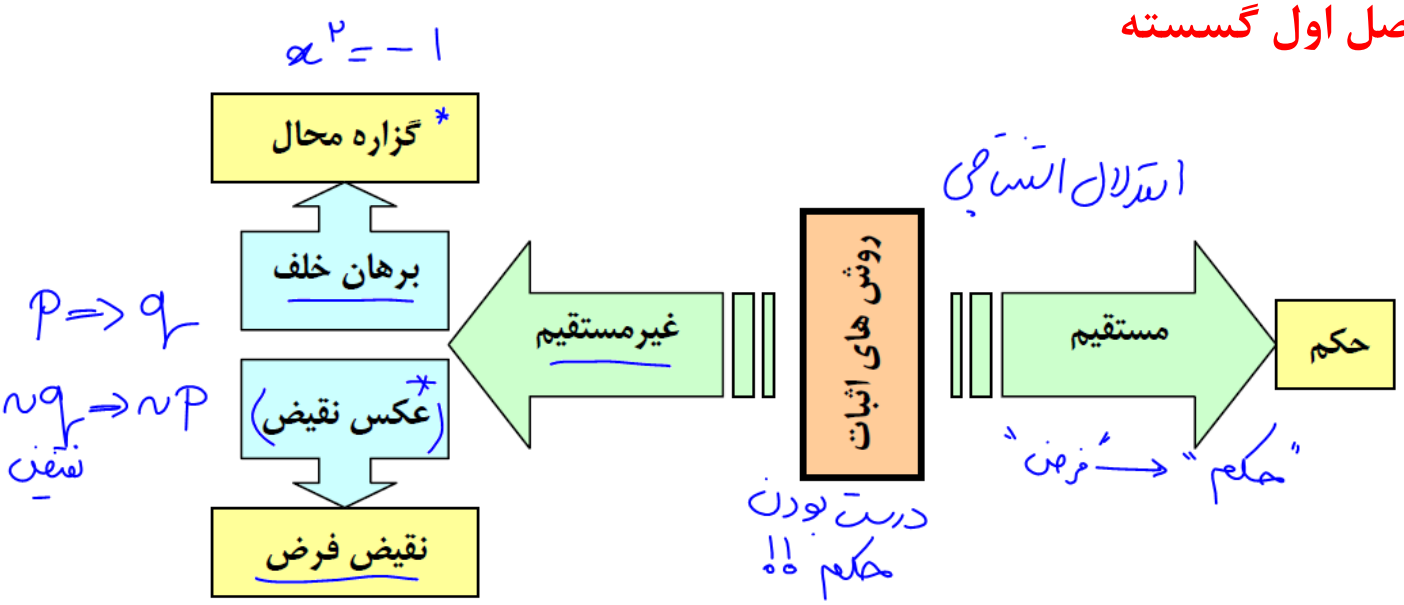
## فصل اول گسسته




### اثبات غیر مستقیم (برهان خلف)

$\sim q \Rightarrow \sim p \equiv p \Rightarrow q$

در روش برهان خلف فرض می‌کنیم که حکم نادرست باشد و سپس با استفاده از قوانین منطق گزاره‌ها و دنباله‌ای از استدلال‌های درست و مبتنی بر فرض به یک نتیجه غیرممکن یا نتیجه متضاد با فرض می‌رسیم و از آنجا معلوم می‌شود که فرضِ نادرست بودنِ حکم باطل است و درستی حکم ثابت می‌گردد.

۱ نتوان ثابت کرد ← عدد تنگ ، وجود ندارد ، ...

۲ فرآیند عکس راحت باشد ← $a \to a^*$ ، $a$ وژنی ، $a^*$ وژنی

۳ یکتایی ← ثابت کنید ..... یکتاست !

۳ عکس قضایا ← زاویه روبه روبه ضلع بزرگتر بزرگتر است

**۱ نتوان ثابت کرد** که تعریف حکم را درست و حکم درست است!!

مثال: ثابت کنید جمع عددی گویا با عددی گنگ، گنگ می‌شود

$a+b=c \rightarrow$ گویا

$b=c-a \rightarrow$ تفریق نسبت به عمل ... اعداد گویا نسبت به عمل

$b \in Q \times$

$a \in Q$ $\quad b \in Q'$

$a+b \in Q' \rightarrow a+b \notin Q$ (حکم)

$a+b \in Q$

گنگ + گنگ = ؟

$\sqrt{2}+\sqrt{2}=2\sqrt{2}$ گنگ

$\sqrt{2}+(-\sqrt{2})=0$ گویا

گنگ + گنگ = گویا

گویا + گویا = گویا

بسته اند: + ، − ، × ، ÷ (اگر عدد دوم مخالف صفر باشد)

بسته بودن یک مجموعه نسبت به یک عمل ← هر دو عدد این مجموعه با این عمل جوابی در مجموعه می‌دهند

$N$ → طبیعی = طبیعی + طبیعی

اعداد طبیعی نسبت به عمل جمع بسته اند!

تفریق هر دو عدد طبیعی عدد طبیعی نمی‌شود

اعداد طبیعی نسبت به تفریق بسته نیستند!

$1-2=-1 \quad 2-1=1$

$a_1, a_2, a_3$ و $b_1, b_2$ و $b_3$ عددهایی صحیح هستند و $b_3$ همان اعداد ولی به ترتیب دیگری قرار گرفته‌اند، ثابت کنید $(a_1-b_1)(a_2-b_2)(a_3-b_3)$ عددی زوج است.

فرد است ← زوج نیست = برهان خلف

$(a_1-b_1)(a_2-b_2)(a_3-b_3)=$ فرد

هر سه‌تایی از آن‌ها فرد هستند.

زوج = زوج × زوج

زوج = فرد × زوج

فرد = فرد × فرد

$a_1-b_1+a_2-b_2+a_3-b_3=$ فرد

$a_1-b_1+a_2-b_2+a_3-b_3=0=$ زوج

نتیجه حکم نادرست و حکم درست است

$A=\{0,1,-1\}$ می‌توان دو عضو را یکی انتخاب کرد.

$\oplus$: $0+1=1$, $1-1=0$, $-1+0=-1$ → ×

$1+1=2 \notin A$

A نسبت به جمع بسته نیست!

$\times$: $0\times1=0$, $1\times1=1$, $0\times-1=0$, $1\times-1=-1$, $-1\times-1=1$, $0\times0=0$

A نسبت به ضرب بسته است

A نسبت به عمل تفریق بسته نیست

$1-1=0$

$1-(-1)=2 \quad X \notin A \rightarrow$

$\frac{1}{0}=$ تعریف نشده $\notin R$

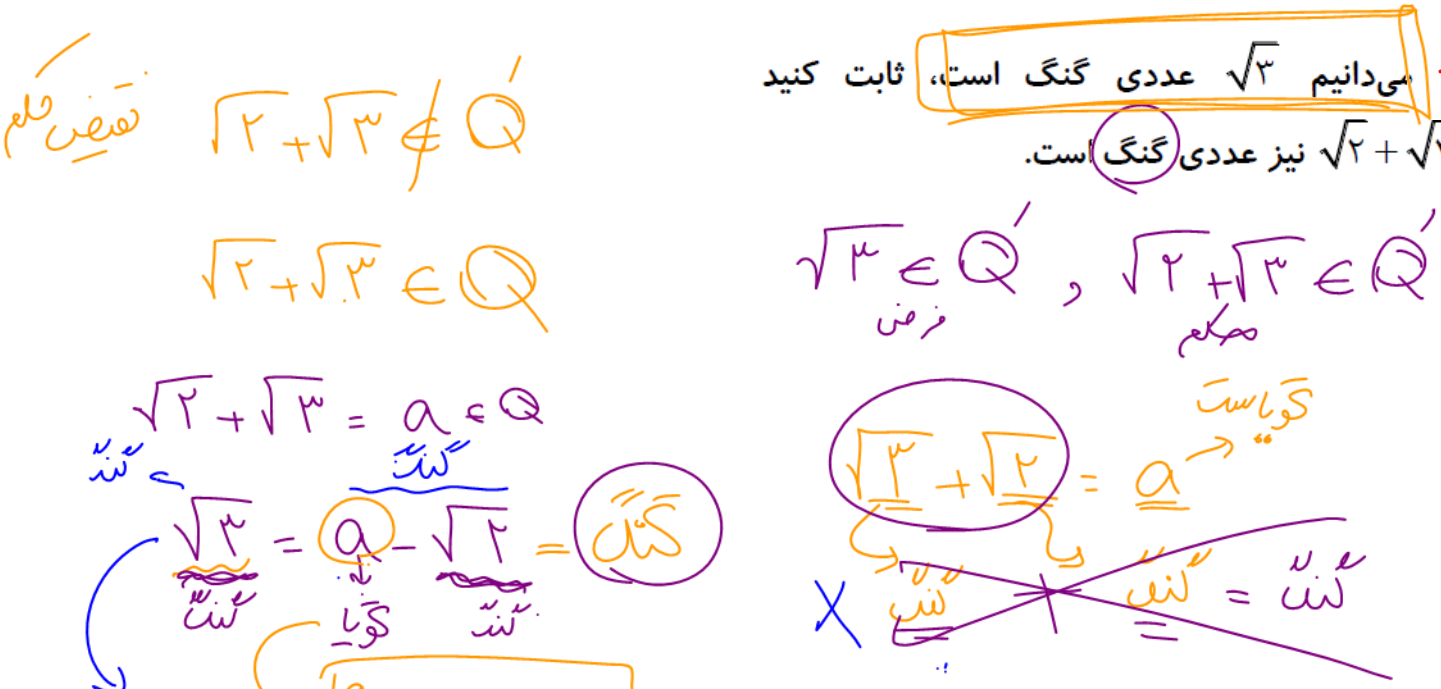
حتی مجموعه اعداد حقیقی نسبت به تقسیم بسته نیست

* اگر تابع $f$ در $x=a$ پیوسته ولی $g$ در $x=a$ ناپیوسته باشد، ثابت کنید $f+g$ در $x=a$ ناپیوسته است.

قضیه: $f+g=$ ناپیوسته

ناپیوسته = ناپیوسته + پیوسته

* می‌دانیم $\sqrt{۳}$ عددی گنگ است، ثابت کنید $\sqrt{۲}+\sqrt{۳}$ نیز عددی گنگ است.




* می‌دانیم $\sqrt{۳}$ عددی گنگ است،

$\sqrt{۳} \in Q' \rightarrow \sqrt{۳} \in Q$

$Q=\left\{\frac{a}{b} \mid a,b \in Z, b \neq ۰, (a,b)=۱\right\}$

$\sqrt{۳} \in Q \rightarrow (\sqrt{۳})^۲=(\frac{a}{b})^۲ \Rightarrow ۳=\frac{a^۲}{b^۲} \Rightarrow ۳b^۲=a^۲ \rightarrow$ $a$ حتما مضرب ۳ است

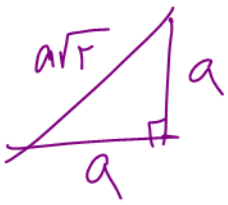
$a^۲$ مضرب ۳ $\rightarrow$ همه عامل‌ها توان زوج دارند! $\rightarrow a^۲$ مضرب ۹ $\rightarrow a^۲=۹k$

$۳b^۲=۹k \rightarrow b^۲=۳k$

$(a,b)=۳$ (یا $(a,b)=۱$) $\Rightarrow a=۳k', b=۳k$

* ثابت کنید که مثلث قائم الزاویه‌ی متساوی الساقین که اضلاع آن عدد صحیح باشند، وجود ندارد.

تناقض حکم : وجود دارد

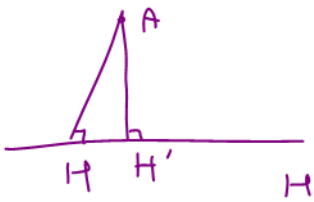



$a \in Q$

$\frac{a}{۲} \times \sqrt{۲} \in Q' \rightarrow$ ✗ (گویا)

## ۲ یکتایی

ثابت کنید از یک نقطه خارج یک خط تنها یک خط عمود بر آن می شود




یکتایی

$H+H'=180$

$H+H'<180$ ✗

## ۳ عکس فرآیند

ثابت کنید اگر مجذور یک عدد مضرب ۵ باشد خود آن عدد نیز مضرب ۵ است

$a^2=5k \longrightarrow a=5k$

عکس حکم: $a\neq 5k \longrightarrow$

$a=5k+1 \longrightarrow$

$a=5k+2 \longrightarrow$

$a=5k+3 \longrightarrow$

$a=5k+4 \longrightarrow a^2=(5k+4)^2$

$a^2=25k^2+40k+16$

$a^2=5(5k^2+8k+3)+1$

$a^2=5k'+1$ ✗

$a^2=(2k+1)^2 \Rightarrow a^2=4k^2+4k+1=4(k^2+k)+1$

$=4k'+1$

مجذور هر عدد فرد به صورت $4k+1$

$a \longleftarrow 2k \longleftarrow 4k^2$

$2k+1 \longleftarrow 4k+1$

مجذور مضرب ۲ ← مضرب ۲

مجذور مضرب ۳ ← مضرب ۳

$a=3k \longrightarrow a^2=9k^2$

$a=3k+1 \longrightarrow a^2=9k^2+6k+1=3k'+1$

$a=3k+2 \longrightarrow a^2=9k^2+12k+4=3k'+1$

## ۴ عکس قضایا

مربع کامل ← $9k$ یا $3k+1$

$4k$ یا $4k+1$

## سوالات دشوار

۱ ثابت کنید $\cos 1^\circ$ یک عدد گنگ است.

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$\cos 1^\circ < 1$

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$ ①

$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$

$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

$-1 < \cos 1 < 1$

$\cos 1 = 2\cos^2(0.5) - 1$

$\cos 1 = 2\cos^2(0.5) - 1$

$\cos 0.5 = \frac{\cos 1 + 1}{2}$

$\cos 0.5 = \sin 0.5$

۲ ثابت کنید برای هر x که: $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$، داریم:

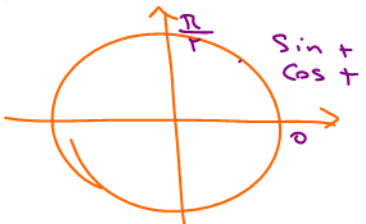
$\sin x + \cos x < 1$

$|a| < 1 \Rightarrow a^2 < a$

$(\sin x + \cos x)^2 \geq 1^2$

$\Rightarrow \sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x \cos x \geq 1$

$\Leftrightarrow 2\sin x \cos x > 0$




۳ P را عددی طبیعی و بزرگ‌تر از واحد و n و k را دو عدد طبیعی فرض می‌کنیم $(n \geq k)$.

ثابت کنید دست کم یکی از عددهای $\binom{n}{k}$ و $\binom{n+1}{k}$ و ... و $\binom{n+k}{k}$ بر P بخش‌پذیر نیست.

$\binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1} - \binom{n}{k+1}$

$\binom{P}{0}\binom{n-k}{k-k} = 1 \rightsquigarrow$ یکی بر P بخش‌پذیر نیست

$\binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k} - \binom{n}{k}$

$\binom{n-1}{k} = \binom{n}{k-1} - \binom{n-1}{k-1}$

$$\binom{n}{k}=\binom{n+1}{k+1}-\binom{n}{k+1}$$

$A=\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$

$\binom{n}{k}$ = تعداد زیرمجموعه‌های $k$ عضوی

$a_1$ دارد $\Rightarrow \binom{n-1}{k-1}$

$a_1$ ندارد $\Rightarrow \binom{n-1}{k}$

$$\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}=\binom{n}{k}$$

## اثبات‌های بازگشتی / گزاره‌های هم‌ارز

**یادآوری**

آ) اگر ارزش دو گزاره یکسان باشد آنها را گزاره‌های **هم ارز (هم ارزش)** می‌نامیم.

ب) اگر $P$ و $Q$ دو گزاره هم ارز (یعنی همواره هر دو درست یا هر دو نادرست) باشند، آن‌گاه گزاره‌ی $P \Leftrightarrow Q$ یک **گزاره درست** است. به عکس اگر ترکیب دو شرطی $P \Leftrightarrow Q$ درست باشد، آن‌گاه $P$ و $Q$ دو گزاره هم‌ارز خواهند بود و اگر ارزش یکی را بدانیم، ارزش دیگری نیز همان است.

$P \Leftrightarrow Q$ اگر و تنها اگر

| $P$ | $Q$ | $P \Leftrightarrow Q$ |
|---|---|---|
| د | د | د |
| ن | ن | د |

اگر $a,b \in \mathbb{R}$ کدام‌یک از ترکیب‌های دو شرطی زیر درست است؟

آ) $a=b \Leftrightarrow a^3=b^3$ ✓

ب) $a=b \Leftrightarrow a^2=b^2$ ✗

پ) $a<b \Leftrightarrow a^3<b^3$ ✓

ت) $a<b \Leftrightarrow a^2<b^2$ ✗

**اثبات به روش بازگشتی:**

از حکم عبارت را تغییر داده تا به یک عبارت همواره درست برسیم و پاسخ همه اعمال انجام شده بازگشت پذیر باشند

**مثال:** ثابت کنید اگر $a$ و $b$ دو عدد مثبت باشند $\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geq 2$ است.

$a+\frac{1}{a}\geq 2$ $\quad a>0$

$a\times\frac{a^2+1}{a}\leq -2\times a$

**اگر $a<0$ باشد، ثابت کنید $a+\frac{1}{a}\leq -2$ است.**

$\Leftrightarrow a^2+1\leq -2a$

$\Leftrightarrow a^2+1\geq -2a$

$\Leftrightarrow a^2+2a+1\geq 0$

$\Leftrightarrow (a+1)^2\geq 0$

## مثال نقض

واضح است که فقط گزاره های درست را می توان اثبات کرد. گاهی اوقات یک گزاره ، نادرست است که برای نشان دادن نادرستی آن، یک **مثال نقض** ارائه می کنیم. مثال نقض، مثالی است که نشان می دهد، یک گزاره‌ی کلی نادرست است.

$a=0$
$a<0$
$|a|<1$

**۱. جمع هر دو عدد گنگ، عددی گنگ است.** ✗

$\sqrt{2}-\sqrt{2}=0\in\mathbb{Q}$

**۲.حاصل ضرب هر دو عدد گنگ، گویا است.**

$\sqrt{2}\times\sqrt{3}=\sqrt{6}\in\mathbb{Q}$

**۳. مجموع هر دو عدد گنگ، عددی گویا است.**

$\sqrt{2}+\sqrt{2}=2\sqrt{2}$

**۴. توان دوم هر عدد گنگ، عددی گویا است.** ✓

$(\sqrt{2})^2=2$ $\quad (\sqrt[3]{2})^2=\sqrt[3]{4}=2^{\frac{2}{3}}\in\mathbb{Q}$

**۵. اگر $a^2<b^2$ باشد، آن‌گاه $a<b$ خواهد بود.**

$2$ $\quad -3$ $\quad 4<9$

$a=2$ $\quad a^2=4<b^2=9$
$b=-3$ $\quad 2\not<-3$

a مضرب ۳ ⇒ ak

c مضرب ۳ ⇒ ck

۱ ثابت کنید مجموع سه عدد متوالی بر ۳ بخش‌پذیر است.

* از بین n عدد متوالی حتماً یک عدد مضرب n است!!

* مجموع n عدد متوالی بر n بخش‌پذیر است!!

در عدد متوالی مضرب ۳: $c_{k-1}$ $c_k$ $c_{k+1}$

$k-1$ $k$ $k+1$

$k+(k+1)+(k+2)=3k$ مضرب ۳

۲. حاصل‌ضرب سه عدد طبیعی متوالی بر ۶ بخش‌پذیر است.

* حاصلضرب n عدد متوالی همیشه بر $n!$ بخش‌پذیر است.

$(k-1)\times k\times(k+1)=(k^2-1)\times k=k^3-k$

از بین دو عدد متوالی حتماً یکی زوج است!

حتماً یک عدد مضرب ۳ است:

$\lfloor 0 \rfloor_3$

$\lfloor 1 \rfloor_3$

$\lfloor 2 \rfloor_3$

$2q\times 3q'\times k=6qq'k$

* حالت بدی ← k فرد

k زوج

**مربع عدد فرد**

$(2k+1)^2=4k'+1$

۱- کدام حکم مثال نقض ندارد؟

۱) مجموع هر دو عدد اول، عددی مرکب است.

۲) مجموع هر دو عدد گنگ، عددی گنگ است.

۳) حاصل ضرب هر دو عدد فرد، عددی فرد است.

۴) حاصل ضرب هر دو عدد گنگ، عددی گنگ است.

۲- کدام گزاره برای هر عدد صحیح n درست است؟

۱) $n^۲$ عددی زوج است.

۲) $n^۲+n$ عددی زوج است.

۳) $n^۲-۱$ عددی زوج است.

۴) n+۶ عددی زوج است.

۳- کدام گزاره مثال نقض دارد؟

۱) مجموع هر دو عدد فرد عددی زوج است.

۲) مجموع هر دو عدد گویا عددی گویا است.

۳) برای هر سه مجموعه مانند A، B و C اگر $A\cup B=A\cup C$، آن‌گاه B=C.

۴) مکعب هر عدد فرد عددی فرد است.

۴- کدام عدد کلیت حکم «رقم سمت راست هر عددی که بر ۵ و ۳ بخش‌پذیر باشد، صفر است» را نقض می‌کند؟

۱) ۱۰۵ ۲) ۱۲۰ ۳) ۲۱۰ ۴) ۲۲۵

۵- فرض کنید می‌خواهید a و b عددهایی حقیقی باشند. کدام جفت گزاره با یکدیگر هم‌ارزند؟

۱) $a^۲>b^۲, a>b$

۲) $a^۲=b^۲, a=b$

۳) $a^۳+b^۳=۰, a+b=۰$

۴) $a^۳+b^۳=۱, a+b=۱$

۶- کدام گزینهٔ مثال نقض ندارد؟

۱) اگر n برابر حاصل‌ضرب دو عدد زوج متوالی باشد، آن‌گاه n+1 مربع کامل است.

۲) برای هر عدد حقیقی و مثبت مانند $x, y$ $\sqrt{x+y}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$

۳) مجموع هر دو عدد مرکب، عددی مرکب است.

۴) اگر n>1 عددی طبیعی باشد، $2^n-1$ عددی اول است.

۷- اعداد کدام گزینه کلیت حکم «حاصل ضرب هر دو عدد گنگ است» رانقض می‌کند؟

۱) $\sqrt{216}, \sqrt{6}$

۲) $\sqrt{12}, \sqrt{6}$

۳) $\sqrt{18}, \sqrt{216}$

۴) $\sqrt{18}, \sqrt{12}$

۸- چند تا از گزاره‌های زیر درست است؟

الف) اگر x و y گنگ باشند، آن‌گاه $x^2y^2$ همواره گنگ است.

ب) اگر x گویا و y گنگ باشند، آن‌گاه xy گنگ است.

پ) اگر x گویا و y گنگ باشند، آن‌گاه $x+y\sqrt{2}$ گنگ است.

ت) اگر x و y گویا باشند، آن‌گاه $x+y\sqrt{2}$ گنگ است.

۹- کدام گزاره مثال نقض دارد؟

۱) اگر n عددی صحیح و $n^2$ فرد باشد، آن‌گاه n نیز فرد است.

۲) اگر $n^2$ عددی صحیح باشد، آن‌گاه n نیز عددی صحیح است.

۳) اگر n عددی صحیح و $n^3$ زوج باشد، آن‌گاه n نیز زوج است.

۴) اگر n عددی صحیح باشد، آن‌گاه $n^2+n^3$ عددی زوج است

۱۰- کدام عدد کلیت حکم «هر عدد طبعی به صورت $5k+4$ عددی مرکب است» را نقض می‌کند؟

۱) ۲۷ ۲) ۲۴ ۳) ۱۹ ۴) ۳۶

۱۱- کدام عدد کلیت حکم «به ازای هر عدد طبیعی $n$، $2^n+3$ عددی اول است» را نقض می‌کند؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۱۲- فرض کنید x و y عددهایی حقیقی و ناصفر باشند. کدام جفت از گزاره‌های داده شده هم‌ارز نیستند؟

۱) $xy>0, \frac{x}{y}>0$ ۲) $x^3y^3, x>y$ ۳) $|x|>|y|, x^2>y^2$ ۴) $x^2y>0, xy^2>0$

۱۳- در اثبات حکم « اگر n عددی صحیح و $5n+3$ عددی فرد باشد، آن‌گاه n عددی زوج است» به وش برهان خلف، «فرض خلف» کدام است؟

۱) n عددی زوج نیست. ۲) n عددی غیر صحح است.

۳) $5n+3$ عددی زوج است. ۴) n عددی غیر صحیح است یا $5n+3$ عددی زوج است.

۱۴- فرض کنید x عددی حقیقی باشد. در اثبات حکم $x(4-x)\leq 4$ به روش اثبات بازگشتی از درستی کدام گزاره حکم را نتیجه می‌گیریم؟

۱) $(x+2)^2\geq 0$ ۲) $(x-2)^2\geq 0$

۳) $x^2+4\geq 0$ ۴) $x^2+1\geq 0$

۱۵- فرض کنید a و b عددهایی حقیقی باشند. در اثبات حکم $2(a^2+b^2)\geq (a+b)^2$ به روش بازگشتی از درستی کدام گزاره حکم را نتیجه می‌گیریم؟

۱) $(a-b)^2\geq 0$ ۲) $(a+b)^2\geq 0$

۳) $a^2+b^2\geq 0$ ۴) $2a^2+b^2\geq 0$

۱۶- فرض کنید n عددی صحیح باشد. کدام گزاره با گزارهٔ «۸n+۳ عددی فرد است» هم‌ارز است؟

۱) ۳n+۵ عددی فرد است.
۲) ۶n+۴ عددی زوج است.
۳) ۴n+۷ عددی زوج است.
۴) ۵n+۱ عددی زوج است.

۱۷- فرض کنید a عددی حقیقی و ناصفر باشد. گزارهٔ «$(a+\frac{۱}{a})(a+۱) \geq ۳$» با کدام گزاره هم‌ارز است؟

۱) $a^۳+a^۲-۲a+۱ \geq ۰$
۲) $a^۳+a^۲-۲a+۱ \leq ۰$
۳) $a^۴+a^۳-۲a^۲+a \geq ۰$
۴) $a^۴+a^۳-۲a^۲+a \leq ۰$

۱۸- کدام عدد کلیت حکم «اگر x عددی گنگ باشد، آن‌گاه $x^۲-۶x$ نیز عددی گنگ است» را نقض می‌کند؟

۱) $\sqrt{۷}-۳$
۲) $\sqrt{۶}$
۳) $\sqrt{۱۱}+۳$
۴) $\sqrt{۵}+۲$

۱۹- کدام عدد کلیت حکم «هر عدد طبیعی را می‌توان به صورت مجموع چند عدد متوالی نوشت» را نقض می‌کند؟

۱) ۵۶
۲) ۶۴
۳) ۷۲
۴) ۷۴

۲۰- فرض کنید A، B و C سه مجموعهٔ دلخواه از مجموعهٔ مرجع U باشند. کدام جفت از گزاره‌های داده شده هم‌ارز نیستند؟

۱) $A \cap C = B \cap C, A = B$
۲) $A \subseteq B, A - B = \varnothing$
۳) $A \cap B = \varnothing, A - B = A$
۴) $A \cup B = B, A \subseteq B$

۲۱- فرض کنید a و b عددهایی حقیقی باشند. کدام جفت از گزاره‌های داده شده با یکدیگر هم‌ارزند؟

۱) $[a] = [b], a = b$
۲) $[a-b] = ۰, a = b$
۳) $[a] = [b], ۰ \leq a-b < ۱$
۴) $[a-b] = ۰, ۰ \leq a-b < ۱$

۲۲- کدام عدد کلیت حکم «هر عدد طبیعی، به صورت ۵k-۱ مربع کامل است» رانقض می‌کند؟

۱) ۷۴ ۲) ۶۱ ۳) ۴۹ ۴) ۳۶

۲۳- فرض کنید x عدد حقیقی و ناصفر باشد. کدام جفت از گزاره‌های داده شده هم‌ارز نیستند؟

۱) $\frac{۱}{x} \rangle ۰, x \rangle ۰$

۲) $[x] = x, x \in Z$

۳) $x \in \{۲, ۴\}, |x - ۳| = ۱$

۴) $x^۲ \rangle ۱, x \rangle ۱$

۲۴- فرض کنید a عددی حقیقی باشد و $a \neq ۲$. گزارهٔ $\frac{a+۵}{a-۲} \rangle ۰$ با کدام گزارهٔ هم‌ارز است؟

۱) $a^۲ - ۳a - ۱۰ \rangle ۰$

۲) $a^۲ + ۳a - ۱۰ \rangle ۰$

۳) $a^۲ - ۳a + ۱۰ \rangle ۰$

۴) $a^۲ + ۳a + ۱۰ \rangle ۰$

۲۵- کدام عدد کلیت حکم «اگر x عددی گنگ باشد، آن‌گاه $x^۳ + ۳x^۲ + ۳x$ نیز عددی گنگ است» را نقض می‌کند؟

۱) $\sqrt{۲} + ۱$ ۲) $\sqrt{۲} - ۱$ ۳) $\sqrt{۲} + ۳$ ۴) $\sqrt{۲} - ۳$