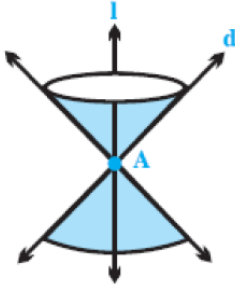


مقاطع مخروطی

1 رویه مخروطی: اگر خط l, d در نقطه ای مانند A (مطابق شکل) متقاطع باشند، سطح حاصل از دوران خط d حول



خط l را در یک رویه مخروطی (سطح مخروطی) می نامیم.

در این حالت خط l را محور، نقطه A را رأس و خط d

را مولد این سطح مخروطی می نامیم.

2 فصل مشترک حاصل از تقاطع یک صفحه با یک سطح مخروطی را مقطع مخروطی می نامیم.

حالت های مختلف این تقاطع به صورت زیر است:





دایره



سه‌می



بیضی



هذلولی





نقطه



خط



دو خط متقاطع

۱) صفحه ای از رأس یک سطح مخروطی می گذرد و هر دو دامنه ی رویه را قطع می کند. فصل مشترک حاصل کدام شکل می تواند باشد
 (۱) دو خط راست (۲) دایره (۳) بیضی (۴) هذلولی

۲) صفحه ای بر محور سطح مخروطی دوار عمود است. مقطع حاصل کدام می تواند باشد؟
 (۱) سهمی یا نقطه (۲) دایره یا نقطه (۳) هذلولی (۴) دو خط متقاطع



۳

مقطع یک سطح مخروطی با یک صفحه، سهمی است. این صفحه با مولد یا محور سطح مخروطی، کدام وضع را دارد؟
 (۱) موازی یک مولد (۲) موازی محور (۳) عمود بر یک مولد (۴) گذرا از نقطه تلاقی محور و مولد
 (کنکور سراسری ریاضی ۷۸)

۴

صفحه ای یک سطح مخروطی را قطع نمی کند. فصل مشترک حاصل کدام شکل نمی تواند باشد؟
 (۱) دو خط راست (۲) سهمی (۳) هذلولی (۴) بیضی
 (کنکور سراسری تجربی ۷۱)

۵

خطوط d_1 و d_2 متناظرند از نقطه A واقع بر d_1 حداکثر چند خط می گذرد که با خط d_2 متقاطع و با آن زاویه 30° درجه می سازد؟
 (۱) ۲ (۲) ۱ (۳) ۰ (۴) بیشمار
 (کنکور آزاد ریاضی صبح ۹۰)

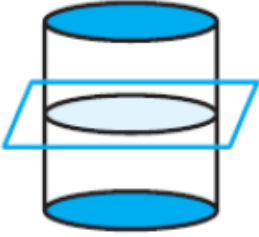
۶

صفحه ی p یک سطح مخروطی دوار را طوری قطع نموده است که مقطع همواره از دو قسمت مجزا تشکیل شده است وضع صفحه ی p نسبت به این سطح مخروطی کدام است؟
 (۱) به موازات محور (۲) به موازات مولد (۳) عمود بر مولد (۴) گذرا از رأس (کنکور آزمون پیش دانشگاهی ریاضی ۷۶)



3 اگر دو خط d, d' (بهتر است بگوییم دو پاره خط d, d') موازی باشند، از دوران d حول d' یک استوانه ایجاد می‌شود.

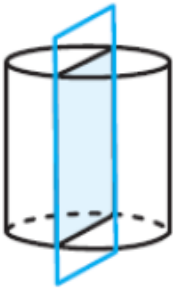
❖ اگر صفحه p موازی با قاعده استوانه، استوانه را قطع کند، سطح مقطع حاصل دایره است.



❖ اگر صفحه p ، استوانه را مایل قطع کند، سطح مقطع حاصل یک بیضی است.



❖ اگر صفحه p ، عمود بر قاعده استوانه، استوانه را قطع کند، سطح مقطع حاصل، مستطیل است.



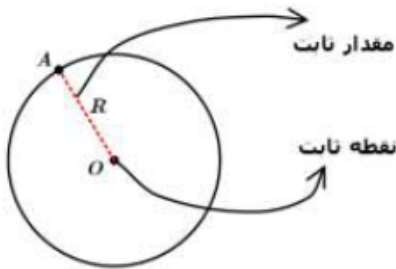
یادآوری شکل‌های حاصل دوران



دایره

دایره مکان هندسی

تعریف: مکان هندسی نقاطی از صفحه که فاصله آنها از یک نقطه ثابت (مرکز دایره) به فاصله ثابت (شعاع) باشد.



یادآوری: از قبل می دانیم فاصله نقطه $A(x_1, y_1)$ تا خط $ax + by + c = 0$ برابر است با:

$$AH = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

برای نوشتن معادله ی این دایره فرض می کنیم نقطه دلخواه $A(x, y)$ نقطه ای روی دایره باشد. با دستور فاصله بین دو نقطه

$$OA = \sqrt{(x_A - x_O)^2 + (y_A - y_O)^2} \quad \text{می توانیم بنویسیم:}$$

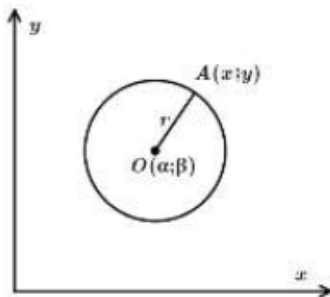
$$r = \sqrt{(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2}$$

$$\boxed{(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2}$$

به این معادله، معادله استاندارد دایره می گوئیم.

معادله دایره ای را بنویسید که مرکز آن $O(2, -4)$ و شعاع ۳ را بنویسید.

۷



۸ معادله دایره ای بنویسید که نقاط دو سر قطر آن $A(7, 4)$, $B(-3, 8)$ باشد.

۹ معادله دایره ای را بنویسید که مرکز آن $(4, -2)$ باشد و $(3, 1)$ یکی از نقاط آن باشد.

مربع کامل کردن

۱۰ کدام یک از روابط زیر می تواند معادله یک دایره باشد؟ مختصات مرکز و طول شعاع را به دست آورید؟

الف) $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$

ب) $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 14 = 0$

ج) $x^2 + y^2 + 2x - 2y + 2 = 0$

د) $4x^2 + 4y^2 + 16x - 4y + 1 = 0$



۱۱ شعاع دایره ای که از دو نقطه $(1,2), (3,0)$ گذشته و مرکز آن روی خط $y = 2x - 1$ باشد را بیابید. (سراسری ریاضی ۷۵)

۱۲ - مرکز و شعاع دایره‌ی $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 7 = 0$ را به دست آورید.

معادله‌ی $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$ را می‌توان با به توان رساندن به صورت $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ نوشت.

تذکر: در معادله‌ی ضمنی باید ضریب x^2, y^2 همواره ۱ باشد.



اگر بخواهیم مختصات مرکز و شعاع دایره به معادله‌ی ضمنی را در حالت کلی به دست بیاوریم و شبیه مثال‌های قبلی همواره مجبور نباشیم آن را به صورت مربع کامل بنویسیم داریم:

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \Rightarrow \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{b^2}{4} + c = 0$$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c$$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2 - 4c}{4}$$

پس مرکز آن $O\left(\frac{-a}{2}, \frac{-b}{2}\right)$ و شعاع آن $r = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}}{2}$ است.



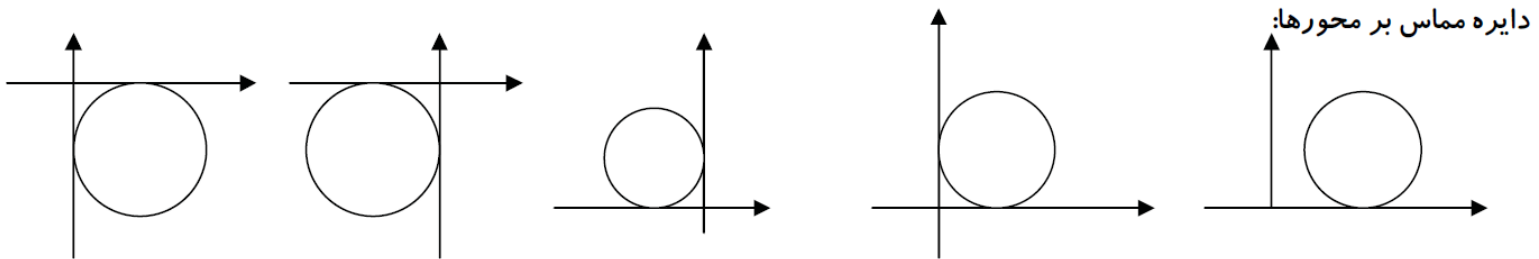
۱۳ دایره ای، محور X هارادردونقطه به طول های 3 و 4 قطع کرده و مرکز آن، بر روی نیمساز ربع اول است. شعاع این دایره کدام است؟
 (۱) $\sqrt{3}$ (۲) 2 (۳) $\sqrt{5}$ (۴) 3 (کنکور سراسری تجربی ۹۵ خارج از کشور)

۱۴ به ازای کدام مجموعه ی مقادیر a ، منحنی به معادله ی $2x^2 + (a^2 - 7)y^2 + 4y + a = 0$ یک دایره است؟
 (۱) $\{-3\}$ (۲) $\{3\}$ (۳) $\{-3, 3\}$ (۴) ϕ (کنکور سراسری تجربی ۸۵ خارج از کشور)

۱۵ دایره ای از دو نقطه ی $(0, 1)$ و $(3, 0)$ گذشته و معادله ی یک قطر آن به صورت $x - y = 2$ است. شعاع این دایره کدام است؟
 (۱) $\sqrt{2}$ (۲) 2 (۳) $\sqrt{5}$ (۴) 3 (کنکور سراسری تجربی ۹۰ خارج از کشور)

۱۶ حدود a را طوری به دست آورید که $x^2 + y^2 - 3x + 5y + a$ بتواند معادله ی یک دایره باشد. (ص ۴۵ کتاب جدید)





مثال: معادله دایره‌ای به شعاع $3\sqrt{2}$ را بنویسید که بر نیمساز ربع اول و دوم مماس است.



- ۱۷ خط $4x + 3y + 6 = 0$ نسبت به دایره به معادله $4x^2 + 4y^2 - 8x - 12 = 0$ چه وضعی دارد؟
- (۱) قائم بر دایره است.
 (۲) مماس بر این دایره است.
 (۳) دایره را قطع می کند.
 (۴) دایره را قطع نمی کند.

- ۱۸ در نقطه‌ی $A(2,3)$ روی دایره‌ی $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 3$ مماسی بر آن رسم کرده ایم. معادله‌ی این خط مماس را به دست آورید.
 (ص ۴۵ کتاب جدید)

- ۱۹ معادله خط مماس بر دایره به معادله $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 3 = 0$ در نقطه $M(4,1)$ واقع بر دایره کدام است؟
- (۱) $3x + 3y - 1 = 0$
 (۲) $3x - 3y + 1 = 0$
 (۳) $x - y + 1 = 0$
 (۴) $x + y - 5 = 0$



۲۰ به ازای کدام مقدار b دو دایره به معادلات $x^2 + y^2 + 2x - 2y = 0$ و $x^2 + y^2 - 4y + b = 0$ مماس داخل اند؟
 (کنکور سراسری ریاضی ۸۶-۱۳۸۵) -۲ (۴) -۳ (۳) -۴ (۲) -۵ (۱)

۲۱ شعاع کوچکترین دایره ای که بر دو دایره $(x-3)^2 + y^2 = 25$ و $(x-1)^2 + y^2 = 1$ مماس است چقدر است؟
 (کنکور آزاد ریاضی ۸۴) ۱/۵ (۴) ۰/۵ (۳) ۲ (۲) ۱ (۱)

۲۲ چند دایره به شعاع ۲ وجود دارد که بر محور طول ها و دایره‌ی $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 4$ مماس باشد؟
 (کنکور آزاد ریاضی ۸۷ خارج از کشور) ۴ (بیشمار) ۱ (۳) ۲ (۲) ۱ (صفر)



۲۳ کمترین مقدار x از رابطه‌ی $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 25$ کدام است؟

-۴(۴)

-۵(۳)

۵(۲)

۱(۱)

۲۴ طول قطر دایره‌ی $9(x+1)^2 + (3y-2)^2 = 36$ چقدر است؟

۶(۴)

۴(۳)

۲(۲)

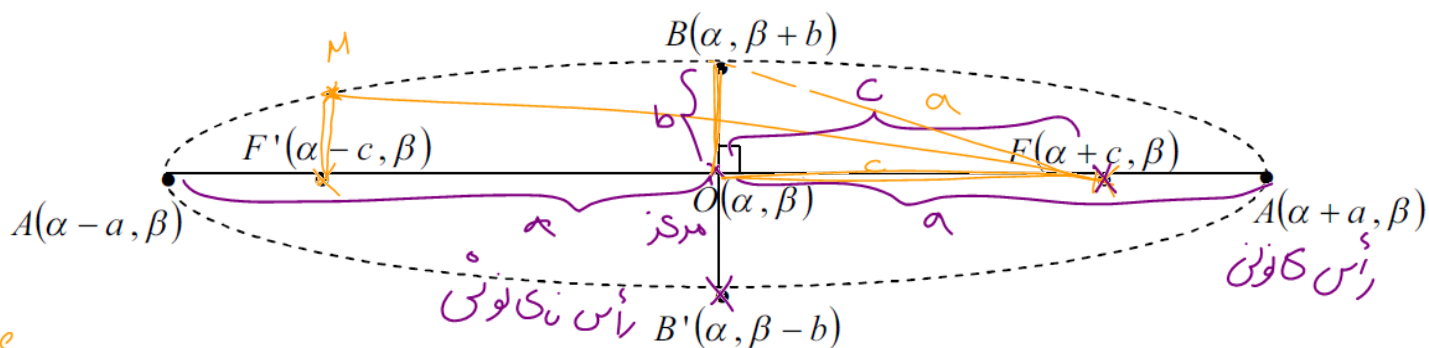
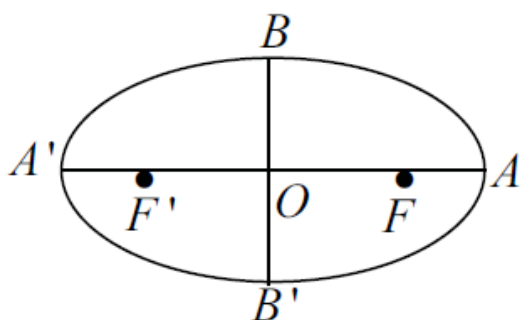
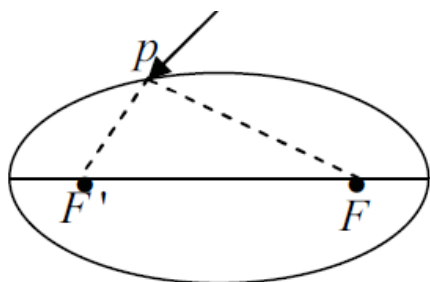
۱(۱)

۲۵ دایره $x^2 - 6x + y^2 + 4y + 6 = 0$ در چند نقطه محورهای مختصات را قطع می‌کند؟
 (۱) چهار نقطه (۲) دو نقطه (۳) صفر (۴) یک نقطه

(کنکور آزاد تجربی پزشکی ۸۸)



بیضی



مجموع فواصل از دو نقطه ثابت مقدار ثابت است
 $2a$ F, F'

$F'F = 2c =$ فاصله کانونی
 $AA' = 2a =$ قطر بزرگ بیضی
 $BB' = 2b =$ قطر کوچک بیضی

$$a^2 = b^2 + c^2$$



فاصله یک راس ناکانونی بیضی از کانون و راس کانونی به ترتیب ۲ و $\sqrt{5}$ است. بیشترین فاصله نقطه $M(x, y)$ روی بیضی از یکی از

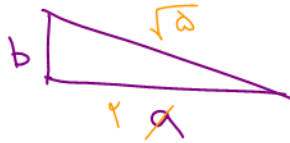
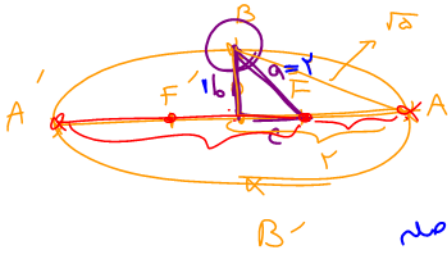
کانون‌های بیضی کدام است؟

۴. $2 + 2\sqrt{3}$

۳. $1 + 2\sqrt{3}$

۲. $2 + \sqrt{3}$

۱. $1 + \sqrt{3}$



$b^2 + 2^2 = (\sqrt{5})^2$

$b^2 + 4 = 5 \rightarrow \sqrt{b^2} = \sqrt{1}$

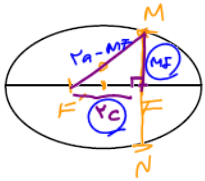
$b = \pm 1$

$a = b + c \rightarrow c = \sqrt{3}$

$a, b, c > 0$

از کانون بزرگترین فاصله \rightarrow کانون کوچکترین فاصله
 $a + c + a - c = 2a$

نکته: خطی از کانون‌های بیضی (F یا F')، عمود بر محور کانونی (FF') رسم می‌کنیم تا بیضی را در نقاط M و N قطع کند، پاره‌خط MN را



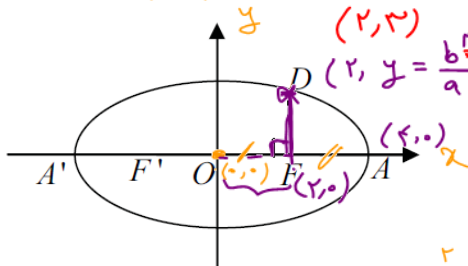
وتر کانونی بیضی می‌گویند که طول آن برابر با $\frac{2b^2}{a}$ است **مهم**

$MF^2 + (c)^2 = (a - MF)^2 \rightarrow MF^2 + c^2 = a^2 - 2aMF + MF^2$
 $a^2 - c^2 = 2aMF \rightarrow b^2 = 2aMF \rightarrow MF = \frac{b^2}{2a}$

$MF + MF' = 2a \rightarrow MF' = 2a - MF$

در یک بیضی، قطرهای بزرگ و کوچک بر محورهای مختصات منطبق هستند. اگر F کانون بیضی و $OF = FA = 2$ باشد آنگاه مجموع

مختصات نقطه D کدام است؟



۴.۴

۳.۳

۲.۲

۵.۱

$\frac{b^2}{a} = \frac{12}{4} = 3$

$c = \frac{a}{2} \rightarrow a = 2c$

$c = 2 \rightarrow a = 4$

$a^2 = b^2 + c^2$

$16 = b^2 + 4$

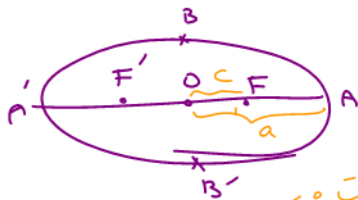
$12 = b^2 \rightarrow b = \pm\sqrt{12} \rightarrow \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$



خروج از مرکز بیضی

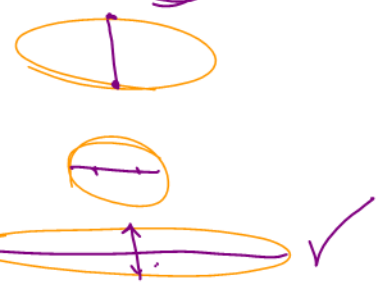
عدد $e = \frac{c}{a}$ را خروج از مرکز بیضی می گویند. چون در بیضی $a > c$ است، پس همواره $0 < e < 1$ است. اگر e به یک نزدیک شود، بیضی کشیده تر می شود (به خط نزدیک می شود). اگر e به صفر نزدیک شود، بیضی به دایره نزدیک تر می شود.

توجه: در حالتی که $e = 1$ شود، بیضی تبدیل به یک پاره خط می شود (پاره خط FF') و اگر $e = 0$ شود، بیضی تبدیل به دایره می شود.



$e = \frac{c}{a}$
 به سمت 1 کشیده تر
 پاره خط
 به سمت 0 دایره

e کدام بزرگتر است
 کشیده تر
 کمتر

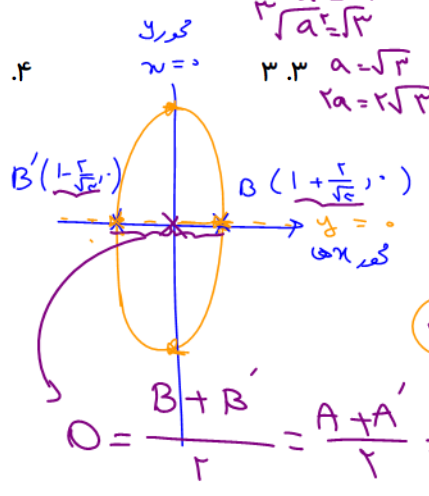
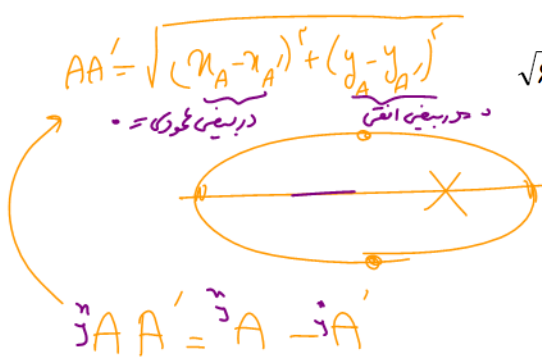


$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 = \frac{4}{3} + \frac{9}{9}a^2 \Rightarrow \frac{9}{9}a^2 - \frac{4}{9}a^2 = \frac{4}{9} \Rightarrow \frac{5}{9}a^2 = \frac{4}{9} \Rightarrow a^2 = \frac{4}{5} \Rightarrow a = \frac{2}{\sqrt{5}}$

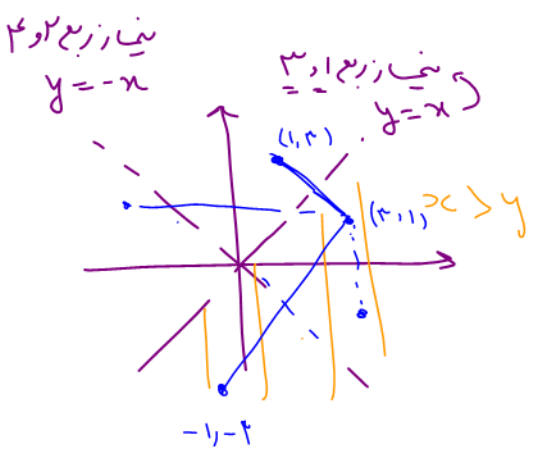
رئوس ناکانونی بیضی هستند. اگر خروج از مرکز بیضی $\frac{\sqrt{5}}{3}$ باشد، مجموع فواصل نقطه p روی بیضی از دو کانون بیضی کدام است؟

$B' \left(1 - \frac{2}{\sqrt{3}}, 0\right)$ و $B \left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}}, 0\right)$

$\frac{1}{3}a^2 = 1 \Rightarrow \frac{1}{3}a^2 = 1 \Rightarrow a^2 = 3 \Rightarrow a = \sqrt{3}$
 $2a = 2\sqrt{3}$



$BB' = 2b = 1 + \frac{2}{\sqrt{3}} - \left(1 - \frac{2}{\sqrt{3}}\right) = \frac{4}{\sqrt{3}}$
 $b = \frac{2}{\sqrt{3}}$



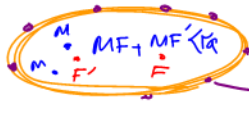
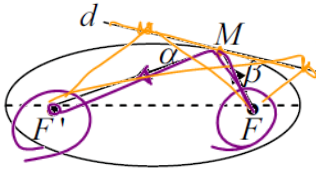
$y = -x$	$y = x$	گوری	نور	ترتیب نقطه
$(-y, x)$	(y, x)	$(-x, y)$	$(x, -y)$	$A(x, y)$



ویژگی بازتابندگی بیضی:

$$MF + MF' > 2a$$

اگر خط d در نقطه M بر بیضی مماس باشد و بدنه داخلی بیضی آینه‌ای باشد، نتایج زیر به دست می‌آید.



$$MF + MF' = 2a$$

مجموع فواصل از دو کانون = $2a$

- اگر از یکی از کانون‌های بیضی اشعه نوری بر بدنه داخلی بیضی بتابد، بازتاب آن از کانون دیگر می‌گذرد.
- زاویه‌های تابش و بازتابش با هم برابرند؛ یعنی $\alpha = \beta$ است.

۳. اگر مجموع فواصل نقاط خط d از دو کانون را به دست آوریم، مجموع فواصل نقطه M از دو کانون، کمترین مقدار را دارد. (هرون)

۲۹ مکان هندسی نقاطی از صفحه که مجموع فواصل آنها از دو نقطه ثابت F و F' در آن صفحه برابر مقدار معین $2a$ باشند کدام است؟

(۱) بیضی $FF' < 2a$ (۲) یک پاره خط $FF' = 2a$ (۳) هیچ شکل حقیقی نیست $FF' > 2a$

(۴) بسته به طول $F'F$ می‌تواند هر کدام از گزینه‌های ۱ و ۲ و ۳ باشد.



$$MF + MF' < FF'$$



$$AM = \sqrt{a^2 - c^2} + c$$

هندس در دست حل مسئله!

۳۰ چند نقطه روی خط $y = x + 1$ یافت می‌شود که مجموع فواصلشان از دو نقطه $A(0, 1)$ و $B(1, 2)$ برابر ۲ باشد؟

۴. بی‌شمار

۲.۳

۱.۲

۱. صفر

$0 < t < 1$

$$\sqrt{(t-0)^2 + (t+1-1)^2} + \sqrt{(t-1)^2 + (t+1-2)^2} = 2$$

$$\sqrt{t^2 + t^2} + \sqrt{(t-1)^2 + (t-1)^2} = 2$$

$$|t\sqrt{2} + (t-1)\sqrt{2}| = 2 \rightarrow \sqrt{2}t + \sqrt{2}t - \sqrt{2} = 2 \rightarrow 2\sqrt{2}t = 2 + \sqrt{2} \rightarrow t = \frac{2 + \sqrt{2}}{2\sqrt{2}}$$

محتصات یک کانون بیضی که بر چهار خط $x = -4, x = 2, y = 1, y = 5$ مماس باشد، کدام است؟

۱. $(-1, 3 + \sqrt{5})$ ۲. $(-1, 3 - \sqrt{5})$ ۳. $(-1 + \sqrt{5}, 3)$ ۴. $(-1 + \sqrt{5}, -3)$

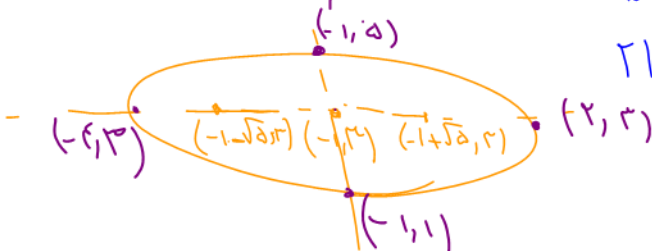


$$O(-1, 3)$$

$$2a = 2 - (-2) = 4 \rightarrow a = 2 \rightarrow a^2 = b^2 + c^2$$

$$2b = 5 - 1 = 4 \rightarrow b = 2 \rightarrow 4 = 4 + c^2$$

$$c = \sqrt{5} \leftarrow c^2 = 5$$



۳۲ حاصل ضرب فاصله‌ی رأس کانونی یک بیضی از دو کانون بیضی کدام است؟

b^2 (۴)

$2b^2$ (۳)

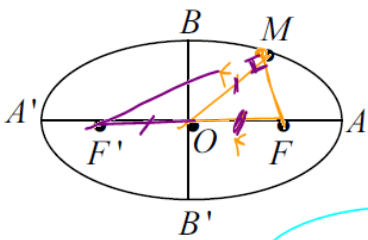
$2b$ (۲)

$\sqrt{2}b$ (۱)



$(a-c)(a+c) = a^2 - c^2 = b^2$

مهم نکته M روی بیضی به اقطار ۶ و ۱۰ واحد به گونه‌ای قرار دارد که فاصله آن تا مرکز بیضی برابر ۴ واحد است.



$2a = 10 \rightarrow a = 5 \rightarrow c = 4$
 $2b = 6 \rightarrow b = 3$

الف. نشان دهید $OM = OF = OF'$.

ب. نشان دهید مثلث $MF F'$ قائم‌الزاویه است.

ج. طول‌های MF و MF' را به دست آورید.

$MF^2 + MF'^2 = 1^2 = (2c)^2$

$MF + MF' = 2a = 2(5) = 10$

$MF' = 10 - MF$

$MF^2 + 100 - 20MF + MF^2 = 40$

$2\alpha + 2\beta = 180$
 $\alpha + \beta = 90$

سپس که میانه یک مثلث است
 همان میانه باس است
 پس قائم‌الزاویه است



از یک نقطه فاصله یک خط = دایره

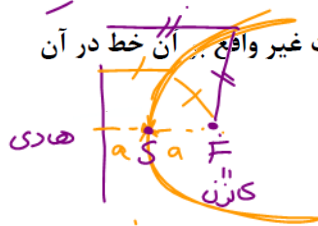
از یک نقطه فاصله یک خط = دایره

از دو نقطه فاصله یک خط = محور میانه
از دو نقطه فاصله یک خط = محور میانه
از دو نقطه فاصله یک خط = محور میانه

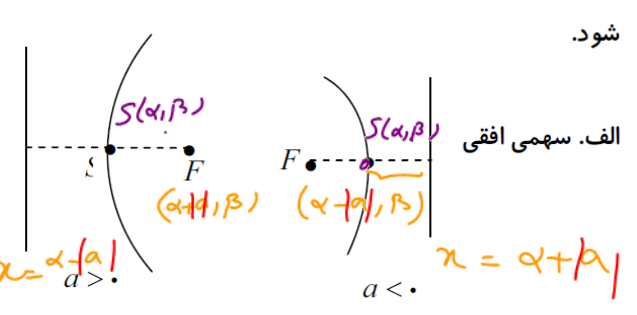
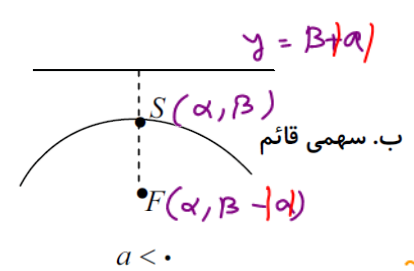
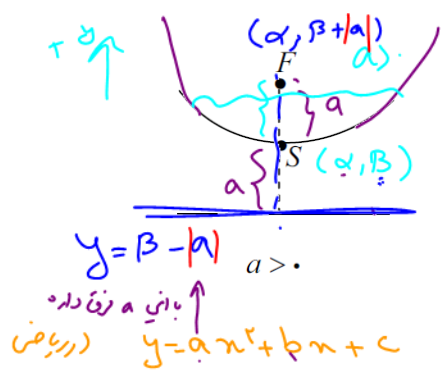
از دو نقطه فاصله یک خط = محور میانه
از دو نقطه فاصله یک خط = محور میانه
از دو نقطه فاصله یک خط = محور میانه

سهیمی: مکان هندسی نقاطی از یک صفحه است که از یک خط ثابت در آن صفحه و از یک نقطه ثابت غیر واقع بر آن خط در آن صفحه به یک فاصله باشند.

$$S \left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a} \right)$$



- سهیمی سه جزء اصلی دارد: F (کانون سهیمی)، S (راس سهیمی) و d (خط هادی سهیمی)
- فاصله راس سهیمی (S) تا کانون (F) برابر با فاصله راس سهیمی تا خط هادی (d) است: یعنی راس سهیمی وسط کانون و خط هادی قرار دارد.
- فاصله راس سهیمی تا کانون را فاصله کانونی می‌نامیم و با $|a|$ نمایش می‌دهیم. a را با نام پارامتر سهیمی نیز صدا می‌زنند.
- کانون همواره در دهانه سهیمی قرار دارد. خط هادی همواره پشت سهیمی است.
- اگر $a > 0$ باشد، دهانه سهیمی در جهت مثبت محورهای مختصات باز می‌شود و اگر $a < 0$ باشد، دهانه سهیمی در جهت منفی محورها باز می‌شود.



$y = \beta - |a|$ $a > 0$

$y = a\pi^2 + b\pi + c$

$(x - \alpha)^2 = 4a(y - \beta)$

$a < 0$

$(y - \beta)^2 = 4a(x - \alpha)$

$(x - \alpha)^2 = 4a(y - \beta)$

$a > 0$



۳۳

فاصله کانون تا خط هادی سهمی به معادله $3y^2 - 6y - 2x = 0$ کدام است؟

$$\frac{1}{2} = (1)^2$$

$$3(y - 1)^2 = 2x$$

$$3((y-1)^2 - 1) = 2x$$

$$3(y-1)^2 - 3 = 2x$$

$$\frac{3(y-1)^2}{3} = \frac{2x+3}{3}$$

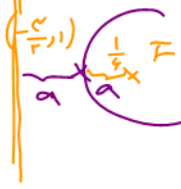
$$(y-1)^2 = \frac{2}{3}x + 1 = \frac{2}{3}\left(x + \frac{3}{2}\right)$$

$$\frac{3}{2} \cdot 3$$

$$S = \left(-\frac{3}{2}, 1\right)$$

$$\frac{2}{3} \cdot 2$$

$$\frac{1}{3} \cdot 1$$



$$2a = \frac{2}{3} \Rightarrow a = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

$$2a = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

سهمی $6 - 12y = (x-1)^2$ با رأس F و کانون F' مفروض است. یک بیضی با کانون‌های F و F' و خروج از مرکز $0/6$ می‌سازیم. فاصله مرکز بیضی از مبدأ مختصات، کدام است؟

کنکور ۱۴۰۰

۲ (۴)

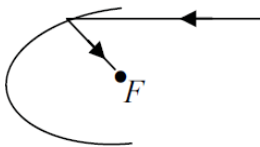
$\sqrt{3}$ (۳)

$\sqrt{2}$ (۲)

۱ (۱)

نکته: وترى که از کانون سهمی، عمود بر محور کانونی (خط تقارن) سهمی رسم می‌شود و سهمی را در نقاط M و N قطع کند، وتر کانونی نام دارد، و طول آن برابر با $MN = 4|a|$.
در واقع پارامتر سهمی، میزان باز و بسته شدن دهانه سهمی را تنظیم می‌کند.

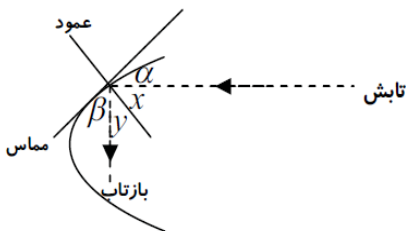
ویژگی بازتابندگی آینه سهمی



۱. اگر اشعه نوری موازی محور کانونی سهمی به آن بتابد، بازتاب آن از کانون سهمی می‌گذرد.

۲. اگر اشعه نوری از کانون بر سهمی بتابد، موازی محور کانونی سهمی بازتاب می‌کند.

۳. اگر اشعه نوری به آینه سهمی بتابد، زاویه‌های تابش و بازتابش با هم برابرند.



۳۳ نقطه‌ی $S(-1/6, -1)$ ، رأس سهمی است. هر پرتو که موازی محور X ها بر این سهمی بتایید، به نقطه‌ی $(0/9, -1)$ باز می تابد.

این سهمی محور Y ها را با کدام عرض، قطع می کند؟

کنکور سراسری تجربی ۹۴
خارج کشور

(۴) $0, -2$

(۳) $2, -4$

(۲) $3, -5$

(۱) $4, -6$

۳۴ سهمی با کانون $F(2, 3)$ و خط هادی به معادله‌ی $x = -4$ ، محور X ها را با کدام طول، قطع می کند؟

کنکور سراسری تجربی ۹۶
خارج کشور

(۴) $\frac{1}{2}$

(۳) $\frac{1}{4}$

(۲) $-\frac{1}{4}$

(۱) $-\frac{1}{2}$



۳۴

از کانون سهمی $y^2 - x - 4y + 2 = 0$ خطی عمود بر محور تقارن آن رسم می‌شود تا سهمی را در نقاط A و B قطع کند. مساحت مثلثی با رئوس A، B و رأس سهمی، چقدر است؟

سراسری ۱۴۰۱ دی ماه

$\frac{1}{12}$ (۴)

$\frac{1}{8}$ (۳)

$\frac{1}{4}$ (۲)

$\frac{1}{3}$ (۱)

۳۴

در سهمی $2y^2 - 2ay + 8x + b = 0$ نقطه $(-1, 1)$ رأس سهمی است. مقدار $\frac{a}{b}$ چقدر است؟

$-\frac{1}{3}$ (۴)

$-\frac{1}{5}$ (۳)

$\frac{1}{5}$ (۲)

$\frac{1}{3}$ (۱)

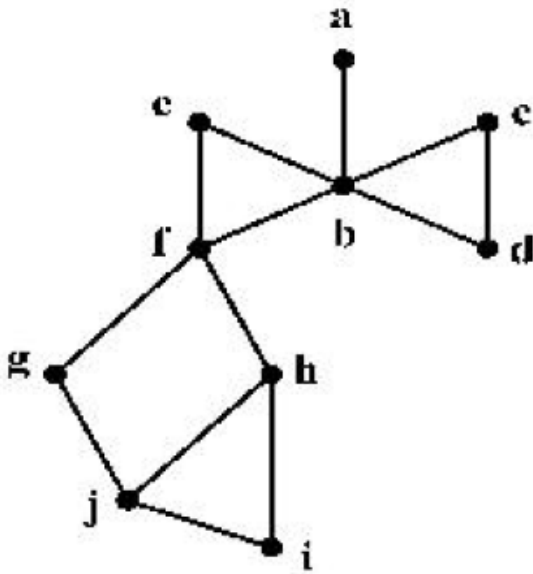
سراسری ۱۴۰۱ تیرماه







گراف



$$G(V, E)$$

مرتبه

اندازه

درجه راس

دو راس a و b را در گراف G مجاور گوئیم هرگاه

دو یال موازی گوئیم، هرگاه بین دو راس یکسان رسم شده باشد.

طوقه یا حلقه (لوپ): یالی است که یک راس را به خودش وصل می کند.

گراف ساده

الف) طوقه ندارد. ب) یال موازی ندارد. ج) بین هر دو راس حداکثر یک یال وجود دارد.

گراف جهت دار:

تعداد گراف های جهندار p راسی برابر است به: 2^p

۱- در مورد گراف ساده $G(V, E)$ کدام گزینه نادرست است؟

- 1) مجموعه E متناهی است.
- 2) مجموعه V متناهی است.
- 3) مجموعه E ناتهی است.
- 4) مجموعه V ناتهی است.



تعداد گراف های جهتدار p راسی بدون حلقه برابر است با: $2^p - p$

تعداد گراف های جهتدار p راسی که n حلقه داشته باشند برابر است با: $2^p - p \binom{p}{n}$

گراف چندگانه: گرافی که حلقه یا یال موازی داشته باشد گراف چندگانه نامیده می شود. (بین هر دو راس آن هر تعداد یالی می تواند وجود داشته باشد.)

تعداد تمام گراف های ساده که می توان با p راس (با فرض نام گذاری رئوس) ساخت برابر است با:

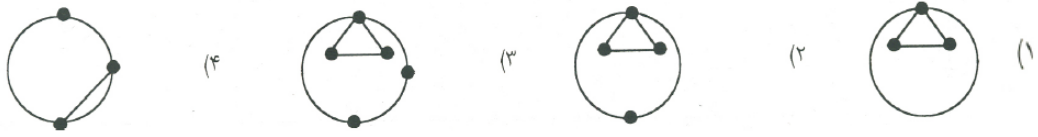
- 1) راس ایزوله (منزوی، تنها، منفرد): راسی که درجه آن صفر باشد.
- 2) راس آویزان: راسی که درجه آن یک است.
- 3) راس فول: راسی که بیشترین درجه ممکن $(p - 1)$ را دارد.
- 4) راس فرد: راسی که درجه آن فرد باشد
- 5) راس زوج: راسی که درجه آن زوج باشد.

۲- چند گراف جهت دار با مجموعه رئوس $V = \{a, b, c, d\}$ می توان رسم کرد؟

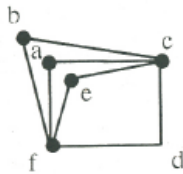
- (1) 2^6 (2) 2^{16} (3) 2^{12} (4) 2^{10}



۳- کدام گراف زیر ساده است؟



۴- در گراف مقابل چند راس با راس a مجاور هستند؟



0 (4)

3 (3)

1 (2)

2 (1)

۵- چند گراف جهت دار با مجموعه رئوس $V = \{a, b, c, d, e\}$ می توان رسم کرد که دارای 2 طوقه باشند؟

$2^{23} \times 5$ (4)

2^{23} (3)

2^{25} (2)

$2^{21} \times 5$ (1)



۶- گراف متناظر با کدام مولکول شیمیایی زیرگراف چندگانه است؟

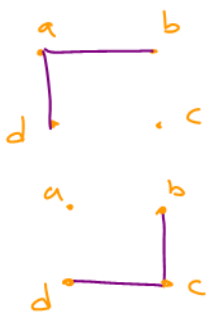
- (1) آب (2) آهن (3) پروپان (4) هیدروکلریک اسید

۷- گراف ساده ای دارای 6 رأس است این گراف حداکثر چند یال دارد؟

- (1) 10 (2) 30 (3) 15 (4) 25

۸- با مجموعه رئوس $V = \{v_1, v_2, \dots, v_5\}$ چند گراف ساده با فرض نام گذاری رئوس می توان ساخت؟

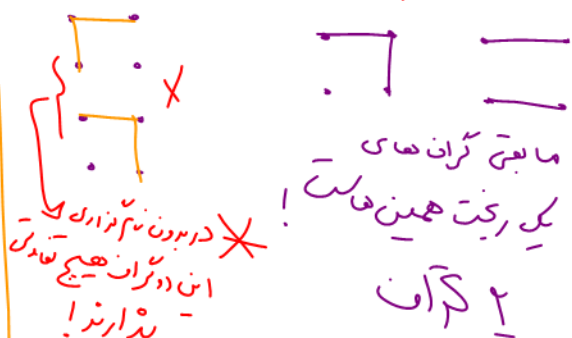
- (1) 512 (2) 1024 (3) 256 (4) 128



نام گذاری
یال
حرکت
در این ۴ یال
را انتخاب می کنیم
 $\binom{4}{2} = 6$
 $\binom{4}{2} = 15$ گراف

تفاوت نام گذاری و بدون نام گذاری

حند گراف با مرتبه ۴ و اندازه ۲ می توان رسم کرد.
* حالت می شکل * شکل کشیدن - بدون نام گذاری



* در بدون نام گذاری این دو گراف هیچ تفاوتی ندارند!



۹- چند گراف چهار راسی بدون نام گذاری رئوس می توان رسم کرد؟

6 (4)

11 (3)

32 (2)

64 (1)

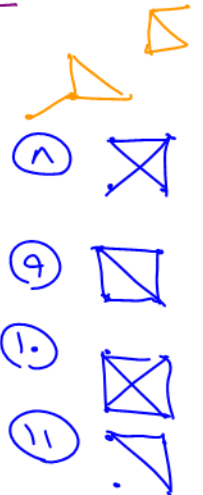
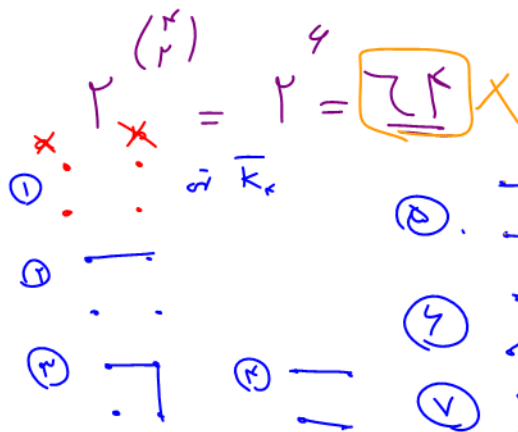
تعداد گراف:

تعداد گراف ساده = $2^{\binom{P}{2}}$

تعداد گراف (با طوقه) = 2^{P^2}

تعداد گراف (بدون طوقه) = $2^{P(P-1)}$

اینها مال وقتیه که نام گذاری داریم *



۱۰- چند گراف ساده با مجموعه رئوس $V = \{v_1, v_2, \dots, v_6\}$ وجود دارد که اندازه آن ها 3 با شد؟

910 (4)

455 (3)

20 (2)

15 (1)

$\binom{6}{2} = \frac{6 \times 5}{2} = 15$

$\binom{15}{3} = \frac{15!}{3!12!} = \frac{15 \times 14 \times 13}{1 \times 2 \times 3} = 455$

۱۱- تعداد گراف های ساده 4 راسی در مجموعه $V = \{a, b, c, d\}$ که 2 یال داشته و یک یال آن ها ab باشد، کدام است؟

7 (4)

6 (3)

5 (2)

4 (1)

$\binom{4}{2} = \binom{P}{2}$ → تعداد یال

$E = \{ab, ac, ad, bc, bd, cd\}$

$\{ab, ac\}$
 $\{ad, cd\}$

$\{ab\}$ و $\binom{5}{1} = 5$

تعداد گراف = هر زیر مجموعه

$2^4 = 16$ گراف

$\binom{4}{2} = \frac{4 \times 3}{2} = 6$ تعداد گراف ها



۱۲- با 5 راس a, b, c, d, e چند گراف ساده می توان رسم کرد که در آن $q = 5$ بوده و گراف شامل یال های

ab, ac باشد، اما شامل ed نباشد؟

30 (4)

38 (3)

27 (2)

35 (1)

صکله های $d = 10$ $\binom{5}{2} = 10$

دانشه ها داشته ها
↓ ↓
10 - 2 - 1

دانشه (2) - داشته (2)
دانشه - 9

$V = \{ab, ac, bc, \dots, ed, \dots\}$

$\{ab, ac, \emptyset, \emptyset, \emptyset\}$

$\binom{7}{2} = \frac{7 \times 6 \times 5}{2 \times 1} = 105$

۱۳- در یک گراف ساده $V = \{v_1, v_2, \dots, v_6\}$ است، چند گراف $G = (V, E)$ می توان رسم کرد که

v_1 و v_2 با هم مجاور باشند و به v_3 یالی وصل نشده باشد؟

۲۱۵ (4)

۲۱۰ (3)

۲۹ (2)

۲۵ (1)

اندازه در

$\{v_1, v_2\}$

$v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$

تعداد زیر مجموعه ها $\binom{5}{2} = 10 - 1 = 9 \rightarrow 29$



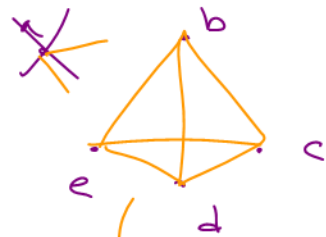
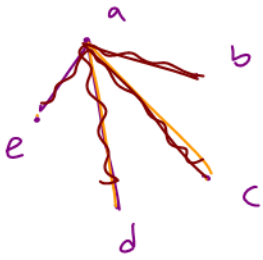
۱۴- چه تعداد گراف ساده مرتبه 5 با رئوس a, b, c, d, e وجود دارد که راس a در آن از درجه 2 باشد؟

3×2^4 (4)

3×2^5 (3)

3×2^7 (2)

3×2^6 (1)



$\binom{4}{2} = \frac{4 \times 3}{2} = 6$

رأس a به 6 حالت می‌تواند درجه 2 داشته باشد

حالات a \times $\binom{4}{2} = 6$ \times 2^4 $= 96$ \times 2^4 $= 3 \times 2^7$

حالات a \times 2^4 $= 3 \times 2^7$

حالات a \times 2^5 $= 3 \times 2^7$

۱۵- در گراف ساده G از مرتبه 8 سه بخش جدا از هم وجود دارد. این گراف حداکثر چند یال دارد؟

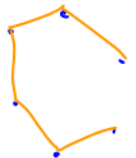
28 (4)

6 (3) *سه بخش*

21 (2) *تعداد یال*

15 (1)

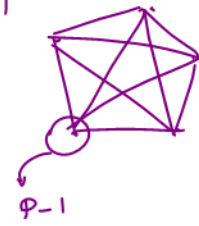
مرتبه	Max \rightarrow	6	1	1	$\binom{6}{2} + 0 + 0 = 15$
		5	2	1	$\binom{5}{2} + \binom{2}{2} + 0 = 10 + 1 + 1 = 12$
		4	2	2	$\binom{4}{2} + \binom{2}{2} + \binom{2}{2} = 6 + 1 + 1 = 8$
		4	3	1	$\binom{4}{2} + \binom{3}{2} + 0 = 6 + 3 = 9$
	Min \rightarrow	3	3	2	$\binom{3}{2} + \binom{3}{2} + \binom{2}{2} = 7$



K_6 \rightarrow حداکثر
 5 \rightarrow حداقل



$$q_r = \frac{P(P-1)}{2} = \binom{P}{2}$$



گراف کامل

K_p
نقطه

$$\delta = \Delta = P-1$$

۱۶- در یک گراف کامل $q(G) = \Delta^2(G) - 2\delta(G)$ مقدار $p(G)$ کدام است؟

۸ (۴)

نقطه \rightarrow $p(G)$
تعداد رأس = مرتبه

اندازه

۶ (۳)

۵ (۱)

کنکور تیر ۱۴۰۱

$$\frac{P(P-1)}{2} = (P-1) - 2(P-1)$$

$$P = 2(P-1) - 2$$

$$P = 2P - 2 - 2$$

$$P = 4$$

۱۷- مجموع مرتبه و اندازه‌ی گراف کاملی برابر ۴۵ است. اندازه‌ی این گراف کدام است؟

۹۳ سراسری

۲۱ (۴)

۳۰ (۳)

۳۶ (۲)

۲۸ (۱)

$$P + \frac{P(P-1)}{2} = 45$$

$$\binom{9}{2} = \frac{9 \times 8}{2} = 36$$

$$2P + P(P-1) = 90$$

$$P^2 - P + 2P - 90 = 0$$

$$P^2 + P - 90 = 0 \rightarrow (P+10)(P-9) = 0$$



۲۰- گرافیکال بودن دنباله‌های زیر را بررسی کنید.

۳. ۰, ۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶

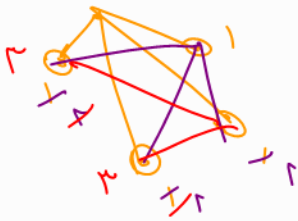
سه رأس فرد \times

هیچ دنباله گرافیکالی بدون
تکرار نمی‌شود! \times



وقتی رأس فعلی $\delta \geq 1$

اگر δ تا به بعد $\delta \geq 2$



گراف بودن

۱) به ترتیب نزولی
می‌چینیم

۲) اولی رو حذف
بتراد آن از کناری‌های
واحد کم می‌کنیم

گراف = اگر به تدریج صف
رسیم

گراف \times → اگر به عدد منفی رسیدیم

اگر هیچ کدام به ۰ نرسیم از بالا به پایین

۲. ۳, ۳, ۴, ۵, ۵, ۶

سه رأس فرد \checkmark



$P-1 = 5$

$\Delta \leq P-1$

۵. ۱, ۲, ۲, ۳, ۴, ۵



۱. ۲, ۴, ۵, ۵, ۶, ۶

سه رأس فرد \times

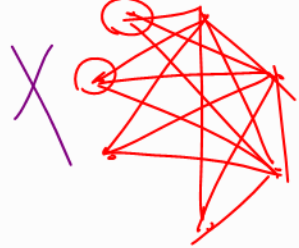
دارد!

۲, ۴, ۵, ۵, ۶, ۶ \times
۳, ۴, ۵, ۵, ۶, ۶ \times
۴, ۵, ۵, ۶, ۶, ۶ \times
۵, ۵, ۶, ۶, ۶, ۶ \times
۶, ۶, ۶, ۶, ۶, ۶ \times

$\delta \geq 3$

۴. ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۶, ۶

سه رأس زوج \checkmark
کدام رو حذف
فول $\delta \geq 3$



۲, ۴, ۵, ۵, ۶, ۶

سه رأس فرد \times

۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۶

۱-۲, ۱, ۰

گراف نیست!

در هر مرحله اگر دنباله‌ای باقی بماند
گراف نیست یعنی کلاً گراف
نیست

نیست



۲۱- در یک گراف ساده با اندازه 25 و از مرتبه 14 فقط رئوس درجه 3 و 5 داریم. چند رأس درجه 3 وجود دارد؟

8 (4)

9 (3)

P

4 (2)

10 (1)

$$\underbrace{3, \dots, 3}_{3x} + \underbrace{5, \dots, 5}_{5y} = 29 = 5$$

$$3x + 5y = 29 = 5$$

$$x + y = 14 = P$$

~~$$3x + 5y = 5$$~~

~~$$-3x - 5y = -42$$~~

~~$$2y = 18 \rightarrow y = 9$$~~

~~$$14 - 9 = 5 = x$$~~

۲۲- اگر m تعداد رئوس زوج در یک گراف ساده باشد و تعداد کل رئوس این گراف فرد باشد، باقیمانده تقسیم

m^2 بر عدد 8 کدام است؟

3 (4)

7 (3)

0 (2)

1 (1)

فرد = m = تعداد رئوس زوج \rightarrow فرد = P

$$m^2 \equiv 1$$

$$m = \text{زوج} \rightarrow m^2 \equiv 0$$

$$m = \text{فرد} \rightarrow m^2 \equiv 1$$

۲۳- در یک گراف ساده ماکزیمم درجه رئوس 6 است مرتبه گراف کدام گزینه نمی تواند باشد؟

9 (4)

8 (3)

7 (2)

6 (1)

$$\Delta = 6$$



$$\Delta \leq P - 1$$

$$6 - 1 = 5$$

$\leftarrow \Delta$ نمی تواند 6 باشد !!



۲۴- درجه رأس‌های یک گراف ساده و همبند به صورت اعداد $a, b, c, 2, 3, 4, 5$ هستند. اگر تعداد یال‌های این گراف $1/5$ برابر $(a+b+c)$ باشد، چند حالت مختلف برای مجموعه $\{a, b, c\}$ وجود دارد؟

کنکور تیر ۱۴۰۱

۲ (۴)

۳ (۳)

۵ (۲)

۴ (۱)

مجموعه همسایه‌ها

مجموعه‌های همسایه‌های یک رأس: فرض کنیم $v \in V(G)$ ، به مجموعه‌ی رأس‌هایی از گراف G که به رأس v متصل هستند، «همسایگی باز رأس v » می‌گوییم و با $N_G(v)$ نمایش می‌دهیم. اضافه کردن خودِ رأس v به $N_G(v)$ «همسایگی بسته‌ی رأس v » را به دست می‌دهد که آن را با $N_G[v]$ نمایش می‌دهیم. می‌توان این دو مجموعه را به صورت زیر نشان داد:

$$N_G(v) = \{u \in V(G) : uv \in E(G)\}$$

$$a \notin (a, +\infty) \quad \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ a \end{array}$$

$$N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}$$

$$a \in [a, +\infty) \quad \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ a \end{array}$$

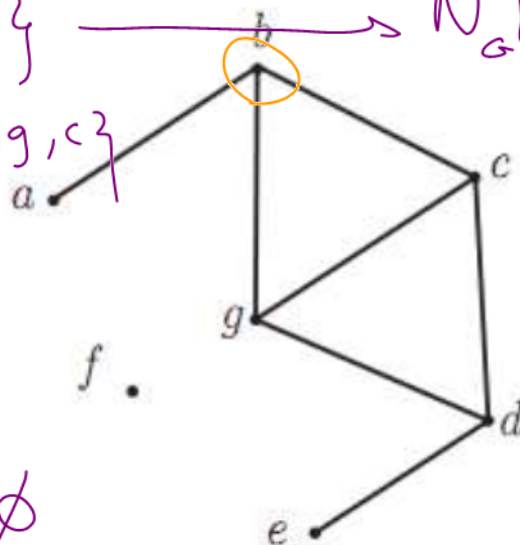
$$N_G(a) = \{b\}$$

$$N_G[a] = \{a, b\}$$

$$N_G(b) = \{a, g, c\}$$

$$N_G(f) = \{\}$$

$$N_G(\text{رأس جدا}) = \emptyset$$



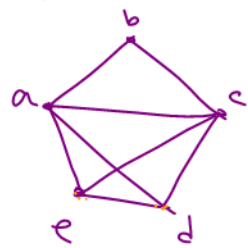
مسیر

تعریف مسیر: فرض کنیم u و v دو رأس از گراف G باشند. یک مسیر از u به v در G دنباله‌ای متشکل از رأس‌های دو به دو متمایز است که از u شروع و به v ختم می‌شود به طوری که هر دو رأس متوالی در این مسیر، مجاور هستند. طول مسیر همان تعداد یال-های طی شده است که یکی کمتر از تعداد رأس‌ها است.

حداکثر طول یک مسیر P_n بین دو رأس متمایز u و v در G حداکثر طول است.

قرارداد: هر رأس به تنهایی، یک مسیر به طول صفر از خودش به خودش است.

** گرافی که تنها از یک مسیر n راسی تشکیل شده باشد با (P_n) نمایش می‌دهیم.

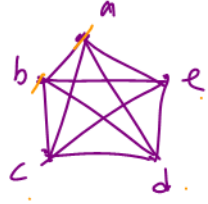


بین u و v مسیر وجود ندارد

بین a و v مسیر وجود ندارد

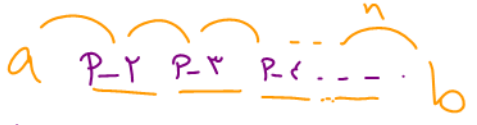
از a به c و v مسیر وجود دارد

مسیر در گراف کامل



* چند مسیر به طول k در گراف K_n بین a و b وجود دارد؟

(1) * چند مسیر به طول n بین دو رأس a و b ؟



* چند مسیر به طول 2 وجود دارد؟

$\binom{5}{2} \times 3 = 10 \times 3 = 30$

(2) * چند مسیر به طول n وجود دارد؟

$\binom{5}{2} \times 3 = 10 \times 3 = 30$

* در گراف K_n چند مسیر وجود دارد؟

تعداد یال‌ها: $3 + 2 + 1 = 6$ مسیر به طول 1

$4 + 6 + \frac{4 \times 3}{2} + \frac{4 \times 3 \times 2}{2} = 14$

* چند مسیر به طول 3 در گراف K_n وجود دارد؟

$\binom{5}{3} = \frac{5 \times 4 \times 3}{2} = 15$



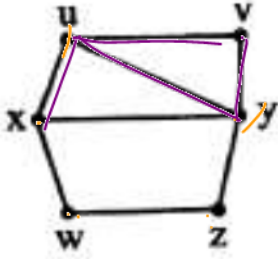
$15 \times 12 = 180$



* در گراف K_n چند مسیر بین دو رأس متمایز وجود دارد؟

~~$14 - 4 = 10$~~





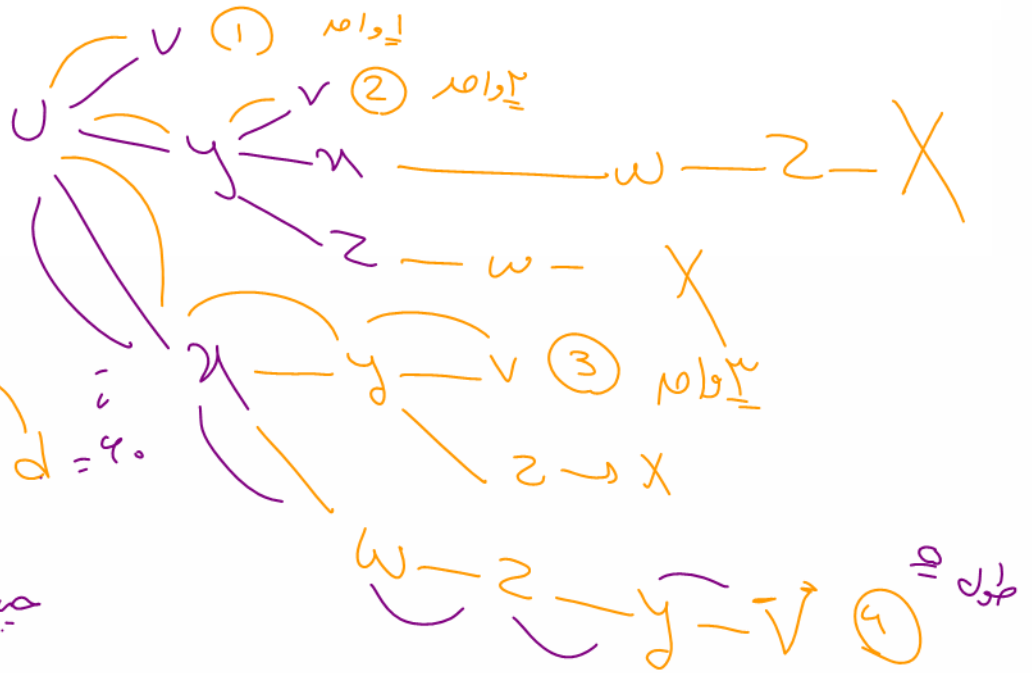
در گراف مقابل تمام مسیرهای از u به v را نوشته و طول هر کدام را مشخص کنید.

در گراف K_4 چند مسیر به طول

(4) بین c و d وجود دارد؟



چند مسیر به طول 3 در (K_7) میان a و c وجود دارد که از b نگذرد؟

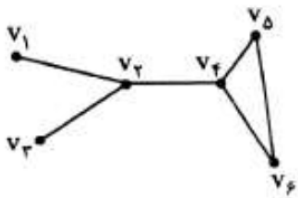


زیرگراف

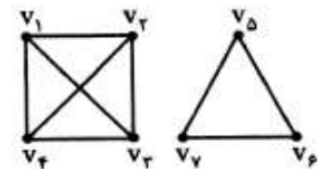
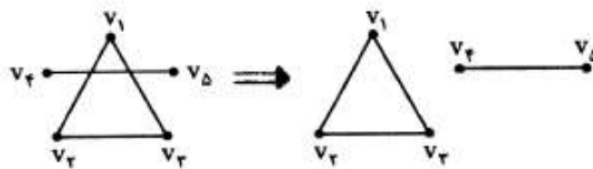
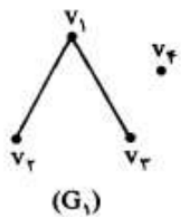
تعریف: گراف H را یک زیرگراف از G می‌گوییم هرگاه $V(H) \subseteq V(G)$ و $E(H) \subseteq E(G)$.

همبندی

تعریف: گراف G را همبند گوییم، هرگاه بین هر دو راس آن حداقل یک مسیر وجود داشته باشد. مانند گراف زیر:



گرافی که همبند نباشد را ناهمبند می‌نامیم. مانند گراف‌های زیر:



حداقل و حداکثر تعداد یال

۲۵- گراف ساده G از مرتبه 17 چنان است که در آن $\Delta = 7$. حداکثر تعداد یال‌های آن کدام است؟

۲۶- گراف ساده G از مرتبه 17 چنان است که در آن $\delta = 7$. حداقل تعداد یال‌های آن کدام است؟

۲۷- گراف ساده G از مرتبه 17 چنان است که در آن $\delta = 7$. حداکثر تعداد یال‌های آن کدام است؟

۲۸- اگر در گراف ساده G ، $|V(G)| = 18$ ، $\Delta(G) = 8$ و $\delta(G) = 3$ باشند، اختلاف بیشترین و کمترین مقدار ممکن

برای اندازه گراف G کدام است؟

کنکور دی ۱۴۰۱

۳۷ (۴)

۳۹ (۳)

۳۸ (۲)

۴۰ (۱)



گراف منتظم

نکته: در گراف r -منتظم، $\delta = \Delta = r$.

نکته: گراف فرد منتظم از درجه‌ی فرد وجود ندارد.

۲۹- چند نوع گراف ۲-منتظم از مرتبه‌ی ۹ وجود دارد؟

۳۰- چند نوع گراف ۳-منتظم از مرتبه‌ی ۱۱ وجود دارد؟

۳۱- اگر به گراف ۴-منتظم، ۱۲ یال اضافه شود، گراف کامل می‌شود. مرتبه و اندازه‌ی گراف را مشخص کنید.



۳۲- در گراف ۵- منتظم از مرتبه‌ی p و اندازه‌ی q ، داریم $۲q - ۳p = ۱۶$. گراف را مشخص کنید.

۳۳- گراف مکمل شکل مقابل از چه اندازه‌ای است؟



15 (4)

14 (3)

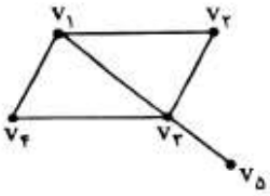
13 (2)

12 (1)



دور در گراف

تعریف: یک دور به طول m در گراف G دنباله‌ای از $m + 1$ راس، که راس‌های متوالی مجاور بوده و m راس اول آن دو به دو متمایز بوده و راس آخر همان راس اول باشد. در شکل زیر دور $v_1 v_2 v_3 v_4 v_1$ را ببینید. این دور به طول ۴ است.



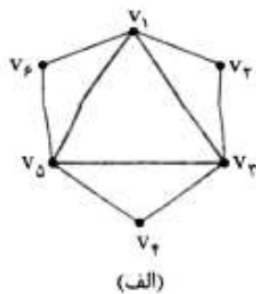
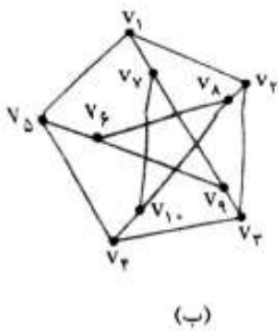
** حداقل طول دور، ۳ می‌تواند باشد.

** طول دور همان تعداد یال‌های طی شده است.

تعریف: گرافی را که تنها از یک دور n راسی تشکیل شده باشد با C_n نمایش می‌دهیم. برای مثال C_5 را در شکل مقابل می‌بینید.



گراف‌های مقابل چند دور به طول ۵ دارند؟



دور در گراف کامل

نکته: تعداد دورهای به طول i در گراف K_p برابر است با $\binom{p}{i} \times \frac{(i-1)!}{2}$

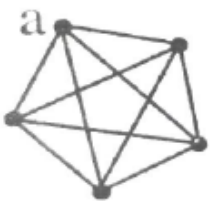
در گراف K_5 چه تعداد دور به طول ۴ موجود است؟

در گراف K_6 چه تعداد دور وجود دارد؟

چه تعداد از دورهای گراف زیر شامل راس a نمی‌باشند؟



چه تعداد از دورهای به طول ۴ از گراف مقابل شامل راس a می‌باشند؟



فاصله بین دو راس

$$1) u, v \in V : u = v \Leftrightarrow d(u, v) = 0$$

$$2) d(u, v) = d(v, u)$$

$$3) u, v, w \in V : d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v)$$

۳۴- در گراف کامل K_V چند مسیر به طول 4 بین دو راس ثابت u و v وجود دارد؟

40 (4)

60 (3)

100 (2)

80 (1)

۳۵- در گراف کامل مرتبه 7، شامل V_1 تا V_7 چند مسیر از V_1 تا V_7 به طول 4 شامل راس V_5 وجود دارد؟

63 (4)

72 (3)

24 (2)

36 (1)



۳۶: در یک گراف کامل از مرتبه ی 5، چند دور با طول 4 وجود دارد؟

20 (4)

15 (3)

10 (2)

1 (1)

۳۷- تست: در گراف G با درجه های راس های $۲, ۲, ۲, ۳, ۳$ دو راس ماکسیمم درجه غیر مجاورند. تعداد دورهای

با طول 4 کدام است؟ (سراسری - 81)

0 (4)

1 (3)

2 (2)

3 (1)

