هندسه دوازدهم

فصل ۱ : ماتریس ها

ماتریسی که m سطر و n ستون دارد، ماتریس از مرتبهٔ $m\times n$ (بخوانید m در n) است.

در حالت کلی، ماتریس A از مرتبهٔ $m\times n$ را به صورت زیر نشان می‌دهیم:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

اغلب ماتریس بالا را به صورت $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ می‌نویسیم $(1\le i\le m \text{ و } 1\le j\le n)$. به a_{ij} درایهٔ عمومی ماتریس A می‌گوییم.

۱ اگر $A=[a_{ij}]_{2\times 2}$ و برای $i=j$ داشته باشیم $a_{ij}=7$، برای $i>j$ داشته باشیم $a_{ij}=5$ و برای $i<j$ داشته باشیم $a_{ij}=-2$، مجموع درایه‌های ماتریس A چقدر است؟

۱) ۸ ۲) ۱۳ ۳) ۱۵ ۴) ۱۷

$$2\times 7+5+(-2)=17$$

۲ مجموع درایه‌های ستون دوم ماتریس $A=[2i^2-3j]_{3\times 3}$ چقدر است؟

۱) ۱۰ ۲) ۸ ۳) ۱۶ ۴) ۱۲

$$2(1)^2-3(2)=2-6=-4$$
$$2(2)^2-3(2)=8-6=2$$
$$2(3)^2-3(2)=18-6=12$$
$$12+2-4=10$$

ماتریس بالامثلثی = بالای قطر اصلی = ۰
ماتریس پایین مثلثی = پایین قطر اصلی = ۰

ماتریس صفر ماتریسی است که تمام درایه‌های آن صفر است. ماتریس صفر را با $\bar{O}$ نشان می‌دهیم.

ماتریس سطری ماتریسی است که یک سطر دارد. در حالت کلی مرتبهٔ ماتریس سطری به صورت $1\times n$ است.

ماتریس ستونی ماتریسی است که یک ستون دارد. در حالت کلی مرتبهٔ ماتریس ستونی به صورت $m\times 1$ است.

ماتریس مربعی ماتریسی است که تعداد سطرها و ستون‌های آن با هم برابرند.

$$a_{ij}\begin{cases} i=j \rightarrow \text{روی قطر اصلی است } a_{ij} \\ i<j \rightarrow \text{بالای قطر اصلی است } a_{ij} \\ i>j \rightarrow \text{پایین قطر اصلی است } a_{ij} \\ i+j=n+1 \rightarrow \text{روی قطر فرعی است } a_{ij} \end{cases}$$

ماتریس قطری ماتریسی مربعی است که تمام درایه‌های بالا و پایین قطر اصلی آن صفر است. به عبارت دیگر،

$$A \Leftrightarrow A=[a_{ij}]_{n\times n},\quad (i\neq j \Rightarrow a_{ij}=0)$$

ماتریس قطری است.

ماتریس اسکالر ماتریسی قطری است که درایه‌های روی قطر اصلی آن با هم برابرند.

ماتریس همانی (واحد) ماتریس اسکالری است که درایه‌های روی قطر اصلی آن برابر ۱ است. ماتریس همانی از مرتبهٔ n را با I_n نشان می‌دهیم. به عبارت دیگر اگر $\delta_{ij}=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$، آن‌گاه $I_n=[\delta_{ij}]_{n\times n}$.

۳ اگر دو ماتریس $A=\begin{bmatrix} x-y & 9 \\ 2 & z-1 \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} 3 & x+y \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ مساوی باشند، مقدار $x+y+z$ چقدر است؟

۱) -1 ۲) ۹ ۳) ۱۵ ۴) ۱۸

۴ اگر $[i]_{۲\times۲}+[i^{۲}-۳j]_{۲\times۲}=\begin{bmatrix} m & -۶ \\ -۱ & n \end{bmatrix}$، مقدار $m+n$ چقدر است؟

۱) -۶ ۲) -۵ ۳) -۷ ۴) صفر

$\begin{bmatrix} -۲ & -۵ \\ ۰ & -۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} m & -۶ \\ -۱ & n \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}$

$-۲=m+۱ \rightarrow m=-۳$

$-۲=n+۲ \rightarrow n=-۴$

$۱^{۲}-۳=۱-۳=-۲$

$۱^{۲}-۳\times۲=۱-۶=-۵$

$۲^{۲}-۳\times۱=۴-۳=۱$

$۲^{۲}-۳\times۲=۴-۶=-۲$

۱) $A+B=B+A$ (خاصیت جابه‌جایی جمع)،

۲) $A+(B+C)=(A+B)+C$ (خاصیت شرکت‌پذیری جمع)،

۳) $A+\bar{O}=\bar{O}+A=A$ (عضو خنثی برای عمل جمع)،

۴) $A+(-A)=(-A)+A=\bar{O}$ (خاصیت عضو قرینه)،

۵) $r(A\pm B)=rA\pm rB$،

۶) $(r\pm s)A=rA\pm sA$،

۷) $(rs)A=r(sA)$،

۸) $۱A=A$،

۹) $۰A=\bar{O}$ و $r\bar{O}=\bar{O}$،

۱۰) اگر $rA=rB$ و $r\neq۰$، آن‌گاه $A=B$ و

۱۱) اگر $A=B$، آن‌گاه $rA=rB$.

۵ اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۲ & ۰ \end{bmatrix}$ و $۲A-B=I$، ماتریس B کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۳ & ۰ \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۴ & ۱ \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ ۴ & -۱ \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۱ & -۱ \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} ۲ & -۲ \\ ۴ & ۰ \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۵ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ ۴ & -۱ \end{bmatrix}$

$A_{n\times m} \times B_{m\times k} = AB_{n\times k}$

۶ اگر $A=[i-j]_{۲\times ۲}$، $B=[i+j]_{۲\times ۲}$ و ماتریس‌های X و Y جواب‌های دستگاه $\begin{cases} X+Y=A \\ X-Y=B \end{cases}$ باشند، مجموع درایه‌های ماتریس $۲X+Y$ چقدر است؟

۱) ۸ ۲) ۷ ۳) ۱۱ ۴) ۶

$۲Y = A-B$

$۲X = A+B$

$A=\begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$ $A+B=\begin{bmatrix} ۲ & ۲ \\ ۴ & ۴ \end{bmatrix}$ $+$ $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}$

$B=\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}$ $\frac{A-B}{۲}=\begin{bmatrix} -۲ & -۴ \\ -۲ & -۴ \end{bmatrix}\times\frac{۱}{۲}=\begin{bmatrix} -۱ & -۲ \\ -۱ & -۲ \end{bmatrix}$

$۱+۲+۳=۶$

۷ اگر A ماتریسی از مرتبهٔ ۳×۴، C ماتریسی از مرتبهٔ ۳×۵ باشد و $AB=C$، مرتبهٔ ماتریس B کدام است؟

۱) ۳×۴ ۲) ۳×۵ ۳) ۵×۴ ۴) ۴×۵

$A_{۳\times ۴} \times B_{۴\times ۵} = C_{۳\times ۵}$

۸ اگر ضرب ماتریسی $A_{۲\times ۳}(B_{m\times n}C_{۳\times ۵})$ تعریف شده باشد، مقدار $m+n$ چقدر است؟

۱) ۶ ۲) ۵ ۳) ۹ ۴) ۸

BC $m\times ۵$ — ۳ — ۳

تعریف بندی $AB=BA$ ← اتحادها همادتند

در حالت کلی $AB\neq BA$

۹ اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & -۲ & m \end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix} m+۱ \\ ۳ \\ -۲ \end{bmatrix}$ و $A\times B=-۷$، مقدار m کدام است؟

$A_{۱\times ۳}$ $B_{۳\times ۱}$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) -۲ ۴) ۱۲

$\begin{bmatrix} ۱ & -۲ & m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} m+۱ \\ ۳ \\ -۲ \end{bmatrix} = m+۱+(-۶)-۲m$

$-m-۵=-۷$

$-m=-۲ \rightarrow m=۲$

$(AB)C = A(BC)$

$A \times (A+B) = A \times C$

۱۰ مجموع ریشه‌های معادلهٔ $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & 2 & 1 \\ 1 & -x & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) -3 ۴) -4

$\begin{bmatrix} -x+2-1 & -2-2x+1 & -1+0+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$

$-x^2+x-2-4x+0 = 0$

$+x^2+3x+2=0$

$(x+1)(x+2)=0$

$x=-1, \quad x=-2$

۱۱ اگر $A=\begin{bmatrix} a & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix} -2 & 10 \\ b & -8 \end{bmatrix}$ و $AB-BA=\bar{O}$، مقدار $a+b$ چقدر است؟

۱) ۱۰ ۲) ۸ ۳) ۱۲ ۴) ۱۴

$AB = \begin{bmatrix} -2a+5b & 10a-40 \\ -4+3b & 20-24 \end{bmatrix}$

$10a-40=20 \rightarrow 10a=60 \rightarrow a=6$

$5b-24=-4$

$5b=20$

$b=4$

$BA = \begin{bmatrix} -12+20 & -10+10 \\ ab-16 & 5b-24 \end{bmatrix}$

۱۲ اگر $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$، حاصل A^3+A^4 کدام است؟

۱) $\bar{O}$ ۲) I ۳) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ۴) A

$A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix}$

$AB=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} aa'+bc' & ab'+bd' \\ ca'+dc' & cb'+dd' \end{bmatrix}$

$BA=\begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} aa'+b'c & a'b+b'd \\ c'a+d'c & c'b+dd' \end{bmatrix}$

$AB=BA$

$aa'+bc'=aa'+b'c$

$bc'=b'c$

$\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$

$ab'+bd'=a'b+b'd$

$bd'-a'b=b'd-ab'$

$b(d'-a')=b'(d-a)$

$\frac{b}{b'}=\frac{d-a}{d'-a'}=\frac{c}{c'}$

۱۳ اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ و مجموع درایه‌های ماتریس A^n برابر ۱۳۹۹ باشد، مقدار n کدام است؟

۱) ۱۳۹۵ ۲) ۱۳۹۶ ۳) ۱۳۹۷ ۴) ۱۳۹۸

$A^2=A\times A=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$

$A^3=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۳ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$

$A^n=\begin{bmatrix} ۱ & n \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$

$۱+n+۱+۰=۱۳۹۹$

$n=۱۳۹۹-۲=۱۳۹۷$

$$A_{m\times n}\times B_{n\times q}=C_{m\times q}$$

۱) در حالت کلی ضرب ماتریس‌ها خاصیت جابه جایی ندارد. یعنی همیشه حاصلضرب دو ماتریس AB و BA با هم برابر نیستند.

۲) اگر $A=\lfloor a_{ij}\rfloor_{m\times n}$ ، $B=\lfloor b_{ij}\rfloor_{n\times p}$ ، $C=\lfloor c_{ij}\rfloor_{p\times q}$ آنگاه ضرب ماتریس‌ها خاصیت شرکت‌پذیری دارد.

یعنی:

$$A(BC)=(AB)C$$

۳) اگر $A=\lfloor a_{ij}\rfloor_{m\times n}$ ، $B=\lfloor b_{ij}\rfloor_{n\times p}$ ، $C=\lfloor c_{ij}\rfloor_{n\times p}$ باشند، ضرب ماتریس‌ها خاصیت پخشی دارد. یعنی:

$$A(B+C)=AB+AC$$

۴) اگر I_n ماتریس همانی $n\times n$ باشد، آنگاه:

$$A_{n\times n}\times I_n=I_n\times A_{n\times n}=A_{n\times n}$$

عضو خنثی

$A^2\times A=A\times A^2=A^3$

۱۴ اگر A و B دو ماتریس هم‌مرتبه باشند، $AB=B$ و $BA=A$، حاصل $A(A+B)^{۲}B$ کدام است؟

۱) $۴B$ ۲) $۴A$ ۳) $۴(A+B)$ ۴) $A^{۳}$

$AB=B^{A}$, $BA=A^{B}$

$ABA=BA$, $A^{۲}=A$

$A(A+B)(A+B)B$

$(A^{۲}+AB)(AB+B^{۲})=(A+B)(۲B)$

$=۲AB+۲B^{۲}=۴B$

۱۵ اگر $A=\begin{bmatrix}\tan x & -۱\\ \frac{۱}{\cos^{۲}x} & -\tan x\end{bmatrix}$، حاصل $A^{۳۰}+A^{۲۰}+A^{۱۰}$ برابر کدام است؟

۱) I ۲) $۳I$ ۳) $-I$ ۴) $-۳I$

$(A^{۲})^{۱۵}+(A^{۲})^{۱۰}+(A^{۲})^{۵}$

$-I+I-I$

$\begin{bmatrix}\tan x & -۱\\ \frac{۱}{\cos^{۲}x} & -\tan x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tan x & -۱\\ \frac{۱}{\cos^{۲}x} & -\tan x\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\tan^{۲}x-\frac{۱}{\cos^{۲}x} & -\tan x+\tan x\\ ۰ & -۱\end{bmatrix}$

$۱+\tan^{۲}x$

$\frac{۱}{\cos^{۲}x}\times\tan x-\tan x\times\frac{۱}{\cos^{۲}x}$

$A^{۲}=\begin{bmatrix}-۱ & ۰\\ ۰ & -۱\end{bmatrix}=-I$

$-۱-\tan^{۲}x+۲\tan^{۲}x$

۱۶ اگر $A=\begin{bmatrix}-۲ & ۱\\ ۵ & ۴\end{bmatrix}$ و $A^{۲}=\alpha A+\beta I_{۲}$، دوتایی (α,β) کدام است؟

۱) $(۱۱,۲)$ ۲) $(۲,۱۳)$ ۳) $(۴,۱۱)$ ۴) $(۴,۱۳)$

$\begin{bmatrix}-۲ & ۱\\ ۵ & ۴\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۲ & ۱\\ ۵ & ۴\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۹ & ۲\\ ۱۰ & ۲۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۲\alpha & ۹\\ ۵\alpha & ۴\alpha\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\beta & ۰\\ ۰ & \beta\end{bmatrix}$

$\alpha=۲$

۱۷ اگر $A^۲=\begin{bmatrix}۰ & ۳\\ ۳ & ۳\end{bmatrix}$، $B^۲=\begin{bmatrix}۷ & ۳\\ ۹ & ۷\end{bmatrix}$ و $A+B=\begin{bmatrix}۳ & ۲\\ ۲ & ۳\end{bmatrix}$، ماتریس $AB+BA$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix}۲ & ۲\\ ۲ & ۱\end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix}۶ & ۶\\ ۰ & ۳\end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix}۳ & ۳\\ ۳ & \frac{۳}{۲}\end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix}۱ & ۴\\ ۵ & ۲\end{bmatrix}$

$(A+B)^۲=(A+B)(A+B)=A^۲+AB+BA+B^۲$

$(A+B)^۲-\begin{bmatrix}۳ & ۲\\ ۲ & ۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۳ & ۲\\ ۲ & ۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱۳ & ۱۲\\ ۱۲ & ۱۳\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}۷ & ۶\\ ۱۲ & ۱۰\end{bmatrix}$

۱۸ اگر $A=\begin{bmatrix}۱ & ۱ & ۰\\ -۱ & ۱ & ۱\\ ۰ & -۲ & -۱\end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix}۱ & x & -۱\\ ۱ & ۱ & x\\ x & ۱ & -۱\end{bmatrix}$ و $C=\begin{bmatrix}۲ & ۱ & ۰\\ ۱ & ۰ & ۱\\ ۰ & -۱ & ۰\end{bmatrix}$ باشد، به ازای کدام مقدار $D=ABC$ است؟

دی ۱۴۰۱

x، مجموع درایه‌های قطر اصلی و فرعی ماتریس D برابر هستند؟

۱) -۴ ۲) -۳ ۳) ۵ ۴) ۶

$\begin{bmatrix}۱ & ۱ & ۰\\ -۱ & ۱ & ۱\\ ۰ & -۲ & -۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & x & -۱\\ ۱ & ۱ & x\\ x & ۱ & -۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲ & x+۱ & -۱+x\\ x & -x+۲ & x\\ -۲-x & -۳ & -۲x+۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲ & ۱ & ۰\\ ۱ & ۰ & ۱\\ ۰ & -۱ & ۰\end{bmatrix}$

$-۴-۲x-۴$

$\begin{bmatrix}۵+x & ۳-x & x+۱\\ x+۲ & ۰ & -x+۲\\ -۷-۲x & x-۴ & -۳\end{bmatrix}$

$-۲-x+۲x-۱$

$۲+x=-x-۶$

$۲x=-۸ \Rightarrow x=-۴$

$\begin{vmatrix}a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{vmatrix}=a\begin{vmatrix}e & f\\ h & i\end{vmatrix}-b\begin{vmatrix}d & f\\ g & i\end{vmatrix}+c\begin{vmatrix}d & e\\ g & h\end{vmatrix}$

$ei-hf \quad di-gf \quad dh-ge$

$=aei+bfg+cdh-(ceg+afh+bdi)$

۱۹

دی ۱۴۰۱

اگر $A=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 0 & -3\\ 1 & -2\end{bmatrix}$ باشد، مقدار $|A|A|$ کدام است؟

۱) -1 ۲) 1 ۳) -16 ۴) 16

$|2A|$ مرتبه ۳ $2^3|A|$

$|A|^3|A|=|A|^4$

$(-1)^4=1$

$1\begin{vmatrix}-3 & 2\\ 4 & -2\end{vmatrix}+3\begin{vmatrix}2 & -1\\ -2 & 2\end{vmatrix}$

$8-6$ $\quad 4-3=1$

$+2-3=-1$

نکته: اگر A و B دو ماتریس مربعی دلخواه باشند، داریم:

۱) $|AB|=|A||B|$ ۲) $|AB|=|BA|$

۳) $|A^n|=|A|^n$ ۴) $|A^m B^n|=|A|^m|B|^n$

ماتریس — اگر عدد بود $|kA|=k^n|A|$

نکته: دترمینان ماتریس قطری برابر است: ضرب قطرهای اصلی $\begin{vmatrix}a & 0 & 0\\ 0 & b & 0\\ 0 & 0 & c\end{vmatrix}=abc$

نکته: **اگر همه درایه‌های یک سطر یا یک ستون ماتریس A** را در عدد حقیقی مثل k ضرب کنیم. دترمینان ماتریس حاصل k **برابر دترمینان ماتریس A** می‌شود.

$$\begin{vmatrix}ka & kb & kc\\ d & e & f\\ g & h & i\end{vmatrix}=k\begin{vmatrix}a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{vmatrix}$$

نکته: اگر $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ و $k\in\mathbb{R}$ آنگاه: $|KA|=K^n|A|$

۲۰ از رابطه‌ی ماتریس $\begin{bmatrix} x \\ 2x \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ -2 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & 2x & -1 \end{bmatrix} = 0$، عدد غیر صفر x، کدام است؟

سراسری ۹۸

۱) $\frac{2}{9}$ ۲) $\frac{3}{8}$ ۳) $\frac{4}{9}$ ۴) $\frac{3}{5}$

$11x^2 - x - 2x^2 - 4x + 3x = 0$

$\begin{bmatrix} 11x-1 & -x-2 & -3x \\ 2x+8x-1 & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 2x \\ -1 \end{bmatrix}$

$11x - 1 - 2x - 4 + 3 = 0 \rightarrow 9x - 2 \rightarrow x = \frac{2}{9}$

$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ شرط وارون‌پذیری $\Rightarrow$ دترمینان $\neq 0$ — دترمینان $= 0$ ← تکین

$A^{-1} \times A = A \times A^{-1} = I$ $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ $(A^{-1})^n = (A^n)^{-1}$

$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$ $(kA)^{-1} = k(A^{-1})$

A^{-1} در $AB = C$ از سمت A^{-1} ضرب می‌شود: $B = A^{-1}C$

◀ **نکته:** دستگاه معادلات $\begin{cases} ax+by=e_1 \\ cx+dy=e_2 \end{cases}$ وقتی جواب منحصربفرد دارد که $\frac{a}{c} \neq \frac{b}{d}$ یا $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$

$|A| \neq 0$

$AX = B$ ← A^{-1} در سمت چپ ضرب می‌شود

$X = A^{-1} \times B$ ← A^{-1} در سمت چپ ضرب می‌شود

$A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

◀ **نکته:** دستگاه معادلات $\begin{cases} ax+by=e_1 \\ cx+dy=e_2 \end{cases}$ وقتی جواب ندارد که: $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 0$ یا $\frac{a}{c} = \frac{b}{d} \neq \frac{e_1}{e_2}$

$|A| = 0$

◀ **نکته:** دستگاه معادلات $\begin{cases} ax+by=e_1 \\ cx+dy=e_2 \end{cases}$ وقتی بی‌شمار جواب دارد که: $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 0$ یا $\frac{a}{c} = \frac{b}{d} = \frac{e_1}{e_2}$

$|A| = 0$

۲۱ کدام گزینه دربارهٔ دستگاه معادلات $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ درست است؟

۱) جواب ندارد یا بیشمار جواب دارد.

۲) جواب منحصربه‌فرد یا بیشمار جواب دارد.

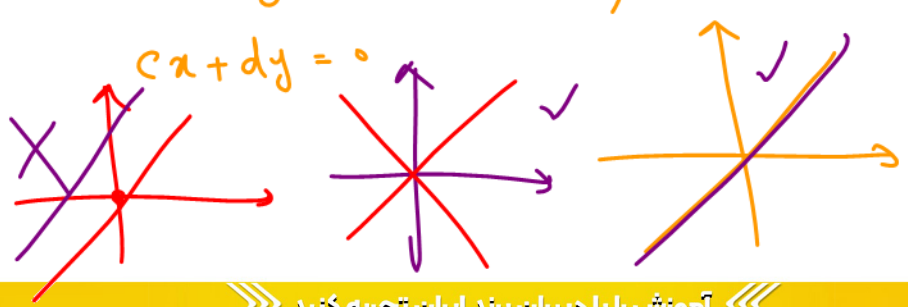
۳) جواب ندارد یا یک جواب دارد.

۴) هرگز جواب منحصربه‌فرد ندارد.

$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ حتماً یکی از جواب‌هاست

$ax + by = 0$ $(0,0)$ ← بدیهی جواب

$cx + dy = 0$



۲۲ اگر $A=\begin{bmatrix}۲ & -۱\\ ۳ & -۲\end{bmatrix}$ و $P=۲\begin{bmatrix}-۱ & ۳\\ ۲ & -۵\end{bmatrix}$ باشد، دترمینان ماتریس $(P^{-1}AP)^۶$ کدام است؟ خارج ۹۱

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۶

$$\left(|P^{-1}||A||P|\right)^۶=|A|^۶=(-۴+۳)^۶=(-۱)^۶$$

$$|P^{-1}|=\frac{۱}{|P|}$$

۲۳ اگر $D=\begin{vmatrix}۶ & ۳x & ۲x\\ ۳x & ۲x & ۶\\ ۲x & ۶ & ۳x\end{vmatrix}$ باشد، حاصل دترمینان $\begin{vmatrix}۶ & ۳x & ۲x\\ ۹ & ۲x & ۹\\ ۳x & ۴ & ۱۰\end{vmatrix}$ کدام است؟ خارج ۹۳

۱) $-۲D$ ۲) $-D$ ۳) $\frac{۱}{۲}D$ ۴) D

$$x^۲(۸x-۲۴)-x^۲(۲۴-۲۷x)+۶(۲۴-۶x)$$

$$۸x^۳-۳۶x^۲-۲۴x^۲+۲۷x^۳+۶\times۲۴-۲۴x$$

$$۲۵x^۳-۷۲x^۲-۲۴x+۱۴۴$$

با عوض کردن جای دو سطر یا دو ستون دترمینان قرینه می‌شود

$$C_۱'=C_۱-C_۲+C_۳$$

$$\begin{vmatrix}۶+۵x & ۳x & ۲x\\ ۶+۵x & ۲x & ۶\\ ۶+۵x & ۶ & ۳x\end{vmatrix}=(۶+۵x)\begin{vmatrix}۱ & ۳x & ۲x\\ ۱ & ۲x & ۶\\ ۱ & ۶ & ۳x\end{vmatrix}$$

$$I_۲'=I_۲-I_۱$$

$$I_۳'=I_۳-I_۱$$

$$=(۶+۵x)\begin{vmatrix}۱ & ۳x & ۲x\\ ۰ & -x & ۶-۲x\\ ۰ & ۶-۳x & x\end{vmatrix}$$

$$=(۶+۵x)\left(-x^۲-(۶-۲x)(۶-۳x)\right)=D$$

$$-x^۲-(۳۶-۱۸x-۱۲x+۶x^۲)$$

$$-۷x^۲-۳۰x-۳۶$$

$$-۳۵x^۳$$

۲۴ اگر $\log ۲ = k$ باشد، حاصل $\begin{vmatrix} \log(۶-۲\sqrt{۵}) & \log(۱+\sqrt{۵}) \\ -۲ & ۱ \end{vmatrix}$ کدام است؟ سراسری ۹۰

$\log^a + \log^b = \log^{ab}$

$\log^a - \log^b = \log^{\frac{a}{b}}$

۱) $۲+۴k$ ۲) $۴k$ ۳) $۱+k$ ۴) $۲k$

$(۱+\sqrt{۵})^۲ = ۱+۵+۲\sqrt{۵}$

$\log(۶-۲\sqrt{۵}) + ۲\log(۱+\sqrt{۵}) = \log(۶-۲\sqrt{۵})(۶+۲\sqrt{۵})$

$= \log^{۳۶-۲۰} = \log^{۱۶} = \log^{۲^۴} = ۴\log^۲ = ۴k$

۲۵ به ازای کدام مقدار m معادلهٔ ماتریسی $\begin{bmatrix} m & ۲ \\ ۳ & m+۵ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m+۲ \\ ۲ \end{bmatrix}$ جواب منحصر به فرد ندارد؟ خارج ۸۸

$|A| \neq ۰$

۱) -۶ ۲) -۳ ۳) ۱ ۴) ۲

$|A| = ۰$

$m^۲ + ۵m - ۶ = ۰$

$(m+۶)(m-۱) = ۰$

$m = -۶ \quad ۱$

$m=-۶ \begin{bmatrix} -۶ & ۲ \\ ۳ & -۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۴ \\ ۲ \end{bmatrix}$

$-۲ \leftarrow -۶x + ۲y = -۴$

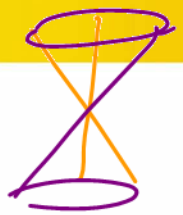
$۳x - y = ۲$

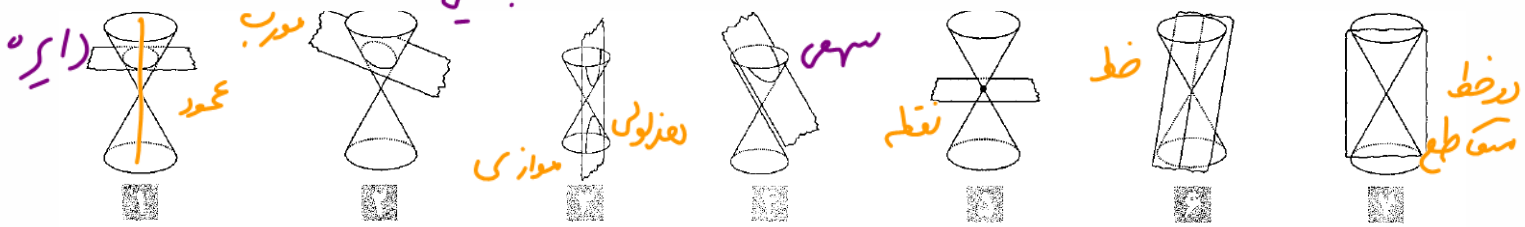
$m=۱ \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳ \\ ۲ \end{bmatrix}$

$۳ \leftarrow x + ۲y = ۳$

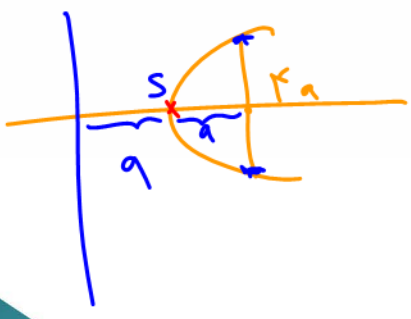
$۳x + ۴y = ۲$

مقاطع مخروطی





	مکان هندسی	صفحه	روابط
دایره	نقاطی که از یک نقطه به فاصله یکسان هستند	محور بدون گذشتن از رأس	$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2>0$ $Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0$ شرط لازم دایره بودن $A=B$
بیضی	نقاطی که مجموع فاصله آنها از دو نقطه ثابت (کانون) به فاصله یک ن (۲a) باشد	مورب، بیض، خ محور، نه موازی، محور و نه گذرنده از رأس	$OF=OF'=c$ $OA=OA'=a$ $OB=OB'=b$ $2a=$ قطر بزرگ $=$ قطر کانون $2b=$ قطر کوچک $=$ قطر ناکانون $2c=$ فاصله کانون $e=\frac{c}{a}$ خروج از مرکز $a^2=b^2+c^2$ وتر کانونی $\frac{2b^2}{a}$
سهمی	نقاطی که از یک خط (هادی) و یک نقطه (کانون) به فاصله یکسان هستند	موازی مولد، فقط یک طرف	$(x-\alpha)^2=4a(y-\beta)$ ∪ ∩ $(y-\beta)^2=4a(x-\alpha)$ ⊃ ⊂ $S\left(\alpha,\beta+a\right)$



۲۶ به ازای چه مقادیری از m ، معادله‌ی $x^2+y^2+2x-4y-m=0$ معادله‌ی یک دایره است؟

۱) $m<5$ ۲) $m>-5$ ۳) $m>4$ ۴) $m<-4$

$(x+1)^2-1+(y-2)^2-4-m=0$

$(x+1)^2+(y-2)^2=5+m>0$

$m>-5$

$d=r$ $d<r$ $d>r$

$\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ عمود

۲۷ معادله‌ی دایره‌ای به مرکز $O(2,1)$ که بر خط D به معادله‌ی $D: 3x-4y-1=0$ مماس است، به کدام صورت زیر است؟

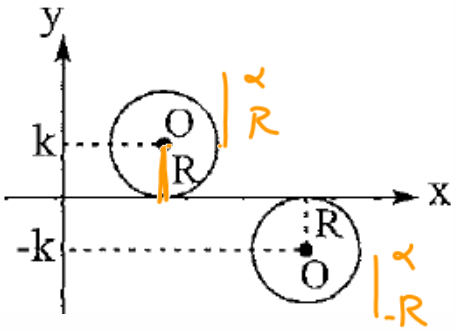
۱) $25x^2+25y^2+100x+50y=0$ ۲) $25x^2+25y^2-100x-50y+124=0$

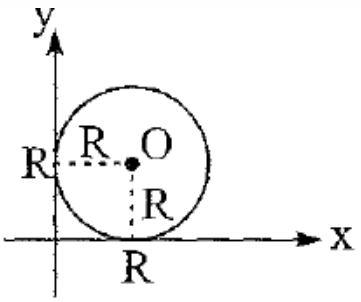
۳) $x^2+y^2-2x+4y+1=0$ ۴) $25x^2+25y^2-50x-100y-124=0$

$\frac{|3\times2-4\times1-1|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{1}{5}$ → شعاع

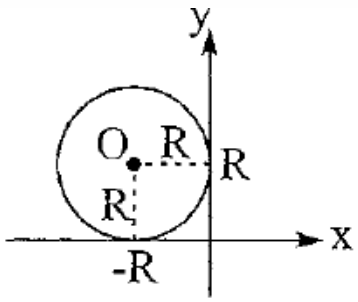
$(x-2)^2+(y-1)^2=(\frac{1}{5})^2=\frac{1}{25}$

$25x^2+25y^2-100x-50y+124=0$

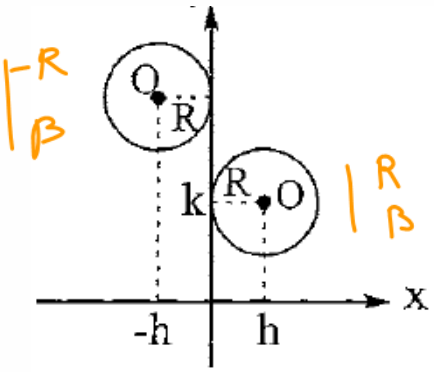


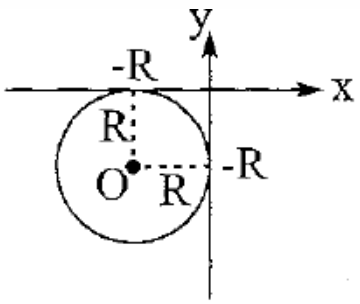


O (R,R)

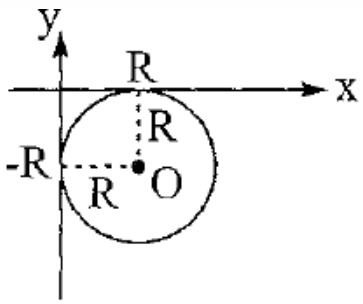


O (-R,R)





O (-R,-R)



O (R,-R)

۲۸ مکان هندسی مرکزهای همه دایره‌ها با شعاع ۲ که بر دایره ی $C(O, \bullet)$ مماس داخلی اند، کدام است؟

۱. دایره ای به شعاع ۱ ۲. دایره ای به شعاع ۲ ۳. دایره ای به شعاع ۳ ۴. دایره‌ای به شعاع ۴

۲۹ حدود m برای آن‌که نقطه‌ی $A(m, m-1)$ خارج دایره به معادله‌ی $x^2+y^2=5$ باشد، کدام است؟

۱) $-1 < m < 2$ ۲) $-2 < m < 1$

۳) $m < -1$ یا $m > 2$ ۴) $m < -2$ یا $m > 1$

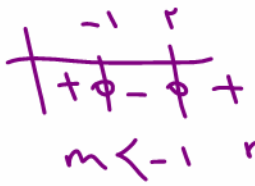
$m^2+(m-1)^2 > 5$

$m^2+m^2-2m+1 > 5$

$2m^2-2m-4 > 0$

$m^2-m-2 > 0$

$(m-2)(m+1) > 0$



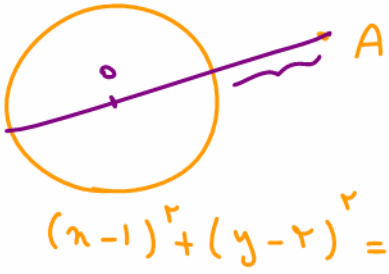
$m < -1 \quad m > 2$

$OA < 2$ $OA = 2$ $OA > 2$

۳۰ بیشترین فاصله‌ی نقطه‌ی $A(2,3)$ از دایره‌ی C به معادله‌ی $x^2+y^2-2x-4y-20=0$، کدام است؟

۱) $5+\sqrt{2}$ ۲) $2+\sqrt{5}$

۳) $10+\sqrt{2}$ ۴) $2+\sqrt{10}$



$(x-1)^2+(y-2)^2 = 5^2$

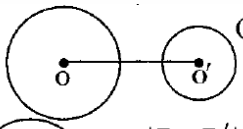
$O\left|\begin{matrix}1\\2\end{matrix}\right. \quad A\left|\begin{matrix}2\\3\end{matrix}\right.$

$OA = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$

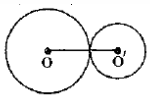
$OA + 2 = Max \Rightarrow \sqrt{2}+5$

$OA - 2 = Min$

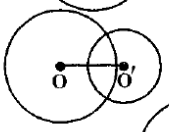
۱ دو دایره متخارج‌اند. $OO' > R + R' \rightarrow$



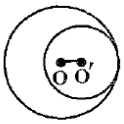
۲ دو دایره مماس خارج‌اند. $OO' = R + R' \rightarrow$



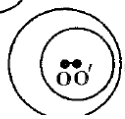
۳ دو دایره متقاطع‌اند. $|R - R'| < OO' < R + R' \rightarrow$



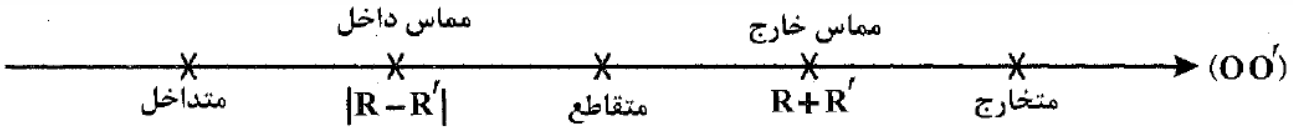
۴ دو دایره مماس داخلی‌اند. $OO' = |R - R'| \rightarrow$



۵ دو دایره متداخل‌اند. $OO' < |R - R'| \rightarrow$



۶ در مورد دایره‌های متداخل هم مرکز داریم: $OO' = 0$

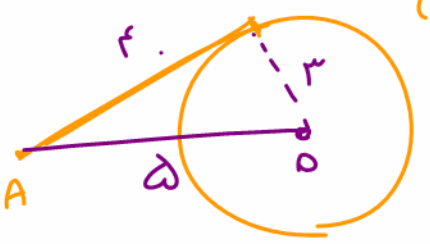


۳۱ دو دایره‌ی C و C' به معادلات روبه‌رو، نسبت به هم چه وضعیتی دارند؟

۱) متخارج
۲) متداخل
۳) متقاطع
۴) مماس خارجی

۳۲ از نقطه‌ی $A(۴,۶)$ مماسی بر دایره‌ی $x^۲ + y^۲ - ۲x - ۴y - ۴ = ۰$ رسم نموده‌ایم. طول این قطعه مماس کدام است؟

$(x-۱)^۲ + (y-۲)^۲ = ۹ = ۳^۲$



۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

$OA = \sqrt{۳^۲ + ۴^۲} = ۵$

۳۳ خروج از مرکز یک بیضی $\frac{1}{3}$ و اندازه‌ی قطر ناکانونی بیضی $8\sqrt{2}$ می‌باشد. اندازه‌ی قطر کانونی بیضی کدام است؟

۱) 12 ۲) 16 ۳) 14 ۴) 18

$c = \frac{a}{3}$

$e = \frac{c}{a} = \frac{1}{3}$

$a^2 = b^2 + c^2 \quad (\frac{a}{2})^2$

$2b = 8\sqrt{2}$

$b = 4\sqrt{2}$

$a^2 - \frac{a^2}{9}$

$\frac{8}{9}a^2 = 16 \times 2 \Rightarrow a^2 = 4 \times 9$

$a = 2 \times 3 = 6$

۳۴ خروج از مرکز یک بیضی $\frac{4}{5}$ است. نسبت قطر کانونی به ناکانونی آن کدام است؟

۱) $\frac{3}{5}$ ۲) $\frac{5}{3}$ ۳) $\frac{5}{6}$ ۴) $\frac{5}{4}$

$e = \frac{c}{a} = \frac{4}{5}$

$c = \frac{4}{5}a$

$a^2 = b^2 + c^2 \quad \frac{16}{25}a^2$

$\frac{9}{25}a^2 = b^2 \Rightarrow \frac{a^2}{b^2} = \frac{25}{9}$

$\frac{2a}{2b} = \frac{a}{b}$

$\frac{a}{b} = \frac{5}{3}$

۳۵ در یک بیضی به کانون‌های $(-1, 2)$ و $(7, 2)$، اندازه‌ی قطر کوچک ۶ واحد است. خروج از مرکز این بیضی، کدام است؟ تجربی-۹۸

۱) ۰/۶ ۲) ۰/۶۴ ۳) ۰/۷۵ ۴) ۰/۸

$2c = 8 \rightarrow c = 4$

$2b = 6 \rightarrow b = 3$

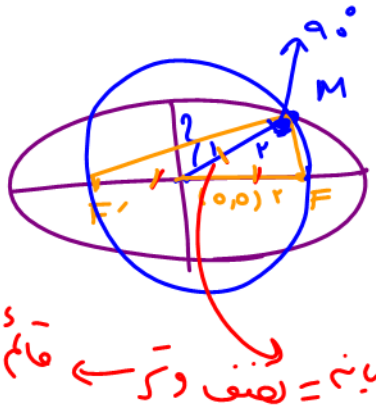
$a = 5$

$e = \frac{c}{a} = \frac{4}{5}$

۳۶ در یک بیضی به اقطار $۲\sqrt{۵}$ و ۲ واحد، دایره‌ای هم مرکز با بیضی و شعاع ۲ واحد، بیضی را در نقطه‌ی M قطع می‌کند. مجموع مربعات فواصل M از دو کانون بیضی، کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۶ ۳) ۱۸ ۴) ۲۰

ریاضی-۹۸



$b=۱$

$a=\sqrt{۵}=۲,۲$

$a^۲=b^۲+c^۲$

$۵=۱+c^۲ \rightarrow c=۲$

$MF^۲+MF'^۲=?.FF'^۲$

$\rightarrow (۴)^۲=۱۶$

$MF+MF'=۲\sqrt{۵}$

میانه = نصف وتر ← قائم‌الزاویه

like

۳۷ در سهمی به معادله‌ی $۵y^۲-۱۰y+۴x-۳=۰$، فاصله‌ی کانون تا نقطه‌ی تلاقی سهمی با محور xها، کدام است؟

۱) ۱/۲ ۲) ۱/۲۵ ۳) ۱/۳ ۴) ۱/۴۵

تجربی-۹۸

$۵(y^۲-۲y)=-۴x+۳$

$۵((y-۱)^۲-۱)=-۴x+۳$

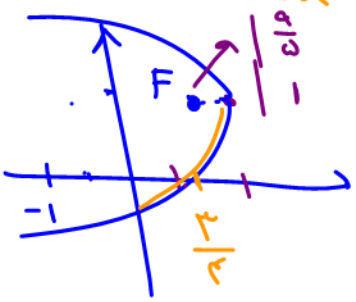
$۵(y-۱)^۲-۵=-۴x+۳$

$۵(y-۱)^۲=-۴x+۸$

$۵(y-۱)^۲=-۴(x-۲)$

$(y-۱)^۲=\frac{-۴}{۵}(x-۲)$

$۴a=\frac{-۴}{۵}$ $\quad a=-\frac{۱}{۵}$



S | ۲ / ۱

تلاقی با محور x $\xrightarrow{y=۰}$ $۱=\frac{-۴}{۵}(x-۲)$

$x-۲=\frac{-۵}{۴} \Rightarrow x=\frac{۳}{۲}$

$\sqrt{(\frac{۹}{۵}-\frac{۳}{۲})^۲+(۱-۰)^۲}$

۳۸ در سهمی به معادله‌ی $y^۲ + ۴y + ۲x + ۱ = ۰$، خط هادی آن از نقطه‌ای با کدام مختصات می‌گذرد؟

۱) $(۱,-۲)$ ۲) $(۱,۲)$ ۳) $(۲,۱)$ ۴) $(۰,۳)$

تجربی-۸۸

۳۹ نقطه‌ی $(۱,۲)$ رأس یک سهمی است که از نقطه‌ای به عرض ۳ روی نیمساز ربع اول می‌گذرد، معادله‌ی سهمی کدام است؟

۱) $(y-۲)^۲ = (x-۱)$ ۲) $(x-۱)^۲ = ۲(y-۲)$

۳) $(x-۱)^۲ = ۴(y-۲)$ ۴) $(y-۱)^۲ = ۴(x-۲)$

۴۰ مکان هندسی نقاطی از صفحه که از دو خط متقاطع d و d' به یک فاصله اند، کدام است؟

۱. دو خط عمود برهم ۲. یک دایره ۳. یک خط ۴. دو خط متقاطع

۴۱ مکان هندسی نقاطی از صفحه که نسبت فواصلشان از دو خط متقاطع مقداری ثابت باشد، کدام است؟

۱. یک خط ۲. دو خط متقاطع ۳. یک دایره ۴. دو دایره

۴۲ مکان هندسی مرکز دایره هایی که از دو نقطه A و B می گذرند، کدام است؟

۱. خطوط موازی با AB ۲. یک خط عمود بر AB ۳. دو خط موازی با AB ۴. خطوط عمود بر AB

۴۳ مکان هندسی مرکز دایره هایی که از دو نقطه A و B می گذرند، کدام است؟

۱. خطوط موازی با AB ۲. یک خط عمود بر AB ۳. دو خط موازی با AB ۴. خطوط عمود بر AB

۴۴ حداکثر چند دایره به شعاع ۱ می توان رسم کرد که بر دایره ی $C(O,\bullet)$ و خط d مماس باشند؟

۱. ۴ ۲. ۸ ۳. ۱۲ ۴. بی شمار

۴۵ مکان هندسی نقاطی که از سه نقطه A و B و C به یک فاصله باشد، کدام است؟

۱. حداکثر یک نقطه ۲. یک نقطه ۳. حداکثر دو خط متقاطع ۴. دو خط متقاطع

فصل سوم

$a+b=(x_a+x_b, y_a+y_b, z_a+z_b)$ یک بردار

$|a+b|=\sqrt{a^2+b^2+2a.b}$

$a-b=(x_a-x_b, y_a-y_b, z_a-z_b)$ تفاضل

$|a-b|=\sqrt{a^2+b^2-2a.b}$

$x \to i\ (1,0,0)$
$y \to j\ (0,1,0)$
$z \to k\ (0,0,1)$

ضرب داخلی

$a.b=x_a x_b+y_a y_b+z_a z_b$

$a.b=b.a=$ عدد

$\cos\alpha=\frac{a.b}{|a||b|}$

$a.b=|a||b|\cos\alpha$

$a\perp b \iff a.b=0$

ضرب خارجی

$a\times b=\begin{vmatrix} i & j & k \\ x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \end{vmatrix}$

$a\times b=-b\times a$ بردار عمود بر a و b

$|a\times b|=|a||b|\sin\alpha$

$a\times a=0$

$a\parallel b \iff a\times b=0$

مختلط

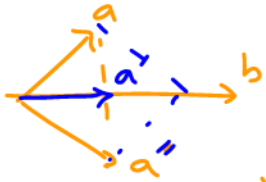
$C.(a\times b)=\begin{vmatrix} x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \\ x_c & y_c & z_c \end{vmatrix}$

سه بردار هم صفحه $\hookrightarrow a.(b\times c)=0$

بردار یکه a $e_a=\frac{a}{|a|}$

$|a|b|=|b|a|$

$|a.b|<|a||b|$



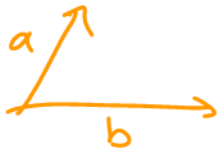
تصویر a' اندازه $\frac{a.b}{|b|}$

بردار $a'=\frac{a.b}{|b|^2}b$

$a+a''=2a'$

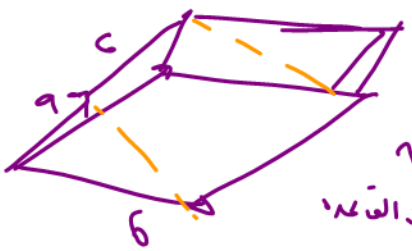
قرینه $\hookrightarrow a''=\frac{2a.b}{|b|^2}b-a$

مساحت



$S_{\square}=|a\times b|$

$S_{\triangle}=\frac{1}{2}|a\times b|$



$V_{\text{متوازی السطوح}}=a.(b\times c)$

$V_{\text{منشور مثلث القاعده}}=\frac{1}{2}V_{\text{متوازی السطوح}}$

$V_{\text{هرم}}=\frac{1}{6}V_{\text{متوازی السطوح}}$

حجم

$|AB| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$

$M_{AB}\left|\begin{matrix}\frac{x_A+x_B}{2}\\ \frac{y_A+y_B}{2}\\ \frac{z_A+z_B}{2}\end{matrix}\right.$

۴۶ اگر $|\vec{a}| = 2\sqrt{6}$ و $|\vec{b}| = 5$ و $|\vec{a}\,.\,\vec{b}| = 0$ اندازه بردار $\vec{a} - \vec{b}$ کدام است؟ سراسری ۸۳

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۷

$a.b = 0 \longrightarrow a \perp b \quad \alpha = 90^\circ$

$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2a.b$

$a-b = \sqrt{(2\sqrt{6})^2 + 5^2}$

$a-b = \sqrt{24+25} = \sqrt{49} = 7$

۴۷ اندازه تصویر قائم بردار $(2,-a,3)$ بر امتداد بردار $(1,0,a)$، برابر $\frac{5}{\sqrt{2}}$ است. اختلاف مقادیر a کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۷ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $\frac{15}{7}$

$a(2,-a,3)$

$b(1,0,a)$

$\frac{a.b}{|b|} = \frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{2+0+3a}{\sqrt{1^2+a^2}} = \frac{3a+2}{\sqrt{1+a^2}} = \frac{5}{\sqrt{2}}$

$2(3a+2)^2 = 25 + 25a^2$

$9a^2+12a+4$

$18a^2 + 24a + 8 = 25 + 25a^2$

$+\frac{17}{7} - 1 = \frac{10}{7}$

$7a^2 - 24a + 17 = 0$

$7 + 17 = 24$

$a+c = b$

$a = -1$

$a = -\frac{17}{7}$

۴۸ اگر $\vec{a} = (-۴, m, ۳)$، $\vec{b} = (۴, ۵, m)$ و تصویر بردار $\vec{a}$ بر روی بردار $\vec{b}$ صفر باشد، آن‌گاه $|a \times b|$ کدام است؟

۱) $۵\sqrt{۷۳}$ ۲) $۵\sqrt{۱۰۲}$ ۳) $۳\sqrt{۱۱۵}$ ۴) $۳\sqrt{۱۴۵}$

$a \cdot b = ۰$

$۳m + ۵m - ۱۶ = ۰$

$۸m - ۱۶ = ۰$

$m = ۲$

$\sqrt{۲۸^۲ + ۱۶^۲ + ۱۱^۲}$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ ۲ & ۵ & ۴ \\ ۳ & ۲ & -۴ \end{vmatrix} = i(-۲۰-۸) - j(-۸-۱۲) + k(۴-۱۵)$$

-۲۸ $\quad -۱۶$ $\quad -۱۱$

۴۹ اگر $\vec{a} = ۲\vec{i} - ۳\vec{j}$ و $\vec{b} = \vec{i} + ۲\vec{j}$ باشند، حاصلضرب داخلی آن دو بردار کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۸ ۳) -۸ ۴) -۴

انسانی ۸۰

$a(۲, -۳, ۰)$

$b(۱, ۲, ۰)$

$۲ - ۶ + ۰$

۵۰ دو بردار $\vec{A} = ۳\vec{i} + ۶\vec{j}$ و $\vec{B} = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j}$ بر هم عمود بوده و برآیند آنها با محور x زاویه ۴۵ درجه می‌سازد. α و β به ترتیب از راست به چپ کدامند؟

۱) ۱ و $-\frac{۱}{۲}$ ۲) ۲ و ۱- ۳) ۲- و ۱ ۴) ۲ و ۱

$(\alpha + ۳, ۶ + \beta)$

$۳\alpha + ۶\beta = ۰$

سراسری ۸۱

$(۱, ۰, ۰)$

$$\cos\alpha = \frac{i \cdot (a+b)}{|i||a+b|} = \frac{\alpha + ۳}{\sqrt{(\alpha+۳)^۲ + (۶+\beta)^۲}} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$|i| = ۱$

۵۱ زاویه بین دو بردار a و b کمتر از ۹۰ درجه است، اگر $|\vec{a}| = ۶$ ، $|\vec{b}| = ۵$ و $|a \times (a + b)| = ۱۸$ ، حاصل $a \cdot (a + b)$ کدام است؟

سراسری ۸۵

۱) ۵۴ ۲) ۵۶ ۳) ۶۰ ۴) ۶۴

$a \times a + a \times b = ۱۸$

$|a||b| \sin\alpha = ۱۸$

$۶ \quad ۵$

$\sin\alpha = \frac{۱۸}{۳۰} = \frac{۳}{۵}$

$a.a + a.b$

$۳۶ + a.b$

$۶ \times ۶ \times \frac{۴}{۵} = ۶۰$

$\sin^۲ + \cos^۲ = ۱$

$۱ - \frac{۹}{۲۵} = \frac{۱۶}{۲۵} = \frac{۴}{۵}$

۵۲ اگر بردارهای $a = ۲i - j + k$ و $b = -i + j - ۲k$ مفروض باشند، مساحت متوازی‌الاضلاع که بر روی دو بردار مفروض ساخته شود کدام است؟

۱) $\sqrt{۱۱}$ ۲) $\sqrt{۱۳}$ ۳) $۲\sqrt{۳}$ ۴) $۲\sqrt{۵}$

$a(۲, -۱, ۱)$

$b(-۱, ۱, -۲)$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ ۲ & -۱ & ۱ \\ -۱ & ۱ & -۲ \end{vmatrix} = i(۲-۱) - j(-۴+۱) + k(۲-۱)$$

$\sqrt{۱+۹+۱} = \sqrt{۱۱}$

سوالات تستی

$|A| = \begin{bmatrix} 7|A| & |A| \\ 4 & 4|A|^2 \end{bmatrix}$

$|A| = 28|A|^3 - 4|A|$

$28|A|^3 - 7|A| = 0$

$7|A|(4|A|^2 - 1) = 0$

$|2(A^{-1})^4|$

$|2A^{-1}|^4 = (2^2 \times \frac{1}{2})^4 = (2^3)^4 = 2^{12}$

$\frac{1}{|A|}$

$2^2 \times |2|^4 = 2^6$

۱) ۱۴ ۲) ۳۲ ۱۲۸ ۴) ۴۶

$A^2 - A = A(A - I)$

$4|A|^2 = 1$

$|A^{-1}| = \pm 2$

$|A|^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow |A| = \pm\frac{1}{2}$

$|A^{-1} - B^{-1}| = n \quad |B| = 4 \quad |A| = -1 \quad AB = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

$|A \times (A^{-1} - B^{-1})| = |A|n$

$|B - AB^{-1} \times B| = -n \times 4$

$|I - AB^{-1}| = -n$

$|B - A| = -n \times 4 = -4n$

$|(I - AB^{-1})B| = -n|B|$

$|B - A| = \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ -6 & -2 \end{vmatrix} = 12 + 16 = 28$

$-4n = 28 \longrightarrow n = -7$