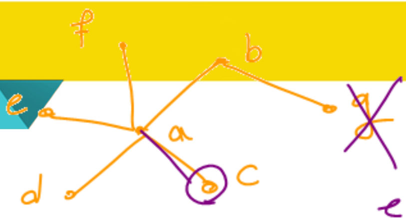
رأس به همه رئوس مجاورش احاطه دارد!



مجموعه های احاطه گر

edge vertex

فرض کنیم G گرافی با مجموعه رأس‌های V و مجموعه یال‌های E باشد، رأس v از G را مجاور رأس a از G نامیدیم هرگاه یالی از v به a وجود داشته باشد، یعنی یال va متعلق به E(G) باشد.

$G(V,E)$

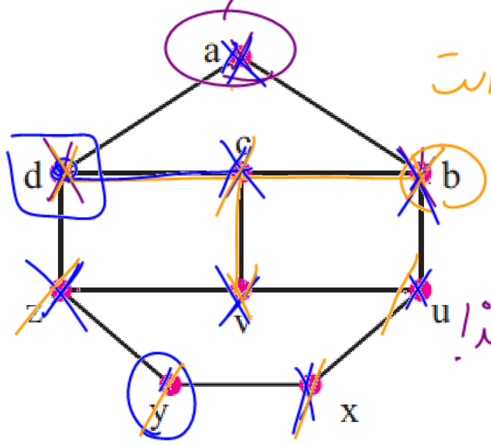
وقتی یک رأس v از گراف G مجاور رأس یا رأس‌هایی از G است گوییم رأس v، خودش و این رأس‌های مجاور را احاطه می‌کند.

بنابراین؛ گوییم یک رأس u از گراف G توسط رأس v از G احاطه می‌شود هرگاه $u = v$ یا $uv \in E(G)$، یعنی یالی از u به v رسم شده باشد.

مجموعه احاطه گری $\{d, u, y\}$ / $\{a, b, c, d, u, v, z, y, x\}$

$\{a, v, x\}$ / $\{d, b, y, v\}$

$N(a) = \{b, d\}$ $N[a] = \{a, b, d\}$



c کدام رئوس را احاطه نموده است

b و d و v

درجه c = ۳

هر رأس به اندازه درجه‌اش رئوس را احاطه می‌کند!

تعریف: فرض کنیم V مجموعه رأس‌های گراف G و S زیرمجموعه‌ای از V باشد، در این صورت $S \subseteq V$ را یک مجموعه احاطه‌گر G می‌نامیم هرگاه هر رأس گراف G یا متعلق به S باشد یا حداقل با یکی از رأس‌های S مجاور باشد.

اگر V مجموعه رأس‌های گراف G و $S \subseteq V$، در این صورت S را یک مجموعه احاطه‌گر گراف G می‌نامند هرگاه هر رأس $V - S$ حداقل مجاور یک رأس S باشد.

تعریف: مجموعه همه رأس‌های مجاور یک رأس v از گراف G را یک همسایگی باز v می‌نامیم و به N(v) نشان می‌دهیم.

تعداد عضوهای همسایگی باز v را به |N(v)| نشان می‌دهیم. $n(N(v))$

$= deg(v)$

$N[v] = N(v) \cup \{v\}$

$N(v)\cup\{v\}$ را یک همسایگی بسته v می‌نامیم و به $N[v]$ نشان می‌دهیم. $|N(v)|=1+\deg(v)$

اگر V مجموعه رأس‌های گراف G باشد و $S\subseteq V$، آن‌گاه $N(S)=\bigcup_{v\in S} N(v)$، مجموعه همسایگی باز مجموعه S است.

همچنین، $N[S]=N(S)\cup S$ همسایگی بسته مجموعه S است.

رأس v از گراف G، $N[v]$ یعنی همسایگی‌های بسته خودش را احاطه می‌کند. در این صورت رأس v، $1+\deg(v)$ رأس G را احاطه می‌کند.

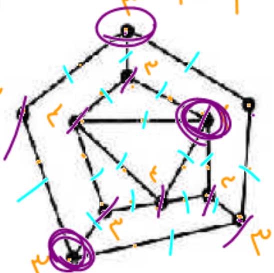
$S\subseteq V(G)$ یک مجموعه احاطه‌گر G است اگر و فقط اگر: $N[S]=V$

رأس $P=11$ تعداد یال $q=17$ $|V|$ $|E|$

$\Delta=$ بیشترین درجه $=4$
$\delta=$ کمترین درجه $=2$

سراسری دی ۱۴۰۱

۳۸- شکل زیر، گراف G را نشان می‌دهد. مقدار $\gamma(G)$ کدام است؟



۱) ۲
۲) $\boxed{۳}$
۳) ۴
۴) ۵

مینیمم احاطه‌گری

حداقل تعداد عضو یک مجموعه احاطه‌گری

$\gamma(C_n)=\lceil \frac{n}{3}\rceil$

$\gamma(C_{500})=\lceil \frac{500}{3}\rceil$

$K_5=$ گراف کامل مرتبه ۵

① $p=5$ ③ $\Delta=4$ $p-1$ ⑤ $\gamma=1$

② $q=\binom{p}{2}=10$ ④ $\delta=4$ $p-1$ ⑥ چند مجموعه احاطه‌گر مینیمم داریم؟ P

$\{a\}$ $\{b\}$ $\{c\}$ $\{d\}$ $\{e\}$

C_n P_n P_n $\lceil \frac{n}{3}\rceil$

$PK=2q$

$\gamma(C_3)=1$ $\gamma(C_5)=2$ $\gamma(C_4)=2$ $\gamma(C_6)=2$

تعریف: یک مجموعه احاطه‌گر گراف G را مجموعه احاطه‌گر مینیمم می‌نامیم هرگاه در بین مجموعه‌های احاطه‌گر G کم‌ترین عضو را داشته باشد. تعداد عضوهای این مجموعه احاطه‌گر مینیمم را عدد احاطه‌گری گراف G می‌نامیم و به $\gamma(G)$ آن را نشان می‌دهیم.

حداقل عضو مجموعه‌های احاطه‌گر

$\gamma(G)$ را γ- مجموعه نیز می‌نامند.

اگر S_i هر مجموعه احاطه‌گر گراف G باشد آن‌گاه، $\gamma(G)=\operatorname{Min}\{|S_i| \mid S_i \text{ یک مجموعه احاطه‌گر است}\}$.

به عبارت دیگر، یک مجموعه احاطه‌گر S از G را مینیمم می‌نامند، هرگاه به ازای از مجموعه احاطه‌گر X از G، $|S|\le|X|$.

ویژگی‌ها

۱. چون مجموعه رأس‌های یک گراف همواره یک مجموعه احاطه‌گر خودش است، عدد احاطه‌گری برای هر گراف تعریف می‌شود.

$\overline{K}$
$E=\emptyset$

۲. اگر G گراف تهی $\overline{K}_n$ باشد، در این صورت $v(G)$ تنها مجموعه احاطه‌گر G است که مینیمم نیز به حساب می‌آید. یعنی، در گراف از مرتبه n، $\gamma(G)=n$ اگر و فقط اگر G گراف تهی $\overline{K}_n$ باشد.

$K_p \to \gamma(K_p)=1$

$\overline{K}_p \to \gamma(\overline{K}_p)=p$

۳. یک گراف G از مرتبه n دارای عدد احاطه‌گری ۱ است اگر و فقط اگر G شامل یک رأس v از درجه $n-1$ باشد.

$$G: \gamma(G)=1 \Leftrightarrow \deg(v)=n-1$$ از مرتبه n است

در این حالت $\{v\}$ که $v \in V$ یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم است.

نتیجه: در هر گراف کامل هر رأس می‌تواند یک مجموعه احاطه‌گر گراف باشد. هر رأس به $n-1$ رأس دیگر متصل است.

۴ـ اگر G گرافی از مرتبه n باشد همواره به ازای هر عدد صحیح k که $1 \le k \le n$ گرافی وجود دارد که $\gamma(G)=k$

K_p کامل $\overline{K}_p$

همه زیرمجموعه‌ها به جز خودش $= 2^n-1$ زیرمجموعه سره

تعریف: یک مجموعه احاطه‌گر S از گراف G را مینیمال گویند، هرگاه هیچ زیرمجموعه محض S یک مجموعه احاطه‌گر G نباشد. یا به عبارت دیگر یک مجموعه احاطه‌گر، یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال است هرگاه با حذف هریک از رأس‌های آن دیگر مجموعه احاطه‌گر نباشد.

$2^n =$ تعداد زیرمجموعه

$2^n-1 =$ تعداد زیرمجموعه محض

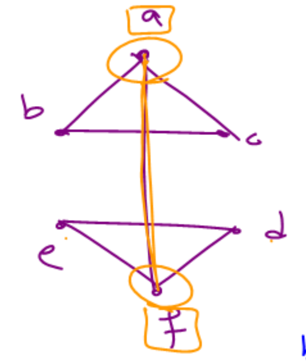
$2^n-2 =$ تعداد زیرمجموعه محض ناتهی

۱. اگر G گرافی از مرتبه n باشد آن‌گاه $1 \le \gamma(G) \le n$.

۲. $\gamma(G)=1$ اگر و فقط اگر $\Delta(G)=n-1$.

۳. $\gamma(G)=n$ اگر و فقط اگر G گراف تهی از مرتبه n باشد.

۴. اگر K_n گراف کامل از مرتبه n باشد آن‌گاه $\gamma(K_n)=1$.

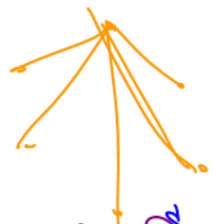


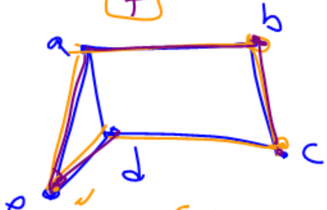
$\gamma(G)$

$\{a,f\}$

$G = 5, 4, 4, 3, 2, 1$ گراف

$\gamma(G) = 1$ اگر گراف بود

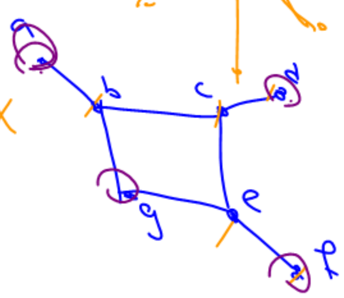




$\{b,c\}$

$\{b,e\}$ ✗

$\{b,c,e\}$ احاطه‌گر مینیمال نیست



مینیمال $\{a,g,d,f\}$

$\{b,c,e\}$ مینیمم

۱- به ازای کدام مقدار a، دو دایره به معادلات $x^2+y^2+4x=0$ و $x^2+y^2-2x+8y+a=0$، مماس خارج یکدیگرند؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

$R=$ شعاع

$\frac{4}{2}=(2)^2 \quad O|^{\alpha}_{\beta} \quad (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2$

$x^2+4x+4-4+y^2=0$

$(x+2)^2+y^2=4$

$O|^{-2}_{0}$

$(x-1)^2+(y+4)^2=\overbrace{1+16-a}^{17-a}$

$O'|^{1}_{-4} \quad R=\sqrt{17-a}$

$5=R+R' \longrightarrow 5=2+\sqrt{17-a}$

$OO'=\sqrt{(1-(-2))^2+(-4-0)^2}=5$

$(3)^2=(\sqrt{17-a})^2$

$9=17-a$

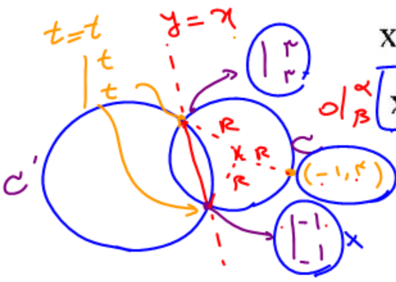
$a=8$

۲- وتر مشترک دایره‌ی C با دایره به معادله‌ی $x^2+y^2-4x=6$ منطبق بر نیمساز ناحیه اول است. اگر دایره‌ی C از نقطه‌ی $(-1,4)$ بگذرد، معادله‌ی آن کدام است؟

سراسری ۹۸ -ریاضی

۱) $x^2+y^2-y+3x=6$ ۲) $x^2+y^2+2y-x=6$

۳) $x^2+y^2-2y+x=6$ ۴) $x^2+y^2-3y-x=6$



$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2$

$(-1-\alpha)^2+(4-\beta)^2=(-1-\alpha)^2+(-1-\beta)^2$

$16-8\beta+\beta^2=1+2\beta+\beta^2$

$15=10\beta$

$\frac{3}{2}=\beta$

$(-1-\frac{1}{2})^2+(-1-\frac{3}{2})^2=R^2$

$t^2+t^2-4t=6$

$2t^2-4t-6=0$

$t^2-2t-3=0$

$(t-3)(t+1)=0$

$(-1-\alpha)^2+(-1-\frac{3}{2})^2=(3-\alpha)^2+(3-\frac{3}{2})^2$

$1+2\alpha+\alpha^2+\frac{25}{4}=9-6\alpha+\alpha^2+\frac{9}{4}$

$8\alpha=4$

$\alpha=\frac{1}{2}$

۳- به‌ازای کدام مقدار a ، زاویه‌ی بین خط مماس بر دایره‌ی $x^2+y^2-2x+y=1$ و خط به معادله‌ی $3x+2y=a$ در نقطه‌ی تلاقی آن‌ها، ۹۰ درجه است؟

$(x-1)^2+(y+\frac{1}{2})^2=$

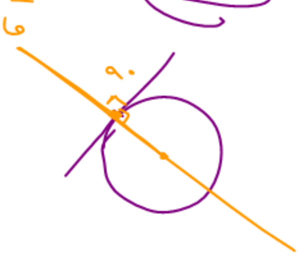
۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

$O|^{1}_{-\frac{1}{2}}$

سراسری ۹۶ -ریاضی

دو خط عمود $\Rightarrow a'=-\frac{1}{a} \Rightarrow a\times a'=-1$

قائم ← از مرکز می‌گذرد



$3(1)+2(-\frac{1}{2})=a$

$2=a$

۴- به ازای کدام مقدار m، خط $y=\frac{m}{۲}$، خط هادی سهمی $x^۲-۶x=۲y-۸$ است؟

$\frac{2y}{2}=\frac{x^2}{2}-\frac{6x}{2}+\frac{8}{2}$

$S=\frac{-b}{2a}$

① -۲ ② ۲ ③ -۱ ④ ۱

$(x-3)^2=2y+1$

$(x-3)^2=2(y+\frac{1}{2})$

$4a=2$, $a=\frac{1}{2}$

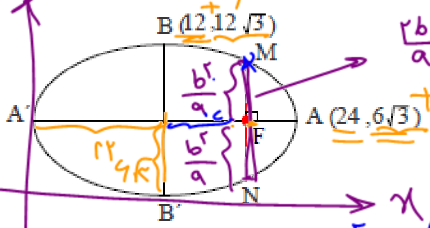
$S\,\big|\,{3 \atop -\frac{1}{2}}$

محور تقارن $= x=3$

$y=-1=\frac{m}{2}$

$m=-2$

۵- بیضی شکل مقابل در ناحیهٔ اول بر محورهای مختصات مماس است و قطر بزرگ و کوچک آن به ترتیب موازی محور xها و محور yها هستند. مختصات نقطهٔ برخورد وتر کانونی با بیضی (M) کدام است؟



① $(۱۸, ۶\sqrt{۳}+۹)$ ② $(۱۵, ۶\sqrt{۳}+۹)$ ③ $(۱۸, ۶\sqrt{۳}+۶)$ ④ $(۱۵, ۶\sqrt{۳}+۶)$

$\frac{2b^2}{a}$

$a=12$

$b=6\sqrt{3}$

$\frac{b^2}{a}=\frac{(6\sqrt3)^2}{12}=\frac{36\times3}{12}=9$

$a^2-b^2=12^2-(6\sqrt3)^2=6^2(2^2-3)=c^2$

$c=6$

۶- یک بیضی با کانون های $F(۲,۷)$ و $F'(۲,-۹)$ اندازهٔ کوتاه ترین وتر کانونی گذرنده از F برابر $\frac{۴\sqrt{۲}}{۳}$ می باشد. محیط چهارضلعی که از به هم وصل کردن دو سر قطر کوچک به دو کانون تشکیل می شود، کدام است؟

$\frac{7-9}{2}=-1$

① $۳\sqrt{۲}$ ② $۶\sqrt{۲}$ ③ $۱۲\sqrt{۲}$ ④ $۲۴\sqrt{۲}$

$\frac{2b^2}{a}$

$c=\frac{7-(-9)}{2}=\frac{16}{2}=8$

$a^2=b^2+c^2 \to a^2-8^2=b^2$

$b^2=a^2-64$

$\frac{2b^2}{a}=\frac{4\sqrt2}{3}=\frac{2(a^2-64)}{a}$

$12\sqrt2\,a=3a^2-3\times64$

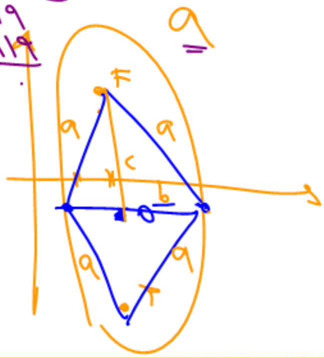
$3a^2-4\sqrt2\,a-192=0$

$\Delta=8+4(3)(192)$

$=4(2+576)$

$=4\times578=4\times17^2\times2$

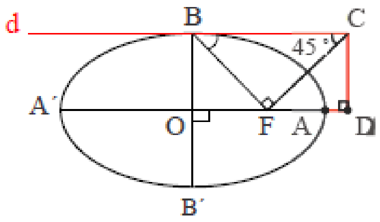
$a=\frac{2\sqrt2+34\sqrt2}{6}=\frac{36\sqrt2}{6}=6\sqrt2$



۷- چند نقطه روی دایرهٔ $x^2+y^2+4x-4y+4=0$ وجود دارد که مجموع فواصل آن ها از دو نقطهٔ $(0,2)$ و $(-4,2)$ برابر ۶ باشد؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) صفر

۸- در بیضی مقابل AA' و BB' دو قطرند. خط d در نقطهٔ B بر بیضی مماس است. پاره خط BF را رسم می کنیم و در نقطهٔ F عمودی بر BF رسم می کنیم تا خط d را در نقطهٔ C قطع کند و از عمودی بر امتداد قطر بزرگ بیضی رسم می کنیم تا آن را در نقطه ای مانند D قطع کند. اگر $B\hat{C}F=45^\circ$ مقدار $\frac{AD}{AF}$ کدام است؟



۱) $\sqrt{2}$ ۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۳) $\frac{1}{\sqrt{2}-1}$ ۴) $\frac{1}{2}$

۹- یک تلسکوپ دارای آینهٔ سهوی است که فاصلهٔ کانونی آن ۷۵ cm و قطر قاعدهٔ آن ۸۰ cm می باشد. عمق آینه در مرکز چند سانتی متر است؟

۱) ۱۸ ۲) ۲۱ ۳) ۲۷ ۴) ۳۰

۱۰- منحنی $(۳x - y)^۲ + (۳y + x)^۲ = ۱۰$ یک .... است.

۱) سهمی ۲) بیضی ۳) دایره ۴) هذلولی

$Ax^2+By^2+\dots$

$A=B$

Ax^2+By^2

$A=0$

$B=0$

۱۱- طول قطعه‌ی مماسی که از نقطه‌ی $A(۴\,,\,۱)$ بر دایره‌ای به معادله‌ی $x^۲ + y^۲ - ۲x + ۴y + ۳ = ۰$ رسم شود برابر کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) $۲\sqrt{۳}$

۱۲- در سهمی به معادله‌ی $y^۲ + ۴y + ۲x + ۱ = ۰$، خط هادی آن از نقطه‌ای با کدام مختصات می‌گذرد؟

۱) $(۱,-۲)$ ۲) $(۱,۲)$ ۳) $(۲,۱)$ ۴) $(۰,۳)$

تجربی-۸۸

۱۳- در یک بیضی به کانون‌های (۱- , ۲) و (۷ , ۲)، اندازه‌ی قطر کوچک ۶ واحد است. خروج از مرکز این بیضی، کدام است؟

۱) ۰/۶ ۲) ۰/۶۴ ۳) ۰/۷۵ ۴) ۰/۸ تجربی-۹۸

۱۴- در یک بیضی به اقطار $2\sqrt{5}$ و ۲ واحد، دایره‌ای هم مرکز با بیضی و شعاع ۲ واحد، بیضی را در نقطه‌ی M قطع می‌کند. مجموع مربعات فواصل M از دو کانون بیضی، کدام است؟

ریاضی-۹۸

۱) ۱۲ ۲) ۱۶ ۳) ۱۸ ۴) ۲۰

۱۵- در سهمی به معادله‌ی $5y^2 - 10y + 4x - 3 = 0$، فاصله‌ی کانون تا نقطه‌ی تلاقی سهمی با محور xها، کدام است؟

۱) ۱/۲ ۲) ۱/۲۵ ۳) ۱/۳ ۴) ۱/۴۵ تجربی-۹۸

۱۶- از کانون سهمی $y^2 - x - 4y + 2 = 0$ خطی عمود بر محور تقارن آن رسم می‌شود تا سهمی را در نقاط A و B قطع کند. مساحت مثلثی با رئوس A، B و رأس سهمی، چقدر است؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{8}$ ۴) $\frac{1}{12}$

ریاضی - دی ۱۴۰۱

$(y-2)^2 - 4 = x - 2$

$(y-2)^2 = 1(x+2)$

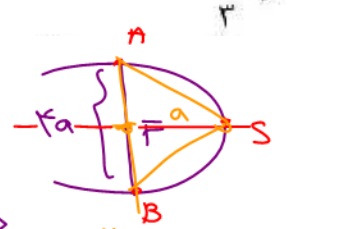
$4a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{4}$

$S\Big|^{-2}_{2}$

$(y-2)^2 = -\frac{7}{4} + \frac{8}{4} = \frac{1}{4}$

$y - 2 = \pm\frac{1}{2}$

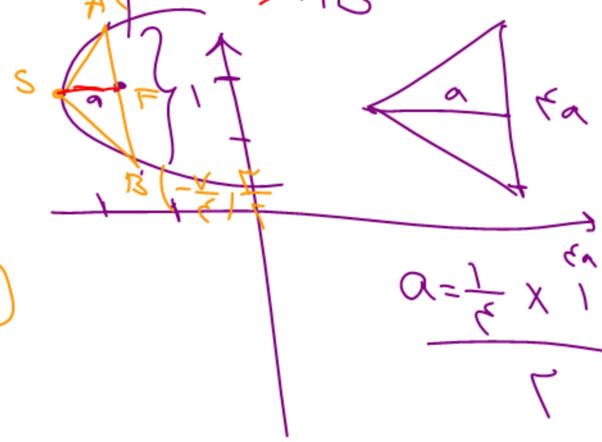
$y = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \quad 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$



$S = \frac{2 \times a \times a}{2} = 2a^2$

$2(\frac{1}{4})^2 = \frac{1}{8}$

$A(-\frac{7}{4}, \frac{5}{2}) \to AB$



$a = \frac{\frac{1}{4} \times 1}{2} = \frac{1}{8}$

مساحت مثلث

$S = \frac{\text{ارتفاع} \times \text{قاعده}}{2}$

مثلث متساوی الاضلاع $= \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

$S = \frac{1}{2}ab\sin\alpha$

مساحت متوازی $= a \times b \sin\alpha$

ضرب خارجی

$S = \frac{|a \times b|}{2}$

$\begin{vmatrix} i & j & k \\ x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \end{vmatrix} = (y_a z_b - y_b z_a)i - j(x_a z_b - x_b z_a) + k(x_a y_b - x_b y_a)$

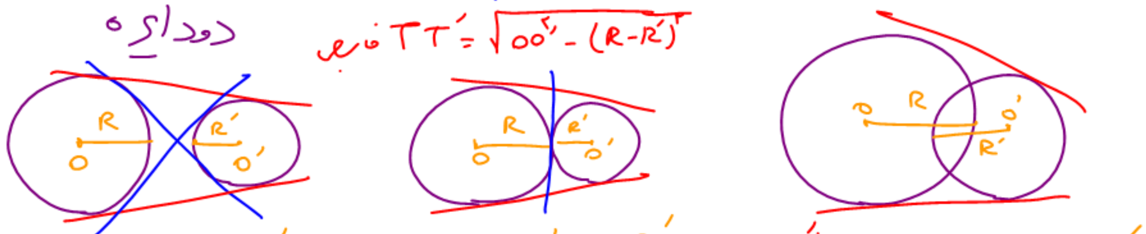
مساحت متوازی الاضلاع $= |\vec{a} \times \vec{b}|$

هرون $S = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}$

$TT' = \sqrt{OO'^2 - (R+R')^2}$

خارجی $TT' = \sqrt{OO'^2 - (R-R')^2}$

دو دایره

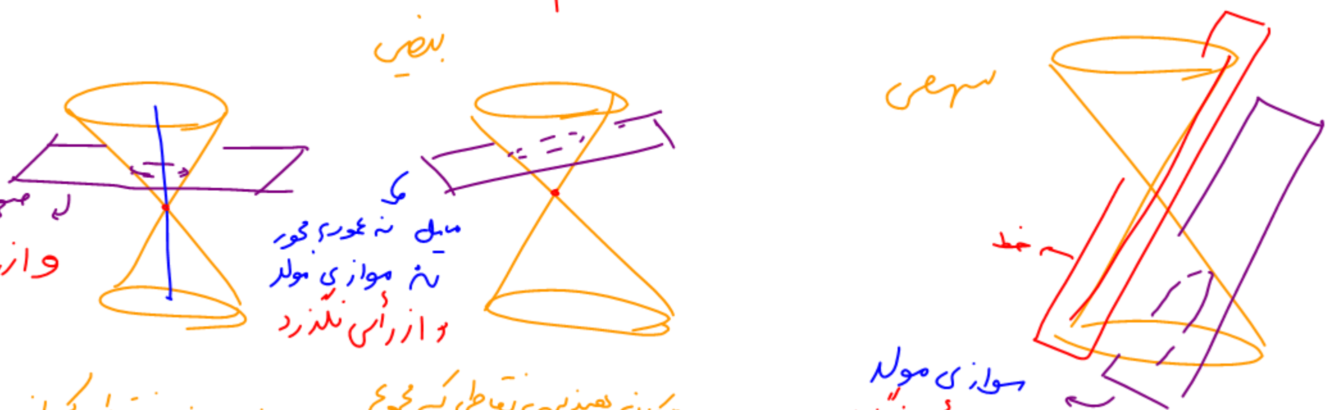


$OO' > R+R'$ $OO' = R+R'$ $|R-R'| < OO' < R+R'$

متداخل

$OO' = R-R'$ $OO' < |R-R'|$ $OO' = 0$

دایره بیضی سهمی



⊥ صفحه عمود بر محور و از رأس نگذرد.

مایل نه عمود بر محور
نه موازی مولد
و از رأس نگذرد

موازی خط

موازی مولد
و از رأس نگذرد

مکان هندسی

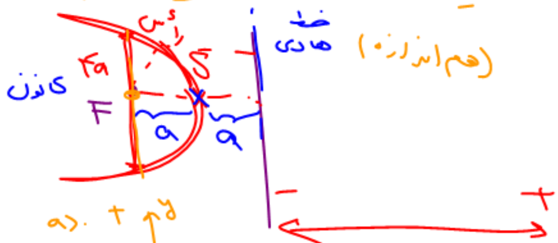
مکان هندسی نقاطی که از یک نقطه (O) به فاصله ثابت (r)

$(M-\alpha)^2 + (M-\beta)^2 = R^2$

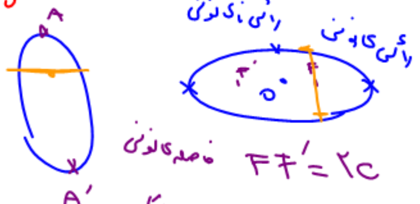
مکان هندسی نقاطی که مجموع فاصله آنها از دو نقطه (F, F') به یک اندازه ثابت (2a) می‌باشد

$MF + MF' = 2a$

مکان هندسی نقاطی که از یک نقطه (کانون F) و یک خط (هادی) به یک فاصله (هم اندازه)



معادله $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2$



$\frac{2b^2}{a}$ = وتر کانونی

فاصله کانونی $FF' = 2c$

قطر بزرگ $= AA' = 2a$

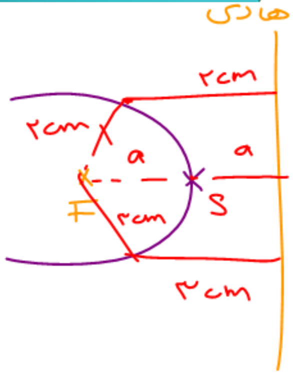
قطر کوچک $= BB' = 2b$

$a^2 = b^2 + c^2$

$(y-\beta)^2 = 4a(x-\alpha)$

$(x-\alpha)^2 = 4a(y-\beta)$

پارامتر



$y^2 - 2y - 4x + 3 = 0$

$(y-1)^2 - 1$

$(y-1)^2 = 4x \underbrace{-3+1}_{-2}$

$S\left|\begin{matrix}\frac{1}{2}\\1\end{matrix}\right.\quad (y-1)^2 = \underbrace{4}_{a>}\left(x-\frac{1}{2}\right)$

$\to 4a = 4 \to a = 1$