

باقیمانده های معروف

مدل ریاضی	جایگزین برای پیدا کردن باقی مانده	عدد معروف	باقی مانده بر
$\overline{abcde} \equiv_{2,5,10} e$	رقم سمت راست	10^n و 5^n و 2^n	
$\overline{abcde} \equiv_{3,9} a+b+c+d+e$	مجموع ارقام	۹ و ۳	
$\overline{abcde} \equiv_{4,25} \overline{de}$	۲ رقم سمت راست $2^2, 5^2, 4$	۲۵ و ۴	
$\overline{abcde} \equiv_{11} a+b+c+d+e$	جمع دین یکی یکی (از راست +)	۱۱	
$\overline{abcde} \equiv_{7,13} -ab+cde$	۳ رقم سمت چپ جمع دین (از راست)	۱۳ و ۷	
$\overline{abcde} \equiv_6 e+4(a+b+c+d)$	یکان $\times 4$ + مجموع	۶	
$\overline{abcde} \equiv_8 \overline{cde}$	2^3 سه رقم سمت راست	۸	
$\overline{abcde} \equiv_{27,27} \overline{ab+cde}$	۳ رقم سمت چپ جمع	۲۷ و ۲۷	

از سمت راست! ۹۰٪ رها در کسب

دستی ریزه های $10^n + 1$ و $10^n - 1$ و شمارنده های n

n تا n ابتدا + دین کنیم

یکه جمع دین ۱۱ $\leftarrow 10^1 \leftarrow 9$ یکه جمع

دوتا دین دین ۱۰۱ $\leftarrow 10^2 \leftarrow 99$ دوتا دوتا جمع

سه تا دین دین دین ۱۰۰۱ $\leftarrow 10^3 \leftarrow 999$ سه تا دین دین دین

$1504927 \equiv_{101} 27 - 49 + 50 \pmod{1} \equiv 27$



(فارج از کشور ۸۷)

۱۲ (۴) $\overline{0b} \equiv 2$

۰۴ ✓
۰۸ ✓
۰۴ ✗

$\overline{10} = 20$
 $2 \times 10 = 20$

۳۰ (۳)

۰ ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹

صفر را حذف کن

۳۵ - چند عدد مضرب ۴ به صورت $\overline{73a0b}$ وجود دارد؟

۲۷ (۲) $\overline{73a0b}$

۱۳ (۱)

مضرب ۴

(سراسری ریاضی فارج از کشور ۸۷)

۳۶ - اگر عدد طبیعی پنج رقمی $\overline{5abb6}$ بر عدد ۹۹ بخش پذیر باشد، رقم b کدام است؟

۸ (۴) $10^2 - 1$

۷ (۳)

۶ (۲)

۴ (۱)

$$99 \mid \overline{b4} + \overline{a0} + 5 \equiv 0 \rightarrow 10b + 4 + 10a + 5 \equiv 0$$

$$11b + 10a \equiv -9 \pmod{99}$$

$b=1$
 $a=0$

۹۹

$$9 + b + b + a + 5 \equiv 0 \quad 11 + 2b + a \equiv 0 \quad 2b + a \equiv 9$$

$$4 - b + b - a + 5 \equiv 0$$

$$9 - a \equiv 0 \rightarrow a = 9$$

$$2b + a = 9k + 7$$

$$2b + 0 = 9k + 7$$

$$2b = 9k + 7$$

$$2b = 19$$

$$b = 1$$



۳۹- معادله $x^{1389} + y^{1389} = z^{1389}$ چند جواب طبیعی دارد؟

۱۳۹۰ (۴)

۱۳۸۹ (۳)

۱ (۲)

(۱) هیچ

قضیه بزرگ فرما

عبارت P

$$a \equiv 1 \pmod{p-1}$$

$$5 \equiv 27 \pmod{14}$$

$$5^2 \equiv 26 \pmod{14}$$

$$5^3 \equiv 13 \pmod{14}$$

$$\vdots$$

$$(5)^{27} \equiv 1 \pmod{14}$$

$$y^x + 13 = 14$$

۴۰- اگر a عدد طبیعی یکرقمی و باقیمانده‌ی تقسیم $a + 2^{1399}$ بر ۲۳ برابر ۱۱ باشد، رقم یکان $a + 2^{2020}$ کدام است؟

$$2^{1399} \equiv 11 \pmod{23}$$

$$2^{2020} \equiv 2 \pmod{23}$$

$$2 + 11 \equiv 13 \pmod{23}$$

$$2^{1399} \equiv 11 \pmod{23}$$

$$2^{1399} \equiv ? \pmod{23}$$

$$2^5 \equiv 2 \pmod{9}$$

$$2^9 \equiv 8 \pmod{9}$$

$$2^{12} \equiv 8 \pmod{9}$$

$$2^{15} \equiv 8 \pmod{9}$$

$$2^{18} \equiv 8 \pmod{9}$$

$$2^{21} \equiv 8 \pmod{9}$$

$$(2^{22})^{23} \equiv (1)^{23} \pmod{23}$$

$$2^{13} \times 2^{13} \equiv 1 \pmod{23}$$

$$2^{1399} \equiv 2^{13} \pmod{23}$$

$$2^{22} \equiv 7 \pmod{23}$$

$$2^{44} \equiv 4 \pmod{23}$$

$$2^{66} \equiv 13 \pmod{23}$$

قضیه بزرگ فرما!



معادله $x^n + y^n = z^n$ به جز حالتی که $n = 2$ است و اعداد فیثاغورسی در آن صدق می‌کنند، برای n های دیگر جواب غیربدیهی صحیح ندارد. جواب غیربدیهی یعنی جوابی که در آن، هیچ یک از متغیرهای x ، y و z صفر نباشند!



سراسری داخل ۱۴۰۱

۱۲۵- دو عدد $a^2 - 1$ و $14a + 4$ رقم یکان برابری دارند. رقم یکان $a^2 + a$ کدام است؟

a	a^2	$a^2 - 1$	$14a + 4$
۰	۰	۹	۴
۱	۱	۰	۱۸
۲	۴	۳	۳۲
۳	۹	۸	۴۶
۴	۱۶	۱۵	۶۰
۵	۲۵	۲۴	۷۴
۶	۳۶	۳۵	۸۸
۷	۴۹	۴۸	۱۰۲
۸	۶۴	۶۳	۱۱۶
۹	۸۱	۸۰	۱۳۰

زنج $14a + 4 =$

$a^2 - 1 =$ زنج $+ 1$

فرز

سراسری داخل ۱۴۰۱

۱۲۶- اگر x و y هر دو عدد طبیعی باشند، معادله سیاله خطی $12x + 11y = 759$ چند جواب دارد؟

$12x = 759 - 11y$
 $x =$

$11y = 759 - 12x$
 $y = 69 - \frac{12}{11}x$
 $y = 69 - 12k$

$12x + 11(12k - 3) = 759$
 $12x = -132k + 333 + 759$
 $x = -11k + 94$

$-11k > -94$
 $k < 4$



سراسری داخل ۱۴۰۰

۳۶- اگر m بزرگترین عدد طبیعی باشد که $(10-m)! \equiv 36 \pmod{10}$ ، آنگاه باقیمانده تقسیم m^{123} بر ۱۵، کدام است؟

$(10-m)! \equiv 36$

$3! \equiv 36$ کوچکترین

$2^2 \times 3^2$

$1 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10$

$4! \equiv 24$

$4^{123} \equiv 15$

$15 \equiv 15$

$15^2 \equiv 15$

$15^3 \equiv 15$

$15^4 \equiv 15$

$15^5 \equiv 15$

$15^6 \equiv 15$

$15^7 \equiv 15$

$15^8 \equiv 15$

$15^9 \equiv 15$



خدا حافظ

نظریه اعداد

مدرسه خرد
گسترش







گراف

دو اصل در رأس
بار خط
یال
تویایی

مجموعه یالها
مجموعه رئوس

$G(V, E)$

$V = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$
 $E = \{ab, bc, be, bd, bf, cd, de, fg, gh, hi, ij, jg, gf, fh, fg, g, g\}$

رأس = نقطه
 $ab = ba$
 $ab \neq ba$ جهت دار

اندازه ← تعداد یال‌های من = $13 = 9$
 تعداد رئوس من = 10

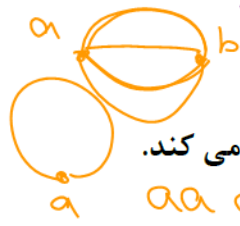
درجه رأس = $deg(a)$
 $deg(a) = 1$
 $deg(b) = 5$

$\delta = 1$
 $\Delta = 5$

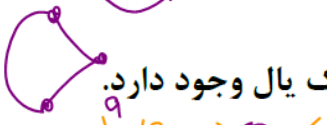
بیشترین درجه
 کمترین درجه

دو رأس a و b را در گراف G مجاور گوئیم هرگاه یالی a و b را بهم متصل کرده اند

یک رخس



دو یال را موازی گوئیم، هرگاه بین دو رأس یکسان رسم شده باشد.
 طوقه یا حلقه (لوپ): یالی است که یک رأس را به خودش وصل می کند.
 گراف ساده: یالها میان دو رأس متفاوتند



الف) طوقه ندارد.
 ب) یال موازی ندارد.
 ج) بین هر دو رأس حداکثر یک یال وجود دارد.

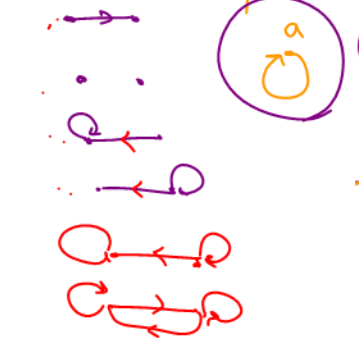
$ab = ba$

بین a و b حداکثر یک یال رسم می شود



$ba \neq ab$

گراف جهت دار:



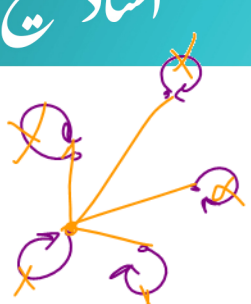
تعداد گراف های جهت دار p رأسی برابر است به: $2 \times p^2$
 $p \times p = p^2$ یال مختلف

1- در مورد گراف ساده $G(V, E)$ کدام گزینه نادرست است؟

- (1) مجموعه E متناهی است.
- (2) مجموعه V متناهی است.
- (3) مجموعه E ناتهی است.
- (4) مجموعه V ناتهی است.



تعداد زیرمجموعه‌ها \mathcal{P} عدالت یال من



\mathcal{P} - تعداد یال ها \mathcal{P} رئوس

$$P(P-1) = \binom{P}{2} - P$$

تعداد گراف های جهتدار P راسی بدون حلقه برابر است با:

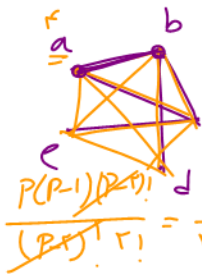
تعداد گراف های جهتدار P راسی که n حلقه داشته باشند برابر است با:

$$\binom{P}{n} (P^n - P)$$

* تعداد گراف های جهتدار P راسی که n حلقه داشته باشند برابر است با:

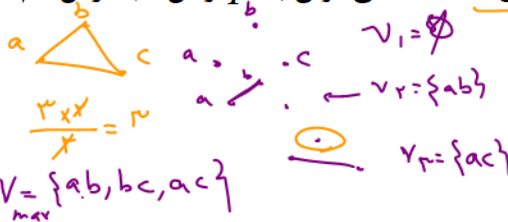


گراف چندگانه: گرافی که حلقه یا یال موازی داشته باشد گراف چندگانه نامیده می شود. (بین هر دو راس آن هر تعداد یالی می تواند وجود داشته باشد.)



تعداد تمام گراف های ساده که می توان با P راس (با فرض نام گذاری رئوس) ساخت برابر است با:

$$\frac{P(P-1)}{2}$$



$$\binom{P}{2} = \frac{P(P-1)}{2}$$

1 راس ایزوله (منزوی، تنها، منفرد): راسی که درجه آن صفر باشد. $deg(a) = 0$

2 راس آویزان: راسی که درجه آن یک است.

3 راس فول: راسی که بیشترین درجه ممکن $(P-1)$ را دارد.

4 راس فرد: راسی که درجه آن فرد باشد

5 راس زوج: راسی که درجه آن زوج باشد.

2- چند گراف جهت دار با مجموعه رئوس $V = \{a, b, c, d\}$ می توان رسم کرد؟

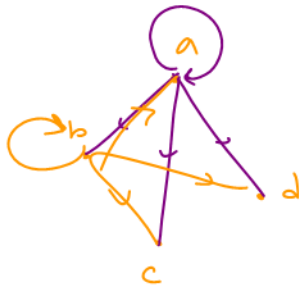
2^{10} (4)

2^{12} (3)

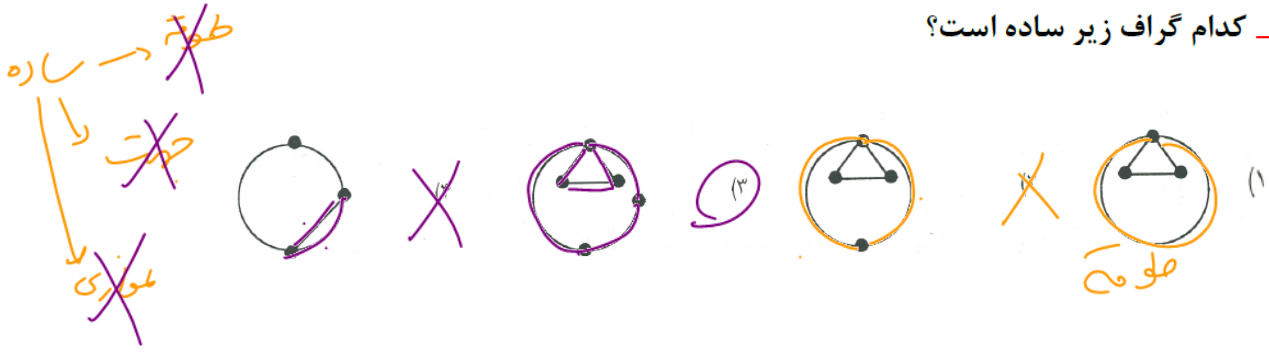
2^{16} (2)

2^6 (1)

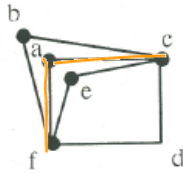
$$4 \times 4 = 16$$



۳- کدام گراف زیر ساده است؟



۴- در گراف مقابل چند راس با راس a مجاور هستند؟



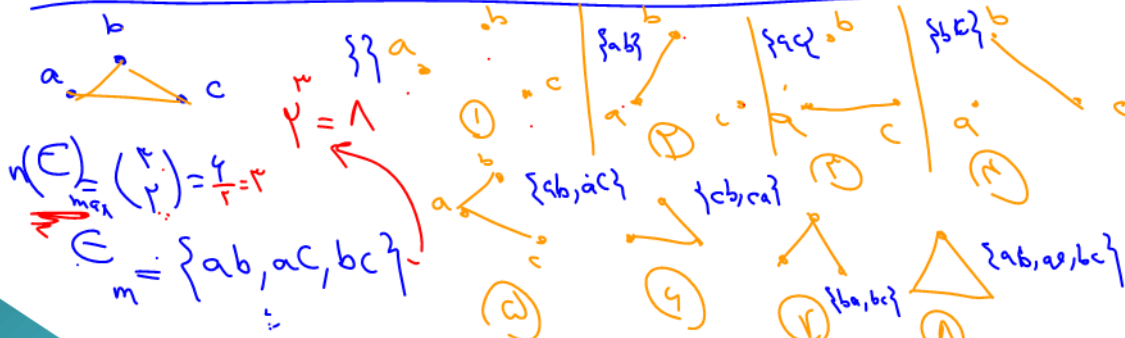
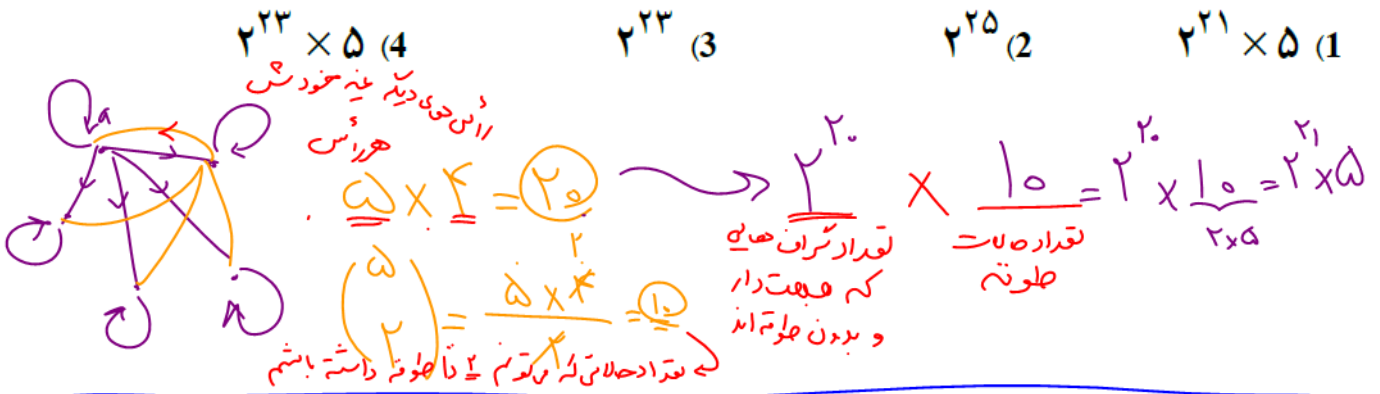
0 (4)

3 (3)

1 (2)

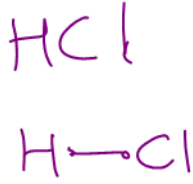
2 (1)

۵- چند گراف جهت دار با مجموعه رئوس $V = \{a, b, c, d, e\}$ می توان رسم کرد که دارای 2 طوقه باشند؟



۶- گراف متناظر با کدام مولکول شیمیایی زیرگراف چندگانه است؟

(4) هیدروکلریک اسید

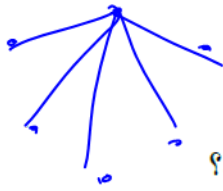
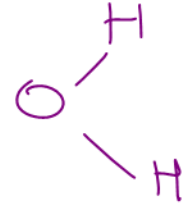


(3) پروپان

(2) آزن

(1) آب

آکسان دو پیوندی
سه پیوندی



تعداد یال به خط‌ها $\binom{n}{2}$
 n نقطه یعنی واقع بر یک خط

۷- گراف ساده ای دارای 6 رأس است این گراف حداکثر چند یال دارد؟

(4) 25

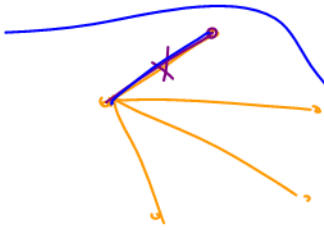
(3) 15

(2) 30

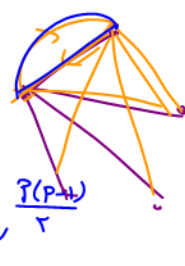
(1) 10

$$\frac{6 \times 5}{2}$$

$$\binom{6}{2} = \frac{6 \times 5}{2} = 15$$



عدد $\frac{P(P-1)}{2}$
تعداد گراف $\frac{5 \times 4}{2}$



تعداد یال $\frac{P(P-1)}{2}$
تعداد گراف $\frac{5 \times 4}{2}$

تعداد گراف $P \times P$
تعداد یال 5×5

تعداد گراف 2^P
تعداد یال $2^P - 1$

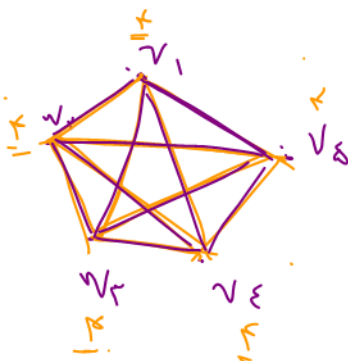
۸- با مجموعه رئوس $V = \{v_1, v_2, \dots, v_5\}$ چند گراف ساده با فرض نام گذاری رئوس می توان ساخت؟

(4) 128

(3) 256

(2) 1024

(1) 512



تعداد گراف $\binom{5}{2} = 10$

$2^{10} = 1024$

تعداد گراف 2^{10}
 $\frac{5 \times 4}{2} = 10$



استوار است
 $P = |V| = n(V)$
 (به ترتیب)

مجموع درجات
 $\frac{\sum \deg(a_i)}{2} = q$
 اندازه



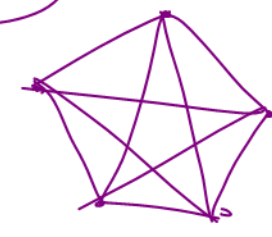
$2+3+2+1=8$
 $\frac{8}{2} = 4 = q$

گراف کامل

K_P

تعداد راس = مرتبه

K_5
 5 رأس



حد اکثر تعداد یال در یک گراف ساده، دارد! همه یالهای ممکن را داشته باشد!

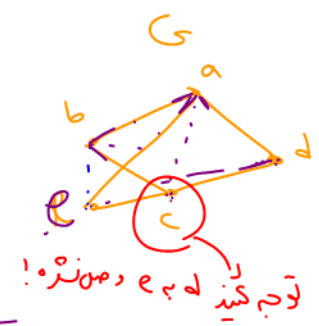
تعداد یال ها در گراف کامل
 $\binom{P}{2} = \frac{P(P-1)}{2}$

در گراف کامل
 $\sum \deg(a_i) = P(P-1)$

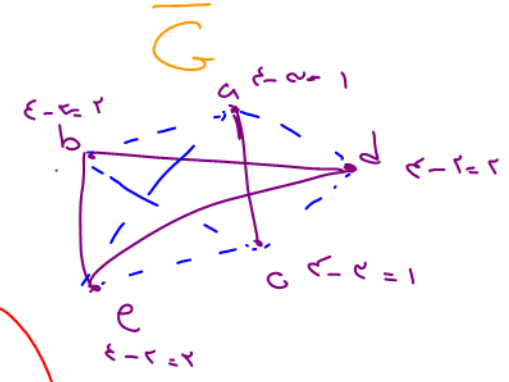
درجه ی همه رأس در گراف کامل
 $\delta = \Delta = P-1$

گراف مکمل \bar{G}

یال \leftrightarrow یال



توجه کنید که یال e درجه 0!



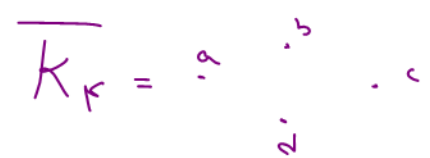
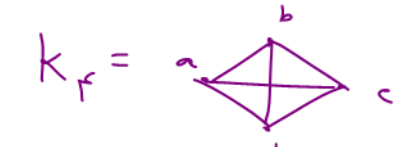
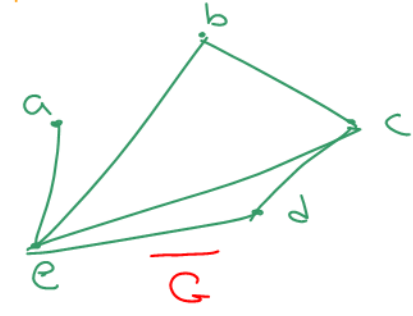
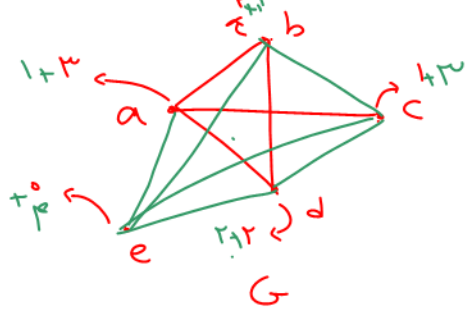
$G(V, E) \rightarrow \bar{G}(V, \bar{E})$

کلا هم این رأس های هم راسه وقت کمتری!

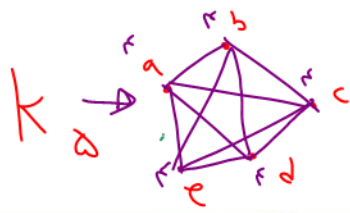
$q_G + q_{\bar{G}} = \binom{P}{2}$
 تعداد یال گراف کامل

$G + \bar{G} = K_P$

$G \cup \bar{G} = P-1$



مگر گراف کامل
 گراف است!



۹- چند گراف چهار راسی بدون نام گذاری رئوس می توان رسم کرد؟

6 (4)

11 (3)

32 (2)

64 (1)

۱۰- چند گراف ساده با مجموعه رئوس $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ وجود دارد که اندازه آن ها 3 با شد؟

910 (4)

455 (3)

20 (2)

15 (1)

۱۱- تعداد گراف های ساده 4 راسی در مجموعه $V = \{a, b, c, d\}$ که 2 یال داشته و یک یال آن ها ab با

شد ، کدام است؟

7 (4)

6 (3)

5 (2)

4 (1)



۱۲- با 5 راس a, b, c, d, e چند گراف ساده می توان رسم کرد که در آن $q = 5$ بوده و گراف شامل یال های

ab, ac باشد، اما شامل ed نباشد؟

30 (4)

38 (3)

27 (2)

35 (1)

۱۳- در یک گراف ساده $V = \{v_1, v_2, \dots, v_6\}$ است، چند گراف $G = (V, E)$ می توان رسم کرد که

v_1 و v_2 با هم مجاور باشند و به v_3 یالی وصل نشده باشد؟

۲۱۵ (4)

۲۱۰ (3)

۲۹ (2)

۲۵ (1)



۱۴- چه تعداد گراف ساده مرتبه 5 با رئوس a, b, c, d, e وجود دارد که راس a در آن از درجه 2 باشد؟

$$3 \times 2^8 \quad (4)$$

$$3 \times 2^5 \quad (3)$$

$$3 \times 2^7 \quad (2)$$

$$3 \times 2^6 \quad (1)$$

۱۵- در گراف ساده G از مرتبه 8 سه بخش جدا از هم وجود دارد. این گراف حداکثر چند یال دارد؟

$$28 \quad (4)$$

$$6 \quad (3)$$

$$21 \quad (2)$$

$$15 \quad (1)$$



دنباله درجات رئوس

$$\sum_{i=1}^p \deg v_i = 2q$$

مجموع درجات رئوس یک کراف ساده برابر با $2q$ است.

تعداد رئوس زوج فرد است \rightarrow فرد $p =$

تعداد رئوس زوج، زوج است \rightarrow زوج $p =$

$$0 \leq \delta \leq \deg v_i \leq \Delta \leq p - 1$$



۱۶- در یک گراف ساده با اندازه 25 و از مرتبه 14 فقط رئوس درجه 3 و 5 داریم . چند رأس درجه 3 وجود دارد؟

8 (4)

9 (3)

4 (2)

10 (1)

۱۷- اگر m تعداد رئوس زوج در یک گراف ساده باشد و تعداد کل رئوس این گراف فرد باشد، باقیمانده تقسیم m^2 بر عدد 8 کدام است؟

3 (4)

7 (3)

0 (2)

1 (1)

۱۸- در یک گراف ساده ماکزیمم درجه رئوس 6 است مرتبه گراف کدام گزینه نمی تواند باشد؟

9 (4)

8 (3)

7 (2)

6 (1)

