فضای R^2:

هر نقطه از صفحه مختصات را به صورت زوج مرتب (x, y) نمایش می‌دهند در این صورت مجموعه $\{(x, y) | x, y \in R\}$ شامل همه نقاط صفحه مختصات می‌باشد و آن را با R^2 نمایش می‌دهند ، یعنی $R^2 = \{(x, y) | x, y \in R\}$.

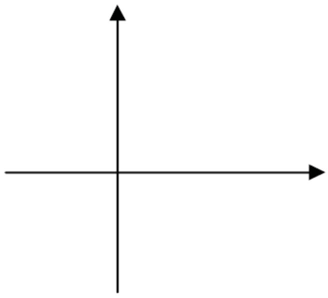
چند مثال در فضای R^2

مثال: نمودار روابط زیر را رسم کنید.

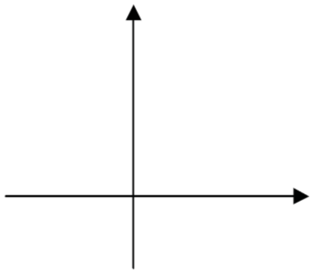
الف. $x = 0$

ب. $y = 0$

ج. $x = 1 \ , \ -1 \le y < 3$



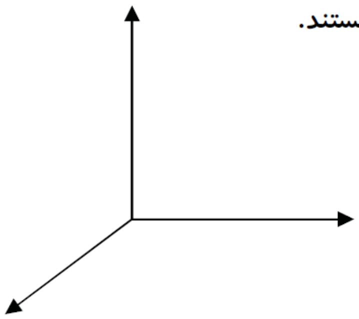
د. $y = x^2 \ , \ -1 < x \le 2$



دستگاه مختصات سه بعدی:

در دستگاه مختصات سه بعدی، سه مولفه طول، عرض و ارتفاع داریم؛ یعنی دستگاه مختصات سه بعدی شامل ox، oy و oz است و هر نقطه آن به شکل (x, y, z) نمایش داده می‌شود. در دستگاه مختصات سه بعدی محورهای ox، oy و oz دو بدو بر هم عمودند وبردارهای i، j و k بردارهای یکه (؟) محورها می‌باشد. دستگاه مختصات سه بعدی، یک دستگاه راست گرد(جهت مثلثاتی) است که می‌توان جای x، y و z را با رعایت ترتیب آن‌ها (اول x، بعد y و سپس z، در جهت مثلثاتی) عوض کرد.

از برخورد هر دو محور یک صفحه تشکیل شده است. صفحات مورد نظر xoy، xoz، yoz هستند.



شماره ناحیه	علامت محورها x	y	z
۱	+	+	+
۲	−	+	+
۳	−	−	+
۴	+	−	+

مثال: در مکعب شکل مقابل:

الف. مختصات رئوس مکعب را بنویسید.

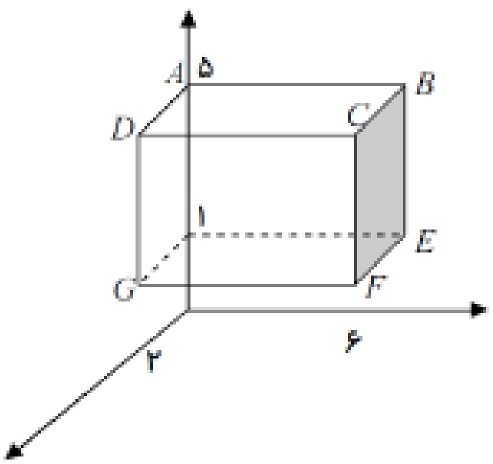
ب. معادله وجه $ABCD$ را بنویسید.

ج. معادله یال AD را بنویسید.

د. نقطه‌ای روی وجه $CBEF$ مشخص کنید.

ه. نقطه ای روی یال CF مشخص کنید.

و. معادله مکعب را مشخص کنید.



تصویر نقطه $A(\alpha\,,\beta\,,\gamma)$ را روی محورها و صفحات خواسته شده بدست آورید.

۱. روی محور x ها

۲. روی محور y ها

۳. روی محور z ها

۴. روی صفحه xoy

۵. روی صفحه yoz

۶. روی صفحه xoz

قرینه نقطه $A(\alpha\,,\beta\,,\gamma)$ را روی محورها و صفحات خواسته شده بدست آورید.

۱.نسبت به محور x ها

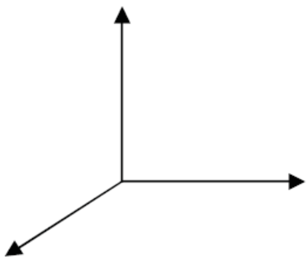
۲. نسبت به محور y ها

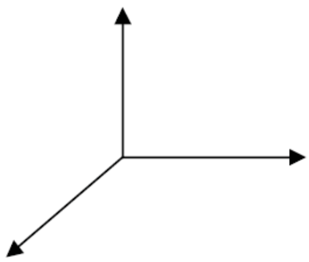
۳. نسبت به محور z ها

۴. نسبت به صفحه xoy

۵. نسبت به صفحه yoz

۶. نسبت به صفحه xoz





[redacted] قرینه نقطه $A(\alpha\,,\beta\,,\gamma)$ نسبت به صفحه $x=y$، $A'(\beta\,,\alpha\,,\gamma)$ و نسبت به صفحه $x=-y$، $A'=(-\beta\,,-\alpha\,,\gamma)$ است. و نسبت به صفحه $x=k$، $A'(۲k-\alpha\,,\beta\,,\gamma)$ می‌باشد.

۱ نقطه $A(-۱,-۳,۲)$ مفروض است، اگر قرینه نقطه A نسبت به صفحه xoz، A' و تصویر نقطه A' روی محور y ها، A'' باشد؛ حاصل جمع عرض های دو نقطه A' و A'' کدام است؟

۱. ۳-

۲. صفر

۳. ۳

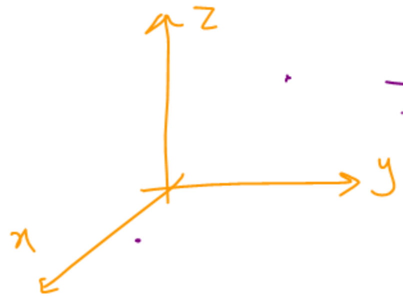
۴. ۶

فاصله نقطه $A(x_1 , y_1 , z_1)$ را تا محورها و صفحات خواسته شده بدست آورید.

۱. محور x ها
۲. محور y ها
۳. محور z ها
۴. صفحه xoy
۵. صفحه xoz
۶. صفحه yoz

۲ اگر فاصله نقطه A از محورهای ox، oy و oz به ترتیب برابر با $\sqrt{۲}$، $\sqrt{۵}$ و $\sqrt{۵}$ باشد، فاصله نقطه A از مبدا مختصات چقدر است؟

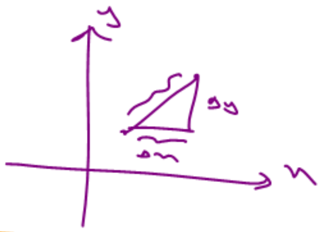
۱. $\sqrt{۳}$
۲. ۲
۳. $\sqrt{۶}$
۴. $۲\sqrt{۲}$



	x	y	z
۱	+	+	+
۲	−	+	+
۳	−	−	+
۴	+	−	+

	x	y	z
۵	+	+	−
۶	−	+	−
۷	−	−	−
۸	+	−	−

بردار

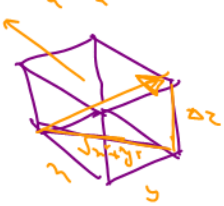


$$|\vec{a}| = \sqrt{a_۱^{۲} + a_۲^{۲} + a_۳^{۲}} = \sqrt{(x_۲ - x_۱)^{۲} + (y_۲ - y_۱)^{۲} + (z_۲ - z_۱)^{۲}}$$

انتها ابتدا

$$\vec{AB} = B - A = (x_B - x_A , y_B - y_A , z_B - z_A)$$

$\sqrt{x_A^2 + y_A^2 + z_A^2}$



$$|OA| = \sqrt{x_A^2 + y_A^2 + z_A^2}$$

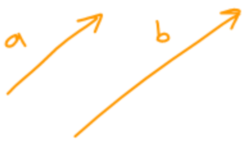
۳ اگر بردارهای $\vec{a}(m-1,1,n+m)$ و $\vec{b}(0,-2,-4)$ موازی باشند، $n-m$ کدام است؟

۱. ۲- ۲. صفر ۳. ۱ ۴. ۲

بردارهای موازی

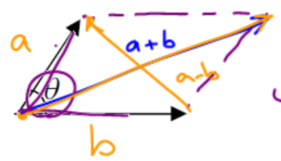
$$\frac{x_a}{x_b}=\frac{y_a}{y_b}=\frac{z_a}{z_b}$$

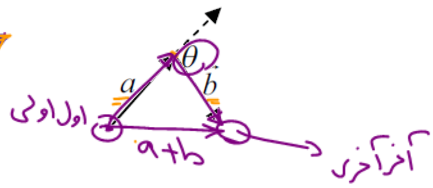
بردار موازی



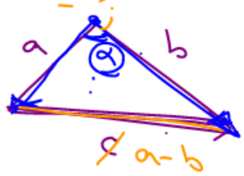
$$\underbrace{\vec{b}=r\vec{a}} \to \vec{a}\parallel\vec{b}$$

جمع دو بردار





$$*\ \underbrace{|a+b|}_{\text{برآیند}}{}^2=|a|^2+|b|^2+2|a||b|\cos\theta$$

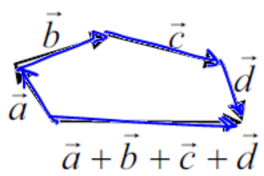


$*\ (a-b)^2$

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\alpha$$

$$b\to -b \to (a+b)^2=a^2+b^2+2ab\cos\alpha$$

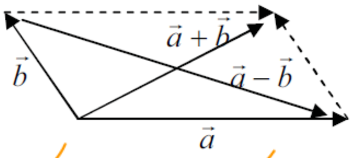
$$a+b=a-b \xleftrightarrow{\text{منطبق}} a\perp b$$



$$a+b \perp a-b \xleftrightarrow{\text{لوزی}} |a|=|b|$$

$|a+b|^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha$

$|a-b|^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha$



بردار یکه: طول بردار یک است

$x \to i$, $y \to j$, $z \to k$

$a(1,-1,2) = i - j + 2k$

$|a| = \sqrt{1+1+2^2} = \sqrt{6}$

$e_a = \dfrac{\vec a}{|a|} = \left(\dfrac{1}{\sqrt6}, \dfrac{-1}{\sqrt6}, \dfrac{2}{\sqrt6}\right)$

۴ نقاط $A(-1,2,1)$ و $B(2,-1,-2)$ مفروض‌اند. اگر $\vec{BM} = \frac{3}{2}\vec{MA}$ باشد، مجموع طول و ارتفاع نقطه M کدام است؟

۱. صفر ۲. $\frac{2}{5}$ ۳. $\frac{3}{5}$ ۴. ۱

$M(x, y, z)$

$BM(x-2, y+1, z+2)$

$\frac{3}{2} MA(-1-x, 2-y, 1-z)$

$\vec{BM} = \frac{3}{2}\vec{MA}$

$-\frac{3}{2} - \frac{3}{2}x = x - 2$

$\frac{1}{2} = \frac{5}{2}x \to x = \frac{1}{5}$

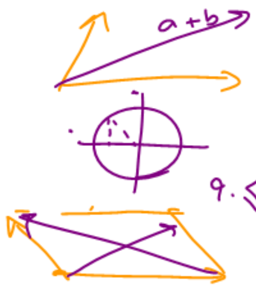
$\frac{3}{2} - \frac{3}{2}z = z + 2$

$-\frac{1}{2} = \frac{5}{2}z$

$z = -\frac{1}{5}$

۵ بر روی دو بردار $\vec a = -i + 2j + 3k$ و $\vec b = 2i - j + k$ متوازی الاضلاعی ساخته شده است. طول قطر کوچک کدام است؟

۱. $\sqrt{18}$ ۲. $\sqrt{20}$ ۳. $\sqrt{22}$ ۴. $\sqrt{24}$



$90 \leq \alpha \leq 180$

$a-b > a+b$

$a(-1, 2, 3)$

$b(2, -1, 1)$

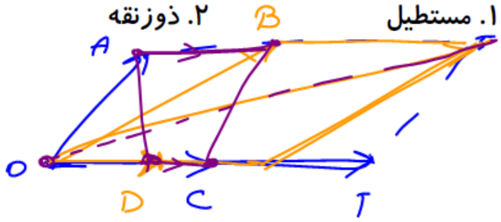
$a-b(-3, 3, 2) = \sqrt{9+9+4}$

$\sqrt{22}$

$a+b(1, 1, 4)$ $|a+b| = \sqrt{1+1+16} = \sqrt{18}$

۶ چهار بردار OA و OB و OC و OD در تساوی $k>1$, $\vec{OA} + k\vec{OC} = \vec{OB} + k\vec{OD}$ صدق می‌کنند؛ چهارضلعی $ABCD$ کدام است؟

۱. مستطیل ۲. ذوزنقه ۳. لوزی ۴. متوازی الاضلاع



$\vec{OA} - \vec{OB} = k\vec{OD} - k\vec{OC}$

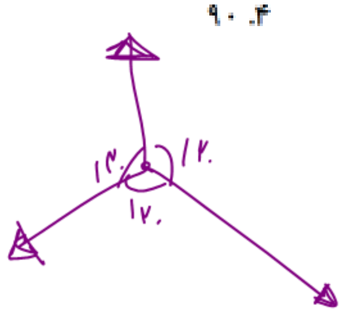
$\vec{OA} - \vec{OB} = k(\vec{OD} - \vec{OC})$

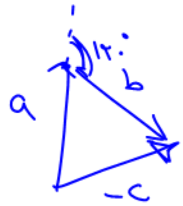
$\vec{BA} = k\vec{DC} \longrightarrow AB \parallel DC$

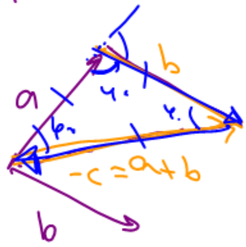
۷ سه بردار با اندازه برابر در رابطه $\vec a + \vec b + \vec c = \vec 0$ صدق می‌کند، زاویه بین دو بردار $\vec a$ و $\vec b$ چند درجه است؟

۱. صفر ۲. ۶۰ ۳. ۱۲۰ ۴. ۹۰

$a + b = -c$







$|a+b|=\sqrt{5+16+9} \leftarrow a+b(\sqrt{5}, 4, -3) \leftarrow (0,3,-1)$ $(\cancel{m}\sqrt{5},1,-2)$

$|a+b|=\sqrt{30}$

۷ اگر $\vec{a} = m i + j - 2k$ و $\vec{b} = 3j - k$ باشد و $\vec{a}+\vec{b}$ بر $\vec{a}-\vec{b}$ عمود باشد، آن‌گاه بردار $\vec{a}+\vec{b}$ کدام است؟

۱. $\sqrt{۳۰}$ ۲. $\sqrt{۲۹}$ ۳. $\sqrt{۳۱}$ ۴. $\sqrt{۲۶}$

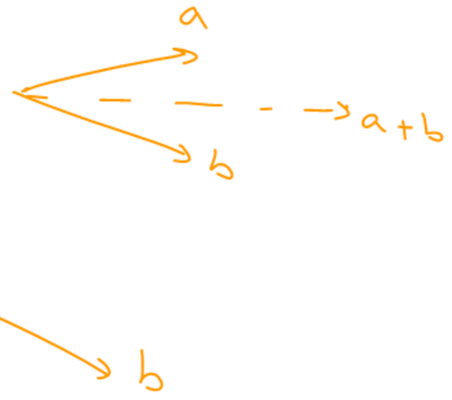
$\sqrt{9+1} = \sqrt{m^2+1+4} \Rightarrow (\sqrt{10})^2 = (\sqrt{m^2+5})^2 \rightarrow 10 = m^2+5$

$5 = m^2$

۸ زاویه بین $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برابر ۵۳° می‌باشد، زاویه بین بردارهای $e_{\vec{a}}+e_{\vec{b}}$ و $|\vec{a}|\vec{b}-|\vec{b}|\vec{a}$ چند درجه است؟

۱. ۵۰ ۲. ۲۵ ۳. ۹۰ ۴. ۲۷۰

$e_a = \frac{\vec{a}}{|a|}$



$|e_a| = |e_b| = 1$

$|\vec{a}|b|| = |\vec{b}|a|| = |a||b|$

$W = F.d.\cos\theta$

حاصلضرب داخلی F و d

ضرب داخلی

ضرب داخلی: اگر $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ و $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$ دو بردار باشند، ضرب داخلی آن‌ها با نماد $a.b$ نمایش داده می شود و به صورت زیر تعریف می‌شود (محاسبه می‌شود)

$\vec{a}.\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ — یک عدد

$\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$

$$\cos\theta = \frac{a.b}{|a||b|}$$

$\cos\theta < 0 \longrightarrow \theta > 90$

$\cos\theta > 0 \longrightarrow \theta < 90$

$a(1, 2, 0)$ $\quad \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$

$b(-1, 0, 2)$ $\quad \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$

$a.b = -1 + 0 + 0 = -1$

$\cos\theta = \frac{-1}{\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$

$|a| = 2 \quad |b| = 3 \quad \theta = 45^\circ$

$a.b = |a||b|\cos 45 = 2 \times 3 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$

$\cos\theta = 0 \longrightarrow \theta = 90^\circ$

$a.b = 0 \longleftrightarrow a \perp b$

مثال: ویژگی‌های ضرب داخلی دو بردار:

۱. $\vec{a}.\vec{b} = \vec{b}.\vec{a}$

۲. خاصیت پخشی نسبت به جمع و تفریق بردارها:

$(\vec{b} \pm \vec{c}).\vec{a} = \vec{b}.\vec{a} \pm \vec{a}.\vec{c}$

$\vec{a}.(\vec{b} \pm \vec{c}) = \vec{a}.\vec{b} \pm \vec{a}.\vec{c}$ — خاصیت جابجایی

در واقع فاکتورگیری نیز برقرار است.

۳. اگر $r \in R$ آن‌گاه $r(\vec{a}.\vec{b}) = (r\vec{a}).\vec{b} = \vec{a}.(r\vec{b})$

۴. $\boxed{\vec{a}.\vec{a} = |\vec{a}|^2}$

۵. طرفین یک رابطه را می‌توان در یک بردار، ضرب داخلی کرد ولی عکس آن درست نیست.

$\vec{b} = \vec{c} \Rightarrow \vec{a}.\vec{b} = \vec{a}.\vec{c}$

$\vec{a}.\vec{b} = \vec{a}.\vec{c} \not\Rightarrow \vec{b} = \vec{c}$

$a(1, 0, 0)$

$b(0, 2, 5)$

$c = (0, -1, 3)$

$a.b = 0$

$a.c = 0 \quad b \neq c$

جمع مولفه‌ها $(x_a + x_b, y_a + y_b, z_a + z_b)$

$a+b \longrightarrow |a+b| = \sqrt{|a|^2 + |b|^2 + 2|a||b|\cos\alpha} \Rightarrow |a+b|^2 = a^2 + b^2 + 2a\cdot b$

۹ اگر $|\vec{a}| = ۲$ و $|\vec{b}| = ۳$ و $\vec{a}\,.\,(\vec{a}+\vec{b}) = ۷$، آن‌گاه زاویه بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ کدام است؟

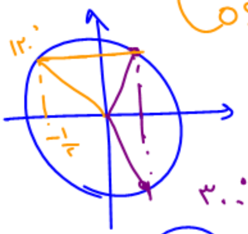
۱. $\frac{\pi}{۴}$ ۲. $\frac{\pi}{۳}$ ۳. $\frac{\pi}{۲}$ ۴. $\frac{۲\pi}{۳}$

$a\cdot(a+b) = a^2 + a\cdot b = 7$

$a\cdot b = 3$

$\frac{D \text{ درجه}}{180} = \frac{\theta \text{ رادیان}}{\pi}$

$\cos\theta = \frac{a\cdot b}{|a||b|} = \frac{3}{2\times 3} = \frac{1}{2} \longrightarrow \theta = 60^\circ \longrightarrow \frac{\pi}{3}$



۱۰ زاویه بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$، ۱۲۰° می‌باشد و بردار $۲\vec{a}+\vec{b}$ بر بردار $\vec{a}$ عمود است. در این صورت $\frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}$ کدام است؟

۱. ۱ ۲. $\frac{۱}{۲}$ ۳. $\frac{۱}{۳}$ ۴. $\frac{۱}{۴}$

$\frac{|a|}{|b|} = \frac{\cos\theta}{2} = \frac{-\frac{1}{2}}{2} = -\frac{1}{4}$

$(2a+b)\cdot a = 0$

$2a^2 + b\cdot a = 0 \longrightarrow 2a^2 = -b\cdot a \longrightarrow \frac{2|a|}{2|b|} = \frac{-|b||a|\cos\theta}{2|b|}$

۱۱ زاویه بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$، ۱۲۰° می‌باشد و $|\vec{a}| = ۲|\vec{b}|$، زاویه بین بردار $\vec{a}+\vec{b}$ و بردار کوچکتر چند درجه است؟

۱. ۳۰ ۲. ۴۵ ۳. ۹۰ ۴. ۱۲۰

$\cos\theta = \frac{(a+b)\cdot b}{|a+b||b|} = \frac{a\cdot b + b^2}{\sqrt{3}|b| \times |b|} = \frac{-|b|^2 + |b|^2}{\sqrt{3}|b|^2} = 0$

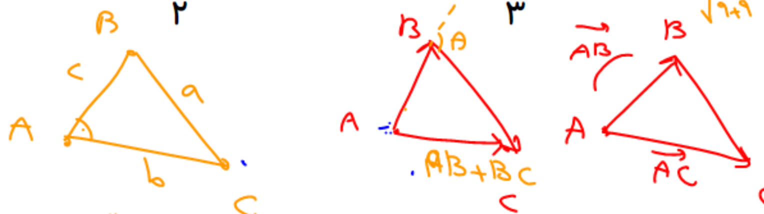
$\sqrt{|a|^2 + |b|^2 + 2|a||b|\cos\alpha} = \sqrt{4|b|^2 + |b|^2 - 2|b|^2} = \sqrt{3|b|^2} = |b|\sqrt{3}$

۱۲ اگر $A(۱,۲,۵)$ و $B(۳,۱,۷)$ و $C(۴,-۱,۵)$ سه راس مثلث باشد، زاویه A کدام است؟

۱. $\frac{\pi}{۴}$ ۲. $\frac{\pi}{۶}$ ۳. $\frac{\pi}{۳}$ ۴. $\frac{\pi}{۲}$

$AB(2,-1,2) \rightarrow \sqrt{4+1+4}$

$AC(3,-3,0) \rightarrow \sqrt{9+9}$



$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

$\cos\theta = \frac{\vec{AB}\cdot\vec{AC}}{|AB||AC|}$

$\cos\theta = \frac{6+3+0}{3\times 3\sqrt{2}} = \frac{9}{9\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$(\vec a+\vec b)^2=(\vec a+\vec b).(\vec a+\vec b)=|\vec a+\vec b|^2=|\vec a|^2+|\vec b|^2+2\vec a.\vec b$$

$$(\vec a-\vec b).(\vec a-\vec b)=|\vec a-\vec b|^2=|\vec a|^2+|\vec b|^2-2\vec a.\vec b$$

$$(\vec a-\vec b).(\vec a+\vec b)=|\vec a|^2-|\vec b|^2$$

$$a^2-\cancel{b.a}+\cancel{b.a}-b^2$$

نتیجه: $|\vec a+\vec b|^2+|\vec a-\vec b|^2=2\left(|\vec a|^2+|\vec b|^2\right)$

متناسب با سوال یا ترکیب و تفاضل را جمع یا منها می‌کنیم

۱۳ اگر $|\vec a|=3$، $|\vec b|=8$ و $|\vec a+\vec b|=7$ آن‌گاه طول بردار $\vec a-\vec b$ چقدر است؟

۱. ۶   ۲. ۸   ۳. $\sqrt{93}$ ۴. $\sqrt{97}$

$$(a-b)^2=\overset{9}{a^2}+\overset{64}{b^2}\overset{-(-24)}{-2a.b}=73+24=97$$

$$(a+b)^2=a^2+b^2+2a.b$$

$$7^2=3^2+8^2+2a.b$$

$$\overset{40}{49-9}-64=2a.b$$

$$-24=2a.b$$

اگر $\vec{u}$ و $\vec{v}$ دو بردار باشند آن گاه $|\vec{u}.\vec{v}| \le |\vec{u}|\,|\vec{v}|$

$U . V = |U||V| \cos\alpha$

$-1 \le \cos\alpha \le 1$

|ضرب داخلی| ≤ حاصلضرب اندازه دو بردار

قدر مطلق ضرب داخلی

$|a.b| \le |a||b|$

۱۴ اگر $x^{2}+y^{2}+z^{2}=9$ باشد، بیشترین مقدار عبارت $6x-3y+2z$ کدام است؟

۱. ۷ ۲. ۲۱ ۳. ۹ ۴. ۳

(x, y, z)

$(x,y,z).(6,-3,2)=6x-3y+2z \qquad \sqrt{x^{2}+y^{2}+z^{2}}=3$

$6x-3y+2z \le \underbrace{\sqrt{x^{2}+y^{2}+z^{2}}}_{3} \times \underbrace{\sqrt{6^{2}+3^{2}+2^{2}}}_{7} \le 21$

تصویر

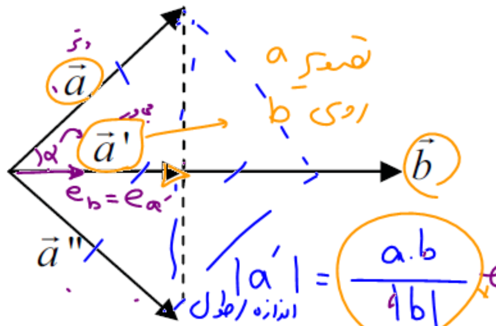
تصویر قائم بردار $\vec{a}$ بر روی امتداد (راستای ؟) بردار $\vec{b}$: $|b|$

$\cos\alpha = \frac{|a'|}{|a|} \rightarrow |a'| = |a|\cos\alpha = \frac{a.b}{|b|}$

تصویر $\vec{a}$ را با نماد $\vec{a}\,'$ نشان می‌دهیم و به صورت زیر محاسبه می‌کنیم.

$$\vec{a}\,' = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|^{2}}\vec{b}.$$

$e_a = \frac{\vec{a}}{|a|} \Rightarrow \vec{a} = |a| \times \vec{e_a}$



و قرینه بردار $\vec{a}$ نسبت به بردار $\vec{b}$ را با نماد $\vec{a}\,''$ نشان داده و $\vec{a}\,''=2\vec{a}\,'-\vec{a}$

$|a'| = \frac{a.b}{|b|}$ اندازه / طول — طول بردار

$e_b = \frac{b}{|b|}$ ؛ $\frac{a.b}{|b|^{2}}\vec{b}$ خود بردار a'

نکته: $|\vec{a}\,''|=|\vec{a}|$ و $|\vec{a}\,'|=|\vec{a}|\cos\theta$ و $|\vec{a}\,'|=\frac{|\vec{a}.\vec{b}|}{|\vec{b}|}$

$a + a'' = 2a'$

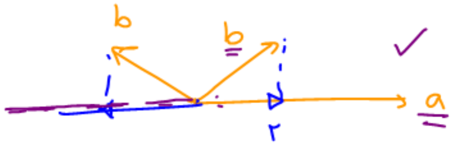
$a'' = 2a' - a = 2\frac{a.b}{|b|^{2}}\vec{b} - \vec{a}$

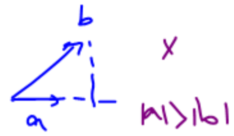
۱۵ اگر $a=3i-4k$ و اندازه تصویر بردار b در امتداد بردار a برابر ۲ باشد، $a.b$ کدام است؟

۱. -۱۰ ۲. -۲ ۳. ۲ ۴. ۱۰

$|a| = \sqrt{9+16} = 5 \qquad (3, 0, -4)$

$\frac{a.b}{|a|} = 2 \qquad a.b = 10$





۱۶ اگر بردار $a=(1,-1,m)$ با محور z ها زاویه ۴۵ درجه بسازد، کسینوس زاویه‌ی این بردار با محور x ها کدام است؟

۱. $\frac{1}{4}$ ۲. $\frac{1}{3}$ ۳. $\frac{1}{2}$ ۴. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

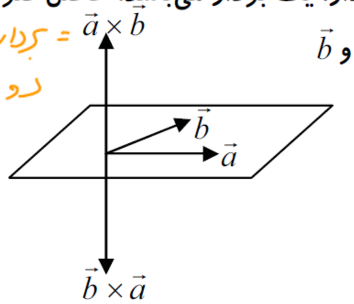
۱۷ سه نقطه $A(2,1,0)$ و $B(3,-1,2)$ و $C(-1,1,3)$ سه راس مثلثی هستند. $CosA$ کدام است؟

۱. $\frac{\sqrt{2}}{6}$ ۲. $\frac{\sqrt{2}}{4}$ ۳. $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ۴. $\frac{\sqrt{3}}{6}$

$(a\times b)\cdot a = 0$
$(a\times b)\cdot b = 0$

ضرب خارجی - ضرب برداری

برخلاف ضرب داخلی دو بردار که حاصل آن یک عدد حقیقی است، حاصل ضرب خارجی دو بردار، یک بردار می‌باشد. حاصل ضرب خارجی $\vec{a}$ در $\vec{b}$ را با نماد $\vec{a}\times\vec{b}$ یا $\vec{a}\wedge\vec{b}$ نمایش داده می‌شود. $\vec{a}\times\vec{b}$ برداری است عمود بر بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ (قانون دست راست)



= برداری عمود بر دو بردار

فرض کنیم $\vec{a}(a_1,a_2,a_3)$ و $\vec{b}(b_1,b_2,b_3)$ دو بردار درفضای R^3 باشند ضرب خارجی $\vec{a}\times\vec{b}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$a\times b=\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = i(a_2b_3-a_3b_2) - j(a_1b_3-b_1a_3) + k(a_1b_2-a_2b_1)$$

$a(1,0,-2)$ $b(3,2,-1)$

$$|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$$

$$a\times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = i(4) - j(5) + k(2)$$

$(4,-5,2)$

$|a\times b| = \sqrt{16+25+4} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

ویژگی‌های ضرب خارجی دو بردار:

۱. ضرب خارجی دو بردار خاصیت جابجایی ندارد. $\vec{a}\times\vec{b} \neq \vec{b}\times\vec{a}$ و $\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}$

۲. $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = \left|\vec{b}\times\vec{a}\right| = |a||b|\sin\alpha$

$a.(\underbrace{b}_{\text{بردار}}.\underbrace{c}_{\text{عدد}}) =$ امکان پذیر نیست

۳. خاصیت شرکتپذیری ندارد. $\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right) \neq \left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{c}$

۴. $\left(r\vec{a}\right)\times\vec{b} = \vec{a}\times\left(r\vec{b}\right) = r\left(\vec{a}\times\vec{b}\right) \quad , \quad r\in R$

۵. خاصیت توزیع پذیری $\quad \vec{a}\times\left(\vec{b}\pm\vec{c}\right) = \vec{a}\times\vec{b}\pm\vec{a}\times\vec{c} \quad \neq \quad \left(\vec{b}\pm\vec{c}\right)\times\vec{a} = \vec{b}\times\vec{a}\pm\vec{c}\times\vec{a}$

۶. خاصیت حذف برقرار نیست. $\vec{b} = \vec{c} \Rightarrow \vec{a}\times\vec{b} = \vec{a}\times\vec{c}$ ولی عکس آن برقرار نیست.

$\left.\begin{matrix}\alpha = 0 \\ \alpha = 180\end{matrix}\right\} \rightarrow a\times b = 0$

۷. ضرب خارجی هر بردار در خودش برابر صفر است. یعنی $\vec{a}\times\vec{a} = \vec{0}$ $\quad a\times a\times \sin\alpha = 0$

۸. دو بردار غیر صفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ موازیند اگر وفقط اگر ضرب خارجی آن‌ها صفر برداری شود. $\vec{a} \,||\, \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\times\vec{b} = \vec{0}$

۹. اتحادها برقرار نیستند.

$a\times b = 0 \longleftrightarrow$ دو بردار موازیند

$\alpha = 0$

$\alpha = 180$

مقایسه ضرب داخلی و خارجی

$a(x_a, y_a, z_a) \quad b(x_b, y_b, z_b)$

فرمول	$a.b = x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b$	$a\times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \end{vmatrix}$
اندازه	$a.b = \|a\|\|b\|\cos\alpha$	$a\times b = \|a\|\|b\|\sin\alpha$
نتیجه	تصویر a روی b $\quad \|a'\| = \frac{a.b}{\|b\|} \quad a' = \frac{a.b}{\|b\|^2}\vec{b}$ قرینه $\quad 2a' = a + a'' \rightarrow a'' = 2a' - a = 2\frac{a.b}{\|b\|^2}b - a$	$S_{\square} = ab\sin\alpha = \|a\times b\|$ $S_{\triangle} = \frac{1}{2}\|a\times b\|$
ویژگی	$a.b = b.a$ $a.a = a^2$	$a\times b = -b\times a$ $a\times a = 0$
کاربرد	$a \perp b \Longleftrightarrow a.b = 0$	$a \,\|\|\, b \Longleftrightarrow a\times b = 0$

سه بردار در یک صفحه باشند $\quad a.(b\times c) = 0$

ضرب مختلط $= 0$

۱۸ اگر $\vec{v}_1(-1,1,2)$ و $\vec{v}_2(1,-2,3)$ باشد، زاویه $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$ با کدام محور بزرگ‌تر است؟

(k,k,k)

۱. محور x ها ۲. محور y ها ۳. محور z ها ۴. با هر سه یکسان است

$a(x_a,y_a,z_a) \longrightarrow \frac{a}{|a|} = e_a(\cos\alpha_1, \cos\alpha_2, \cos\alpha_3)$

$(x_a,y_a,z_a)(1,0,0)$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = i(7) - j(-5) + k(1)$$

$(7,5,1)$

a بردار

زاویه با محور x

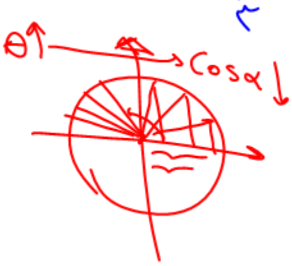
i

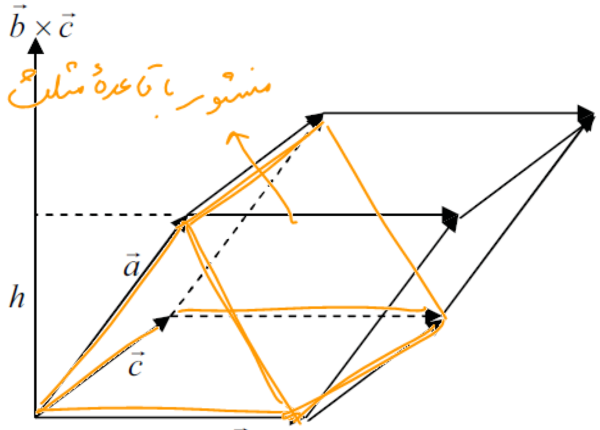
$\cos\alpha_1 = \frac{a \cdot i}{|i|\,|a|} = \frac{x_a}{|a|}$ زاویه با محور x

$\cos\alpha_3 = \frac{a \cdot k}{|a|\,|k|} = \frac{z_a}{|a|}$

زاویه با محور y ها $\cos\alpha_2 = \frac{a \cdot j}{|a|\,|j|} = \frac{y_a}{|a|}$ زاویه با محور y ها

$\theta \uparrow$ $\cos\alpha \downarrow$





ضرب مختلط

می دانیم مساحت قاعده متوازی السطوح برابر است با $|\vec{b} \times \vec{c}|$ و طول ارتفاع این متوازی السطوح برابر است با اندازه ، تصویر قائم بردار $\vec{a}$ بر بردار $\vec{b} \times \vec{c}$

یعنی $h = \frac{|\vec{a}.(\vec{b} \times \vec{c})|}{|\vec{b} \times \vec{c}|}$ و از طرفی ارتفاع برابر است با حجم متوازی السطوح تقسیم بر مساحت قاعده

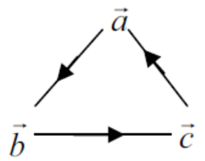
لذا حجم متوازی السطوح از رابطه $V = |\vec{a}.(\vec{b} \times \vec{c})|$ بدست می‌آید.

به ضرب $\vec{a}.(\vec{b} \times \vec{c})$، ضرب مختلط نیز می‌گویند. $a.(b \times c) = (b \times c).a$

نکته: ضرب مختلط دارای حرکت دوری می باشد. یعنی $a.(b \times c) = -a.(c \times b)$

$$\vec{a}.(\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}.(\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c}.(\vec{a} \times \vec{b})$$

$$a.(b \times c) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_a & y_a & z_a \end{array} \\ \begin{vmatrix} \cancel{i} & \cancel{j} & \cancel{k} \\ x_b & y_b & z_b \\ x_c & y_c & z_c \end{vmatrix} \end{array}$$



$$i.(j \times k) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$i.(j \times k) = 1$

$k.(i \times j) = i.(j \times k) = j.(k \times i)$

$$V = |\vec{a}.(\vec{b} \times \vec{c})| = \left|\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}\right|$$

$V =$ حجم متوازی السطوح ساخته شده با a, b, c

نکته: حجم منشور مثلث القاعده با سه بردار بالا نصف حجم متوازی السطوح می‌باشد.

نکته: حجم چهاروجهی(هرم) $\frac{1}{3}$ حجم منشور و در نتیجه $\frac{1}{6}$ حجم متوازی السطوح می‌باشد.

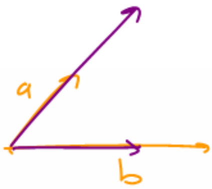
عمود بودن بردارها ⟵ $a.b=0$

موازی بودن بردارها ⟵ $a \times b=0$

هم صفحه بودن بردارها ⟵ $a.(b\times c)=0$

۱۹ به ازای کدام مقدار m، بردار $\vec{a}=(1,2,m)$ را می‌توان به صورت مجموع دو بردار در راستاهای $(0,-1,2)$ و $(2,3,-1)$ نوشت؟

۱. $\frac{2}{3}$ ۲. $-\frac{2}{3}$ ۳. $\frac{3}{2}$ ۴. $-\frac{3}{2}$



$k(2,3,-1)+k'(0,-1,2)=$

$=(2k,3k,-k)+(0,-k',2k')$

$=(2k,3k-k',-k+2k')=(1,2,m)$

$2k=1 \to k=\frac{1}{2}$

$\frac{3}{2}-k'=2 \to k'=-\frac{1}{2}$

$-\frac{1}{2}+2\times-\frac{1}{2}=2\times\frac{-1}{2}$

۲۰ سه بردار $(1,-1,1)$ و $(0,2,1)$ و $(m,0,2)$ هم صفحه‌اند. m کدام است؟

۱. $\frac{3}{4}$ ۲. $\frac{4}{3}$ ۳. $\frac{-3}{4}$ ۴. $\frac{-4}{3}$

$a.(b\times c)=0$

$$\begin{vmatrix} m & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = m(3) - 0 + 2(-2)$$

$3m-4=0$

$m=\frac{4}{3}$

۲۱ اگر $v_1=2i+3j+k$ و $v_2=i-j+k$، حاصل $\frac{|v_1-2v_2|}{|v_1+2v_2|}$ کدام است؟

$(2,3,1)$ $(1,-1,1)$ $\sqrt{26}$ $\sqrt{26}$

$v_1-2v_2=(2,3,1)-(2,-2,2)$

$=(0,5,-1)$

$\sqrt{25+1}=\sqrt{26}$

۱. ۱ ۲. $\sqrt{6}$ ۳. $\frac{\sqrt{6}}{6}$ ۴. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

$v_1+2v_2=(4,1,3)$ $\sqrt{16+1+9}=\sqrt{26}$

۲۲ مساحت متوازی الاضلاعی که سه راس آن نقاط $(1,2,1)$ و $(0,1,1)$ و $(1,-1,2)$ باشد، چقدر است؟

۱. $\sqrt{10}$ ۲. $\sqrt{11}$ ۳. $\sqrt{13}$ ۴. $\sqrt{15}$

۲۳ بردار $\vec{v}$ به طول ۲۶، عمود بر دو بردار $\vec{a}(۴,-۲,-۳)$ و $b(۰,۱,۳)$ می‌باشد. مختصات بردار $\vec{v}$ کدام است؟

۱. $(۶,۲۴,-۸)$

۲. $(-۶,۲۴,-۸)$

۳. $(۳,۱۲,-۴)$

۴. $(-۳,۱۲,-۴)$

۲۴ اگر $۴x^{۲}+۹y^{۲}+z^{۲}=۹$، ماکزیمم عبارت $۴x+۶y+z$ کدام است؟

۱. $۳\sqrt{۳}$

۲. ۹

۳. $۹\sqrt{۲}$

۴. $۹\sqrt{۳}$

۲۵ اگر $a.j=-۲a.k=a.(-۲i+۳j+۲k)=۲$، اندازه تصویر بردار $u(-۳,-۳,۳)$ روی بردار a کدام است؟

۱. $۲\sqrt{۶}$

۲. $\sqrt{۶}$

۳. $\frac{۴\sqrt{۳}}{۳}$

۴. $\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$

۲۶ m چقدر باشد تا نقاط $A(۲,۱,۴)$، $B(m-۱,۵,۲m+۱)$ و $C(۳,۳,۱)$ رئوس یک مثلث قائم الزاویه در راس A باشند؟

۱. $\frac{۱۴}{۵}$

۲. $\frac{۵}{۱۴}$

۳. $\frac{-۱۴}{۵}$

۴. $-\frac{۵}{۱۴}$

۲۷ تصویر قائم بردار $(۰,-۳,۶)$ روی امتداد بردار $(۲,-۱,-۲)$ کدام بردار است؟

۱. $(۲,-۱,-۲)$
۲. $(-۲,۱,۲)$
۳. $(۴,-۲,-۴)$
۴. $(۲,۳,-۱)$

۲۸ اندازه تصویر بردار $\vec{v}(۳,۱,۲)$ بر صفحه yz کدام است؟

۱. $\sqrt{۵}$
۲. $\sqrt{۱۰}$
۳. $\sqrt{۱۳}$
۴. $\sqrt{۱۴}$

۲۹ اندازه تصاویر بردار a روی صفحات برابر $\sqrt{۵}$، $\sqrt{۶}$ و $\sqrt{۷}$ است. طول بردار a کدام است؟

۱. ۵
۲. ۴
۳. ۳
۴. ۵

۳۰ در مستطیل $ABCD$ حاصل $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{DB}$ کدام است؟

۱. $۲\overrightarrow{BC}$
۲. $\vec{O}$
۳. $۲\overrightarrow{DA}$
۴. $۲\overrightarrow{AB}$