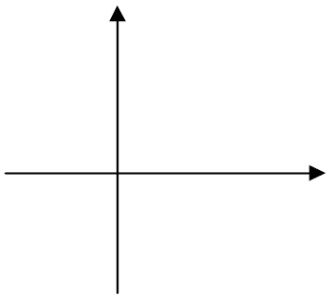
فضای R^{2}:

هر نقطه از صفحه مختصات را به صورت زوج مرتب (x , y) نمایش می‌دهند در این صورت مجموعه $\{(x , y) | x, y \in R\}$ شامل همه نقاط صفحه مختصات می‌باشد و آن را با R^{2} نمایش می‌دهند ، یعنی $R^{2} = \{(x, y) | x, y \in R\}$.

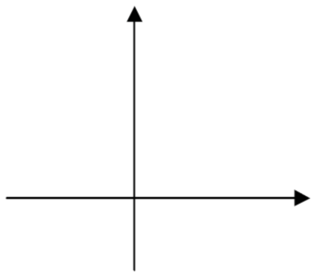
چند مثال در فضای R^{2}

مثال: نمودار روابط زیر را رسم کنید.

الف. $x = 0$ **ب.** $y = 0$ **ج.** $x = 1 , \ -1 \le y < 3$



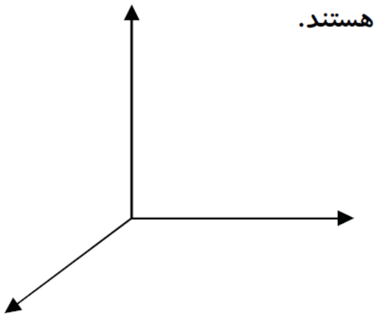
د. $y = x^{2} \ , -1 < x \le 2$



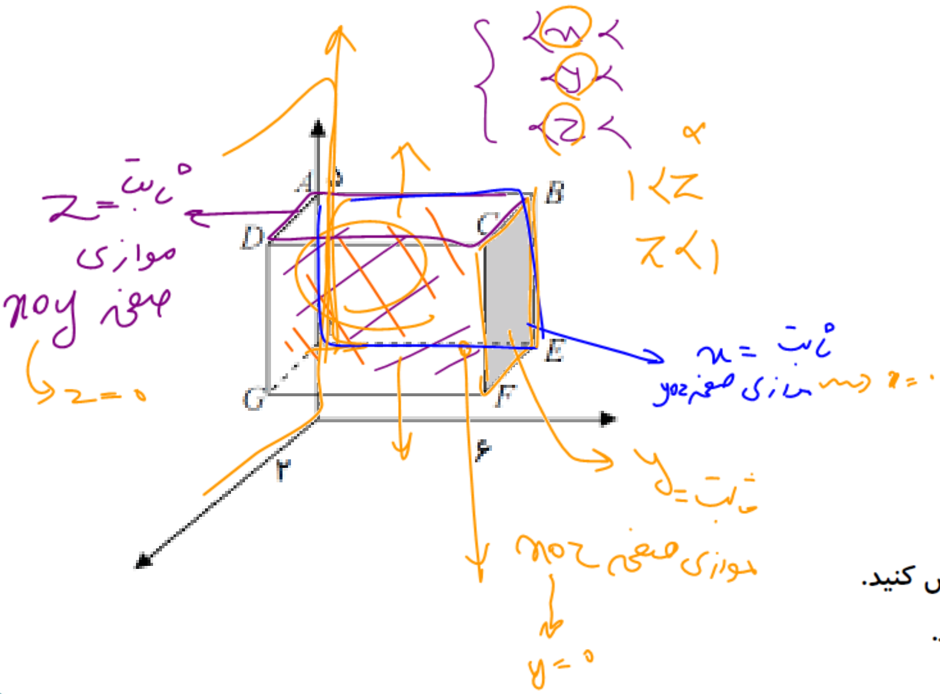
دستگاه مختصات سه بعدی:

در دستگاه مختصات سه بعدی، سه مولفه طول، عرض و ارتفاع داریم؛ یعنی دستگاه مختصات سه بعدی شامل ox، oy و oz است و هر نقطه آن به شکل (x, y, z) نمایش داده می‌شود. در دستگاه مختصات سه بعدی محورهای ox، oy و oz دو بدو بر هم عمودند وبردارهای i، j و k بردارهای یکه (؟) محورها می‌باشد. دستگاه مختصات سه بعدی، یک دستگاه راست گرد(جهت مثلثاتی) است که می‌توان جای x، y و z را با رعایت ترتیب آن‌ها (اول x، بعد y و سپس z، در جهت مثلثاتی) عوض کرد.

از برخورد هر دو محور یک صفحه تشکیل شده است. صفحات مورد نظر xoy، xoz، yoz هستند.



شماره ناحیه	علامت محورها		
	x	y	z
۱	+	+	+
۲	−	+	+
۳	−	−	+
۴	+	−	+



مثال: در مکعب شکل مقابل:

الف. مختصات رئوس مکعب را بنویسید.

ب. معادله وجه $ABCD$ را بنویسید.

ج. معادله یال AD را بنویسید.

د. نقطه‌ای روی وجه $CBEF$ مشخص کنید.

ه. نقطه ای روی یال CF مشخص کنید.

و. معادله مکعب را مشخص کنید.

تصویر نقطه $A(\alpha,\beta,\gamma)$ را روی محورها و صفحات خواسته شده بدست آورید.

۱. روی محور x ها　　　　۲. روی محور y ها

۳. روی محور z ها　　　　۴. روی صفحه xoy

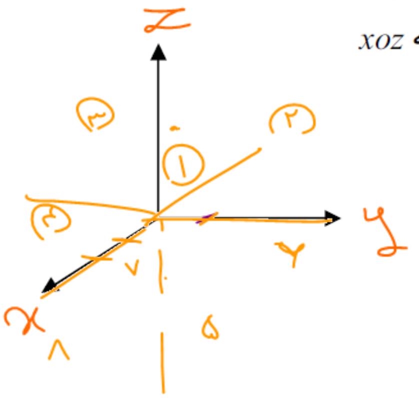
۵. روی صفحه yoz　　　　۶. روی صفحه xoz

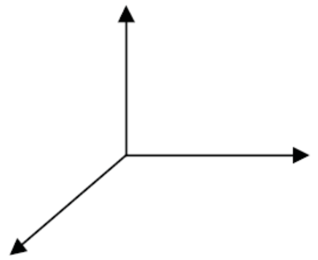
قرینه نقطه $A(\alpha,\beta,\gamma)$ را روی محورها و صفحات خواسته شده بدست آورید.

۱.نسبت به محور x ها　　　　۲. نسبت به محور y ها

۳. نسبت به محور z ها　　　　۴. نسبت به صفحه xoy

۵. نسبت به صفحه yoz　　　　۶. نسبت به صفحه xoz





[redacted] قرینه نقطه $A(\alpha,\beta,\gamma)$ نسبت به صفحه $x=y$، $A'(\beta,\alpha,\gamma)$ و نسبت به صفحه $x=-y$، $A'=(-\beta,-\alpha,\gamma)$ است. و نسبت به صفحه $x=k$، $A'(2k-\alpha,\beta,\gamma)$ می‌باشد.

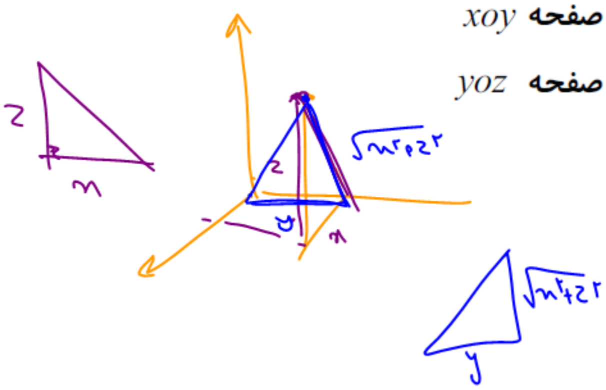
۱ نقطه $A(-1,-3,2)$ مفروض است، اگر قرینه نقطه A نسبت به صفحه xoz، A' و تصویر نقطه A' روی محور y ها، A'' باشد؛ حاصل جمع عرض های دو نقطه A' و A'' کدام است؟

۱. ۳-　　　۲. صفر　　　۳. ۳　　　۴. ۶

فاصله نقطه $A(x_1, y_1, z_1)$ را تا محورها و صفحات خواسته شده بدست آورید.

۱. محور x ها
۲. محور y ها
۳. محور z ها
۴. صفحه xoy
۵. صفحه xoz
۶. صفحه yoz

$\sqrt{x^2+z^2}$



فاصله از مبدا $= \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

۲ اگر فاصله نقطه A از محورهای ox، oy و oz به ترتیب برابر با $\sqrt{2}$، $\sqrt{5}$ و $\sqrt{5}$ باشد، فاصله نقطه A از مبدا مختصات چقدر است؟

۱. $\sqrt{3}$
۲. 2
۳. $\sqrt{6}$
۴. $2\sqrt{2}$

$$AB=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2}=\sqrt{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2+(z_A-z_B)^2}$$

$$OA=\sqrt{x_A^2+y_A^2+z_A^2}$$

بردار = انتها - ابتدا

بردار

طول بردار — نقطه انتها — نقطه ابتدا

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

$\vec{AB}$ = بردار (x, y, z) $\qquad |\vec{AB}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

انتها: $A(1, 0, -2)$ — $y=0$ → در صفحه xoz

ابتدا: $B(-1, 2, 3)$

$\vec{AB} = (-2, 2, 5)$ $\quad \sqrt{4+4+25}=\sqrt{33}$

$\vec{BA} = (2, -2, -5)$ $\quad \sqrt{4+4+25}=\sqrt{33}$

قرینه: $\vec{a} \to -\vec{a}$، $\vec{AB} \to \vec{BA}$، $|\vec{a}| = |-\vec{a}|$

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Longrightarrow \frac{x_a}{x_b}=\frac{y_a}{y_b}=\frac{z_a}{z_b}$$

(x_a, y_a, z_a) $\quad (x_b, y_b, z_b)$

۳ اگر بردارهای $\vec{a}(m-1, 1, n+m)$ و $\vec{b}(\cdot, -2, -4)$ موازی باشند، $n-m$ کدام است؟

۱. ۲-   ۲. صفر   ۳. ۱   ۴. ۲

$m-1=0$

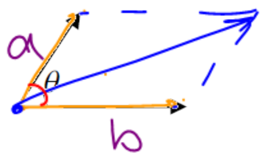
$m=1$

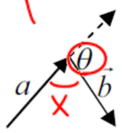
$\frac{-2}{1}=\frac{-4}{n+1} \Rightarrow -2n-2=-4$

$-2n=-2$

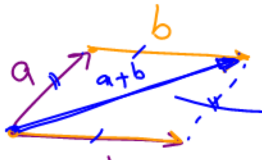
$n=1$

زاویه بین دو بردار یعنی وقتی ابتدای دو بردار یک جا می‌گذاریم





جمع دو بردار

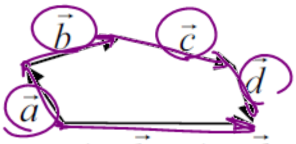


$\vec{a}(x_a, y_a, z_a)$

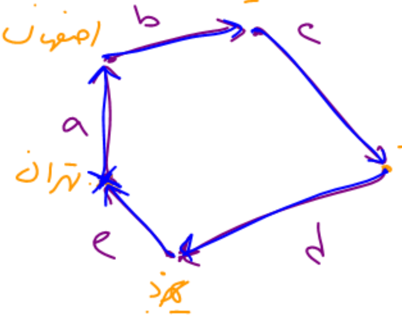
$\vec{b}(x_b, y_b, z_b)$

$\vec{a}+\vec{b}=(x_a+x_b, y_a+y_b, z_a+z_b)$

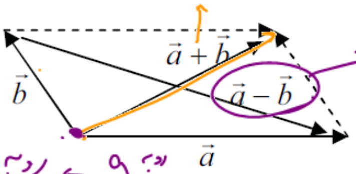
$\vec{a}-\vec{b}=(x_a-x_b, y_a-y_b, z_a-z_b)$



$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}$



$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}+\vec{e}=0$



۴ نقاط $A(-1,2,1)$ و $B(2,-1,-2)$ مفروض‌اند. اگر $\overrightarrow{BM}=\frac{3}{2}\overrightarrow{MA}$ باشد، مجموع طول و ارتفاع نقطه M کدام است؟

۱. صفر
۲. $\frac{2}{5}$
۳. $\frac{3}{5}$

۵ بر روی دو بردار $\vec a=-i+2j+3k$ و $\vec b=2i-j+k$ متوازی الاضلاعی ساخته شده است. طول قطر کوچک کدام است؟

۱. $\sqrt{18}$
۲. $\sqrt{20}$
۳. $\sqrt{22}$
۴. $\sqrt{24}$

۶ چهار بردار OA و OB و OC و OD در تساوی $k>1$ ، $\overrightarrow{OA}+k\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+k\overrightarrow{OD}$ صدق می‌کنند؛ چهارضلعی $ABCD$ کدام است؟

۱. مستطیل
۲. ذوزنقه
۳. لوزی
۴. متوازی الاضلاع

۷ سه بردار با اندازه برابر در رابطه $\vec a+\vec b+\vec c=\vec 0$ صدق می‌کنند. زاویه بین دو بردار $\vec a$ و $\vec b$ چند درجه است؟

۱. صفر
۲. ۶۰
۳. ۱۲۰
۴. ۹۰

۷ اگر $\vec{a} = m\,i + j - 2k$ و $\vec{b} = 3\,j - k$ باشد و $\vec{a} + \vec{b}$ بر $\vec{a} - \vec{b}$ عمود باشد، آن‌گاه بردار $\vec{a} + \vec{b}$ کدام است؟

۱. $\sqrt{30}$
۲. $\sqrt{29}$
۳. $\sqrt{31}$
۴. $\sqrt{26}$

۸ زاویه بین $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برابر 53° می‌باشد، زاویه بین بردارهای $e_{\vec{a}} + e_{\vec{b}}$ و $|\vec{a}|\vec{b} - |\vec{b}|\vec{a}$ چند درجه است؟

۱. ۵۰
۲. ۲۵
۳. ۹۰
۴. ۲۷۰

$A(1,2,-1)$

$B(3,0,-2)$

$M(x,y,z)$

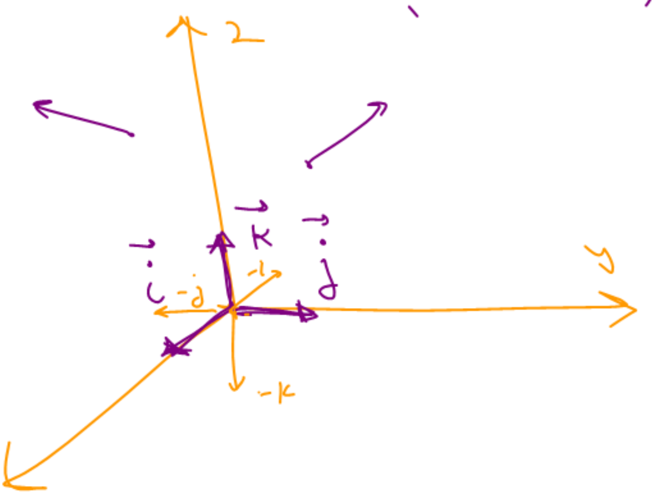
$\overrightarrow{BM} = M - B = (x,y,z) - (3,0,-2) = (x-3, y, z+2)$

$\overrightarrow{MA} = A - M = (1,2,-1) - (x,y,z) = (1-x, 2-y, -1-z)$

$\overrightarrow{AM} = \underset{\text{نقطه}}{M} - A$

بردار یکه = برداری که طولش ۱ است

a بردار $= \vec{a}$



$A(1,2,-1)$

$B(3,-2,0)$

$\overrightarrow{AB} = B - A$

بردار = انتها − ابتدا

$\overrightarrow{AB} = (2,-4,1)$

$\vec{c} = 2\vec{i} - 4\vec{j} + \vec{k}$

بردار به چند مدل گفته میشه

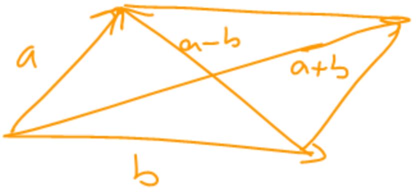
① با ابتدا و انتهایش

② خود بردار با i و j و k

③ مختصات

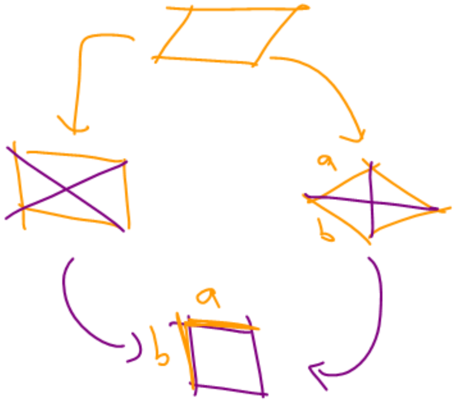
$\vec{c}\,(2,-4,1)$

برآیند و تفاضل $\vec{a}$ و $\vec{b}$ عمودند ⟶ متوازی الاضلاعی که قطرهای آن عمودند ⟶ لوزی ⟶ $|\vec{a}| = |\vec{b}|$



برآیند و تفاضل $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برابرند ⟶ مستطیل ⟶ $\vec{a} \perp \vec{b}$

برآیند و تفاضل عمود و برابرند ⟶ $\vec{a} \perp \vec{b}$ و $|\vec{a}| = |\vec{b}|$



$$x_1 \oplus x_2 \oplus \dots \oplus x_k = n$$

۱ چند دسته‌ی ۷ شاخه‌ای از سه نوع گل موجود می‌توان تشکیل داد؟

۱) ۱۵　　۲) ۲۱　　۳) ۲۸　　۴) ۳۶

$$x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$$

$$x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$$

$$x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$$

$x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$

$x_i, x_j \geq a$ اونایی که بلدیم روحساب می‌کنیم

$x_k < a'$ متمم

جواب = کل حالات − متمم

$x_1 + x_2 + x_3 = 8$: $x_1 \geq 1$ ، $x_2 < 4$

کل حالات $x_1 + x_2 + x_3 = 6$

کل حالات $\binom{8}{2} = \frac{8 \times 7}{2} = 28$

متمم: $x_2 \geq 5$

$x_1 + x_2 + x_3 = 1$

$\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$

$\binom{3}{2} = 3$

$28 - 3 = 25$

$x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$

۲ تعداد جوابهای صحیح معادله $x_1 + x_2 + x_3 = 15$ به شرط $x_i \ge 2$ چند است؟ $(i = 1, 2, 3)$

۱) ۴۵ ۲) ۵۵ ۳) ۹۱ ۴) ۱۳۶

$x_1 + x_2 + x_3 = 9$

$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$

$\binom{11}{2} = \frac{11 \times 10}{2} = 55$

۳ ۸ کبوتر یکسان به چند طریق می‌توانند در ۵ لانه‌ی متمایز قرار گیرند به‌طوری که هیچ لانه‌ای خالی نماند؟

۱) $\binom{12}{4}$ ۲) $\binom{7}{4}$ ۳) $\binom{8}{4}$ ۴) $\binom{8}{5}$

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 3$

$\binom{7}{3} = \binom{7}{4} = \frac{7!}{4!3!} = 35$

۴ نامعادله‌ی $100 < (x_1 + x_2 + x_3)^3 < 300$، در مجموعه‌ی اعداد طبیعی چند جواب دارد؟ (آزاد- ۸۶)

۱) ۴۹ ۲) ۲۱ ۳) ۱۶ ۴) ۶

۴ در بسط $(x+y+z+w)^{۷}$ چند جمله‌ی متمایز ظاهر می‌شود؟

۱) ۱۲۰　　۲) ۳۶۰　　۳) ۲۴۰　　۴) ۶۰

۵ معادله‌ی $x_{۱}^{۴}+x_{۲}+x_{۳}+x_{۴}=۱۲$ در مجموعه‌ی اعداد صحیح نامنفی چند جواب دارد؟

۶ معادله‌ی $x_{۱}+x_{۲}+x_{۳}+x_{۴}=۱۸$ در مجموعه‌ی اعداد صحیح نامنفی، چند جواب با شرط $x_i \geq ۴$ $i \in \{۱,۲,۳,۴\}$ دارد؟

۱) ۱۰　　۲) ۱۸　　۳) ۱۳۵　　۴) ۲۵۵

۷ فرض کنید $A=(10,0,0)$، $B=(0,10,0)$ و $C=(0,0,10)$ سه نقطه در فضای $\mathbb{R}^3$ باشند. درون و روی محیط مثلث ABC چند نقطه با مختصات صحیح وجود دارد؟

۱) ۳۶ ۲) ۴۵ ۳) ۵۵ ۴) ۶۶

۸ در چند جایگشت از حروف کلمه‌ی systems با حذف هر ۳ حرف s کلمه‌ی temy به‌دست می‌آید؟

۱) ۱۰ ۲) ۲۰ ۳) ۳۵ ۴) ۵۶

۹ به چند طریق می‌توان ۵ خودکار یکسان و ٤ مداد یکسان را بین ۳ نفر توزیع کرد؟

۱) ۳۶ ۲) ۴۵ ۳) ۲۴۰ ۴) ۳۱۵

$x_1 + x_2 + x_3 = 7$ (ت $k-1$ — k ; n) → $|||||||++$ (۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹)

۲ + ۳ + ۲ = ۷

$||+|||+||$

۰ + ۵ + ۲ = ۷

$+|||||+||$

۹! ← جایگشت کل اشیا

۷! ← تک ها

۲! ← به علاوه ها

$$\binom{9}{2} = \binom{9}{7}$$

$n+k-1$ ، $k-1$ ، n