

..... فصل اول: ترسیم‌های هندسی و استدلال

← مفاهیم هندسی! ← تعریفی

..... فصل دوم: قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن

مساحت

..... فصل سوم: چندضلعی‌ها

← حجم‌ها

..... فصل چهارم: تجسم فضایی

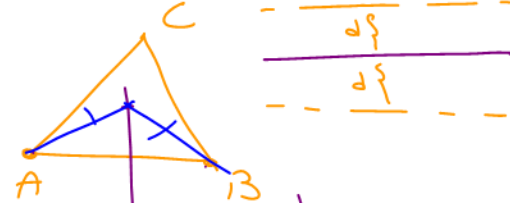


مکان هندسی = یک ویژگی را دارا باشد و نقطه‌ای دیگری نسبت کم این ویژگی را نداشته باشد

فاصله ثابت از یک نقطه = دایره



فاصله ثابت از یک خط = دو خط موازی



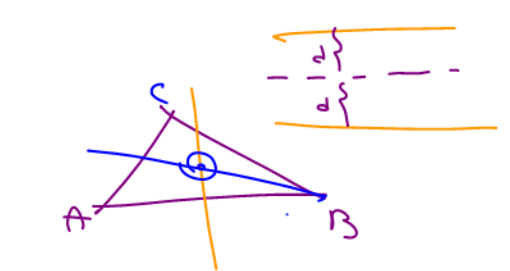
فاصله برابر از دو نقطه = محور میانه



فاصله برابر از دو خط متقاطع = دو خط عمود بر هم (نی‌زها)



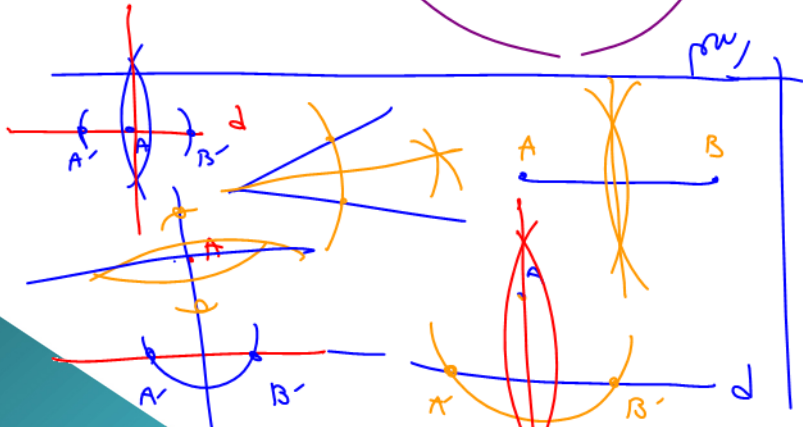
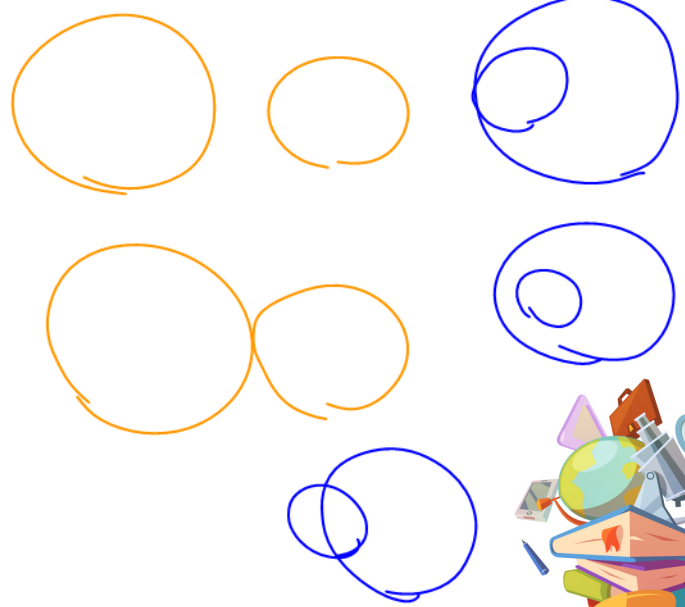
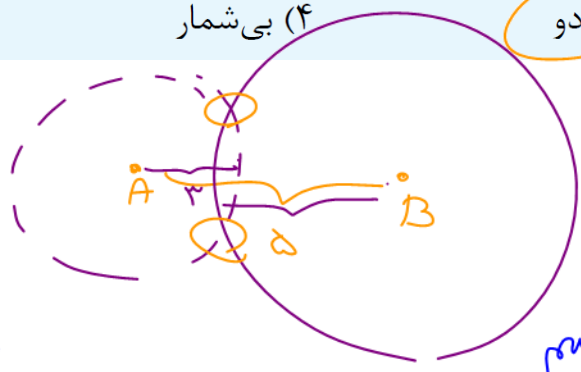
فاصله برابر از دو خط موازی = خطی به موازات



در صفحه

۱ دو نقطه A و B به فاصله ۵ از یکدیگر روی صفحه‌ای قرار دارند. چند نقطه در این صفحه وجود دارد که از نقطه A، به فاصله ۳ و از نقطه B، به فاصله ۴ باشند؟

- (۱) هیچ
- (۲) یک
- (۳) دو
- (۴) بی‌شمار



۲ دایره C و پاره خط AB در یک صفحه داده شده‌اند. چند نقطه روی دایره C وجود دارد که از A و B به یک فاصله هستند؟

محور منصف

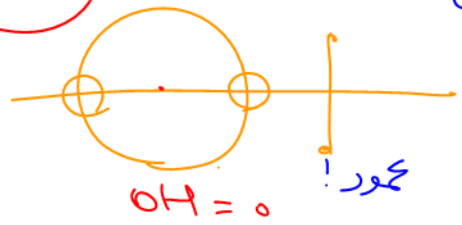
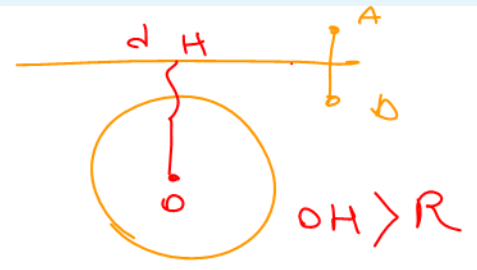
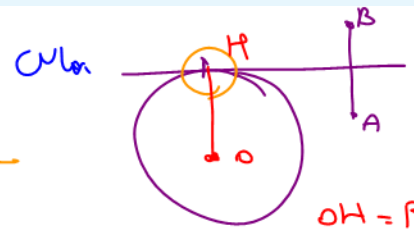
قطع
 $OH < R$

(۴) حداکثر دوتا

(۳) حداکثر یکی

(۲) دقیقاً یکی

(۱) دقیقاً دوتا



$OH = 0$

محور!

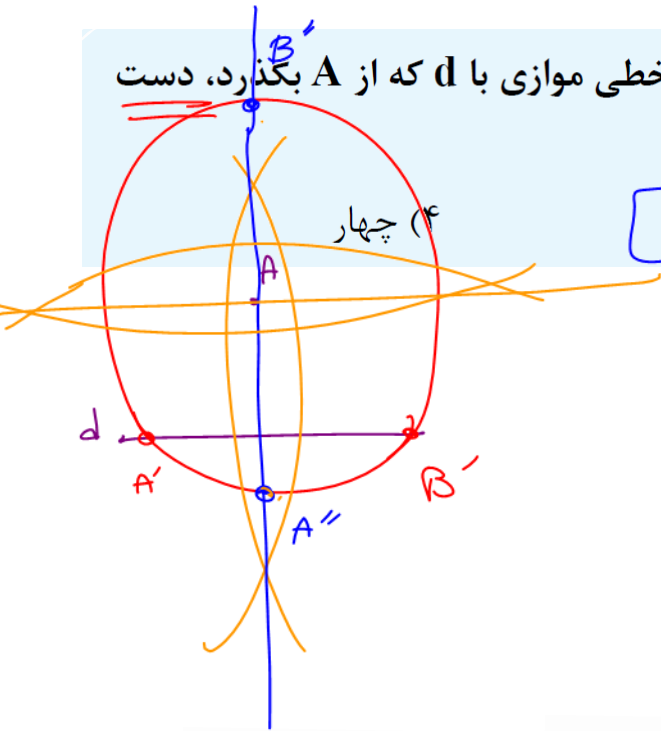
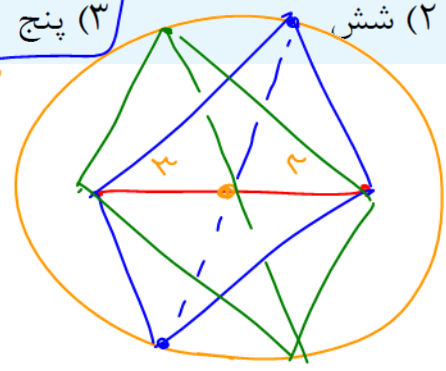
۳ خط d و نقطه A بیرون آن داده شده‌اند. برای رسم خطی موازی با d که از A بگذرد، دست کم چند کمان باید رسم شود؟

(۱) هفت

(۲) شش

(۳) پنج

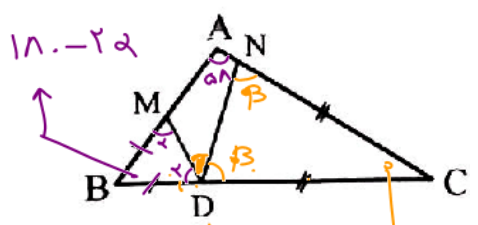
(۴) چهار



۴ در شکل $\hat{A} = 58^\circ$, $BM = BD$, $CN = CD$, زاویه $\hat{M}DN$ چند درجه است؟

۵۹ (۲)
۶۲ (۴)

۵۸ (۱)
۶۱ (۳)



$$180 - 2\alpha + 180 - 2\beta + 58 = 180$$

$$180 + 58 = 2\alpha + 2\beta$$

$$\frac{238}{2} = \frac{2(\alpha + \beta)}{2}$$

$$119 = \alpha + \beta$$

سراسری ۹۱
واردی قاعده
میانم = محور منصف
نیاز
اربع



زویا

$\alpha + \beta = 180^\circ =$ مکمل

$\alpha + \beta = 90^\circ =$ متمم



نیم صفحه $= 180^\circ$

۱ مجموع زاویه‌های داخلی هر مثلث، برابر 180° است.

۲ مجموع زاویه‌های خارجی هر مثلث، برابر 360° است.

۳ هر زاویهٔ خارجی مثلث، برابر با مجموع دو زاویهٔ داخلی غیرمجاور با آن است.

۴ مجموع زاویه‌های درونی هر n ضلعی محدب، برابر با $(n-2) \times 180^\circ$ است.

۵ مجموع زاویه‌های بیرونی هر n ضلعی محدب، برابر 360° است.

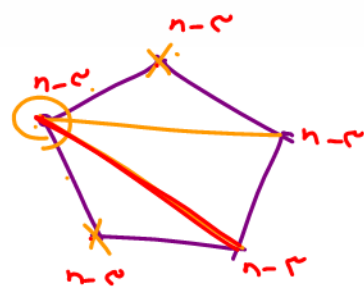
۶ هر یک از زاویه‌های داخلی n ضلعی منتظم، برابر $\frac{(n-2) \times 180^\circ}{n}$ و هر زاویهٔ خارجی آن برابر $\frac{360^\circ}{n}$ است.

هر زاویهٔ و منته‌های آن

با n نقطه می‌توان $\binom{n}{2}$ تا پاره خطی توان رسم کرد!
عزیزانم به یک خط

از هر رأس $n-3$ قطری گذرد

تعداد قطرها $= \frac{n(n-3)}{2}$



قطرها

$\frac{n(n-3)}{2}$

با n نقطه چند پرده می‌توان ساخت

$n(n-1)$



همرسی‌ها

۱ در هر مثلث، سه عمودمنصف اضلاع آن در یک نقطه همرس هستند. نقطهٔ همرسی سه عمودمنصف

اضلاع هر مثلث، از سه رأس آن به یک فاصله است. = مرکز دایره محیطی

اگر هر سه زاویهٔ مثلث، حاده باشند، نقطهٔ همرسی سه عمودمنصف، درون مثلث قرار دارد. اگر مثلث قائم‌الزاویه باشد، این نقطه وسط وتر مثلث قرار دارد و اگر یکی از زاویه‌های مثلث، منفرجه باشد، این نقطه بیرون مثلث قرار دارد.

۲ سه نیمساز زاویه‌های داخلی هر مثلث در یک نقطه واقع در درون مثلث، همرس هستند. این نقطه



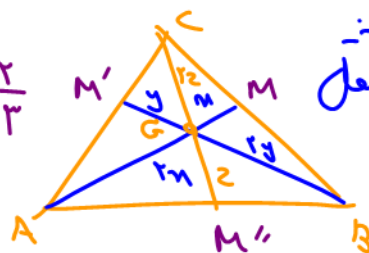
از سه ضلع مثلث به یک فاصله است. = مرکز دایره می‌طی!

۳ سه ارتفاع هر مثلث در یک نقطه همرس هستند.

اگر هر سه زاویهٔ مثلث حاده باشند، نقطهٔ همرسی ارتفاع‌ها درون مثلث قرار دارد. اگر مثلث قائم‌الزاویه باشد، این نقطه بر رأس زاویهٔ قائمه قرار دارد و چنانچه یکی از زاویه‌های مثلث، منفرجه باشد، این نقطه بیرون مثلث قرار دارد.

$\frac{GM}{GA} = \frac{1}{2}$
 $\frac{GM}{AM} = \frac{1}{3}$

$\frac{GA}{AM} = \frac{2}{3}$



۴ همرسی میانرها = مرکز ثقل

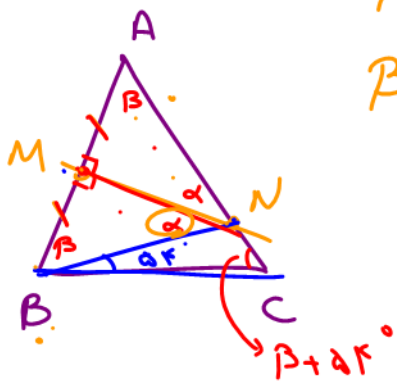


۵

در مثلث متساوی الساقین ABC، نقطه M وسط ساق AB و عمودمنصف آن، ساق AC را در نقطه N قطع می‌کند.

اگر $\angle NBC = 54^\circ$ باشد، اندازه زاویه $\angle MNB$ چند درجه است؟

تیر ۱۴۰۱
سراسری



۷۸ (۴)

$\hat{A} = 24$ $\hat{B} = \beta$ $\hat{C} = \beta + 54$

۵۶ (۲)

۴۸ (۱)

$\beta + \beta + 54 + \beta + 54 = 180$

$3\beta + 108 = 180$

$3\beta = 72$

$\beta = 24$

$\alpha + \beta = 90 \rightarrow \alpha + 24 = 90$

$\alpha = 66$

۶

در یک n ضلعی، با کم شدن یک ضلع، ۱۶ قطر از تعداد قطرهای آن کم می‌شود. اگر دو ضلع کم شود، چند قطر از

تعداد قطرهای آن کم می‌شود؟

دی ۱۴۰۱
سراسری

۳۳ (۴)

$$\begin{array}{r} 125 \\ - 104 \\ \hline 21 \end{array}$$

۳۳ (۳)

$31 (2)$

۳۵ (۱)

n ضلعی

$\frac{n(n-3)}{2} = \frac{18 \times 15}{2} = 135$

$\frac{n(n-3)}{2} - \frac{(n-1)(n-4)}{2} = 16$

$n^2 - 3n - n^2 + 5n - 4 = 32$

$2n - 4 = 32$

$2n = 36 \rightarrow n = 18$

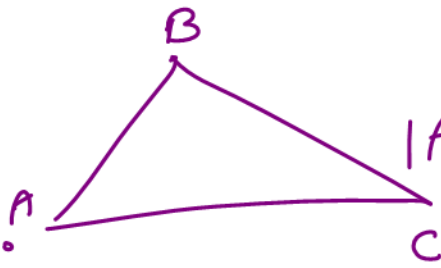
$n-1$ ضلعی

$\frac{(n-1)(n-4)}{2}$

$\frac{14 \times 13}{2} = 91$



نامساوی مثلث حمار



$$|AB - BC| < AC < AB + BC$$

اگر روی یک خط $AC = AB + BC$ نقطه

نقطه بیرون واقع یک خط $AC < AB + BC$

نقطه $AC \leq AB + BC$

۷ اگر طول اضلاع مثلثی $2x + 1$ ، $3x - 2$ و $x + 2$ باشند، آن گاه حدود x کدام است؟

$$x > \frac{1}{2} \quad (2)$$

$$x > \frac{3}{4} \quad (1)$$

$$x < \frac{1}{2} \quad (4)$$

$$\frac{1}{2} < x < \frac{3}{4} \quad (3)$$

استدلال

$$3x - 2 + x + 2 > 2x + 1 \Rightarrow 2x > 1 \Rightarrow x > \frac{1}{2}$$

$$3x - 2 + 2x + 1 > x + 2 \Rightarrow 4x > 3 \Rightarrow x > \frac{3}{4}$$

$$x + 2 + 2x + 1 > 3x - 2 \Rightarrow 3 > -2$$

هواره برابر $\alpha < \beta$

ضلع روبرو زاویه بزرگتر، زاویه بزرگتر روبرو ضلع بزرگتر

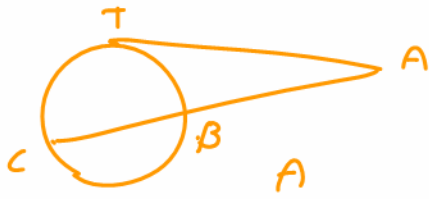
۸ در مثلث ABC ، $AB = 2$ و $AC = 3$ است. اگر از نقطه دلخواه M روی ضلع BC دو خط

به موازات AB و AC رسم کنیم تا آن‌ها را به ترتیب در E و F قطع کنند، اندازه $ME + MF$ کدام نمی‌تواند باشد؟

۲/۱ (۴) ۲/۵ (۳) ۲/۷ (۲) ۳/۵ (۱)

$$y + x < 3$$

$$C < B \rightarrow y < 3 - x$$

$$AT^2 = AB \times AC$$

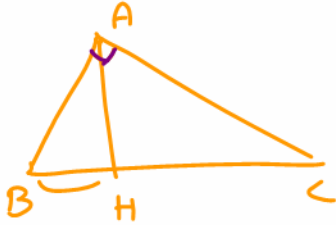
$$a \ b \ c$$

$$a \ \underline{b} \ c$$

$$b = \sqrt{ac} / b^2 = ac$$

$$b = \frac{a+c}{2}$$

تشابه



$$AH^2 = BH \times HC$$

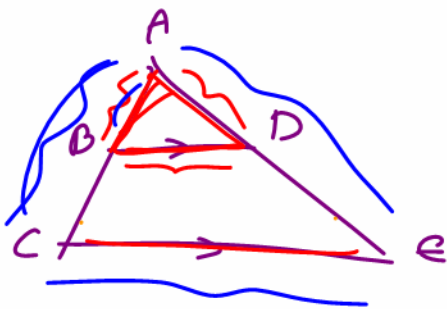
$$BA^2 = BH \times BC$$

$$AC^2 = CH \times BC$$

← تشابه در مثلث قائمه

$$S = \frac{AB \times AC}{2} = \frac{AH \times BC}{2}$$

$$AB \times AC = AH \times BC$$



$$\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AE}$$

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DE}$$

$$\frac{BC}{AB} = \frac{DE}{AD}$$

$$\frac{AC}{BC} = \frac{AE}{DE}$$

تالس

تشابه
من من من
من من من



$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{m}{m'} = \frac{d}{d'}$$

$$= \frac{h}{h'} = \frac{rP}{rP'} = K \quad \frac{1}{K}$$

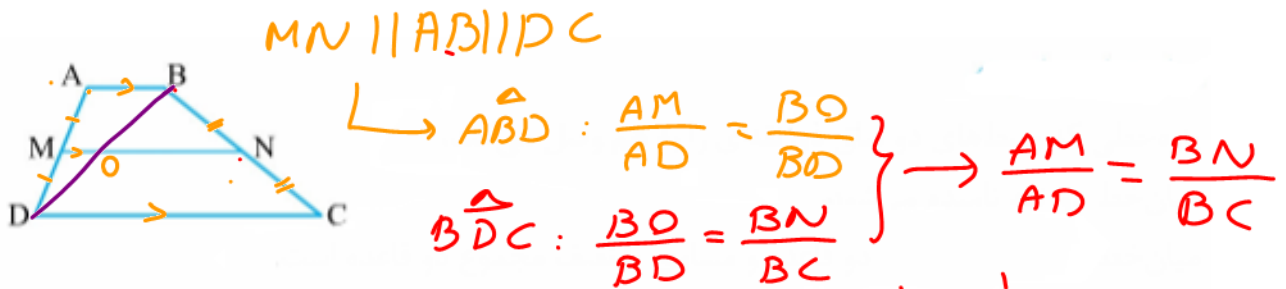
$$\frac{S}{S'} = K^2$$

جزء

$$\frac{BD}{CE} = \frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AE}$$



تالس در ذونقه



$AB \parallel CD, AM = MD, BN = NC \Leftrightarrow MN \parallel AB, MN = \frac{AB + CD}{2}$

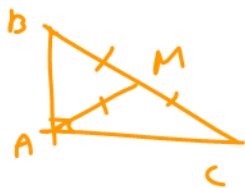
ذونقنه



$$MN = \frac{kb + k'a}{k + k'}$$

تشابه در مثلث قائمه

$$AB^2 + AC^2 = BC^2$$



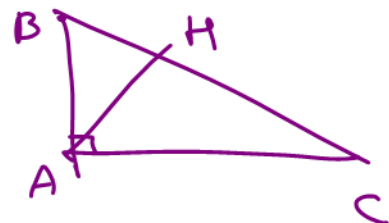
$$AM = \frac{1}{f} BC$$

$$AH^2 = BH \times HC$$

$$AB^2 = BH \times BC$$

$$AC^2 = CH \times BC$$

$$AH \times BC = AC \times AB$$



۹ در مستطیلی به ابعاد ۱۳ و ۶ واحد، نقطه‌ی M بر روی ضلع بزرگ‌تر قرار دارد و خطوط واصل از M به دو

رأس دیگر مستطیل بر هم عمودند. فاصله‌ی نزدیک‌ترین رأس مستطیل از M کدام است؟

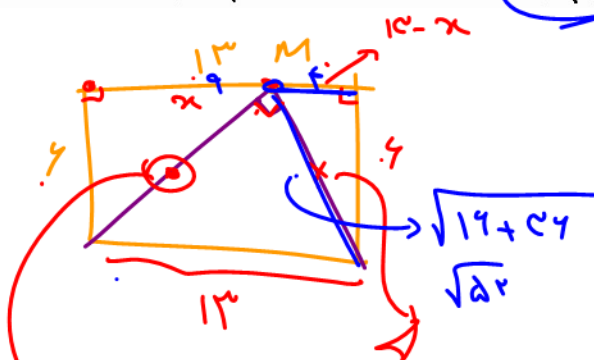
کنکور ۸۶

۴/۵ (۴)

۴ (۳)

۳/۵ (۲)

۳ (۱)



$$2x^2 - 24x + 72 = 0$$

$$x^2 - 12x + 36 = 0$$

$$(x - 6)(x - 6) = 0$$

$$x = 6$$

$$x = 6$$

$$6^2 + x^2 + 6^2 + (13 - x)^2 = 13^2$$

$$36 + x^2 + 36 + 179 - 26x + x^2 = 179$$



در یک مثلث قائم الزاویه، اندازه دو پاره خطی که ارتفاع وارد بر وتر، بر روی وتر ایجاد می کند $\frac{2}{5}$ و $\frac{14}{4}$ سانتی متر است. طول ارتفاع وارد بر وتر، چند سانتی متر است؟

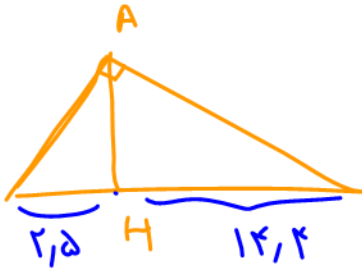
تیر ۱۴۰۱
سراسری

۸ (۴)

۷/۲ (۳)

۶ (۲)

۴/۸ (۱)

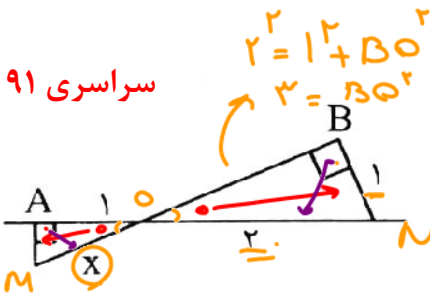


$$AH^2 = 2,5 \times 14,4$$

$$AH^2 = \frac{25}{10} \times \frac{144}{10} = \frac{25 \times 144}{100}$$

$$AH = \frac{\sqrt{25 \times 144}}{10} = 6$$

سراسری ۹۱



۱۱) در شکل مقابل دو زاویه \hat{A} و \hat{B} قائمه‌اند. مقدار x چقدر است؟

$\frac{2}{3}\sqrt{3}$ (۲)
 $\frac{3}{2}$ (۴)

$\frac{1}{2}\sqrt{3}$ (۱)
 $\frac{4}{3}$ (۳)

$$\left. \begin{matrix} O_1 = O_2 \\ A = B = 90 \end{matrix} \right\} \xrightarrow{ii} \triangle BNO \sim \triangle OAM$$

$$\frac{AM}{1} = \frac{x}{2} = \frac{1}{BO\sqrt{3}} \Rightarrow x = \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$



مساحت ها

مثلث متساوی الساقین $\frac{\sqrt{3}}{4} a^2$

مثلث $\frac{ab}{2}$

مثلث قائمه

قاعده \times ارتفاع $\frac{ab \sin \alpha}{2}$

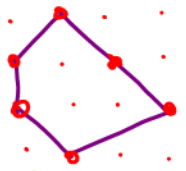
← مثلث



مجموع دو قاعده \times ارتفاع $\frac{(a+b)h}{2}$

← دوزنقه

لوزی - کایت یا هر شکلی که قطرهای آن عمودند = قطر بزرگ \times قطر کوچک



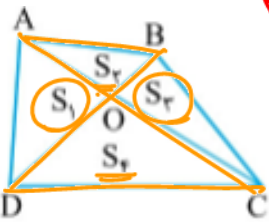
متوازی الاضلاع = قاعده \times ارتفاع $S = \frac{1}{2}(a+b)h$



دایره πr^2

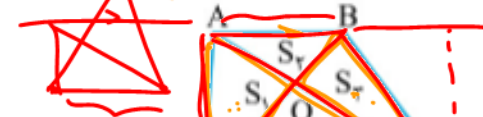
$\pi r^2 =$ دایره

$\frac{S}{S'} = \frac{a}{a'}$



در چهارضلعی محدب شکل مقابل، اگر O، نقطه برخورد دو قطر باشد، آن گاه داریم:

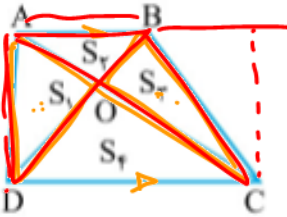
$S_1 \cdot S_3 = S_2 \cdot S_4$



در دوزنقه شکل مقابل، به سادگی معلوم می شود $S_1 = S_3$ و بنا بر رابطه ای که در قسمت (الف) بیان شد، داریم:

$S_1^2 = S_3^2 = S_2 \cdot S_4$

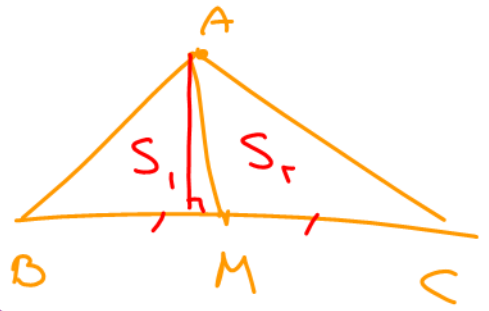
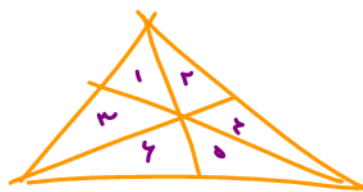
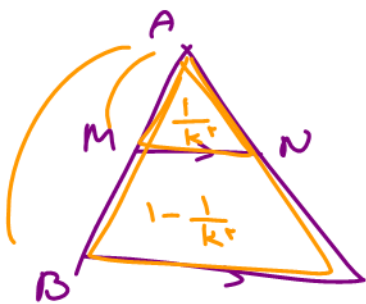
$\frac{S}{S'} = \frac{h}{h'}$



$S_1 \times S_3 = S_1 \times S_1 = S_2 \times S_4 = S_2 \times S_4$

$S_1 + S_3 = S_2 + S_4$

میانها



$S_1 = S_2 = S_3 = \dots = \frac{S}{4}$

$S_1 = S_2 = \frac{S}{4}$

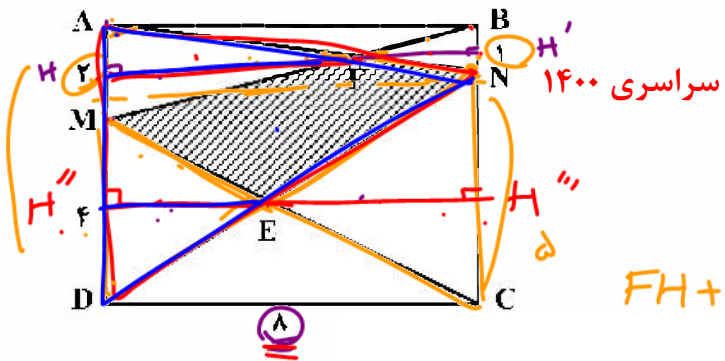
$\frac{AM}{AB} = \frac{1}{k} \quad k > 1$



$\frac{a}{a_n} = \frac{1}{k^n}$



مستطیل ABCD مطابق شکل زیر مفروض است. مساحت چهارضلعی MENF کدام است؟



- 104 (1)
- 9
- 12 (2)
- 47 (3)
- 3
- 16 (4)

$FH + FH' = 8$

$FH = \frac{16}{3}$

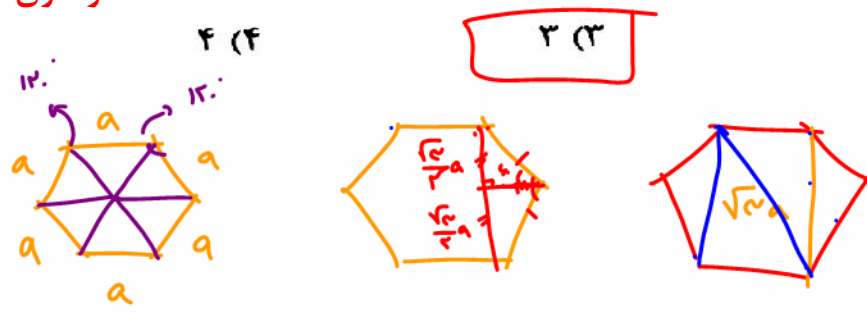
$AMF \sim BNF \Rightarrow \frac{FH}{FH'} = \frac{AM}{BN} \Rightarrow \frac{FH}{FH+FH'} = \frac{2}{3}$

$MDE \sim NEC \Rightarrow \frac{MC}{MD} = \frac{EH''}{EH'} \Rightarrow \frac{9}{3} = \frac{1}{EH''} \Rightarrow EH'' = \frac{32}{9}$

$S_{AND} - S_{\triangle} - S_{\triangle} = \frac{4 \times 14^2}{2} - \frac{16}{3} \times 14 - \frac{32}{9} \times 14 = 224 - \frac{17 \times 14}{3} - \frac{24}{9} = \frac{216 - 28 - 24}{9} = \frac{104}{9}$

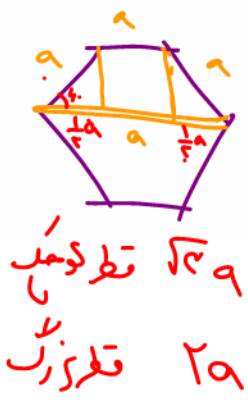
۱۳ قطر کوچک یک شش ضلعی منتظم، ضلع یک شش ضلعی منتظم جدید است. مساحت شش ضلعی جدید چند برابر مساحت شش ضلعی اولیه است؟

سراسری ۹۱



$\frac{S'}{S} = \frac{6 \times \frac{\sqrt{3}}{4} (\sqrt{3}a)^2}{6 \times \frac{\sqrt{3}}{4} a^2} = \frac{3a^2}{a^2} = 3$

$S = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2} a^2$

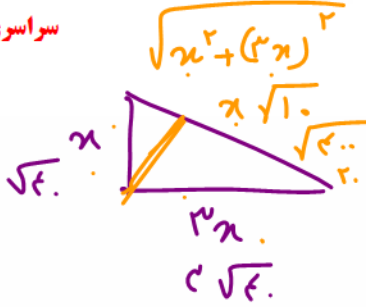


$\frac{(6-2) \times 18}{6} = \frac{4 \times 18}{6} = 12$



۱۴ در یک مثلث قائم الزاویه، طول اضلاع قائم به نسبت ۱ و ۳ و مساحت آن ۶۰ واحد مربع است. ارتفاع وارد بر وتر چقدر است؟

سراسری تجربی ۹۱



۸ (۴)

۶ (۳)

۵ (۲)

۴√۲ (۱)

$$\frac{2 \times 3x}{2} = 40$$

$$3x^2 = 120$$

$$x^2 = 40$$

$$a \times h_a = b \times c$$

$$2x \times h =$$

۱+√۵
۴

√۶
۲+√۳

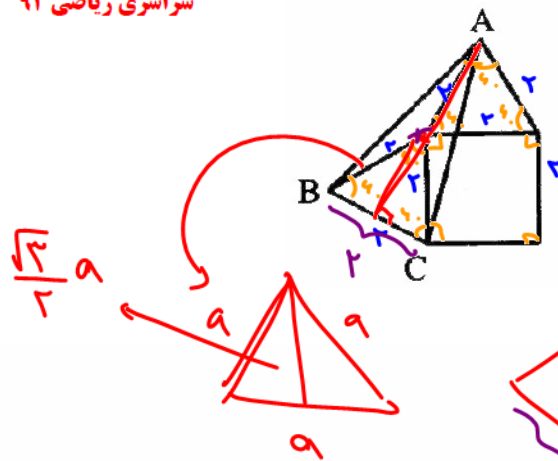


$$2 \times h = \sqrt{40} \times 2\sqrt{40}$$

$$h = 4$$

۱۵ در شکل روبه‌رو، طول ضلع مربع ۲ واحد است. دو مثلث متساوی‌الاضلاع بر روی دو ضلع مجاور ساخته شده است. مساحت مثلث ABC کدام است؟

سراسری ریاضی ۹۲

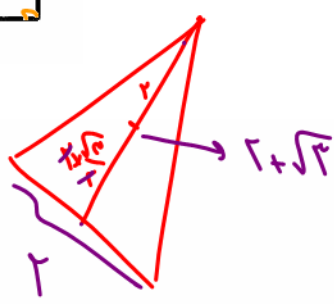


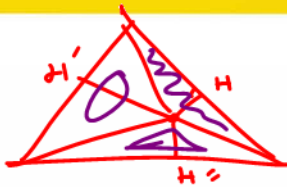
۱+√۳ (۲)
۴ (۴)

√۶ (۱)

۲+√۳ (۳)

$$\frac{(2+\sqrt{3}) \times 2}{2}$$





$$\frac{MH \times \cancel{x}}{\cancel{x}} + \frac{MH' \times \cancel{x}}{\cancel{x}} = \frac{MH' \times \cancel{x}}{\cancel{x}} = \frac{\text{ارتفاع} \times \cancel{x}}{\cancel{x}}$$

فصل ۳

۱۶ نقطه‌ی M درون مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع $6\sqrt{3}$ قرار دارد. مجموع فواصل M از سه ضلع این مثلث کدام است؟

۴ + $3\sqrt{3}$ (۴)

$4\sqrt{3}$ (۳)

9 (۲)

۶ (۱)

سنجش ۸۹



$$\frac{\sqrt{3}}{2} \times 6\sqrt{3} = 3 \times 3 = 9$$

۱۷ طول ضلع یک مربع برابر محیط مثلث قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین به ضلع قائم ۲ واحد است. با حذف گوشه‌های این مربع، بزرگ‌ترین هشت‌ضلعی منتظم ممکن داخل آن ساخته شده است. مساحت این هشت‌ضلعی، کدام است؟

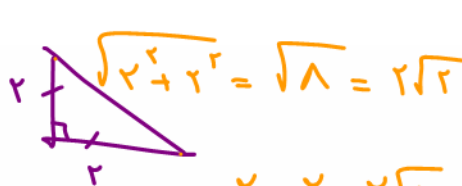
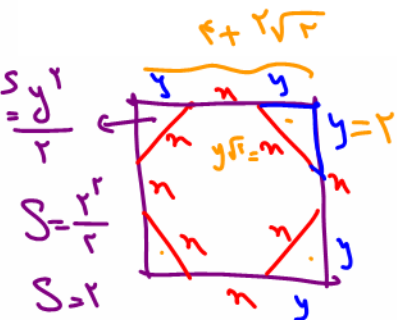
سراسری تجربی ۹۳

16 + 16\sqrt{2} (۴)

24 + 8\sqrt{2} (۳)

24\sqrt{2} (۲)

۳۲ (۱)



$$y^2 + y^2 = 2^2$$

$$\sqrt{2y^2} = \sqrt{2^2}$$

$$y\sqrt{2} = 2$$

$$2y + 2\sqrt{2} = 4 + 2\sqrt{2}$$

$$y(2 + \sqrt{2}) = 4 + 2\sqrt{2}$$

$$y = \frac{4 + 2\sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} = \frac{2(2 + \sqrt{2})}{2 + \sqrt{2}} = 2$$

$$S = (4 + 2\sqrt{2}) - 4$$

$$= 14 + 14\sqrt{2}$$



فصل ۴

مساحت کُره



$S_{\text{کره}} = 4\pi r^2$



حجم کره $= \frac{4}{3}\pi r^3$ ← نیم کره $= \frac{2}{3}\pi r^3$

مساحت کره $= 4\pi r^2$



احجام

کروی

مساحت جانبی = محیط قاعده $\times h$

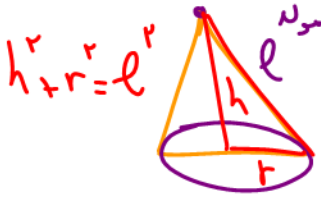
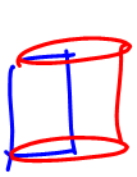
$V = S \times h$

$V_{\text{منشوری}} = \pi r^2 h$



منشوری

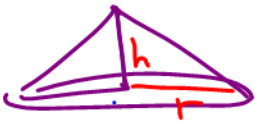
مساحت کل = مساحت جانبی + $2S_{\text{قاعده}}$



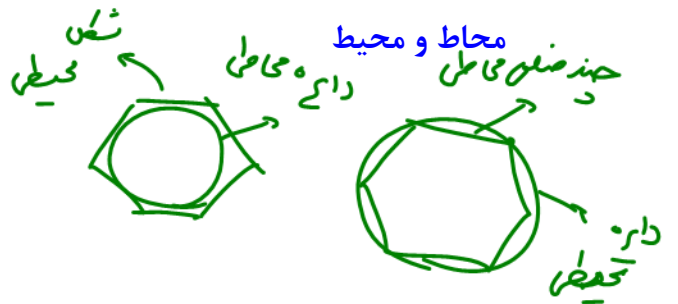
$V = \frac{1}{3} S \times h$



هرمی



مساحت جانبی $= \pi r r' (h + h')$



دو خط

منطبق = حالت خاص

دو صفحه

خط و صفحه

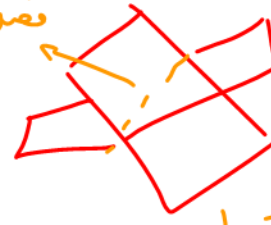
موازی بودن استرا

$2n + 3y = 5$
 $4n + 2y = 10$



$2n + 2y = 5$
 $2n + 2y = 7$
 $0 = 2$

موازی



مقاطع

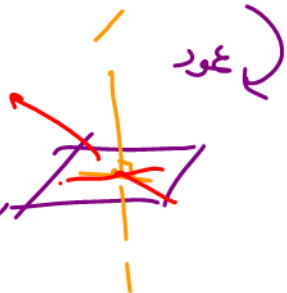


مقاطع



موازی = ~~مقاطع~~

خط عمودی صفحه در همه خطوط
گذرنده از نقطه تلاقی عمود است
خطی که بر دو خط متقاطع عمود باشد
از صفحه بر آن صفحه عمود است



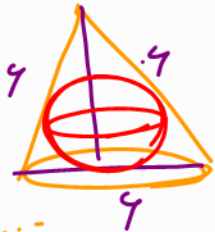
در مخروطی که مولد آن برابر قطر قاعده و مساوی ۶ واحد است، کره‌ای محاط شده است. حجم کره کدام است؟

$6\pi\sqrt{3}$ (۴)

$4\pi\sqrt{3}$ (۳)

$3\pi\sqrt{3}$ (۲)

$2\pi\sqrt{3}$ (۱)



$\frac{4}{3}\pi r^3$

$V = \frac{4}{3}\pi r^3$

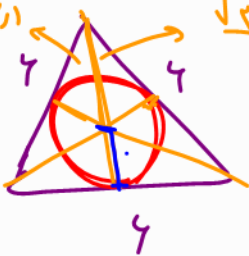
$= \frac{4}{3}\pi(\sqrt{3})^3$

$\frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 6 = 3\sqrt{3}$

$\frac{1}{3} \times \text{ارتفاع} = \frac{1}{3} \times 3\sqrt{3} = \sqrt{3}$

$= \frac{4}{3}\pi \times \sqrt{3}$

ارتفاع مساحت
مخروط مساحت
نیاز



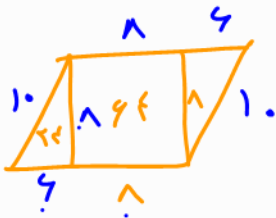
یک متوازی‌الاضلاع از یک مربع و دو مثلث قائم‌الزاویه مساوی هم تشکیل شده است، اگر مساحت مربع و یک مثلث، قائم‌الزاویه به ترتیب ۶۴ و ۲۴ واحد مربع باشند، محیط متوازی‌الاضلاع کدام است؟

۵۴ (۴)

۴۸ (۳)

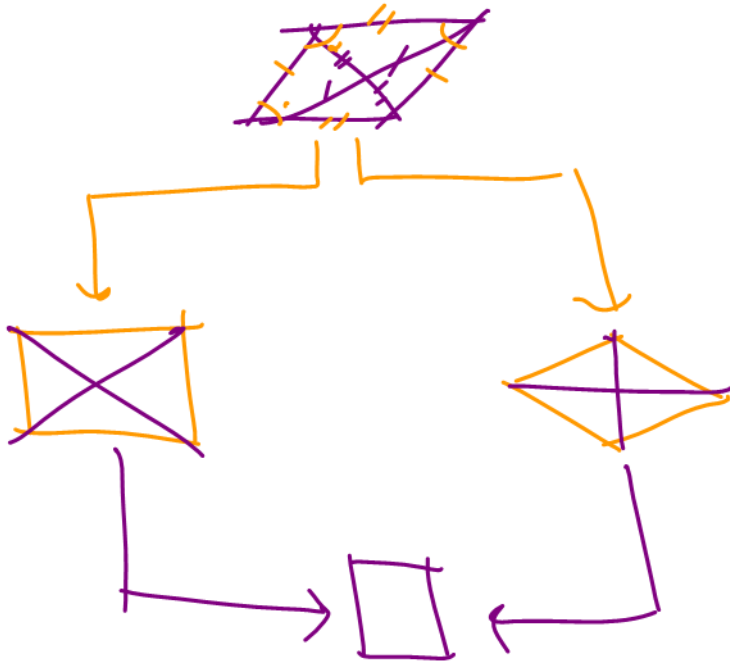
۳۶ (۲)

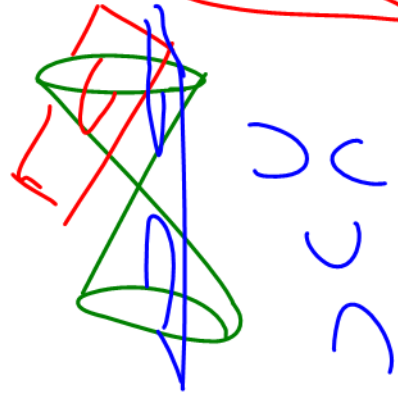
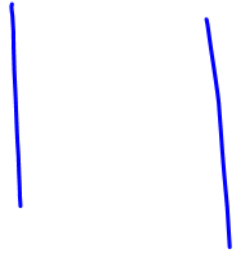
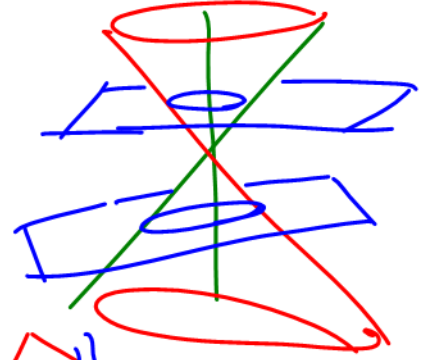
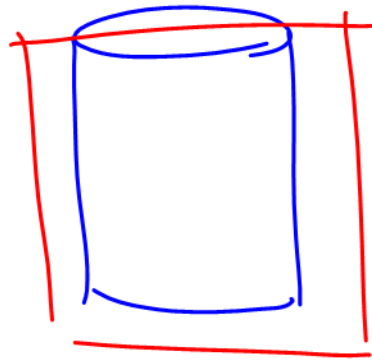
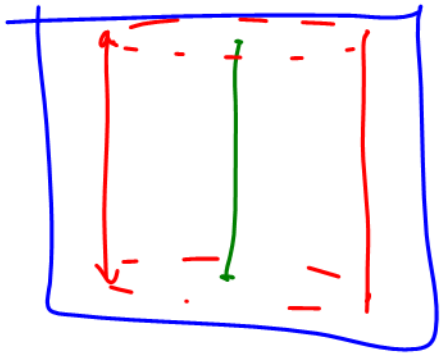
۳۲ (۱)



$2(14) + 2(10) = 48$













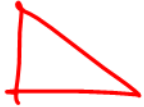




زاویه
خارج



زاویه
مقابل الزاویه



زاویه
تند

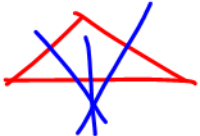


$$a^2 > b^2 + c^2$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$a^2 < b^2 + c^2$$

رابطه کینزی



خارج
مستقیم

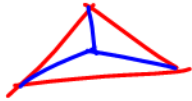


وسط
وتر

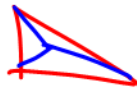


داخل

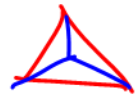
هر سه محور هستند



داخل



داخل

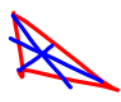


داخل

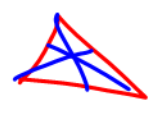
هر سه بی زها



داخل



داخل



داخل

هر سه میانه



خارج



راش
مستقیم



داخل

هر سه ارتفاعها

رو ضلع قائمه
لدا ارتفاع