واژگان - تعاریف

- ماتریس
- نمایش ماتریس
- مرتبه ماتریس
- درایه ماتریس
- نمایش عمومی ماتریس

سطر اول

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & 4 & 5 \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

مرتبه ماتریس

درایه

ستون دوم

تذکر: اگر $m=n=1$ باشد، آنگاه: $A=\left[a_{ij}\right]_{1\times 1}=a_{ij}$

- دو ماتریس برابر

$$A=B \Leftrightarrow \begin{cases} m=p \\ n=q \\ \forall i,j \Rightarrow a_{ij}=b_{ij} \end{cases}$$

◀ انواع ماتریس‌ها:

- **ماتریس سطری:** ماتریسی است که فقط یک سطر داشته باشد. $(1\times n)$ مانند: $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\end{bmatrix}$
- **ماتریس ستونی:** ماتریسی است که فقط یک ستون داشته باشد. $(n\times 1)$ مانند: $B=\begin{bmatrix}-1 \\ 0 \\ 2\end{bmatrix}$
- **ماتریس صفر:** تمام درایه‌های آن صفر است و اندازه‌ی آن $m\times n$ می‌باشد و به صورت $\bar{O}_{m\times n}$ یا $\bar{O}$ نمایش داده می‌شود. $O_{3\times 3}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$ یا $O_{2\times 2}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$
- **ماتریس مربع:** ماتریسی است که تعداد سطر و ستون آن برابر باشد $(n\times n)$ درایه‌های $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{n\times n}$ را درایه‌های روی قطر اصلی می‌نامند.

تذکر: ماتریس 1×1، ماتریسی است که فقط یک عضو داشته باشد.

- **نکته:** درایه‌های بالا قطر اصلی $i<j$

درایه‌های روی قطر اصلی

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

$i>j$ درایه‌های زیر قطر اصلی

واژگان- تعاریف

◄ **انواع ماتریس‌های مربع:**

◄ **ماتریس بالا مثلثی:** اگر در ماتریس مربع $A=\left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ ، تمام عناصر زیر قطر اصلی صفر باشند، آنگاه A را بالا مثلثی گویند.

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۰ & ۱ & ۴ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \qquad \forall a_{ij}, i>j \to a_{ij}=۰$$

◄ **ماتریس پایین مثلثی:** مربع A ماتریس پایین مثلثی نامیده می‌شود، هرگاه تمام عناصر بالای قطر اصلی آن صفر باشند.

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۲ & ۳ & ۰ \\ ۴ & ۵ & ۰ \end{bmatrix} \qquad \forall a_{ij}, i<j \to a_{ij}=۰$$

◄ **ماتریس قطری:** ماتریس مربع $A=\left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ را قطری گویند هرگاه تمام عناصر بالا و پایین قطر اصلی آن صفر باشند.

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۱ \end{bmatrix} \qquad \forall a_{ij}, i\neq j \to a_{ij}=۰$$

◄ **ماتریس اسکالر:** نوعی ماتریس قطری است که همه عناصر روی قطر اصلی آن مساوی باشند.

$$۲I=۲\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۲ \end{bmatrix}$$

◄ **ماتریس همانی (واحد):** (I_n) نوعی ماتریس قطری است که تمام عناصر روی قطر اصلی آن عدد یک باشد، مانند:

$$I_۳=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}, I_۲=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

نکته: **اثر ماتریس مربع:** اثر ماتریس A را که با $tr(A)$ نمایش داده می‌شود به فرم زیر می‌نویسیم:

$$tr(A)=a_{۱۱}+a_{۲۲}+\dots+a_{nn}$$

◄ ماتریس پادمتقارن

◄ ماتریس متقارن

ویژگی های جمع و تفریق ماتریس ها

خاصیت جابجایی $۱)A+B=B+A$

خاصیت شرکت پذیری $۲)A+(B+C)=(A+B)+C$

خاصیت عضو خنثی برای ماتریس صفر $۳)A+\overline{O}=\overline{O}+A=A$

خاصیت عضو قرینه $۴)A+(-A)=-A+A=\overline{O}$

خاصیت بخشی ضرب اسکالر $۵)r(A+B)=rA+rB$

ویژگی های ضرب عدد در ماتریس

$۱)(r\pm s)A=rA\pm sA$

$۲)(rs)A=r(sA)$

$۳)\ ۱A=A$

$۴)rA=rB \quad , \quad r\neq ۰\Rightarrow A=B$

$۵)A=B\Rightarrow rA=rB$

ماتریس سطری در ستونی

ماتریس

$$A_{m\times n}\times B_{n\times q}=$$

۱) در حالت کلی ضرب ماتریس‌ها خاصیت جابه جایی ندارد. یعنی همیشه حاصلضرب دو ماتریس AB و BA با هم برابر نیستند.

۲) اگر $A=[a_{ij}]_{m\times n}$, $B=[b_{ij}]_{n\times p}$, $C=[c_{ij}]_{p\times q}$ آنگاه ضرب ماتریس‌ها خاصیت شرکت‌پذیری دارد.

یعنی:

$$A(BC)=(AB)C$$

۳) اگر $A=[a_{ij}]_{m\times n}$, $B=[b_{ij}]_{n\times p}$, $C=[c_{ij}]_{n\times p}$ باشند، ضرب ماتریس‌ها خاصیت پخشی دارد. یعنی:

$$A(B+C)=AB+AC$$

۴) اگر I_n ماتریس همانی $n\times n$ باشد، آنگاه:

$$A_{n\times n}\times I_n=I_n\times A_{n\times n}=A_{n\times n}$$

عضو خنثی

توان‌رسانی ماتریس دلخواه:

برای محاسبه‌ی توان‌های یک ماتریس مربعی A، ماتریس‌های $A^۲$، $A^۳$ و ... را تا آنجا تعیین می‌کنیم که:

- به ماتریس همانی I یا ماتریسی بر حسب آن برسیم؛ یا
- یک نظم در توان‌های ماتریس مشاهده شود.

سپس می‌توان هر توانی از A را محاسبه نمود.

توجه کنید:

- اگر r یک عدد و A یک ماتریس مربعی باشد، آنگاه: $(rA)^n = r^n A^n$.

بویژه:

n فرد باشد: $(-A)^n = -A^n$ و n زوج باشد: $(-A)^n = A^n$

- ولی اتحاد $(AB)^n = A^n B^n$ نادرست بوده و فقط با شرط $AB = BA$ برقرار است.

دو ماتریس تعویض پذیر

قرینه ماتریس

دترمینان ماتریس

ماتریس کهاد

همسازه درایه

ماتریس الحاقی (وابسته)

وارون ماتریس

ویژگی های دترمینان

نکته: اگر ماتریسی دارای **دو سطر** یا **دو ستون** برابر باشد، **دترمینان آن ماتریس همواره برابر صفر است.**

نکته: اگر A و B دو ماتریس مربعی دلخواه باشند، داریم:

۱) $|AB| = |A||B|$ ۲) $|AB| = |BA|$

۳) $|A^n| = |A|^n$ ۴) $|A^m B^n| = |A|^m |B|^n$

نکته: دترمینان ماتریس قطری برابر است:

نکته: **اگر همه درایه‌های یک سطر یا یک ستون ماتریس A** را در عدد حقیقی مثل k ضرب کنیم. دترمینان ماتریس حاصل k **برابر دترمینان ماتریس A** می‌شود.

$$\begin{vmatrix} ka & kb & kc \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

نکته: اگر $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ و $k \in \mathbb{R}$ آنگاه: $|KA| = K^n|A|$

(**اگر عدد k در ماتریس A ضرب شود**، دترمینان ماتریس حاصل K^n برابر دترمینان ماتریس A می‌شود).

دستور ساروس برای محاسبه دترمینان ماتریس‌های ۳×۳ :

در این روش (**که مخصوص ماتریس ۳×۳ است**.) دو ستون اول و دوم ماتریس را در کنارش می‌نویسیم و $|A|$ برابر است، با مجموع حاصل‌ضرب‌های درایه‌های واقع بر قطر اصلی و دو قطر موازی آن (مطابق شکل)، منهای مجموع حاصل-ضرب‌های درایه‌های واقع بر قطر فرعی A و دو قطر موازی با آن به صورت زیر است.

$$\left|\begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{matrix}\right| \begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix}$$

$$|A| = (aei + bfg + cdh) - (ceg + afh + bdi)$$

اگر جای دو سطر (ستون) یک دترمینان را با هم عوض کنیم،مقدار دترمینان در (۱-) ضرب می‌شود. (به تعداد جابجایی‌ها، عدد (۱-) ضرب خواهد شد)

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & l \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} g & h & l \\ d & e & f \\ a & b & c \end{vmatrix}$$

اگر در ماتریس A، حاصل‌ضرب عناصر یک سطر (ستون) در یک عدد ثابت را به سطر (ستون) دیگر بیافزاییم، مقدار دترمینان تغییری نمی‌کند.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & l \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+kg & b+kh & c+kl \\ d & e & f \\ g & h & l \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b+ka & c \\ d & e+kd & f \\ g & h+kg & l \end{vmatrix}$$

ویژگی های ماتریس وارون

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

نکته: برای دو ماتریس وارون پذیر ۲×۲ داریم:

الف) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

ب) $(KA)^{-1} = \frac{1}{K}A^{-1}; \quad (K \in R)$

پ) $(A^{-1})^{-1} = A$

ت) $(A^{n})^{-1} = (A^{-1})^{n}$

نکته: اگر $|A| = 0$ آنگاه ماتریس A^{-1} وجود ندارد. **(ماتریس A وارون پذیر نیست.)**

نکته: شرط لازم و کافی برای آنکه A وارون‌پذیر باشد. (A^{-1} **وجود داشته باشد.)** آن است که $|A| \neq 0$

حل دستگاه با ماتریس وارون

حل دستگاه معادلات به کمک ماتریس وارون:

هدف از حل دستگاه در معادله و در مجهول پیدا کردن x و y است که در هر دو معادله دستگاه (هر کدام یک خط می‌باشند) صدق می‌کند. در واقع تعبیر هندسی آن این است که **محل تقاطع دو خط** را بیابیم. (مختصات محل برخورد دو خط)

در دستگاه معادلات $\begin{cases} ax+by=e_1 \\ cx+dy=e_2 \end{cases}$ **به ماتریس** $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ **ماتریس ضرایب و به** $X=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ **ماتریس مجهولات و به** $B=\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}$ **ماتریس مقادیر معلوم می‌گویند.**

در این صورت دستگاه داده شده به صورت $AX=B$ نوشته می‌شود.

حل دستگاه معادلات به صورت $AX=B$ **:**

ابتدا ماتریس ضرایب $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ را تشکیل داده و $|A|$ را حساب می‌کنیم.

اگر $|A|\neq 0$ **باشد دستگاه معادلات جواب منحصر بفردی دارد** که جواب مطلوب از رابطه‌ی $X=A^{-1}B$ بدست می‌آید.

نکته: دستگاه معادلات $\begin{cases} ax+by=e_1 \\ cx+dy=e_2 \end{cases}$ وقتی جواب منحصربفرد دارد که $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}\neq 0$ یا $\frac{a}{c}\neq\frac{b}{d}$

نکته: دستگاه معادلات $\begin{cases} ax+by=e_1 \\ cx+dy=e_2 \end{cases}$ وقتی جواب ندارد که: $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=0$ یا $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}\neq\frac{e_1}{e_2}$

نکته: دستگاه معادلات $\begin{cases} ax+by=e_1 \\ cx+dy=e_2 \end{cases}$ وقتی بی‌شمار جواب دارد که: $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=0$ یا $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}=\frac{e_1}{e_2}$

تست ۱ — اگر $A = \begin{pmatrix} ۲ & m \\ ۲ & ۵ \end{pmatrix}$ و $A^{-۱} = \begin{pmatrix} \frac{۵}{۲} & -۲ \\ -۱ & ۱ \end{pmatrix}$ آنگاه $\underline{m}$ کدام است؟

۱) ۱   ۲) ۲   ۳) ۳   ۴) ۴

تست ۲ — مجموع درایه‌های روی قطر اصلی ماتریس $[i+j]_{n\times n}$ برابر ۵۶ است n کدام است؟

۱) ۵   ۲) ۶   ۳) ۷   ۴) ۸

تست ۳ — اگر $A + ۲B = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}$ ، $A - B = \begin{bmatrix} -۲ & ۰ \\ -۵ & ۱ \end{bmatrix}$ مجموع درایه‌های ماتریس A کدام است؟

۱) $-\frac{۸}{۳}$ ۲) $-\frac{۷}{۳}$ ۳) $-\frac{۵}{۳}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

تست ۴

اگر $A = \begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۱ \\ ۰ & -۱ & ۱ \\ ۱ & ۴ & ۳ \end{pmatrix}$ و $B = \begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۰ \\ ۱ & ۲ & ۱ \\ -۱ & ۱ & ۱ \end{pmatrix}$ و $C = \begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۴ \\ ۳ & ۲ & ۱ \\ -۱ & ۱ & ۳ \end{pmatrix}$ ، آنگاه درایه‌ی واقع در سطر سوم و ستون اول از ماتریس (ABC) کدام است؟

۱) ۵۳   ۲) ۵۲   ۳) ۵۱   ۴) ۵۰

تست ۵ــ اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & a \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ باشد، a چه‌قدر باشد تا ماتریس B با شرط $AB = BA = I$ یافت شود؟

$(-1)^{i+j} \times a_{ij}$

$A^{-1} \quad A^{-1}$

شرط وارون پذیری $\Longrightarrow |A| \neq 0$

$-2a + (-6) = (-a - ...) \neq 0$

۱) $a \neq -3$ ۲) $a = -3$ ۳) $a \neq 3$ ۴) $a = 3$

$AB = I \xrightarrow{\text{ماتریس وارون}} A^{-1} \times A = I \qquad -3\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - a\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$

$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \qquad |A| \neq 0$

$= -3 - a \neq 0$

$a \neq -3$

تست ۶ــ اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ a & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$، به ازای کدام مقدار a ماتریس AB وارون‌پذیر است؟ (مشابه سراسری ریاضی ۸۲)

$|AB| \neq 0$ $\quad 2\times 3 \quad 3\times 2$

۱) ۲ ۲) -6 ۳) $\boxed{\text{هر مقدار a}}$ ۴) هیچ مقدار a

$|A| \neq 0$ — همواره $|A| = 0$ برای

$1\times -2 + 3 \times a + 0$

$AB = \begin{bmatrix} a^2+1 & 3a-2 \\ 3a-2 & 14 \end{bmatrix} \qquad 9a^2 - 12a + 4$

$-2\times -2 + 3\times 3 + 1\times 1$

$144 - 4(5)(10) < 0$

$|AB| = 14(a^2+1) - (3a-2)^2 = 14a^2 + 14 - 9a^2 + 12a - 4 = 5a^2 + 12a + 10 \neq 0$

$1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \qquad 1 + \cot^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$

تست ۷ــ اگر $A = \begin{bmatrix} 0 & -\tan\alpha \\ \tan\alpha & 0 \end{bmatrix}$ و I ماتریس همانی مرتبهٔ ۲ باشد، سطر اول ماتریس $(I-A)^{-1}(I+A)$، کدام است؟ (سراسری ریاضی ۹۲)

a_{11} دارد $\times \cos^2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \qquad \cos^2\alpha - \cos^2\alpha\tan^2\alpha \qquad -2\tan\alpha \times \cos^2\alpha$ دارد a_{12}

$2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$

۱) $[\cos 2\alpha \quad -\sin 2\alpha]$ ۲) $[\cos 2\alpha \quad \sin 2\alpha]$

$\begin{bmatrix} 1-\tan^2\alpha & -2\tan\alpha \\ 2\tan\alpha & 1-\tan^2\alpha \end{bmatrix} \qquad \frac{1}{\cos^2\alpha}$

۳) $[\sin 2\alpha \quad \cos 2\alpha]$ ۴) $[-\sin 2\alpha \quad \cos 2\alpha]$

$|I - A| = 1 + \tan^2\alpha$

$I - A = \begin{bmatrix} 1 & \tan\alpha \\ -\tan\alpha & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \frac{1}{\frac{1}{\cos^2\alpha}}\begin{bmatrix} 1 & -\tan\alpha \\ \tan\alpha & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -\tan\alpha \\ \tan\alpha & 1 \end{bmatrix} = \cos^2\alpha\begin{bmatrix} 1-\tan^2\alpha & -2\tan\alpha \\ 2\tan\alpha & 1-\tan^2\alpha \end{bmatrix}$

$1 + \tan^4\alpha - 2\tan^2\alpha + 4\tan^2\alpha$

$\cos^2\alpha\left((1-\tan^2\alpha)(1-\tan^2\alpha) + 4\tan^2\alpha\right) = \frac{1}{1+\tan^2\alpha}(1+\tan^2\alpha)^2$

$(1+\tan^2\alpha)^2$

اگر در تمرین ها هوا است!

تست ۸ – اگر $A=\begin{bmatrix} ۵+a & b & c \\ a & ۵+b & c \\ a & b & ۵+c \end{bmatrix}$ با شرط $a+b+c=۷$، دترمینان ماتریس $(۵A^{-1})$ کدام می‌باشد؟ (ریاضی خارج ۹۲)

ضرب درایه‌های قطر اصلی = بالامثلثی - پایین مثلثی = دترمینان ماتریس قطری

۱) $\frac{۵}{۱۲}$ ۲) $\frac{۵}{۷}$ ۳) $\frac{۲۵}{۱۲}$ ۴) $\frac{۲۵}{۷}$

$|kA| = k^n|A|$

$\begin{bmatrix} ۵ & ۰ & ۷ \\ ۰ & ۵ & ۷ \\ ۰ & ۰ & ۱۲ \end{bmatrix} = ۵\begin{vmatrix} ۵ & ۷ \\ ۰ & ۱۲ \end{vmatrix} = ۵\times۵\times۱۲$

$|۵A^{-1}| = ۵^۳\times|A^{-1}| = ۵^۳\frac{۱}{|A|} = \frac{\cancel{۵^۳}}{\cancel{۵}\times\cancel{۵}\times۱۲} = \frac{۵}{۱۲}$

تست ۹ – اگر $(I+A)^{-1} = \begin{bmatrix} -۳ & -۵ \\ -۱ & -۲ \end{bmatrix}$، در این صورت $|۲A^۲|$ کدام است؟

$+۶-(+۵)=۱$

۱) ۷۲ ۲) ۹۸ ۳) ۱۴۴ ۴) ۱۹۶

$I+A = \begin{bmatrix} -۲ & ۵ \\ ۱ & -۳ \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} + A = \begin{bmatrix} -۲ & ۵ \\ ۱ & -۳ \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} -۳ & ۵ \\ ۱ & -۴ \end{vmatrix}$

$۱۲-۵=۷$

$|۲A^۲| = ۲^۲|A|^۲ = ۴\times۴۹ = ۱۹۶$

تست ۱۰ – اگر A ماتریس مربعی مرتبه‌ی n و $B = I_n - A$ باشد، ماتریس $A^۲+AB+B$ همواره برابر کدام است؟

$B+A=I$

$A = B - I$

۱) B ۲) A ۳) AB ۴) I_n

$AB - A$

$A+B=I$

$\times A \therefore A^۲ = AB - AI$

$A^۲ = AB - A$

$AB = A - A^۲$

$AB + A^۲ = A$

تست ۱۱ – اگر برای ماتریس A بدانیم $A^2 = 3A + I$ آنگاه حاصل $A(A - 2I)$ جیست؟

۱) $2A - I$ ۲) $5I - A$ ۳) $2A + I$ ۴) $5A + I$

$A^2 - 2A = A + I$

$A(A - 2I) = A + I$

$A^2 - A = 2A + I$

$A^2 - 3A = A(A - 3I)$

$AI = IA = A$

$A^2 - A = A(A - I)$

$I \times I = I$

$I^n = I$

$A(A-2I)(A-2I) = A^2 - I \times A - 2I^2 = A^2 - A - 2I = 2A + I - 2I = 2A - I$

تست ۱۲ – اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ باشد، حاصل $\frac{1}{5}(A^2 + 2A + I)$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -3 & -3 \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$

$I^n = I$

$(A+I)^2$

$\frac{1}{5}(A+I)^2$

$A + I = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$

$AI = IA = A$

تعویض پذیر $= AB = BA \rightarrow$ اتفاق

$\frac{1}{5}(A+I)^2 = \begin{bmatrix} 10 & 10 \\ 15 & 15 \end{bmatrix} \times \frac{1}{5}$

تست ۱۳ – اگر $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ (ماتریس دوران به زاویهٔ θ در جهت مثلثاتی حول مبدأ) ماتریس دوران به زاویهٔ $\frac{\pi}{3}$ و $P = 2\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$ باشد، دترمینان ماتریس $|(P^{-1}AP)^6|$ کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۱)

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

$= \cos^2\theta + \sin^2\theta$

$(|P^{-1}||A||P|)^6$

$\left(\frac{1}{|P|} \times |A| \times |P|\right)^6 = 1^6$

ماتریس دوران نسبت به زاویه α

$R_\alpha = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \rightarrow (R_\alpha)^n = R_{n\alpha}$

$$\sin^{۲}\theta + \cos^{۲}\theta = 1$$

$$1 + \tan^{۲}\theta = \frac{1}{\cos^{۲}\theta}$$

$$1 + \cot^{۲}\theta = \frac{1}{\sin^{۲}\theta}$$

$$\tan\theta \times \cot\theta = 1$$

$$\tan\theta \times \overset{\cot\theta}{\cancel{\tan}}(۹۰-\theta) = 1$$

$$\tan\theta = \cot(۹۰-\theta)$$

$$\sin\theta = \cos(۹۰-\theta)$$

$$\sin ۲\theta = ۲\sin\theta\cos\theta$$

$$\cos ۲\theta = \cos^{۲}\theta - \sin^{۲}\theta$$

$$= ۲\cos^{۲}\theta - 1$$

$$= 1 - ۲\sin^{۲}\theta$$