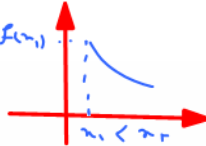


جمع بندی کنکور

۱- در تابع f ، برای هر $x \in (-\infty, 0)$ داریم: f دوروری منی و تیره. 

حدود m کدام است؟

$f(-m^2 - 3m) > f(4m + 6), x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$
 f آید نزایه

$m > -1$ (۴)

$1 < m < 6$ (۳)

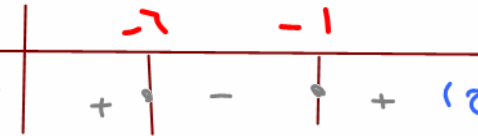
$-6 < m < -1$ (۲)

$m < -6$ (۱)

(الف) $x > -3$ یا $m < -3$ 

(ب) $-m^2 - 3m < -m(m+3)$
 $5m + 2 < 0 \Rightarrow m < -\frac{2}{5} = -\frac{4}{10}$

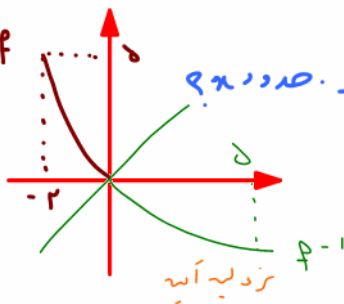
$-m^2 - 3m < 5m + 2$

$m < -6$ یا $m > -1$ (ج) 



(ج) $m < -6$ یا $m > -1$ (ب) $m < -\frac{4}{10}$ (الف) $x > -3$

سوال اگر f به شکل مقابل $f^{-1}(3x+1) > f^{-1}(2x+5)$ باشد. حدود x ؟
 اضافه:

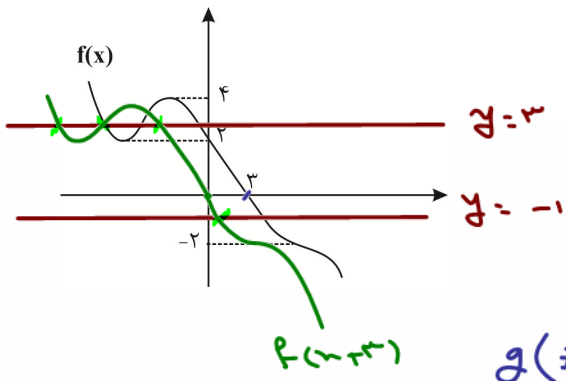


اشتهار

$$\begin{cases} 3x+1 \leq 5 \\ 2x+5 \leq 2 \end{cases}$$

$3x+1 < 2x+5$

۲- اگر $g(x) = x^2 - 2x$ و شکل مقابل نمودار تابع $f(x)$ باشد، معادله $f(g(f(x+3))) = 0$ چند ریشه دارد؟



۱ (۱)

۲ (۲)

۳ (۳)

۴ (۴)

می بینیم که وقتی ورودی ۳ بگیرد معنی می شود:

$$g(f(x+3)) = 3$$

حال باید دید $g(x)$ چه زمانی ۳ می باشد:

$$g(x) = x^2 - 2x = 3$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \quad x_1 = -1 \quad x_2 = -\frac{-2}{1} = 3$$

باید ورودی ۱ یا ۳ باشد: $f(x+3) = -1$ یا $f(x+3) = 3$

$f(x+3)$ مخرجون فرات که ۳ و ۱ به چپ می رویم از رسم کردیم و با خطانی $y=3$ و $y=-1$ قطع می دهیم می بینیم $y=3$ تابع $f(x+3)$ را ۳ بار و $y=-1$ تابع $f(x+3)$ را یک بار قطع کردیم. لذا باید ۴ ریشه دارد. گزینه ۲ صحیح است.

۳- اگر $f(x) = \log(3x - 14)$ و $g(x) = x + \sqrt[3]{12x + 3}$ باشد، تابع $y = g^{-1} \circ f^{-1}(x)$ خط $x = 0$ را در نقطه‌ای به کدام عرض قطع

می‌کند؟

$$\sqrt{2} \quad (1)$$

$$2 \quad (2)$$

$$2\sqrt{2} \quad (3)$$

$$\sqrt{2} \quad (4)$$

برای پاسخ زیر است

تج $y = (f \circ g)^{-1}$ خط $x = 0$

را کج قطع کرد. معادل این سوال است

$$f \circ g = 0 \rightarrow y = f(g(x)) = \log(3g(x) - 14) = 0$$

$$g(x) = 5 \quad \text{چون} \quad 3g(x) - 14 = 1 = 10^0$$

$$x + \sqrt[3]{12x + 3} = 5$$

حس از گزینه‌ها $x = 2$ گزینه ۲

چون $f \circ g$ در $x = 2$ می‌خوره به محور y ها پس
 $(f \circ g)^{-1}$ در $y = 2$ می‌خوره به محور x ها.

۴- اگر x در ناحیه اول مثلثاتی باشد $\sin 2x = \left(\frac{4 - \sin 2x}{2}\right) \tan x$ باشد، مقدار $\cot 2x$ کدام است؟

$$-\frac{4}{3} \quad (۴)$$

$$-\frac{2}{4} \quad (۳)$$

$$\frac{4}{3} \quad (۲)$$

$$\frac{3}{4} \quad (۱)$$

$$\begin{aligned} \sin 2x &= \left(2 - \frac{\sin 2x}{2}\right) \frac{\sin x}{\cos x} \\ \downarrow \\ 2 \cancel{\sin x} \cos x &= \left(2 - \frac{\cancel{\sin x} \cos x}{2}\right) \frac{\cancel{\sin x}}{\cos x} \\ 2 \cos^2 x &= 2 - \sin x \cos x \\ \sin x \cos x &= 2 - 2 \cos^2 x \\ &= 2(1 - \cos^2 x) \\ \cancel{\sin x} \cos x &= 2 \cancel{\sin x}^2 \\ \frac{1}{2} &= \frac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow \tan x = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cot 2x &= \frac{1}{\tan 2x} = \frac{1}{\frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}} \\ \cot 2x &= \frac{1 - \tan^2 x}{2 \tan x} \quad \left\{ \tan x = \frac{1}{2} \right. \\ \cot 2x &= \frac{1 - \frac{1}{4}}{2 \left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{\frac{3}{4}}{1} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

در نتیجه

۵- تعداد جوابهای معادله $9\sin^3 x + 4\sin x = 13$ در بازه $[-\pi, 8\pi]$ چندتا است؟

(۴) ۴

(۳) ۳

(۲) ۱

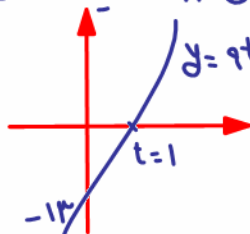
(۱) هیچ

$$\sin x = t \longrightarrow 9t^3 + 4t - 13 = 0$$

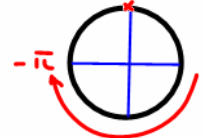
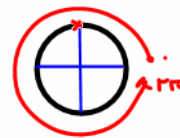
صیغ فزایب مغزه پس $t = 1$

از طرفی $y = 9t^3 + 4t - 13$ را برای $y' = 27t^2 + 4 > 0$

آینده صعودی است و نقاط همان یک ریشه $t = 1$ را دارد.



$$t = 1 \longrightarrow \sin x = 1$$



پس $\sin x = 1$ از $-\pi$ تا 8π تا ۴ بار برابر یک می شود و لی در بازه $(0, 2\pi)$ یک بار برابر یک است تا 8π چهار بار یک می شود.
گزینه ۴ درسته!

نکته: اگر تابعی مشتق ریشه نه ده یا ریشه حافت نه ده نه y' تغییر علامت نداشته باشد

تابع آینده یکبار

یک به یک

دادن پذیر

و اگر ریشه نه ده فقط یک ریشه دارد.

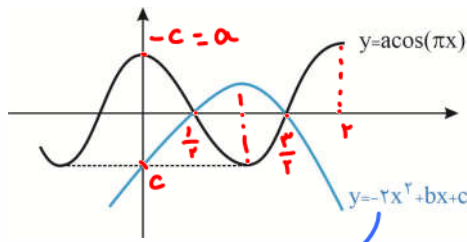


$$y = x^3 + x + 2$$

$$y' = 3x^2 + 1 > 0$$

یهداره مثبت و ی آینه صعودی

۶- تابع $y = a \cos(\pi x)$ ، سهمی $y = -2x^2 + bx + c$ را به صورت شکل مقابل قطع کرده است. حاصل $2a + b - 2c$ کدام است؟



(۱) ۴

(۲) ۶

(۳) ۸

(۴) ۱۰

از روی $T = 2$ محل برخورد رسی با

محورها یارینه $x_{1,2} = \frac{1}{4}$ و $\frac{3}{4}$ بدای شد

با داشتن دو رینه معادله رسی را می نویسیم:

$$y = -2(x - \frac{1}{4})(x - \frac{3}{4})$$

$$y = -2(x^2 - 5x + p) = -2(x^2 - 2x + \frac{3}{4}) = -2x^2 + 4x - \frac{3}{2}$$

$$S = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \frac{4}{4} = 2 = \text{جمع رینه}$$

$$x_1 \cdot x_2 = (\frac{1}{4})(\frac{3}{4}) = \frac{3}{16} = p$$

$$y = -2x^2 + bx + c$$

$$\begin{cases} b = 4 \\ c = -\frac{3}{2} \\ a = -c = \frac{3}{2} \end{cases}$$

تایه کنید:

$$2a + b - 2c = 2(\frac{3}{2}) + 4 - 2(-\frac{3}{2}) = 10$$

نرینه ۲

۷- حاصل $\lim_{x \rightarrow \pi^-} \log[\sin x]$ کدام است؟ (نماد [] جزء صحیح است).

(۴) وجود ندارد.

(۳) $-\infty$

(۲) یک

(۱) صفر



۸- اگر $f(x) = \left[\frac{-5x+7}{x-3} \right]$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(f(x))$ کدام است؟

-۵ (۴)

-۴ (۳)

-۳ (۲)

-۲ (۱)

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f\left(f(x) = \left[\frac{-5x+7}{x-3} \right] = (-2)^+ \right) = f(-2) = \left[\frac{-5(-2)+7}{-2-3} = \frac{17}{-5} = -3, \dots \right] = -4$

$y' = \frac{(-5)(-3) - 7(1)}{(x-3)^2} > 0$

۳ گزینه

۹- اگر $f(x) = \left[\frac{-5x+6}{x-3} \right]$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow +\infty} f\left(\frac{1}{x} - \frac{|\cos x| + 3}{x^2 + 7}\right)$ کدام است؟
 در ∞ از $(\sin x)$ صرف نظری کنیم
 (۱) -۲ (۲) -۳ (۳) -۴ (۴) -۵

نکته: $\sin x$ ، $\cos x$ وقتی $x \rightarrow \pm\infty$ عددی بین یک و منهای یک هستند. $-\infty \leq \sin x \leq \infty$ عدد نامعلوم

هم از دست توان $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2} = \frac{1}{1} = 1$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f\left(\frac{1}{x} - \frac{|\cos x| + 3}{x^2 + 7}\right) = \frac{1}{x} - \frac{\text{عدد}}{x^2 + 7} = \frac{x^2 + 7 - \text{عدد} \cdot x}{x(x^2 + 7)} = \frac{x^2 + 7 - \text{عدد} \cdot x}{x^3 + 7x}$

$f(x) = \frac{-5x+6}{x-3}$
 $f'(x) > 0$ ش. ف. صعودی

از روی شکل

جواب گزینه یک

$(-2)^+ = -2$

$(-2)^+ = -2$

شبه تجربی ۱۴۰۰ اوپن میمنگ بود

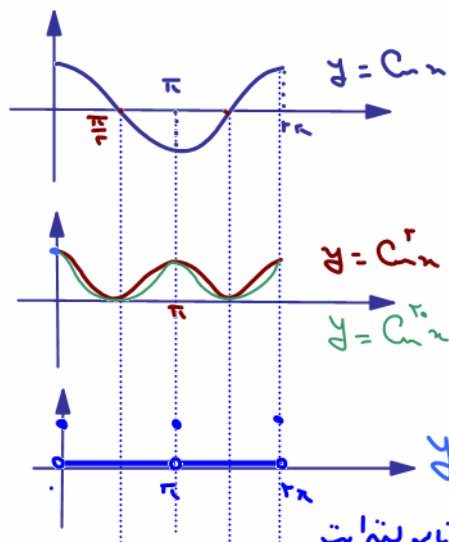
۱۰- تعداد نقاط ناپیوستگی تابع $f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \cos^{2n} x$ در بازه $(0, 2\pi)$ کدام است؟

(۴) سه

(۳) دو

(۲) یک

(۱) صفر

سرنیبه ۲ یک ناپیوستگی در $x = \pi$

$$-1 \leq \cos x \leq 1$$

$$-1 \leq \cos^2 x \leq 1$$

$$-1 \leq \cos^4 x \leq 1$$

هرچه n بیشتر باشد نمودار به محور x ها نزدیکتر دشت و برش کمتره مگر جایی که یک دشت

$$y = \lim_{n \rightarrow +\infty} \cos^{2n} x$$

در بازه $(0, 2\pi)$ فقط در $x = \pi$ ناپیوستگیات

۱۱- f انتقالی از وارون تابع $y = \sqrt[3]{x}$ است که یک واحد به سمت راست رفته است. نمودار $y = \frac{1}{f^{-1}(x)} - \frac{1}{f(x+2)}$ در اطراف $x = -1$

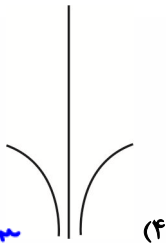
$$y = (x-1)^3$$

$$y = x^3$$

کدام است؟

$$f(x) = (x-1)^3$$

$$f(x+2) = ((x+2)-1)^3 = (x+1)^3$$



ی سب وارون $f(x)$:

$$y = (x-1)^3$$

$$\sqrt[3]{y} = x - 1$$

$$1 + \sqrt[3]{y} = x$$

$$1 + \sqrt[3]{x} = y = f^{-1}(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} y = \frac{1}{f^{-1}(x)} - \frac{1}{f(x+2)} = \frac{1}{\sqrt[3]{x+1}} - \frac{1}{(x+1)^3} = \infty - \infty$$

در سهم $\infty - \infty$ اگر تابع کسری باشد خارج مشترک می گیریم تا درست بشه بعد حد می گیریم:

$$\lim_{x \rightarrow -1} y = \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x+1}}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^3} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x+1})(x+1)^2 - 1}{(x+1)^3}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} y = \frac{-1}{(x+1)^3} \left\{ \begin{array}{l} x \rightarrow (-1)^+ \quad y = \frac{-1}{+} = -\infty \\ x \rightarrow (-1)^- \quad y = \frac{-1}{-} = +\infty \end{array} \right.$$

گزینه ۲

۱۲- اگر $f(x) = -\frac{1}{\sqrt[5]{x+|x|}}$ و $g(x) = \frac{1}{x^5 + |x^5|}$ باشد، مقدار $f'(g(\sqrt[5]{3}))g'(\sqrt[5]{3})$ کدام است؟ (سراسری ۱۴۰۳)

Diagram illustrating the chain rule for the derivative of $f(g(x))$:

Top part: A function f is applied to $g(x)$ to produce $f(g(x))$.

Bottom part: The derivative of $f(g(x))$ with respect to x is calculated as $f'(g(x)) \cdot g'(x)$.

$$y = f(g(x)) = \frac{1}{\sqrt{r\left(\frac{1}{rx_0}\right)}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x_0}}} = \frac{1}{\sqrt{x_0}}$$

جواب ۱- = σ_c
کرنش

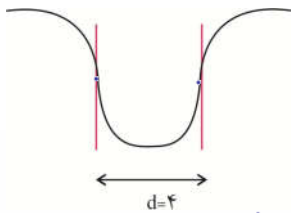
۱۳- اگر $f(x) = -\frac{1}{\sqrt[5]{x+|x|}}$ و $g(x) = \frac{1}{x^5 + |x^5|}$ باشد، مقدار $g'(\sqrt[5]{3})f'(g(\sqrt[5]{3}))$ کدام است؟ *تکراری سوال قبلی*

۱ (۴)

-۱ (۳) ✓

 $-\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۱)

۱۴- قسمتی از نمودار $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 6x + a}$ به صورت مقابل رسم شده است. a کدام است؟



$$y' = \frac{2x+6}{\sqrt[3]{(x^2+6x+a)^2}}$$

- (۱) صفر
(۲) -۲
(۳) ۴
(۴) ۵

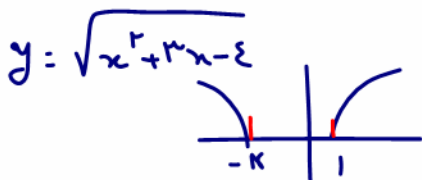
۲ ریشه دارد که تقریب نشده و معادله قائم دارد و خاصه ۲ ریشه ۴ هست
 $|x' - x''| = \sqrt{5^2 - 4p} = \sqrt{(-6)^2 - 4(a)} = 4$ $36 - 4a = 16$ $a = 5$

نکته: هر جا بتوان بر تابع معادله قائم کشید مشتق را برعکس لذار
 نقطه ریشه های زیر را بکش که فاصله شان $d=4$ شده

در توابع رادیکالی سه جبهه داریم $y = \sqrt[3]{(x-a)(x-b)^2}$ $x=a$ ، $x=b$ $\alpha = b$ $\alpha = a$ $\alpha = b$ $\alpha = a$

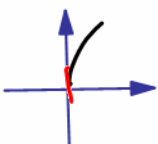
$$y = x^2 + 3x - 4$$

$$y = \sqrt[3]{x^2 + 3x - 4}$$

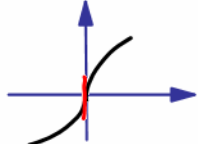


تی بسیم در ریشه زیر رادیکال معادله قائم داریم

$$y = \sqrt{x}$$

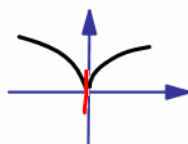


$$y = \sqrt[3]{x}$$

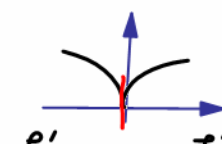


$$f'_-(0) = f'_+(0) = +\infty$$

$$y = \sqrt{x^2}$$

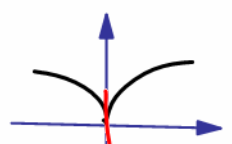


$$y = \sqrt[3]{|x|}$$



$$f'_-(0) = -\infty + f'_+(0) = +\infty$$

$$y = \sqrt{|x|}$$



۱۵- مینیمم مطلق $y = x|12 - x^2|$ در بازه $[-3, 2\sqrt{3}]$ کدام است؟

-۹ (۴)

-۱۱ (۳)

-۱۶ (۲)

-۸ (۱)

x	-۳	-۲	۲	$2\sqrt{3}$
$f(x)$	-۹	-۱۶	۱۶	۰

min خلق نزینه ۲

$$12 - x^2 = 0$$

$$x^2 = 12$$

$$x = \pm 2\sqrt{3}$$

$$x = -2\sqrt{3} \notin [-3, 2\sqrt{3}]$$

$$y = x(12 - x^2) = 12x - x^3$$

$$y' = 12 - 3x^2 = 0 \rightarrow x = \pm 2$$

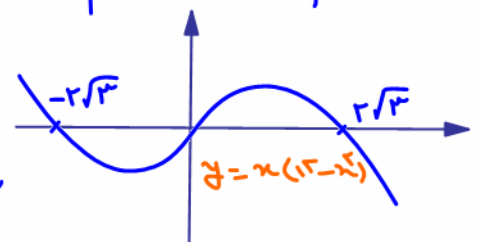
هر دو در بازه راه شده اند

رسم تابع $y = x|12 - x^2|$ را ببین:

$$y = x(12 - x^2) = -x^3 + 12x$$

که در برعکس

$$x(12 - x^2) = 0 \rightarrow x = 0, \pm 2\sqrt{3}$$



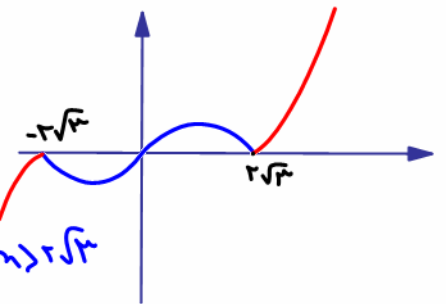
$$y = -x^3 + 12x \quad x \rightarrow 12x$$

$$y = -x^3 + 12x \quad x \rightarrow -x^3$$

$$y = x|12 - x^2| = \begin{cases} x(12 - x^2) & -2\sqrt{3} < x < 2\sqrt{3} \\ -x(12 - x^2) & x < -2\sqrt{3} \text{ یا } x > 2\sqrt{3} \end{cases}$$

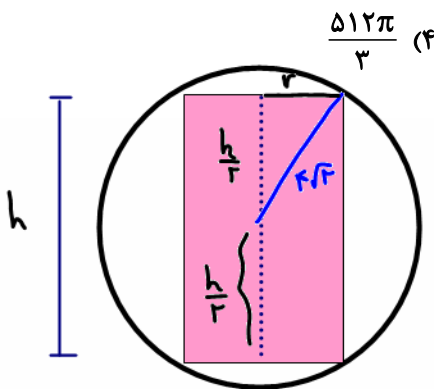


قرینه تابع با رابطه به هم ها



$$S = 2\pi r h$$

دشوار ۱۶- حداکثر مساحت جانبی استوانه‌ای که داخل کره به شعاع $4\sqrt{2}$ محاط شده کدام است؟



$$\text{فیتاغورس: } \left(\frac{h}{2}\right)^2 + r^2 = (4\sqrt{2})^2 = 32 \implies r = \sqrt{32 - \left(\frac{h}{2}\right)^2}$$

$$S = 2\pi r \cdot h = 2\pi h \sqrt{32 - \frac{h^2}{4}}$$

$$S = 2\pi \sqrt{32h^2 - \frac{h^4}{4}}$$

$$S' = 2\pi \frac{2 \cdot 32h - h^3}{2\sqrt{\dots}} = 0 \implies 2 \cdot 32h = h^3 \implies 2 \cdot 32 = h^2 \implies h = 8$$

$$r^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2 = (4\sqrt{2})^2 = 32$$

$$r = 4$$

$$S_{\text{Max}} = 2\pi (r=4)(h=8) = 64\pi$$

پایخ

راه سریع: چون $r^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2 = (4\sqrt{2})^2 = 32$ است برای Max شدن $S = 2\pi(r \cdot h)$

یعنی ماکزیمم شدن $r \cdot h$ باید $\frac{r}{2} = \frac{h}{2}$ یعنی $r = \frac{h}{2}$ ،

در $r^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2 = 32$ هم $r^2 = 16$ هم $\left(\frac{h}{2}\right)^2 = 16$ نه $r = 4$ ، $h = 8$ ،

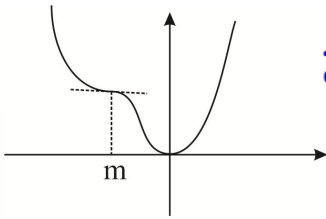
$$S_{\text{Max}} = 2\pi (r=4)(h=8) = 64\pi$$

نکته: هرگاه مجموع توانای متغیر مثبت حده ثابتی باشد، ماکزیمم زمانی ماکزیمم است که هر متغیر با توانش متغیر باشد.

$$r^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2 = 32$$

$$\implies \frac{r}{2} = \frac{h}{2} \implies r = \frac{h}{2}$$

۱۷- شکل مقابل $f(x) = 3x^4 + 8x^3 + ax^2 + bx$ است که $x = m$ بحرانی است ولی اکسترمم نیست. $\frac{a-m}{b+1}$ کدام است؟



می بینیم هم در $x=0$ هم در $x=m$ حاشیه افقیه پس $y'=0$

$$y' = f'(x) = 12x^3 + 24x^2 + 2ax + b$$

$$f'(0) = 0 \rightarrow 0 + 0 + 0 + b = 0 \rightarrow b = 0$$

$$y' = 12x^3 + 24x^2 + 2ax$$

$$y' = 2x(6x^2 + 12x + a) = 0 \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ 6x^2 + 12x + a = 0 \end{cases}$$

باید یک ریشه دهه ریشه منفی m باشد. باید ریشه مخالف $x=m$ به

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{12}{2(6)} = -1 = m$$

$$\frac{a-m}{b+1} = \frac{7 - (-1)}{0+1} = 7 \quad \text{پاسخ}$$

۵ (۱)

۶ (۲)

۷ (۳)

۸ (۴)

$$\Delta = (12)^2 - 4(6)a = 0$$

$$\frac{(12)(12)}{4(6)} = a$$

$$a = 7$$

نکته: می دانیم که اگر $y = f(u)$ باشد، $y' = u' f'(u)$ یعنی علامت مشتق هاردم مربعی شود مثال:

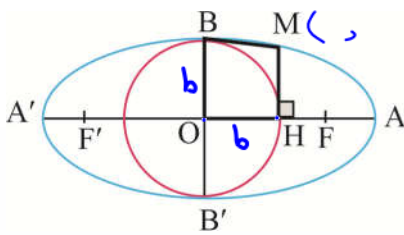
$$y = \log \sqrt[3]{x} \quad \begin{matrix} + \\ - \end{matrix}$$

$$y' = u' f'(u) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \cdot \frac{1}{u} < 0 \quad \text{اکتدزولی}$$

$$y = \log \frac{1}{x^3} \quad (x > 0) \quad \begin{matrix} + \\ - \end{matrix}$$

$$y' < 0 \quad \text{نزولی}$$

۱۸- درون بیضی با طول قطرهای ۱۰ و ۶ با همان مرکز و شعاع ۳ رسم می‌کنیم. مساحت ذوزنقه BMHO کدام است؟



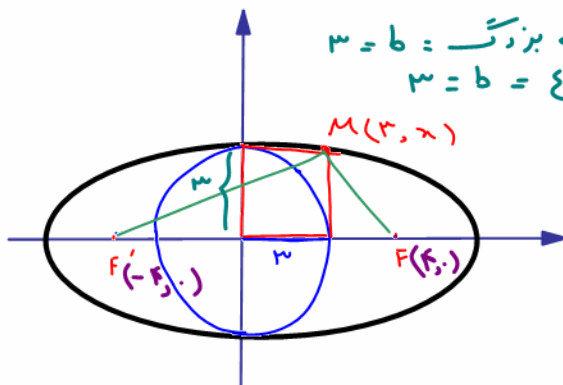
$$S = \frac{(\text{ارتفاع}) \times (\text{مجموع ۲ قاعده})}{2}$$

$$S = \frac{(b + MH)(b=3)}{2}$$

$$\begin{cases} 2a = 10 \\ a = 5 \\ 2b = 6 \\ b = 3 \\ a^2 = b^2 + c^2 \\ 5^2 = 3^2 + c^2 \end{cases} \quad \begin{matrix} (1) \ 6/1 \\ (2) \ 7/1 \\ (3) \ 8/1 \\ (4) \ 9/1 \end{matrix}$$

$$c = 4$$

طبق شکل می بینیم $MH < 3$ است ولی خیلی کمتر هم نیست لذا جواب باید از
 $\frac{(3+3)(3)}{2} = 9$ کمتر باشد و گزینه ۳



$$\begin{aligned} 3 &= b = \text{قاعده بزرگ} \\ 3 &= b = \text{ارتفاع} \end{aligned}$$

می سببه مقدار دقیق قاعده دوم ذوزنقه:

مجموع فواصل هر نقطه روی بیضی $MF + MF' = 2a = 10$ از کانونها برابر عدد ثابت قطر بزرگ است.

$$\sqrt{(3-4)^2 + x^2} + \sqrt{(3+4)^2 + x^2} = 10$$

$$x = \frac{15}{5} = \frac{10}{5} + \frac{5}{5} = 2 + 1 = 3$$

$$S = \frac{(3 + 2, 4)(3)}{2} = \frac{(5, 4)(1, 5)}{2} = 8, 1$$

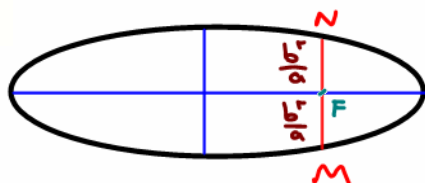
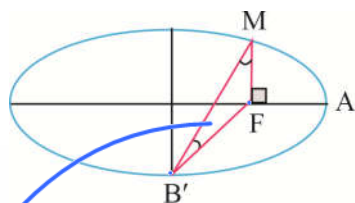
دشوار ۱۹- در بیضی مقابل خروج از مرکز $\frac{\sqrt{3}}{2}$ است. $\frac{\sin \hat{M}}{\sin \hat{B}'}$ کدام است؟

۱ (۱)

۲ (۲)

۳ (۳)

۴ (۴)



حاصل دتر کاوونی: $\frac{r_b^2}{a} = MN$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2} \rightsquigarrow \frac{3}{4} = 1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2 \rightsquigarrow \left(\frac{b}{a}\right)^2 = \frac{1}{4} \rightsquigarrow \frac{b}{a} = \frac{1}{2}$$

قضیه سینوس: $\frac{\sin M}{a = B'F} = \frac{\sin B'}{FM = \text{نصف دتر کاوونی}} = \frac{b^2}{a} = \frac{b^2}{2b} = \frac{b}{2}$ $\rightsquigarrow \frac{\sin M}{\sin B'} = \frac{a = 2b = 4}{\frac{b}{2}}$

$$a = 2b$$

۲۰- با ارقام ۱, ۱, ۱, ۲, ۲, ۲, ۳, ۳, ۳, ۴, ۴, ۴ چند عدد ۴ رقمی می توان ساخت؟

۲۵۶ (۴)

۲۵۲ (۳)

۲۲۴ (۲)

۲۱۸ (۱)

نقشه اول اعداد ۴ رقمی که می توان با ارقام ۱, ۲, ۳, ۴ ساخت: $4 \times 4 \times 4 \times 4 = 256$

اما چون از هر رقم ۳ تا داریم پس ۱۱۱۱ ۲۲۲۲ ۳۳۳۳ ۴۴۴۴
را نمی توان ساخت دین ۴ تا از کل مقدار با کسری شود: $256 - 4 = 252$

۲۱- می‌خواهیم خودروهای یک شهر را با حروف فارسی و اعداد ۲ رقمی بدون صفر شماره‌گذاری کنیم. اگر شروع شماره‌گذاری از الف - ۱۱

شروع شده و به طور صعودی است، شماره‌گذاری هزارمین اتومبیل کدام است؟

۳۹ - ز (۴)

۴۱ - ز (۳)

۳۹ - ر (۲)

۴۱ - ر (۱)

تعداد ارقام ۲ رقمی بدون صفر $9 \times 9 = 81$

الف - ۹۹ تا ۸۱

الف - ۱۱ تا ۱۳

هر حرف از حروف الفبا ۸۱ اتومبیل را می‌تواند (از ۱۱ تا ۹۹) تعداد ۸۱ عدد داریم که صفر را حذف کنند

$$81 + 8 = 89$$

(پس $89 - 8 = 81$ سری اتومبیل با پلاک $\square$ - الف داریم)

$$\begin{array}{r} 1000 \overline{) 81} \\ 12 \\ \underline{-972} \\ 28 \end{array}$$

۱۳ حرف تمام می‌شود

مادر حرف سیزدهم و اتومبیل ۱۲۸ می‌شود

ز

۱۱ - ز ۱۲ - ز ... ۲۰ - ز

۲۰ - ز

۳۰ - ز

۴۰ - ز

$$(11 + 28 = 39) + (2 \text{ هزارم}) = 41$$

گزینۀ ۳

۴۱ - ز

این روزها
خیلی سرد شد!

۲۲- در بیست بار پرتاب یک سکه با چه احتمالی سومین رو در پرتاب هفتم و هفدهمین رو در پرتاب بیستم رخ می‌دهد؟

$$\frac{815}{2^{17}} \quad (4)$$

$$\frac{825}{2^{17}} \quad (3)$$

$$\frac{825}{2^{18}} \quad (2)$$

$$\frac{825}{2^{20}} \quad (1)$$

نکته: احتمال این که در پرتاب n سکه یا یک سکه n بار، k بار رو بیاید: $\frac{\binom{n}{k}}{2^n}$

در پرتاب یک سکه ۲ بار: در ۳ پرتاب اول ۲ تارو بوده پس هفتمی هم رو آمده در ۱۳ پرتاب بعد

تذکره: $\frac{\binom{7}{1} \binom{1}{1} \times \binom{13}{3} \binom{1}{1}}{2^{20}} = \frac{15(220)}{2^{20}} = \frac{15 \times 2(55)(2)}{2^{20}} = \frac{15(55)}{2^{18}} = \frac{825}{2^{18}}$

دستوار ۲۳- اگر $\tan \alpha$ و $\tan \beta$ ریشه‌های $x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 5x + 1 = 0$ باشند و α و β در ربع اول مقدار $|\tan(\alpha - \beta)|$ کدام است؟

۲ + $\sqrt{3}$ (۴)

$\frac{\sqrt{3}}{3}$ (۳)

$\sqrt{3}$ (۲)

۱ (۱)

دستی ضرایب را مقارنته :

$$x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 5x + 1 = 0$$

حل معادله درجه ۴

$$x^2 - 5x + 2 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$$

$$(x^2 + \frac{1}{x^2}) - 5(x + \frac{1}{x}) + 2 = 0$$

$$t^2 - 5t + 2 = 0$$

نکته: $x + \frac{1}{x} \geq 2$ و $x + \frac{1}{x} \leq -2$

$$\begin{cases} t = 1 = x + \frac{1}{x} \\ t = 2 = x + \frac{1}{x} \end{cases}$$

ضرب در x

$$x^2 - 5x + 1 = 0$$

جمع دو ریشه

$$\tan \alpha + \tan \beta = -\frac{b}{a} = 5$$

ضرب در $\cos \alpha \cos \beta$

$$\tan \alpha \tan \beta = \frac{c}{a} = 1$$

$$\tan \alpha = \frac{1}{\tan \beta} = \cot \beta$$

پس α و β متمم یکدیگرند.

$$\cot \alpha = \tan \beta$$

جمع دو ریشه

$$\tan \alpha + \tan \beta = 5 \rightarrow \sin 2\alpha = \frac{5}{\sin 2\alpha} = \frac{1}{5}$$

فرمول $\tan \alpha + \cot \alpha = \frac{2}{\sin 2\alpha}$

$$\begin{cases} 2\alpha = 4^\circ \rightarrow \alpha = 2^\circ \rightarrow \beta = 88^\circ \\ 2\alpha = 16^\circ \rightarrow \alpha = 8^\circ \rightarrow \beta = 82^\circ \end{cases}$$

یا $\alpha + \beta = 90^\circ$

$$|\tan(\alpha - \beta)| = \tan(88^\circ - 2^\circ) = \tan(86^\circ) = \sqrt{3}$$

دستوار ۲۴- معادله $8^x - 5^x = \sqrt{125^x - 256^x}$ چند جواب صحیح دارد؟

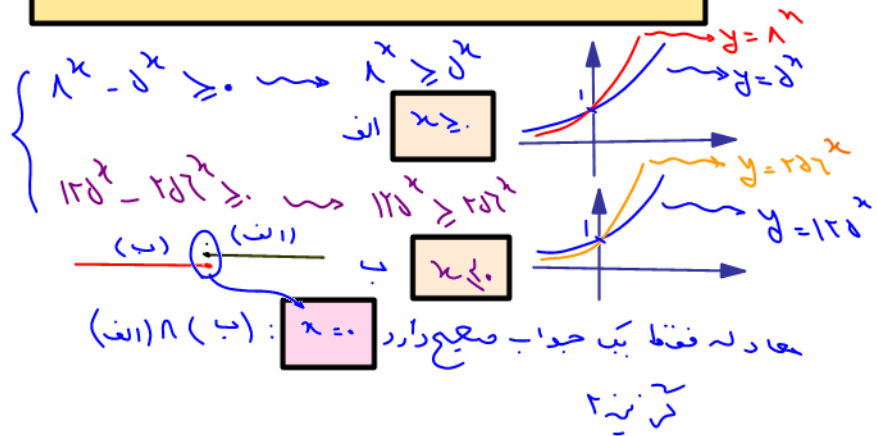
(۴) ۳

(۳) ۲

(۲) ۱

(۱) صفر

$$P = \sqrt{Q} \rightsquigarrow \overset{\text{ب}}{P} \geq 0 \text{ و } \overset{\text{الف}}{Q} \geq 0$$



۲۵- حاصل جمع ریشه‌های $\sqrt[3]{10+x} + \sqrt[3]{25-x} = 5$ کدام است؟

۱۷ (۴)

۱۵ (۳)

۱۳ (۲)

۱۱ (۱)

$$\sqrt[3]{10+x} = a \quad \sqrt[3]{25-x} = b \longrightarrow a+b=5$$

$$a^3 + b^3 = (10+x) + (25-x) = 35$$

از کسری دهم اتحاد داریم:

$$(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$$

$$(5)^3 = 35 + 3ab(5)$$

$$\frac{125 - 35}{15} = ab \longrightarrow ab = 7$$

$$S: a+b=5 \quad P: ab=7 \longrightarrow \begin{cases} x^2 - 5x + 7 = 0 \\ x^2 - 5x + 7 = 0 \\ (x-2)(x-3) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=3 = \sqrt[3]{10+x} \longrightarrow x=17 \\ b=2 = \sqrt[3]{25-x} \longrightarrow x=17 \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} 2=a = \sqrt[3]{10+x} \longrightarrow x=-2 \\ 3=b = \sqrt[3]{25-x} \longrightarrow x=-2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b=3 \\ a=2 \end{cases} \longrightarrow x=17$$

$$\begin{cases} a=3 \\ b=2 \end{cases} \longrightarrow x=17$$

$$\sqrt[3]{10+x} + \sqrt[3]{25-x} = 5$$

$$x=17 \quad \text{یا} \quad x=-2$$

جمع دو ریشه:

$$x_1 + x_2 = 17 + (-2) = 15$$

جواب گزینه ۳

دشوار ۲۶- مجموع ریشه‌های $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{119}{25}$ کدام است؟

۱/۷۵ (۴)

-۱ (۳)

۱/۷۵ (۲)

۱ (۱)

$$\frac{(x+1)^2 + x^2}{x^2(x+1)^2} = \frac{2(x^2+x)}{(2x^2+2x)+1} = \frac{2(x^2+x)+1}{(x^2+x)^2} = \frac{2}{x^2+x} + \frac{1}{(x^2+x)^2} = \frac{119}{25}$$

$$\frac{1}{x^2+x} = t$$

$$2t + t^2 = \frac{119}{25} \quad \rightarrow \quad (t+1)^2 - 1 = \frac{119}{25} \quad \rightarrow \quad (t+1)^2 = \frac{119}{25} + 1$$

$$(t+1)^2 = \frac{119+25}{25} = \frac{144}{25}$$

$$t+1 = \frac{12}{5} \quad \therefore \quad t+1 = -\frac{12}{5}$$

$$t = \frac{7}{5}$$

$$t = -\frac{17}{5}$$

$$\frac{1}{x^2+x} = \frac{7}{5}$$

$$\frac{1}{x^2+x} = -\frac{17}{5}$$

$$x^2+x-\frac{5}{7}=0$$

$$x^2+x+\frac{5}{17}=0$$

$$\Delta = 1 - 4\left(\frac{5}{17}\right) = 1 - \frac{20}{17} < 0$$

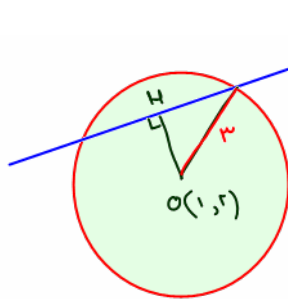
ریشه ندارد.

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -1$$

ریشه ۳

۲۷- دایره به مرکز $O(1,2)$ و شعاع ۳، خط $3x - 4y = m$ را در دو نقطه قطع می‌کند. m چند مقدار صحیح می‌تواند باشد؟ مستوی

باید فاصله مرکز دایره تا خط از $R=3$ کمتر باشد



$$3x - 4y - m = 0$$

$$OH = \frac{|3x - 4y - m|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{|15 - m|}{5} < R = 3$$

$$|15 + m| < 15$$

$$-15 < 15 + m < 15$$

$$-30 < m < 0$$

$$m \in \{-19, -18, -17, \dots, -1\}$$

$$29 = 1 - (-19) + 1 = \text{مقدار اعداد بین ۱ و ۱۹ عدد صحیح} = ۱ + ۱۹ - ۱ = ۲۹$$

گزینه ۲

دشوار ۲۸- حاصل ضرب ریشه‌های معادله $2x^{\log_7 4} + 4 = 9 \times 2^{\log_7 x}$ کدام است؟

$$\frac{1}{7} \quad (4)$$

$$49 \quad (3)$$

$$7 \quad (2)$$

$$\frac{1}{49} \quad (1)$$

$$2x^{\log_7 4} - 9 \times 2^{\log_7 x} + 4 = 0$$

$$2x^{2\log_7 2} - 9x^{\log_7 2} + 4 = 0$$

$$x^{2\log_7 2} = t$$

$$2t^2 - 9t + 4 = 0 \quad \text{روش ac} \quad t^2 - 9t + 4 = 0 \quad t_1 = 1 \quad t_2 = 4$$

$$\left. \begin{aligned} t_1 = \frac{1}{2} = 2^{-1} = x^{\log_7 2} &\Rightarrow x = 2^{-1} = \frac{1}{2} \\ t_2 = \frac{4}{2} = 2 = x^{\log_7 2} &\Rightarrow x = 2 = 2^1 \end{aligned} \right\} x_1 x_2 = 7$$

۲۹- حاصل عبارت $\sqrt[4]{7+4\sqrt{3}}$ کدام است؟

$$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} \quad (۴)$$

$$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{3}}{2} \quad (۳)$$

$$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} \quad (۲)$$

$$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} \quad (۱)$$

$$\sqrt[4]{7+4\sqrt{3}} = (\sqrt{3}+2)^2 = \sqrt{3+2} = 2 \quad \text{چون } 2^2 = 4 \text{ و } 3^2 = 9 \text{ پس } 2 \text{ و } 3 \text{ گزینه ۱}$$

$$\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{2+2+2\sqrt{4}}{4} = \frac{4+4\sqrt{1}}{4} = 2+\sqrt{1} = 3$$

$$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} = \sqrt{3+2}$$

۱. اختلاف از میانگین منفرد و ۳ داده اختلاف از میانگین ۲ یا ۳ دارد.

۳۰- در شانزده داده آماری ۴ تا برابر میانگین و اختلاف از میانگین بقیه داده‌ها یا ۲ است یا ۲- . انحراف معیار همه داده‌ها کدام است؟

$$\sqrt{6} \quad (4)$$

$$\sqrt{5} \quad (3)$$

$$\sqrt{3} \quad (2)$$

$$\sqrt{2} \quad (1)$$

$$s^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{12(\pm 2)^2 + 4(\text{مغرد})^2}{16} = \frac{12(4)}{16} = 3$$

$$s = \sqrt{3} \quad \text{گزینه ۲} \quad \text{انحراف معیار}$$

دشوار ۳۱- در دنباله $a_n = \log\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ جمع ۵ جمله چهارم کدام است؟

$$a_{20} \quad (4) = \log\left(1 - \frac{1}{20^2}\right) \\ = \log \frac{20^2 - 1}{20^2} \\ = \log \frac{(19)(21)}{20^2}$$

$$a_{10} \quad (3) \\ \log \frac{9 \times 11}{10^2}$$

$$a_8 \quad (2) \\ \log \left(\frac{7 \times 9}{8^2} = \frac{73}{72} \right)$$

$$a_6 \quad (1) \\ \log \frac{5 \times 7}{6^2}$$

$$a_{16} + a_{17} + a_{18} + a_{19} + a_{20} = \log\left(1 - \frac{1}{16^2}\right) + \log\left(1 - \frac{1}{17^2}\right) + \log\left(1 - \frac{1}{18^2}\right) + \log\left(1 - \frac{1}{19^2}\right) + \log\left(1 - \frac{1}{20^2}\right) \\ = \log \left(\frac{16^2 - 1}{16^2} \cdot \frac{17^2 - 1}{17^2} \cdot \frac{18^2 - 1}{18^2} \cdot \frac{19^2 - 1}{19^2} \cdot \frac{20^2 - 1}{20^2} \right) \\ = \log \left(\frac{15 \times 17}{16^2} \cdot \frac{16 \times 18}{17^2} \cdot \frac{17 \times 19}{18^2} \cdot \frac{18 \times 20}{19^2} \cdot \frac{19 \times 21}{20^2} \right) \\ = \log \left(\frac{15}{16} \cdot \frac{21}{20} \right) = \log \left(\frac{3}{16} \cdot \frac{21}{4} = \frac{73}{72} \right) \\ \text{که همدن } a_8 \text{ یا گزینه ۲ هست.}$$

$$16^2 - 1 = (16 - 1)(16 + 1) \\ 17^2 - 1 = (17 - 1)(17 + 1) \\ \vdots \\ 20^2 - 1 = (20 - 1)(20 + 1)$$

دشوار ۳۲- در یک دنباله هندسی داریم:

$$a_1 = \sin x \quad a_2 = \cos x \quad a_3 = \tan x$$

۸ (۴)

۷ (۳)

۶ (۲)

۵ (۱)

جمله چندم $1 + \cos x$ است؟

راه حل کوتاه

$$\left. \begin{aligned} 1 + \tan^2 x &= \frac{1}{\cos^2 x} \\ &= \frac{1}{\tan^2 x} \\ &= \cot^2 x \\ &= a_8 \end{aligned} \right\} *$$

$$a_1 = \sin x \quad a_2 = \cos x \quad a_3 = \tan x$$

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x$$

$$q = \frac{a_3}{a_2} = \frac{\tan x}{\cos x} = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$$

$$\frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sin x}{\cos^2 x} \rightarrow \cos x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \tan^2 x \rightarrow \boxed{\cos x = \tan^2 x} *$$

$$\begin{aligned} a_1 = \sin x &\xrightarrow{q = \cot x} a_2 = \cos x \xrightarrow{q = \cot x} a_3 = \tan x \xrightarrow{q = \cot x} a_4 = 1 \xrightarrow{q = \cot x} a_5 = \cot x \xrightarrow{q = \cot x} a_6 = \cot^2 x \xrightarrow{q = \cot x} a_7 = \cot^3 x \xrightarrow{q = \cot x} a_8 = \cot^4 x \end{aligned}$$

$$a_8 = a_7 (q = \cot x) = \cot^3 x = (\cot^2 x) = \left(\frac{1}{\tan^2 x} \right) = \left(\frac{1}{\cos^2 x} \right) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x = 1 + \cos x$$

پس به سادگی $1 + \cos x$ است و ما یافتیم:

$$\cos x = \tan^2 x \quad \left\{ \begin{aligned} 1 + \cos x &= 1 + \tan^2 x \end{aligned} \right.$$

راه دیگر

$$1 + \cos x \stackrel{\cos x = \tan^2 x}{=} 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{(\tan^2 x)^2} = \frac{1}{\tan^4 x} = \cot^4 x = \cot^4 x = a_8$$

فصلنامه

۳۳- می‌خواهیم با رسم خط $x = k$ مستطیل زیر را به دو مستطیل کوچک‌تر متشابه با هم تقسیم کنیم. مجموع مربعات مقادیر ممکن k

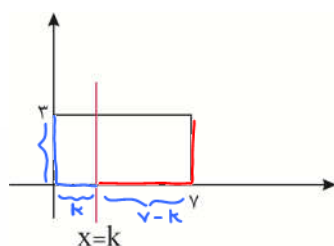
کدام است؟

۱۱ (۱)

۲۱ (۲)

۳۱ (۳) ✓

۴۱ (۴)



در ۲ مستطیل متساوی

طول‌ها با هم و

عرض‌ها با هم متساویند و یا

نسبت طول به عرض یک مستطیل برابر

نسبت طول به عرض مستطیل دیگر است:

$$\frac{3}{k} = \frac{3}{7-k} \quad \rightsquigarrow \quad 7k - k^2 = 9$$

$$0 = k^2 - 7k + 9 \quad \rightsquigarrow \quad \begin{cases} k_1 \\ k_2 \end{cases}$$

$$S = -\frac{b}{a} = 7 \quad P = \frac{c}{a} = 9$$

مجموع مربعات مقادیر ممکن k_1, k_2 $= k_1^2 + k_2^2 = S^2 - 2P = 7^2 - 2(9) = 31$

جمع‌بندی کنکور

۱- اگر نقطه‌ای به طول ۱ روی منحنی $y = x^3 + 1$ باشد، تبدیل یافته آن روی منحنی $y = x^3 - 6x^2 + 12x - 5$ چه نقطه‌ای است؟

(۳, ۳) (۴

(۱, ۲) (۳

(۳, ۴) (۲

(۲, ۳) (۱

۲- تابع f اکیداً نزولی و دامنه آن مجموعه‌ای از مقادیر مثبت است. مجموعه جواب نامعادله $f(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) > f(x^2 - 2x + 1)$ کدام است؟

(۴) $(-\infty, 1)$

(۳) $(0, 1)$

(۲) $(-\infty, 2)$

(۱) $(1, 2)$

۳- اگر $f(x) = |x - 2| + 1$ و $g(x) = 2x - 2|x| + 1$ باشد، بُرد تابع $(f \circ g)(x)$ کدام است؟

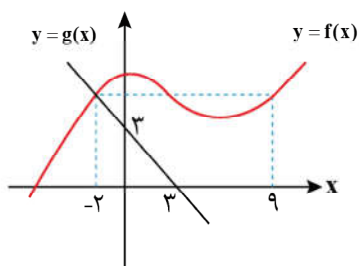
(۴) $[1, 2]$

(۳) $[1, 3)$

(۲) $[1, 2)$

(۱) $\{2\}$

۴- نمودار دو تابع $y = g(x)$ و $y = f(x)$ به صورت مقابل است. اگر $(g^{-1} \circ f)(9) = m$ باشد، مقدار $g(1+m)$ کدام است؟



۱ (۱)

۲ (۲)

۳ (۳)

۴ (۴)

۵- اگر $\frac{\cos 2x}{\sin x + \cos x} = \frac{1}{\sqrt{5}}$ باشد، مقدار $\sin 2x$ کدام است؟

$$\frac{3}{5} \quad (4)$$

$$\frac{4}{5} \quad (3)$$

$$\frac{9}{25} \quad (2)$$

$$\frac{24}{25} \quad (1)$$

۶- حاصل عبارت $\sqrt{3} \sin \frac{\pi}{12} - \sqrt{3} \cos \frac{\pi}{12}$ کدام است؟

(۴) $\frac{\sqrt{6}}{2}$

(۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

(۲) $-\frac{\sqrt{6}}{2}$

(۱) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

۷- کوچک‌ترین جواب مثبت معادله $\sin(2x - \frac{\pi}{6}) = \cos x$ کدام است؟

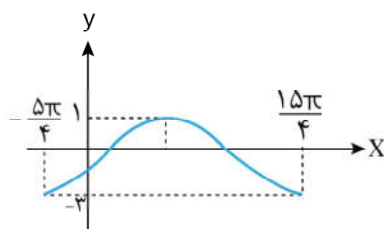
$\frac{\pi}{9}$ (۴)

$\frac{\pi}{6}$ (۳)

$\frac{2\pi}{9}$ (۲)

$\frac{\pi}{3}$ (۱)

۸- قسمتی از نمودار تابع $f(x) = a - 4 \sin\left(\frac{bx + 2\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{bx + 2\pi}{2}\right)$ به صورت مقابل است. مقدار $a + b$ کدام است؟

(۱) $1/4$ (۲) $-1/4$ (۳) $0/7$ (۴) $-0/7$

۹- اگر باقی مانده تقسیم چندجمله‌ای $p(x)$ بر $x^2 - 4$ و $x^3 + 8$ به ترتیب برابر $3x - 2$ و 2 باشد، مقدار r کدام است؟

(۴) -۷

(۳) -۵

(۲) -۲

(۱) ۱

۱۰- اگر حاصل $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sqrt{x^m - 1}}{x}$ یک عدد غیر صفر و متناهی باشد، m کدام می‌تواند باشد؟

(۴) -۱

(۳) $\frac{5}{2}$

(۲) $\frac{3}{2}$

(۱) ۲

۱۱- اگر $f(x) = \frac{(x+1)(2x-3)-x|x|}{x^2-2|x-1|}$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(\frac{1}{x})$ کدام است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

۱۲- اگر $\lim_{x \rightarrow \frac{2\pi}{3}} \frac{a+bx}{1+a \cos x} = -\infty$ باشد، کوچک‌ترین مقدار صحیح b کدام است؟

(۴) ۲

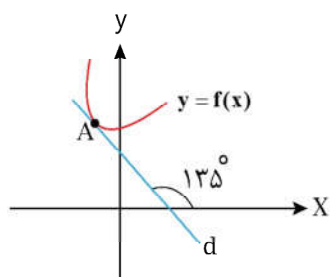
(۳) ۱

(۲) صفر

(۱) -۱

۱۳- در شکل مقابل، خط d در نقطه $A(-1, 4)$ بر نمودار تابع $y = f(x)$ مماس است. مشتق تابع $y = x^2 f(x)$ در $x = -1$ کدام

است؟



(۱) -۷

(۲) -۹

(۳) ۷

(۵) -۸

۱۴- خط مماس بر نمودار تابع $f(x) = x^2 - mx + 3$ از نقطه‌ای به طول $x = 1$ واقع بر آن، از نقطه $A(3, 14)$ می‌گذرد. مقدار m کدام است؟

۴ (۴)

۱/۵ (۳)

-۲ (۲)

-۱/۵ (۱)

۱۵- اگر $f(x) = \frac{3}{2} - \sqrt{x+2}$ و $g(x) = -\frac{x}{4}$ ، آن گاه مشتق تابع $f(xg(x))$ در نقطه $x=2$ کدام است؟

(۴) ۱

(۳) $\frac{1}{2}$

(۲) $-\frac{1}{2}$

(۱) -۱

۱۶- مقدار مینیمم نسبی تابع $f(x) = x^4 - 6x^2 + 8x$ کدام است؟

۲۴ (۴)

-۲۴ (۳)

۱۶ (۲)

-۱۶ (۱)

۱۷- هزینه سوخت یک قطار در هر ساعت برای حرکت با سرعت ۷ کیلومتر بر ساعت برابر 3207^2 تومان است. همچنین سایر هزینه‌ها برای هر ساعت، صرف‌نظر از سرعت قطار، برابر ۸۰۰۰۰۰ تومان است. قطار با چه سرعتی حرکت کند تا هزینه آن، در یک کیلومتر، کم‌ترین مقدار ممکن باشد؟

۵۵ (۴)

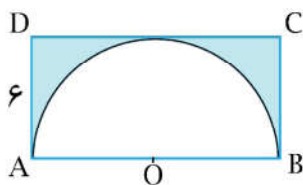
۵۰ (۳)

۴۵ (۲)

۴۰ (۱)

۱۸- مطابق شکل، از درون یک مستطیل، یک نیم‌دایره را کنار می‌گذاریم. سپس سطح باقی‌مانده را حول ضلع AB دوران می‌دهیم. حجم

جسم حاصل از دوران چه قدر است؟ (نقطه O مرکز نیم‌دایره است.)



(۱) 36π

(۲) 72π

(۳) 144π

(۴) 288π

۱۹- اگر دو دایره $(x+1)^2 + (y-2r)^2 = r^2$ و $(x+2)^2 + (y-2)^2 = r^2$ مماس خارج باشند، مقدار r کدام است؟

$$\frac{2}{3} \quad (4)$$

$$\frac{5}{8} \quad (3)$$

$$\frac{3}{8} \quad (2)$$

$$1 \quad (1)$$

۲۰- دو ظرف یکسان در اختیار داریم. در ظرف اول، ۲ مهره سیاه و ۱ مهره سفید و در ظرف دوم ۳ مهره سفید وجود دارد. یک مهره به تصادف از ظرف اول خارج کرده و در ظرف دوم می‌اندازیم. سپس ۲ مهره از ظرف دوم خارج می‌کنیم. با چه احتمالی هر دو مهره سفید است؟

$$\frac{1}{6} \quad (۴)$$

$$\frac{1}{2} \quad (۳)$$

$$\frac{2}{3} \quad (۲)$$

$$\frac{5}{6} \quad (۱)$$



۲۰ فروردین ماه ۱۴۰۴

دفترچه شماره ۳

دفترچه پاسخ آزمون الکترونیکی زیستاز

ماراتون شماره ۲۰

ویژه دانش آموزان پایه دوازدهم

نام درس	ریاضی	زمین
گزینشگر	سجاد عظمتی	-
ناظر علمی	عزیزالله علی اصغری	-
مسئول آزمون	گروه ریاضی فیثاغورس	-
پاسخنامه‌نویس	امیرمحمد فتاحی	-
طراحان	سجاد عظمتی - سامان سلامیان - نریمان فتح الهی - بهروز دُرزاده - عزیزالله علی اصغری - میثم صمدی - علی احمدی قزلاشت - امیرحسام شکری	-
ویراستاران	مصطفی غلامی - آرش پورباقری	-

تولید فنی و گرافیک توسط نشر ویانو

چاپ، تکثیر، انتشار و یا استفاده از محتوای آزمون به هر نحوی و بدون اجازه «گروه آموزشی زیستاز» غیرقانونی، غیراخلاقی و خلاف شرع بوده و با متخلفان برابر مقررات رفتار خواهد شد.

• ویژه کنکور ۱۴۰۶ •

۲۰ فروردین ۱۴۰۴
پایه دوازدهم



پاسخنامه ریاضی
آزمون مرحله

۱۱۱. اگر نقطه‌ای به طول ۱ روی منحنی $y = x^3 + 1$ باشد، تبدیل یافته آن روی منحنی $y = x^3 - 6x^2 + 12x - 5$ چه نقطه‌ای است؟

- (۱) (۲, ۳) (۲) (۳, ۴) (۳) (۱, ۲) (۴) (۳, ۳)

پاسخ: گزینه ۲

عرض نقطه‌ای به طول $x = 1$ روی نمودار $y = x^3 + 1$ برابر $y = 2$ است. پس نقطه $(1, 2)$ روی $y = x^3 + 1$ است. ابتدا تابع f را با استفاده از اتحاد مکعب دوجمله‌ای به صورت زیر می‌نویسیم:

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 5 = (x - 2)^3 + 3$$

نقطه متناظر $(1, 2)$ در تابع $y = x^3$ ، نقطه $(1, 1)$ است.

حال برای یافتن نقطه متناظر آن بر روی تابع $f(x)$ ، طول نقطه را دو واحد بیشتر و عرض نقطه را نیز سه واحد بیشتر می‌کنیم تا به نقطه $(3, 4)$ برسیم.

۱۱۲. تابع f اکیداً نزولی و دامنه آن مجموعه‌ای از مقادیر مثبت است. مجموعه جواب نامعادله $f(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) > f(x^2 - 2x + 1)$ کدام است؟

- (۱) (۱, ۲) (۲) $(-\infty, 2)$ (۳) $(0, 1)$ (۴) $(-\infty, 1)$

پاسخ: گزینه ۱

چون تابع f اکیداً نزولی است، پس برای حل نامعادله، داریم:

$$\begin{aligned} f(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) > f(x^2 - 2x + 1) &\Rightarrow x^3 - 3x^2 + 3x - 1 < x^2 - 2x + 1 \\ \Rightarrow (x - 1)^3 < (x - 1)^2 &\Rightarrow (x - 1)^3 - (x - 1)^2 < 0 \Rightarrow (x - 1)^2(x - 2) < 0 \Rightarrow x - 2 < 0 \Rightarrow x < 2 \end{aligned}$$

در ضمن چون دامنه تابع f مجموعه‌ای از مقادیر مثبت است، پس:

$$1) (x - 1)^3 > 0 \Rightarrow x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1$$

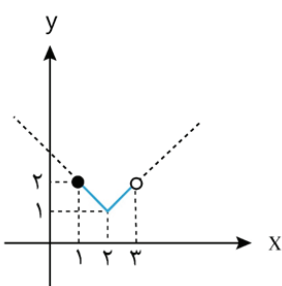
$$2) (x - 1)^2 > 0 \Rightarrow x \in \mathbb{R} - \{1\}$$

از اشتراک مقادیر به دست آمده، نتیجه می‌گیریم $1 < x < 2$ است.

۱۱۳. اگر $f(x) = |x - 2| + 1$ و $g(x) = 2x - 2[x] + 1$ باشد، بُرد تابع $(f \circ g)(x)$ کدام است؟

- (۱) $\{2\}$ (۲) $[1, 2]$ (۳) $[1, 3]$ (۴) $[1, 2]$

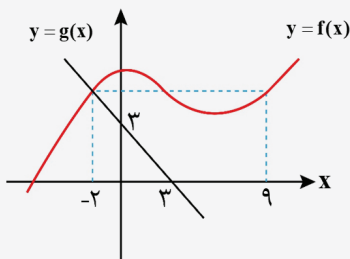
پاسخ: گزینه ۴



می‌دانیم $0 \leq x - [x] < 1$ است، پس $0 \leq 2x - 2[x] < 2$ است. بنابراین بُرد تابع g به صورت بازه $[1, 3]$ است. حالا برای تعیین بُرد تابع $(f \circ g)(x)$ ، نمودار تابع $f(x) = |x - 2| + 1$ را در دامنه $[1, 3]$ رسم می‌کنیم و بُرد آن را پیدا می‌کنیم:

$$\text{بردار تابع } f \circ g \rightarrow R_{f \circ g} = [1, 2]$$

۱۱۴. نمودار دو تابع $y = f(x)$ و $y = g(x)$ به صورت مقابل است. اگر $(g^{-1} \circ f)(9) = m$ باشد، مقدار $g(1+m)$ کدام است؟



(۱) ۱

(۲) ۲

(۳) ۳

(۴) ۴

پاسخ: گزینه ۴

باتوجه به شکل صورت سؤال، $g(x) = -x + 3$ است. حالا سراغ رابطه $g^{-1}(f(9)) = m$ می‌رویم. باتوجه به نمودار، $f(9) = g(-2) = 5$ است، پس:

$$g^{-1}(f(9)) = m \Rightarrow g^{-1}(5) = m \Rightarrow g(m) = 5 \xrightarrow{g(-2)=5} m = -2$$

بنابراین $g(1+m)$ برابر است با:

$$g(-1) = 4$$

۱۱۵. اگر $\frac{\cos 2x}{\sin x + \cos x} = \frac{1}{\sqrt{5}}$ باشد، مقدار $\sin 2x$ کدام است؟

(۴) $\frac{3}{5}$ (۳) $\frac{4}{5}$ (۲) $\frac{9}{25}$ (۱) $\frac{24}{25}$

پاسخ: گزینه ۳

$$\frac{\cos 2x}{\sin x + \cos x} = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x + \cos x} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow \frac{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)}{\sin x + \cos x} = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow \cos x - \sin x = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

حالا طرفین تساوی $\cos x - \sin x = \frac{1}{\sqrt{5}}$ را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$(\cos x - \sin x)^2 = \frac{1}{5} \Rightarrow \sin^2 x + \cos^2 x - 2 \sin x \cos x = \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow 1 - \sin 2x = \frac{1}{5} \Rightarrow \sin 2x = \frac{4}{5}$$

۱۱۶. حاصل عبارت $\sqrt{3} \sin \frac{\pi}{12} - \sqrt{3} \cos \frac{\pi}{12}$ کدام است؟

(۴) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ (۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۲) $-\frac{\sqrt{6}}{2}$ (۱) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

پاسخ: گزینه ۲

فرض می‌کنیم $A = \sin \frac{\pi}{12} - \cos \frac{\pi}{12}$ است. توجه کنید $\sin \frac{\pi}{12} < \cos \frac{\pi}{12}$ است. پس $A < 0$ می‌باشد و داریم:

$$A^2 = \left(\sin \frac{\pi}{12} - \cos \frac{\pi}{12} \right)^2 = \sin^2 \frac{\pi}{12} + \cos^2 \frac{\pi}{12} - 2 \sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12}$$

$$\Rightarrow A^2 = 1 - \sin \frac{\pi}{6} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \xrightarrow{A < 0} A = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

پس حاصل عبارت موردنظر برابر است با:

$$\sqrt{3} \left(\sin \frac{\pi}{12} - \cos \frac{\pi}{12} \right) = \sqrt{3} \times \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \right) = -\frac{\sqrt{6}}{2}$$

۱۱۷. کوچک ترین جواب مثبت معادله $\sin(2x - \frac{\pi}{6}) = \cos x$ کدام است؟

(۴) $\frac{\pi}{9}$

(۳) $\frac{\pi}{6}$

(۲) $\frac{2\pi}{9}$

(۱) $\frac{\pi}{3}$

پاسخ: گزینه ۲

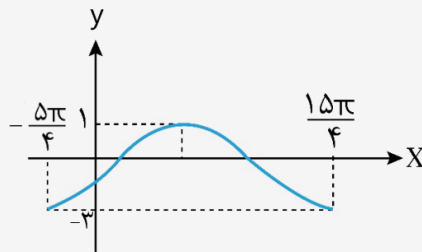
به جای $\cos x$ می نویسیم $\sin(\frac{\pi}{2} - x)$ و داریم:

$$\sin(2x - \frac{\pi}{6}) = \sin(\frac{\pi}{2} - x) \Rightarrow \begin{cases} 2x - \frac{\pi}{6} = 2k\pi + \frac{\pi}{2} - x \\ 2x - \frac{\pi}{6} = 2k\pi + \pi - (\frac{\pi}{2} - x) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi + \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{2\pi}{9} \\ x = 2k\pi + \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

کوچک ترین جواب مثبت معادله برابر $\frac{2\pi}{9}$ است.

۱۱۸. قسمتی از نمودار تابع $f(x) = a - 4\sin(\frac{bx + 2\pi}{2})\cos(\frac{bx + 2\pi}{2})$ به صورت زیر است. مقدار $a + b$ کدام است؟



(۴) $-5/7$

(۳) $5/7$

(۲) $-1/4$

(۱) $1/4$

پاسخ: گزینه ۲

با کمک رابطه $\sin 2x = 2\sin x \cos x$ ضابطه تابع f را ساده می کنیم:

$$f(x) = a - 4\sin(\frac{bx + 2\pi}{2})\cos(\frac{bx + 2\pi}{2}) = a - 2\sin(2\pi + bx)$$

$$\Rightarrow f(x) = a - 2\sin bx$$

از طرفی چون بیشترین مقدار تابع برابر ۱ و کمترین مقدار آن برابر -۳ است، پس:

$$a = \frac{\max + \min}{2} = \frac{1 + (-3)}{2} = -1$$

در ضمن دوره تناوب تابع برابر 5π است، پس:

$$T = \frac{2\pi}{|b|} = 5\pi \Rightarrow |b| = \frac{2}{5} \xrightarrow{b < 0} b = -\frac{2}{5}$$

پس $a + b = -\frac{7}{5}$ است.

۱۱۹. اگر باقی مانده تقسیم چند جمله ای $p(x)$ بر $x^2 - 4$ و $x^3 + 8$ به ترتیب برابر $2x - 3$ و r باشد، مقدار r کدام است؟

(۴) -7

(۳) -5

(۲) -2

(۱) 1

پاسخ: گزینه ۴

باتوجه به اتحاد تقسیم داریم:

$$p(x) = (x^2 - 4)Q(x) + 2x - 3 \xrightarrow{x=-2} p(-2) = -7$$

حالا باقی مانده تقسیم چند جمله ای $p(x)$ بر $x^3 + 8$ را پیدا می کنیم:

$$p(x) = (x^2 + 8)q(x) + r \xrightarrow{x=-2} p(-2) = r = -7$$

۱۲۰. اگر حاصل $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sqrt{x^m - 1}}{x}$ یک عدد غیر صفر و متناهی باشد، m کدام می تواند باشد؟

$$-1 \quad (4)$$

$$\frac{5}{2} \quad (3)$$

$$\frac{3}{2} \quad (2)$$

$$2 \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۲

می توان گزینه ها را کنترل کرد:

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sqrt{x^2 - 1}}{x} = \frac{x - |x|}{x} = 0$$

$$2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sqrt{x^{\frac{3}{2}} - 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - x^{\frac{3}{4}}}{x} = 1$$

$$3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sqrt{x^{\frac{5}{2}} - 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - x^{\frac{5}{4}}}{x} = \frac{-x^{\frac{5}{4}}}{x} = -\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{4}} = -\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[4]{x} = -\infty$$

$$4) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sqrt{\frac{1}{x} - 1}}{x} \quad (\text{غ ق ق})$$

$$\frac{1}{x} - 1 \geq 0 \Rightarrow \frac{1-x}{x} \geq 0 \Rightarrow 0 < x \leq 1$$

۱۲۱. اگر $f(x) = \frac{(x+1)(2x-3) - x|x|}{x^2 - 2|x-1|}$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(\frac{1}{x})$ کدام است؟

$$4 \quad (4)$$

$$3 \quad (3)$$

$$2 \quad (2)$$

$$1 \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۳

می دانیم وقتی $x \rightarrow 0^-$ ، آن گاه $\frac{1}{x} \rightarrow -\infty$ پس $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(\frac{1}{x}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ است. حالا حاصل $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ را پیدا می کنیم. با انتخاب پرتوان ها داریم:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x+1)(2x-3) - x|x|}{x^2 - 2|x-1|}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x)(2x) - x(-x)}{x^2 - 2(-x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2}{x^2} = 3$$

۱۲۲. اگر $\lim_{x \rightarrow \frac{2\pi}{3}^+} \frac{a + bx}{1 + a \cos x} = -\infty$ باشد، کوچکترین مقدار صحیح b کدام است؟

$$2 \quad (4)$$

$$1 \quad (3)$$

$$\text{صفر} \quad (2)$$

$$-1 \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۲

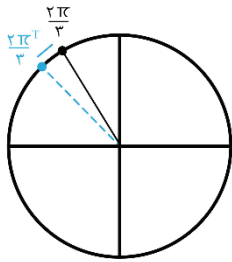
به بررسی گزینه ها می پردازیم:

چون حاصل حد $-\infty$ است، پس با قرار دادن $x = \frac{2\pi}{3}$ در تابع f ، مخرج کسر صفر می شود، بنابراین:

$$1 + a \cos \frac{2\pi}{3} = 0 \Rightarrow 1 - \frac{1}{2}a = 0 \Rightarrow a = 2$$

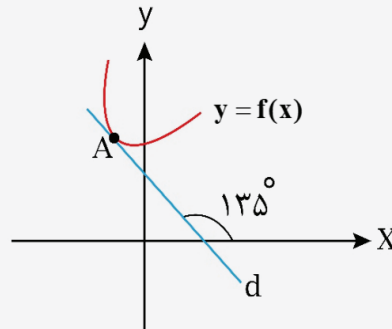
در ضمن وقتی $x \rightarrow \frac{2\pi}{3}^+$ آن گاه عبارت مخرج کسر یعنی $1 + 2 \cos x$ به 0^- میل می کند. پس برای اینکه حاصل حد $-\infty$ باشد، باید

صورت کسر عددی مثبت باشد:



$$2 + b\left(\frac{2\pi}{3}\right) > 0 \Rightarrow 2 + b(2/3) > 0 \xrightarrow{b \in \mathbb{Z}} \text{Min}(b) = 0$$

۱۳۳. در شکل مقابل، خط d در نقطه $A(-1, 4)$ بر نمودار تابع $y = f(x)$ مماس است. مشتق تابع $y = x^2 f(x)$ در $x = -1$ کدام است؟



-۸ (۴)

۷ (۳)

-۹ (۲)

-۷ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

شیب خط d برابر $\tan 135^\circ = -1$ است. در ضمن این خط در نقطه $A(-1, 4)$ بر نمودار تابع $y = f(x)$ مماس است، پس $f'(-1) = -1$ است. حالا از تابع $y = x^2 f(x)$ مشتق می‌گیریم:

$$y' = 2xf(x) + x^2 f'(x) \xrightarrow{x=-1} y' = -2f(-1) + f'(-1) \Rightarrow y' = -2(4) + (-1) = -9$$

۱۳۴. خط مماس بر نمودار تابع $f(x) = x^2 - mx + 3$ از نقطه‌ای به طول $x = 1$ واقع بر آن، از نقطه $A(3, 14)$ می‌گذرد. مقدار m کدام است؟

۴ (۴)

۱/۵ (۳)

-۲ (۲)

-۱/۵ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

ابتدا مختصات نقطه تماس را پیدا می‌کنیم:

$$f(x) = x^2 - mx + 3 \Rightarrow f(1) = 4 - m$$

حالا از تابع f مشتق می‌گیریم و شیب خط مماس بر نمودار را در نقطه $x = 1$ پیدا می‌کنیم:

$$f'(x) = 2x - m \xrightarrow{x=1} f'(1) = 2 - m$$

حالا معادله خط مماس را می‌نویسیم:

$$y - (4 - m) = (2 - m)(x - 1)$$

چون این خط از نقطه $A(3, 14)$ می‌گذرد، پس در این خط صدق می‌کند:

$$14 - (4 - m) = (2 - m)(2) \Rightarrow 10 + m = 4 - 2m$$

$$\Rightarrow 3m = -6 \Rightarrow m = -2$$

۱۲۵. اگر $f(x) = \frac{3}{2} - \sqrt{x+2}$ و $g(x) = -\frac{x}{4}$ ، آن گاه مشتق تابع $f(xg(x))$ در نقطه $x=2$ کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) ۱

پاسخ: گزینه ۳

ابتدا مشتق تابع $y = f(xg(x))$ را پیدا می کنیم:

$$y' = (x \cdot g(x))' \cdot f'(x \cdot g(x))$$

$$\xrightarrow{x=2} y' = (1 \times g(2) + xg'(2)) \cdot f'(x \cdot g(2)) = (g(2) + 2g'(2)) \cdot f'(2g(2))$$

با توجه به این که $f(x) = \frac{3}{2} - \sqrt{x+2}$ و $f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x+2}}$ است، پس داریم:

$$y' = \left(-\frac{1}{2} + 2 \times -\frac{1}{4}\right) \cdot f'(2 \times -\frac{1}{4})$$

$$= -1 \times f'(-1) = -1 \times -\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

۱۲۶. مقدار مینیمم نسبی تابع $f(x) = x^4 - 6x^2 + 8x$ کدام است؟

- (۱) -۱۶ (۲) ۱۶ (۳) -۲۴ (۴) ۲۴

پاسخ: گزینه ۳

می دانیم ریشه های $f'(x) = 0$ طول نقاط بحرانی تابع هستند. پس، از تابع مشتق می گیریم و برابر صفر قرار می دهیم.

چون مجموع ضرایب این معادله برابر صفر است، پس $x=1$ یکی از ریشه های f' است و با استفاده از تجزیه داریم:

$$\Rightarrow f'(x) = 4x^3 - 12x + 8 = (x-1)(4x^2 + 4x - 8) = 0$$

$$\Rightarrow f'(x) = 4(x-1)^2(x+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-2 \end{cases}$$

حال با کمک جدول تعیین علامت f' ، نحوه تغییرات تابع f مشخص می کنیم تا نوع اکسترمم های نسبی مشخص شود. در نتیجه تابع

f یک مینیمم نسبی با طول $x=-2$ دارد:

x	-۲	۱
f'	-	+

$f(-2) = 16 - 24 - 16 = -24$

۱۲۷. هزینه سوخت یک قطار در هر ساعت برای حرکت با سرعت v کیلومتر بر ساعت برابر $320v^2$ تومان است. همچنین سایر

هزینه ها برای هر ساعت، صرف نظر از سرعت قطار، برابر ۸۰۰۰۰۰ تومان است. قطار با چه سرعتی حرکت کند تا هزینه آن، در

یک کیلومتر، کمترین مقدار ممکن باشد؟

- (۱) ۴۰ (۲) ۴۵ (۳) ۵۰ (۴) ۵۵

پاسخ: گزینه ۳

اگر قطار با سرعت ثابت v کیلومتر بر ساعت حرکت کند، هزینه t ساعت حرکت آن از رابطه $C = 800000t + 320v^2t$ به دست می آید.

از طرفی می دانیم $t = \frac{x}{v}$ است، پس هزینه x کیلومتر حرکت قطار برابر است با:

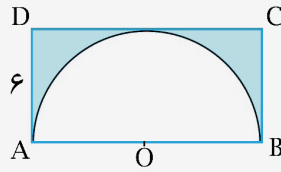
$$C = 800000 \left(\frac{x}{v}\right) + (320v^2) \left(\frac{x}{v}\right)$$

با جایگذاری $x=1$ هزینه ۱ کیلومتر حرکت به دست می آید. پس برای به دست آوردن کمترین مقدار تابع، مشتق آن را برابر صفر می گذاریم:

$$C(v) = \frac{800000}{v} + 320v \xrightarrow{C'(v)} C'(v) = \frac{-800000}{v^2} + 320 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{800000}{v^2} = 320 \Rightarrow v^2 = \frac{800000}{320} = 2500 \Rightarrow v = 50$$

۱۲۸. مطابق شکل، از درون یک مستطیل، یک نیم‌دایره را کنار می‌گذاریم. سپس سطح باقی‌مانده را حول ضلع AB دوران می‌دهیم. حجم جسم حاصل از دوران چقدر است؟ (نقطه O مرکز نیم‌دایره است.)



$$288\pi \quad (4)$$

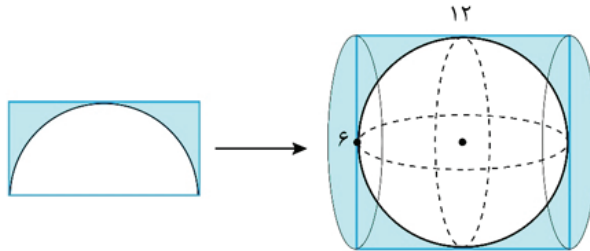
$$144\pi \quad (3)$$

$$72\pi \quad (2)$$

$$36\pi \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۳

چون O مرکز نیم‌دایره است، پس $AB = 2R = 12$ است. یعنی $R = 6$ است. حالا در اثر دوران، یک استوانه به شعاع قاعده ۶ و ارتفاع ۱۲ داریم که یک کره به شعاع $R = 6$ از دوران آن خارج شده است. پس:



$$\Rightarrow V = V_{\text{کره}} - V_{\text{استوانه}} = \pi(6)^2 \times 12 - \frac{4}{3}\pi \times 6^3 = (2\pi - \frac{4}{3}\pi) \times 6^3 = \frac{2}{3}\pi \times 216 = 144\pi$$

۱۲۹. اگر دو دایره $(x+1)^2 + (y-2r)^2 = r^2$ و $(x+2)^2 + (y-2)^2 = r^2$ مماس خارج باشند، مقدار r کدام است؟

$$\frac{2}{3} \quad (4)$$

$$\frac{5}{8} \quad (3)$$

$$\frac{3}{8} \quad (2)$$

$$1 \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۳

مرکز و شعاع هر دایره را پیدا می‌کنیم:

$$(x+1)^2 + (y-2r)^2 = r^2 \Rightarrow \begin{cases} \text{مرکز: } O_1(-1, 2r) \\ \text{شعاع: } r \end{cases}$$

$$(x+2)^2 + (y-2)^2 = r^2 \Rightarrow \begin{cases} \text{مرکز: } O_2(-2, 2) \\ \text{شعاع: } r \end{cases}$$

چون این دو دایره مماس خارج هستند، پس فاصله دو مرکز آن‌ها برابر مجموع شعاع‌ها است:

$$O_1O_2 = \sqrt{(-2+1)^2 + (2r-2)^2} = r+r \xrightarrow{\text{توان ۲}} 1 + (2r-2)^2 = 4r^2 \Rightarrow 1 + 4r^2 - 8r + 4 = 4r^2 \Rightarrow 8r = 5 \Rightarrow r = \frac{5}{8}$$

۱۳۰. دو ظرف یکسان در اختیار داریم. در ظرف اول، ۲ مهره سیاه و ۱ مهره سفید و در ظرف دوم ۳ مهره سفید وجود دارد. یک مهره به تصادف از ظرف اول خارج کرده و در ظرف دوم می‌اندازیم. سپس ۲ مهره از ظرف دوم خارج می‌کنیم. با چه احتمالی هر دو مهره سفید است؟

$$\frac{1}{6} \quad (4)$$

$$\frac{1}{2} \quad (3)$$

$$\frac{2}{3} \quad (2)$$

$$\frac{5}{6} \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۲

مهره خارج شده از ظرف اول، با احتمال $\frac{1}{3}$ سفید و با احتمال $\frac{2}{3}$ سیاه است. پس:

$$\begin{array}{l}
 \begin{array}{l}
 \text{سفید از ظرف اول} \\
 \text{سیاه از ظرف اول}
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \frac{1}{3} \\
 \frac{2}{3}
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \text{هر ۲ سفید از ظرف دوم} \\
 \text{هر ۲ سفید از ظرف دوم}
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 1 \\
 \frac{\binom{3}{2}}{\binom{4}{2}} = \frac{1}{2}
 \end{array}
 \end{array}$$

$$\Rightarrow P = \left(\frac{1}{3} \times 1\right) + \left(\frac{2}{3} \times \frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3}$$