



# آموزش آنلاین

## ریاضی جامع کنکور

(دهم – یازدهم – دوازدهم)

به روش انحصاری

I.P.P.P & P.B.L

مدرس: دکتر سامان سلامیان

بانک تست مبتنی + درس + نکته + تست + امتحان نهایی

**به نام خردمند خردآفرین**

مجموعه حاضر برای کلاس‌های آنلاین سالانه کنکور تجربی و حسابان رشته ریاضی دوره متوسطه دوم، گردآوری و تنظیم شده است. هدف این مجموعه؛ نجات مخاطب از یادداشت‌برداری و نوشتن جزوه در طول کلاس است. مطالب مفهومی و تکمیلی و نکات کنکوری سال‌های دهم و یازدهم و دوازدهم به صورت مبحثی و فصل به فصل آورده شده است. در کلاس آنلاین فرصتی برای گفتن و نوشتن جزوه نداریم. البته برای حل مثال‌های سر کلاس و مقایسه میزان یادگیری دانش‌آموزان برای حل مسئله‌ها به طور آنلاین زمانی در کلاس خواهیم گذاشت ولی فرصت نوشتن تمیز و با وسواس نخواهیم داد. پس این جزوه؛ گزارش اتفاقات هر جلسه درس خواهد بود. با توجه به اهمیت یافتن امتحان نهایی و نمره تشریحی درس ریاضی؛ به کمک جلسات ویژه امتحان نهایی و درسنامه‌های همراه با تمرین‌های تشریحی امتحانات کشوری؛ بدنه اصلی درس برای آمادگی امتحانات تشریحی مدرسه و نهایی ارائه می‌شود که دانش‌آموزان دوازدهم قدرت و توان برگه نویسی موثر برای امتحان مدرسه و تسلط بر کتاب وزارتخانه آموزش و پرورش را کسب کنند و سپس با حل تمرین‌ها و تست‌های متنوع؛ نکات کنکوری و جالبی که در کنکورهای آزمایشی استاندارد طرح می‌شود؛ آموزش داده می‌شود. روش تدریس در کلاس منطبق بر آخرین تغییرات کتاب درسی وزارتخانه آموزش و پرورش و بخشنامه‌های سازمان سنجش آموزش کشور است. با توجه به سابقه ربع قرن تدریس ریاضیات کنکور «روش مفهومی» و «حل مسئله به کمک حل مسئله» در این مجموعه به کار گرفته شده است که در تمام این سال‌ها موفق بوده است. تکلیف (Homework) در انتهای هر درس تست‌ها و تمرین‌های متعددی همراه با پاسخ تشریحی بسیار گویا و دقیق گذاشته شده که خارج از کلاس و به صورت خودآموز هم می‌توانند راهگشای حل مسئله‌ها و حل تست‌های جدید باشند. سعی شده است که دانش‌آموز با کار کردن کامل این مجموعه به هیچ سوال جدیدی از نظر محتوا در مدرسه و امتحان و کنکور آزمایشی و سراسری برخورد نکند و پوشش کامل بر نکات داخل کتاب و حاشیه امن خارج از کتاب داشته باشد. اگر قصد دارید در ابتدای شروع کلاس‌ها به خودتان قول دهید که «امسال ریاضی را (می‌خوانم)» با من همراه نشوید؛ زیرا اصلاً ریاضی خواندنی نیست؛ بلکه نوشتنی و مسئله حل‌کردنی و توضیح‌دانی است. ریاضی را به این نیت یاد بگیرید که قرار است به کسی درس بدهید. مهمترین ابزار موفقیت در ریاضی؛ تمرین کردن و حل مسئله به کمک نوشتن در چرکنویس؛ توضیح دادن به خود یا یک شاگرد خیالی و حل مسئله‌های جدید است. سوالات مجموعه؛ سوالات رایج امتحانات مدارس برتر تهران؛ سوالات و تست‌های تالیفی؛ تست‌های کنکور سراسری و آزمون‌های آزمایشی استاندارد است؛ به طوری که با سلیقه طراحان مختلف در تمام کشور آشنا خواهید شد. همراهی آنلاین و بدون غیبت در کلاس آنلاین؛ حضور پر رنگ و شرکت فعال در بحث‌های کلاس و گروه رفع اشکال؛ حل همه تکالیف و مقایسه و تحلیل جواب‌ها با پاسخنامه؛ تنها راه گرفتن نمره کامل «بیست» در آزمون و درصد خوب در آزمونهای تستی است. اگر در ریاضی به مرحله‌ای رسیدید که؛ حل یک مسئله شما را شاد کرد و ذوق زده شدید و یا با خواندن و حل یک تست به طراح آن تست «آفرین» گفتید که با چه روش جالبی؛ فلان موضوع را پنهان کرده است یا مورد سوال قرار داده؛ یعنی اینکه دارید؛ مسیر یادگیری ریاضی را درست می‌پیمایید. تکرار می‌کنم پیشرفت در ریاضی فقط با «حل مسئله» و «تکرار و تمرین» امکان‌پذیر است. بدون کاغذ چرکنویس و تمام کردن خودکارهای متعدد؛ ریاضی شما رشد نمی‌کند. تدریس به خود یا شاگرد واقعی یا حتی خیالی با صدای بلند نیز در رشد مهارت‌های ریاضی شما موثر است. سعی کنید؛ تکالیف (Homework) پاسخنامه‌دار آخر هر درس هر فصل را؛ خودتان حتماً حتماً حل کنید و به کمک پاسخنامه نمره یا درصد برای خود حساب کنید. مثل قد و وزن خود که آن را می‌دانید؛ دانستن درصد یادگیری ریاضی خودتان در هر لحظه شما را به پیشرفت علاقه‌مندتر خواهد ساخت. در هر قسمت از درس ابتدا قسمت‌های مشترک هر دو رشته تدریس می‌شود و قسمت‌های محدود مرتبط با رشته ریاضی و حسابان جداگانه تدریس می‌شود. دانش‌آموزان رشته ریاضی مطالب هندسه تالس و تشابه و آمار و شمارش و احتمال را می‌توانند با این مجموعه دوره کنند و به صورت مهمان سر کلاس باشند البته که این مطالب را در کلاس هندسه و جبر و احتمال و گسسته خود کامل‌تر خواهند خواند. البته می‌توانند در جلساتی که این مباحث تدریس می‌شوند به‌عنوان میهمان سر کلاس باشند.

این مجموعه برای راهنمای تدریس معلمان ریاضی سراسر کشور و دانشجویان دانشگاه فرهنگیان گرایش دبیری ریاضی توصیه می‌شود. استفاده از این مجموعه با ذکر منبع بلامانع است و در غیر این صورت ایراد شرعی و اخلاقی دارد.

**بهر روز باشید.****دکتر سامان سلامیان**

## فهرست مندرجات

عنوان	صفحه
<b>فصل صفر</b>	
معرفی دستگاه مختصات و مختصات یک نقطه .....	۱
<b>تابع</b>	
زوج مرتب .....	۴۹
تابع گویا .....	۸۰
تابع رادیکالی .....	۹۷
جزء صحیح .....	۱۰۶
تابع مرکب .....	۱۲۰
قدر مطلق .....	۱۴۱
تبدیل نمودار توابع .....	۱۷۷
توابع چند جمله‌ای .....	۲۱۳
توابع صعودی و نزولی .....	۲۴۵
<b>معادله درجه دو، سهمی، معادله گویا و گنگ</b>	
معادله درجه دوم .....	۲۹۹
رابطه بین ریشه‌های یک معادله درجه دوم .....	۳۰۹
معادله دو مجذوری (درجه چهار) .....	۳۳۴
نامعادله‌ها - تعیین علامت .....	۳۴۸
نمودار تابع درجه دوم .....	۳۵۸
تقسیم و روابط آن .....	۳۹۲
<b>مثلثات</b>	
نسبت‌های مثلثاتی .....	۳۹۹
جهت مثلثاتی .....	۴۱۵
واحدهای کمان و زاویه .....	۴۳۰
نسبت‌های مثلثاتی $\alpha$ و $-\alpha$ (قرینه) .....	۴۳۶
روابط بین نسبت‌های مثلثاتی .....	۴۵۲
نسبت‌های مثلثاتی $\alpha \pm \beta$ (ویژه حسابان) .....	۴۶۵
فرمول‌های کمان $2\alpha$ .....	۴۸۴
معادلات مثلثاتی .....	۵۰۷
دوره تناوب .....	۵۵۱
تانژانت .....	۵۹۱
<b>حد و پیوستگی</b>	
حد .....	۶۲۱
حالت صفر صفرم .....	۶۴۴
حد بی‌نهایت .....	۶۹۶

عنوان	صفحه
حد در بی نهایت.....	۷۲۸
پیوستگی.....	۷۵۹
پیوستگی در بازه.....	۷۶۸
همسایگی.....	۷۷۳
همسایگی چپ و راست.....	۸۱۲
<b>مشتق</b>	
آشنایی با مفهوم مشتق.....	۸۲۲
محاسبه مشتق.....	۸۳۶
ساده سازی و سپس مشتق گیری.....	۸۵۷
مشتق توابع شامل قدرمطلق.....	۸۹۲
مشتق پذیری و پیوستگی.....	۹۱۴
آهنگ تغییر.....	۹۷۸
<b>کاربرد مشتق</b>	
توابع صعودی و نزولی - بررسی جهت تغییرات تابع.....	۱۰۲۱
نقاط بحرانی.....	۱۰۳۱
اکسترمم مطلق.....	۱۰۵۵
اکسترمم نسبی.....	۱۰۸۰
بررسی نمودارها.....	۱۱۱۰
بهینه سازی.....	۱۱۳۵
عطف و تقعر (ویژه رشته ریاضی).....	۱۱۶۸
<b>هندسه</b>	
تفکر تجسمی و آشنایی با مقاطع مخروطی.....	۱۲۶۲
بیضی.....	۱۲۹۵
دایره.....	۱۳۱۶
وضعیت یک نقطه و دایره نسبت به هم.....	۱۳۳۳
احتمال کل دوازدهم.....	۱۳۹۵
شمارش بدون شمردن.....	۱۴۱۸
فاکتوریل.....	۱۴۲۵
جایگشت.....	۱۴۲۹
ترکیب.....	۱۴۴۱
احتمال.....	۱۴۵۹
احتمال شرطی.....	۱۴۸۴
پیشامد مستقل.....	۱۵۰۴
آمار.....	۱۵۲۱
تابع نمایی و لگاریتمی.....	۱۵۴۴
تالس و تشابه.....	۱۵۵۰
الگو و دنباله.....	۱۵۸۰

## ریاضیات پایه دوازدهم

### فصل صفر

صفحه دکارت

معرفی دستگاه مختصات و مختصات یک نقطه:

نقطه  $A(x, y)$  (دولفه اول)

(ایگرگ، ایکس)  $A$

(عرض، طول)  $A$

طیفه (....., .....)

$A$  (....., .....)

بالا یا پایین  $\rightarrow$  جلوی یا عقب روی محور انقی روی محور قائم

چهارم	سوم	دوم	اول	ناحیه یا ربع
+	-	-	+	x
-	-	+	+	y

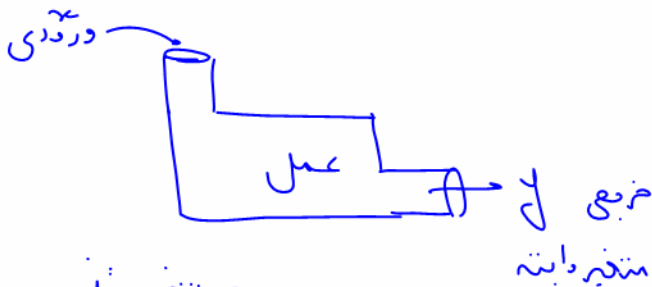
**تمرین:** اگر نقطه  $A(m+2, 2m-1)$  در ناحیه چهارم دستگاه مختصات باشد و  $m \in (a, b)$  بیشترین مقدار  $b-a$  کدام است؟

$m \in \emptyset$  (۴)                       $\frac{5}{2}$  (۳)                       $\frac{3}{2}$  (۲)                       $\frac{1}{2}$  (۱)

$A \begin{cases} x = m + 2 > 0 & m > -2 & \text{(الف)} \\ y = 2m - 1 < 0 & m < \frac{1}{2} & \text{(ب)} \end{cases}$

$(-2, \frac{1}{2})$                        $b - a = \frac{1}{2} - (-2) = \frac{5}{2}$

تابع  $y = f(x)$  چیست؟  $\rightarrow$  تابعی از  $x$  است  $\rightarrow$  بیرون و در بنانه روی  $x$  است.

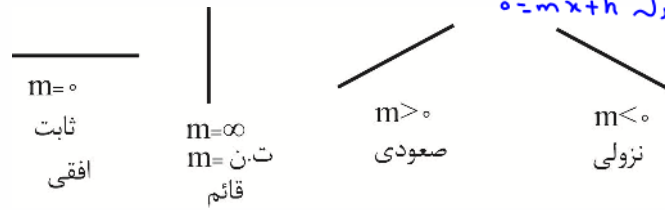
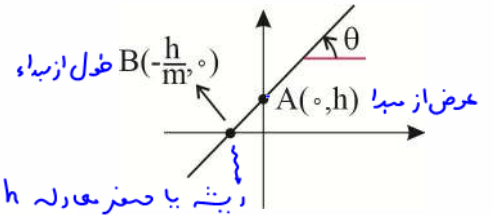


$x$  متغیر مثل  
 $\rightarrow$  دیزودن ایکه، اول ایسی جنبه دیناش  
 $\rightarrow$  عوض متغیر وی جنبه

جهت نگاه کردن به نمودار  
چپ به راست

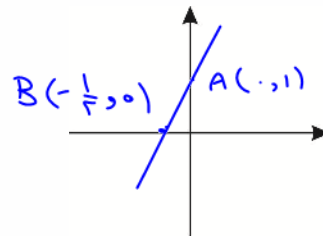
معادله خط راست یا تابع خطی:

عرض از مبدأ  
 $y = f(x) = mx + h$   
شیب یا ضریب زاویه =  $\tan \theta$

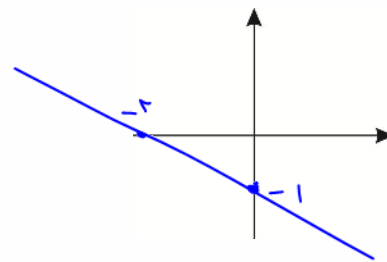


رسم خط: با ۲ نقطه

x	صفر	$-\frac{1}{2}$
$y = 2x + 1$	$y = 1$ A(0, 1)	صفر B(-1/2, 0)

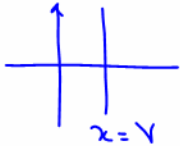


x	صفر	-2
$y = -\frac{x}{2} - 1$	-1	صفر



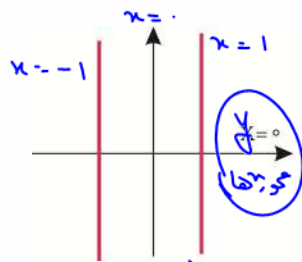
شکل تابع: هر خط موازی محور y ها

تابع را حد التشریک جابجایی کنه

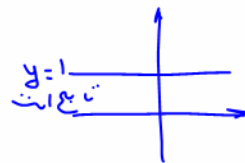


$x = 2$

تابعیت در این خط تمام شکل را در بی نهایت جا قطع کرد

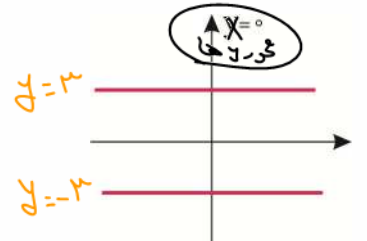


خط قائم  $x = k$   
موازی محور y ها  
تابع نیست

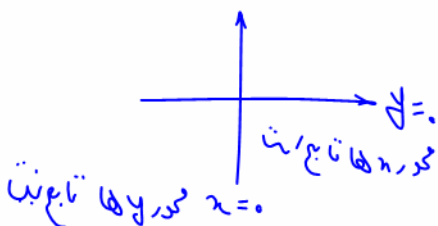


$y = 1$   
تابع است

خطهای خاص:

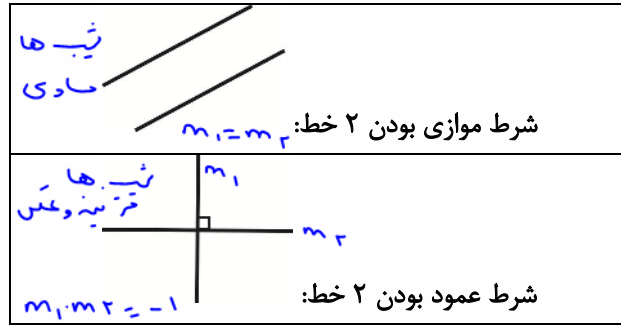


خط افقی  $y = k$   
موازی محور x ها  
تابع است



محور x ها تابع نیست

**توجه:** دو خط  $y = m_1x + h_1$  و  $y = m_2x + h_2$  را در نظر بگیرید:



$$\begin{cases} y = 2x + 1 \\ 3y + 7x + 9 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x + 1 \\ 3y = -7x - 9 \\ y = -\frac{7}{3}x - 3 \end{cases}$$

دو خط موازیند.

موازی

$$\begin{cases} y = 2x + 1 \\ y = 2x - 7 \end{cases}$$

عمود

$$\begin{cases} y = 2x + 1 \\ y = -\frac{1}{2}x + 8 \end{cases}$$

$$m_1 = -\frac{1}{m_2}$$

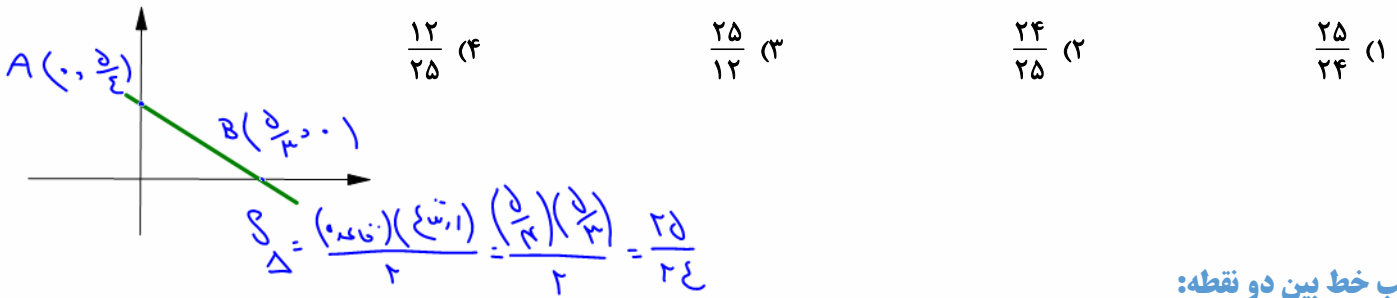
صورت دیگر معادله خط:

$$ax + by + c = 0$$

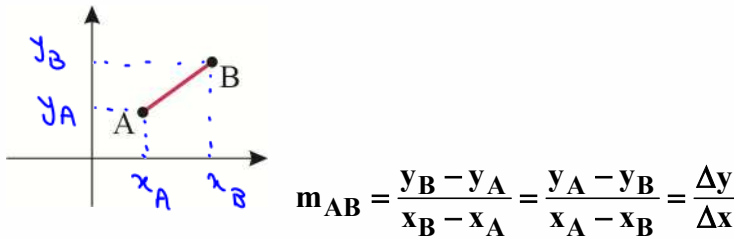
$$by = -ax - c \Rightarrow y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

گیراننداره حصر شده

**تمرین:** مساحت محصور بین خط  $3x + 4y = 5$  و محورهای مختصات کدام است؟

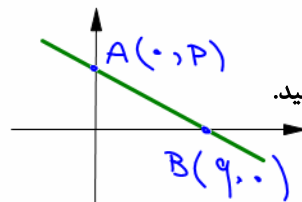


شیب خط بین دو نقطه:



نوشتن معادله خط با داشتن دو نقطه  $A(x_A, y_A)$  و  $B(x_B, y_B)$ :

$$y - y_A = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} (x - x_A)$$



**تمرین:** معادله خط عبوری از نقاط  $A(0, p)$  و  $B(q, 0)$  را بنویسید.

جائدهای

$$y - p = \frac{0 - p}{q - 0} (x - 0)$$

جواب سؤال که بهتر است آن را شیب بنویسیم 😊

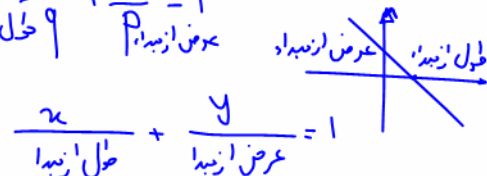
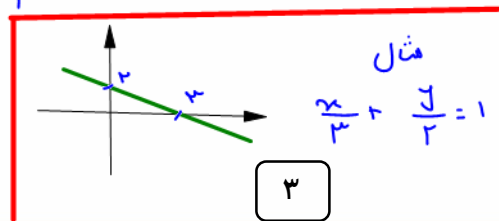
$$y = -\frac{p}{q}x + p$$

طرف تقسیم بر ۹

$$9y = -px + pq \Rightarrow px + 9y = pq$$

$$\frac{x}{q} + \frac{y}{p} = 1$$

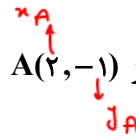
عرض از مبدا ۹      طول از مبدا ۹



نوشتن معادله خط با داشتن یک نقطه و شیب:

$$y - y_A = m(x - x_A)$$

تمرین: معادله خط عبوری از  $A(2, -1)$  که عمود بر خط  $3x + 4y = 1$  می باشد، کدام است؟



تقسیم بر 4

$$4y = -3x + 1$$

$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{4}$$

عکس دقتیبه

$$m' = \frac{4}{3}$$

$$-1 - (-1) = \frac{4}{3}(x - 2)$$

$$-1 + 1 = \frac{4}{3}x - \frac{8}{3}$$

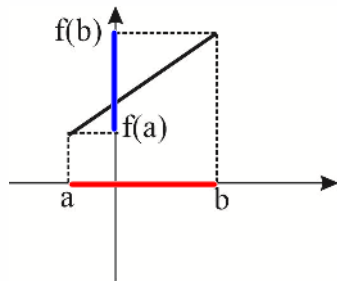
$$0 = \frac{4}{3}x - \frac{8}{3} - 1 = \frac{4}{3}x - \frac{11}{3}$$

$$3 \cdot \frac{4}{3}x = 11$$

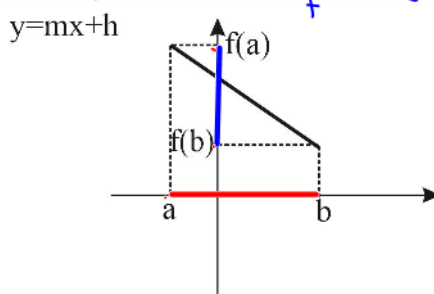
$$4x - 3y = 11$$

دامنه و برد خط  $y = mx + h$

Domain دامنه: محدوده تغییرات  $x$   
Range برد: محدوده تغییرات  $y$



$m > 0$  صعودی



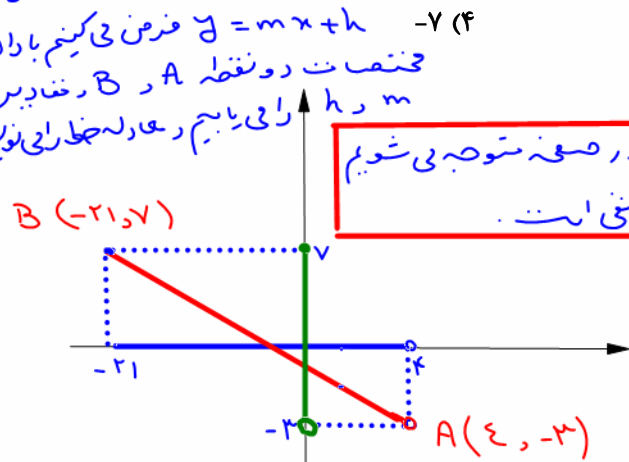
$m < 0$  نزولی

دامنه  $D_f : [a, b]$   
برد  $R_f : [f(a), f(b)]$

دامنه  $D_f : [a, b]$   
برد  $R_f : [f(b), f(a)]$

نقطه نزولی یا صعودی  
تمرین: یک تابع خطی با دامنه  $[-21, 4]$  و برد  $[-3, 7]$  مفروض است، حاصل  $[3f(1)]$  کدام است؟ (نماد  $[]$  جزء صحیح است). عدله خط را

$y = mx + h$  فرض می کنیم با داشتن مختصات دو نقطه  $A$  و  $B$  در تقاطع  $h$  و  $m$  را می یابیم و عدله خط را می نویسیم



بجای گذاشتن  $A$  و  $B$  در معده متوجه می شویم که خط نزولی با شیب منفی است.

نقطه پُر یا خط پُر بسته بودن بازه

نقطه نزولی یا صعودی  
تمرین: یک تابع خطی با دامنه  $[-21, 4]$  و برد  $[-3, 7]$  مفروض است، حاصل  $[3f(1)]$  کدام است؟ (نماد  $[]$  جزء صحیح است). عدله خط را

تابع خطی  $y = mx + h$

نقطه  $A \left\{ \begin{aligned} -3 &= 4m + h \\ 7 &= -21m + h \end{aligned} \right.$

ضرب در منفی

$$\begin{cases} 3 = -4m - h \\ + 7 = -21m + h \end{cases}$$

$$10 = -25m$$

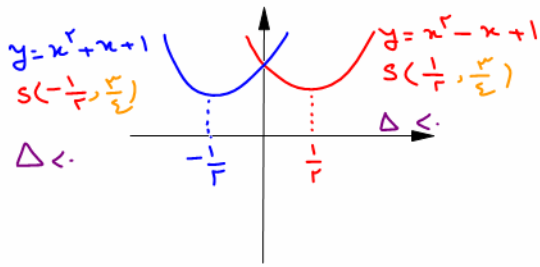
$$m = -\frac{2}{5}$$

$$f(x) = -\frac{2}{5}x - \frac{7}{5}$$

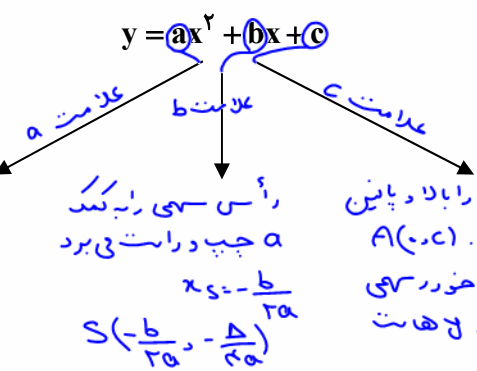
$$f(1) = -\frac{2}{5} - \frac{7}{5} = -\frac{9}{5}$$

$$[3f(1)] = [-\frac{27}{5}] = -5.4$$



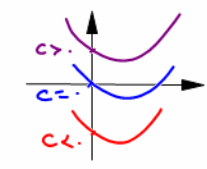


معرفی تابع درجه دوم یا ۳ جمله‌ای درجه ۲ یا سهمی:  $f(x) = ax^2 + bx + c$



با زدن دهنه سهمی است هر چه  $|a|$  بیشتر باشد دهنه بزرگتر است.  $a < 0$  و  $a > 0$   
 و  $a = 0$  تبدیل به خط  $y = bx + c$  می‌شود.

رأس سهمی را بیابید  
 $x_s = -\frac{b}{2a}$   
 $S(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a})$

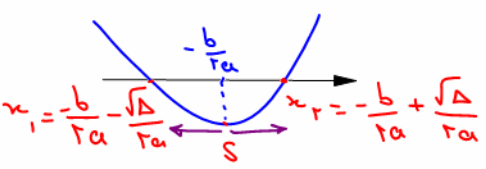


نکات مهم:

$\Delta = b^2 - 4ac$ :  
 $\Delta > 0$ : ۲ ریشه  
 $\Delta = 0$ : یک ریشه  
 $\Delta < 0$ : ریشه حقیقی ندارد.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$$

یک معادله درجه دو  $\Delta = 0$  ریشه دارد.  
 ریشه یا صفر معادله در صورت وجود: به صورت متقابل است.

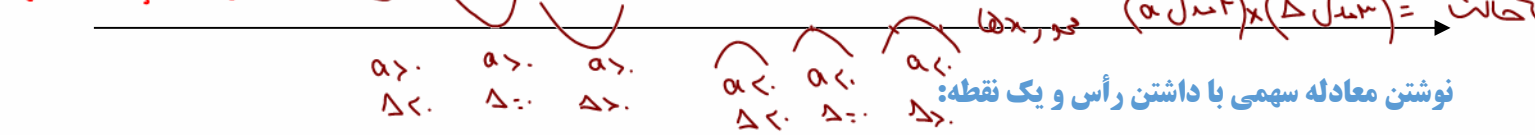


جمع ریشه‌ها در صورت وجود:  $S = -\frac{b}{a}$   
 ضرب ریشه‌ها در صورت وجود:  $P = \frac{c}{a}$   
 معادله محور تقارن:  $x_s = -\frac{b}{2a}$   
 مختصات رأس:  $S(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a})$

اکسترمم: مینیمم یا ماکزیمم در منظر عرض یا  $y$  آن است.  
 $\frac{4ac - b^2}{4a} = y_s = -\frac{\Delta}{4a}$

ویژگی مهم: هر دو نقطه هم عرض روی سهمی طول هایشان نسبت به  $x_s = -\frac{b}{2a}$  قرین است. باز  $x_s$  به یک نامدهات دامنه:  $D_f = \mathbb{R}$

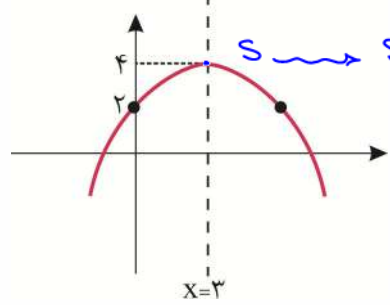
برد: از  $y \leq -\frac{\Delta}{4a}$  به بالا یا به پایین  $y \geq -\frac{\Delta}{4a}$  برد  
 حالات کلی: شش مدل سهمی داریم:



نوشتن معادله سهمی با داشتن رأس و یک نقطه:

$$y = a(x - x_s)^2 + y_s$$

تمرین: معادله سهمی مقابل را بنویسید. کافی است در فرمول تن جانمایی کنیم.



رأس  $S(3, 4)$   
 یک نقطه  $A(0, 2)$

$$y = a(x - x_s)^2 + y_s$$

$$y = a(x - 3)^2 + 4$$

$$2 = a(0 - 3)^2 + 4$$

$$-2 = 9a$$

$$a = -\frac{2}{9}$$

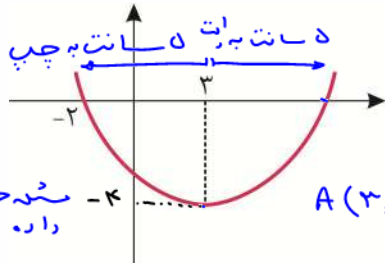
$$y = -\frac{2}{9}(x - 3)^2 + 4$$

جواب:

نوشتن معادله سهمی با داشتن دو ریشه:

ریشه اول      ریشه دوم  
 $y = a(x - x_1)(x - x_2)$

**تمرین:** اگر معادله شکل مقابل  $y = ax^2 + bx + c$  باشد،  $f(-1)$  کدام است؟



دو ریشه:  $x_1 = 3 - 5 = -2$        $x_2 = 3 + 5 = 8$

نقطه  $S(3, -4)$  روی سهمی است:

$y = a(x - x_1)(x - x_2)$

$A(3, -4) \in y = a(x - (-2))(x - 8)$

$-4 = a(3+2)(3-8)$

$-4 = -25a$

$\frac{4}{25} = a$        $f(x) = \frac{4}{25}(x+2)(x-8) \rightarrow f(-1) = \frac{4}{25}(-9) = -\frac{36}{25}$

نوشتن معادله سهمی با داشتن ۳ نقطه:

یک راه طولانی این است که  $y = ax^2 + bx + c$  را در نظر گرفته و با صدق دادن مختصات سه نقطه و حل سه معادله سه مجهول  $a$  و  $b$  و  $c$  را پیدا می‌کنیم. اما راه ساده‌تر:

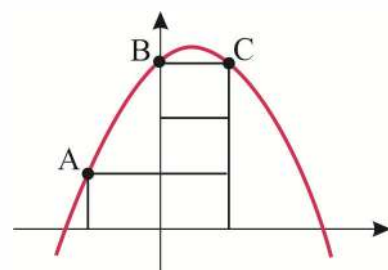
**تمرین:** معادله یک سهمی بنویسید که از نقاط  $A(2, 4)$  و  $B(0, 3)$  و  $C(-1, 2)$  بگذرد.

راه اول:  $3 \times 3 = 9$  اول  
 $f(x) = ax^2 + bx + c$   
 $f(2) = 4a + 2b + c = 4$   
 $f(0) = 0 + 0 + c = 3 \rightarrow c = 3$   
 $f(-1) = a - b + c = 2$   
 $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + 3$

بین ۲ تا از نقطه‌ها به رابعه خطی بنویس (کار خط با نقطه بنویس)  
 $\begin{cases} 4a + 2b + 3 = 4 \\ a - b + 3 = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4a + 2b = 1 \\ a - b = -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4a + 2b = 1 \\ 4a - 4b = -4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4a + 2b = 1 \\ 6b = 5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4a + 2b = 1 \\ b = \frac{5}{6} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4a + 2(\frac{5}{6}) = 1 \\ 4a + \frac{5}{3} = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4a + \frac{5}{3} = 1 \\ 4a = 1 - \frac{5}{3} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4a + \frac{5}{3} = 1 \\ 4a = -\frac{2}{3} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4a = -\frac{2}{3} \\ a = -\frac{1}{6} \end{cases}$

روش ساده‌تر: حله بعد 😊

**تمرین:** چهار مربع به ضلع ۲ مانند شکل کنار یکدیگر قرار دارند. یک سهمی از نقاط  $A$ ،  $B$  و  $C$  عبور کرده و محور  $x$ ها را در دو نقطه قطع می‌کند. فاصله نقاط تقاطع چند است؟



- ۷ (۱)
- $2\sqrt{13}$  (۲)
- $5\sqrt{2}$  (۳)
- $3\sqrt{7}$  (۴)
- ۸ (۵)