بدون انجام عمل تقسیم

باقی‌مانده تقسیم $f(x)=5x^3+2x^2+3$ را بر $x+1$ بیابید. پس آن را به صورت ضرب دو عامل تجزیه کنید. (۱ نمره)

$$5x^3+2x^2+3 \;\Big|\; x+1=0 \longrightarrow x=-1$$

$$5(-1)^3+2(-1)^2+3=-5+2+3=\boxed{0=R}$$ باقی‌مانده

$f(x)$ بر $x+1$ بخش‌پذیر است (۰/۵ نمره)

$$\begin{array}{r|l} a & b \\ \hline r & q \end{array} \rightsquigarrow a=bq+r$$

$$5x^3+2x^2+3=(x+1)(5x^2-3x+3)$$ (۰/۵ نمره)

$$\begin{array}{r|l}
5x^3+2x^2+3 & x+1 \\ \cline{2-2}
-(5x^3+5x^2) & 5x^2-3x+3 \\ \cline{1-1}
-3x^2+3 & \\
-(-3x^2-3x) & \\ \cline{1-1}
3x+3 & \\
-(3x+3) & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

حاصل حدهای زیر را بیابید.

الف) $\lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{2x^2-x}{4x^2-1} = \frac{0}{0}$ مبهم $= \lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{x(\cancel{2x-1})}{(\cancel{2x-1})(2x+1)} = \frac{\frac{1}{2}}{2(\frac{1}{2})+1} = \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$

$x - \frac{1}{2}$

روش هوپیتال در محاسبه حد $\frac{0}{0}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$:

$\lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{4x-1}{8x-0} = \frac{1}{4}$

$y = kx^n \rightsquigarrow y' = knx^{n-1}$

$y = ax+b \rightsquigarrow y' = a$

$y = b \rightsquigarrow y' = 0$

$$\lim_{x \to -۴} \frac{x^۲ + ۳x - ۴}{(x^۳ + ۴x^۲) + (x + ۴)} = \frac{۰}{۰} = \lim_{x \to -۴} \frac{(x-۱)\cancel{(x+۴)}}{(x^۲+۱)\cancel{(x+۴)}} = \frac{-۴-۱}{(-۴)^۲+۱} = \frac{-۵}{۱۷}$$

$$x - (-۴) = x + ۴$$

$$x^۲(x+۴) + (x+۴)$$

$$\xrightarrow{Hop} \lim_{x \to -۴} \frac{۲x + ۳}{۳x^۲ + ۸x + ۱} = -\frac{۵}{۱۷}$$

$$\lim_{\substack{x \to 3 \\ x-3}} \frac{x^2-9}{2-\sqrt{x+1}} = \lim_{x\to 3} \underbrace{\frac{\cancel{(x-3)}(x+3)}{(2-\sqrt{x+1})} \cdot \frac{(2+\sqrt{x+1})}{(2+\sqrt{x+1})}} = \frac{6(\cancel{4})}{-(\cancel{4})} = -6$$

مزدوج $= 4-(x+1) = 3-x = -\cancel{(x-3)}$

$$y=\sqrt{u} \rightsquigarrow y' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

$$\underline{\text{Hop}} \lim_{x\to 3} \frac{2x-0=6}{0-\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}} = -\dfrac{1}{4}} = -24$$

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{2-\sqrt{x+1}} = \frac{0}{0}\ \text{مبهم} = \lim_{x\to 3} \frac{(x\cancel{-3})(x+3)(2+\sqrt{x+1})}{\underbrace{(2-\sqrt{x+1})(2+\sqrt{x+1})}_{4-x-1=3-x=-\cancel{(x-3)}}} = \frac{(6)(4)}{-1} = -24$$

$x-3$

$$\xrightarrow[x\to 3]{\text{Hop}} \frac{2x-0}{0-\frac{1}{2\sqrt{x+1}}} = \frac{6}{-\frac{1}{4}} = -24$$

$$y=\sqrt{u} \longrightarrow y' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

$$4+4+4$$

$$\lim_{x\to -8} \frac{2x+16}{\sqrt[3]{x}+2} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to -8} \frac{2(\cancel{x+8})(\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+4)}{(\sqrt[3]{x}+2)(\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+4)} = \frac{2(12)}{} = 24$$

$x-(-8)=x+8$

$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$

$\cancel{x+8}$

حد بی نهایت :

$$\frac{\text{عدد}}{0^{+} \text{ یا } 0^{-} \text{ صفر نسبی یا حدی}} = \pm\infty \qquad \frac{2}{0^{-}} = -\infty \qquad \frac{-3}{0^{-}} = +\infty$$

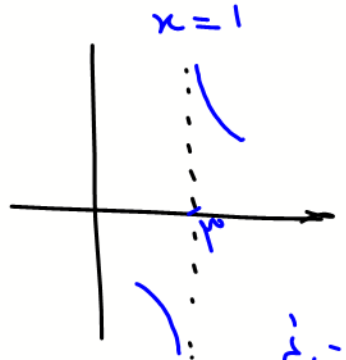
جواب حد ∞ میشه

$$\frac{\text{عدد}}{\text{صفر مطلق یا خود صفر}} = \text{تعریف نشده}$$

مجانب قائم

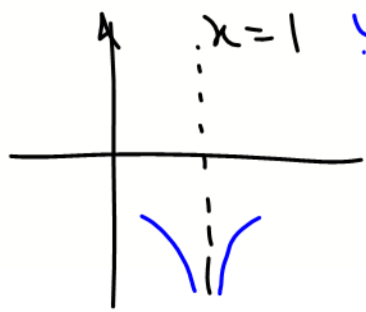
$$\lim_{x\to 1} y = \frac{1}{x-1} \begin{cases} x \to 1^{+} & y = \dfrac{1}{1^{+}-1 = 0^{+}} = +\infty \\ x \to 1^{-} & y = \dfrac{1}{1^{-}-1 = 0^{-}} = -\infty \end{cases}$$

$$D_f : \mathbb{R} - \{1\}$$

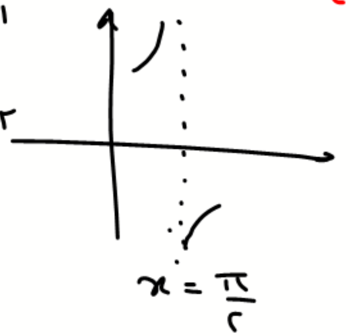


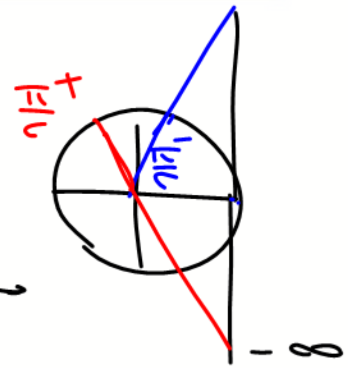
مجانب قائم

$$\lim_{x\to 1} y = \frac{-7}{(x^2-2x+1)} = \frac{-7}{(x-1)^2} \begin{cases} x \to 1^{+} & \dfrac{-7}{0^{+}} = -\infty \\ x \to 1^{-} & \dfrac{-7}{0^{+}} = -\infty \end{cases}$$



$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \tan x = \begin{cases} x\to\frac{\pi}{2}^- & +\infty = l_1 \\ & \text{حد ندارد} \quad \neq \\ x\to\frac{\pi}{2}^+ & -\infty = l_2 \end{cases}$$



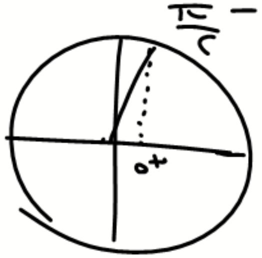


$$\tan\left(\tfrac{\pi}{2}\right)^+ = -\infty$$

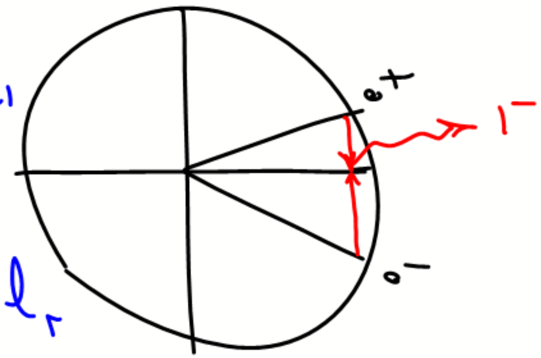
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} (0/6)^{\tan x} = (\underbrace{0/6}_{\frac{6}{10}})^{-\infty} = \left(\frac{10}{6} = \frac{5}{3} = 1/..\right)^{+\infty} = +\infty$$

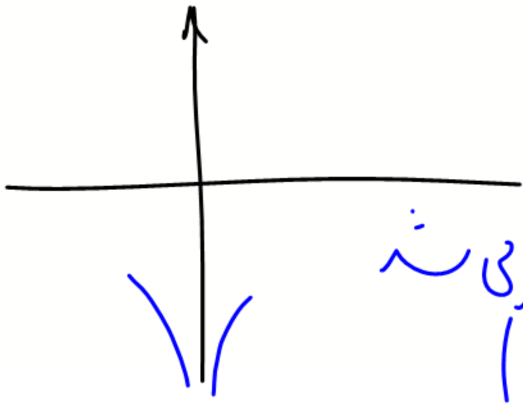
هر عدد به توان منفی برابر است با عکس همان عدد به همان توان ولی مثبت

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{2+\sin x}{\cos x}=\frac{2+1}{0^+}=\frac{3}{0^+}=+\infty$$



$$\lim_{x\to 0}\frac{2+\sin x}{\cos x-1}\begin{cases} x\to 0^+ & y=\dfrac{2+0=2}{1^- -1=0^-}=-\infty=l_1\\[2ex] x\to 0^- & y=\dfrac{2+0=2}{1^- -1=0^-}=-\infty=l_2\end{cases}$$





با این که حد چپ و راست هم برابر شد
می‌گوییم حد ندارد زیرا باید حد برابر شد
نه ∞ برابر (عدد ثابت)

$$\lim_{x\to 5^-} \frac{5-[x]}{x-5} = \frac{5-[5^-] = 5-4 = 1}{\underset{4,9}{5^-}-5 = 0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 5^+} \frac{5-[x]}{x-5} = \frac{5-\overset{\text{خود}}{5} = \overset{\text{خود}}{\text{صفر}} = \text{صفر مطلق}}{5^+-5 = 0^+ = \text{صفر نسبی}} = 0$$

$$\lim_{x\to 5^+} \frac{x^2+1}{5-[x]} = \frac{26}{5-\overset{\text{خود}}{5} = \text{صفر خود} = \text{صفر مطلق}} = \text{ت . ن}$$

حد در ∞ : x به ∞ برود.

$$\lim_{x\to\pm\infty} ax^n + bx^{n-1} + \cdots \xrightarrow[x\to\pm\infty]{\text{پرتوان}} ax^n$$

$$\lim_{x\to-\infty} -4x^3 - 2x + 11 \xrightarrow[x\to-\infty]{} -4x^3 = -4(-\infty)^3 = -4(-\infty) = +\infty$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{ax^n + bx^{n-1} + \cdots}{a'x^m + b'x^{m-1} + \cdots} = L = \frac{a}{a'} x^{n-m}$$

$$\begin{cases} \text{if } n > m & L = \infty \\ \text{if } n = m & L = \dfrac{a}{a'} \\ \text{if } n < m & L = \text{صفر} \end{cases}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x^2+1} = \frac{\infty}{\infty} \text{ ابهام} = \frac{\text{پرتوان}}{\text{پرتوان}} = \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+7}{-3x^2+8x-1} = -\frac{2}{3}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{5x^7 - 4x^3 + x - 1}{7 + 11x^2 - x^3} \sim \frac{5x^7}{-x^3} = -5\left(\underset{x\to-\infty}{x^{7-3=4}}\right)$$

$$= -5(+\infty) = -\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2 + |x-1| + 3x}{|x-1| + |x+3|} = \frac{4 - \cancel{x} + 1 + \cancel{3x}}{-\cancel{x} + 1 - \cancel{x} - 3} = \frac{2x}{-2x} = \frac{2}{-2} = -1$$

$y = -1$ مجانب افقی

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{-4x + \sqrt{x^2+4x+4}}{5x + |-x+2|} = \frac{-4x + \left(\sqrt{(x+2)^2} = |x+2|\right)}{5x + |\underbrace{-x+2}_{+}|} = \frac{-\cancel{4}x - \cancel{x} - 2}{\cancel{5}x - \cancel{x} + 2} = \frac{-5x}{4x} = \frac{-5}{4}$$

$y = -\frac{5}{4}$ مجانب افقی

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{(x^2+2x)+4}-x}{3x-1}=\lim\frac{\sqrt{\left((x+1)^2-1\right)+4}=(x+1)^2+3}{3x}=\frac{|x+1|}{3x}$$

$$=\frac{-x-1}{3x}=\frac{-x}{3x}=-\frac{1}{3}$$

تابع در $-\infty$ مجانب خط $y=-\frac{1}{3}$ است
و این خط مجانب افقی است.

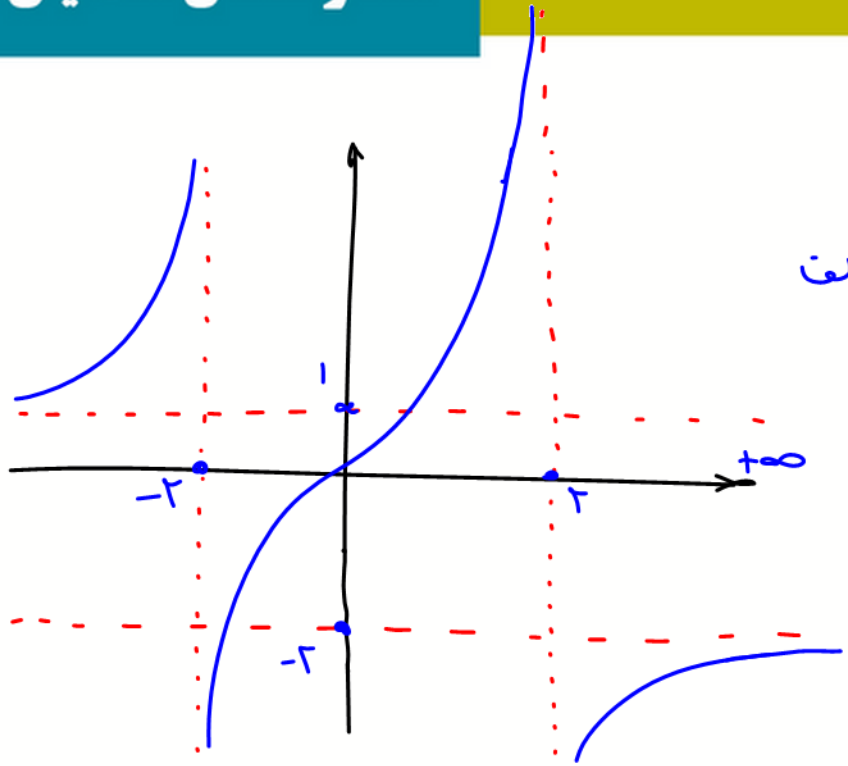
$$\lim_{x\to\infty} \frac{(x-3)^2+(x-4)^2+\cdots+(x-16)^2}{3-4x+7x^2}=\frac{\infty}{\infty}$$

$$\frac{(x^2-6x+9)+(x^2-8x+16)+\cdots+(x^2-32x+(16)^2)}{7x^2}\approx\frac{14x^2}{7x^2}=2$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{(x^2-1)^{13}(-x+1)^3}{(x^{17}-1)(x^2+1)(-x^2+3)}=\frac{\infty}{\infty}=\frac{x^{26}(-x)^3}{-x^{21}}=\frac{-x^{29}}{-x^{21}}=\frac{x^{29}}{x^{21}}=x^8$$

$$(-\infty)^8=+\infty$$

حاصل حدهای خواسته شده را بنویسید. (۱ نمره)



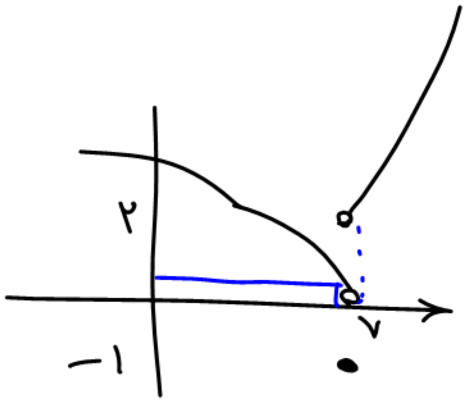
الف) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -۲$

ب) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = ۱$

ج) $\lim_{x \to (-۲)^-} f(x) = +\infty$

د) $\lim_{x \to ۲^-} f(x) = +\infty$

در هر نمودار حد را در نقطه خواسته شده بیابید.

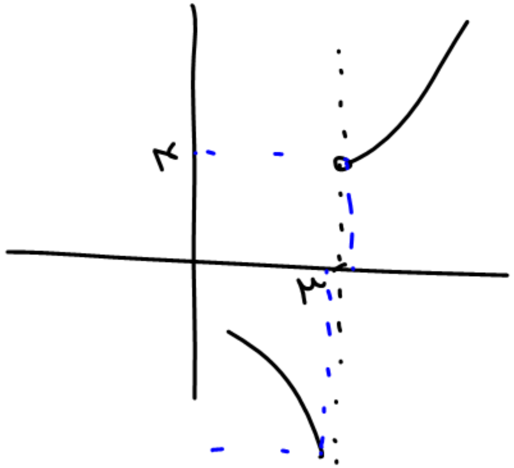


$\lim\limits_{x\to 7} f(x)$

$x \neq 7$

$$\begin{cases} x\to 7^+ & 2 = l_1 \\ x\to 7^- & 0 = l_2 \end{cases}$$

$l_1 \neq l_2$ حد ندارد.

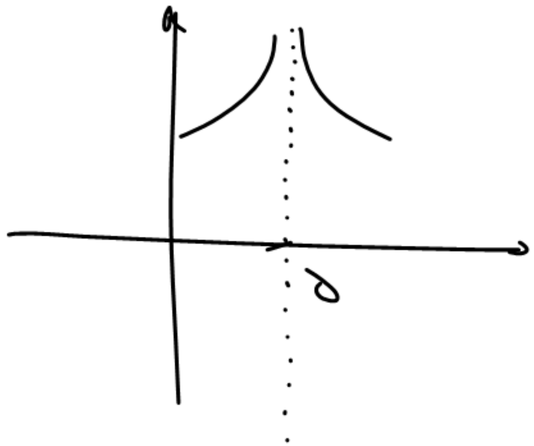


$\lim\limits_{x\to 3} f(x)$

$$\begin{cases} x\to 3^+ & 2 = l_1 \\ x\to 3^- & -\infty = l_2 \end{cases}$$

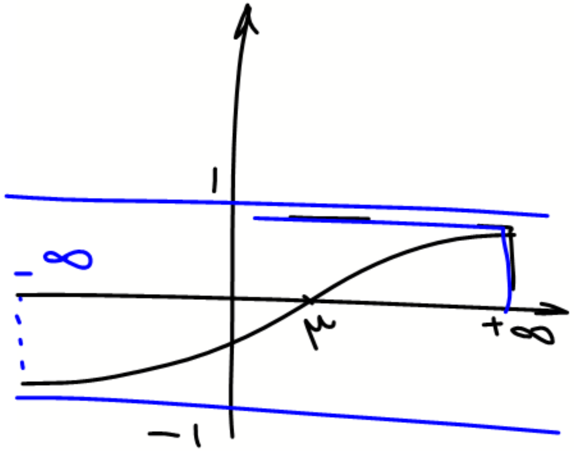
$\neq$

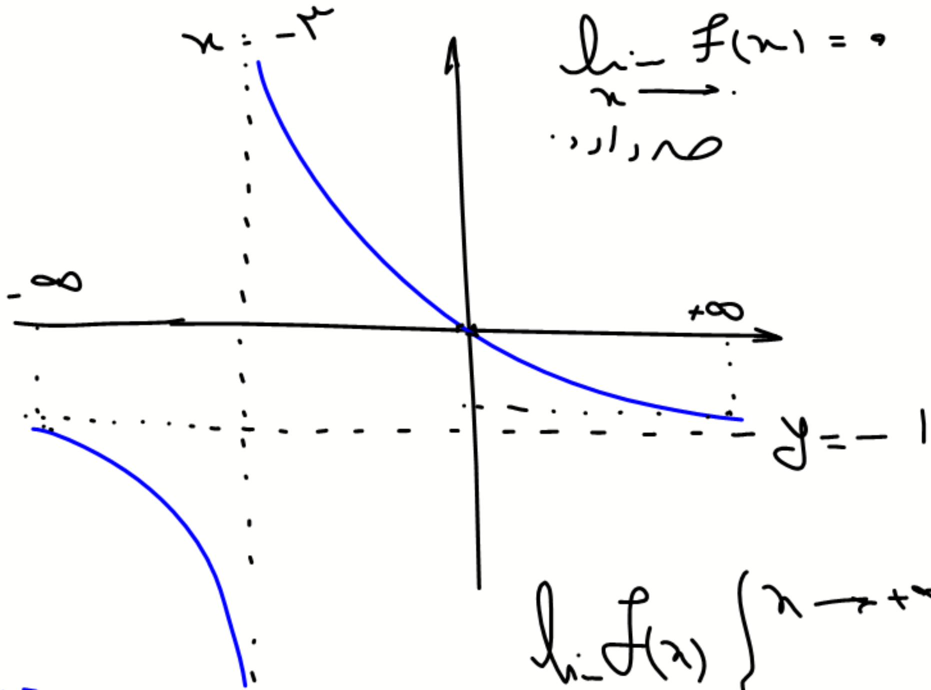
حد ندارد.



$\lim\limits_{x\to 5} f(x)$ $\begin{cases} x\to 5^+ & +\infty \\ x\to 5^- & +\infty \end{cases}$

حد دارد.





$\lim_{x \to} f(x) = 0$

حد ندارد.

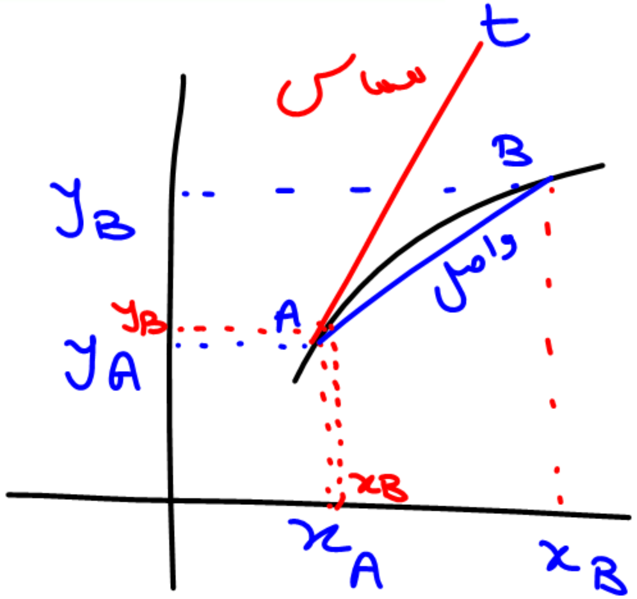
$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -1$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \left[\overset{1^-}{\cancel{f(x)}} \right] = 0$

$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) \begin{cases} x \to +\infty & -1 = l_1 \\ x \to -\infty & -1 = l_2 \end{cases}$

$\lim_{x \to \pm\infty} [f(x)] \begin{cases} x \to +\infty & [(-1)^+] = -1 \\ x \to -\infty & [(-1)^-] = -2 \end{cases}$

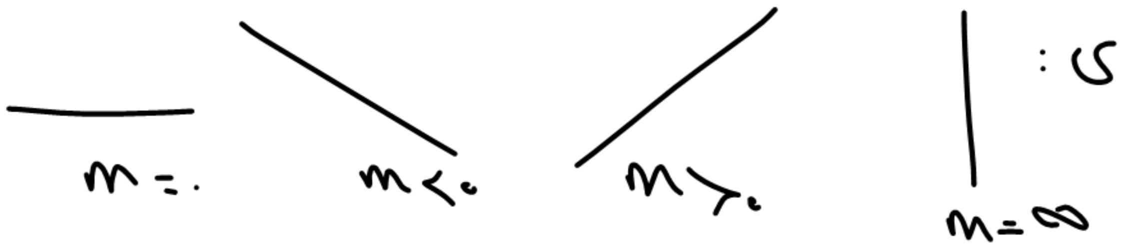


مشتق از جنس شیب است.

شیب خط مماس است.

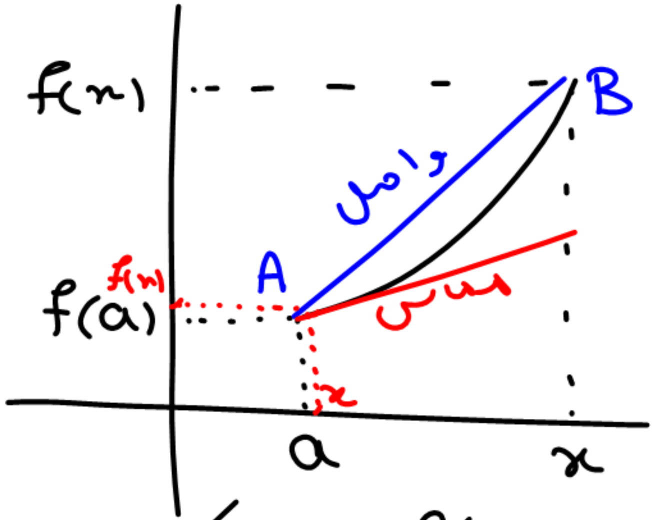
مماس همان خط واصل بین دو نقطه است که آن دو نقطه به شدت به هم نزدیکند.

یادآوری:



$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$m_{At} = \lim_{x_B \to x_A} \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(A) =$$ شیب مماس بر تابع f در نقطه A



$m_{AB}=\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$

تعریف مشتق تابع در نقطه a :

شیب مماس بر تابع f در نقطه a : $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$

به کمک تعریف مشتق، در تابع $f(x)=x^2-4x$ حاصل $f'(1)$ را پیدا کنید. (۱/۵ نمره)

$f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$

$f'(1)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x^2-4x)-\cancel{f(1)}^{\,-3}}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-4x+3}{x-1}=\dfrac{0}{0}$ مبهم

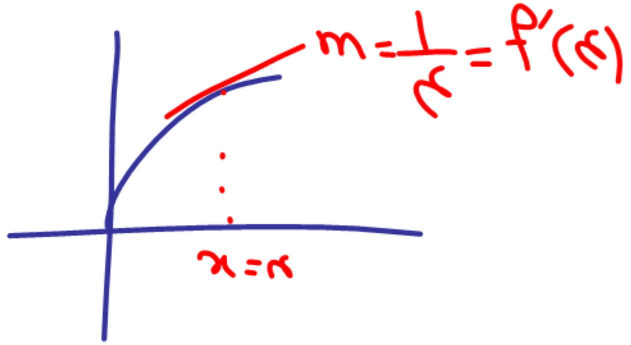
$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\cancel{(x-1)}(x-3)}{\cancel{x-1}}=1-3=-2$ $\quad f'(1)=-2$

مشتق تابع $f(x)=\sqrt{x}$ را در $x=4$ به کمک تعریف بیابید.

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

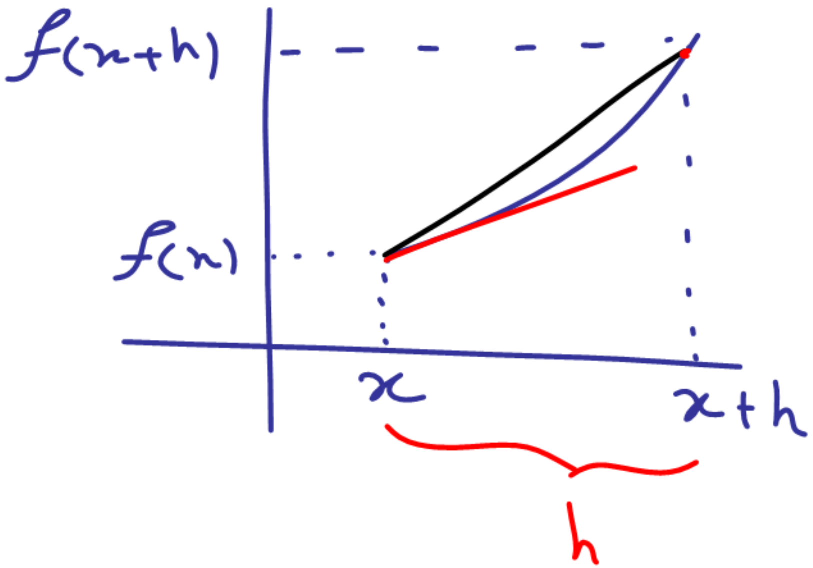
$$f'(4)=\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{4}}{x-4}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 4}\frac{(\sqrt{x}-2)}{(x-4)}\frac{(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}+2)}=\lim_{x\to 4}\frac{\cancel{x-4}}{(\cancel{x-4})(\sqrt{x}+2)}$$

$$f'(4)=\frac{1}{4}$$



مشتق تابع در حالت کلی :

فرمول های مشتق از کجا بدست می آیند؟



$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

در تابع $f(x)=x^3$ به کمک تعریف مشتق ، مشتق تابع را بدست آورید.

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{x^3}+3x^2h+3xh^2+h^3-\cancel{x^3}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}(3x^2+\cancel{3xh}+\cancel{h^2})}{\cancel{h}}=3x^2$$

فرمول های مشتق :

$f(x)=b=$ عدد $\longrightarrow f'(x)=0$

$f(x)=ax \longrightarrow f'(x)=a$

$f(x)=ax+b \longrightarrow f'(x)=a$

$f(x)=kx^{n} \longrightarrow f'(x)=knx^{n-1}$

$f(x)=U\pm V \longrightarrow f'(x)=U'\pm V'$

$f(x)=U.V \longrightarrow f'(x)=U'V+V'U$

$f(x)=\dfrac{U}{V} \longrightarrow f'(x)=\dfrac{U'V-V'U}{V^{2}}$

$f(x)=\sqrt{U} \longrightarrow f'(x)=\dfrac{U'}{2\sqrt{U}}$

$f(x)=\sqrt{x} \longrightarrow f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$$\begin{cases} f(x)=\sqrt[3]{x}=x^{\frac{1}{3}} \\ f'(x)=\frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1}=-\frac{2}{3} \end{cases}$$

$f'(x)=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^{2}}}$

مشتق توابع زیر را حساب کنید (ساده کردن لازم نیست)

x^{-1} $x^{\frac{1}{2}}$

الف) $y = 4x^3 + \frac{1}{x} + \sqrt{x}$

$\frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$

$y' = 4(3x^2) - 1x^{-2} + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = 12x^2 - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$

ب) $y = \sqrt{3x-1} + x^3 - 4x^2$

$y' = \frac{3}{2\sqrt{3x-1}} + 3x^2 - 4(2x)$

$$y = u^{n} \rightsquigarrow y' = n\,u'\,u^{n-1}$$

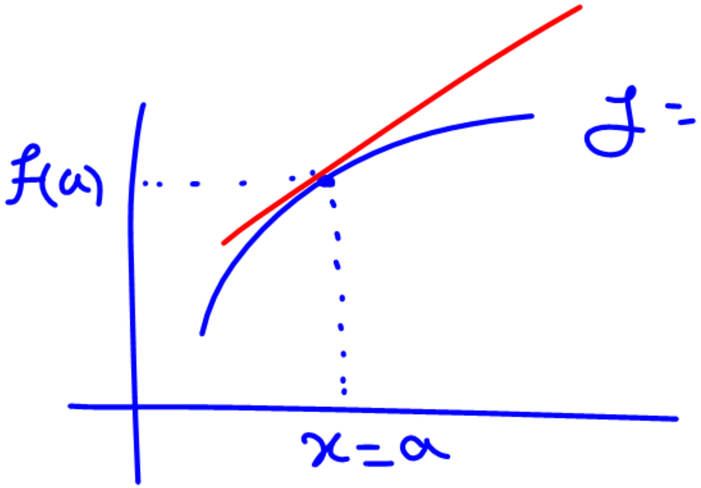
u توی x داریم

ج) $y = (x^{3} - 4x)^{2} \rightsquigarrow y' = 2(3x^{2} - 4)(x^{3} - 4x)^{1}$

u

د) $y = 8(x^{2} - 3x + 6)^{7} \rightsquigarrow y' = 8(7)(2x - 3 + 0)(x^{2} - 3x + 6)^{6}$

نوشتن معادله خط مماس بر یک تابع در یک نقطه:



$A(a , f(a))$

$$y - y_A = m(x - x_A)$$

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

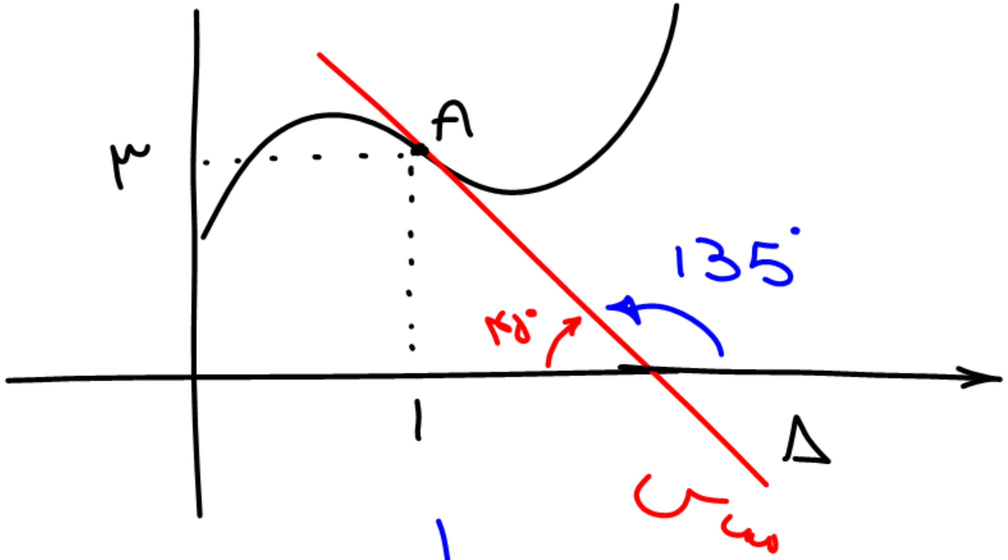
سؤال امتحان: معادله خط مماس بر تابع $f(x)=3x^2-2x+1$ را در نقطه‌ای به طول ۲ روی آن بنویسید. (۱/۵ نمره)

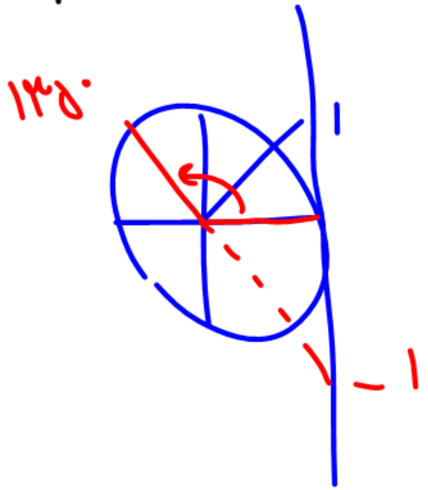
$x=2 \longrightarrow f(2)=3(2)^2-2(2)+1=9 \qquad A(2,9)$

$f'(x)=3(2x)-2 \qquad f'(2)=10=m_A$

$y-y_A=m_A(x-x_A) \rightsquigarrow y-9=10(x-2) \qquad y=10x-20+9$

$\boxed{y=10x-11}$





در شکل مقابل معادله خط Δ را بنویسید.

$A(1, 3)$

$m_A = \tan(135^\circ) = -1$

$y - y_A = m_A(x - x_A)$

$y - 3 = -1(x - 1)$

$y = -x + 1 + 3 = -x + 4$

در تابع $f(x)=\sqrt{x+2}$ به کمک تعریف مشتق $f'(0)$ را پیدا کنید. (۱/۵ نمره)

۰/۵ $f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

۰/۵ $f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+2}-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x}=\frac{0}{0}$

۰/۵ $=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{2}\right)}{x}\frac{\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{2}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x}+\cancel{2}-\cancel{2}}{\cancel{x}\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{2}\right)}=\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{2}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}$

معادله خط مماس بر تابع $f(x)=\sqrt{x^2+3x}$ را در نقطه‌ای به طول یک روی تابع بیابید (۱/۵ نمره)

$$x=1 \longrightarrow f(1)=\sqrt{1+3}=2 \qquad A(1,2)$$

$$f(x)=\sqrt{\underbrace{x^2+3x}_{u}} \leadsto f'(x)=\frac{2x+3}{2\sqrt{x^2+3x}} \qquad f'(1)=\frac{5}{2(2)}=\frac{5}{4}=m_A$$

$$y=\sqrt{u} \longrightarrow y'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

$$y-y_A=m_A(x-x_A)$$

$$y-2=\frac{5}{4}(x-1)$$

$$f(x) = \sqrt{x^2+3x} = (x^2+3x)^{\frac{1}{2}}$$

$$y = u^n \rightsquigarrow y' = n\,u'\,u^{n-1}$$

$$\frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(2x+3)(x^2+3x)^{\frac{1}{2}-1} = \frac{2x+3}{2\sqrt{x^2+3x}}$$

$$-|a|+d \leqslant y = a\sin(bx+c)+d \leqslant |a|+d \qquad T=\frac{2\pi}{|b|}$$

$$-|a|+d \leqslant y = a\cos(bx+c)+d \leqslant |a|+d \qquad T=\frac{2\pi}{|b|}$$

در تابع زیر Max ، Min و دوره تناوب را بیابید.

$$y=-3\sin\left(\pi x-\frac{3\pi}{2}\right)+1$$

$$y_{max}=|-3|+1=4$$

$$y_{min}=-|-3|+1=-2$$

$$T=\frac{2\pi}{|\pi|}=\frac{2\pi}{\pi}=2$$

دوره تناوب و مقادیر Max و Min تابع $y = -\cos(\pi x) + 1$ را بدست آورید.

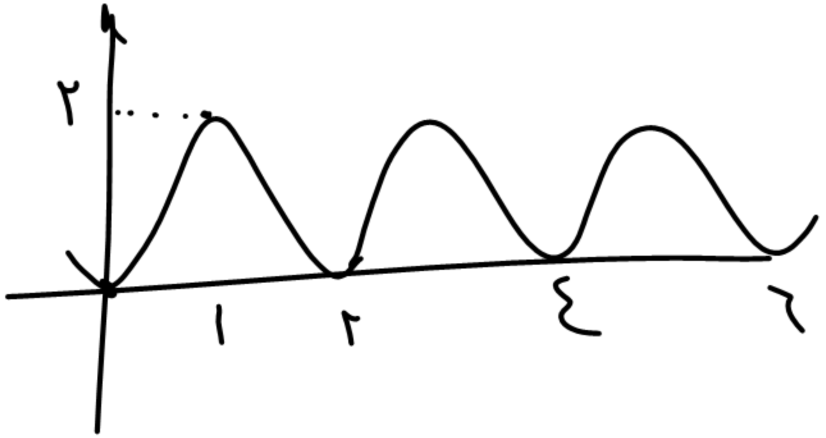
(۱/۲۵ نمره)

$$y_{Max} = |-1| + 1 = ۲$$

$$y_{Min} = -|-1| + 1 = ۰$$

$\rightarrow ۰ \leq$ برد تابع ≤ ۲

$$T = \frac{۲\pi}{|\pi|} = \frac{۲\pi}{\pi} = ۲$$



نسبت های مثلثاتی 2θ :

$$\begin{cases} \sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta \longrightarrow \sin\theta\cos\theta = \frac{1}{2}\sin(2\theta) \\ \cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta \\ \tan(2\theta) = \dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} \end{cases}$$

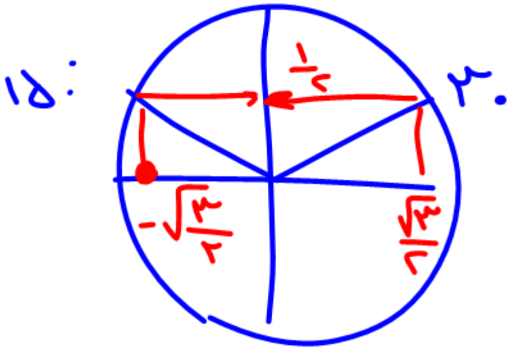
اگر $\sin\theta = \frac{3}{5}$ و $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ مقادیر $\sin 2\theta$, $\cos 2\theta$ را بدست آورید. (۱/۵ نمره)

$\cos\theta = \frac{4}{5}$ ۰/۵

۰/۵ $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = 2\left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{24}{25}$

۰/۵ $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = \left(\frac{4}{5}\right)^2 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25} - \frac{9}{25} = \frac{7}{25}$

مقدار $\cos 75^\circ$ را بدست آورید.



$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - (\overbrace{\sin^2\theta}^{1-\cos^2\theta}) = \cos^2\theta - (1-\cos^2\theta) = 2\cos^2\theta - 1$$

$$\cos(2(75^\circ) = 150^\circ) = 2\cos^2 75^\circ - 1$$

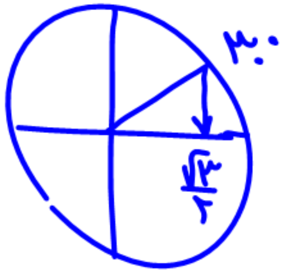
$$\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}+1}{2} = \cos^2 75^\circ \rightarrow \cos^2 75^\circ = \frac{\frac{-\sqrt{3}+2}{2}}{2} = \frac{2-\sqrt{3}}{4} \xrightarrow{\text{جذر}} \cos 75^\circ = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}$$

$$\cos 75^\circ = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

مقدار $\sin 15^\circ$ را بدست آورید.

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = (1-\sin^2\theta) - \sin^2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$$

$$\cos(2(15^\circ) = 30^\circ) = 1 - 2\sin^2(15^\circ)$$



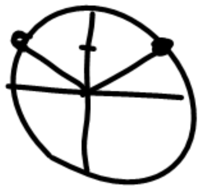
$$\frac{\sqrt{3}}{2} = 1 - 2\sin^2(15^\circ)$$

$$2\sin^2 15^\circ = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2-\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin^2 15^\circ = \frac{2-\sqrt{3}}{4} \longrightarrow \sin 15^\circ = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

معادله مثلثاتی : معادله را به کمک تا به تساوی ۲ نسبت همنام برسیم با ۴ دسته زیر فرمول حل می‌شود.

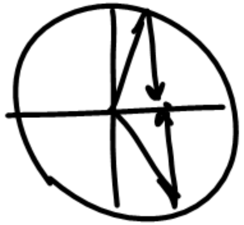
$\sin U = \sin\alpha$



$U = 2k\pi + \alpha$

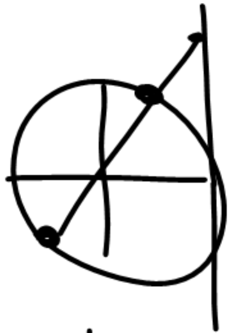
$U = 2k\pi + \pi - \alpha$

$\cos U = \cos\alpha$



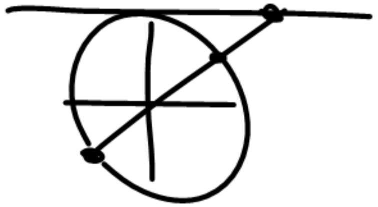
$U = 2k\pi \pm \alpha$

$\tan U = \tan\alpha$



$U = k\pi + \alpha$

$\cot U = \cot\alpha$



$U = k\pi + \alpha$

$\sin(\overset{U}{3x}) = \sin(\overset{\alpha}{x})$

$3x = 2k\pi + x \rightarrow x = k\pi$

$3x = 2k\pi + \pi - x \rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$

$\cos(\overset{U}{2x}) = \cos(\overset{\alpha}{x})$

$2x = 2k\pi \pm x$

$2x = 2k\pi + x \rightarrow x = 2k\pi$

$2x = 2k\pi - x \rightarrow x = \frac{2k\pi}{3}$

اجتماع $\cup$ $\rightarrow \boxed{x = \frac{2k\pi}{3}}$

معادلات مثلثاتی زیر را حل کنید.

الف) $\cos 5x - \cos x = 0$

$$\cos 5x = \cos x$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\cos u = \cos \alpha \\ u = 2k\pi \pm \alpha\end{array}}$$

$$5x = 2k\pi \pm x$$

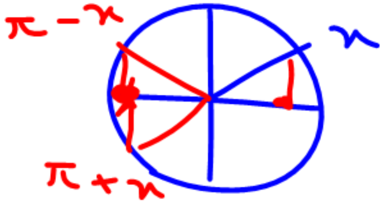
$$\begin{cases} 5x = 2k\pi + x \\ 4x = 2k\pi \longrightarrow \underbrace{x = \dfrac{k\pi}{2}}_{\text{جواب کلی}} \\[2ex] 5x = 2k\pi - x \\ 6x = 2k\pi \longrightarrow \underbrace{x = \dfrac{k\pi}{3}}_{\text{جواب عمومی}} \end{cases}$$

k	0	1	2	3	4
$x = \frac{k\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

k	0	1	2	3	4	5	6
$x = \frac{k\pi}{3}$	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{3}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	2π

ب) $\cos(4x) + \cos x = 0$

$\cos(4x) = \underbrace{-\cos x}$



$\cos 4x = \cos(\pi - x)$

$$\boxed{\begin{gathered}\cos u = \cos\alpha \\ u = 2k\pi \pm \alpha\end{gathered}}$$

$4x = 2k\pi \pm (\pi - x)$

$$\begin{cases} 4x = 2k\pi + \pi - x \\ 4x = 2k\pi - \pi + x \end{cases}$$

$5x = 2k\pi + \pi$

$$\boxed{x = \frac{2k\pi}{5} + \frac{\pi}{5}}$$

$3x = 2k\pi - \pi$

$$\boxed{x = \frac{2k\pi}{3} - \frac{\pi}{3}}$$

ج) $\sin 5x + \sin x = 0$

$\sin 5x = -\sin x$

$\sin 5x = \sin(-x)$

$\sin u = \sin \alpha$

$u = 2k\pi + \alpha \rightsquigarrow 5x = 2k\pi + (-x) \quad 6x = 2k\pi \quad \boxed{x = \frac{k\pi}{3}}$

$u = 2k\pi + \pi - \alpha \rightsquigarrow 5x = 2k\pi + \pi - (-x) \quad 4x = 2k\pi + \pi$

$\boxed{x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}}$

د) $\sin x - \cos 2x = 0$

$\cancel{\sin x} = \cos 2x$

$\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \cos 2x$ $\ldots, 2k\pi, k\pi$ بذار، آشتی ، $-\frac{k\pi}{2}$ ، $-2k\pi$ ، $-k\pi$

$\cos u = \cos \alpha$

$u = 2k\pi \pm \alpha \rightsquigarrow \frac{\pi}{2} - x = 2k\pi \pm 2x$

$$\begin{cases} \frac{\pi}{2} - x = 2k\pi + 2x \rightsquigarrow -3x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \rightsquigarrow x = \frac{2k\pi}{-3} + \frac{\pi}{6} = \boxed{\frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = x} \\ \frac{\pi}{2} - x = 2k\pi - 2x \rightsquigarrow \boxed{x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}} \end{cases}$$

ه) $\cos^2 x - \sin x = \frac{1}{4}$

$$1 - \sin^2 x - \sin x = \frac{1}{4} \longrightarrow \sin^2 x + \sin x + \frac{1}{4} - 1 = 0$$

$$\sin^2 x + \sin x - \frac{3}{4} = 0 \xrightarrow{\sin x = t} t^2 + t - \frac{3}{4} = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{(1)^2 - 4(-\frac{3}{4}) = 4}}{2(1) = 2} = \frac{-1 \pm 2}{2}$$

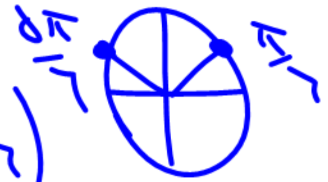
$$\longrightarrow t_1 = \boxed{\frac{1}{2} = \sin x}$$

$$\longrightarrow t_2 = -\frac{3}{2} = \sin x \quad \text{غقق}$$

$$\sin x = \frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6}$$

$$\sin u = \sin \frac{\pi}{6} \longrightarrow u = 2k\pi + \alpha \longrightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{6}$$

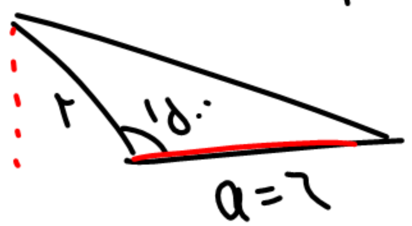
$$u = 2k\pi + \pi - \alpha \longrightarrow x = 2k\pi + \left(\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}\right)$$

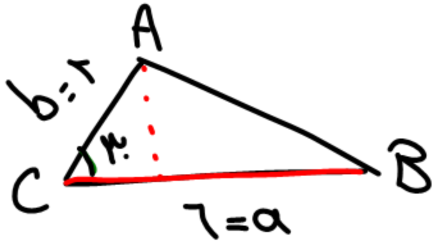


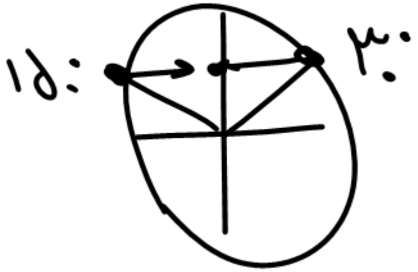
مساحت مثلثی برابر ۳ واحد مربع است. اگر دو ضلع آن ۲ و ۶ باشند. چند مثلث به این صورت می‌توان ساخت؟

$$S = \frac{1}{2} ab \sin \hat{C} \longrightarrow 3 = \frac{1}{\cancel{2}}(\cancel{2})(6) \sin \hat{C}$$

$$\frac{1}{2} = \sin \hat{C}$$



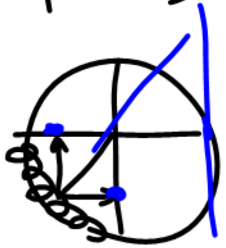




اگر $\sin\theta = \frac{-5}{13}$ و θ در ناحیه سوم باشد حاصل $\sin 2\theta$ ، $\cos 2\theta$ ، $\tan 2\theta$ ؟

$\cos\theta = \frac{-12}{13}$

$\tan\theta = \frac{5}{12}$



$\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

$$\sin 2\theta = 2\left(\frac{-5}{13}\right)\left(\frac{-12}{13}\right) = \frac{120}{169}$$

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$

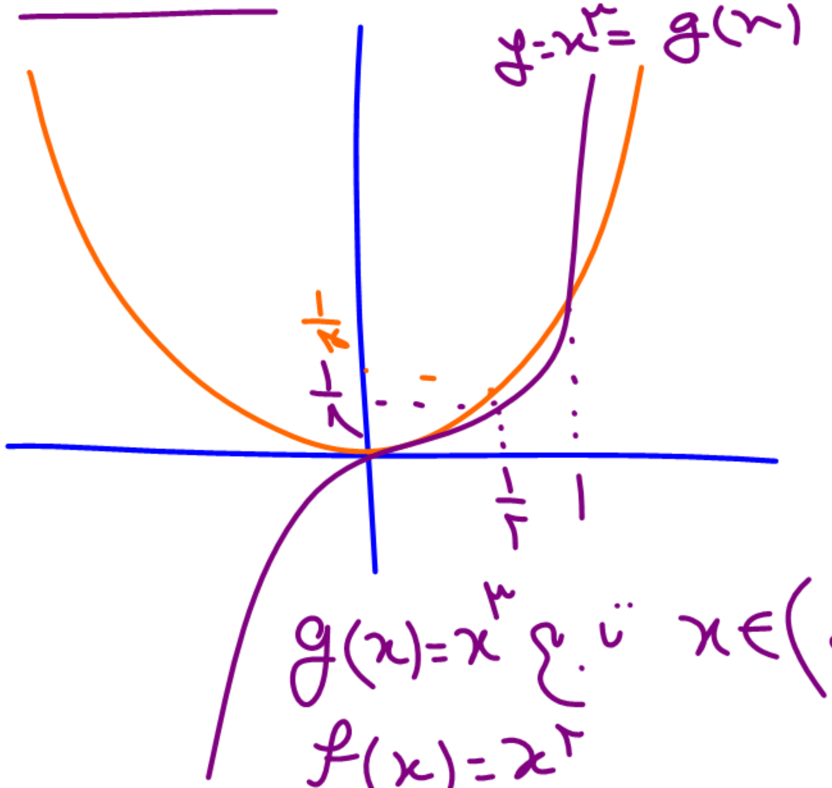
$$= \left(\frac{-12}{13}\right)^2 - \left(\frac{-5}{13}\right)^2$$

$$= \frac{144}{169} - \frac{25}{169} = \frac{119}{169}$$

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$$

$$= \frac{2\left(\frac{5}{12}\right) = \frac{5}{6}}{1-\left(\frac{5}{12}\right)^2}$$

دو تابع $f(x)=x^2$, $g(x)=x^3$ را در یک دستگاه مختصات رسم کنید در آن‌ها را مقایسه کنید.



$\text{if } 0<x<1 \rightsquigarrow x^2 > x^3$

$\text{if } x=0 , x=1 \longrightsquigarrow x^2 = x^3$

$\text{if } x>1 \rightsquigarrow x^2 < x^3$

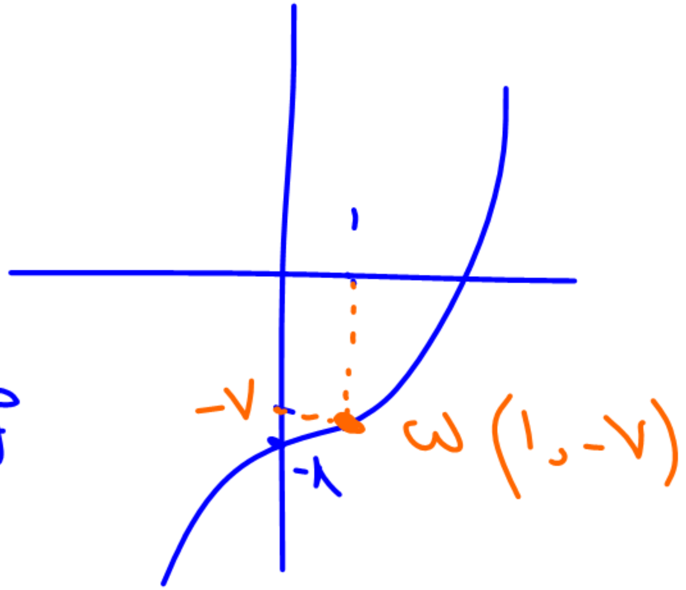
در بازه $x\in(0,1)$ تابع $g(x)=x^3$ از تابع $f(x)=x^2$ پایین‌تر است.

تابع $f(x)=x^3-3x^2+3x-8$ را به کمک انتقال توابع رسم کنید.

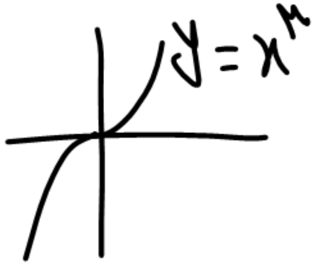
$$(x+1)^3=x^3+3x^2+3x+1$$

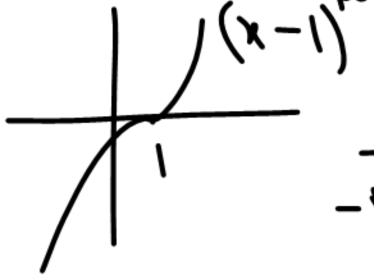
$$(x-1)^3=x^3-3x^2+3x-1$$

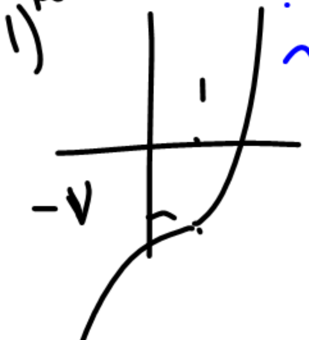
$$f(x)=(x^3-3x^2+3x-1)-7=(x-1)^3-7$$



همان x^3 که یک واحد به سمت راست رفته و از آن جا ۷ واحد پایین رفته

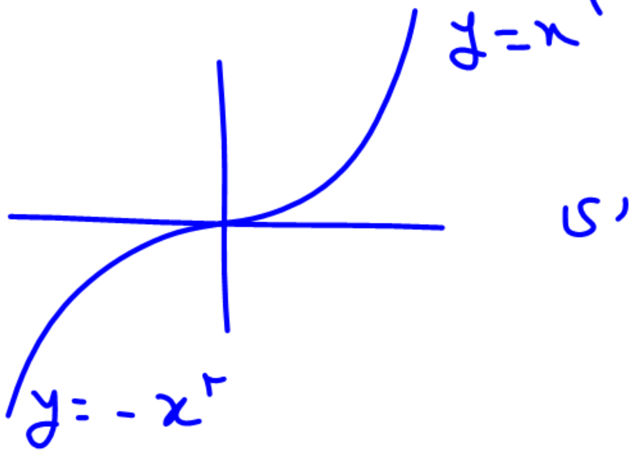






تابع $f(x)=x|x|$ مفروض است. مشخص کنید که از نظر صعودی یا نزولی بودن چگونه است؟

$$f(x)=x|x|=\begin{cases} x(x)=x^2 & x\geq 0 \\ x(-x)=-x^2 & x<0 \end{cases}$$



اکیداً صعودی

تابع $f(x)=|x-1|+|x-2|$ را رسم کنید و در مورد رفتار صعودی - نزولی آن در بازه های مختلف بحث کنید.

$$f(x)=|x-1|+|x-3|=\begin{cases} x<1 & y=-x+1-x+3=-2x+4 \\ 1\leqslant x\leqslant 3 & y=x-1-x+3=2 \\ x>3 & y=x-1+x-3=2x-4 \end{cases}$$

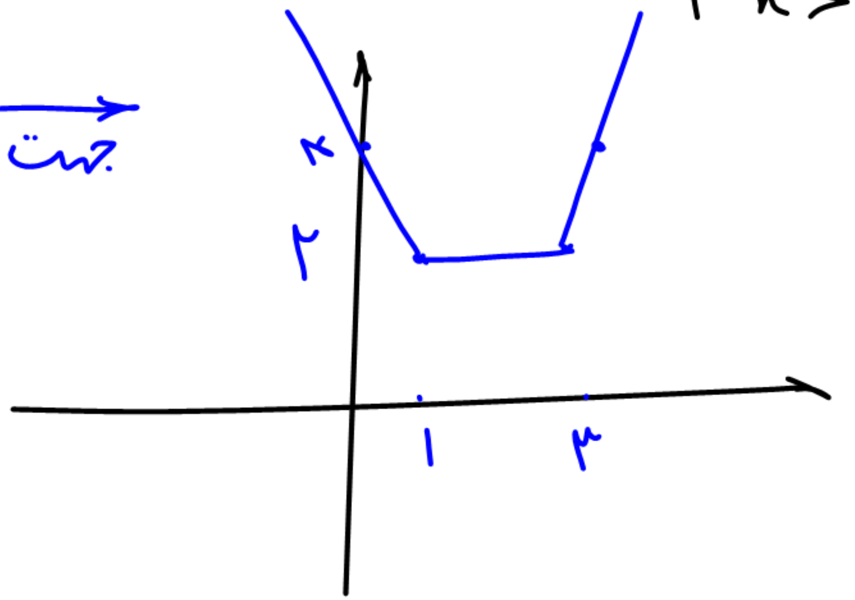
اکیداً نزولی

ثابت

اکیداً صعودی

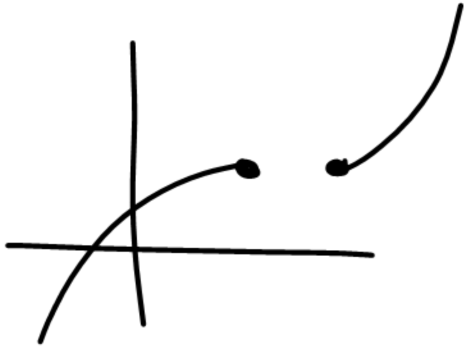
$x=1$ $x=3$

جهت نگاه کردن →



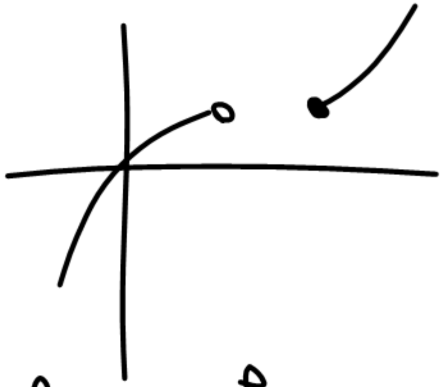
$x<3$ نزولی

$x>1$ صعودی



صعودی

$x_1 < x_2 \longrightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

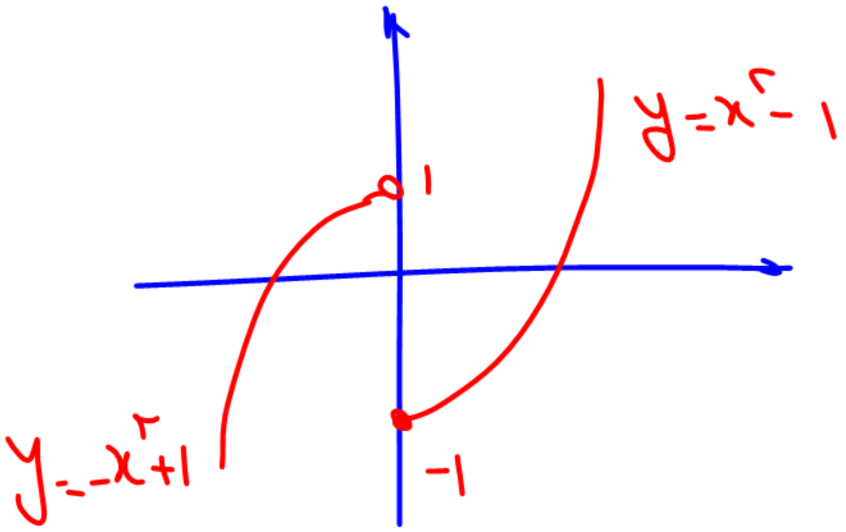


اکیداً صعودی

$x_1 < x_1 \longrightarrow f(x_1) < f(x_2)$

تابع مقابل از نظر صعودی نزولی چگونه است؟

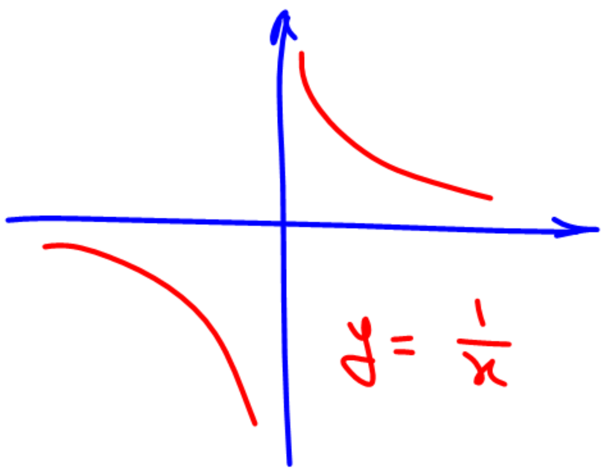
$$f(x)=\begin{cases} x^2-1 & x\geq 0 \\ -x^2+1 & x<0 \end{cases}$$

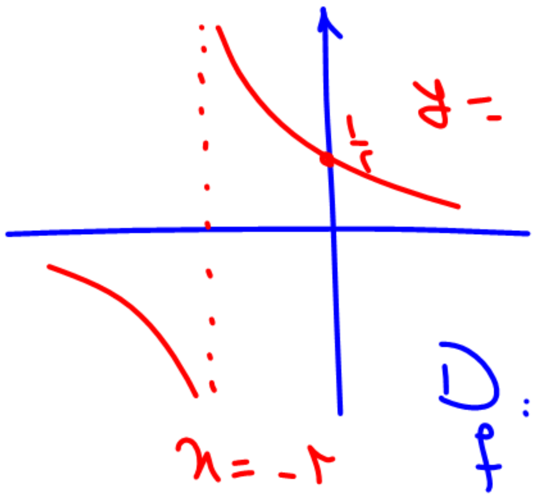


هر شاخه به تنهایی اکیداً صعودیه ولی کل تابع روی $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی نیست در کل غیر یکنوا است.

تابع $f(x)=\frac{1}{x+2}$ را به کمک انتقال رسم کنید در مورد رفتار صعودی نزولی آن توضیح دهید.

همان $y=\frac{1}{x}$ است که ۲ واحد به سمت چپ رفته است.





هر شاخه به تنهایی اکیداً نزولیه $y=\frac{1}{x+2}$

ولی روی $\mathbb{R}$ غیر یکنواخت.

$D_f:\mathbb{R}-\{-2\}$

داستان انتقال توابع:

$$y = \underset{3}{a}\, f(\underset{2}{b}x + \underset{1}{c}) + \underset{4}{d}$$

کافی است به ترتیب بلاهای زیر را روی $f(x)$ بیاوریم:

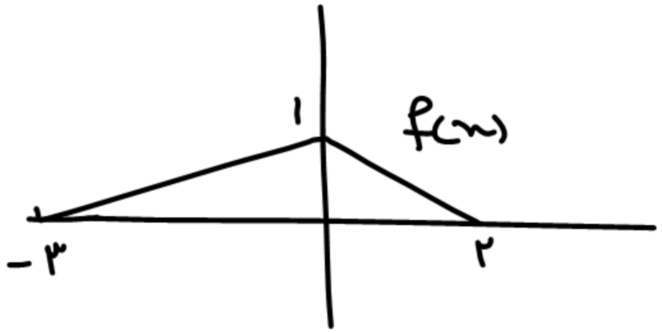
1) c واحد به چپ یا راست

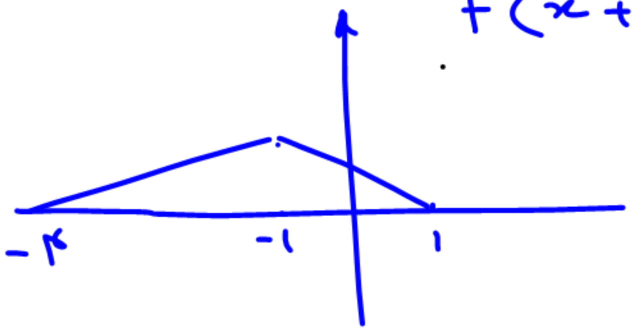
2) x ها تقسیم بر $|b|$ اگر $b<0$ بود شکل قرینه نسبت به y ها

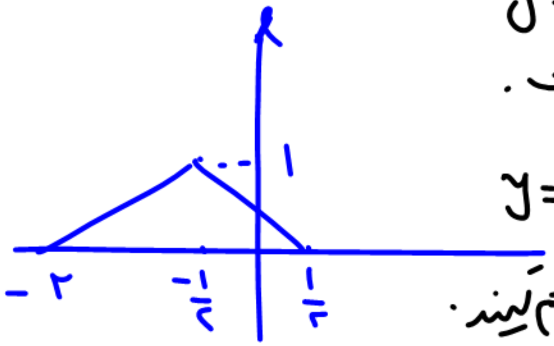
3) عرض ها a برابر اگر $a<0$ بود شکل قرینه نسبت به x ها

4) d واحد به بالا یا پایین

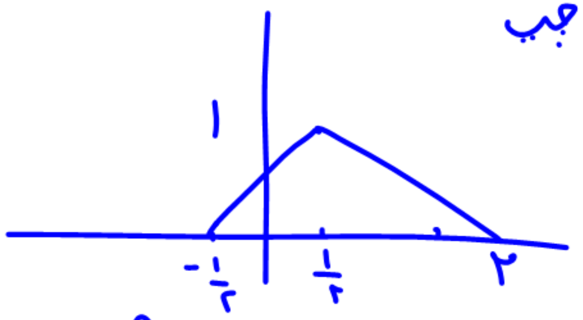
نمودار $y=f(x)$ رسم شده است. $y=-2f(-2x+1)$ را به کمک انتقال رسم کنید.

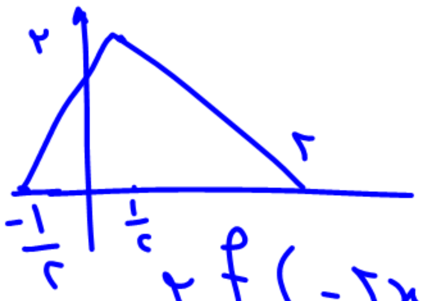


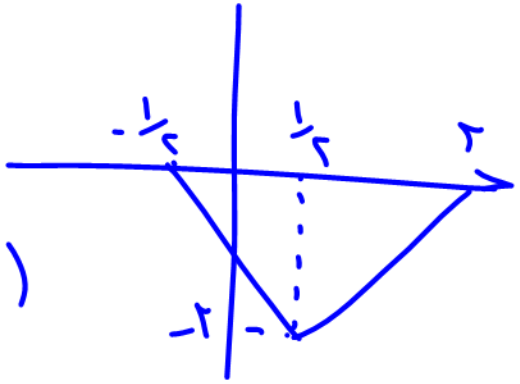




$f(x) \xrightarrow{\text{یک واحد به چپ}} f(x+1) \xrightarrow{\text{x ها تقسیم بر ۲}} f(2x+1)$







$f(-2x+1) \longrightarrow 2f(-2x+1) \longrightarrow -2f(-2x+1)$

ترکیب توابع و دامنه آن :

$$D_{fog} = D_{f(g(x))} = \{ x \in D_g \ , \ g(x) \in D_f \}$$

$$D_{gof} = D_{g(f(x))} : \{ x \in D_f \ , \ f(x) \in D_g \}$$

تابع $f(x)=\sqrt{x-4}\geq 0$ ، $g(x)=\frac{1}{x^2-1}$ داده شده است. دامنه fog و gof را بدست آورید.

$D_g: \mathbb{R}-\{\pm 1\}$ $\quad$ $D_f: x\geq 4$

$$D_{fog}=D_{f(g(x))}=\{x\in D_g \,,\, g(x)\in D_f\}=\{x\in \mathbb{R}-\{\pm1\} \text{ و } \frac{1}{x^2-1}\geq 4\}$$

$$\frac{1}{x^2-1}-4\geq 0$$

$$\frac{1-4x^2+4}{x^2-1}\geq 0$$

$$\frac{-4x^2+5}{x^2-1}\geq 0$$

x	$-\infty$		$-\sqrt{\frac{5}{4}}$		-1		1		$\sqrt{\frac{5}{4}}$		$+\infty$
$\frac{-4x^2+5}{x^2-1}\geq 0$		$-$	0	$+$		$-$		$+$	0	$-$	
				ج				ج			

$$D_{fog}:\left[-\sqrt{\frac{5}{4}},\sqrt{\frac{5}{4}}\right]-[-1,1]$$

$-\sqrt{\frac{5}{4}}$ $\quad$ -1 $\quad$ 1 $\quad$ $\sqrt{\frac{5}{4}}$

$f(x) = \sqrt{x-4}$

$x \geq 4$

$g(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$

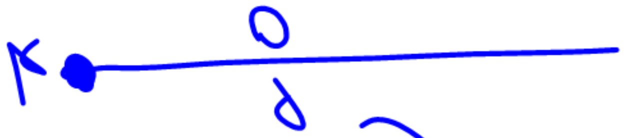
$D_g : \mathbb{R} - \{\pm 1\}$

$D_{gof} = D_{g(f(x))} = \{x \in D_f \overset{و}{\cap} f(x) \in D_g\}$

$\{x \geq 4 \cap \sqrt{x-4} \in \mathbb{R} - \{\pm 1\}\}$

$\sqrt{x-4} = -1$ غ‌ق‌ق

$\sqrt{x-4} = 1 \rightarrow x-4 = 1 \rightarrow x = 5$



$D_{gof} : [4, 5) \cup (5, +\infty)$

اگر $f(x)=3x+1$ و $g(x)=x^3-1$ باشد. حاصل عبارات زیر را بدست آورید: (۲ نمره)

الف) $(g\circ f)^{-1}(-9)=?$

ب) $(g^{-1}\circ f^{-1})(11)=(f\circ g)^{-1}(11)=?$

الف) $g\circ f=g(f(x))=f^3(x)-1=(3x+1)^3-1=-9 \longrightarrow (3x+1)^3=-9+1=-8$

$3x+1=-2 \quad 3x=-3 \quad \boxed{x=-1}$

جواب الف $=-1$

ب) $g^{-1}\circ f^{-1}=(f\circ g)^{-1}(11)=?$

$f\circ g=f(g(x))=3g(x)+1=11$

$3(x^3-1)+1=11$

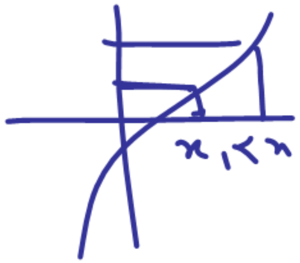
$3x^3-3=10 \rightarrow 3x^3=13 \quad x^3=\frac{13}{3} \quad x=\sqrt[3]{\frac{13}{3}}$

جواب ب $=\sqrt[3]{\frac{13}{3}}$

کدام جمله درست و کدام نادرست است.

الف) اگر تابعی متناوب باشد، وارون پذیر نیست. ✓ چون یک به یک نیست وارون پذیر نیست

ب) هر تابع اکیداً صعودی، صعودی هم هست. ✓



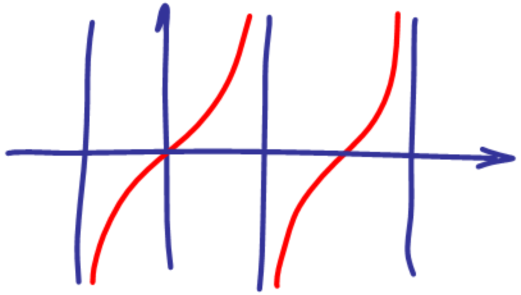
$x_1<x_2$ $f(x_1)<f(x_2)$

ج) هر تابع صعودی، اکید صعودی هم هست. غ

صعودیه ولی اکید صعودی نیست

د) تابع متناوب، هرگز اکید یکنوا نیست. ✓

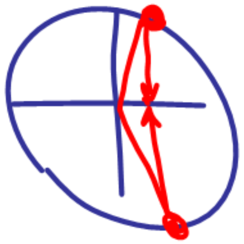
$f(x+T)=f(x)$ $T\neq$.



ه) تابع $y = \tan x$ اکیداً صعودی است. غ

و) روی یک دور دایره، تنها یک بار کسینوس برابر $\frac{1}{3}$ می‌شود. غ

۲ بار می‌شود.



ز) اگر تابعی اکیداً صعودی باشد، خط‌های مماس بر آن با جهت مثبت محور xها زاویه حاده می‌سازند. ✓