۶ تا است


۳)


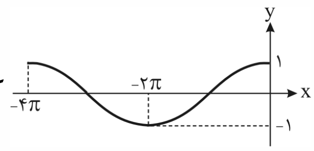
۴)


روش سریع : دامنه f(x) ۳ تا است دامنه $3f(\frac{x}{2}-2)$ باید ۲ برابر یعنی ۶ تا باشد تنها
گزینه با دامنه ۶ تا گزینه ۲ است

تمرین: نمودار تابع $y = f(x)$ به شکل



است، ضابطه‌ی نمودار

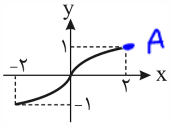


کدام است؟

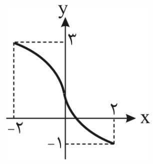
۱) $y = f(\frac{x}{2})$
۲) $y = f(-\frac{x}{2})$
۳) $y = f(2x)$
۴) $y = f(-2x)$

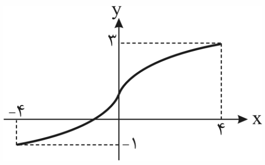
f(x) هم انبساط در راستای x ها پیدا کرده و ۲ برابر شده
$f(\frac{x}{2})$ و هم قرینه نسبت به y ها شده پس $f(-\frac{x}{2})$
جواب است گزینه ۲

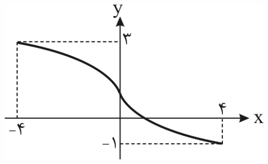
تمرین: نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت

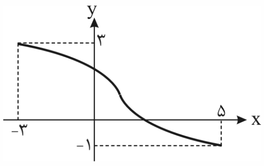


است، نمودار تابع $y = -۲f(\frac{x}{۲}) + ۱$ کدام است؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

f(x) باید xهایش ۲ برابر شود و عرض هایش ۲- برابر و به واحد هم کلاً برده بالا.

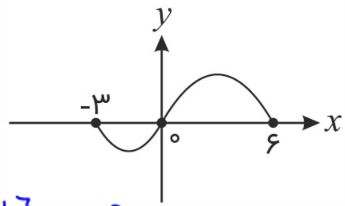
$A\Big|^{۲}_{۱} \in f(x)$

$A_1\Big|^{۴}_{۱} \in f(\frac{x}{۲})$

$A_2\Big|^{۴}_{-۲} \in -۲f(\frac{x}{۲})$

$A_3\Big|^{۴}_{-۱} \in -۲f(\frac{x}{۲})+۱$ فقط روی گزینه ۳ است.

تمرین: اگر نمودار $y = f(x)$ به صورت زیر باشد، نمودار تابع $y = f(۱-۳x)$ کدام است؟



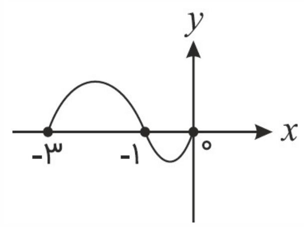
$A\Big|^{۶}_{۰} \in f(x)$

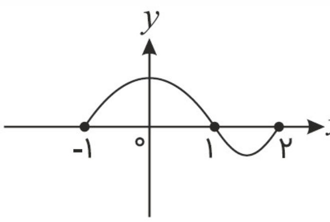
$A_1\Big|^{۵}_{۰} \in f(x+1)$

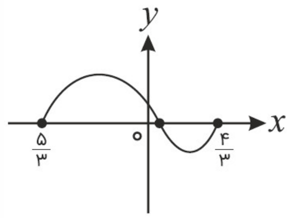
$A_2\Big|^{\frac{۵}{۳}}_{۰} \in f(۳x+1)$

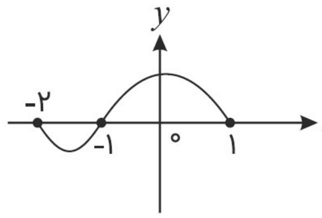
$A_3\Big|^{-\frac{۵}{۳}}_{۰} \in f(-۳x+1)$

فقط روی گزینه ۴ است

۱) 

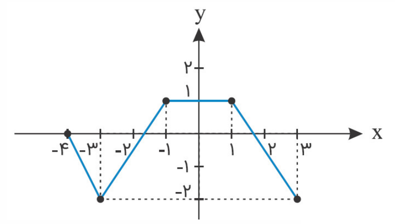
۲) 

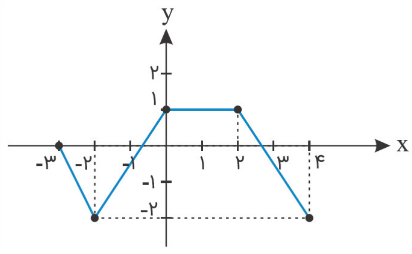
۳) 

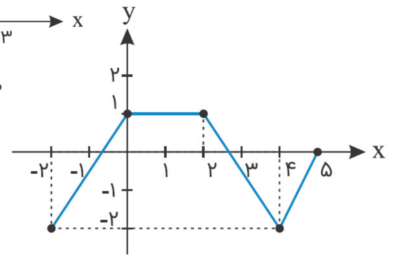
۴) 

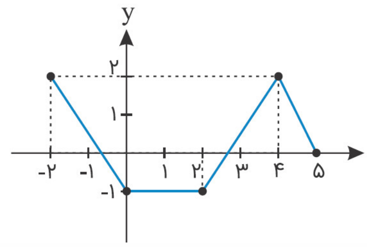
پاسخ: گزینهٔ «۳» ـ باید تابع نسبت به محور yها قرینه شود و همچنین xهای آن $\frac{۱}{۳}$ گردد و در آخر نمودار $\frac{۱}{۳}$ به سمت راست منتقل گردد.

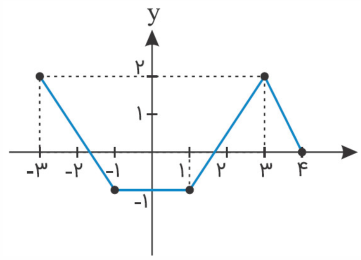
تعرین: اگر نمودار تابع $f(x)$ به صورت زیر باشد، نمودار $-f(-x+1)$ کدام است؟



(۱


(۲


(۳


(۴


پاسخ: گزینهٔ «۳» ـ برای رسم نمودار تابع $-f(-x+1)$ باید مراحل زیر را انجام داد:

ابتدا نمودار ۱ واحد به سمت چپ انتقال داده شود و نمودار نسبت به محور yها قرینه شود، سپس برای این که نمودار $-f(-x+1)$ را رسم کنید باید نمودار را نسبت به محور xها قرینه کنید که در نهایت به گزینهٔ (۳) می‌رسیم.

تعرین: اگر نمودار تابع f به صورت شکل زیر و $g(x)=\begin{cases} f(x+1) & x\geq 0 \\ f(2x) & x<0 \end{cases}$ باشد، مساحت سطح محدود بین نمودار تابع g و محور xها کدام است؟

در $x\geq 0$ تابع f یک واحد به چپ

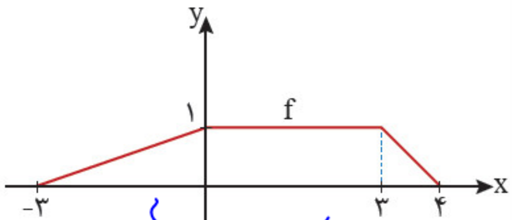
در $x<0$ x های f را نصف کنید.

(۱ $\frac{7}{4}$

(۲ $\frac{11}{4}$

(۳ $\frac{13}{4}$

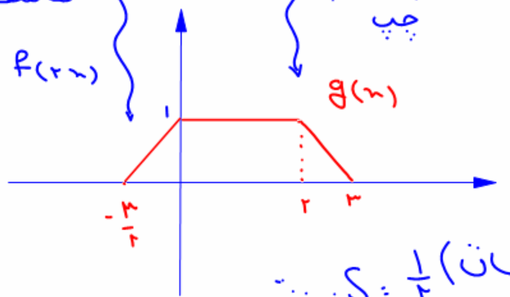
(۴ $\frac{15}{4}$



x ها نصف

$f(2x)$

در ایکس مثبت یک واحد به چپ



$g(x)$

$S_{\text{ذوزنقه}} = \frac{1}{2}(\text{مجموع دو قاعده})(\text{ارتفاع}) = \frac{1}{2}\left(\frac{9}{2}+2\right)(1) = \frac{13}{4}$

گ ۳

x را به x-1 تبدیل کن

تمرین: نمودار تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ را در امتداد محور xها یک واحد در جهت مثبت و سپس قرینهٔ آن نسبت به محور xها را در امتداد محور yها ۲ واحد د رجهت منفی انتقال می‌دهیم. فاصله نقطه‌های برخورد منحنی حاصل با نمودار تابع f، از مبدأ مختصات کدام است؟ (خارج ۱۴۰۱)

۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۲) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ ۳) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ ۴) $\frac{\sqrt{10}}{2}$

$$\begin{cases} y=-\frac{1}{x-1}-2 \\ y=\frac{1}{x}\end{cases}$$

باهم قطع می‌دهیم (مساوی می‌گذاریم)

$\frac{-1}{x-1}-2=\frac{1}{x}$

$\frac{-1-2x+2}{x-1}=\frac{1}{x}$ $\frac{-2x+1}{x-1}=\frac{1}{x}$ $-2x^2+x=x-1$ طرفین وسطین

$2x^2=1 \longrightarrow x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}} \in y=\frac{1}{x}$

$A(\frac{1}{\sqrt{2}},\sqrt{2})$ $OA=\sqrt{\frac{1}{2}+2}=\sqrt{\frac{5}{2}}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$

$A'(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\sqrt{2})$ $OA'=\sqrt{\frac{1}{2}+2}=\sqrt{\frac{5}{2}}=$

گزینه ۴

جواب را گویا کن:

گویا کنید: $OA=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{10}}{2}$

تمرین: نقطهٔ $A(-1,3)$ روی نمودار تابع $f(x)$ و نقطهٔ متناظر با آن یعنی $A'(a,b)$ روی نمودار تابع $y=3f(2x-5)-7$ قرار دارد. $a-b$ کدام است؟

۱) ‎-۲ ۲) صفر ۳) ۲ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ «۲»

$$A\begin{vmatrix}-1\\3\end{vmatrix}\xrightarrow{\text{۵واحدبه‌راست}}\begin{vmatrix}4\\3\end{vmatrix}\xrightarrow{\text{انقباض‌طولی}}\begin{vmatrix}2\\3\end{vmatrix}\xrightarrow{\text{انبساط عرضی}}\begin{vmatrix}2\\9\end{vmatrix}\xrightarrow{\text{انتقال به پایین}}\begin{vmatrix}2=a\\2=b\end{vmatrix}$$

$\Rightarrow A'(2,2) \Rightarrow a-b=2-2=0$

مهم

$\sqrt{-x}$

تمرین: قرینهٔ نمودار $f(x)=\sqrt{x}$ را نسبت به محور yها تعیین کرده، سپس ۲ واحد به طرف xهای مثبت انتقال می‌دهیم. نمودار حاصل، نیمساز ناحیهٔ اول و سوم را با کدام طول قطع می‌کند؟ (خارج تجربی ۹۷)

رادیکال $\sqrt{-x}$: x را به x-2 تبدیل می‌کنیم

۱) ‎-۲ ۲) ۰/۵ ۳) ۱ ۴) ۱/۵

xها را بردار و x-2 بزار

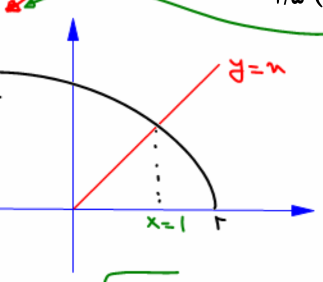
$y=\sqrt{-(x-2)}$

$$\begin{cases} y=\sqrt{-x+2} \\ y=x\end{cases}$$

حدس

$x=1$

جواب ← $x=\sqrt{-x+2}$



اگر نخواهیم جواب حدس بزنیم: $x=\sqrt{-x+2}$

طرفین به توان ۲

$x^2=-x+2$

$x^2+x-2=0$

$x=1$

$x=-2$

می‌بینیم برخورد دو تابع در بازه $(0,2)$ است لذا x=1 درسته

تمرین: اگر $x=2$ محور تقارن $y=f(x+1)$ باشد، محور تقارن $y=f(1-x)$ کدام است؟

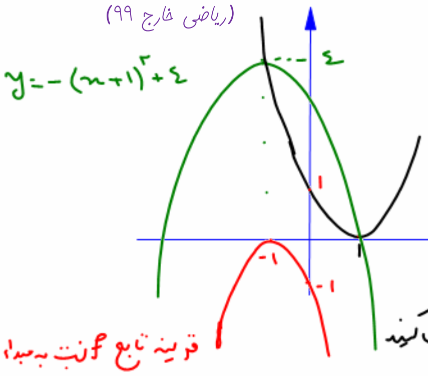
۱) $x=-4$ ۲) $x=4$ ۳) $x=-2$ ۴) $x=-1$

در این تابع x به -x تبدیل شده $y=f(-x+1)$ یعنی شکل نسبت به محور yها قرینه شده، پس محور تقارنش

هم نسبت به محور yها قرینه می‌شود و جواب x=-2 است. گزینه ۳

تمرین: ابتدا قرینه نمودار تابع $f(x)=(x-1)^2$ را نسبت به مبدأ مختصات رسم کرده، سپس منحنی حاصل را ۴ واحد به سمت بالا انتقال می‌دهیم. طول نقاط تلاقی منحنی اخیر با منحنی اصلی کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۹)

۱) ۰، ۲ ۲) ۱، ۱- ۳) ۲، ۱ ۴) ۱، ۲-



نکته: $A(x,y)$ و $A'(-x,-y)$ نسبت به مبداء قرینه‌اند. برای اینکه قرینه یک منحنی (تابع) را نسبت به مبدای بیابید x ها را به $-x$ و y را به $-y$ تبدیل کنید.

$y=(x-1)^2 \xrightarrow{} -y=(-x-1)^2$ ساده کن $y=-(x+1)^2$

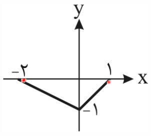
$$\begin{cases} y=-(x+1)^2+4 \\ y=(x-1)^2 \end{cases}$$

$(x-1)^2=-(x+1)^2+4$ حل کنید یا گزینه‌ها را چک کنید $x=1$ و $x=-1$

گزینه ۲ درسته!

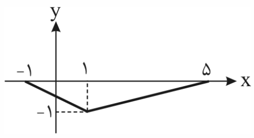
گاهی اوقات نمودار انتقال‌یافته رو میدن و نمودار خود $f(x)$ رو می‌پرسن.

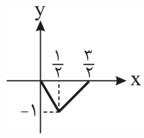
تمرین: نمودار $y=f(1-2x)$ به صورت

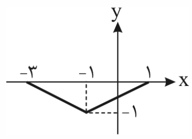


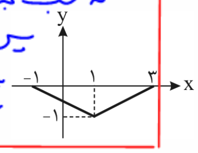
است، نمودار $y=f(x)$ کدام است؟

$y=f(1-2x)$ راه سریع: دامنه از ۲- تا ۱ برابر ۳ است که نسبت به دامنه f نصف شده. پس دامنه f باید ۶ تا باشه که فقط در گزینه یک این طوراست.

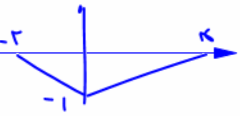
۱) 

۲) 

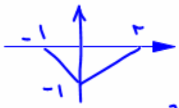
۳) 

۴) 

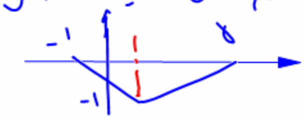
چون f بوده که به واحد به چپ رفته x ها نصف شده و نسبت به y ها قرینه شده است. حالا برای رسیدن به $f(x)$ عمل برعکس انجام می‌دهیم اول قرینه نسبت به y ها



پس x ها دو برابر

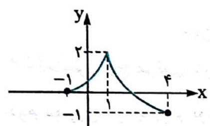


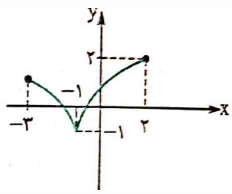
و در آخر یک واحد به راست

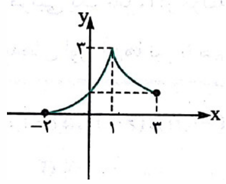


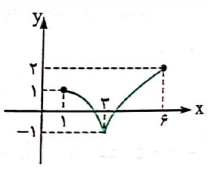
گزینه ۱ درسته

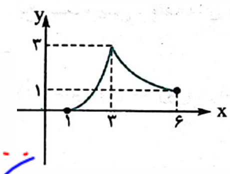
تمرین: اگر نمودار تابع $y=-f(x-2)$ به شکل مقابل باشد، نمودار تابع $y=1+f(x)$ کدام است؟



۱) 

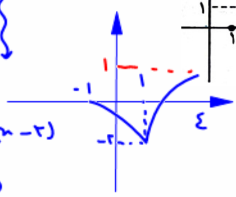
۲) 

۳) 

۴) 

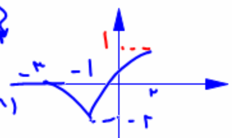
$y=-f(x-2)$

قرینه نسبت به x ها

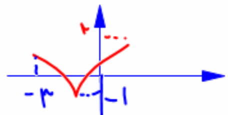


$y=f(x-2)$

۲ واحد به چپ

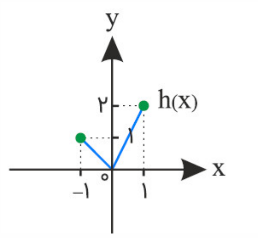


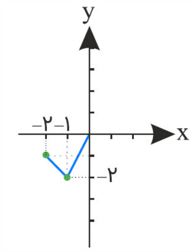
$y=f(x)$

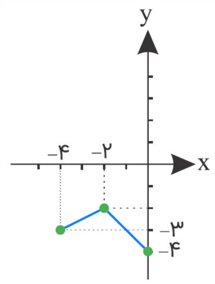


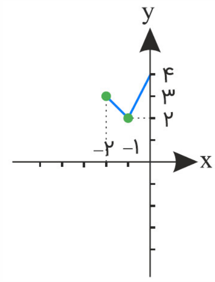
$y=1+f(x)$ گزینه ۱

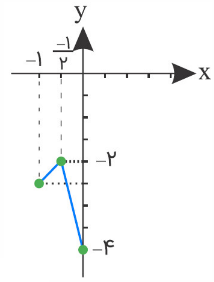
تمرین: نمودار تابع $h(x) = f(x-1) - 2$ مطابق شکل زیر است. کدام گزینه نمودار تابع $-f(\frac{x}{2})$ را به درستی نشان می‌دهد؟



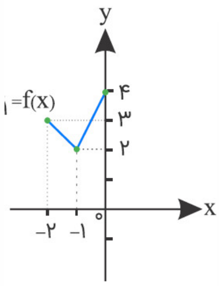
۱) 

۲) 

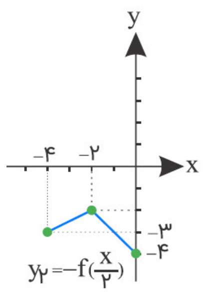
۳) 

۴) 

پاسخ: گزینهٔ «۲» ـ ابتدا باید نمودار تابع $y_1 = f(x)$ را به دست آوریم. برای این منظور، کافی است نمودار $y = h(x)$ را یک واحد به سمت چپ و دو واحد به سمت بالا انتقال دهیم؛ بنابراین:



حال برای رسم $y_2 = -f(\frac{x}{2})$ کافی است نمودار تابع $y_1 = f(x)$ را در راستای افقی دو برابر منبسط و سپس نسبت به محور xها قرینه کنیم؛ در نتیجه تابع $y_2 = -f(\frac{x}{2})$ به صورت زیر به دست می‌آید:



«تاثیر انتقال روی دامنه و برد تابع» بسیار مهم در تست و کنکور

۱) اگر دامنه‌ی f ،بازه‌ی $[a,b]$ باشد، برای یافتن دامنه‌ی $A.f(Bx+c)+D$ کافی است نامعادله‌ی $a \le Bx + c \le b$ را حل کنید.

تمرین: اگر دامنه‌ی تابع f بازه‌ی $[-2,3)$ باشد، دامنه‌ی $y = 5f(3x) - 3$ را بیابید.

دقت کن دامنه f از ۲- تا ۳ برابر ۵ سانت

در $f(3x)$ دامنه باید $\frac{5}{3}$ سانت شود

ضریب ۵ و عدد ۳- در $5f(3x)-3$

دامنه $f(3x)$ را عوض نمی‌کند.

$D_{f(x)}: -2 \le x < 3$

ورودی‌های f

$-2 \le 3x < 3$

$D_{f(3x)}: -\frac{2}{3} \le x < 1 = D_{5f(3x)-3}$

۳x ورودی f است باید بین ۲- تا ۳ باشد.

نکته مهم

$D_f = D_{af+b}$

مثال $\begin{cases} D_{f(x)} = D_{3f(x)+7} \\ D_{f(3x)} = D_{5f(3x)-3} \end{cases}$

۲) اگر دامنه‌ی $A.f(Bx+c)+D$ بازه‌ی $[a,b]$ باشد، برای یافتن دامنه‌ی $f(x)$ با قرار دادن $a \le x \le b$ ، عبارت $Bx+c$ را بسازیم و محدوده‌اش را بیابیم.

بی‌تأثیر در دامنه است برد را عوض می‌کند

تمرین: اگر دامنه‌ی $y=-۲f(۴x-۱)$ بازه‌ی $\overbrace{[-۳,۳]}^{۶\ \text{تا}}$ باشد، دامنه‌ی f را بیابید.

دامنهٔ $y=-۲f(۴x-۱)$ با دامنهٔ $f(۴x-۱)$ برابره :

$$-۳ \le x < ۳ \xrightarrow{\text{ضرب در } ۴} -۱۲ \le ۴x < ۱۲ \qquad -۱۲-۱ \le \underbrace{۴x-۱} < ۱۲-۱$$

$$D_f\ \underbrace{[-۱۳\ ,\ ۱۱)}_{۲۴\ \text{تا}}$$

۳) اگر برد f، بازه‌ی $[a,b]$ باشد، برای یافتن برد $A.f(Bx+c)+D$ کافی است برد f را در A ضرب کنیم و سپس با D جمع می‌کنیم.

تمرین: اگر برد تابع f برابر $R_f=[-\sqrt{۳},۲]$ باشد، برد تابع $y=\sqrt{۲}f(x-۱)+۱$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۵ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

بی‌تأثیر در برد است زیرا تابع را به دامنه به راست برد.

$$-\sqrt{۳} \le \quad \le ۲$$
$$\sqrt{۲}(-\sqrt{۳}) \le \quad \le \sqrt{۲}(۲)$$
$$۱+\sqrt{۲}(-\sqrt{۳}) \le \quad \le \sqrt{۲}(۲)+۱$$

$$R_{\sqrt{۲}f(x-۱)+۱} : [\overset{-۱,...}{۱-\sqrt{۶}}\ ,\ \overset{۳,۸}{۲\sqrt{۲}+۱}]$$

۵ تا عدد صحیح $\boxed{-۱,۰,۱,۲,۳}$

تمرین: دامنهٔ تابع $y=\dfrac{-f(x)}{۲}$ به صورت $[۰,۴)$ است. دامنهٔ تابع $y=-f(\dfrac{-x}{۲})$ کدام است؟

۱) $[-۸,۰]$ ۲) $(-۸,۰]$ ۳) $[۰,۸]$ ۴) $[۰,۸)$

پاسخ: گزینهٔ «۲» ـ می‌دانیم دامنهٔ توابع $y=\dfrac{-f(x)}{۲}$ و $y=f(x)$ برابر است. (قبوله؟) پس داریم: $D_{-\frac{f(x)}{۲}}=D_{f(x)}=[۰,۴)$

از طرفی برای محاسبهٔ دامنهٔ تابع $y=-f(\dfrac{-x}{۲})$ می‌توان نوشت: $۰ \le -\dfrac{x}{۲} < ۴ \xrightarrow{\times(-۲)} -۸ < x \le ۰$

پس دامنهٔ تابع $y=-f(-\dfrac{x}{۲})$ برابر $(-۸,۰]$ است.

تمرین: اگر برد تابع $y=f(x-۱)$ به صورت $[۰,۲)$ باشد، برد تابع $y=-۳f(۲-x)+۱$ کدام است؟

۱) $(-۱,۵]$ ۲) $[-۱,۵)$ ۳) $(-۵,۱]$ ۴) $[-۵,۱)$

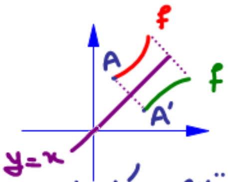
پاسخ: گزینهٔ «۳» ـ می‌دانیم انتقال افقی روی برد تابع اثر ندارد یعنی برد دو تابع $f(x-۱)$ و $f(۲-x)$ یکی است. حالا شروع می‌کنیم و محدودهٔ برد تابع خواسته‌شده را پیدا می‌کنیم، پس داریم:

$$۰ \le f(۲-x) < ۲ \xrightarrow{\times(-۳)} -۶ < -۳f(۲-x) \le ۰ \xrightarrow{+۱} -۵ < -۳f(۲-x)+۱ \le ۱$$

پس برد تابع $y=-۳f(۲-x)+۱$ بازهٔ $(-۵,۱]$ است.

کنکور جامع تابع وارون یا تابع معکوس یا f^{-1} اِف اینورس Inverse

$A(\alpha,\beta)\in f$



$A'(\beta,\alpha)\in f^{-1}$

A و A' نقاط متناظر روی تابع و معکوسش

① f و f^{-1} نسبت به خط $y=x$ قرینه‌اند.

② اگر f اکیداً یکنوا باشد یک به یک است و هر تابع یک به یک وارون پذیر است.

مثال: f و g را از نظر وارون پذیری کنترل کنید:

$f=\{(5,6),(7,8)\}$ $g=\{(1,5),(3,7),(4,5)\}$

$f^{-1}=\{(6,5),(8,7)\}$ $g^{-1}=\{(5,1),(7,3),(5,4)\}$

f یک به یک است
f^{-1} هم تابع است لذا f
وارون پذیر است

وارون وجود دارد ولی
چون تابع نیست g
وارون پذیر نیست
و یک به یک نبود که وارون پذیر نشد

③ طرز ساختن وارون از روی تابع با زوج مرتب:

کافی است هر نقطه به صورت (α,β) روی f را به صورت (β,α) در f^{-1} بنویسید.

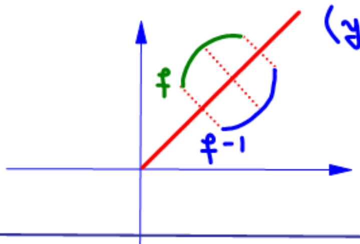
$f=\{(7,8),(9,3)\}$

$f^{-1}=\{(8,7),(3,9)\}$

④ چون جای x و y در تابع f عوض شده:

$D_f=R_{f^{-1}}$ $R_f=D_{f^{-1}}$

⑤ طرز کشیدن f^{-1} با داشتن شکل f: از هر نقطه تابع f به خط $y=x$ عمود کرده و به اندازه خود امتدادی دهیم تا به نظیر نقطه A برسیم. چند نقطه از f^{-1} را یافته و به هم وصل می‌کنیم. (قرینه شکل نسبت به $y=x$)



$A(2,3)\in f \longrightarrow f(2)=3$ ورودی f همان خروجی f^{-1} است.

$A'(3,2)\in f^{-1} \longrightarrow f^{-1}(3)=2$ ورودی f^{-1} همان خروجی f است.

⑥ طرز یافتن ضابطه f^{-1} با داشتن ضابطه f: تابع f را برابر y فرض کرده، x را برحسب y بدست می‌آوریم و سپس جای x و y را عوض می‌کنیم.

وارون توابع زیر را بیابید. (هم برای امتحان نهایی هم کنکور)

$f(x)=2x+3$

$y=2x+3$

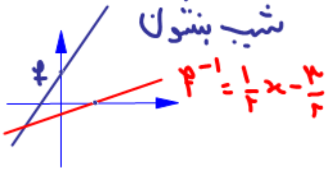
$\frac{y-3}{2}=x$

$\frac{x-3}{2}=y$

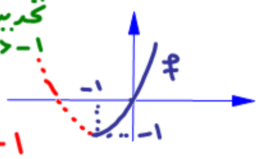
$\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}=y$

$f^{-1}(x)=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$

شیب خط را معکس کن
عرض از مبدا را قرینه کن روی
شیب بشود



$f(x)=x^2+2x$ تحدید دامنه $x\geq -1$



$y=x^2+2x$

$y=(x^2+2x+1)-1$

$y=(x+1)^2-1$

$y+1=(x+1)^2$

$\sqrt{u^2}=|u|$

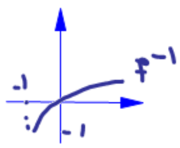
$\sqrt{(x+1)^2}=|x+1|$

$\sqrt{y+1}=|\underbrace{x+1}_{+}|$ $x\geq -1$

$\sqrt{y+1}=x+1$

$-1+\sqrt{y+1}=x$

$-1+\sqrt{x+1}=y=f^{-1}(x)$



$y=x^2+2x$ سهمی

به حوزه خود اکیداً یکنوا، یک به یک و وارون پذیر نیست مگر اینکه دامنه اش را محدود کنیم و یک شاخه آن را وارون کنیم.

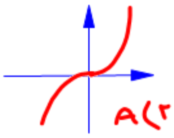
⑦ f و f^{-1} از نظر صعودی یا نزولی بودن مثل هم هستند.

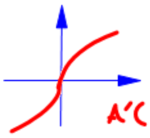
وارون $f(x)=x^3$ را بیابید.

مکعب ایکس

$y=x^3 \longrightarrow x=\sqrt[3]{y} \longrightarrow y=\sqrt[3]{x}=f^{-1}(x)=$ کعب ایکس

ریشه سوم





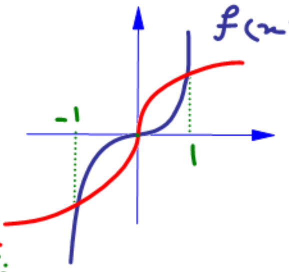
تابع $f(x)=x^3$ وارون خود را در چه نقاطی قطع می‌کند؟

راه یک: تابع $y=x^3$ را با $y=\sqrt[3]{x}$ قطع دهیم:

$x^3=\sqrt[3]{x} \xrightarrow[\text{به توان ۳}]{} x^9=x$

$x^9-x=0 \longrightarrow x(x^8-1)=0 \longrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x^8=1 \longrightarrow x=\pm 1 \end{cases}$

3 برخورد دارند: $x=\pm1,0$



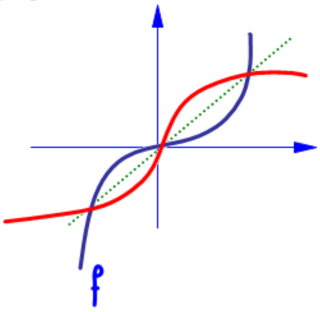
نکته ۷:

راه دو: چون $y=x^3$ اکیداً صعودی است تابع اکیداً صعودی و وارونش وارون را روی خط $y=x$ قطع می‌کند لذا لازم نیست f^{-1} را بیابیم و با f قطع دهیم f را با $y=x$ قطع می‌دهیم:

$\begin{cases} f(x)=x^3 \\ y=x \end{cases} \rightsquigarrow x^3=x$

$x^3-x=0$

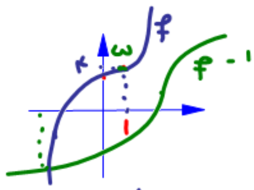
$x(x^2-1)=0 \longrightarrow x=\pm1,0$

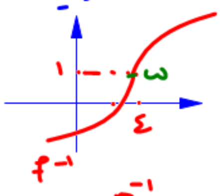


الف) وارون $f(x)=x^3-3x^2+3x+3$ را بیابید. ب) f و f^{-1} را رسم کنید.

$y=(x^3-3x^2+3x-1)+4=(x-1)^3+4 \longrightarrow y-4=(x-1)^3 \xrightarrow[\text{ریشه سوم}]{} \sqrt[3]{y-4}=x-1$

$x=1+\sqrt[3]{y-4} \longrightarrow y=1+\sqrt[3]{x-4}=f^{-1}(x)$





$f(x)=(x-1)^3+4$ همون x^3 هست یکی به راست رفته ۴ تا به بالا

$f^{-1}(x)=1+\sqrt[3]{x-4}$ همون $\sqrt[3]{x}$ هست که ۴ تا به راست و یکی به بالا رفته

f و f^{-1} یک بار در xهای منفی با هم برخورد دارند.

وارون $f(x)=x^3+6x^2+12x$:

$y=(x^3+6x^2+12x+8)-8$

$y=(x+2)^3-8 \rightsquigarrow y+8=(x+2)^3$

$\sqrt[3]{y+8}=x+2 \rightsquigarrow x=-2+\sqrt[3]{y+8} \longrightarrow y=-2+\sqrt[3]{x+8}=f^{-1}(x)$

وارون هموگرافیک $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$:

$y=\frac{ax+b}{cx+d} \rightsquigarrow cxy+dy-ax=b$

$x(cy-a)=-dy+b$

$x=\frac{-dy+b}{cy-a} \rightsquigarrow y=\frac{-dx+b}{cx-a}=f^{-1}(x)$

وارون هموگرافیک: $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d} \longleftrightarrow f^{-1}(x)=\frac{-dx+b}{cx-a}$

با شرط: $\frac{a}{c}\neq\frac{b}{d}$ یا $ad\neq bc$ ، $ad-bc\neq 0$.

$f(x)=\frac{3x+5}{2x-7} \longleftrightarrow f^{-1}(x)=\frac{7x+5}{2x-3}$

زیرا اگر $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$ باشد تابع ثابت میشه و یک به یک و وارون پذیر نیست.

نکته: در تابع هموگرافیک $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ اگر $a+d=0$ یعنی $a=-d$ باشد f و f^{-1} منطبقند یا معادله $f=f^{-1}$ بی‌شمار جواب دارد یا $f=f^{-1}$ و هر جا f^{-1} دیدی می‌تونی بذاری f و برعکس مثل: $y=\frac{3x+7}{2x-3}$

تمرین: وارون $f(x)=\frac{-4x+7}{2x+9}$ را بیابید و برد f را مشخص کنید. می‌توان دامنه f^{-1} را به عنوان برد f گزارش کرد. بسیار مهم

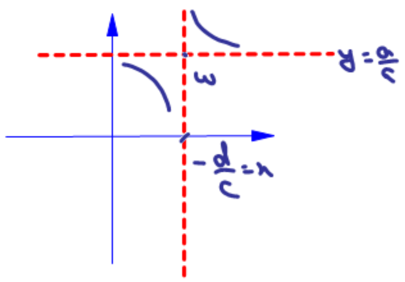
$f^{-1}(x)=\frac{-9x+7}{2x+4}$ $\quad D_f:\mathbb{R}-\{-\frac{9}{2}\}=R_{f^{-1}}$

$D_{f^{-1}}:\mathbb{R}-\{-2\}=R_f$ جواب

---

(8) نکته: در مواردی که یافتن f^{-1} ساده است می‌توان دامنه f^{-1} را به عنوان برد f گزارش کرد. مثلاً در تابع هموگرافیک.

(9) نکته: تابع هموگرافیک $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ خط $x=-\frac{d}{c}$ مجانب قائم و $y=\frac{a}{c}$ مجانب افقی است. محل برخورد این خطوط مرکز تقارن است حال اگر مرکز تقارن روی $y=x$ باشد f و f^{-1} روی هم می‌افتند و منطبقند.

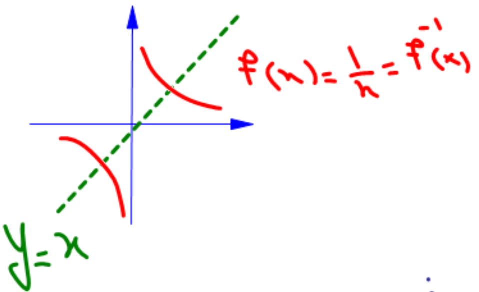


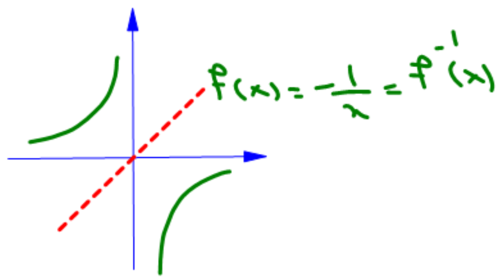
مرکز تقارن $w(-\frac{d}{c},\frac{a}{c})$

if $w\in y=x \longrightarrow f=f^{-1}$

شرط برابری $f^{-1}=f$: $\frac{a}{c}=-\frac{d}{c}\rightarrow a=-d\rightarrow a+d=0$

دو مثال بزنید که $f=f^{-1}$:





نکته: $f(x)=y=x=f^{-1}(x)$ نیمساز ناحیه اول و سوم وارونش روی خودشه.

نکته ۱۰ : $(f\circ g)^{-1} = g^{-1}\circ f^{-1}$ $\qquad (g\circ f)^{-1} = f^{-1}\circ g^{-1}$

نکته ۱۱ : SAVE

خیلی خیلی مهم

ترکیب هر تابع با وارونش تابع همانی است و برعکس. با دقت

$y=x$

نیمساز ربع اول و سوم

مثال : تابع $f(x)=2x+1$ با $D_f:[-2,3]$ مفروض است:

$R_f:[-3,7]$

دو تابع $y=(f\circ f^{-1})(x)$

$y=(f^{-1}\circ f)(x)$

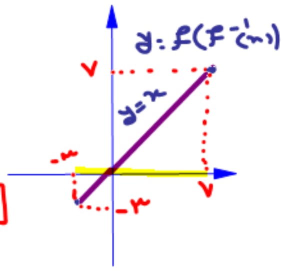
را رسم کنید.

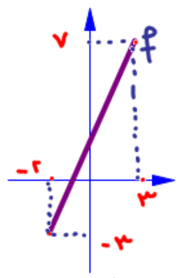
تحقیق کنید : $(f\circ f^{-1})=x$ و $(f^{-1}\circ f)=x$

$y=f(f^{-1}(x))=x \rightarrow x\in D_{f^{-1}}$

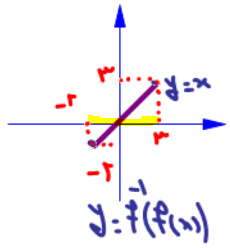
$y=f^{-1}(f(x))=x \rightarrow x\in D_f$

$y=f(f^{-1}(x))=x \rightarrow x\in D_{f^{-1}}=R_f=[-3,7]$





$y=f^{-1}(f(x))=x \rightarrow x\in D_f=[-2,3]$



$f(x)=2x+1 \qquad f^{-1}(x)=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$

$y=f(f^{-1}(x))=2\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\right)+1=x$

$y=f^{-1}(f(x))=\frac{1}{2}(2x+1)-\frac{1}{2}=x$

می‌بینیم در حالت کلی $f\circ f^{-1}\neq f^{-1}\circ f$ فقط اگر $D_f=R_f$

آنگاه : $f^{-1}(f(x))=f(f^{-1}(x))$

---

۱۷ Imp.

اگر $f(x)=x+2\sqrt{x}$ باشد ، حاصل $f^{-1}(15)$ کدام است؟

۱۵ ورودی f^{-1} همون خروجی f است : $x+2\sqrt{x}=15$

x رو حدس بزن :

$x=9$

$f(9)=9+2\sqrt{9}=15 \longrightarrow f^{-1}(15)=9$