

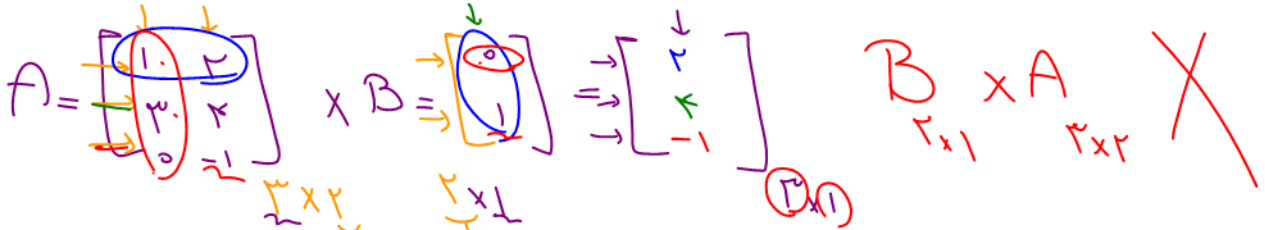
فصل ۱ = ۴ نمره      فصل ۲ = ۸ نمره      فصل ۳ = ۸ نمره

نمره	استفاده از ماشین حساب ساده (دارای چهار عمل اصلی) مجاز است.	دیف
۱	<p>جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید.</p> <p>الف) حاصل ضرب ماتریس ها خاصیت جابجایی ندارد!! دی ۱۳۹۹ <math>AB \neq BA</math></p> <p>ب) هر آرایش مستطیلی از اعداد حقیقی، شامل تعداد سطر و ستون ... نامیده می شود. دی ۱۴۰۰</p> <p>پ) مکان هندسی نقاطی از صفحه که از یک خط ثابت در آن صفحه و از یک نقطه ثابت غیر واقع بر آن خط در آن صفحه به یک فاصله باشند را ... می نامیم. شهریور ۱۳۹۸ <math>\frac{a}{c} = 2</math></p> <p>ت) اگر طول قطر بزرگ بیضی دو برابر فاصله کانونی آن باشد، خروج از مرکز بیضی برابر ... است. شهریور ۱۳۹۹ <math>e = \frac{c}{a}</math></p>	۱
۱	<p>درستی و نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.</p> <p>الف) اگر <math>A</math> و <math>B</math> دو ماتریس <math>3 \times 3</math> دلخواه باشند آنگاه عبارت <math>(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2</math> همواره برقرار است. <math>AB = BA</math> <i>تجربه پذیر</i> شرط لازم = سریس شهریور ۱۴۰۰</p> <p>ب) در حالتی که صفحه <math>P</math> بر محور سطح مخروطی <math>(I)</math> عمود نباشد و با مولد آن <math>(d)</math> نیز موازی نباشد و تنها یکی از دو نیمه مخروط را قطع کند، فصل مشترک حاصل یک بیضی خواهد بود. <i>خرداد ۱۳۹۸</i></p> <p>پ) در حالتی که خروج از مرکز بیضی برابر صفر باشد بیضی تبدیل به یک پاره خط می شود. دی ۱۴۰۰ <math>e = \frac{c}{a}</math></p> <p>نقطه <math>A(2, -3, 0)</math> روی صفحه <math>XOY</math> قرار دارد. <i>خرداد ۱۳۹۸</i> <math>\frac{c}{a} = 0 \rightarrow c = 0</math></p>	۲
۱	<p>اگر <math>A = \begin{bmatrix} 4 &amp; 2 \\ b &amp; -1 \end{bmatrix}</math> و <math>B = \begin{bmatrix} 2 &amp; -1 \\ 2 &amp; a \end{bmatrix}</math> مقادیر <math>a</math> و <math>b</math> را طوری به دست آورید که حاصل ضرب <math>A \times B</math> ماتریس قطری باشد. <i>خارج کشور ۹۹</i></p> <p><math>\begin{bmatrix} 12 &amp; 0 \\ 0 &amp; 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 &amp; 2 \\ b &amp; -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 &amp; -1 \\ 2 &amp; a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 &amp; -4+2a \\ 2b-2 &amp; -b-a \end{bmatrix}</math></p> <p><math>-4+2a = 0 \rightarrow 2a = 4 \rightarrow a = 2</math></p> <p><math>2b-2 = 0 \rightarrow \frac{2b}{2} = \frac{2}{2} \rightarrow b = 1</math></p>	۳
۱	<p>در ماتریس <math>A = [a_{ij}]_{3 \times 3}</math> و <math>a_{ij} = \begin{cases} i-2j &amp; i &lt; j \\ -i+j &amp; i \geq j \end{cases}</math> می باشد، مجموع درایه های ستون دوم ماتریس را بدست آورید.</p> <p>امتحان تیر ۹۸ (ویژه مناطق سیل زده)</p> <p><math>a_{11} = -1+1 = 0</math></p> <p><math>a_{12} = 1-2(2) = 1-4 = -3</math></p> <p><math>a_{13} = 1-2(3) = -5</math></p> <p><math>a_{23} = 2-2(3) = -4</math></p> <p><math>a_{21} = -2+1 = -1</math></p> <p><math>a_{22} = -2+2 = 0</math></p> <p><math>a_{23} = -2+3 = 1</math></p> <p><math>a_{31} = -3+1 = -2</math></p> <p><math>a_{32} = -3+2 = -1</math></p> <p><math>a_{33} = -3+3 = 0</math></p> <p>مجموع ستون دوم: <math>-3 + 0 + -1 = -4</math></p>	۴



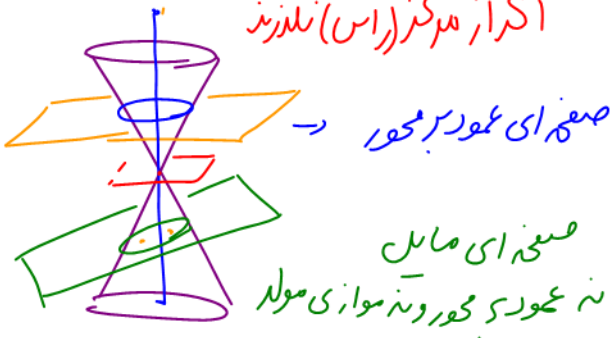
$AB \neq BA$

$AB = BA \implies$  همه انتقادها برای  
صحت می‌کرد  
دو ماتریس متعین پذیری



$a_{11} = 1 \times 0 + 2 \times 1 = 2$   
 $a_{21} = 3 \times 0 + 4 \times 1 = 4$   
 $a_{31} = 0 \times 0 + (-1) \times 1 = -1$

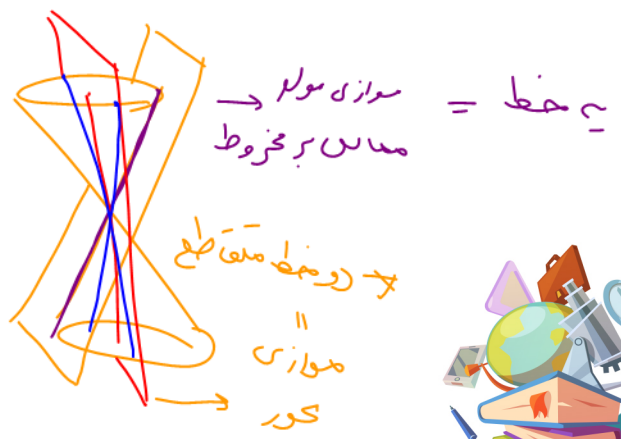
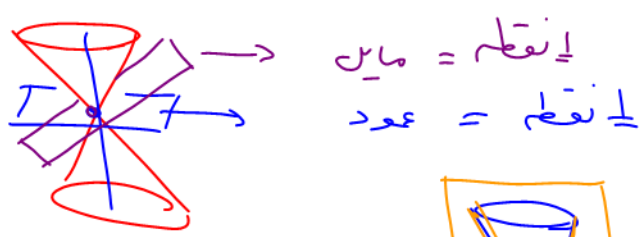
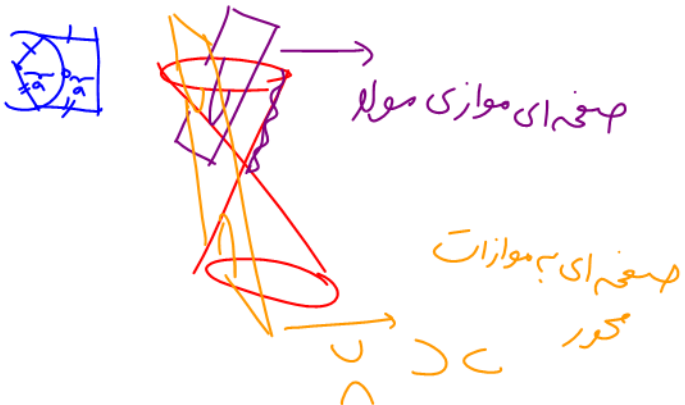
اگر از مرکز (راس) نگذرند



دایره  
مکان هندسی تقاطعی که از یک نقطه  
به فاصله ثابت است.

بیضی  
مکان هندسی تقاطعی که از دو نقطه  
مجموع فاصله اش از یک عدد ثابت باشد.

هذلولی  
مکان هندسی تقاطعی که از یک خط  
و یک نقطه (هنگامی که فاصله برابر است).



ردیف	استفاده از ماشین حساب ساده (دارای چهار عمل اصلی) مجاز است.	نمره
۵	دستگاه مقابل را با استفاده از $A^{-1}$ حل کنید. دی ۱۳۹۹ ماتریس وارون	۱,۵
۶	در معادله ماتریسی $\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & 6 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ مقدار $x$ را بیابید. خرداد ۹۸	۱,۲۵
۷	در نقطه $A(2,3)$ روی دایره $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 3$ مماسی رسم کرده ایم، معادله این خط مماس را به دست آورید.	۱
۸	اگر خروج از مرکز بیضی برابر $\frac{3}{5}$ و طول قطر کوچک بیضی ۱۶ باشد، طول قطر بزرگ بیضی و فاصله کانونی آن را به دست آورید. قطر بزرگ $2a = 20$ ، نصف محور عمودی $2c = 12$	۱,۵

$$\begin{cases} 3x - 5y = -1 \\ 2x + y = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow X = \frac{1}{3+10} \begin{bmatrix} 1+5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$X = \frac{1}{13} \begin{bmatrix} 39 \\ 26 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} x=3 \\ y=2 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3x-4 & -4x+12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = -3x+4-4x+12 = 0$$

$$-9x+16 = 0$$

$$\frac{9x}{9} = \frac{16}{9} \rightarrow x = \frac{16}{9}$$

$$x^2 - 2x + 1 - 1 + y^2 - 2y + 1 - 1 = 3$$

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 5$$

$$R = \sqrt{5}$$

$$y = ax + b \rightarrow y = -\frac{1}{2}x + 4$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{3}{5} \Rightarrow c = \frac{3}{5}a$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$25a^2 - 9a^2 = 256 \rightarrow \frac{16}{25}a^2 = 256$$

$$a^2 = 256 \times \frac{25}{16} = 400$$

$$a = 20 \rightarrow c = \frac{3}{5} \times 20 = 12$$



$A^{-1} \times A = I \rightsquigarrow$  ماتریس معکوس  $AI = A$

$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad A^{-1} = \frac{1}{|A|} \times A^*$

$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

مربع کامل کردن

$x^2 + 2x + y^2 - 4y - 7 = 0$

- شرط داده بودن
- ① ضریب  $x$  یا  $y$  باید زوج باشد
  - ②  $R^2 \geq 0$  باشد
  - فقط  $R^2 = 0$
  - یا  $R^2 < 0$

$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2$

$O \mid \alpha$

$\left(\frac{2}{2}\right)^2 = \frac{1}{1}$

$\left(x + \frac{2}{1}\right)^2 - \frac{2 \times 2}{1} + \left(y - \frac{4}{1}\right)^2 - \frac{4 \times 4}{1} - 7 = 0$

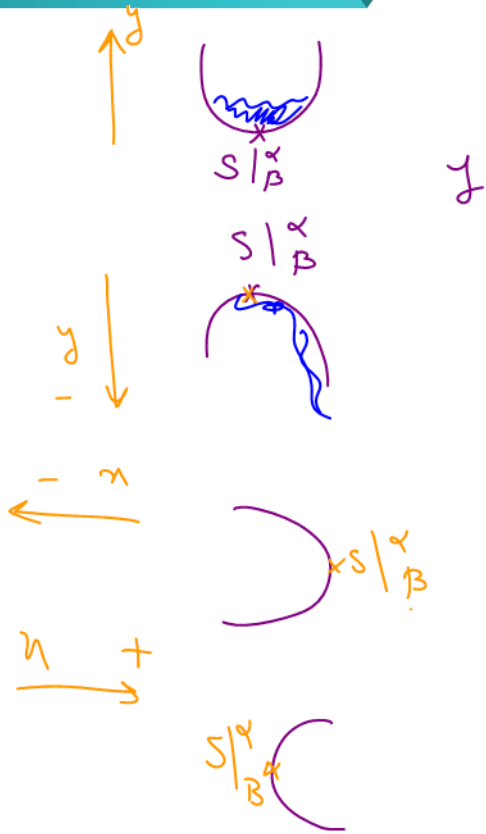
$\left(x + \frac{2}{1}\right)^2 + \left(y - \frac{4}{1}\right)^2 = \frac{24}{1} + \frac{1 \times 24}{114} = \sqrt{\frac{24}{1}}$

$R = \frac{\sqrt{24}}{1}$



نمره	استفاده از ماشین حساب ساده (دارای چهار عمل اصلی) مجاز است. $4x + 3y + 5 = 0$	ردیف
۱,۵	<p>معادله دایره‌ای را بنویسید که خطوط <math>x + y = 1</math> و <math>x - y = 3</math> شامل قطرهایی از آن بوده و خط <math>4x + 3y = -5</math> بر آن مماس باشد.</p> <p>امتحان خرداد ۹۸</p> <p>بر آن مماس باشد.</p> <p><math>R = OH = \frac{ 4x+3y+5 }{\sqrt{4^2+3^2}} = \frac{10}{5} = 2</math></p> <p><math>(x-2)^2 + (y+1)^2 = 4</math></p> <p>مکان مرکز دایره <math>B'</math> = مجموع فاصله هر نقطه تا دو دربیضی = <math>2a</math></p> <p>مکان <math>B'</math> = <math>a - y + a + x = 2a</math></p> <p>مکان <math>B'</math> = <math>2x = 4 \Rightarrow x = 2</math></p> <p>مکان <math>B'</math> = <math>2 - y = 2 \Rightarrow y = -1</math></p> <p>مکان <math>B'</math> = <math>(2, -1)</math></p> <p>معادله دایره: <math>(x-2)^2 + (y+1)^2 = 4</math></p> <p>دایره بیرون مماس <math>OH &gt; R</math></p> <p>دایره مماس <math>OH = R</math></p> <p>دایره داخل مماس <math>OH &lt; R</math></p>	۹
۱,۲۵	<p>در بیضی روبرو: <math>OF = OF' = c</math>, <math>OB = OB' = b</math>, <math>OA = OA' = a</math></p> <p>ثابت کنید: <math>b^2 + c^2 = a^2</math></p> <p>با توجه به تریگنومی دی ۱۴۰۰</p> <p><math>BF + BF' = 2a</math></p> <p><math>\sqrt{OB^2 + OF^2} + \sqrt{OB'^2 + OF'^2} = 2a</math></p> <p><math>\sqrt{b^2 + c^2} + \sqrt{b^2 + c^2} = 2a</math></p> <p><math>\sqrt{b^2 + c^2} = a \Rightarrow b^2 + c^2 = a^2</math></p>	۱۰
$(\frac{2}{3})^2 = 1$	<p>شهریور ۱۴۰۰</p> <p>سهمی به معادله <math>y^2 - 2y + 8x + 9 = 0</math> را در نظر بگیرید:</p> <p>الف) مختصات رأس، کانون و معادله خط هادی سهمی را به دست آورید.</p> <p>ب) نمودار سهمی را رسم کنید.</p> <p><math>y^2 - 2y + 1 - 1 + 8x + 9 = 0</math></p> <p><math>(y-1)^2 = -8x - 8</math></p> <p><math>(y-1)^2 = -8(x+1)</math></p> <p><math>S(-1, 1)</math> <math>2a = -8 \Rightarrow a = -4</math></p> <p>کانون <math>F(-3, 1)</math></p> <p>خط هادی <math>x = 1</math></p>	۱۱
۱	<p>خرداد ۹۸</p> <p>اگر <math>\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{k}</math> و <math>\vec{b} = (1, 2, 1)</math> باشد، طول بردار <math> \vec{a} - 2\vec{b} </math> را به دست آورید.</p> <p><math>\vec{a} = (2, 0, -1)</math></p> <p><math>\vec{a} - 2\vec{b} = (2, 0, -1) - 2(1, 2, 1) = (0, -4, -3)</math></p> <p><math> \vec{a} - 2\vec{b}  = \sqrt{0^2 + (-4)^2 + (-3)^2} = 5</math></p>	۱۲



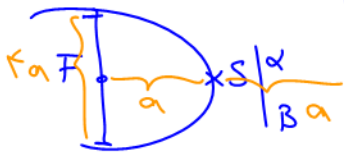


$$y \quad (x-\alpha)^2 = \frac{1}{\sigma^2} (y-\beta) \quad a > 0$$

$$(x-\alpha)^2 = \frac{1}{\sigma^2} (y-\beta) \quad a < 0$$

$$(y-\beta)^2 = \frac{1}{\sigma^2} (x-\alpha) \quad a < 0$$

$$(y-\beta)^2 = \frac{1}{\sigma^2} (x-\alpha) \quad a > 0$$



$\sigma$  فاصله رأس تا هالی و کانون است  
 $\frac{\sigma}{\beta^\alpha} = \text{فاصله کانون تا هالی}$



نمره	استفاده از ماشین حساب ساده (دارای چهار عمل اصلی) مجاز است.	ردیف
۲	<p>بردارهای <math>\vec{a} = (2, -1, 2)</math> و <math>\vec{b} = (1, -1, 0)</math> را در نظر بگیرید. <sup>دی ۱۴۰۰</sup> دایره را در نظر بگیرید. <math>\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{ \vec{a}   \vec{b} } = \frac{1 \times 2 + (-1)(-1) + 0 \times 2}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} \times \sqrt{1^2 + (-1)^2}}</math></p> <p>الف) زاویه بین دو بردار <math>\vec{a}</math> و <math>\vec{b}</math> را به دست آورید.</p> <p>ب) برداری عمود بر دو بردار <math>\vec{a}</math> و <math>\vec{b}</math> پیدا کنید.</p> <p><math>\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} &amp; \vec{j} &amp; \vec{k} \\ 2 &amp; -1 &amp; 2 \\ 1 &amp; -1 &amp; 0 \end{vmatrix} = \vec{i}(0+2) - \vec{j}(-2) + \vec{k}(-2+1) = 2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k} = (2, 2, -1)</math></p> <p><math>\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}</math></p> <p><math>\alpha = 45^\circ</math></p>	۱۳
۱	<p>بردارهای <math>\vec{a} = (2, -1, 2)</math> و <math>\vec{b} = (1, -1, 0)</math> را در نظر بگیرید. تصویر قائم بردار <math>\vec{a}</math> را بر امتداد بردار <math>\vec{b}</math> بیابید. <sup>امتحان دی ۹۹</sup></p> <p><math>\vec{a}' = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{ \vec{b} ^2} \vec{b} = \frac{1 \times 2 + (-1)(-1) + 0 \times 2}{2(\sqrt{1^2 + (-1)^2})^2} (1, -1, 0)</math></p> <p><math>= \frac{3}{2} (1, -1, 0) = (\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, 0)</math></p>	۱۴
۲	<p>مختصات <math>x=0</math> و <math>z=0</math> در فضای <math>\mathbb{R}^3</math> چه شکلی است؟ و چه ارتباطی با نمودار <math>X=0</math> دارد؟ <sup>امتحان شهریور ۹۹</sup></p> <p>الف) نمودار مربوط به معادلات <math>\begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases}</math> مختصات <math>x=0</math> و <math>z=0</math> معنی چیست؟</p> <p>ب) اگر <math>\vec{a} = (2, -1, 3)</math> و <math>\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j}</math> باشد اندازه بردار <math>\vec{a} + 2\vec{b}</math> را به دست آورید.</p> <p><math>(2, -1, 3) + (2, 4, 0) = (4, 3, 3)</math></p> <p><math> \vec{a} + 2\vec{b}  = \sqrt{4^2 + 3^2 + 3^2} = \sqrt{16+9+9} = \sqrt{34}</math></p> <p>مختصات <math>x=0</math> و <math>z=0</math> معنی چیست؟</p> <p>مختصات <math>x=0</math> و <math>z=0</math> معنی چیست؟</p> <p>مختصات <math>x=0</math> و <math>z=0</math> معنی چیست؟</p>	۱۵



ضرب داخلی

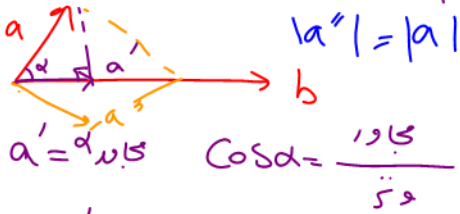
صورتی

$a \cdot b = b \cdot a$   $a \cdot b = \vec{a} \cdot \vec{b}$

$a \cdot b = x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b$

$a \cdot b = |a| |b| \cos \alpha$

$\cos \alpha = \frac{a \cdot b}{|a| |b|}$



$\cos \alpha = \frac{|a'|}{|a|} \rightarrow a' = |a| \cos \alpha$

اندازه‌ی تصویر  $a$  روی  $b$   $|a'| = \frac{a \cdot b}{|b|}$

بردار تصویر روی  $b$   $a' = \frac{a \cdot b}{|b|^2} b$

$\vec{c}$  بردار عمود  $= \frac{\vec{c}}{|\vec{c}|} = \vec{e}_c$

$a'' + a = 2a'$   
 $a'' = \frac{2a \cdot b}{|b|^2} b - a$

ضرب خارجی

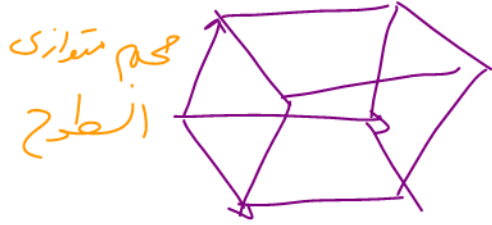
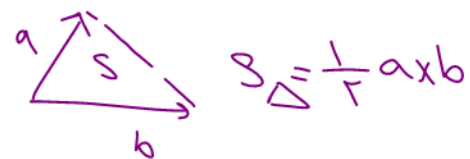
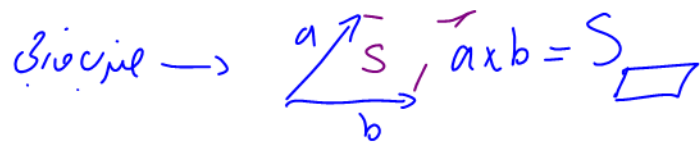
~~صورتی~~  
 $a \times b = -b \times a$

$a \times b = \vec{c}$

$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \end{vmatrix} = \vec{i}(y_a z_b - z_a y_b) - \vec{j}(x_a z_b - z_a x_b) + \vec{k}(x_a y_b - y_a x_b)$

بردار عمود روی طرقات  $a$  و  $b$  است  $+\vec{k}(x_a y_b - y_a x_b)$

$|a \times b| = |a| |b| \sin \alpha$



$V = a \cdot (b \times c)$

$\begin{vmatrix} x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \\ x_c & y_c & z_c \end{vmatrix}$





$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$$

$(-1)^{i+j}$

$$= 1(5 \cdot 9 - 8 \cdot 6) - 2(4 \cdot 9 - 7 \cdot 6) + 3(4 \cdot 8 - 7 \cdot 7)$$

$$= 1(45 - 48) - 2(36 - 42) + 3(32 - 49)$$

$$= -3 + 0 - 21 = -24$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

