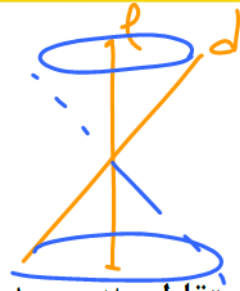


مقاطع مخروطی

تقاطع با l

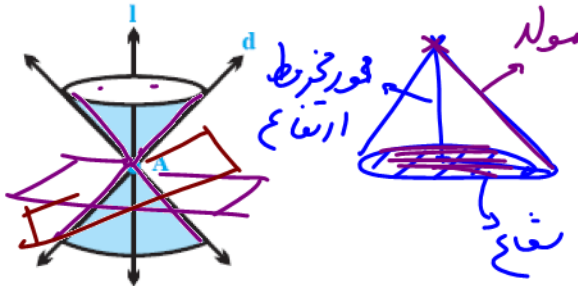


1 رویه مخروطی: اگر خط l, d در نقطه ای مانند A (مطابق شکل) متقاطع باشند، سطح حاصل از دوران خط d حول

خط l را در یک رویه مخروطی (سطح مخروطی) می نامیم.

در این حالت خط l را محور، نقطه A را رأس و خط d

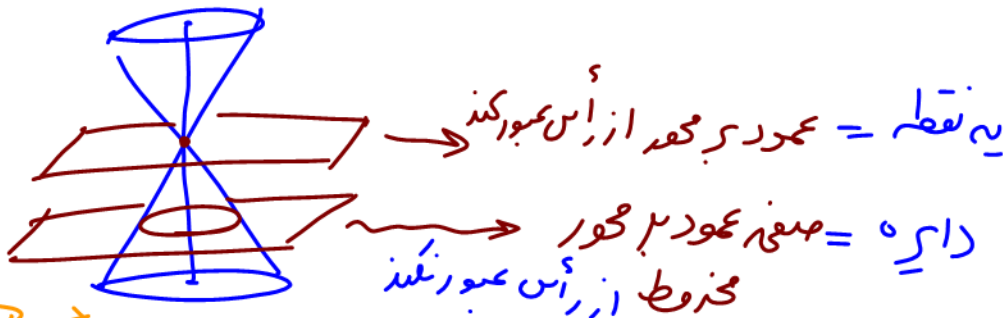
را مولد این سطح مخروطی می نامیم.



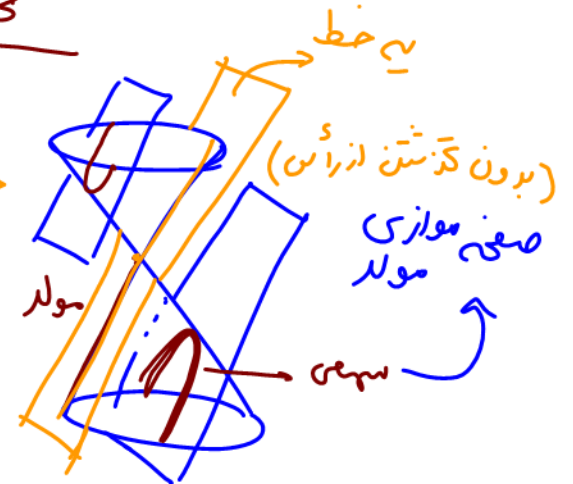
مستقیم مترک - شعاع مترک = مقطع

2 فصل مشترک حاصل از تقاطع یک صفحه با یک سطح مخروطی را مقطع مخروطی می نامیم.

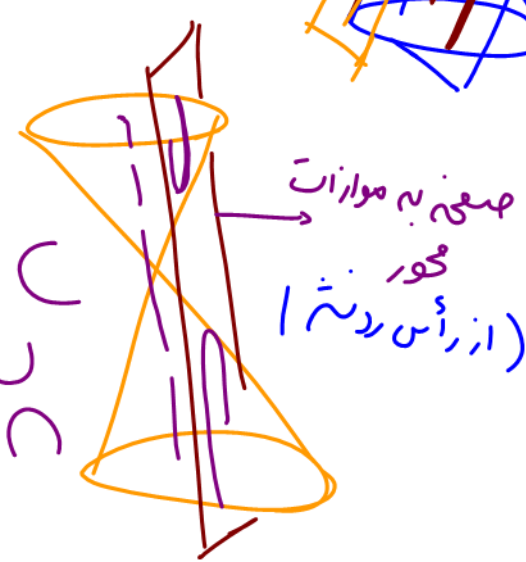
حالت های مختلف این تقاطع به صورت زیر است:



به صورت مایل
→ نه به موازات مولد
(را نه عمود بر محور)
(را موازی محور)



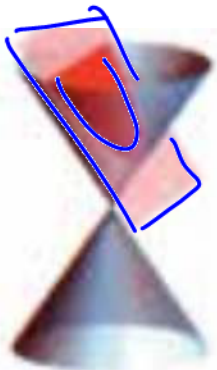
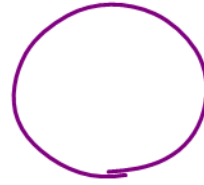
مایل
نه به موازات مولد
رأس نگذرد
دایره بیضی سهمی هذلولی





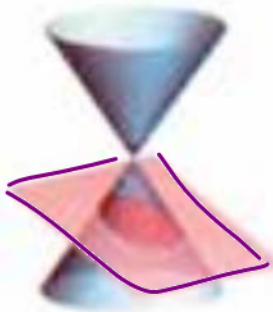
دایره

مخود بر محور
بدون گذر از رأس



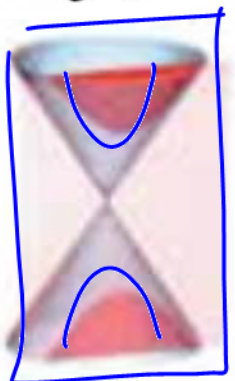
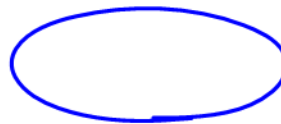
سهمی

به موازات
مولد بدون
گذر از رأس



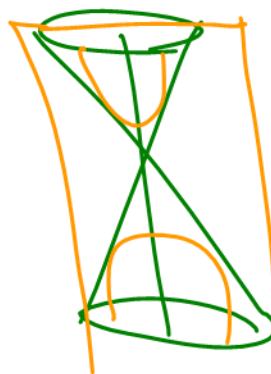
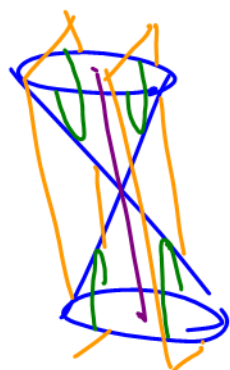
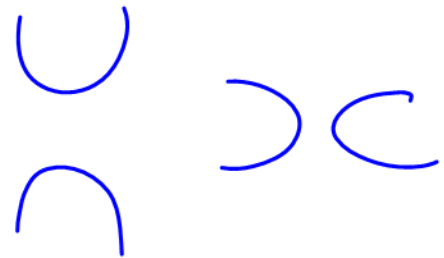
بیضی

~~موازی~~
~~مخور~~
مایل / مورب
که موازی مولد نباشد
بدون گذر از رأس

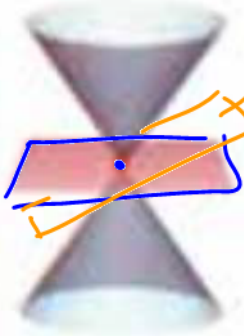


هذلولی

به موازات
محور بدون
گذر از رأس



مابین گذرنده از رأس و نه به موازات محور

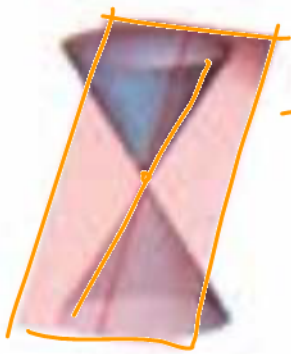


نقطه

عمود بر محور
و گذرنده از رأس

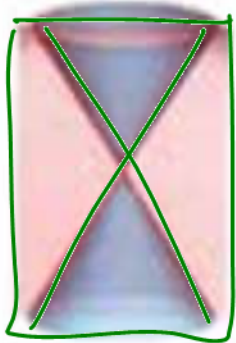
$$x = k$$

$$y = k'$$



خط

به موازات محور
گذرنده از رأس



دو خط متقاطع

موازی (شامل)

محور
موازی محور و گذرنده
از رأس

۱ صفحه ای از رأس یک سطح مخروطی می گذرد و هر دو دامنه ی رویه را قطع می کند. فصل مشترک حاصل کدام شکل می تواند باشد

۴) هذلولی

۳) بیضی

۲) دایره

۱) دو خط راست



دو خط راست
یک خط راست
یک نقطه

۲ صفحه ای بر محور سطح مخروطی دوار عمود است. مقطع حاصل کدام می تواند باشد؟

۴) دو خط متقاطع

۳) هذلولی

۲) دایره یا نقطه

۱) سهمی یا نقطه



رأس

۳ مقطع یک سطح مخروطی با یک صفحه، سهمی است. این صفحه با مولد یا محور سطح مخروطی، کدام وضع را دارد؟

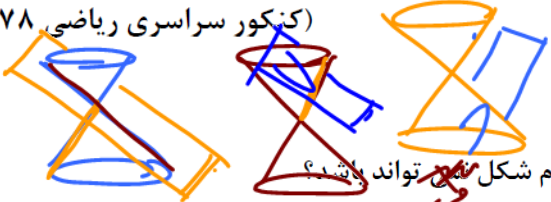
۱) موازی یک مولد

۲) موازی محور

۳) عمود بر یک مولد

۴) گذرا از نقطه تلاقی محور و مولد

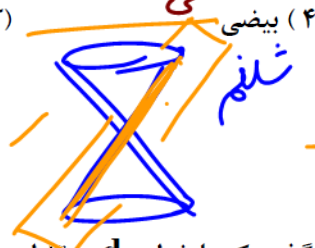
(کنکور سراسری ریاضی ۷۸)



دوران کامل نسبت!

هندلوی

(کنکور سراسری تجربی ۷۱)



۴) بیضی

۳) هندلوی

۲) سهمی

۱) خط راست

ثلثی

مقطع

هوع

سیت

توکدیل

مسائل

۵ خطوط d_1 و d_2 متناظرند از نقطه A واقع بر d_1 حداکثر چند خط می گذرد که با خط d_2 مماس و با آن زاویه ۳۰ درجه می سازد؟

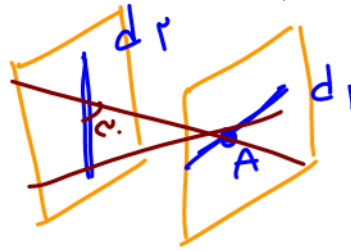
۲(۱)

۱(۲)

۰(۳)

۴) بیشمار

(کنکور آزاد ریاضی صبح ۹۰)



۶ صفحهی P یک سطح مخروطی دوار را طوری قطع نموده است که مقطع همواره از دو قسمت مجزا تشکیل شده است وضع

صفحهی P نسبت به این سطح مخروطی کدام است؟

۱) به موازات محور

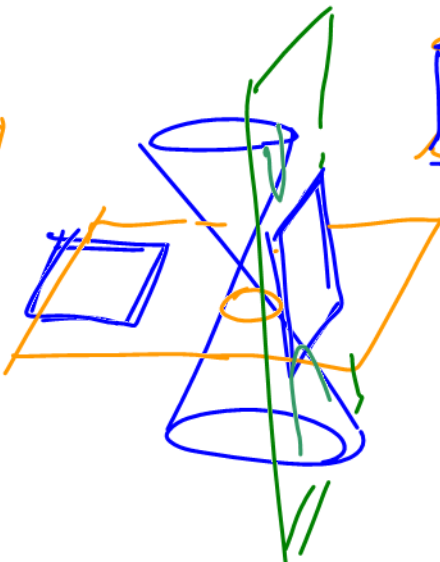
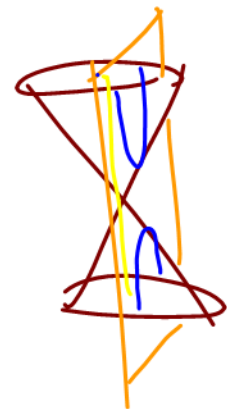
۲) به موازات مولد

۳) عمود بر مولد

۴) گذرا از رأس (کنکور آزمون پیش دانشگاهی ریاضی ۷۶)

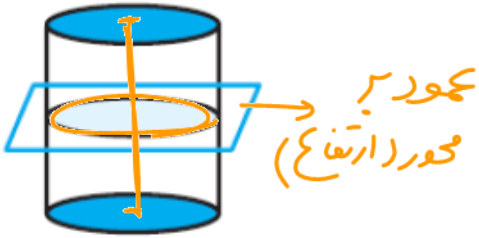
هندلوی هندلوی

صفحه ای سطح مخروطی را قطع می کند؛ شکل حاصل کدام می تواند باشد دو خط را

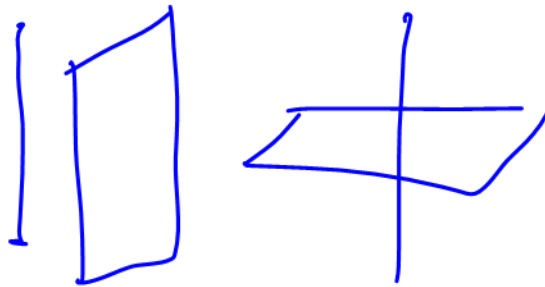
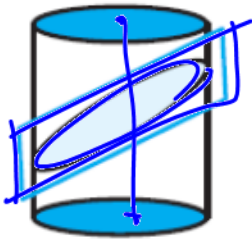


3 اگر دو خط d, d' (بهتر است بگوییم دو پاره خط d, d') موازی باشند، از دوران d حول d' یک استوانه ایجاد می شود.

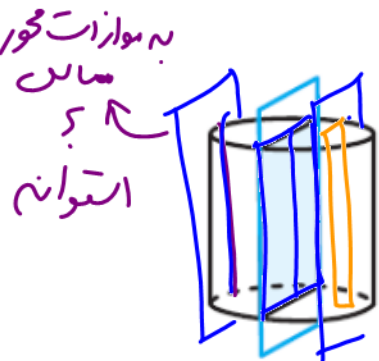
❖ اگر صفحه p موازی با قاعده استوانه، استوانه را قطع کند، سطح مقطع حاصل دایره است.



❖ اگر صفحه p ، استوانه را مایل قطع کند، سطح مقطع حاصل یک بیضی است.

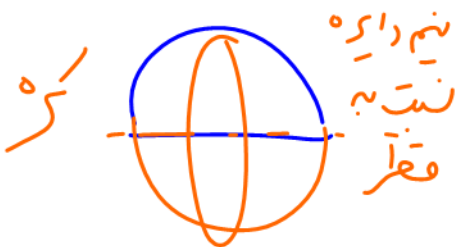
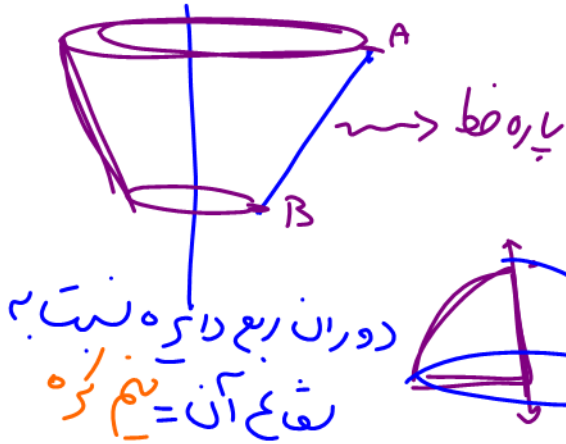
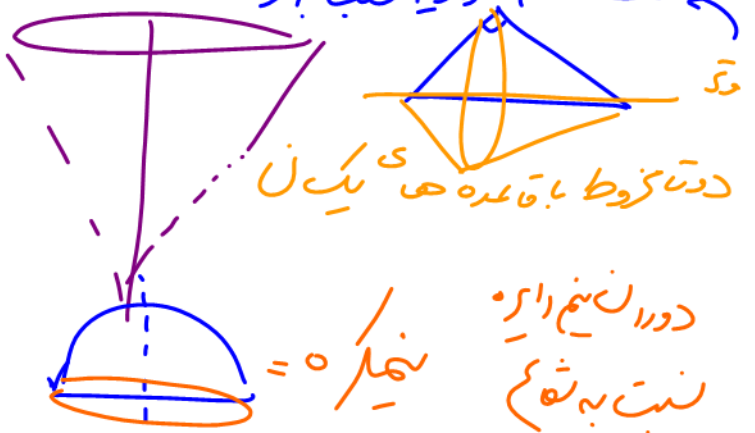


❖ اگر صفحه p ، عمود بر قاعده استوانه، استوانه را قطع کند، سطح مقطع حاصل، مستطیل است.



به موازات محور

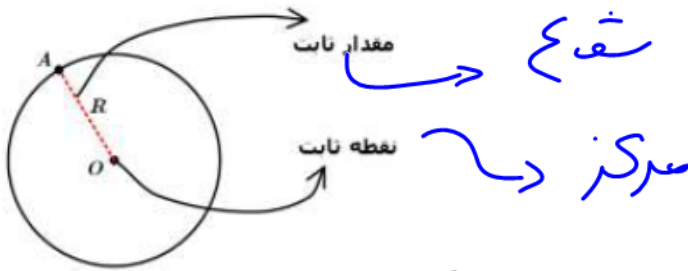
شکل های حاصل دوران
یادآوری
نسبت قاعده استوانه به دور



دایره

دایره مکان هندسی نقاطی از صفحه است که از یک نقطه به فاصله ثابت هستند
 نقطه از فضا که از یک نقطه ثابت به یک فاصله اند = کره

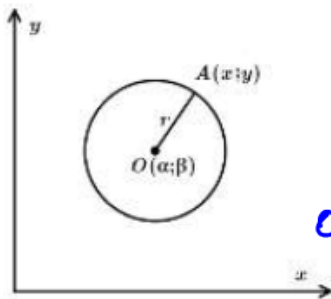
تعریف: مکان هندسی نقاطی از صفحه که فاصله آنها از یک نقطه ثابت (مرکز دایره) به فاصله ثابت (شعاع) باشد.



یادآوری: از قبل می دانیم فاصله نقطه $A(x_1, y_1)$ تا خط $ax + by + c = 0$ برابر است با:

$$AH = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

برای نوشتن معادله ی این دایره فرض می کنیم نقطه دلخواه $A(x, y)$ نقطه ای روی دایره باشد. با دستور فاصله بین دو نقطه



می توانیم بنویسیم: $OA = \sqrt{(x_A - x_O)^2 + (y_A - y_O)^2}$

$$r = \sqrt{(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2}$$

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$$

شعاع دایره

به این معادله، معادله استاندارد دایره می گوئیم.

معادله دایره ای را بنویسید که مرکز آن $O(2, -4)$ و شعاع ۳ را بنویسید.

۷

$$(x - 2)^2 + (y + 4)^2 = 9$$

ریشه های آن ها = x و y مرکز



$$(x-2)^2 + (y-6)^2 = 29$$

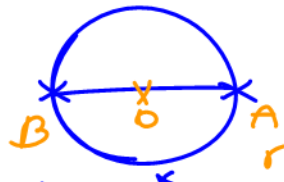
م | $\frac{x_A + x_B}{2}$
 وسط | $\frac{y_A + y_B}{2}$

معادله دایره ای بنویسید که نقاط دو سر قطر آن $A(7,4)$ و $B(-3,8)$ باشد.

8

$\frac{v-2}{2} = 2$
 $\frac{8+4}{2} = 6$

$$OA = \sqrt{5^2 + 2^2} = \sqrt{25+4} = \sqrt{29}$$



$$r = OA = OB = \frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{(7-(-3))^2 + (4-8)^2}}{2} = \frac{\sqrt{100+16}}{2} = \frac{\sqrt{116}}{2} = \frac{2\sqrt{29}}{2} = \sqrt{29}$$

$\frac{116}{29}$
 $\frac{4}{29}$

معادله دایره ای را بنویسید که مرکز آن $(4,-2)$ باشد و یکی از نقاط آن باشد.

9



$$\sqrt{(4-0)^2 + (-2+1)^2} = \sqrt{16+1} = \sqrt{17}$$

$$(x-4)^2 + (y+2)^2 = 17$$

مربع کامل کردن

$$\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{4} = \frac{0}{4}$$

1) هزید x را انتزاعی کنید
 (فاکتور می‌شود)

$$x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{4} = 0$$

$$+ \left(\frac{\text{هزید}}{2}\right)^2$$

$$\left(\frac{3/2}{2}\right)^2 = \frac{9}{16}$$

رو x اول x^2

$$x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{16} - \frac{9}{16} + \frac{1}{4} = 0$$

2) سمتی اول ای x مربع کامل

$$\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16} - \frac{1}{4}$$

کدام یک از روابط زیر می‌تواند معادله یک دایره باشد؟ مختصات مرکز و طول شعاع را به دست آورید؟

10

الف) $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$

$$x^2 + 2x + 1 - 1 + y^2 - 4y + 4 - 4 - 4 = 0$$

$$(x+1)^2 + (y-2)^2 = 9 \quad R=3$$

ب) $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 14 = 0$

$$x^2 - 4x + 4 - 4 + y^2 + 6y + 9 - 9 + 14 = 0$$

$$(x-2)^2 + (y+3)^2 = -1$$

ج) $x^2 + y^2 + 2x - 2y + 2 = 0$

$$x^2 + 2x + 1 - 1 + y^2 - 2y + 1 - 1 + 2 = 0 \rightarrow (x+1)^2 + (y-1)^2 = 0 \rightarrow x=-1, y=1$$

د) $\frac{4x^2}{4} + \frac{4y^2}{4} + \frac{16x}{4} - \frac{4y}{4} + 1 = 0$

$$x^2 + y^2 + 4x - y + \frac{1}{4} = 0$$

$$x^2 + 4x + 4 - 4 + y^2 - y + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 0$$

دو دایره هم‌محلی دارند

OO'
 R, R'



$d > R + R'$

$R - R' < d < R + R'$

$d = R - R'$

$d < R + R'$

$$OO' = \sqrt{1^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{16}{16}} = \frac{\sqrt{17}}{4}$$

$r - r' = 1$
 $r + r' = 2 \rightarrow 1 < OO' < 2$
 دو دایره هم‌محلی



$$ax^2 + ay^2 - 2\alpha x + 2\beta y + \alpha^2 + \beta^2 - r^2 = 0$$

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2$$

$k > 0$ دایره
 $k = 0$ نقطه
 $k < 0$ بی
 $A=B$

شعاع دایره ای که از دو نقطه $(1,2)$ و $(3,0)$ گذشته و مرکز آن روی خط $y = 2x - 1$ باشد را بیابید. (سراسری)

۱۱
ریاضی (۷۵)



$$OA = OB = r$$

$$\sqrt{(\alpha-1)^2 + (\alpha-1-2)^2} = \sqrt{(\alpha-3)^2 + (\alpha-1-0)^2}$$

$$\sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$$

$$\alpha^2 - 2\alpha + 1 + 4\alpha^2 - 12\alpha + 9 = \alpha^2 - 4\alpha + 9 + 4\alpha^2 - 4\alpha + 1$$

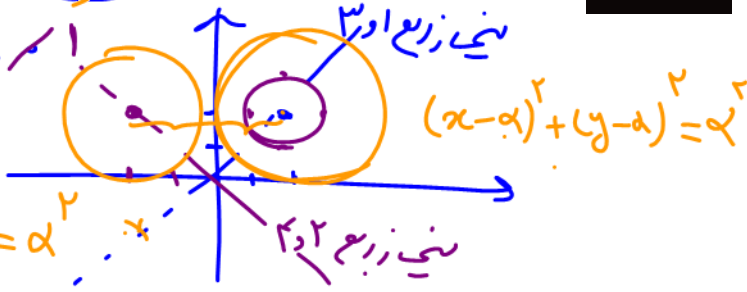
$$-14\alpha + 10\alpha = 10 - 10 = 0 \Rightarrow \alpha = 0$$

۱۲

مرکز و شعاع دایره ای $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 7 = 0$ را به دست آورید.

$$(x-2)^2 + (y-2)^2 + 7 = 0$$

$$(-4)^2 + (-2)^2 - 4x + 7 = 0$$



معادله $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2$ را می توان با به توان رساندن به صورت $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ نوشت.

تذکر: در معادله ضمنی باید ضریب x^2, y^2 همواره ۱ باشد. ضریب x و y باید برابر باشند.



اگر بخواهیم مختصات مرکز و شعاع دایره به معادله ضمنی را در حالت کلی به دست بیاوریم و شبیه مثال های قبلی همواره مجبور نباشیم آن را به صورت مربع کامل بنویسم داریم:

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \Rightarrow \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{b^2}{4} + c = 0$$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c$$

$> 0 \rightarrow$ دایره
 $= 0 \rightarrow$ نقطه
 $< 0 \rightarrow$ بی

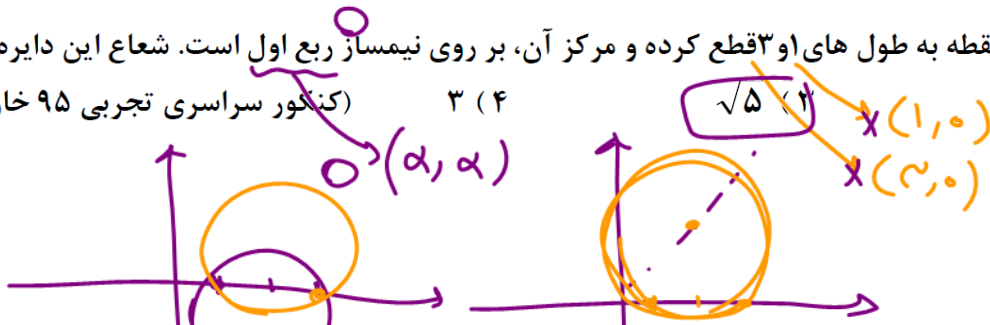
پس مرکز آن $O\left(\frac{-a}{2}, \frac{-b}{2}\right)$ و شعاع آن $r = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}}{2}$ است.



۱۳

دایره ای، محور X ها را در دو نقطه به طول های او قطع کرده و مرکز آن، بر روی نیمساز ربع اول است. شعاع این دایره کدام است؟

- (کنکور سراسری تجربی ۹۵ خارج از کشور) $\sqrt{3}$ (۱) 2 (۲) $\sqrt{5}$ (۳) 3 (۴)



$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x-2)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x-2)^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

۱۴ به ازای کدام مجموعه ی مقادیر a ، منحنی به معادله ی $2x^2 + (a^2 - 7)y^2 + 4y + a = 0$ یک دایره است؟

- (کنکور سراسری تجربی ۸۵ خارج از کشور) $\{-3, 3\}$ (۱) $\{2\}$ (۲) $\{-3, 3\}$ (۳) \emptyset (۴)

$$a^2 - 7 = 2$$

$$a^2 = 9$$

$$a = \pm 3$$

$$\frac{2x^2}{2} + \frac{2y^2}{2} + \frac{4y}{2} + \frac{a}{2} = 0$$

$$x^2 + y^2 + 2y + \frac{a}{2} = 0$$

$$\frac{2x^2}{2} + \frac{2y^2}{2} + \frac{4y}{2} - \frac{3}{2} = 0$$

$$x^2 + (y+1)^2 - 1 - \frac{3}{2} = 0$$

۱۵

دایره ای از دو نقطه ی $(0,1)$ و $(3,0)$ گذشته و معادله ی یک قطر آن به صورت $x - y = 2$ است. شعاع این دایره کدام است؟

- (کنکور سراسری تجربی ۹۰ خارج از کشور) $\sqrt{2}$ (۱) 2 (۲) $\sqrt{5}$ (۳) $\alpha - 2 = 2$ (۴)



$$OA = OB$$

$$(x-3)^2 + (x-2)^2 = d^2 + (x-2-1)^2$$

$$x^2 - 6x + 9 + x^2 - 4x + 4 = x^2 + x - 4x + 9$$

$$x = 4 \Rightarrow x = 1$$

۱۶ حدود a را طوری به دست آورید که $x^2 + y^2 - 3x + 5y + a$ بتواند معادله ی یک دایره باشد. (ص ۴۵ کتاب جدید)

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + \left(y + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} + a$$

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{5}{2}\right)^2 = \left(\frac{9}{4} + \frac{25}{4} - a\right)$$

$$\frac{a^2}{c} + \frac{b^2}{c} - c > 0 \quad \frac{3^2}{4} - a > 0 \quad \frac{5^2}{4} > a$$



- ۱۷ خط $4x + 3y + 6 = 0$ نسبت به دایره به معادله $4x^2 + 4y^2 - 8x - 12 = 0$ چه وضعی دارد؟
- (۱) قائم بر دایره است.
 (۲) مماس بر این دایره است.
 (۳) دایره را قطع می کند.
 (۴) دایره را قطع نمی کند.

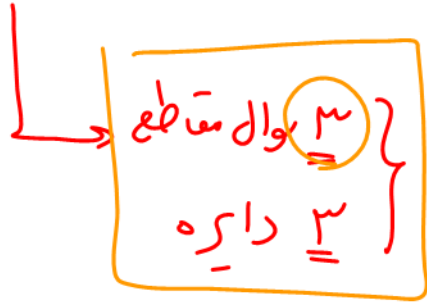
- ۱۸ در نقطه‌ی $A(2,3)$ روی دایره‌ی $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 3$ مماسی بر آن رسم کرده ایم. معادله‌ی این خط مماس را به دست آورید.
 (ص ۴۵ کتاب جدید)

- ۱۹ معادله خط مماس بر دایره به معادله $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 3 = 0$ در نقطه $M(4,1)$ واقع بر دایره کدام است؟
- (۱) $3x + 3y - 1 = 0$
 (۲) $3x - 3y + 1 = 0$
 (۳) $x - y + 1 = 0$
 (۴) $x + y - 5 = 0$



۱۸ سوال هندیہ (۳) ماہترین

۱۵ سوال
گستہ



4 سوال

۷ | ۱ مارواہت

۵ سوال ریاض

$$\underline{C_5^5} = 18 + 17$$

۱۵

۱۲ | ۱

۱۵

۱۷ خط $4x + 3y + 6 = 0$ نسبت به دایره به معادله $\frac{4x^2}{4} + \frac{3y^2}{9} - \frac{8x}{4} - \frac{12}{3} = 0$ چه وضعی دارد؟
 (۱) قائم بر دایره است.
 (۲) مماس بر این دایره است.

$$x^2 - 2x + y^2 = 12$$

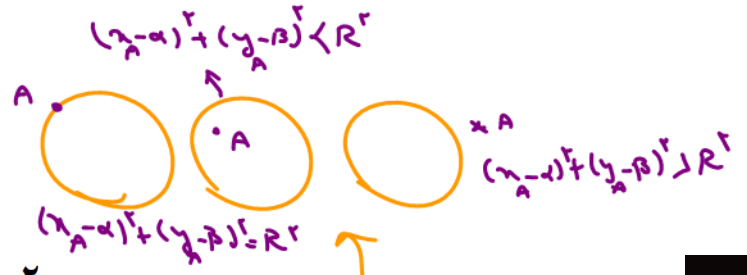
$$(x-1)^2 - 1 + y^2 = 12$$

$$(x-1)^2 + y^2 = 13$$

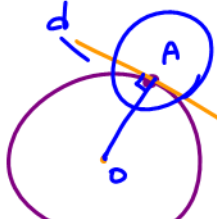
$\frac{13}{\sqrt{13}} > 2$

$$OH = \frac{|12 + 0 + 9|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{21}{5} = 4.2$$

(۳) دایره را قطع می کند.



۱۸ در نقطه $A(2,3)$ روی دایره $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 3$ مماسی بر آن رسم کرده ایم معادله این خط مماس را به دست آورید.
 معادله $ax + by + c = 0$
 در نقطه $(2,3)$ معادله $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 5$



$$M_{OA} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3}{1} = 3$$

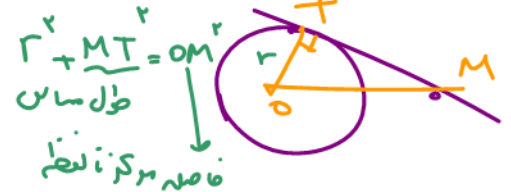
$$a = -\frac{1}{3}$$

$$y = \frac{1}{3}x + b$$

$$3 = -1 + b \rightarrow b = 4$$

$$y = -\frac{1}{3}x + 4$$

$$y = ax + b$$



۱۹ معادله خط مماس بر دایره به معادله $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 3 = 0$ در نقطه $M(4,1)$ واقع بر دایره کدام است؟

$$O \mid \begin{matrix} 2 \\ -1 \end{matrix} \quad (2, -1)$$

$$3x - 2y + 1 = 0 \quad (2)$$

$$x + y - 5 = 0 \quad (4)$$

$$x - 1 - y = -x + 5$$

(۱) $3x + 3y - 1 = 0$ شبیه
 (۳) $x - y + 1 = 0$ شبیه
 $y = 2x$

$$a_{MO} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2}{2} = 1$$

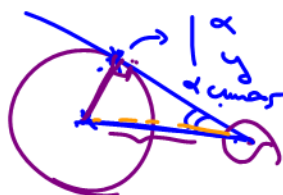
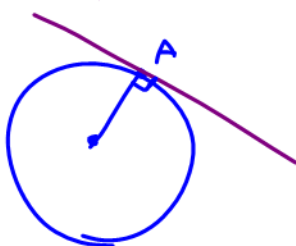
$$a = -1$$

$$y = -x + b$$

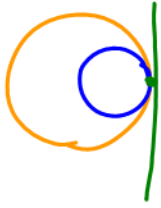
$$y = -x + 5$$

$$1 = -4 + b \rightarrow b = 5$$

$$x + y - 5 = 0$$



۲۰ به ازای کدام مقدار b دو دایره به معادلات $x^2 + y^2 + 2x - 2y = 0$ و $x^2 + y^2 - 4y + b = 0$ مماس داخل اند؟
 (کنکور سراسری ریاضی ۸۶-۱۳۸۵)



$$\begin{aligned} & x^2 + y^2 + 2x - 2y = 0 \quad \text{center } (-1, 1), \text{ radius } \sqrt{2} \\ & x^2 + y^2 - 4y + b = 0 \quad \text{center } (0, 2), \text{ radius } \sqrt{4-b} \end{aligned}$$

$$OO' = R - R'$$

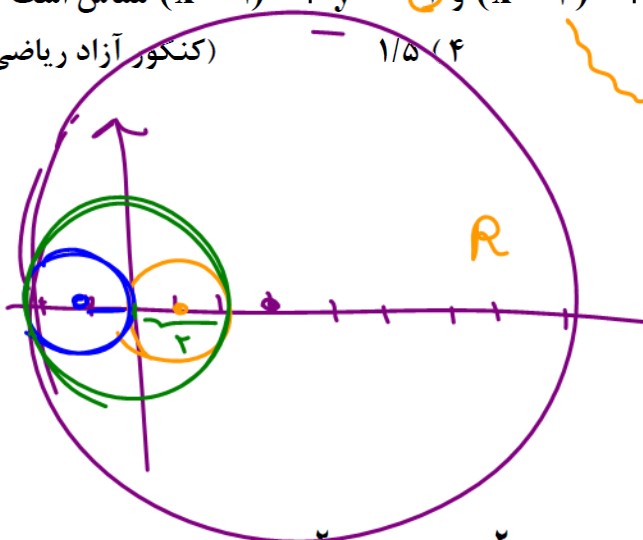
$$\sqrt{2} = R - \sqrt{2} \Rightarrow 2\sqrt{2} = R$$

$$R - b = R' = 1$$

$$R - 1 = b$$

$$-2 = b$$

۲۱ شعاع کوچکترین دایره ای که بر دو دایره $(x-1)^2 + y^2 = 1$ و $(x-3)^2 + y^2 = 25$ مماس است چقدر است؟
 (کنکور آزاد ریاضی ۸۴)



$$\begin{aligned} & (x-1)^2 + y^2 = 1 \quad \text{center } (1, 0), \text{ radius } 1 \\ & (x-3)^2 + y^2 = 25 \quad \text{center } (3, 0), \text{ radius } 5 \end{aligned}$$

۲۲ چند دایره به شعاع ۲ وجود دارد که بر محور طول ها و دایره $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 4$ مماس باشد؟

(کنکور آزاد ریاضی ۸۷ خارج از کشور) (۴) بیشمار (۳) ۱ (۲) ۲ (۱) صفر

