مربع لاتین

یک جدول مربعی از اعداد ۱ و ۲ و ۳ و ... و n به شکل یک مربع $n\times n$ را که سطرها و ستون های آن با اعداد ۱ و ۲ و ۳ و ... و n پر شده است و در هیچ سطر آن و نیز در هیچ ستون آن عدد تکراری وجود نداشته باشد، را **مربع لاتین** از مرتبه‌ی n می نامند و هر یک از اعداد درون مربع را یک **درایه** می گویند.

هر مربع لاتین در صورت لزوم با یک حرف بزرگ لاتین نام گذاری می شود.

(الف)

۱	۲	۳
۳	۱	۲
۲	۳	۱

(ب)

۱	۲	۳
۲	۳	۱
۳	۱	۲

(ج)

۲	۳	۴	۱
۳	۲	۱	۴
۴	۱	۲	۳
۱	۴	۳	۲

(د)

۲	۳	۴	۱
۴	۱	۲	۳
۱	۴	۳	۲
۳	۲	۱	۴

مربع لاتین چرخشی

۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳
۳	۴	۱	۲
۲	۳	۴	۱

مربع لاتین جایگشتی

مربع لاتین استاندارد

۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳
۳	۴	۱	۲
۲	۳	۴	۱

دو مربع لاتین متعامد

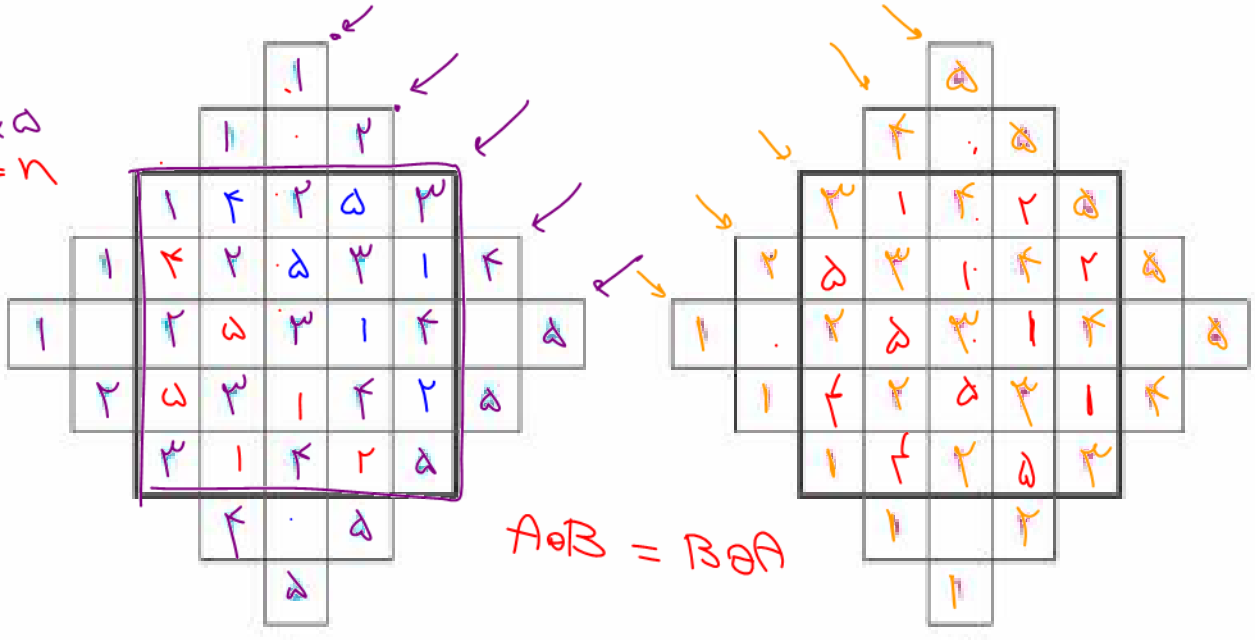
$$A=\begin{bmatrix} ۴ & ۱ & ۲ & ۳ \\ ۲ & ۳ & ۴ & ۱ \\ ۳ & ۴ & ۱ & ۲ \\ ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix} ۳ & ۴ & ۱ & ۲ \\ ۴ & ۱ & ۲ & ۳ \\ ۲ & ۳ & ۴ & ۱ \\ ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \end{bmatrix} \Rightarrow A\Theta B=$$

الف : فقط یک مربع لاتین ۱×۱ وجود دارد که با خودش متعامد نیست.

ب : فقط دو مربع لاتین ۲×۲ وجود دارد که متعامد نیستند.

ج : ثابت می شود که دو مربع لاتین ۶×۶ متعامد وجود ندارد.

د : برای مربع های لاتین $n\times n$ که در آن $n\neq ۱,۲,۶$ باشد. مربع های لاتین متعامد وجود دارد.



(ب) (الف)

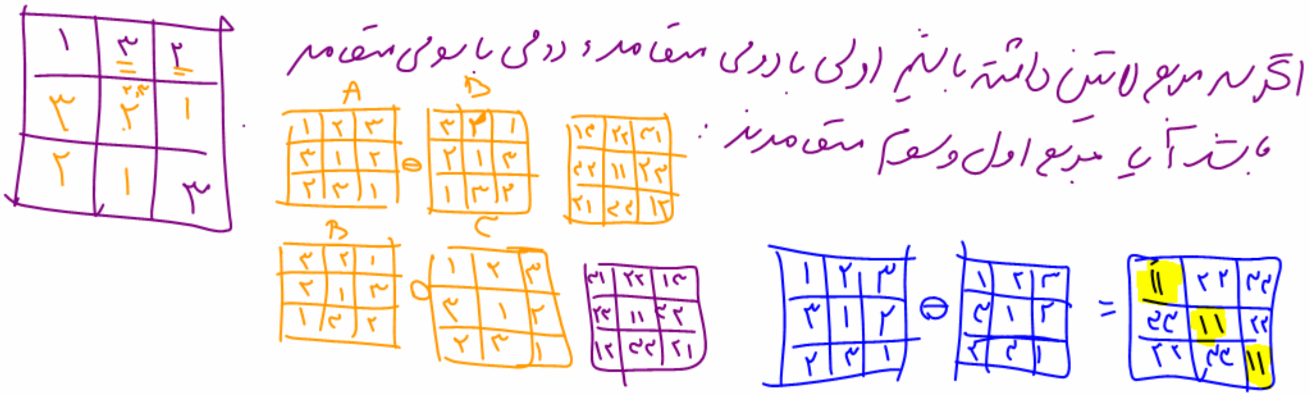
۱ به ازای چند مقدار طبیعی n، دو مربع لاتین متعامد از مرتبهٔ n وجود ندارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۶

۲ برای مربع لاتین روبه‌رو، حاصل $a-b+c-d$ کدام است؟

۱	a	b
d	c	
		۳

۱) صفر ۲) ۱
۳) ۲ ۴) ۳



۳ در مربع لاتین روبه‌رو مجموع درایه‌هایی که با علامت ستاره مشخص شده، کدام است؟

۱) ۱۲
۲) ۱۳
۳) ۱۴
۴) ۱۵

		*	
		*	
*	*	۴	*
		*	

۴ کدام‌یک از گزاره‌های زیر درست است؟

۱) با تعویض جای سطرهای یک مربع لاتین، همواره مربع لاتینی متعامد با مربع لاتین اول به‌دست می‌آید.

۲) با تعویض جای سطرهای یک مربع لاتین، همواره مربع لاتینی غیرمتعامد با مربع لاتین اول به‌دست می‌آید.

۳) اگر دو مربع لاتین متعامد باشند، مربع لاتین حاصل از جایگشت اعضای یکی از آن‌ها، با مربع لاتین دیگر متعامد است.

۴) اگر دو مربع لاتین متعامد باشند، مربع لاتین حاصل از جایگشت اعضای یکی از آن‌ها، با مربع لاتین دیگر متعامد نیست.

۵ چند مربع لاتین وجود دارد؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۶ برای مربع لاتین

۱	۳	۲
۳	۲	۱
۲	۱	۳

، چند مربع لاتین متعامد به‌صورت

	۱	
	۳	
	۲	

می‌توان تعریف نمود؟

۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۳

۷ اگر A یک مربع لاتین 3×3 باشد، آنگاه چند مربع لاتین 3×3 وجود دارد که با A متعامد بوده و از تعویض جای حداقل دو سطر مربع A حاصل شده باشند؟

۱) هیچ
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۳

$\binom{3}{2}=3$

۸ حاصل ضرب درایهٔ سطر اول و ستون دوم و درایهٔ سطر سوم و ستون آخر یک مربع لاتین چرخشی $n\times n$ که سطر اول آن $n , \dots , ۲ , ۱$ می‌باشد، برابر ۱۸ است. مجموع کل درایه‌های این مربع لاتین کدام است؟

۱) ۶۰۵　　۲) ۵۷۶　　۳) ۷۲۶　　۴) ۴۰۵

$$2(n-2)=18$$

$$n-2=9$$

$$n=11$$

مجموع درایه‌های یک سطر/ستون

$$\sum_{i=1}^{n} i=\frac{n(n+1)}{2}=\frac{11\times 12}{2}=66$$

$$n\times\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n^2(n+1)}{2}$$

$$66\times 11 = 726$$

$a \perp b$

۱ اگر $|\vec{a}| = 2\sqrt{6}$ و $|\vec{b}| = 5$ و $|\vec{a} . \vec{b}| = 0$ اندازه بردار $\vec{a} - \vec{b}$ کدام است؟ **سراسری ۸۳**

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۷

$\alpha = 90^\circ$

$(a-b)^2 = |a|^2 + |b|^2 - 2a.b = 4\times 6 + 25 = 24 + 25 = 49$

$a - b = \sqrt{49} = 7$

۲ نقاط $A(5,-4,1), B(-1,2,4), O(0,0,0)$ مفروض هستند و $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$، مقدار $|\overrightarrow{OM}|$ کدام است؟ **سراسری ۹**

۱) $\sqrt{10}$ ۲) $\sqrt{11}$ ۳) $\sqrt{13}$ ۴) $\sqrt{14}$

$\overrightarrow{AM} =$ انتها $-$ ابتدا $= M - A$، $M(x,y,z)$

$AM = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} = \frac{2}{3}(B - A) = \frac{2}{3}\left((-1,2,4)-(5,-4,1)\right) = (-4,4,2)$

$x-5=-4,\ x=1 \quad y+4=4,\ y=0 \quad z-1=2,\ z=3$

$\sqrt{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{1+0+9} = \sqrt{10}$

۳ زاویه‌ی بین دو بردار ۶۰ درجه و اندازه‌ی هریک از دو بردار ۵ واحد است. اندازه‌ی تفاضل دو بردار چند واحد است؟

۱) ۲/۵ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

$|a| = |b|$

$|a+b| = \sqrt{|a|^2+|b|^2+2|a||b|\cos\alpha} = \sqrt{2a^2(1+\cos\alpha)} = 2a|\cos\frac{\alpha}{2}|$

$|a-b| = \sqrt{|a|^2+|b|^2-2|a||b|\cos\alpha} = \sqrt{2a^2(1-\cos\alpha)} = 2a\sin\frac{\alpha}{2} = 2\times 5\times\sin 30^\circ = 5$

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

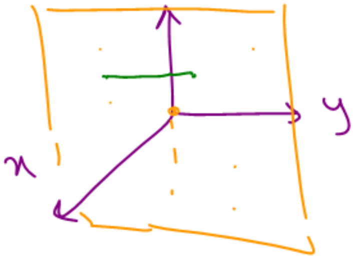
$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$، $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

۴ نقاط $A(3,-4,2)$ و $B(4,5,-6)$ مفروض‌اند. A' تصویر A روی صفحه‌ی yoz و B' قرینه‌ی B نسبت به محور zها است. بردار $\overrightarrow{A'B'}$ کدام است؟

۱) $(4,9,4)$ ۲) $(-4,-1,-8)$ ۳) $(-4,-9,-4)$ ۴) $(4,1,8)$

$B'(-4,-5,-6)$ انتها، $A'(0,-4,2)$ ابتدا



۵ $\vec{a}$ برداری است با اندازه‌ی ۳ به طوری که بردارهای $\vec{a}+2\vec{i}$ و $\vec{a}-2\vec{i}$ هم‌راستا هستند. مجموع مؤلفه‌های بردار $\vec{a}$ کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۶ ۲) -۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۶ اگر $|a\times b| = 3$ باشد، اندازه بردار $(3a-b)\times(4a+b)$ کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۲۱ ۳) ۳ ۴) ۱۸

۷ زاویه بین دو بردار a و b کمتر از ۹۰ درجه است، اگر $|\vec{a}| = 6$، $|\vec{b}| = 5$ و $|a\times(a+b)| = 18$، حاصل $a\,.\,(a+b)$ کدام است؟

سراسری ۸۵

۱) ۵۴ ۲) ۵۶ ۳) ۶۰ ۴) ۶۴

$|a\times a + a\times b|$

$|a\times b| = 18$

$|a||b|\sin\alpha = 18$

$\sin\alpha = \frac{3}{5} \longrightarrow \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos^2\alpha = 1-\frac{9}{25} = \frac{16}{25}$

$\cos\alpha = \frac{4}{5}$

$a.b = |a||b|\cos\alpha$

$6\times 5\times\frac{4}{5} = 24$

$a.a + a.b = 36 + 24 = 60$

$|a|^2 = 36$

۸ در کدام حالت حاصل‌ضرب عددی بردار غیرصفر $\vec{a}$ در مجموع دو بردار غیرصفر $\vec{X}$ و $\vec{Y}$ صفر نمی‌باشد؟

سراسری ۸۶

۱) بردار $\vec{X}$ قرینه بردار $\vec{Y}$

۲) بردار $\vec{a}$ فقط بر یکی از دو بردار $\vec{X}$ یا $\vec{Y}$ عمود

۳) سه بردار دو به دو عمود بر هم

۴) بردار $\vec{a}$ بر صفحه دو بردار $\vec{X}$ و $\vec{Y}$ عمود

$a.(\vec{X}+\vec{Y}) = \vec{a}.\vec{X} + a.\vec{Y}$

$a.b = 0 \to a\perp b$

$\neq 0$

۹ اگر $|\vec{a}+\vec{b}| = |\vec{a}| = |\vec{b}|$ باشند، آن‌گاه زاویه‌ی بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ چند درجه است؟ **سراسری ۸۸**

۱) ۱۰۵ ۲) ۱۲۰ ۳) ۱۳۵ ۴) ۱۵۰

۱۰ دو بردار a و b با تصویرهای $(۲,۰,-۱),(۱,\alpha+۱,۲\alpha)$ مفروض‌اند. به ازای کدام مقادیر α، بردارهای $a+b$ و $a-b$ عمود بر هم‌اند؟ **سراسری ۸۹**

۱) ۰/۴ و -۱ ۲) ۰/۶ و -۱ ۳) ۰/۴ و ۱ ۴) ۰/۶ و ۱

۱۱ مساحت مثلث ABC، با سه رأس $A(۱,-۲,۳)$, $B(۲,۰,۱)$, $C(-۳,۲,۱)$ کدام است؟ **سراسری ۸۹**

۱) $\sqrt{۳۵}$ ۲) $\sqrt{۴۲}$ ۳) $\sqrt{۵۴}$ ۴) $\sqrt{۶۵}$

۱۲ اگر a و b و c سه بردار غیرصفر باشند خلاصه شده $(۲\vec{a}-\vec{b}).((\vec{b}+\vec{c})\times(\vec{c}-\vec{a}))$ کدام است؟ **سراسری ۹۰**

۱) $a.(b\times c)$ ۲) $۲a.(b\times c)$ ۳) $۳a.(b\times c)$ ۴) صفر

۱۳ اگر i و j و k بردارهای واحد باشند حاصل $(\vec{i}\times(\vec{i}\times\vec{j}))\times\vec{k}$ کدام است؟ **سراسری ۹۱**

۱) صفر ۲) -i ۳) j ۴) -k

۱۴ بردار $\vec{V}(x,y,z)$ ، برداری با اندازه‌ی ۵ و عمود بر دو بردار $\vec{a}(-۱ , ۱ , ۲)$ و $\vec{b}(-۲ , ۳ , ۶)$ است. حاصل $x + y + z$ کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۱ ۲) $\sqrt{۵}$ ۳) $\sqrt{۱۰}$ ۴) ۲

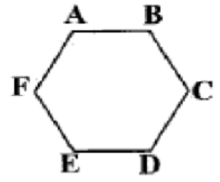
۱۵ اگر $x^۲ + ۴y^۲ + ۹z^۲ = ۱$ ، آن‌گاه حداکثر عبارت $۲x + ۶y + ۳z$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۱۳}$ ۲) $\sqrt{۱۴}$ ۳) ۱۳ ۴) ۱۴

۱۶ بردار $b \times (a \times c)$ با کدام جفت از بردارهای زیر هم‌صفحه است؟

۱) a و b ۲) b و c ۳) a و c ۴) هر سه گزینه

۱۷ در شش ضلعی منتظم ABCDEF به ضلع واحد، حاصل $\overrightarrow{AC}\,.\,\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{AD}\,.\,\overrightarrow{AE}$ برابر کدام است؟



۱) $\sqrt{3}$
۲) $2\sqrt{3}$
۳) ۳
۴) ۶

دی ۱۴۰۱

۱۸ اندازه تصویر قائم بردار $(2,-a,3)$ بر امتداد بردار $(1,0,a)$، برابر $\frac{5}{\sqrt{2}}$ است. اختلاف مقادیر a کدام است؟

۱) ۲
۲) ۷
۳) $\frac{3}{2}$
۴) $\frac{10}{7}$

۱۹ زاویه‌ی بین دو بردار $i-2j$ و $3i+4j$ کدام است؟

۱) منفرجه
۲) حاده
۳) قائمه
۴) دو قائمه

۲۰ اگر $\vec{a}$, $\vec{b}$ دو بردار غیر صفر باشند. زاویه بین دو بردار $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$, $|\vec{b}|\vec{a}+|\vec{a}|\vec{b}$ چقدر است؟

۱) صفر
۲) $\frac{\pi}{2}$
۳) $\frac{\pi}{2}$
۴) π

سوال کیوان !!

$a.b$ $\quad 4x + 2y - z = 18$

$|a|^2 \quad 4x^2 + y^2 + z^2$ min?

$a(2x, y, z)$

$b(2, 2, -1)$

$a.b = 4x + 2y - z = 18$

۱) ۴ $\quad$ ۲) ۲ $\quad$ ۳) ۲۴ − ۲ $\quad$ ۴) ۳۶

$a.b = |a||b| \cos\alpha$

$|a.b| \leq |a||b| \cos\alpha$ — ثابت، Min (کوچکترین مقدار ممکن)، ثابت

$-1 \leq \cos\alpha \leq 1$

$a.b \leq |a||b|$

$18 \leq \sqrt{4x^2 + y^2 + z^2} \times \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}$ ($\sqrt{\;} = 3$)

$6 \leq \sqrt{4x^2 + y^2 + z^2}$

$36 = $ Min

$a.b = |a||b| \cos\alpha$ — ثابت، Min، ثابت

$1 = $ Max

دو بردار موازی / هم راستا

$\frac{x_a}{x_b} = \frac{y_a}{y_b} = \frac{z_a}{z_b}$

$a(2x, y, z)$

$a(2t, 2t, -t)$

$b(2, 2, -1)$

$\frac{2x}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z}{-1} = t$

$x = t \quad y = 2t \quad z = -t$

$\vec{a} \parallel \vec{b} \Rightarrow a = t\vec{b}$

$\vec{a} = t(2, 2, -1)$

$\vec{a} = (2t, 2t, -t)$

$4x + 2y - z = 18$

$4 \times t + 2 \times 2t - (-t) = 18$

$4t + 4t + 1t = 18 \rightarrow 9t = 18 \rightarrow t = 2$

$x^2 + y^2 + 9z^2$ حداقل می‌شود؟ $\quad$ $2x - y + 3z = 12$ ← کدام مقدار y

۱) −۲ $\quad$ ۲) ۲ $\quad$ ۳) ۳ $\quad$ ۴) −۳

$a = (x, y, 3z)$

$b = (2, -1, 1)$

$t\vec{b} \rightarrow a(2t, -t, t)$

$x = 2t \quad y = -t \quad 3z = t$

$a.b = |a||b| \times \cos\alpha$ — ثابت، Min، ثابت ($\sqrt{2^2+1^2+1^2}$)، Max

$2 \times (2t) - (-t) + t = 12$

$4t + t + t = 6t = 12 \rightarrow t = 2$